

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

EL- EL BİLEĞİ REHABİLİTASYONU İÇİN DİNAMİK KONTROLLÜ
ROBOT GELİŞTİRİLMESİ

DOKTORA TEZİ

Musa MARUL

EKİM 2024

TRABZON



KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

EL- EL BİLEĞİ REHABİLİTASYONU İÇİN DİNAMİK KONTROLLÜ
ROBOT GELİŞTİRİLMESİ

Musa MARUL

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"DOKTOR (MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 13 / 09 / 2024

Tezin Savunma Tarihi : 09 / 10 / 2024

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Nurhan GÜRSEL ÖZMEN

Trabzon 2024

ÖNSÖZ

“El- El Bileği Rehabilitasyonu İçin Dinamik Kontrollü Robot Geliştirilmesi” isimli bu tez Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Makine Mühendisliği Anabilim Dalı, Doktora Programında hazırlanmıştır.

Tez çalışmam boyunca merak, gözlem, iletişim kanallarını sürekli açık tutma, problemlere çözüm geliştirme ve değerlendirme konularında bana rehberlik eden ve bilim insanı olma yolundaki adımlarımı atarken kıymetli bilgileriyle ve tecrübesiyle yolumu aydınlatan danışman hocam Doç. Dr. Nurhan GÜRSEL ÖZMEN’e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Doktora tezinin ortaya çıkmasında yapıcı eleştirileri ve önerileriyle tezime katkıları bulunan Prof. Dr. Levent GÜMÜŞEL’e ve Fizyoterapi ve Rehabilitasyon alanında Doç. Dr. Arzu ERDEN’e teşekkür ederim.

Tez çalışması sürecinde bana desteklerini sunan Karadeniz Teknik Üniversitesi Rektörlüğü’ne, Artvin Çoruh Üniversitesi Rektörlüğü’ne ve Borçka Acarlar Meslek Yüksekokulu’ndaki arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Bu doktora tez çalışmasının bundan sonraki bilimsel çalışmalara katkı sağlamasını temenni ederim.

Bu çalışma Karadeniz Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi tarafından desteklenmiştir. Proje numarası: 10664.

Musa MARUL

Trabzon 2024

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Doktora Tezi olarak sunduğum “El- El Bileği Rehabilitasyonu İçin Dinamik Kontrollü Robot Geliştirilmesi” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Doç. Dr. Nurhan GÜRSEL ÖZMEN’in sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 09/10/2024

Musa MARUL

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	III
TEZ ETİK BEYANNAMESİ.....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ÖZET	VII
SUMMARY	VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ	IX
TABLolar DİZİNİ	XVI
SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ	XVII
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. El - El Bileği Rehabilitasyon Robotları.....	3
1.2. El - El Bileğinin Anatomik Yapısı	11
1.3. El - El Bileğinde Egzersiz Hareketleri	13
1.4. Denetleyiciler	15
1.4.1. Kayan Kipli Kontrol (KKK)	16
1.4.2. Hiyerarşik Kayan Kipli Kontrol (HKKK)	18
1.4.3. Oransal İntegral Türevsel Kontrol (PID)	19
1.4.4. Hiyerarşik PID Kontrol (HPID)	19
1.5. Optimizasyon Algoritmaları	20
1.5.1. Parçacık Sürü Optimizasyon (PSO) Algoritması	20
1.5.2. Diferansiyel Gelişim Optimizasyonu (DGO) Algoritması	22
1.6. Rehabilitasyon Robotunun Tasarımı	23
1.7. Tezin Kapsamı	24
1.8. Tez Çalışmasının Amacı ve Literatüre Katkıları	25
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR	26
2.1. Mekanizmanın Matematiksel Modelinin Çıkarılması	26
2.1.1. 16 SD'li Sistemin Modellenmesi	26
2.1.2. 18 SD'li Sistemin Modellenmesi	34
2.2. Prototip Dış İskelet Robotunun Üretimi.....	39
2.2.1. Kontrol Kutusu.....	41
2.2.2. Kontrol Paneli	43
2.2.3. Kullanıcı Arayüzü	44
2.2.4. Dış İskelet Mekanizması.....	45

2.2.5. Uç efektör.....	45
3. BULGULAR.....	47
3.1. Benzetim Çalışmaları	47
3.1.1. Denetleyici Tasarımı	47
3.1.2. 16 SD’li Sistemin Benzetimi.....	55
3.1.3. 18 SD’li Sistemin Benzetimi.....	72
3.2. Deneysel Çalışmalar	88
3.2.1. Pasif ROM Egzersizi	94
3.2.2. İzometrik ROM Egzersizi.....	100
3.2.3. Aktif ROM Egzersizi.....	107
4. TARTIŞMA	114
5. SONUÇLAR	117
6. ÖNERİLER.....	119
7. KAYNAKLAR	120
8. EKLER	128
ÖZGEÇMİŞ	

Doktora Tezi

ÖZET

EL-EL BİLEĞİ REHABİLİTASYONU İÇİN DİNAMİK KONTROLLÜ ROBOT GELİŞTİRİLMESİ

Musa MARUL

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Makine Mühendisliği Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Nurhan GÜRSEL ÖZMEN
2024, 128 Sayfa, 97 Sayfa Ek

Bu tez kapsamında, el-el bileği rehabilitasyonu için 18 serbestlik dereceli dinamik kontrollü bir robot geliştirilmiştir. El-el bileği rehabilitasyon robotlarının modellenmesi, kontrolü ve üretimi konularında literatürde pek çok çalışma olmasına rağmen, genellikle düşük serbestlik dereceli sistemlere ve geleneksel kontrol tekniklerine odaklanılmıştır. Bu çalışmada geliştirilen robot kişinin hayat kalitesini arttıran, klinik ve ev ortamında kullanılabilen, tedaviyi destekleyici, taşınabilir, giyilebilir ve kişiye uyarlanabilir bir yapıdadır. Robotun pasif, izometrik ve aktif egzersiz hareketlerini yapabilmesi amaçlanmıştır. Robotun matematiksel modeli basitleştirilmiş Lagrange Metodu ile elde edilmiştir. MATLAB/Simulink ortamında sistemin benzetimi yapılmış, eklemlerin kontrolü için HKKK ve HPID yöntemleri denenmiştir. Bu kontrol teknikleri bozucu etkisi altında Parçacık Sürü Optimizasyonu (PSO) ve Diferansiyel Gelişim Optimizasyonu (DGO) ile optimize edilmiştir. Prototip üretimi gerçekleştirilen dinamik kontrollü robot, sağlıklı bir kullanıcı üzerinde pasif, izometrik ve aktif egzersizler için test edilmiştir. Rehabilitasyon robotunun konum ve tork kontrolü yapılmıştır. Robot benzetim çalışmalarının sonuçları ve deneysel sonuçlar karşılaştırmalı olarak sunulmuştur. Sonuç olarak, geliştirilen rehabilitasyon robotunun planlanan egzersizleri başarılı bir şekilde gerçekleştirdiği görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: El-el bileği rehabilitasyon robotu, Robotik rehabilitasyon, Yörünge kontrol, Hiyerarşik Kayan Kipli Kontrol (HKKK), Hiyerarşik PID (HPID) kontrol

PhD. Thesis

SUMMARY

DEVELOPMENT OF A DYNAMICALLY CONTROLLED ROBOT FOR HAND- WRIST REHABILITATION

Musa MARUL

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mechanical Engineering Graduate Program
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Nurhan GÜRSEL ÖZMEN
2024, 128 Pages, 97 Pages Appendix

In this thesis, an 18-degree-of-freedom dynamically controlled robot has been developed for hand-wrist rehabilitation. Although there are many studies in the literature on modeling, control and production of hand-wrist rehabilitation robots, they have generally focused on low-degree-of-freedom systems and traditional control techniques. The robot developed in this study is portable, wearable and adaptable to the person, which increases the quality of life of the person, can be used in clinical and home environments, and supports treatment. The robot is intended to perform passive, isometric and active exercise movements. The mathematical model of the robot is obtained by the simplified Lagrange Method. The system is simulated in the MATLAB/Simulink environment, and HSMC and HPID methods are tried for the control of the joints. These control techniques are optimized with Particle Swarm Optimization (PSO) and Differential Evolution Optimization (DEO) under the effect of disturbance. The dynamically controlled robot, whose prototype was produced, was tested on a healthy user for passive, isometric and active exercises. The position and torque control of the rehabilitation robot was performed. The results of the robot simulation studies and the experimental results were presented comparatively. As a result, it was seen that the developed rehabilitation robot successfully performed the planned exercises.

Key Words: Hand-wrist rehabilitation robot, Robotic rehabilitation, Trajectory control, Hierarchical Sliding Mode Control (HSMC), Hierarchical PID (HPID) control

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 1. İletim sistemine göre el robotu örnekleri. (a) tel, (b) pnömatik, (c) hidrolik (d) esnek robot sistemidir.....	5
Şekil 2. Rehabilitasyon robotlarının sınıflandırılması	6
Şekil 3. Ülkelere göre dünya tıbbi cihaz sektöründe yaratılan katma değer	10
Şekil 4. Homonkulus.....	11
Şekil 5. Elin anatomisi	12
Şekil 6. Dış iskelet tasarımı için anatomik hareket yapısı.....	12
Şekil 7. El-el bileğinin egzersiz diyagramı.	14
Şekil 8. Egzersiz akış şeması.....	15
Şekil 9. Kayma düzlemi yörüngesi	17
Şekil 10. DGO algoritması akış diyagramı	23
Şekil 11. 16 SD'li el-el bileğinin hareketi.....	27
Şekil 12. 16 SD'li sistemde tek uzvun konumu.....	28
Şekil 13. 16 SD'li sistemde işaret parmağı modeli.....	30
Şekil 14. 18 SD'li el-el bileğinin hareketi.....	35
Şekil 15. 18 SD'li el-el bileğinin modeli	36
Şekil 16. Rehabilitasyon robotunun üç boyutlu modeli, kontrol ünitesi (1), kontrol paneli (2), robot manipülatörü (3) ve uç efektör (4)	40
Şekil 17. Robotun kinematik yapısı	41
Şekil 18. Kontrol kutusu imalatı.....	42
Şekil 19. Tork verisi için oluşturulan Simulink blok diyagramı	43
Şekil 20. Raspberry Pi 4 8G mikro kart bilgisayar ve Raspberry Pi 7" Smarti Pi Touch Pro	43
Şekil 21. LCD kullanıcı arayüzü	44
Şekil 22. Robot Manipülatörü a) Katı model b) İmal edilen mekanizma	45
Şekil 23. Uç efektör elemanları	46

Şekil 24.El üzerinde dört çubuk mekanizmasına sahip iletim sistemi.....	46
Şekil 25. Uç efektör	46
Şekil 26. Tüm sistemin Simulink görüntüsü	48
Şekil 27. Üçüncü adım denetleyici kontrol şeması.....	49
Şekil 28. Dördüncü adım denetleyici kontrol şeması	49
Şekil 29. Beşinci adım denetleyici kontrol şeması	50
Şekil 30. Altıncı adım denetleyici kontrol şeması	52
Şekil 31. Yedinci adım denetleyici kontrol şeması.....	53
Şekil 32. Sekizinci adım denetleyici kontrol şeması	54
Şekil 33. Dokuzuncu adım denetleyici kontrol şeması.....	54
Şekil 34. Onuncu adım denetleyici kontrol şeması.....	55
Şekil 35. 16 SD için bileğin bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlemi grafiği.....	60
Şekil 36. 16 SD için işaret parmağının MCP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği	61
Şekil 37. 16 SD için işaret parmağının PIP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği	62
Şekil 38. 16 SD için işaret parmağının DIP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği	62
Şekil 39. 16 SD için orta parmağın MCP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği	63
Şekil 40. 16 SD için orta parmağın PIP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği.....	64
Şekil 41. 16 SD için orta parmağın DIP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği.....	64
Şekil 42. 16 SD için yüzük parmağının MCP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği	65
Şekil 43. 16 SD için yüzük parmağının PIP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği	66
Şekil 44. 16 SD için yüzük parmağının DIP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği	66

Şekil 45. 16 SD için küçük parmağın MCP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği	67
Şekil 46. 16 SD için küçük parmağın PIP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği	68
Şekil 47. 16 SD için küçük parmağın DIP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği	68
Şekil 48. 16 SD için baş parmağın TMC falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği	69
Şekil 49. 16 SD için baş parmağın MCP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği	70
Şekil 50. 16 SD için baş parmağın IP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği.....	70
Şekil 51. 18 SD için bileğin fleksiyon-ekstansiyon bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği	76
Şekil 52. 18 SD için bileğin radyal/ulnar bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği.....	76
Şekil 53. 18 SD için işaret parmağının MCP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği	77
Şekil 54. 18 SD için işaret parmağının PIP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği	78
Şekil 55. 18 SD için işaret parmağının DIP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği	78
Şekil 56. 18 SD için orta parmağın MCP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği	79
Şekil 57. 18 SD için orta parmağın PIP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği.....	80
Şekil 58. 18 SD için orta parmağın DIP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği.....	80
Şekil 59. 18 SD için yüzük parmağının MCP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği	81
Şekil 60. 18 SD için yüzük parmağının PIP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği	81
Şekil 61. 18 SD için yüzük parmağının DIP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği	82

Şekil 62. 18 SD için küçük parmağının MCP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği	83
Şekil 63. 18 SD için küçük parmağının PIP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği	83
Şekil 64. 18 SD için küçük parmağının DIP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği	84
Şekil 65. 18 SD için baş parmağın TMC falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği	85
Şekil 66. 18 SD için baş parmağın MCP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği.....	85
Şekil 67. 18 SD için baş parmağın IP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği.....	86
Şekil 68. 18 SD için baş parmağın Abdüksiyon-Addüksiyon falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği	86
Şekil 69. Prototip üretimi gerçekleştirilen dinamik kontrollü rehabilitasyon robotu	90
Şekil 70. DC motorların çalışmasına ait akış diyagramı.....	91
Şekil 71. ROM egzersiz diyagramı.....	92
Şekil 72. El bileği fleksiyon-ekstansiyon pasif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork	94
Şekil 73. El bileği radyal-ulnar pasif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork.....	94
Şekil 74. İşaret parmağı MCP pasif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork.....	95
Şekil 75. İşaret parmağı PIP pasif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork	95
Şekil 76. İşaret parmağı DIP pasif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork	95
Şekil 77. Orta parmak MCP pasif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork	96
Şekil 78. Orta parmak PIP pasif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork	96
Şekil 79. Orta parmak DIP pasif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork	97

Şekil 80. Yüzük parmak MCP pasif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork.....	97
Şekil 81. Yüzük parmak PIP pasif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork	97
Şekil 82. Yüzük parmak DIP pasif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork.....	97
Şekil 83. Küçük parmak MCP pasif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork.....	98
Şekil 84. Küçük parmak PIP pasif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork	98
Şekil 85. Küçük parmak DIP pasif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork.....	99
Şekil 86. Baş parmak TMC pasif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork	99
Şekil 87. Baş parmak MCP pasif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork	99
Şekil 88. Baş parmak IP pasif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork	100
Şekil 89. Baş parmak abdüksiyon-addüksiyon pasif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork.....	100
Şekil 90. El bileği fleksiyon-ekstansiyon izometrik egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork.....	101
Şekil 91. El bileği radyal-ulnar izometrik egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork.....	101
Şekil 92. İşaret parmağı MCP izometrik egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork.....	102
Şekil 93. İşaret parmağı PIP izometrik egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork.....	102
Şekil 94. İşaret parmağı DIP izometrik egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork.....	102
Şekil 95. Orta parmak MCP izometrik egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork.....	103
Şekil 96. Orta parmak PIP izometrik egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork.....	103

Şekil 97. Orta parmak DIP izometrik egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork.....	103
Şekil 98. Yüzük parmak MCP izometrik egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork.....	104
Şekil 99. Yüzük parmak PIP izometrik egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork.....	104
Şekil 100. Yüzük parmak DIP izometrik egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork.....	104
Şekil 101. Küçük parmak MCP izometrik egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork.....	105
Şekil 102. Küçük parmak PIP izometrik egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork.....	105
Şekil 103. Küçük parmak DIP izometrik egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork.....	105
Şekil 104. Baş parmak TMC izometrik egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork.....	106
Şekil 105. Baş parmak MCP izometrik egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork.....	106
Şekil 106. Baş parmak IP izometrik egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork.....	106
Şekil 107. Baş parmak abduksiyon-adduksiyon izometrik egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork.....	106
Şekil 108. El bileği fleksiyon-ekstansiyon aktif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork	108
Şekil 109. El bileği radyal-ulnar aktif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork.....	108
Şekil 110. İşaret parmağı MCP aktif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork.....	108
Şekil 111. İşaret parmağı PIP aktif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork.....	109
Şekil 112. İşaret parmağı DIP aktif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork.....	109
Şekil 113. Orta parmak MCP aktif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork.....	109

Şekil 114. Orta parmak PIP aktif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork	109
Şekil 115. Orta parmak DIP aktif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork	110
Şekil 116. Yüzük parmak MCP aktif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork.....	110
Şekil 117. Yüzük parmak PIP aktif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork.....	110
Şekil 118. Yüzük parmak DIP aktif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork.....	111
Şekil 119. Küçük parmak MCP aktif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork.....	111
Şekil 120. Küçük parmak PIP aktif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork.....	111
Şekil 121. Küçük parmak DIP aktif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork.....	111
Şekil 122. Baş parmak TMC aktif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork	112
Şekil 123. Baş parmak MCP aktif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork	112
Şekil 124. Baş parmak IP aktif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork	112
Şekil 125. Baş parmak abduksiyon-adduksiyon aktif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork.....	113

TABLÖLAR DİZİNİ

Sayfa No

Tablo 1. Rehabilitasyon robotlarının farklı sınıflandırma parametreleri	8
Tablo 2. 16 SD'li sistem için kullanılan parametreler	27
Tablo 3. 18 SD'li sistemin parametreleri	34
Tablo 4. Enkoderli DC motor teknik özellikleri.....	41
Tablo 5. 16 SD'li sistemin başlangıç açısı şartları (rad)	56
Tablo 6. 16 SD'li model için kontrolcü parametreleri	56
Tablo 7. PID katsayı değerleri.....	57
Tablo 8. Benzetimde kullanılan el modeline ait kütle ve uzunluk parametreleri	57
Tablo 9. 16 SD'li sistem için HKKK optimizasyon parametreleri.....	58
Tablo 10. 16 SD'li sistem için PID optimizasyon parametreleri.....	58
Tablo 11. 16 SD ve 18 SD'li sistem için yörünge takip parametreleri	59
Tablo 12. 16 SD'li sistemin benzetim parametrelerine ait sonuçlar.....	71
Tablo 13. 18 SD'li sistem açısı başlangıç şartları (rad)	72
Tablo 14. 18 SD'li model parametreleri	73
Tablo 15. 18 SD'li sistem için algoritma arama uzayı.....	73
Tablo 16. 18 SD'li sistem için HKKK optimizasyon parametreleri.....	74
Tablo 17. 18 SD'li sistemi için HPID optimizasyon parametreleri.....	75
Tablo 18. 18 SD'li sistemin benzetim parametrelerine ait sonuçlar.....	87
Tablo 19. Deneysel ROM egzersiz şartları	93

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

KKK	: Kayan kipli kontrol
PID	: Oransal integral türevsel kontrol
K_p	: Oransal kazanç
K_i	: İntegral kazanç
K_d	: Türevsel kazanç
BT	: Bilgisayarlı tomografi
MR	: Manyetik rezonans
S	: Kayma düzlemi
PSO	: Parçacık sürü optimizasyonu
DGO	: Diferansiyel gelişim optimizasyonu
$HKKK$	: Hiyerarşik kayan kipli kontrol
$HPID$	: Hiyerarşik oransal integral türevsel kontrol
ξ	: Ksi
$e(t)$	: Zamana bağlı hata değeri
$r(t)$	: Zamana bağlı referans değeri
$y(t)$	: Zamana bağlı çıkış değeri
$U(t)$	: Zamana bağlı istenen giriş değeri
L	: Lagrange fonksiyonu
L_I	: İşaret parmağı Lagrange fonksiyonu
L_M	: Orta parmak Lagrange fonksiyonu
L_R	: Yüzük parmağı Lagrange fonksiyonu
L_L	: Küçük parmak Lagrange fonksiyonu
L_T	: Baş parmak Lagrange fonksiyonu
T	: Kinetik enerji
V	: Potansiyel enerji
τ	: Tork
K	: Uzuvların toplam Kinetik enerjisi
P	: Uzuvların toplam Potansiyel enerjisi
SD	: Serbestlik derecesi
C	: Sabit katsayı
φ	: fi açısı

θ	: Theta açısı
th	: Theta kısaltması
m	: Kütle
g	: Yer çekim ivmesi
h	: Yükseklik
$s\theta$	: $\sin(\theta)$
$c\theta$	: $\cos(\theta)$
$c(\theta_1 - \theta_2)$	: $\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2$
L_{WTV1}	: Bilek birinci kütle Lagrange denklemi
L_{ITV2}	: İşaret parmağı ikinci kütle Lagrange denklemi
L_{ITV3}	: İşaret parmağı üçüncü kütle Lagrange denklemi
L_{ITV3}	: İşaret parmağı dördüncü kütle Lagrange denklemi
L_{MTV5}	: Orta parmak beşinci kütle Lagrange denklemi
L_{MTV6}	: Orta parmak altıncı kütle Lagrange denklemi
L_{MTV7}	: Orta parmak yedinci kütle Lagrange denklemi
L_{RTV8}	: Yüzük parmak sekizinci kütle Lagrange denklemi
L_{RTV9}	: Yüzük parmak dokuzuncu kütle Lagrange denklemi
L_{RTV10}	: Yüzük parmak onuncu kütle Lagrange denklemi
L_{LTV11}	: Küçük parmak on birinci kütle Lagrange denklemi
L_{LTV12}	: Küçük parmak on ikinci kütle Lagrange denklemi
L_{LTV13}	: Küçük parmak on üçüncü kütle Lagrange denklemi
L_{TTV14}	: Baş parmak on dördüncü kütle Lagrange denklemi
L_{LTV15}	: Baş parmak on beşinci kütle Lagrange denklemi
L_{LTV16}	: Baş parmak on altıncı kütle Lagrange denklemi
$2B$	: İki boyutlu koordinat sistemi
$3B$	: Üç boyutlu koordinat sistemi
$ITEA$	: Mutlak hatanın zaman ağırlıklı integrali
ROM	: Hareket Aralığı
PWM	: Darbe Genişlik Modülasyonu
Ra-Ul	: Radyal – Ulnar devinim hareketi
Ab/Ad	: Abdüksiyon-Addüksiyon hareketi
MCP	: Metakarpofalangeal

PIP	: Proksimal interfalangeal
DIP	: Distal interfalangeal
TMC	: Trapezio metakarpalangeal
IP	: Interfalangeal
ITAE	: Zaman ile çarpılmış hatanın mutlak değerinin integrali



1. GENEL BİLGİLER

Dünya nüfusu giderek yaşlanmakta ve yaşlı bireylerin fiziksel açıdan bazı fonksiyonlarında zayıflama veya gerileme olmaktadır. Ayrıca yaşanan çeşitli kaza veya doğal afetler sonucunda vücudun el, kol, bacak vb. kısmında meydana gelen yaralanmalar artmaktadır. Bu hastaların, kaybettikleri yeteneklerini geri kazanabilmeleri ve yeniden normal günlük aktivitelerini devam ettirebilmeleri için zamanında ve kalıcı bir rehabilitasyona ihtiyaçları vardır.

İnsan, çevresindeki nesnelerle ilk iletişimini eli ve bileği ile dokunarak veya kavrayarak yapmaktadır. Bu nedenle insanın eli ve bileği çok önemli uzuvlarından. İnsanlığın ilk dönemlerinden beri uzuvların temel görevlerini yerine getirmesine yardımcı araçlar geliştirilmeye çalışılmış, günümüz teknolojisinde de bu amaçla rehabilitasyon robotları kullanılmaya başlanmıştır (Lince, 2016). Geliştirilen bu robotlar mühendislik uygulama alanında büyük değişimleri beraberinde getirmiştir. İnsan eli ve el bileği gibi karmaşık yapıya sahip rehabilitasyona yardımcı veya rehabilitasyon sürecini yürüten robotlarda kullanılan ileri mühendislik hesaplamaları ve model tasarımı her geçen gün gelişmektedir. Bu robotların geliştirilmeye açık en büyük alanı ise gerçek bir eli ve el bileğini temsil eden tüm sisteminin model eksikliğidir. Geliştirilmekte olan modeller ise sınırlı sayıda hareket kabiliyeti olan veya tek tip eyleyicilere bağlı sistemlerdir. Sınırlı serbestlik dercesine bağlı sistemler, gerçek bir insan el-el bileği hareketini temsil etmekte eksik kalmaktadır. İnsan eli-el bileğinin hareket açıklıklarının kişiden kişiye değişmesinden dolayı uygulanacak tedavi de farklılıklar göstermektedir. Fiziksel tedavi ve rehabilitasyon alanında terapötik egzersizler yani kişinin ihtiyacına özel tasarlanmış egzersizler önemli rol oynamaktadır (Akdoğan et al., 2018; Sabater-Navarro, Garcia, Ramos, Camayo, & Vivas, 2015; Uğurlu, 2008). Doktor veya fizyoterapistlerin hareket açıklıklarını ölçmesi ile robotların hareket açıklıklarını ölçmesinde farklılıklar oluşabilmektedir. Rehabilitasyon amaçlı üretilen akıllı robot sistemlerinde bu farkları ortadan kaldıracak yeni çözümler üretilmektedir (Aktan & Akdoğan, 2021).

Dünya Sağlık Örgütü (DSÖ) tıbbi cihazları, yaşam bilimleri ve sağlık hizmetleri çerçevesinde bölgesel ve ülkesel olarak mevcudiyet, erişilebilirlik, uygunluk ve hizmet olarak satın alınabilirlik unsurları bakımından çok önemli bir bileşen olarak kabul etmektedir (WHO, 2010). Tıbbi cihaz pazarındaki gelişmelere ve Ar-Ge çalışmalarına bakıldığında, nörolojik bozukluk, kaza vb. hastalıkların cihaza dayalı tedavisinde yeni uygulamalara yer

verileceği öngörülmektedir. Ülkelerin ürettiği tıbbi cihaz sayısı, hastalıkların tedavi yöntemlerinde gelişmişliğini göstermektedir (WHO, 2022). Tıbbi cihaz sektöründe yeni teknolojiler uygulanarak temel fonksiyonlarını koruyan, basitleştirilmiş, erişilebilir, çok amaçlı, tüketici gereksinimlerine uygun ve ucuz ürünlerin üretilmesi önem taşımaktadır.

El-el bileğinin rehabilitasyonu zahmetli bir iştir çünkü el birçok hareket serbestliğine sahiptir. Tasarlanan sistemin takılabilir veya giyilebilir bir dış iskelet şeklinde olması ve destek cihazının küçük olması gerekmektedir. Şimdiye kadar Fonksiyonel Elektriksel Stimülasyon (FES) tabanlı el rehabilitasyon cihazları, sanal gerçeklik (VR) tabanlı felç rehabilitasyonu ve telerehabilitasyon ile parmakların işlevi üzerine araştırmalar sunulmuştur (Sumner et al., 2023).

Bununla birlikte, bu cihazların çoğu yalnızca bilek ve parmakların fleksiyonuna/ekstansiyonuna veya başparmak abdüksiyon/addüksiyon hareketlerine yardımcı olmaktadır. El bozukluğu olan hastaların yaşam kalitesini artırmak için, manipülasyon işlevini ve düğmeleri çevirmek veya çatal tutmak gibi ince hareketleri rehabilite etmeye yönelik bir terapi gereklidir. Bu nedenle sadece fleksiyon/ekstansiyona değil aynı zamanda abdüksiyon-addüksiyona da yardımcı olacak robotik bir cihaza ihtiyaç vardır. Böyle bir cihazın bir diğer önemli gereksinimi, başparmağın hareketine yardımcı olmaktır. Başparmağın uygulanan kuvvete karşı koyabilmesi gerekmektedir. Ayrıca el bileğinin palmar fleksiyonu/dorsifleksiyonu ve ön kolun pronasyon/supinasyonu manipülasyon fonksiyonlarında ve ince hareketlerde önemli rol oynamaktadır (Ueki et al., 2012).

Genel olarak el rehabilitasyon robotları standartlaştırılmış el hareketlerini yapmak için birbirinden bağımsız, tek eyleyicili ya da elin kısmi incelenmesi şeklinde yapılmaktadır. Elin tüm fonksiyonlarını içeren matematiksel denklemleri kullanan, kontrol stratejisi doğrusal olmayan robot tasarımları sınırlı sayıdadır. Bu eksikliğin temel nedeni ise doğrusal olmayan kontrolün daha zor olmasıdır (Chapra, 2012). Bu durumları çözmek için kontrol stratejisi önemli hale gelmektedir. Ağır iş yükü olan ve ileri seviyede mühendislik hesaplamaları gerektiren yöntemlerin kullanılmasına imkân sağlayan bilgisayarlı çözüm yöntemleri bu sistemlerin çözümünü kolaylaştırmaktadır. Doğrusal olmayan kontrol teorisi günümüzde bilgisayar teknolojisinin gelişmesiyle eski zamanlara göre daha kolay çözümlenebilmektedir. İleri seviyede adi diferansiyel denklemleri bilgisayar destekli simülasyon yöntemleri ile kısa sürede çözümlenebilmektedir.

1.1. El - El Bileği Rehabilitasyon Robotları

Rehabilitasyon, bireylerin fizyolojik veya anatomik bir bozukluğuna veya yetersizliğine bağlı olarak çevresi ile kısıtlı temas halinde olmaları durumunda fiziksel, psikolojik, sosyal ve mesleki durumu ile meslek dışı aktivitelerinde mümkün olan en üst fonksiyonel seviyeye getirilmesine denmektedir (İnal, 2003). Bu nedenle, rehabilitasyonda normal eklem hareketlerinin ve kuvvetinin geri kazanılması için gereken egzersizler ve germe hareketleri esas alınır (Akdoğan, 2007). El rehabilitasyon cihazları da kazalar, travmalar veya hastalık sonrasında elde oluşan fonksiyon kayıpları, eklem sınırlamaları, kas zayıflıkları gibi problemlerin giderilmesini amaçlamaktadır. Günümüzde genellikle el rehabilitasyonu medikal ortamlarda fizyoterapist eşliğinde sınırlı sayıdaki pahalı medikal cihazlarla yapılmaktadır. Yaygın kullanımda olan el-el bileği medikal cihazları sabitlenmiş veya güç kaynağına bağlı çalışmakta, büyük boyutlu ve ağır olmakla birlikte taşınabilir özellikleri de bulunmamaktadır. Rehabilitasyon cihazlarında ağırlık ve boyutun ayarlanması çok önemlidir (Alain, 2014). Ergonomik olmaması durumunda rehabilitasyon süreci olumsuz etkilenmektedir (Chu & Patterson, 2018; Noronha et al., 2022). Bu sebeple rehabilitasyon cihazlarının kolay erişilebilir olması, fizyoterapinin kesintisiz devam etmesi aranan özelliklerin başında gelmektedir. Taşınabilir ve fonksiyonel cihazlar önem kazanmaya başlamıştır. Bu nedenle doğru egzersiz ve güçlü kavramalar yapabilmek için tasarlanan dış iskelet mekanizmaları elin doğal yapısına benzetilmeye çalışılmaktadır (Fontana, Dettori, Salsedo, & Bergamasco, 2009; Üzgün, 2015; Wolbrecht, Morse, Perry, & Reinkensmeyer, 2016).

El rehabilitasyon cihazları ayrıca elin falanks bölgelerindeki hareketleri geri kazandırmaya odaklanmaktadır. Bu alanda edinilmiş patent çalışmaları mevcuttur. Bu yapılan çalışmalarda özellikle el ve el bileği rehabilitasyonu üzerine odaklanılmıştır (Akdoğan, 2015; Becchi, Sale, Sieklicki, & Stellin, 2017; Beenken, 1994; Deshpande & Priyanshu Agarwal, 2016; Fausti & Seneci, 2011; Kelly, 2016; Michael Kam Fai Tsui & Kai Yu Tong, 2017; Kai Yu Tong et al., 2013). Çalışmalarda bazen elin tendon kabiliyetinin geri kazandırılması bazen de kasların kuvvetlendirilmesi ön plana çıkmaktadır. Bu cihazlar tendon egzersiz çalışmalarını kolaylaştırmaktadır (Jamshed Iqbal, Khan, Tsagarakis, & Caldwell, 2014; K. Y. Tong et al., 2010).

Rehabilitasyon robotlarının uygulanabilir olması önem arz etmektedir (Chen Chen et al., 2013). Son yıllarda piyasaya sunulan taşınabilir sistemler el-el bileği rehabilitasyonu

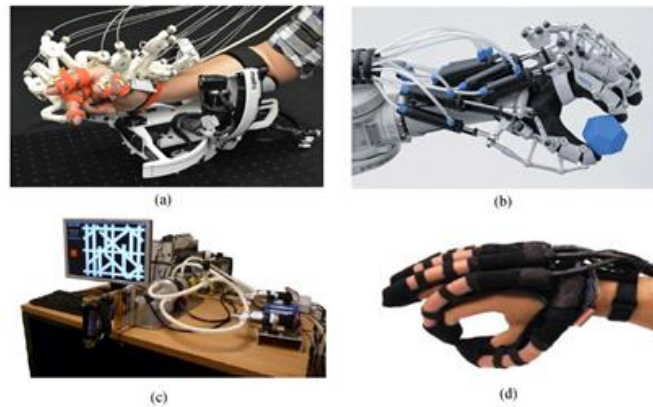
alanında geleneksel yöntemlere alternatif oluşturmaktadır (Dittli et al., 2022). Ayrıca günümüzde tıbbi merkezlerde rehabilitasyon performans değerlendirmesi yaygın şekilde robotik sistemlerle yapılmaktadır. Hatta robot destekli sistemlerin fiziksel tedaviye kıyasla daha verimli olduğu ve hem rehabilitasyon merkezlerinde hem de ev ortamlarında düşük maliyetle kullanılmasına imkan sağladığı klinik çalışmalarla ortaya konulmuştur (Barkana & Özkul, 2012).

Rehabilitasyonda kullanılan robotlar yardımcı (asistif) robotlar, protez robotlar ve terapatik robotlar şeklinde sınıflandırılabilir. Bu tez kapsamında terapatik robotlar sınıfında, üst uzuv el ve bilek rehabilitasyonuna yönelik bir robot geliştirilmiştir. Mekanik yapılarına göre ise rehabilitasyon robotları dış iskelet robotları ve tek noktadan uzva bağlanan robotlar diye gruplandırılırlar. MIT-MANUS tek noktadan uzva bağlanan robotların bilinen ilk örneklerindendir (Liu, Lu, Yang, & Guo, 2022). Bu robotlar, basit, kullanışlı ve ucuzdurlar. Fakat eklem torklarının belirlenmesinde yetersizdirler. Öte yandan dış iskelet robotlarında eklemlerin her birinin hareket ettirilmesi ve kontrol edilmesi söz konusudur. Burada hastanın uzvuna bağlanma ve farklı uzuv uzunluklarına ayarlanma gereksinimi doğmaktadır. Bu sebeple günümüzde çok farklı dış iskelet robotları geliştirilmektedir.

Rehabilitasyon robotları ayrıca yapılan egzersiz türlerine göre pasif, aktif ve etkileşimli şeklinde sınıflandırılır. Pasif robotlar yerçekimi haricindeki bir kuvvete karşı hastaya destek sağlamayan, basit, hafif, ucuz ve güvenli kullanımı olan robotlardır. Düşük seviye felçli hastaların tedavisinde daha uygundurlar. Aktif robotlar, hasta ile robot arasındaki etkileşim kuvvetlerini ya da doğrudan robotun konumunu, açısını kontrol eden, elektrik, pnömatik ya da hidrolik tahrikle çalışan robotlardır. Egzersiz esnasında hem destek hem de direnç sağlarlar. Etkileşimli robotlarda empedans ve admitans kontrol ile konum ve kuvvet sensörleri ile etkileşim tespit edilir ve kontrolcülere iletilir.

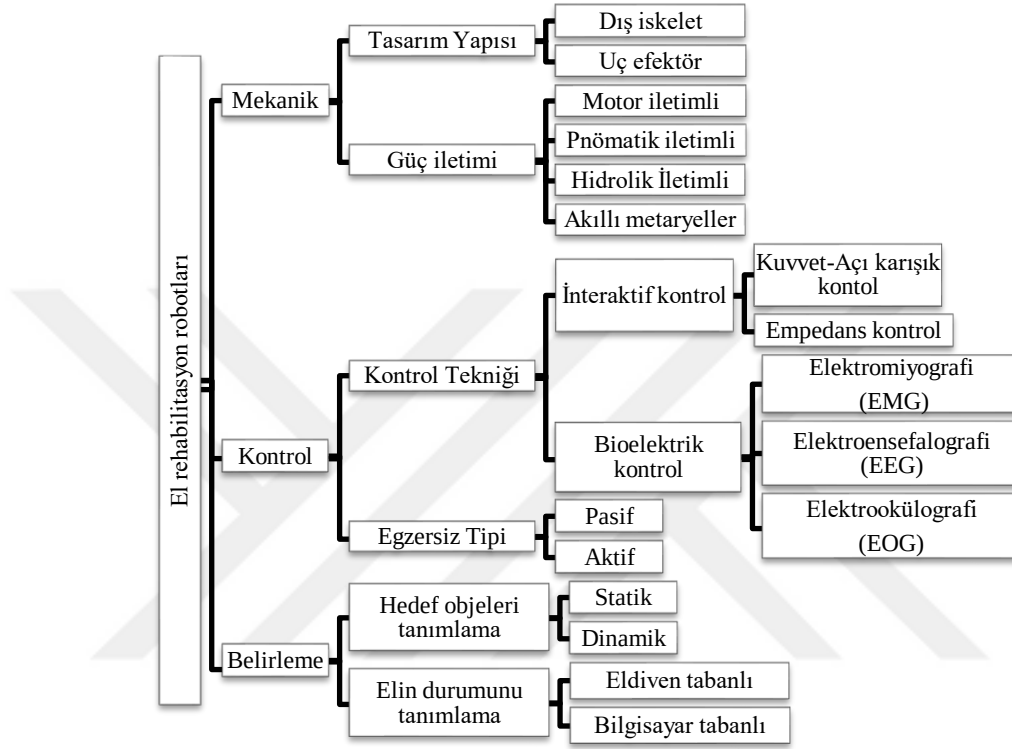
Literatürdeki cihaz tasarımları hastaları rehabilite etmek amacıyla güç iletimi bakımından da 3 ana gruba ayrılmaktadır. Bu gruplar kablo ile tahrik edilen, pnömatik ve hidrolik iletimli sistemlerdir. Kablo iletim sistemlerinde uç efektörler vasıtasıyla admitans kontrolü yapılır (Dimapasoc, 2017). Pnömatik sistemlerde bir hava üretici kaynağından alınan hava sıkıştırılarak basınç elde edilirken, hidrolik sistemlerde sıvılar uç efektörlere hareket ettirilir (Du Plessis, Djouani, & Oosthuizen, 2021). Pnömatik sistemler günümüzde esnek sistemlerle birlikte kullanılmaya başlanmıştır (Mata Amritanandamayi, Udupa, & Sreedharan, 2018). Yapay kas sistemleri geliştirilen çalışmalar bu alanda devam etmektedir (Bouzit, Burdea, Popescu, & Boian, 2002; Wu, Huang, Wang, & Xing, 2010).

Şekil 1’de farklı türde sistemlere örnekler gösterilmiştir. Bu sistemlerden (a) kablo tahrikli (E. Pezent, Rose, Deshpande, & O'Malley, 2017), (b) pnömatik tahrikli (Festo, 2021), (c) hidrolik tahrikli (Unluhisarcikli, 2012) ve (d) esnek robot (Polygerinos et al., 2015; Yap, Jeong Hoon, Nasrallah, Goh, & Yeow, 2015) uygulamalarına örneklerdir. Son yirmi yıldaki akıllı malzemelerdeki gelişmeler hayatımıza yumuşak esneyebilen robotları getirmiştir (Chu & Patterson, 2018; Hinchet, Vechev, Shea, & Hilliges, 2018; Yap et al., 2015). Esnek ve yapay kas sistemi kullanılarak geliştirilen rehabilitasyon amaçlı sistemlere sıklıkla rastlanmaktadır (Y. Wang & Xu, 2021). Rehabilitasyon sürecinin motor öğrenmeyle tespit edilmesi de yapılan çalışmalar arasındadır (Y. Wang et al., 2021). Ayrıca hibrit rehabilitasyon cihazları da geliştirilmektedir. Bu hibrit cihazlarda hem esnek hem de rijit sistemler kullanılmaktadır. Hibrit sistemler elin bilek bağlantı noktasının hareketine izin vermektedir (Ahmed et al., 2021). El-el bileği rehabilitasyonunda ister geleneksel ister esnek ister hibrit olsun dış iskelet sisteminin kaba ve büyük olması sorunu devam etmektedir. Bu sorunu çözmek için esnek eldiven sistemleri kullanılmaktadır. Fakat aktif eyleyici veya tork gerektiren sistemler için içine girdiğinde tasarım ve kontrol sorunu ortaya çıkmaktadır. Bu sorunu çözmek için herhangi bir uygulama sınırlaması veya tasarım kısıtlaması yoktur (Kabir, Sunny, Ahmed, & Rahman, 2022). Teknik donanımdan dolayı kısıtlamalar getirilmektedir. Örneğin kablo iletimli dış iskelet sistemlerinde kablonun titreşimi veya kopması kullanıcıya zarar verebileceğinden önlemlerin alınması gerekmektedir. Bu sebeple yüksek kuvvetler kullanılmamaktadır. 35 N gibi kuvvetler referans alınmaktadır (Xu, Wu, & Zhu, 2021).



Şekil 1. İletim sistemine göre el robotu örnekleri. (a) tel, (b) pnömatik, (c) hidrolik (d) esnek robot sistemidir.

El rehabilitasyon robotları mekanik yapıları, kullanılan kontrol yöntemleri ve klinik uygulamalar açısından da sınıflandırılırlar Şekil 2’de rehabilitasyon robotlarına ait bir sınıflandırma şeması verilmiştir (Liu et al., 2022). Bu sınıflandırma sistemlerine literatürden örnekler verilmiştir.



Şekil 2. Rehabilitasyon robotlarının sınıflandırılması

Geliştirilen bu tasarımlarla günlük hayatın kalitesi arttırılmaya çalışılmaktadır (Bützer, Lamercy, Arata, & Gassert, 2021; Son, Kim, Kim, Choi, & Kim, 2018). Özellikle günümüzde kullanılan 3D yazıcı ile düşük maliyetli üretim bu alandaki gelişmelere katkı sağlamaktadır (Abdallah, Bouteraa, & Rekik, 2017; Sebastian, 2018; Zhao, 2017).

Son yıllarda el-el bileği yaralanmaları yaygın bir şekilde karşımıza çıkmaktadır (Zhang, Hua, Fu, Chen, & Wang, 2014). El rehabilitasyonu eli sabit bir şekilde tutma (immobilize), eklem hareket açıklığını geliştirme, germe ve kuvvetlendirme aşamalarından oluşan bir süreçtir. Bu aşamaları yapan rehabilitasyon robotları, hastanın tedavi süreci ile tedavi bittikten sonraki dönemde de günlük yaşantısında kullanabileceği bir tasarıma sahip olmalıdır. Özellikle; destekleyici, sabitleyici ve egzersiz robotu olarak kullanılabilir olmalıdır. Bu tez kapsamında üretilen rehabilitasyon robotu el-el bileğini sabit şekilde tutma (immobilize etme), germe ve kuvvetlendirme işlemlerini yapabilecek tasarıma

ve donanıma sahiptir. Ayrıca, benzer işlemlerin uygunluğu ve tekrarlanabilirliğini de sağlayacaktır.

Rehabilitasyon robotlarının tasarımının kullanışlı, kolay takılıp çıkarılabilen ve düşük maliyetli olması gerekir (Dickmann et al., 2021; Ou, Wang, Chang, & Chen, 2020). Ayrıca mekanizmaları ayarlanabilir ve ergonomik olmalıdır (Evan Pezent, 2017). Yörünge hareketinin kontrolü de rehabilitasyon robotlarında önem arz etmektedir. Bu sebeple uygulamalar sıklıkla yörünge veya belli bir egzersiz tanımlı yapılmıştır (C. N. Schabowsky, Godfrey, Holley, & Lum, 2010; Sun, Li, & Cheng, 2021).

Bunların yanı sıra, literatürde rehabilitasyon robotlarının farklı türde sınıflandırmalarını görmek mümkündür (Liu et al., 2022). Sınıflandırma işleminde tasarım, hareket tipi, serbestlik derecesi, malzeme, tahrik tipi, aktarma organları gibi pek çok parametre göz önüne alınarak gruplandırmalar yapılmıştır. Bu özellikleri esas alan bir sınıflandırma Tablo 1’de gösterilmiştir. Bu sınıflandırmalardan birincisi dış iskelet el rehabilitasyon robotlarıdır (Bataller, Cabrera, Clavijo, & Castillo, 2016; R. Conti, Meli, & Ridolfi, 2016; Roberto Conti et al., 2017; Decker & Kim, 2017; J. Iqbal, Tsagarakis, & Caldwell, 2015; I. Jo, Lee, Park, & Bae, 2017; Inseong Jo, Park, Lee, & Bae, 2019; Suin Kim, Lee, & Bae, 2017; S. Kim, Lee, Park, & Bae, 2017; Leonardis et al., 2015; Lince et al., 2017; Marconi et al., 2019; Sale, Sellin, Stefano, Becchi, & Sieklicki, 2018; Zhang et al., 2014).

İkinci sınıflandırma grubunu uç efektörlü el rehabilitasyon robotları oluşturmaktadır (Ang, Yeow, & Systems, 2017; Bützer et al., 2021; Chua, Lim, & Yeow, 2019; Fischer et al., 2007; Haghshenas-Jaryani, Carrigan, Nothnagle, & Wijesundara, 2016; Kang, Choi, Lee, & Cho, 2019; Li et al., 2019; M. A. Diftler et al., 2015; Meng et al., 2021; Park, Jo, Bae, & Systems, 2016; Polygerinos et al., 2015; Popov, Gaponov, & Ryu, 2017; Randazzo, Iturrate, Perdakis, & Millán, 2018; Sierotowicz et al., 2022; Tang, Heung, Shi, Tong, & Li, 2022; Thielbar et al., 2014; Hong Kai Yap et al., 2016; H. K. Yap et al., 2017).

Tablo 1. Rehabilitasyon robotlarının farklı sınıflandırma parametreleri

Gurup	Araştırmacılar	SD	Tahrik Tipi	Kontrol Yöntemi	Kuvvet iletim tipi
Dış iskelet el rehabilitasyon robotları	J. Iqbal et al.	4	Motor	Ön ayarlı	Uzuv
	D. Leonardis et al.	5	Motor	Ön ayarlı	Uzuv
	R. Conti et al.	4	Motor	Ön ayarlı	Halat + Uzuv
	S. Kim et al.	1	Motor	Ön ayarlı	Uzuv
	Decker et al.	5	Motor	Ön ayarlı	Uzuv
	I. Jo et al.	5	Motor	Ön ayarlı	Uzuv
	Sale et al.	4	Motor	Ön ayarlı	Kablo+ Zincir
	F. Zhang et al.	6	Motor	Ön ayarlı	Kablo+ Uzuv
	A. Lince et al.	1	Motor	EMG	Kablo+ Uzuv
	A. Bataller et al.	1	Motor	Ön ayarlı	Uzuv
	I. Jo et al.	1	Motor	Ön ayarlı	Yay + Uzuv
	D. Marconi et al.	5	SEA	Kuvvet kontrol	Uzuv
Uç efektör el rehabilitasyon robotları	Haghshenas J. M. et al.	3	Hibrit Pnömatik	Ön ayarlı	Pnömatik yapay kas
	Polygerinos, P. et al.	5	Hidrolik	Ön ayarlı	Lastik geri dönen yay
	Diftler, M.A. et al.	3	Motor	Kuvvet kontrol	Tendon-Kablo Çekme
	Fischer, H.C et al.	5	Motor	Ön ayarlı	Kablo
	H. K. Yap et al.	5	Pnömatik	EMG	Esnek Eyleyici
	Y. Park et al.	3	Motor	Kuvvet kontrol	Kablo
	B.W. K. Ang et al.	5	Pnömatik	EMG	Esnek Eyleyici
	B. B. Kang et al.	2	Motor	Geri beslemeli kontrol	Kablo
	D. Popov et al.	4	Motor	Ön ayarlı	Tendon
	L. Randazzo et al.	5	Motor	EEG	Yapay tendon
	Thielbar, K.O. et al.	5	Motor	Aktif görev tanımlı	Tendon-Kablo Çekme
	Chua, M.C. et al.	4	Pnömatik	Kuvvet kontrol	Pnömatik yapay kas
	M. Li et al.	5	Motor	EEG	Çoklu seğment
	Butzer, T. et al	2	DC Motor	EMG	Yaprak Yay
	Qiaoling Meng et al.	1	Motor	Kuvvet kontrol	Tendon
	Zhi Qiang Tang et al.	5	Pnömatik	EMG	Pnömatik yapay kas
	Marek Sierotowicz et al.	2	Motor	EMG	Tendon

El rehabilitasyonları için geliştirilen robotik cihazların günümüzde hâlâ eksiklikleri vardır. Geleneksel rijit sitemlerle yapılan rehabilitasyon sürecinde bireysel kullanıcı için

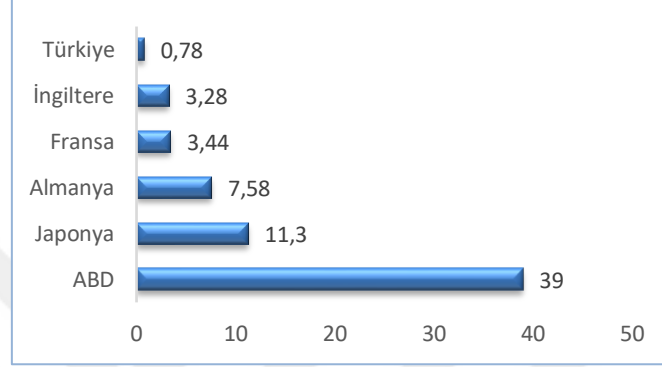
başarılı sonuçlar verirken, farklı hastalarda aynı mekanizma başarılı sonuçlar veremeyebilir (Taheri et al., 2014). Geliştirilen cihazların klinik uygulamalarının yaygınlaştırılması gerekmektedir. Bu merkezlerdeki mekanik sistemler kişiye göre ayarlanamadığından problemler ortaya çıkmaktadır (Rätz, Conti, Müri, & Marchal-Crespo, 2021).

Aktif eyleyicili el rehabilitasyon cihazları incelendiğinde geliştirilen sistemlerin çok büyük kısmının elin dorsal yüzüne yerleştirildiği görülmektedir. Cihazlarda, parmak egzersizlerini gerçekleştirebilmek için farklı kuvvet ve hareket aktarım sistemleri önerilmiştir. Hareket ve kuvvet aktarım sistemlerini tasarlarken dikkat edilmesi gereken en önemli husus, cihazdaki mafsalların hareketi ile insan elindeki eklemlerin hareketinin birbirini tam olarak karşılamasıdır. İnsan elinde yer alan eklemler polisentrik yapıdadırlar ve dönme hareketi sırasında dönme merkezleri değişmektedir (Nordin ve Frankel, 2012). Bununla birlikte yumuşak doku hareketlerinden dolayı uzuv uzunlukları da değişmektedir. Cihazda bulunan mekanik mafsalların ve kullanıcının eklemlerinin tam olarak hizalanamaması durumunda eklemlerde kesme kuvvetleri ortaya çıkmakta ve bu durum kullanıcıya zarar vermektedir. Bu sorunu gidermek için kuvvet ve hareket aktarımı sistemlerinin tasarımına dikkat etmek gerekir.

Dönme merkezlerini hizalamak amacıyla kullanılan mekanizmalar veya mekanik elemanlar (dişliler, kasnaklar vb.) el üzerine yerleştirildiğinden çok yer kaplamakta ve hantal bir görünüme sebep olmaktadır. Yine uzuv üzerine yerleştirilen yumuşak eyleyicili sistemler, çoğunlukla hidrolik veya pnömatik prensiplere göre çalıştıklarından ilave donanım ihtiyacı duymaktadırlar (Polygerinos ve ark., 2015). Bu durum ev ortamında kullanımı zorlaştırmaktadır. Eldeki tendonların çalışma prensibine göre tasarlanan ve kablolar yardımıyla tahrik edilen giyilebilir cihazlar, prensip olarak kullanışlı olmakla birlikte elin doğal hareketine yakın bir egzersiz hareketi sağlamaktan şu an için uzaktırlar ve geliştirilmeleri devam etmektedir. Kullanılan mekanizmalar ve mekanik elemanların estetik dezavantajlarının yanı sıra ağırlık dezavantajları da bulunmaktadır. Ayrıca diğer çözümlerin eksiklikleri de düşünüldüğünde hafif, estetik ve işlevsel hareket ve kuvvet aktarımı sağlayan sistemlerin geliştirilmesine ihtiyaç duyulmaktadır.

Bu tezde geliştirilen rehabilitasyon robotu, düşük maliyetli, ulusal teknoloji ürünü, pasif, izometrik ve aktif egzersiz yapılabilen, ticarileşme potansiyeli olan bir dinamik kontrollü robottur. Geliştirilen bu rehabilitasyon robotu taşınabilir ve giyilebilirdir. Taşınabilir olmasından dolayı hasta veya kullanıcıların cihazı daha çok kullanma fırsatı doğacaktır. Böylece efektif kullanıma bağlı iyileşme süresini kısaltma potansiyeli vardır.

Dünyada sağlık sistemindeki profesyonel tedavi yöntemleri, yenilikçi yaklaşımlar ve bunların klinik uygulamaları sayesinde sürekli ilerlemektedir (Skidmore & Shih, 2022). Fakat Türkiye'deki tıbbi cihazlar sanayinde oluşturulan katma değeri Şekil 3'de görüldüğü gibi 0.78 oranı ile son derece düşüktür (TTGV, 2013). Bu durumun düzeltilmesi için biyomedikal cihaz araştırmalarının desteklenmesi gerekmektedir.

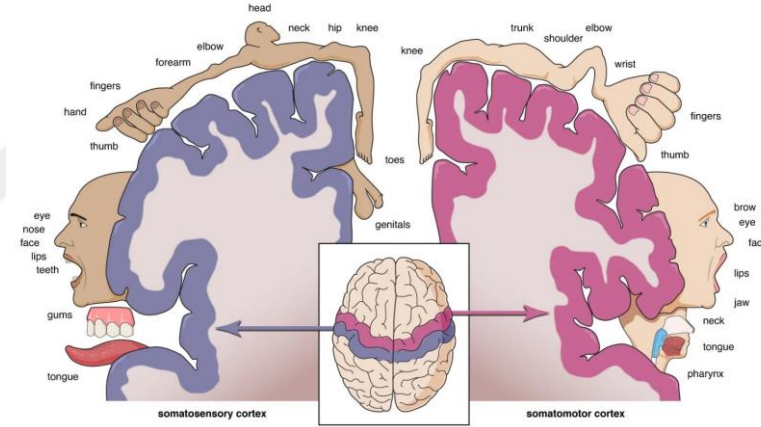


Şekil 3. Ükelere göre dünya tıbbi cihaz sektöründe yaratılan katma değer

Bu nedenle bu doktora tezi ile geliştirilen robotun, kaza, travma veya hastalık sonucunda meydana gelen işlevsel bozuklukların tedavisinde kullanılması amaçlanmıştır. Yapılan çalışmadaki robot mevcut sistemlerle karşılaştırıldığında, el-el bileği üzerinde taşınabilir olması, doğal egzersiz hareketini bozmaması, hafif olması, yeterli güç üretmesi, güvenli olması, daha hızlı sürede iyileşme sağlama potansiyelinin yüksek olması ve taşınmaz sistemlere oranla ucuz olması gibi özelliklere sahiptir. Bu tez çalışması ile geliştirilmiş olan el-el bileği rehabilitasyon sisteminde elin doğal hareketlerini bozmayan, germe ve kuvvetlendirme aşamalarını yapabilen, parmak ve ön kol üzerine yerleştirilen, kol desteğinin ve kontrol kutusundaki aktif eyleyici modelinin geliştirilmesi yapılmıştır. Eli hareket ettirecek olan elektriksel eyleyiciler hafif ve gerekli gücü üretebilmelerine göre seçilmiştir. El ve bilek hareketlerinin doğal yapısını bozmayacak bowden kablo iletimli üst dış iskelet sistemi geliştirilmiştir. Tez kapsamında yapılan çalışma kişiye özgü hareket aşamalarını ve tekrar sayısı, durasyonu, frekansı, açısı, direnç miktarı gibi performansını içeren yazılım ile birlikte kontrol panelinde gösterilmiştir. Egzersiz uygulamasından sonra kullanıcı performans ölçümü ve sistem çıktısı hem sayısal verilerle hem de grafiksel olarak kayıt altına alınmaktadır. Bu veriler hastanın iyileşme takibini ve rehabilitasyon sürecini objektif şekilde ortaya koyma imkânı sağlayacaktır.

1.2. El - El Bileğinin Anatomik Yapısı

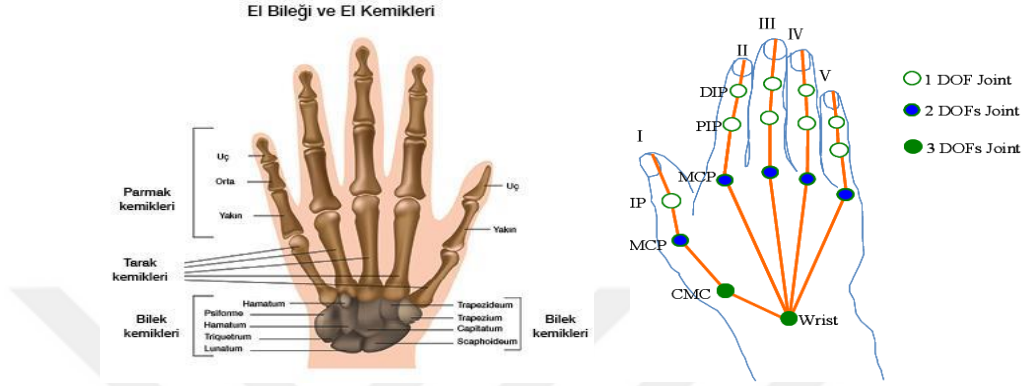
İnsan eli, sağladığı üstün hareket kabiliyeti sayesinde en önemli uzuvlardan biridir. Beynin birincil motor bölgesinin 1/3'ünden daha fazlasının ele ait olması fizyolojik olarak vücudun en önemli organlarından biri olduğunu ortaya koymaktadır (Güdemez, Ataker, & Ece, 2013). Vücudun her bir parçası görsel olarak beynin onları kontrol eden bölgelerine haritalandığında, homonkulus adı verilen beynin haritasının görsel temsiline ulaşılır (Baugh, 2024). Şekil 4'te homonkulus ve beyindeki temsili görseli verilmiştir. İnsan beyninin motor sistemi hareket kısmının çoğunluğunu oluşturduğundan daha ince hareketler yapmamıza ve daha iyi bir dokunma duyusuna sahip olmamıza olanak tanır. Çeşitli kazalar veya inme türü rahatsızlıklar sonucu ortaya çıkan fonksiyon kaybı ya da eklem kısıtlamaları oluşmaktadır. Bu durum hayatımızı olumsuz etkilemektedir.



Şekil 4. Homonkulus

İnsan eli, bilek kısmı, metakarpal kemikler ve 5 adet parmak (dijit) oluşur. El, toplam 19 uzun kemiğin yer aldığı metakarpal bölüm ve falanksların oluşturduğu 5 kolon üzerine kurulmuştur (Bazira, 2022; Güdemez et al., 2013). Bu kemik yapısı Şekil 5'de gösterilmiştir. Baş parmak hariç tüm parmaklar (yani dijit 2-5) kendi metakarpallarının üzerinde merkezden periferlere doğru proksimal, orta ve distal falankslardan meydana gelir. Proksimal, orta ve distal falankslar işaret parmağı, orta parmak, yüzük parmağı ve serçe parmak kemiklerini oluşturur. Başparmakta (dijit 1'de) bir adet distal falanks, bir adet proksimal ve bir adet de metakarpal kemik bulunur. Avuç bölgesi, metakarpal ve karpal kemiklerin bir araya gelmesiyle oluşur. El bileği ise 8 karpal kemik ve 2 kolon olarak Radyus ve Ulnar olmak üzere 10 kemikten oluşmaktadır. Toplamda el-el bileği 29 kemik yapısının

bir araya gelmesiyle oluşmaktadır (R.L. Drake, W. Vogl, & Mitchell, 2004). El ve parmakların altı temel hareketi, bilek için fleksiyon/ekstansiyon, ulnar/radial deviasyon; parmaklar için fleksiyon/ekstansiyon ve abdüksiyon/addüksiyon sınıflandırmaları Şekil 6'da verilmiştir.



Şekil 5. Elin anatomisi



Şekil 6. Dış iskelet tasarımı için anatomik hareket yapısı

Tendonlar, kasların kemiklere bağlanmasını sağlayan canlı bir yapıdır. Bu yapılar kasların el üzerinde yer işgal etmemesi ve daha çok kuvvet üretmek amacıyla elin biyomekanik yapısında yer almaktadırlar. Bazı çalışmalarda elin tendon ve kas yapısı da dikkate alınmaktadır (Biryukova & Yourovskaya, 1994).

1.3. El - El Bileğinde Egzersiz Hareketleri

Felçli veya güç kaybı olan hastaların motor ve bilişsel fonksiyonlarının gelişimi için kullanılan rehabilitasyon yaklaşımlarına yönelik araştırmalar devam etmektedir (T. Wang, Mantini, & Gillebert, 2018). Hastalıkların türüne ve hastaların karakteristik özelliklerine göre rehabilitasyon ihtiyacı belirlenmektedir (Hoffman & Blakey, 2011; Molteni, Gasperini, Cannaviello, & Guanzioli, 2018). El-el bileği sisteminde meydana gelen temel hareketler Şekil 7 'de gösterilmiştir. Kullanım sıklığına göre ilk sırada eli açma, ikinci sırada kavrama ve üçüncü sırada bilek hareketi gelmektedir (McConnell et al., 2017). Rehabilitasyonda egzersiz hareketlerinin belirlenmesinde hastalık kavramı yerine hasta odaklı yaklaşım öne çıkmaktadır. Bu nedenle rehabilitasyon cihazlarının tasarımında ve hareketlerin belirlenmesinde fizyoterapist ve rehabilitasyon uzmanlarına danışılmalıdır (Rahman & Al-Jumaily, 2013; Christopher N. Schabowsky, 2010). Rehabilitasyon egzersizi esnasında hastanın yeterli kuvvet veya hareketi sağlaması zamana bağlı egzersizden daha önemlidir (Mayetin, 2022). Deneysel ve klinik çalışmalar esnasında, fizyoterapist tarafından belirlenen egzersizler ve eklem açıklıkları dikkate alınarak çalışmalar yürütülmektedir. Terapötik egzersizler, hastalıkların tedavisi için özel olarak tasarlanan egzersizlerdir. Bu egzersizler, uzuvların kuvvetini artırmaya, dayanıklılığını ve hareket kabiliyetini geliştirmeye odaklıdır. Terapötik egzersizler pasif, aktif, aktif yardımcı, dirençli ve izokinetik egzersizler isimleriyle gruplandırılabilir.

Pasif Egzersizler: İstemli bir kas hareketinin olmadığı, uzvun dışarıdan uygulanan bir kuvvet tarafından hareket ettirildiği durumdur. Bir makine veya başka bir kişi tarafından uygulanabilir. Geliştirilen robotik cihazlar ile normal eklem hareket açıklığına (Range Of Motion = ROM) ulaşılması hedeflenir. Bu harekette hareket sınırları hastaya acı vermeyecek şekilde ve yavaş olarak uygulanmalıdır.

Aktif Egzersizler: Kişinin kendisinin gerçekleştirebildiği hareketlerdir. Eklemlerin fonksiyonlarını ve kas kuvvetini artırır. Hareketler çok kolay ya da çok zor olmamalıdır. El ile veya terapötik bir cihaz yardımı ile yapılabilir.

Aktif Yardımlı Egzersizler: Uzuvların fonksiyonlarında düzelme olduktan sonra geçilen aşamadır. Yardımlar bir fizyoterapist tarafından sağlanabilir ya da mekanik elemanlar kullanılarak gerçekleştirilir.

Aktif Dirençli Egzersizler: Uzva etki eden bir direnç kuvvetinin olması durumudur. Amaç kasların gücünü artırmaktır.

a. Statik (İzometrik) Egzersizler: Statik egzersizler sabit bir dirence karşı yapılır. Eklem açısında değişiklik meydana gelmez. Erken evre rehabilitasyon aşamasıdır. Ancak tüm egzersiz hareketleri boyunca tercih edilmez.

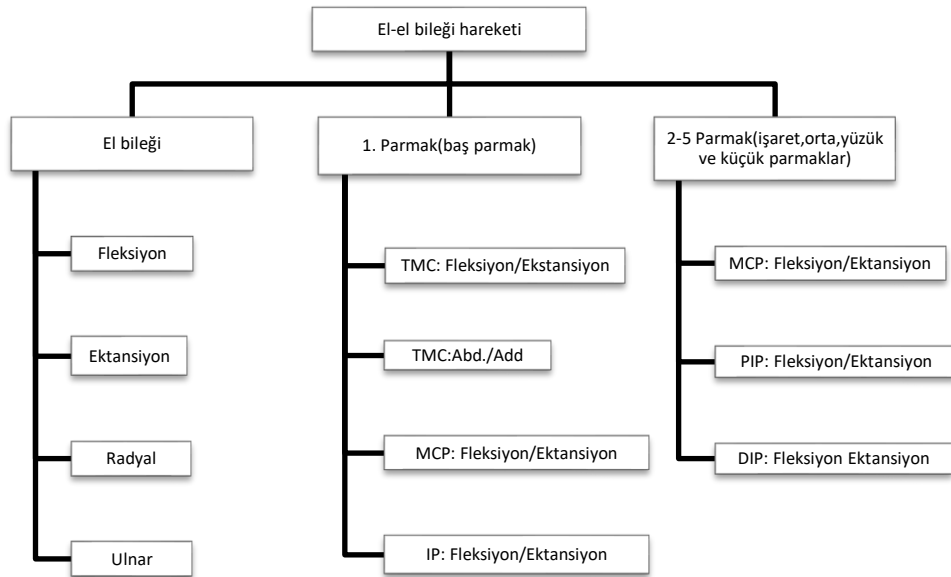
b. Kinetik (Dinamik ya da izotonik) Egzersizler: Hareket sınırı boyunca dirençli hareket yapmaktır. Uygulanan kuvvetin seviyesi daha yüksektir. İzotonik egzersiz yerçekimine karşı yapılır. İster izometrik ister izotonik olsun, esas önemli olan hastaya ve hastalığa uygun egzersize karar vermektir.

c. İzokinetik Egzersizler: James Perrine tarafından 1960’larda geliştirilen bir egzersiz yöntemidir Bütün hareket boyunca, uzuv eklemine aynı hızda hareket etmesini sağlamak demektir. Hasta uzvunu sabit hızda fakat değişken dirençle hareket ettirir. Kas eforu ile sabit direnç de arttığından tam hareket açıklığında maksimum kas gerilmesi sağlanır.

Aktif Aşamalı Ağırlıklı Egzersizler: Bu egzersiz tipinde kas kuvveti artan, güçlü hastalara ağırlıklar yolu ile direnç uygulanır. Bu direnç arttırılarak maksimum 10 tekrar yapılır. Sonraki haftalarda 10 tekrar hareketi daha eklenir.

El ile Yapılan (Manual) Dirençli Egzersiz: Tedavi sürecinin tamamen fizyoterapist tarafından el ile yapıldığı ve kasın gelişiminin göz ve el ile takip edildiği durumdur.

Bu tez kapsamında geliştirilen robotun yapacağı hareketler fizik tedavi ve rehabilitasyon uzmanının belirleyeceği hastalara özgü olarak seçilmiştir. Bu kapsamda, doktora tezi bünyesinde yaptırılacak olan egzersizler Şekil 7’de ve hasta ihtiyacına göre oluşturulan egzersiz akışı Şekil 8’de sunulmuştur.



Şekil 7. El-el bileğinin egzersiz diyagramı.



Şekil 8. Egzersiz akış şeması

1.4. Denetleyiciler

Rehabilitasyon robotlarının kontrolüne yönelik çalışmalar, tasarım ve üretim sürecinden ayrı bir araştırma alanıdır. En etkili kontrol metoduna karar verebilmek için, pek çok farklı açıdan yaklaşmak gerekmektedir. Üst ekstremité için geliştirilen rehabilitasyon robotlarında hastaların durumuna göre seçilen egzersizleri esas alarak asistif, dirençli mod ve doğrulayıcı mod belirlenmiştir. Asistif mod yani destek sağlayan mod rolünde empedans, admitans ve kuvvet kontrol uygulamaları gerçekleştirilmiştir (Proietti, Crocher, Roby-Brami, & Jarrasse, 2016). Denetleyici tasarımında esnek sistemlerin ve doğrusal olmayan hareketlerin kontrolü zordur (Shao, Meng, Ai, & Xie, 2021). Geleneksel tasarım yönteminde, tasarımcının kontrol edilen sistemde denetleyiciyi nereye yerleştireceği genellikle önceden bellidir ve sisteme sabit yapıda bir tasarım uygulanır. Denetleyicinin yerini belirledikten sonra denetleyici parametreleri belirlenir.

Üst ekstremité robotlarında empedans ve admitans kontrol yaygın şekilde kullanılmıştır (Liu et al., 2022). Empedans kontrolü, kuvvet ve hareket arasındaki dinamik ilişkiyi kontrol ederek uyumlu hareketi sağlayan dolaylı uyumlu bir kontrol yöntemidir. Bu yöntemde kuvvet ve konum doğrudan kontrol edilmez. Robot kolunun uç noktası mekanik empedansı denetlenerek kuvvet ve konum kontrolü sağlanır. Rehabilitasyon süresince uzvun

konumu ölçülerek hareket ekseninde uygulanacak kuvvet ayarlanır. Kişi uzvunu serbest hareket ettirebilir (Mayetin, 2022) . Empedans kontrol sayesinde robot verilen görevleri bir insan kadar yumuşak ve duyarlı şekilde yerine getirebilmektedir. Empedans kontrolde robotun tam dinamik modeline ihtiyaç duyulur. Kuvvet veya tork sensörü kullanımı gerektirmez

Admitans kontrolü, bir robotun istenen konumu ve hızı hesaplayarak dış kuvvetleri takip etmesine olanak tanıyan bir tür kontrol yöntemidir. Bu yöntemde, hastanın robota uyguladığı kuvvet ölçülerek, eksenindeki hareketi sağlanır. Admitans kontrolde, kuvvet uygulanmadığı sürece uzuv hareket edemez ve robot son konumunu korur. Özellikle çok serbestlik dereceli sistemlerde tercih edilmektedir ve çok eksenli kuvvet veya tork sensörüne ihtiyaç duyulmaktadır. Bu sensörler oldukça pahalıdır. Admitans kontrol uygulanan rehabilitasyon robotlarında genellikle kuvvet kontrolü ve tork kontrolü gerçekleştirilir ve o isimle adlandırılırlar.

Literatürde şimdiye kadar geliştirilmiş olan el ve bilek dış iskelet robotlarında sıklıkla konum kontrolü, admitans kontrol, empedans kontrol, EMG tabanlı kontrol algoritmaları kullanılmıştır (Mayetin, 2022).

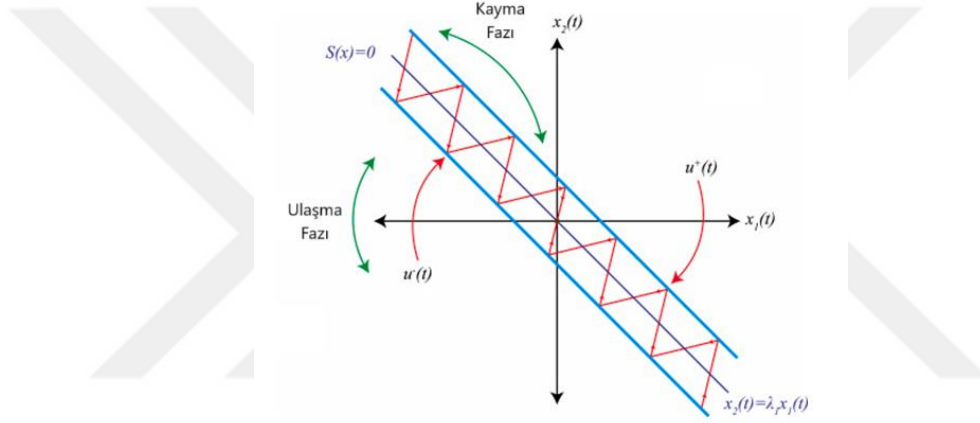
Tez kapsamında geliştirilen rehabilitasyon robotunun kişiye uygulayacağı destek ve direnç seviyesinin hastanın uyguladığı kuvvete göre anlık olarak pasif, aktif yardımcı egzersizleri yapacak şekilde konum kontrolü ve tork kontrolü gerçekleştirilmiştir. Bu bağlamda gelişmiş kontrol algoritmaları kullanılarak, performans değerlendirmesi üzerine denemeler yapılmıştır. Öncelikle Kayan Kipli Kontrol (KKK), ve Orantı-İntegral-Türevsel Kontrol (PID) algoritmaları kullanılarak sistemin denetimi sağlanmaya çalışılmıştır. Daha sonra bu yöntemlere ek olarak hiyerarşik HKKK ve HPID olarak kuvvet geri beslemeli doğrusal olmayan denetleyiciler geliştirilmiştir.

Geliştirilen algoritmaların MATLAB/Simulink benzetimi gerçekleştirilmiştir. Çalışmanın sonuçları kullanılan kontrol yöntemleri için bozuculu olarak karşılaştırılmıştır. Ayrıca imalatı gerçekleştirilen rehabilitasyon robotu üzerinde de egzersizler denenmiştir.

1.4.1. Kayan Kipli Kontrol (KKK)

Kayan Kipli Kontrolcüler doğrusal ve doğrusal olmayan sistemlerde bozuculu yörünge izleme performanslarının iyi olması sebebiyle en çok tercih edilen yöntemlerdendir (Hu & Wang, 2020; Ou et al., 2020; H. Wang et al., 2018). Kayan kipli denetleyici, sistemin

durumunu herhangi bir keyfi konumdan denge konumuna getiren belirgin bir doğrusal olmayan denetleyicidir. Sürekli bir kontrol yasası kullanmak yerine, KKK geleneksel olarak Şekil 9'da verilen tasarlanmış kayma düzlem etrafında kayma için kesikli yasayı kullanır. KKK, dış bozuculara karşı sağlamlık sağlayan, değişken yapıli bir kontrol sistemidir. Gerçek sistemlerin denetleyici kontrolünün zor olmasından dolayı, kontrol kuralları, önceden belirlenen kurallara göre değiştirilmektedir. KKK iki basamaktan oluşur. Birinci basamağı kayma yüzeyinin oluşturulmasıdır. Böylece sistemin kararlı veya kararsız yörüngeler arasında geçiş yaparak bir kayma yüzeyine ulaşması ve bu yüzeyde kayarak orjine ulaşması sağlanır.



Şekil 9. Kayma düzlemi yörüngesi

Doğrusal olmayan bir sistem için KKK tasarım adımları şu şekilde ifade edilmiştir (J.-J. Wang & Liu, 2019).

- Dinamik modelin düzenlenmesi
- Kayma düzlemi seçimi
- Kontrol kuralının belirlenmesi => Eşdeğer kontrol kuralı + Kaydırma Kuralı
- Kararlılık analizi => Lyapunov Fonksiyonu seçimi

$$\dot{S} \leq 0 \text{ ise sistem kararlıdır}$$

Bu kayma düzlemi,

$$S = C\xi + \dot{\xi} \quad (1)$$

biçiminde tanımlanmıştır. Buradaki C ($C > 0$) pozitif katsayıdır. Burada ξ kontrol edilmek istenen zamana bağlı değişkendir. İkinci basamakta yeni bir kontrol değişkeni atanır. Bu kontrol değişkeni yardımcı kayma düzlemidir ve ana kayma düzlemlerinin yerini alır. Bu kayma düzlemi,

$$S_m = S \quad (2)$$

biçiminde tanımlanmıştır. Lyapunov fonksiyonu

$$\dot{S}_m \leq 0 \quad (3)$$

biçiminde tanımlanmıştır. Elde edilen bu yeni denklem KKK kontrol yönteminin ikinci basamağının ana fonksiyonuna yazılır ve stabilizasyon işleminin kontrolü sağlanır. Bu fonksiyon,

$$V = -k_1 S_m - k_2 \tanh(S_m) \quad (4)$$

biçiminde tanımlanmıştır. Buradaki k 'lar pozitif katsayılardır ($k > 0$). Stabilizasyon kriteri $V \leq 0$ sağlanması amaçlanmaktadır. Bu fonksiyon aynı zamanda optimizasyon algoritmalarında maliyet fonksiyonu olarak da kullanılmaktadır. Gürbüz bir kontrol yöntemidir. Kayma yüzeyinde iken, birinci mertebeden bir sistem gibi davranmasını sağlamaktır. Bu ise sistem cevabının istenen bir değere aşım gerçekleşmeden gelmesini sağlamaktadır. Ayrıca, kararsız sistemlere de uygulanabildiğinden, sistem kararlı veya kararsız yörüngeler arasında geçiş yaparak kararlı bir yapıya geçiş sağlanabilir.

1.4.2. Hiyerarşik Kayan Kipli Kontrol (HKKK)

Hiyerarşik KKK, çok katmanlı dinamik sistemlerin veya birçok etkileşimli alt sistemlere sahip karmaşık sistemlerin kontrolünde kullanılan kayan kipli kontrolün özel bir uyarlamasıdır. Birden fazla dinamik yapı barındıran matematiksel eşitliklerin kontrolü için farklı alt sistemler için kayma düzlemleri tanımlanarak, bir hiyerarşi halinde çözüme gidilir. Tez kapsamında oluşturulan dış iskelet robotunun kontrolü için KKK yöntemi denenmiş ve başarılı sonuç alınamamıştır. Bu nedenle sistemin kontrolü için Hiyerarşik Kayan Kipli Kontrol yöntemi denenmiştir (J.-J. Wang & Liu, 2019). Bu çalışmada kullanılan HKKK

yöntemi 10 basamaktan oluşmaktadır. Bu basamaklar Bölüm 3.1.1. Denetleyici Tasarımı bölümünde Şekil 26'da verilmiştir. Öncelikle dış iskelet robotunun konum, hız ve ivmelerini tanımlayan denklemler 18 SD için alt parçalara bölünerek yeni değişkenler tanımlanır. Her bir katman için kayma düzlemi tanımlanır. Bir sonraki aşamada her bir katman birbiriyle ilişkilendirilir. Son olarak sistemi ilgili kayma düzlemine yönlendirmek için Lyapunov kararlılık ilkesi gereği, sistemin kararlı ve düzgün çalışması sağlanır.

1.4.3. Oransal İntegral Türevsel Kontrol (PID)

Genel PID kontrolcüsü bir sistemin çıkışı ile giriş değerleri arasındaki farkı referans olarak istenilen değere en yakın yeni bir sinyal oluşturur. Bu sinyal değerini hata temelli belirlemektedir. Bu hata,

$$e(t) = r(t) - y(t) \quad (5)$$

biçiminde tanımlanmıştır. Buradaki r referans değerini y ise çıkış değerini ifade etmektedir. Bir sistemde üretilen giriş değeri $u(t)$, hata giriş değeri $e(t)$ 'yi referans olarak üç terimi K_p , K_i ve K_d 'den oluşan PID kontrolcü parametreleri belirlenir. Bu parametreler,

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(t) dt + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (6)$$

biçiminde tanımlanmıştır. Buradaki K_p oransal, K_i integral ve K_d türevsel kontrolü temsil etmektedir. PID kontrol doğrusal olmayan sistemlerde pek başarılı olmadığından tez kapsamında PID kontrol yöntemi Hiyerarşik PID (HPID) olarak uygulanmıştır.

1.4.4. Hiyerarşik PID Kontrol (HPID)

HPID sistemi de HKKK yönteminde olduğu gibi kontrolün zor olduğu kompleks dinamik sistemlerin kontrolü için geliştirilen, kısım kısım uygulanan bir PID kontrol yöntemidir. HPID kontrolün çözümü de on adımda oluşturulmuştur. Bu çalışmada el ve el bileği rehabilitasyon robotunun kontrolünde, 18 SD'li sistem her bir parmak eklemi için parçalara bölünmüştür. Her bir alt parça için ayrı ayrı PID blokları oluşturulmuştur. Bu

bloklar Bölüm 3.1.1. Denetleyici Tasarımı bölümünde Şekil 26’de yer alan Step 6 bloğunda görülmektedir. Hesaplamalar “Denetleyici Tasarımı” bölüm başlığı altında sunulmuştur.

1.5. Optimizasyon Algoritmaları

El-el bileği için geliştirilen denetleyicilerin değişken parametrelerinin ayarlanmasında metasezgisel algoritmalarından Parçacık Sürü Optimizasyonu (PSO) ve Diferansiyel Gelişim Optimizasyonu (DGO) algoritmaları kullanılmıştır

1.5.1. Parçacık Sürü Optimizasyon (PSO) Algoritması

PSO algoritması doğrusal olmayan fonksiyonlar için geliştirilmiş popülasyon tabanlı bir yöntemdir. Bu doğrusal olmayan parçacık sürü tabanlı optimizasyon algoritması doğada sosyal davranışlardan esinlenerek geliştirilmiştir (Kennedy & Eberhart, 1995). Bu algoritmanın akış diyagramı Algoritma 1’de verilmiştir.

PSO algoritması n popülasyon sayısı kadar parçacığın arama uzayına doğadan esinlenerek rasgele dağıtılmasıyla başlamaktadır. Buradaki parçacıklar hareketli bir şekilde bir önceki davranışlarına bağlı olarak verilerini gelecekteki parçacıkla kıyaslayarak ilerlemektedir. Bu şekilde sürünün ve parçacıkların geçmiş davranışları kıyaslanmaktadır. Dinamik bir şekilde ayarlanan bir öğrenme hızında n boyutlu bir ekosistemde ilerlenmektedir. Bu ilerleme aşamasında her bir parçacık elde etmiş olduğu en iyi değeri P_{eniyi} olarak kaydetmektedir. Algoritmadaki parçacığın çözümü, uzay sistemindeki yerine bağlı olarak o andaki amaç fonksiyonu değeridir. Algoritmadaki tüm parçacıklar bu amaç fonksiyonunda doğru veya yakın çözümü bulmak için ilerlemektedir.

Arama uzayının D boyutlu olduğu kabul edilir ve i parçacıklı D boyutlu vektörü $X_i = X_{i1}, X_{i2} \dots X_{iD}$ temsil etmektedir. Bu parçacığın hızı diğer bir D boyutlu vektör $V_i = V_{i1}, V_{i2} \dots V_{iD}$ ile temsil edilsin. i parçacığının o ana kadarki en iyi sonucu aynı uzayda P_{eniyi} ile gösterilsin. G_{eniyi} sürüdeki en iyi parçacığın indeksi olarak tanımlandığında d boyutta i parçacığının hızı v_{id} önceki iterasyonda ki v_{id} ilave katsayısı moment bileşenidir. c_1 ve c_2 bilişsel ve toplumsal öğrenme katsayısı olan ivmelenme katsayısıdır. i parçacığın hızı denklemi,

$$V_{id} = WV_{id}(t-1) + c_1 r_1 (P_{en_iyi_id} - X_{id}(t-1)) + c_2 r_2 (G_{en_iyi_id} - X_{id}(t-1)) \quad (7)$$

biçiminde tanımlanmıştır. Buradaki W eylemsizlik katsayısı olarak adlandırılır. Parçacıkların hızındaki tekrarlama miktarını kontrol eder. Olasılıksal değerler olan r_1 ve r_2 katsayıları 0-1 arasında rasgele atanan sayılardır. Parçacıkların yeni pozisyonu,

$$x_{id}(t) = x_{id}(t-1) + v(t) \quad (8)$$

biçiminde tanımlanmıştır. Pozisyon denkleminde kullanılan $x_{id}(t-1)$ parçacığın mevcut pozisyonudur. $v_{id}(t)$ güncelleme hızını ifade ederken x_{id} yeni pozisyonu vermektedir. Algoritmada kullanılan amaç fonksiyon değeri, yerel optimuma yakınsayana kadar önceki durumuna göre bir ilerleme sağlamaktadır.

Algoritma 1. PSO algoritmasının ayrıntılı işlem basamakları

- Adım 1.** Optimize edilecek olan parametreleri ve sınırlarını belirlenir.
- Adım 2.** Tüm parçacıkların başlangıç konumları rastgele atanır
- Adım 3.** Optimizasyon için uygunluk değerleri elde edilir.
- Adım 4.** Uygunluk değerleri hesaplanarak parçacıkların en iyi değerleri (P_{eniyi}) ile sürünün en iyi değeri (G_{eniyi}) hesaplanır
- Adım 5.** Parçacıkların uygunluk değerleri ile kendilerinin o ana kadar ki en iyi değerleri P_{eniyi} ile karşılaştırılır. Parçacığın değeri P_{eniyi} değerinden daha iyi ise o anki değer yeni lokal en iyi değer olarak belirlenir
- Adım 6.** Lokal en iyi konum değerleri ile global en iyi konum değeri ile karşılaştırılır. Eğer lokal en iyi değer daha iyi ise o değer global en iyi konum değeri olarak atanır.
- Adım 7.** Parçacıkların yeni hızı ve konumları yeniden belirlenir
- Adım 8.** Sonlandırma kriterine bakılır. Eğer kriter sağlanmış ise algoritma sonlandırılır. Aksi halde uygunluk değerleri yeniden hesaplanarak algoritma işlenmeye devam edecektir.

En iyi konum G_{eniyi} en uygun çözüm olarak alınır

Bu tez kapsamında kullanılan optimizasyon tekniğinde arama uzayı ve ivmelenme katsayıları benzetim çalışmaları bölümünde ayrıntılı bir şekilde verilmiştir. MATLAB/Simulink içinde eş zamanlı çalışma ile optimizasyon çalışmaları yapılmıştır.

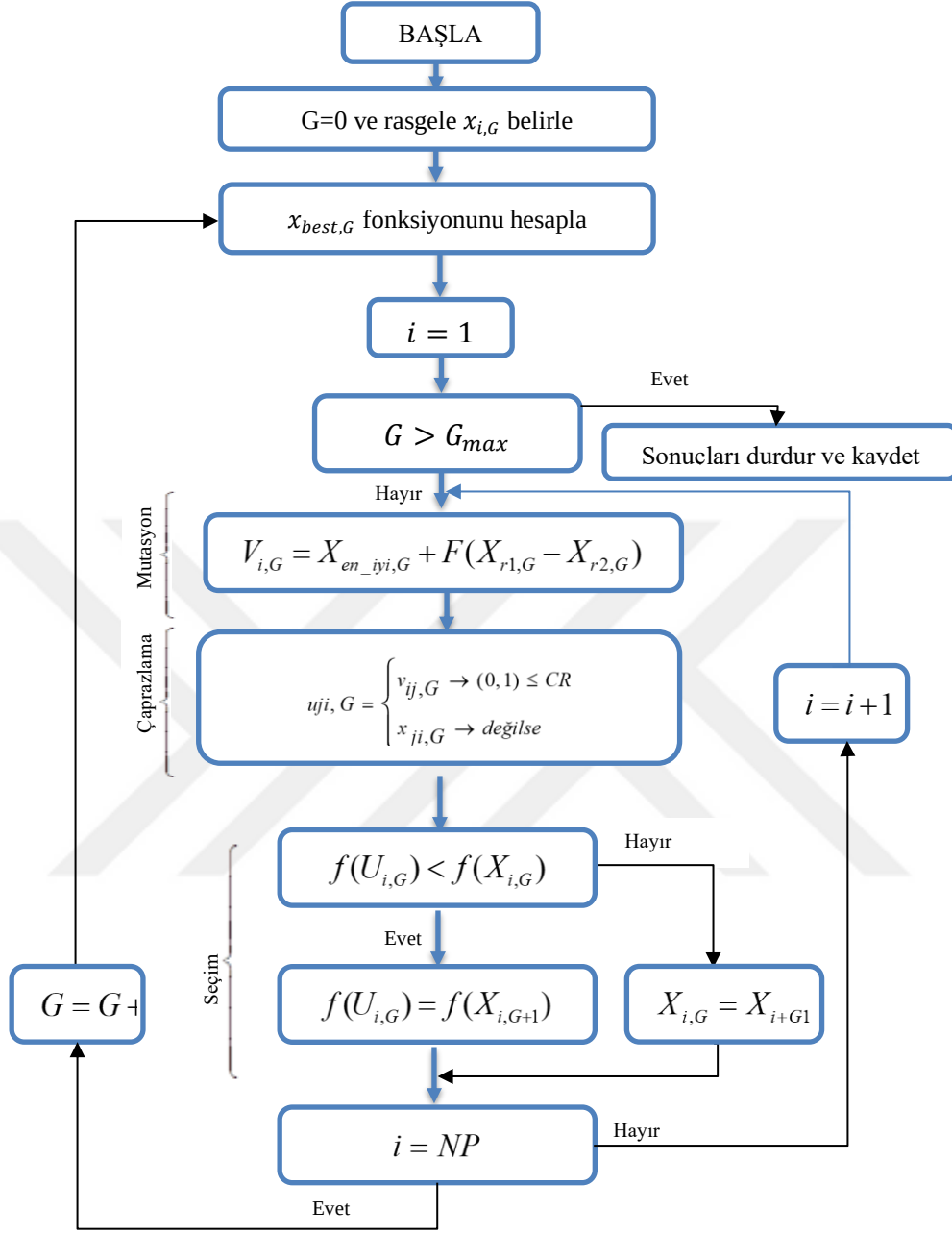
1.5.2. Diferansiyel Gelişim Optimizasyonu (DGO) Algoritması

Diferansiyel gelişim algoritması doğrusal olmayan problemleri optimize etmek için geliştirilen bir sezgisel yaklaşım yöntemidir (Storn & Price, 1997). DGO algoritmasının problem çözme yöntemi genetik algoritma gibi popülasyon tabanlı çalışan bir algoritmadır. DGO akış diyagramı Şekil 10'da verilmiştir.

Algoritma akış parametresinde kullanılan değişken sayısı (D): minimum 1 olmak üzere istenilen sayı verilebilir. Kromozomdaki gen sayısı olarak düşünülebilir (1, 2, ..., j). Maksimum jenerasyon sayısı (Gmax): Oluşturulacak olan popülasyonun kaç jenerasyon boyunca mutasyon, rekombinasyon ve seleksiyona tabi tutulacağını belirtir. Popülasyon büyüklüğü (NP): Popülasyonun büyüklüğünün ne kadar olacağını belirtir. Bu da kromozom sayısı olarak düşünülebilir. Ölçekleme faktörü (F): Ölçekleme faktörünü kullanıcı belirleyecektir. Çaprazlama oranı (CR): Olasılığı temsil eder bu yüzden 0 ile 1 arasında değer alır. X_{lo} ve X_{hi} değerleri ise parametre sınırlarını belirtmektedir.

Mutasyon ya da çaprazlama işlemi parametrelerin optimizasyonu açısından büyük önem taşır. Mutasyon ilerlemesi ile kromozomun genleri üzerinde rasgele değişiklikler yapmaktır. Çaprazlama işlemi ile çözüm noktasının ilerlemesi sağlanmaktadır. Böylelikle daha çok çözüm önerisini sunmaktadır. Çaprazlama işlemi ile mutasyondan beklenen çözüm, çözüm uzayında doğru yönde ve doğru miktarda hareket etmesidir. Bu sayede bir yerde takılıp kalınmaz. Fakat bu durum hareketin beklenen şekilde doğru yönde ve doğru miktarda olmasını garanti etmeyebilir.

Diferansiyel gelişim algoritması maksimum jenerasyon sayısına ulaşıncaya dek çalışır. Maksimuma ulaştığında algoritma durdurulur. Buna ek olarak, algoritmanın çalışması maksimum jenerasyon sayısı ile değil belirlenen durdurma kriterine göre de belirlenebilir. Bu durumda en iyi ve en kötü bireylerin arasındaki farkın belirlenen miktara kadar düşmesi durumunda algoritma sonlandırılır. DGO algoritmasına bağlı durum uzay değişkenleri benzetim çalışması altında ayrıntılı bir şekilde verilmiştir.



Şekil 10. DGO algoritması akış diyagramı

1.6. Rehabilitasyon Robotunun Tasarımı

Literatürde pek çok bilek rehabilitasyon robotu olmasına rağmen, ülkemizde geliştirilecek yeni bir tasarım amaçlanmıştır. Bir rehabilitasyon robotunun geliştirilmesinde dikkat edilmesi gereken farklı unsurlar bulunmaktadır. Bu unsurlardan portatiflik, ucuzluk, kolay kullanım, üretiminin kolay olması önemli olanlardandır. Geliştirilecek cihazın evde,

hasta tarafından kendi başına kullanılabilir olması önem taşır. Böylece bireylerin iyileşmesi hızlanacak, başkalarına bağımlı olmadan hayatına devam etmeleri sağlanacaktır. Bu çalışmada hem ev ortamında hem de klinik ortamlarda kullanılabilecek çok fonksiyonlu, ucuz ve taşınabilir bir el ve bilek rehabilitasyon robotu tasarlanmıştır.

1.7. Tezin Kapsamı

Bu tez çalışmasında el-el bileği rehabilitasyonu için dinamik kontrollü robot tasarımı ve üretimi gerçekleştirilerek kişiye özel olarak egzersiz uygulaması yapılmıştır. Aynı zamanda matematiksel modelle benzetim çalışmaları da yapılmıştır. Bu uygulama 35 yaşındaki yetişkin bir erkek sol eli için denenmiştir. Hareket aralığı %50-60 sınırlarında yapılmıştır. Rehabilitasyon egzersizleri pasif, izometrik ve aktif egzersizler olarak 20 saniyede 3 veya 5 tekrarlı testler şeklinde uygulanmıştır.

Tez kapsamında ilk önce rehabilitasyon alanındaki genel literatür çalışmaları araştırılmıştır. Bu araştırma alanlarında özellikle tasarım, kontrol yapısı ve optimizasyon algoritmaları yer almıştır. Literatür çalışmaları tamamlandıktan sonra tasarlanan modelin 2B ve 3B için matematiksel modeli oluşturulmuştur. Oluşturulan matematiksel modelin benzetim çalışmaları yapılmıştır.

Genel olarak kontrol stratejileri irdelenmiş ve robotun sahip olması gereken konuma bağlı kuvvet kontrolü için farklı yaklaşımlar önerilmiştir. Konum kontrolü için sisteme bozuculu ve istenen yörünge referans değerine göre HPID ve HKKK kontrolcülerini tasarlanmıştır. Bu tasarımlar hata tabanlı olarak çalışan ITAE yöntemi kullanılarak optimize edilmiştir.

Bu çalışmalar yapılırken özgün tasarımın üretimi gerçekleştirilmiştir. Bu üretim eklemeli ve boşaltmalı imalat teknikleri kullanılarak laboratuvar ortamında yapılmıştır. Tez kapsamındaki robotik ürün temel olarak, kontrol kutusu, kontrol paneli, dış iskelet mekanizması ve uç efektör bölümlerinden oluşmaktadır. Fiziksel sistemin kurulumundan sonra bilgisayarda motor kontrol arayüzü geliştirilmesi ve uygun yazılımların geliştirilmesi yapılmıştır. Bu yazılımlar ile DC motorlar kontrol edilmiştir. Genel olarak 2B ve 3B benzetim çalışmaları fiziksel sistemden alınan egzersiz verileri ile karşılaştırmalı olarak sunulmuştur.

1.8. Tez Çalışmasının Amacı ve Literatüre Katkıları

Bu doktora tez çalışmasının amacı, kaza, travma veya hastalık sonucunda meydana gelen işlevsel bozuklukların tedavisinde kullanılmak üzere, elin doğal hareketlerini bozmayan, germe ve kuvvetlendirme aşamalarını yapabilen, parmak ve ön kol üzerine yerleştirilen, hafif, güvenli, ucuz ve çok serbestlik dereceli prototip dış iskelet rehabilitasyon robotunun üretilip, literatürdeki kontrol teknikleri kullanılarak pasif, izometrik ve aktif egzersizlerin uygulanabilmesidir.

Bu amaç doğrultusunda çalışmanın hedefleri aşağıdaki gibi belirlenmiştir:

- İlk hedef 18 serbestlik dereceli kablo iletimli bir dış iskelet rehabilitasyon robotunun mekanik tasarımının gerçekleştirilmesidir.
- İkinci hedef, sistemin matematiksel modelinin daha önce bir el rehabilitasyon robotunun modellenmesinde kullanılmamış olan enerji yöntemlerinden Lagrange yöntemi ile elde edilmesidir.
- Üçüncü hedef, matematiksel modeli elde edilen sistem üzerinde farklı rehabilitasyon egzersizleri için kullanılacak olan kontrol stratejilerinin başarılı bir şekilde uygulanmasıdır. Literatürde daha önce kullanılmamış olan HKKK ve HPID algoritmaları, optimizasyon parametreleri ile birlikte kullanılacaktır.
- Dördüncü hedef, rehabilitasyon kriterlerine uygun el-el bileği dış iskelet robotunun imalatının gerçekleştirilmesidir.
- Beşinci hedef, robotun mekanik ve elektronik bileşenlerinin uyum içinde kontrol amaçlı kullanılabilmesidir. Bu bağlamda sağlıklı bir denek üzerinde pasif, izometrik ve aktif egzersizlerin gerçekleştirilmesidir.
- Altıncı hedef, geliştirilen rehabilitasyon robotunun ticari ürüne dönüşmesi için patent başvurusu yapmaktır.
- Yedinci hedef, literatürde daha önce ele alınmamış bir yöntemle geliştirilen el-el bileği rehabilitasyon robotu geliştirilerek ulusal ve uluslararası çalışmalara katkı sunmaktır.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Mekanizmanın Matematiksel Modelinin Çıkarılması

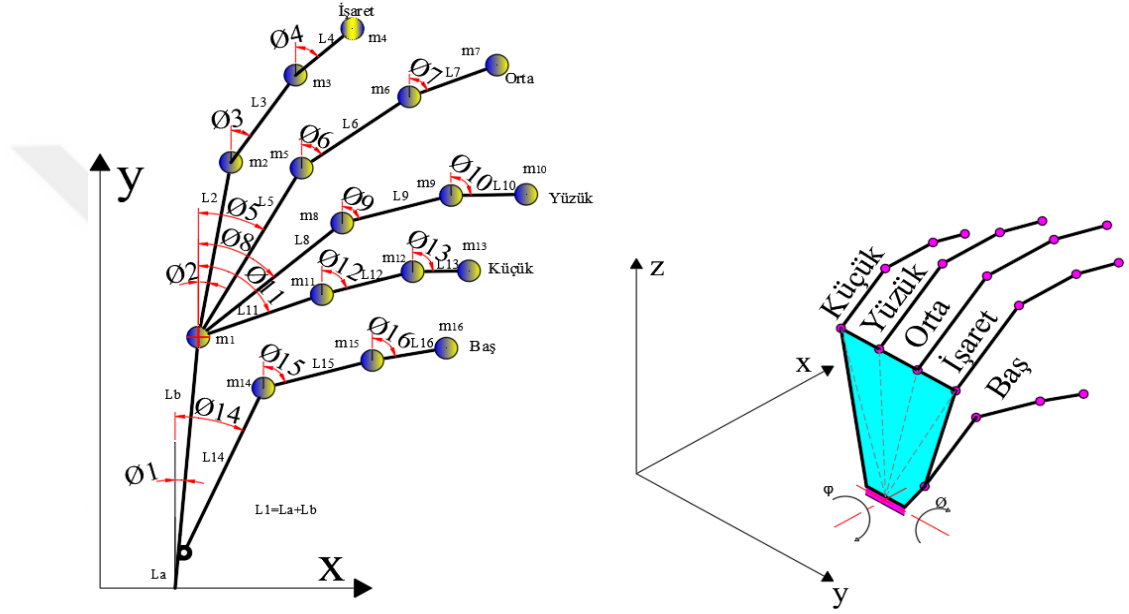
Elin biyomekanik modeli için uzuvların yapısı ve serbestlik dereceleri dikkate alınmıştır. IP ve DIP eklemleri, sadece bir adet fleksiyon / ekstansiyon serbestlik derecesine sahiptirler. CMC ve MCP eklemleri ise hem fleksiyon / ekstansiyon hem de abdüksiyon / addüksiyon olmak üzere iki serbestlik derecesine sahiptirler. Bilek eklemi de fleksiyon / ekstansiyon ve abdüksiyon / addüksiyon olmak üzere iki serbestlik derecelidir (Serbest, 2017). Bu doktora tez çalışmasında yer alan eklem-uzuv modelinin çözümü için Lagrange mekaniği prensiplerine göre basitleştirilmiş bir matematiksel ifade geliştirilmiştir (Winter, 1990). Lagrange yöntemi; sisteme uygulanan kuvvetten bağımsız, sistemin enerjisi üzerine çalışan bir matematiksel çözüm yöntemidir. Bu tez çalışması kapsamında sistemin genel dinamik denklemleri çıkarılırken, el kaslarının ve tendonların dinamiği, sürtünmeler ve diğer bozucu etkiler, çözüm kolaylığı açısından ihmal edilmiştir. Bu basit model ile benzetim çalışmalarında elde edilen sonuçlara göre eklem torkları yaklaşık doğrulukla hesaplanmıştır. Bu nedenle basitleştirilmiş Lagrange modeli tezin devamında kullanılmıştır.

2.1.1. 16 SD'li Sistemin Modellenmesi

Elin biyomekanik modeli çıkarılırken, parmaklar, falankslardan oluşan 3 uzuvlu bir yapı şeklide modellenmiştir. Avuç bölgesi ise metakarpal kemiklerden oluşan tek bir uzuv olarak gösterilmiştir. Bilek eklemi, avuç ile radius kemiği arasında olacak şekilde modellenmiştir (Nordin & Frankel, 2012; Serbest, 2017). El ve el bileği sistemi çok serbestlik dereceli olduğundan öncelikli olarak sistemin fleksiyon/ekstansiyon hareketi durumunda iki boyuttaki matematiksel modeli çıkarılmış ve benzetim gerçekleştirilmiştir. Daha sonra radyal/ulnar deviasyon hareketi eklenerek üç boyutlu 18 serbestlik dereceli sistemin matematiksel modeli elde edilmiş ve benzetimi gerçekleştirilmiştir. Genelleştirilmiş eksene göre el-el bileği modeli detayları Tablo 2'de ve Şekil 11'de kinematik gösterimi verilmiştir. Şekilde uzuvların her birinin katı cisim olarak ele alındığı ve yumuşak doku elemanlarının sisteme dahil edilmediği görülmektedir.

Tablo 2. 16 SD'li sistem için kullanılan parametreler

	Bilek	İşaret	Orta	Yüzük	Küçük	Baş
2B değişkeni	$\ddot{\theta}_1$	$\ddot{\theta}_2, \ddot{\theta}_3, \ddot{\theta}_4$	$\ddot{\theta}_5, \ddot{\theta}_6, \ddot{\theta}_7$	$\ddot{\theta}_8, \ddot{\theta}_9, \ddot{\theta}_{10}$	$\ddot{\theta}_{11}, \ddot{\theta}_{12}, \ddot{\theta}_{13}$	$\ddot{\theta}_{14}, \ddot{\theta}_{15}, \ddot{\theta}_{16}$
K. enerji	T_1	T_2, T_3, T_4	T_5, T_6, T_7	T_8, T_9, T_{10}	T_{11}, T_{12}, T_{13}	T_{14}, T_{15}, T_{16}
P. enerji	V_1	V_2, V_3, V_4	V_5, V_6, V_7	V_8, V_9, V_{10}	V_{11}, V_{12}, V_{13}	V_{14}, V_{15}, V_{16}
Sabit kütleler	m_1	m_2, m_3, m_4	m_5, m_6, m_7	m_8, m_9, m_{10}	m_{11}, m_{12}, m_{13}	m_{14}, m_{15}, m_{16}



Şekil 11. 16 SD'li el-el bileğinin hareketi

Lagrange fonksiyonu sistemin kinetik enerjisi ile potansiyel enerjisi arasındaki fark olarak tanımlanır. Langrange denklemlerini türetebilmek için sistem öncelikle Şekil 13'de görülen beş parmak için dört kütleli uzvun dinamik davranışı şeklinde ele alınarak incelenmiştir. Burada m_i falanksların kütlelerini, L_i uzuv uzunluklarını, θ_i açısal yer değiştirmelerini ifade etmektedir. Sistemin kinetik ve potansiyel enerji dengesini ifade edebilmek için açısal yer değiştirmeler kartezyen koordinat sistemine göre düzenlenerek bağıntılar geliştirilir. Lagrange fonksiyonu,

$$L = T - V \quad (9)$$

biçiminde verilmiştir. Burada T kinetik enerji ve V potansiyel enerjidir. Kinetik ve potansiyel enerjiler,

$$T_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 \rightarrow i = 1:16 \quad (10)$$

$$T = \sum_{i=1}^{16} T_i \quad (11)$$

$$V_i = m_i g h_i \rightarrow i = 1:16 \quad (12)$$

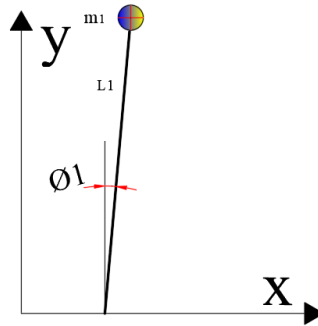
$$V = \sum_{i=1}^{16} V_i \quad (13)$$

biçiminde verilmiştir. Burada v_i , i . eklem için hızı ifade etmektedir. h_i yüksekliktir. Kinetik ve potansiyel enerjiler elde edildikten sonra Lagrange eşitliği yazılır.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = \tau_i \quad i = 1:16 \quad (14)$$

Kinetik enerji dengesi θ_i genelleştirilmiş koordinatına göre düzenlenir. Denklem 14' deki Lagrange ifadesinin sağ tarafı τ_i şeklinde ifade edilen genelleştirilmiş bir dış kuvvete eşitlenerek sistemin dinamik davranışı incelenir. Böylece, hareketin (θ_i) bilinmesi durumunda eklem torkları hesaplanabilir. Yüksek mertebeden doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin çözümü için sayısal yöntemlerden faydalanılır.

Şekil 12' de m_1 kütlelerinin potansiyel ve kinetik enerjisini bulmak için iki boyutlu düzlemdeki konumları verilmiştir.



Şekil 12. 16 SD'li sistemde tek uzvun konumu

Bu konumlar,

$$\begin{aligned} x_1 &= L_1 \sin \theta_1 \\ y_1 &= L_1 \cos \theta_1 \end{aligned} \quad (15)$$

biçiminde tanımlanmıştır. Bu eşitlikteki değişkenlerin türevi alınır.

$$\dot{x}_1 = \dot{\theta}_1 L_1 \cos \theta_1, \dot{y}_1 = -\dot{\theta}_1 L_1 \sin \theta_1 \quad (16)$$

elde edilir. Buradan kinetik ve potansiyel enerjiler, T_1 ve V_1 hesaplanır.

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \rightarrow \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) \quad (17)$$

$$\dot{x}_1^2 = \dot{\theta}_1^2 L_1^2 c^2 \theta_1 \quad (18)$$

$$\dot{y}_1^2 = \dot{\theta}_1^2 L_1^2 s^2 \theta_1$$

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{\theta}_1^2 L_1^2 c^2 \theta_1 + \dot{\theta}_1^2 L_1^2 s^2 \theta_1) \quad (19)$$

$$T_1 = 0.5 m_1 \dot{\theta}_1^2 L_1^2 (c^2 \theta_1 + s^2 \theta_1) \quad (20)$$

m_1 kütlelerinin kinetik enerjisi,

$$T_1 = 0.5 m_1 \dot{\theta}_1^2 L_1^2 \quad (21)$$

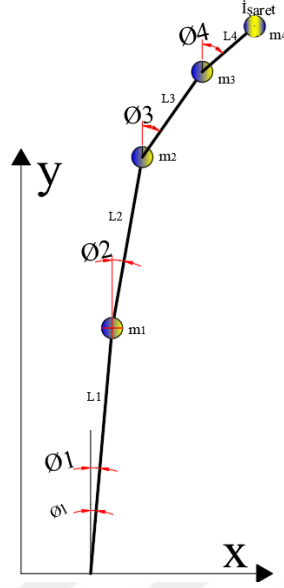
biçiminde verilmiştir. Potansiyel enerji eşitliği,

$$V_1 = m_1 g h_1 \quad (22)$$

$$V_1 = m_1 g L_1 \cos \theta_1 \quad (23)$$

biçiminde verilmiştir. Her bir kütle için kinetik ve potansiyel enerjiler ilgili cebirsel işlemler ışığında elde edilir ve 16 kütle için Lagrange enerji modeli açısal ivmesinin bulunması için diğer 15 uzvun kinetik ve potansiyel enerjilerinin bulunması gerekmektedir. Bu eşitlik,

$$L = T_i - V_i \quad i = 1:16 \quad (24)$$



Şekil 13. 16 SD'li sistemde işaret parmağı modeli

Şekil 13 de m_4 kütlesinin potansiyel ve kinetik enerjisini bulmak için iki boyutlu düzlemdeki konumları belirlenir. Bu konumlar,

$$\begin{aligned} x_4 &= L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin \theta_2 + L_3 \sin \theta_3 + L_4 \sin \theta_4 \\ y_4 &= L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos \theta_2 + L_3 \cos \theta_3 + L_4 \cos \theta_4 \end{aligned} \quad (25)$$

biçiminde tanımlanır. Bu eşitlikteki değişkenlerin türevi alınır. Bu değişkenlerin türev alma sırası $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ ve θ_4 'e göre türev alınır. Türev alma işlemlerinden sonra kinetik enerji,

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 &= \dot{\theta}_1 L_1 \cos \theta_1 + \dot{\theta}_2 L_2 \cos \theta_2 + \dot{\theta}_3 L_3 \cos \theta_3 + \dot{\theta}_4 L_4 \cos \theta_4 \\ \dot{y}_4 &= -\dot{\theta}_1 L_1 \sin \theta_1 - \dot{\theta}_2 L_2 \sin \theta_2 - \dot{\theta}_3 L_3 \sin \theta_3 - \dot{\theta}_4 L_4 \sin \theta_4 \end{aligned} \quad (26)$$

$$T_4 = \frac{1}{2} m_4 v_4^2 = \frac{1}{2} m_4 (\dot{x}_4^2 + \dot{y}_4^2) \quad (27)$$

İşlemler ortak paranteze alınır ve trigonometrik özdeşlikler uygulanır. Buna göre, kinetik enerji,

$$T_4 = 0.5m_4 \left(\begin{aligned} &\dot{\theta}_1^2 L_1^2 + \dot{\theta}_2^2 L_2^2 + \dot{\theta}_3^2 L_3^2 + \dot{\theta}_4^2 L_4^2 \\ &+ 2 \left(\begin{aligned} &\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 L_1 L_2 c(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 L_1 L_3 c(\theta_1 - \theta_3) \\ &+ \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 L_1 L_4 c(\theta_1 - \theta_4) + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 L_2 L_3 c(\theta_2 - \theta_3) \\ &+ \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 L_2 L_4 c(\theta_2 - \theta_4) + \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 L_3 L_4 c(\theta_3 - \theta_4) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \quad (28)$$

biçiminde tanımlanır.

Potansiyel enerji,

$$V_4 = m_4 g h_4 \quad (29)$$

$$V_4 = m_4 g (L_1 c \theta_1 + L_2 c \theta_2 + L_3 c \theta_3 + L_4 c \theta_4) \quad (30)$$

biçiminde tanımlanır. İşaret parmağının kinetik (T) ve potansiyel (V) enerjisinin bulunması tamamlanmıştır. L_1 işaret parmağı Lagrange fonksiyonunu göstermek üzere, kinetik ve potansiyel enerjiler Lagrange fonksiyonunda yerine yazılırsa,

$$L_I = \left(\begin{aligned} &0.5 \left(\begin{aligned} &(m_1 + m_2 + m_3 + m_4) L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + (m_2 + m_3 + m_4) L_2^2 \dot{\theta}_2^2 + (m_3 + m_4) L_3^2 \dot{\theta}_3^2 \\ &+ m_4 L_4^2 \dot{\theta}_4^2 \end{aligned} \right) \\ &+ \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 L_1 L_2 c(\theta_1 - \theta_2)(m_2 + m_3 + m_4) + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 L_1 L_3 c(\theta_1 - \theta_3)(m_3 + m_4) \\ &+ \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 L_1 L_4 c(\theta_1 - \theta_4)m_4 + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 L_2 L_3 c(\theta_2 - \theta_3)(m_3 + m_4) \\ &+ \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 L_2 L_4 c(\theta_2 - \theta_4)m_4 + \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 L_3 L_4 c(\theta_3 - \theta_4)m_4 \\ &- \left(\begin{aligned} &(m_1 + m_2 + m_3 + m_4) g L_1 c \theta_1 + (m_2 + m_3 + m_4) g L_2 c \theta_2 \\ &+ (m_3 + m_4) g L_3 c \theta_3 + m_4 g L_4 c \theta_4 \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \quad (31)$$

biçiminde tanımlanır. Bu işlemler tekrarlanarak, her bir parmak için Lagrange ifadesi elde edilir. Fakat el bileği için tüm parmak eklemlerinin açılarına ihtiyaç vardır. Bu da Lagrange genel fonksiyonunda gösterilir. Lagrange modeline göre kinetik enerjiler toplamı T, potansiyel enerjiler toplamı V 'dir. Kinetik ve potansiyel enerjiler belirlendikten sonra Lagrange fonksiyonuna geçilir. Bu eşitlik,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = \tau_1 \quad (32)$$

biçiminde tanımlanır.

İşaret parmağı için Lagrange genel fonksiyonu elde edilmiş olur. Bu denklemler doğrultusunda genelleştirilmiş eksene göre türev alma işlemleri gerçekleştirilir. İşaret parmağındaki açılara bağlı olarak τ_2 , τ_3 ve τ_4 torklarının bulunması gerekmektedir. İşaret parmağı için torklar θ_2 , θ_3 ve θ_4 ivmelerinden türetilir. Diğer parmaklarda bu üç değişken yoktur. Bu sebeple türevleri sıfır “0” olmaktadır. Elde edilen Lagrange fonksiyonunun içinden $\ddot{\theta}_1$ ivme değişkeni eşitliği oluşturulur. Bu eşitlik,

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{\left(\begin{aligned} &\tau_1 + gL_1 s\theta_1(m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7 + m_8 + m_9 + m_{10} + m_{11} + m_{12} + m_{13}) \\ &+ gL_a s\theta_1(m_{14} + m_{15} + m_{16}) - \ddot{\theta}_2 L_1 L_2 c(\theta_1 - \theta_2)(m_2 + m_3 + m_4) - \ddot{\theta}_3 L_1 L_3 c(\theta_1 - \theta_3)(m_3 + m_4) \\ &- \ddot{\theta}_4 L_1 L_4 c(\theta_1 - \theta_4)m_4 - \ddot{\theta}_5 L_1 L_5 c(\theta_1 - \theta_5)(m_5 + m_6 + m_7) - \ddot{\theta}_6 L_1 L_6 c(\theta_1 - \theta_6)(m_6 + m_7) \\ &- \ddot{\theta}_7 L_1 L_7 c(\theta_1 - \theta_7)m_7 - \ddot{\theta}_8 L_1 L_8 c(\theta_1 - \theta_8)(m_8 + m_9 + m_{10}) - \ddot{\theta}_9 L_1 L_9 c(\theta_1 - \theta_9)(m_9 + m_{10}) \\ &- \ddot{\theta}_{10} L_1 L_{10} c(\theta_1 - \theta_{10})m_{10} - \ddot{\theta}_{11} L_1 L_{11} c(\theta_1 - \theta_{11})(m_{11} + m_{12} + m_{13}) - \ddot{\theta}_{12} L_1 L_{12} c(\theta_1 - \theta_{12})(m_{12} + m_{13}) \\ &- \ddot{\theta}_{13} L_1 L_{13} c(\theta_1 - \theta_{13})m_{13} - \ddot{\theta}_{14} L_a L_{14} c(\theta_1 - \theta_{14})(m_{14} + m_{15} + m_{16}) - \ddot{\theta}_{15} L_a L_{15} c(\theta_1 - \theta_{15})(m_{15} + m_{16}) \\ &- \ddot{\theta}_{16} L_a L_{16} c(\theta_1 - \theta_{16})m_{16} - \dot{\theta}_2^2 L_1 L_2 s(\theta_1 - \theta_2)(m_2 + m_3 + m_4) - \dot{\theta}_3^2 L_1 L_3 s(\theta_1 - \theta_3)(m_3 + m_4) \\ &- \dot{\theta}_4^2 L_1 L_4 s(\theta_1 - \theta_4)m_4 - \dot{\theta}_5^2 L_1 L_5 s(\theta_1 - \theta_5)(m_5 + m_6 + m_7) - \dot{\theta}_6^2 L_1 L_6 s(\theta_1 - \theta_6)(m_6 + m_7) \\ &- \dot{\theta}_7^2 L_1 L_7 s(\theta_1 - \theta_7)m_7 - \dot{\theta}_8^2 L_1 L_8 s(\theta_1 - \theta_8)(m_8 + m_9 + m_{10}) - \dot{\theta}_9^2 L_1 L_9 s(\theta_1 - \theta_9)(m_9 + m_{10}) \\ &- \dot{\theta}_{10}^2 L_1 L_{10} s(\theta_1 - \theta_{10})m_{10} - \dot{\theta}_{11}^2 L_1 L_{11} \sin(\theta_1 - \theta_{11})(m_{11} + m_{12} + m_{13}) - \dot{\theta}_{12}^2 L_1 L_{12} s(\theta_1 - \theta_{12})(m_{12} + m_{13}) \\ &- \dot{\theta}_{13}^2 L_1 L_{13} s(\theta_1 - \theta_{13})m_{13} - \dot{\theta}_{14}^2 L_a L_{14} s(\theta_1 - \theta_{14})(m_{14} + m_{15} + m_{16}) - \dot{\theta}_{15}^2 L_a L_{15} s(\theta_1 - \theta_{15})(m_{15} + m_{16}) \\ &- \dot{\theta}_{16}^2 L_a L_{16} s(\theta_1 - \theta_{16})m_{16} \end{aligned} \right)}{L_1^2 (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7 + m_8 + m_9 + m_{10} + m_{11} + m_{12} + m_{13}) + L_a^2 (m_{14} + m_{15} + m_{16})} \quad (33)$$

biçiminde elde edilir.

Lagrange fonksiyonu,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_i}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L_i}{\partial \theta_i} = \tau_i, \quad i = 2 : 4, \quad (34)$$

biçiminde tanımlanır.

Bu eşitliklerden τ_2 eşitliğine bağlı olarak Lagrange fonksiyonu,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_4}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L_4}{\partial \theta_2} = \tau_2 \quad (35)$$

biçiminde tanımlanır.

$\ddot{\theta}_2$ ivmesi

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{\begin{pmatrix} \tau_2 + gL_1 s\theta_2(m_2 + m_3 + m_4) - \ddot{\theta}_1 L_1 L_2 c(\theta_1 - \theta_2)(m_2 + m_3 + m_4) \\ -\ddot{\theta}_3 L_2 L_3 c(\theta_2 - \theta_3)(m_3 + m_4) - \ddot{\theta}_4 L_2 L_4 c(\theta_2 - \theta_4)m_4 \\ + \dot{\theta}_1^2 L_1 L_2 s(\theta_1 - \theta_2)(m_2 + m_3 + m_4) - \dot{\theta}_3^2 L_2 L_3 s(\theta_2 - \theta_3)(m_3 + m_4) \\ - \dot{\theta}_4^2 L_2 L_4 s(\theta_2 - \theta_4)m_4 \end{pmatrix}}{L_2^2(m_2 + m_3 + m_4)} \quad (36)$$

biçiminde tanımlanır.

τ_3 için Lagrange fonksiyonu,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_I}{\partial \dot{\theta}_3} \right) - \frac{\partial L_I}{\partial \theta_3} = \tau_3 \quad (37)$$

biçiminde tanımlanır.

Bu eşitlik,

$$\ddot{\theta}_3 = \frac{\begin{pmatrix} \tau_3 + gL_3 s\theta_3(m_3 + m_4) \\ -\ddot{\theta}_1 L_1 L_3 c(\theta_1 - \theta_3)(m_3 + m_4) - \ddot{\theta}_2 L_2 L_3 c(\theta_2 - \theta_3)(m_3 + m_4) \\ -\ddot{\theta}_4 L_3 L_4 c(\theta_3 - \theta_4)m_4 + \dot{\theta}_1^2 L_1 L_3 s(\theta_1 - \theta_3)(m_3 + m_4) \\ + \dot{\theta}_2^2 L_2 L_3 s(\theta_2 - \theta_3)(m_3 + m_4) - \dot{\theta}_4^2 L_3 L_4 s(\theta_3 - \theta_4)m_4 \end{pmatrix}}{L_3^2(m_3 + m_4)} \quad (38)$$

biçiminde tanımlanır.

Bu eşitliklerden τ_4 eşitliğine bağlı θ_4 ivme denklemi,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_I}{\partial \dot{\theta}_4} \right) - \frac{\partial L_I}{\partial \theta_4} = \tau_4 \quad (39)$$

Elde edilen Lagrange fonksiyonunun içinden $\ddot{\theta}_4$ ivme eşitliği oluşturulur. Bu eşitlik,

$$\ddot{\theta}_4 = \frac{\begin{pmatrix} \tau_4 + gL_4 s\theta_4 m_4 - \ddot{\theta}_1 L_1 L_4 c(\theta_1 - \theta_4) m_4 - \ddot{\theta}_2 L_2 L_4 c(\theta_2 - \theta_4) m_4 \\ -\ddot{\theta}_3 L_3 L_4 c(\theta_3 - \theta_4) m_4 + \dot{\theta}_1^2 L_1 L_4 s(\theta_1 - \theta_4) m_4 + \dot{\theta}_2^2 L_2 L_4 s(\theta_2 - \theta_4) m_4 \\ + \dot{\theta}_3^2 L_3 L_4 s(\theta_3 - \theta_4) m_4 \end{pmatrix}}{L_4^2 m_4} \quad (40)$$

biçiminde tanımlanır. $\ddot{\theta}_i$ ($i = 1: 16$) her eklem için elde edilir.

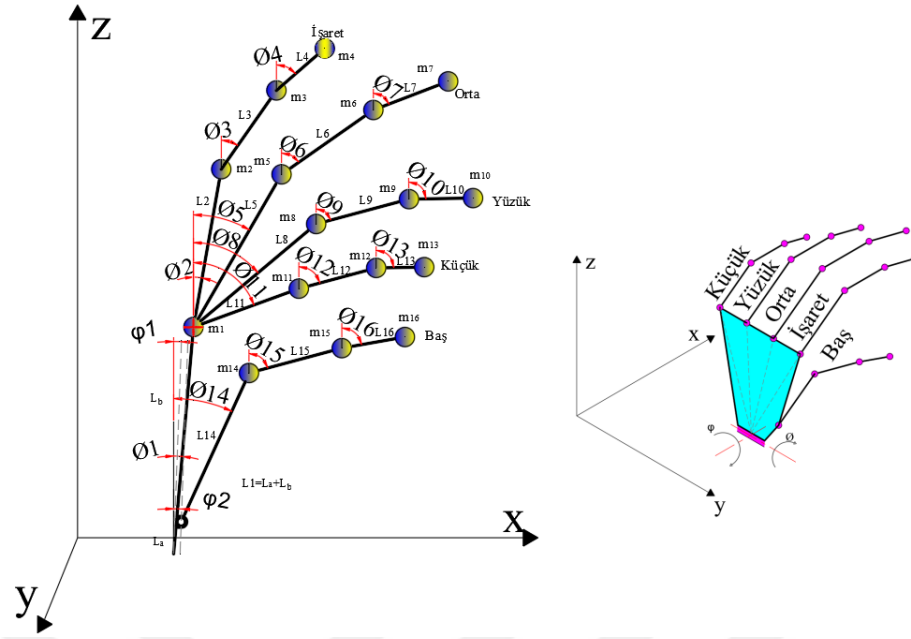
Diğer parmakların 2B hareketi için Tablo 2’deki değişkenler kullanılır. Bu değişkenler 4 aşamada tamamlanmaktadır. İşaret parmağı ile baş parmak aynı matematiksel denklemlere sahiptir. Tek fark indisler değişmektedir. Bu kütle numaraları $(m_2, m_5, m_8, m_{11}, m_{14})$, $(m_3, m_6, m_9, m_{12}, m_{15})$ ve $(m_4, m_7, m_{10}, m_{13}, m_{16})$ şeklindedir. θ_i değiştirilerek, beş uzuv ve her uzvun üç ayrı eklemi için konum, hız ve ivme eşitlikleri elde edilmiş olur. Denklem detayları ekler bölümündeki EK-A kısmında açıklanmıştır.

2.1.2. 18 SD’li Sistemin Modellenmesi

Bilek eklemının radyal/ulnar deviasyonunun dikkate alındığı üç boyutlu XYZ düzlemindeki bilek kısmı ZY eksenini φ_1 açısı ile temsil edilmektedir. Baş parmak TMC ZY eksenini de φ_2 açısı ile temsil edilmektedir. El-el bileği 3B modeline ait parametreler Tablo 3’de ve genel görünümü Şekil 14’de verilmiştir.

Tablo 3. 18 SD’li sistemin parametreleri

	Bilek	İşaret	Orta	Yüzük	Küçük	Baş
YZ Ek. değişkeni	$\ddot{\varphi}_1$	$\ddot{\varphi}_1$	$\ddot{\varphi}_1$	$\ddot{\varphi}_1$	$\ddot{\varphi}_1$	$\ddot{\varphi}_2$
XZ Ek. değişkeni	$\ddot{\theta}_1$	$\ddot{\theta}_2, \ddot{\theta}_3, \ddot{\theta}_4$	$\ddot{\theta}_5, \ddot{\theta}_6, \ddot{\theta}_7$	$\ddot{\theta}_8, \ddot{\theta}_9, \ddot{\theta}_{10}$	$\ddot{\theta}_{11}, \ddot{\theta}_{12}, \ddot{\theta}_{13}$	$\ddot{\theta}_{14}, \ddot{\theta}_{15}, \ddot{\theta}_{16}$
K. enerji	T_1	T_2, T_3, T_4	T_5, T_6, T_7	T_8, T_9, T_{10}	T_{11}, T_{12}, T_{13}	T_{14}, T_{15}, T_{16}
P. enerji	V_1	V_2, V_3, V_4	V_5, V_6, V_7	V_8, V_9, V_{10}	V_{11}, V_{12}, V_{13}	V_{14}, V_{15}, V_{16}
Sabit kütleler	m_1	m_2, m_3, m_4	m_5, m_6, m_7	m_8, m_9, m_{10}	m_{11}, m_{12}, m_{13}	m_{14}, m_{15}, m_{16}



Şekil 14. 18 SD'li el-el bileğinin hareketi

Şekil 14' de belirlenen modelin Lagrange enerji fonksiyonunun kinetik ve potansiyel enerjileri,

$$T_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 \rightarrow i = 1:16 \quad (41)$$

$$T = \sum_{i=1}^{16} T_i \quad (42)$$

$$V_i = m_i g h_i \rightarrow i = 1:16 \quad (43)$$

$$V = \sum_{i=1}^{16} V_i \quad (44)$$

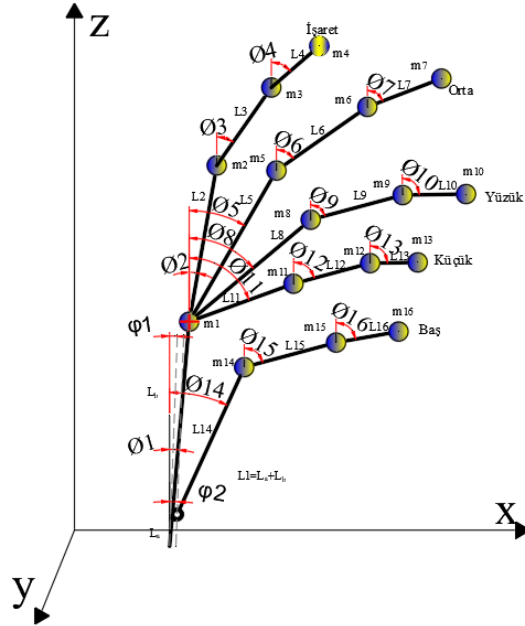
biçiminde verilmiştir. Buradaki v_i i. kütlenin hızını ifade etmektedir. h_i yüksekliği ifade etmektedir. Kinetik ve potansiyel enerjiler elde edildikten sonra Lagrange genel eşitliği, θ_i , $i=1:16$ ve φ_i , $i=1:2$ genelleştirilmiş koordinatları için elde edilir.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = \tau_i, \quad i = 1:16, \quad (45)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_i} = \tau_i \quad \begin{cases} i:1 \rightarrow \tau_{17} \\ i:2 \rightarrow \tau_{18} \end{cases} \quad (46)$$

biçiminde verilmiştir.

İlk dört dijite ait $\ddot{\theta}_i$, $i=1:13$ ve $\ddot{\varphi}_i$ ivme eşitlikleri ve τ_i , $i=1:13$ eşitlikleri elde edilerek, EK-B kısmında sunulmuştur. Bu bölümde, Şekil 15’de başparmağın m_{14} , m_{15} ve m_{16} kütesinin toplam kinetik T_{16} ve toplam potansiyel V_{16} enerjileri verilmiştir. Diğer parmakların 3B hareketi için Tablo 3’deki değişkenler kullanılır. Bu değişkenler 4 aşamada tamamlanmaktadır. İşaret, orta, yüzük ve küçük parmak benzer matematiksel modele sahiptir. Başparmağın matematiksel modelinde φ_2 değişkeni olduğundan, diğer parmaklardan farklıdır. İlk dört dijit için (m_2, m_5, m_8, m_{11}) , (m_3, m_6, m_9, m_{12}) ve $(m_4, m_7, m_{10}, m_{13})$ şeklindedir. Denklem detayları ekler bölümündeki EK-B kısmında açıklanmıştır. Baş parmağın sahip olduğu kütlelerin indisleri (m_{14}, m_{15}, m_{16}) şeklindedir.



Şekil 15. 18 SD’li el-el bileğinin modeli

Şekil 15’de gösterilen m_{16} kütesinin konumu,

$$x_{16} = L_a c \varphi_1 s \theta_1 + L_{14} c \varphi_2 s \theta_{14} + L_{15} c \varphi_2 s \theta_{15} + L_{16} c \varphi_2 s \theta_{16} \quad (47)$$

$$y_{16} = L_a c \theta_1 s \varphi_1 + L_{14} c \theta_{14} s \varphi_2 + L_{15} c \theta_{15} s \varphi_2 + L_{16} c \theta_{16} s \varphi_2$$

$$z_{16} = L_a c \varphi_1 c \theta_1 + L_{14} c \varphi_2 c \theta_{14} + L_{15} c \varphi_2 c \theta_{15} + L_{16} c \varphi_2 c \theta_{16}$$

eşitlikleri ile tanımlanır.

$$\begin{aligned} \dot{x}_{16} &= \begin{pmatrix} -L_a \dot{\varphi}_1 s \varphi_1 s \theta_1 + L_a \dot{\theta}_1 c \varphi_1 c \theta_1 + L_{14} \dot{\theta}_{14} c \varphi_2 c \theta_{14} + \dot{\varphi}_2 (-L_{14} s \varphi_2 s \theta_{14} - L_{15} s \varphi_2 s \theta_{15} - L_{16} s \varphi_2 s \theta_{16}) \\ + L_{15} \dot{\theta}_{15} c \varphi_2 c \theta_{15} + L_{16} \dot{\theta}_{16} c \varphi_2 c \theta_{16} \end{pmatrix} \\ \dot{y}_{16} &= \begin{pmatrix} L_a \dot{\varphi}_1 c \theta_1 c \varphi_1 - L_a \dot{\theta}_1 s \theta_1 s \varphi_1 - L_{14} \dot{\theta}_{14} s \theta_{14} s \varphi_2 + \dot{\varphi}_2 (L_{14} c \theta_{14} c \varphi_2 + L_{15} c \theta_{15} c \varphi_2 + L_{16} c \theta_{16} c \varphi_2) \\ - L_{15} \dot{\theta}_{15} s \theta_{15} s \varphi_2 - L_{16} \dot{\theta}_{16} s \theta_{16} s \varphi_2 \end{pmatrix} \\ \dot{z}_{16} &= \begin{pmatrix} -L_a \dot{\varphi}_1 s \varphi_1 c \theta_1 + L_a \dot{\theta}_1 c \varphi_1 s \theta_1 - L_{14} \dot{\theta}_{14} c \varphi_2 s \theta_{14} + \dot{\varphi}_2 (-L_{14} s \varphi_2 c \theta_{14} - L_{15} s \varphi_2 c \theta_{15} - L_{16} s \varphi_2 c \theta_{16}) \\ - L_{15} \dot{\theta}_{15} c \varphi_2 s \theta_{15} - L_{16} \dot{\theta}_{16} c \varphi_2 s \theta_{16} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (48)$$

hesaplanarak toplam kinetik ve potansiyel enerjiler elde edilir.

$$T_{16} = \frac{1}{2} m_{16} v_{16}^2 \rightarrow \frac{1}{2} m_{16} (\dot{x}_{16}^2 + \dot{y}_{16}^2 + \dot{z}_{16}^2) \quad (49)$$

biçiminde tanımlanır. Baş parmağın Lagrange fonksiyonunda kinetik ve potansiyel enerjiler yerine yazılır ve düzenlenirse,

$$T_T = T_{14} + T_{15} + T_{16} \quad (50)$$

biçiminde elde edilir. EK-B 1’de kinetik ve potansiyel enerjinin bulunma aşamaları verilmiştir. Bu eşitlik biçiminde,

$$\begin{aligned} T_T &= C_1 + C_2 + C_3 + C_4 \\ V_T &= V_{14} + V_{15} + V_{16} \end{aligned} \quad (51)$$

C_1, C_2, C_3, C_4 değişkenleri EK-B31’de verilmiştir. Bu eşitlikteki T_T baş parmağın toplam kinetik enerjisi ve V_T toplam potansiyel enerjisidir.

Baş parmak için Lagrange genel fonksiyonu elde edilmiş olur. Bu denkleme göre $\tau_{14}, \tau_{15}, \tau_{16}, \tau_{17}$ ve τ_{18} torklarının bulunması gerekmektedir. Baş parmağın torku için $\ddot{\theta}_{14}, \ddot{\theta}_{15}, \ddot{\theta}_{16}, \ddot{\varphi}_1$ ve $\ddot{\varphi}_2$ açısal ivme değerlerinin bulunması yeterlidir. Diğer parmaklarda $\ddot{\theta}_{14}, \ddot{\theta}_{15}, \ddot{\theta}_{16}$ ve $\ddot{\varphi}_2$ değişkenleri yoktur. Bu sebeple türevleri sıfır “0”dır. Lagrange denklemleri,

$$L_T = (C_1 + C_2 + C_3 + C_4) - V_T \quad (52)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_T}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L_T}{\partial \theta_i} = \tau_i \quad i = 14:16 \quad (53)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_T}{\partial \dot{\phi}_1} \right) - \frac{\partial L_T}{\partial \phi_1} = \tau_{17}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_T}{\partial \dot{\phi}_2} \right) - \frac{\partial L_T}{\partial \phi_2} = \tau_{18} \quad (54)$$

biçiminde tanımlanır.

Gerekli cebirsel işlemler sonucunda $\ddot{\theta}_{14}$ ivme değişkeni elde edilir.

$$\ddot{\theta}_{14} = \frac{\left(\tau_{14} + \frac{\partial L_T}{\partial \theta_{14}} \left(df_{11} + df_{12} + d\theta_{14} + d\theta_{15} + d\theta_{16} \right) \right)}{L_{14}^2 \left(c^2 \phi_2^2 c^2 \theta_{14} + s^2 \theta_{14} \right) (m_{14} + m_{15} + m_{16})} \quad (55)$$

Bu eşitlikteki değişkenler EK-B kısmında ayrıntılı verilmiştir. Aynı şekilde τ_{15} eşitliğine bağlı $\ddot{\theta}_{15}$ ivme denklemi,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_T}{\partial \dot{\theta}_{15}} \right) - \frac{\partial L_T}{\partial \theta_{15}} = \tau_{15} \quad (56)$$

biçiminde verilmiştir. $\ddot{\theta}_{15}$

$$\ddot{\theta}_{15} = \frac{\tau_{15} + \frac{\partial L_T}{\partial \theta_{15}} \left(df_{11} + df_{12} + d\theta_{14} + d\theta_{15} + d\theta_{16} \right)}{L_{15}^2 \left(c^2 \phi_2^2 c^2 \theta_{15} + s^2 \theta_{15} \right) (m_{15} + m_{16})} \quad (57)$$

biçiminde tanımlanır. Bu eşitlikteki değişkenler EK-B kısmında ayrıntılı verilmiştir.

Lagrange fonksiyonunda τ_{16} eşitliğine bağlı $\ddot{\theta}_{16}$ ivme denklemi,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_T}{\partial \dot{\theta}_{16}} \right) - \frac{\partial L_T}{\partial \theta_{16}} = \tau_{16} \quad (58)$$

verilmiştir. $\ddot{\theta}_{16}$ ivme eşitliği

$$\ddot{\theta}_{16} = \frac{\left(\tau_{16} + \frac{\partial L_T}{\partial \theta_{16}} - \left(\frac{df_{i1} + df_{i2} + d\theta_{14} + d\theta_{15} + d\theta_{16}}{f_{i1} + f_{i2} + \theta_{14} + \theta_{15} + \theta_{16}} \right) \right)}{m_{16} L_{16}^2 (c^2 \varphi_2 c^2 \theta_{16} + s^2 \theta_{16})} \quad (59)$$

biçiminde tanımlanır. Bu eşitlikteki değişkenler EK-B kısmında ayrıntılı verilmiştir. Lagrange fonksiyonunda τ_{18} eşitliğine bağlı $\ddot{\varphi}_2$ ivme denklemi,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_T}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) - \frac{\partial L_T}{\partial \varphi_2} = \tau_{18} \quad (60)$$

biçiminde verilir. Elde edilen Lagrange fonksiyonunun içinden $\ddot{\varphi}_2$ ivme değişkeni eşitliği oluşturulur. Bu eşitlik,

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{\tau_{18} + \frac{\partial L_T}{\partial \varphi_2} - \left(\frac{df_{i1} + df_{i2} + d\theta_{14} + d\theta_{15} + d\theta_{16}}{f_{i1} + f_{i2} + \theta_{14} + \theta_{15} + \theta_{16}} \right)}{\left[\begin{aligned} &m_{14} L_{14}^2 (s^2 \varphi_2 s^2 \theta_{14} + c^2 \theta_{14}) \\ &+ m_{15} \left(L_{14}^2 (c^2 \theta_{14} c^2 \varphi_2 + s^2 \theta_{14}) + L_{15}^2 (c^2 \theta_{15} c^2 \varphi_2 + c^2 \theta_{15}) \right. \\ &\quad \left. + L_{14} L_{15} (s^2 \varphi_2 s \theta_{14} s \theta_{15} + c^2 \varphi_2 c \theta_{14} c \theta_{15} + s^2 \varphi_2 c \theta_{14} c \theta_{15}) \right) \\ &+ m_{16} \left(L_{14}^2 (s^2 \varphi_2 s^2 \theta_{14} + c^2 \theta_{14}) + L_{15}^2 (s^2 \varphi_2 s^2 \theta_{15} + c^2 \theta_{15}) \right. \\ &\quad \left. + L_{16}^2 (s^2 \varphi_2 s^2 \theta_{16} + c^2 \theta_{16}) \right) \end{aligned} \right]} \quad (61)$$

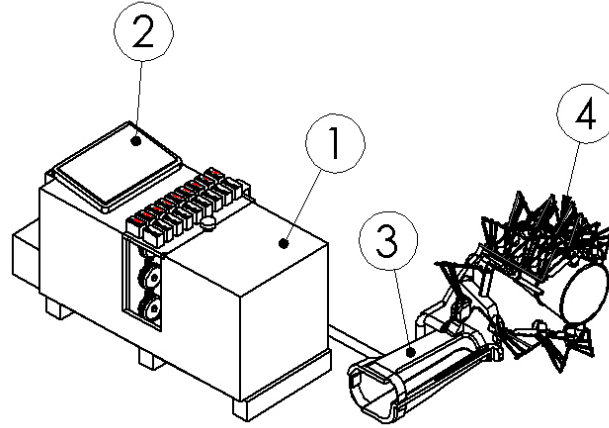
biçiminde tanımlanır. Denklem detayları ve ara işlemler EK-B kısmında verilmiştir.

2.2. Prototip Dış İskelet Robotunun Üretimi

Bu doktora tezi kapsamında yapılan literatür taraması sonucunda, tasarlanıp imal edilecek olan dış iskelet robotunun pek çok açıdan farklı özelliklere sahip olması

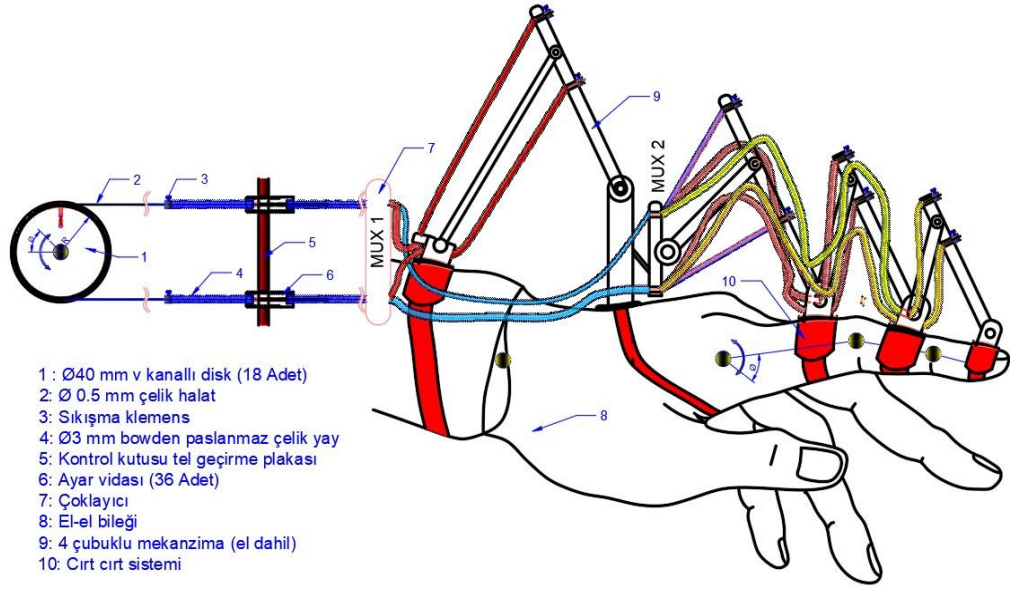
hedeflenmiştir. Bu hedefler hem ev hem de rehabilitasyon merkezlerinde kullanılabilecek, kullanımı kolay, pratik takılıp çıkarılabilen, çok yüksek maliyetli olmayan, elin fleksiyon/ekstansiyon ve radyal/ulnar deviasyonuna imkan tanıyan, her bir parmak eklemlerinin hareket denetiminin yapılabilirdiği, düşük ve ileri seviye rahatsızlıklarda farklı egzersiz tiplerine imkan tanıyan, emniyetli ve kullanıcı bilgilerinin tutulabildiği bir arayüze sahip olan bir sistem geliştirilmesi olarak belirlenmiştir.

Dış iskelet rehabilitasyon robot sistemi dört temel bölümden oluşmaktadır. Bu bölümler elektronik ve mekanik parçaların bir arada olduğu bir kontrol ünitesi (1), kontrol paneli (2), el üzerine geçirilen dış iskelet robot manipülatörü (3) ve uç efektördür (4). Bu sistemin görüntüsü Şekil 16’de verilmiştir. 18 adet motor ve motor sürücü kartları bu kasa içerisine yerleştirilmiştir.



Şekil 16. Rehabilitasyon robotunun üç boyutlu modeli, kontrol ünitesi (1), kontrol paneli (2), robot manipülatörü (3) ve uç efektör (4)

El ve bilek üzerine cırtlarla takılacak olan robot prototipinin kinematik yapısı Şekil 17’de verilmiştir. Sistemin bölümleri şekil üzerinde 1’den 10’a kadar numaralandırılmıştır.



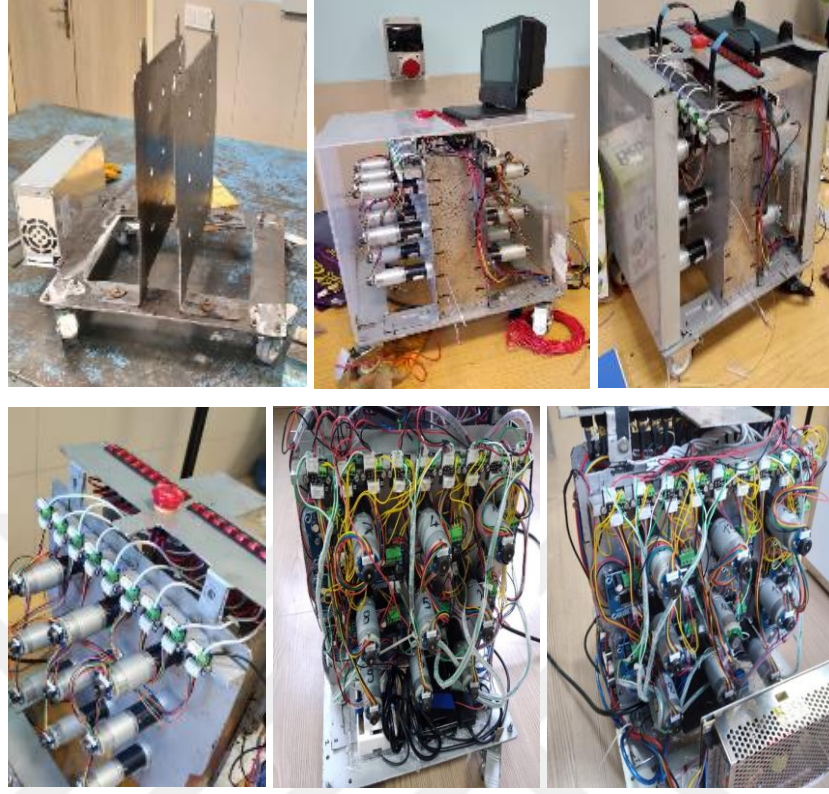
Şekil 17. Robotun kinematik yapısı

2.2.1. Kontrol Kutusu

Kontrol kutusu, kontrol ünitesi kapağı, enkoderli DC motor, güç adaptörü, kontrol ünitesi ana gövdesi, DC motor tutucusu, DC motor çelik tel sarma diski, acil durum butonu ve açma kapama anahtarlarından meydana gelmektedir. Kontrol kutusunun boyutları 40x30x45 cm şeklindedir. Genel görünümü Şekil 18’de verilmiştir. Kontrol kutusunun metal kısımları 2mm’lik sac plakadan, şeffaf kısımları ise polimer malzeme olan PVC’den üretilmiştir. Sistemi çalıştırmak için 18 adet enkoderli redüktörlü özelliğe sahip DC motor kullanılmıştır. Bu motorlar özelleştirilmiş yüksek kaliteli, düşük gürültülü ve yüksek torklu DC motorlarından biridir. Hall kodlayıcısı, şafttan 0,54 derecelik dönüşü algılayabilen dönüş başına 663 darbe verir. Bu motorların teknik özellikleri Tablo 4’ de verilmiştir. Bu doğru akım motorları üstün kaliteli bir üründür. Konum ölçümü doğrudan enkoderler ile sağlanmıştır.

Tablo 4. Enkoderli DC motor teknik özellikleri

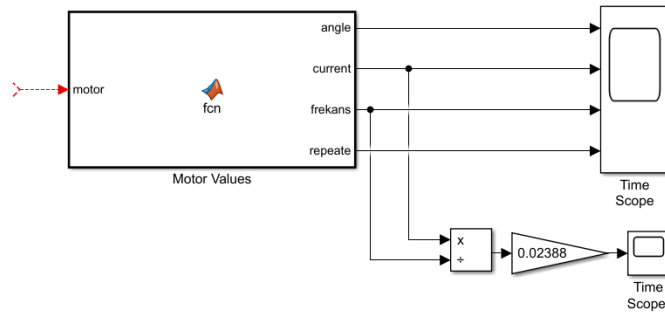
Marka	Model	Çalışma Gerilimi	Dişli Oranı	Anma Torku	Mak.Yük Akım	Ağırlık
DFrobot	28PA51G	12V	56: 1	10kg.cm	3.6A	270g



Şekil 18. Kontrol kutusu imalatı

Sistemde kullanıcı için acil durumlarda tüm sistemi kapatacak acil durum butonu Drn958 16mm ve her bir motor için mekanik açma-kapama düğmesi 2 cm DC118 3P kullanılmıştır. Ayrıca güç adaptörü olarak 12V ile çalışan elektronik devreler için uygun olan dijital ayarlanabilir 0-24V 40A metal kasa güç kaynağı kullanılmıştır.

Tork sensörleri çok yüksek fiyata satılmaktadırlar. Kontrol kutusunda kullanılan tork verileri bir elektronik devre ve uygun bir yazılım oluşturularak motor akımına bağlı olarak üretilmiştir. Bu nedenle, bu tez kapsamında alternatif bir yöntem olarak motor enkoder verilerinden tork değerini hesaplamak amacıyla MATLAB/Simulink üzerinden tork verisi elde edilerek kullanılmıştır. Bu uygulama Şekil 19’de gösterilmiştir.



Şekil 19. Tork verisi için oluşturulan Simulink blok diyagramı

2.2.2. Kontrol Paneli

Kontrol paneli olarak Raspberry Pi 7" ekran ve Smarti Pi Touch Pro kasası kullanılmıştır. Kontrol için Raspberry Pi 4 8GB mikro bilgisayar kullanılmıştır. Bu mikro bilgisayar Şekil 20’de gösterilmiştir.



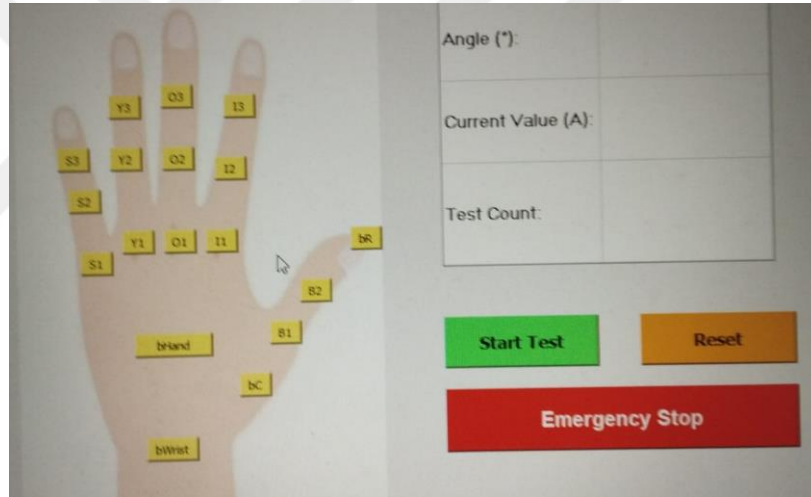
Şekil 20. Raspberry Pi 4 8G mikro kart bilgisayar ve Raspberry Pi 7" Smarti Pi Touch Pro

Kontrol paneli ayarlanabilir olması sebebiyle ergonomik bir kullanım sunmaktadır. Rehabilitasyon robotunun kontrolü C programlama dilinde yazılan gömülü kod ile sağlanmaktadır. Kontrol çevrimi için 2ms’lik örnekleme zamanı kullanılmaktadır. Dokunmatik ekran üzerinde rehabilitasyon robotu eklemlerinin konum, hız, yörünge, motor akımı, motor voltajı, hasta kuvveti, çalışma modu vb. bilgiler görüntülenebilmektedir. Bu ekran mevcut durumda robot kontrolü geliştirme amaçlı kullanılmaktadır. Fizik tedavi uzmanının veya operatörün izlemesi adına çeşitli teknik verilerin ekran üzerinde görüntülenmesi sağlanabilir. İhtiyaç halinde kartın üzerinde yer alan dahili mikrofonlar ile

sesli komut veya sesli iletişim amacıyla da kullanılabilir. Rehabilitasyon robotunun elektronik yönetimine ait akış diyagramı Algoritma 2’de verilmiştir.

2.2.3. Kullanıcı Arayüzü

Oluşturulan matematiksel model ve benzetim modeli robot yardımcı egzersiz cihazlarının kontrol arayüzüne yüklenmiştir. Bu arayüz yazılımı Bursa YORDAM Test ve Mühendislik şirketi tarafından BAP proje desteği ile yaptırılmıştır. Yazılımlar kullanıcının uyması gereken talimatlara göre hazırlanmıştır. Raspberry mikro bilgisayarda kullanılmak üzere özel bir arayüz yazılımı geliştirilmiştir. Kullanıcılara hitaben oluşturulan bu yazılım Şekil 21’de gösterilmiştir. MATLAB kod yazımı ve kontrol işlemleri İ7 bilgisayarlar da yapılmıştır.

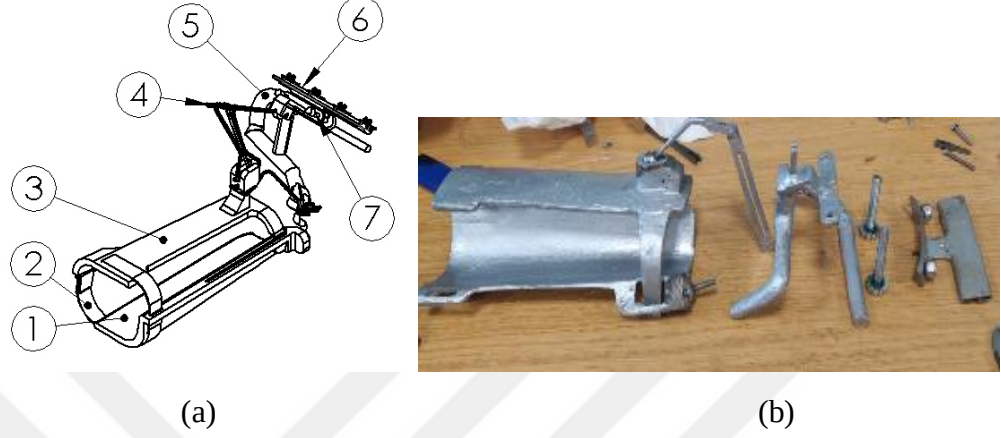


Şekil 21. LCD kullanıcı arayüzü

Kullanıcı arayüzü çalıştırıldığında ekrana Şekil 21’deki menü gelir. Hasta bilgileri bölümünden hastanın ağırlığı, boyu, uzuv uzunlukları, konum bilgisi girilir. Her bir hasta için bu bilgiler veri tabanına kaydolur. Bu sayede her hasta için farklı egzersiz yaptırılabilir. Ayrıca, bir hastaya ait her seans verileri de kaydedilerek, hastanın bu süreçteki gelişimi takip edilecektir.

2.2.4. Dış İskelet Mekanizması

Bu doktora tezinde tasarlanan ve imalatı gerçekleştirilen dış iskelet mekanizması Şekil 22’de gösterilmiştir.

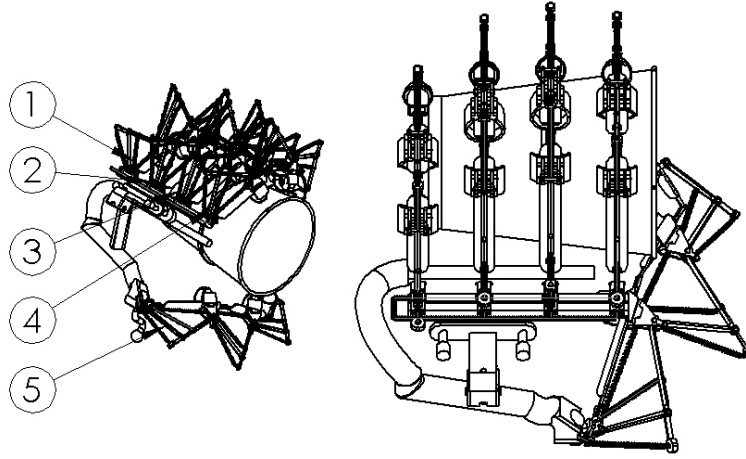


Şekil 22. Robot Manipülatörü a) Katı model b) İmal edilen mekanizma

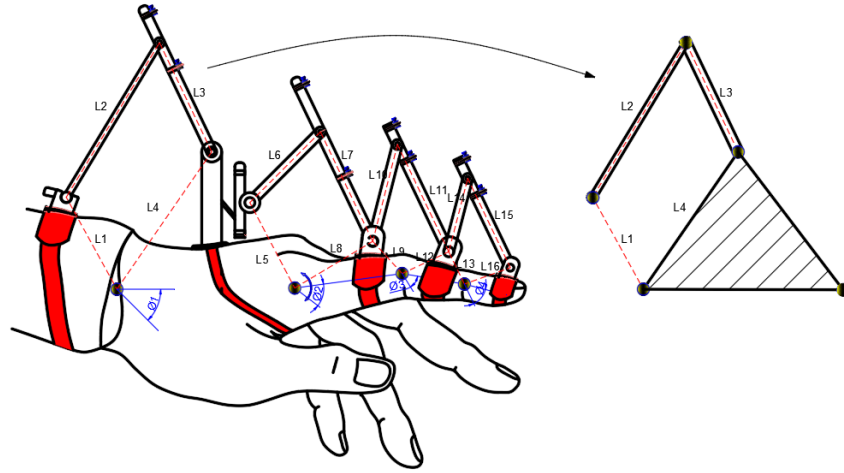
Katı model resmi üzerindeki numaralar; üst kol destek uzvu (1), yapışkan bantlar (2), üst kol üst destek mekanizması (3), bilek hareket iletim mekanizması (4), el destek mekanizması (5), uç efektör kızak mekanizması (6) ve ayar vidası (7) parçalarını temsil etmektedir. Üst kol destek mekanizmaları gerçek cam elyaf malzemeden üretilmiştir. Diğer kalan kısımlar ise rijitliğin sağlanması için alüminyum sigma profillerden 180 x 360 mm boyutlarında üretilmiştir.

2.2.5. Uç efektör

Uç efektör dört çubuk mekanizması şeklinde tasarlanarak, MCP, PIP ve DIP eklemlerinin hareket kontrolüne imkan tanımıştır. Küçük parmak (1), yüzük parmağı (2), orta parmak (3), işaret parmağı (4) ve baş parmak (5) için kullanılacak bölümlerden meydana gelmektedir. Tasarımın imalat resmi Şekil 23, Şekil 24 ve Şekil 25’de gösterilmiştir.



Şekil 23. Uç efektör elemanları



Şekil 24.El üzerinde dört çubuk mekanizmasına sahip iletim sistemi



Şekil 25. Uç efektör

3. BULGULAR

3.1. Benzetim Çalışmaları

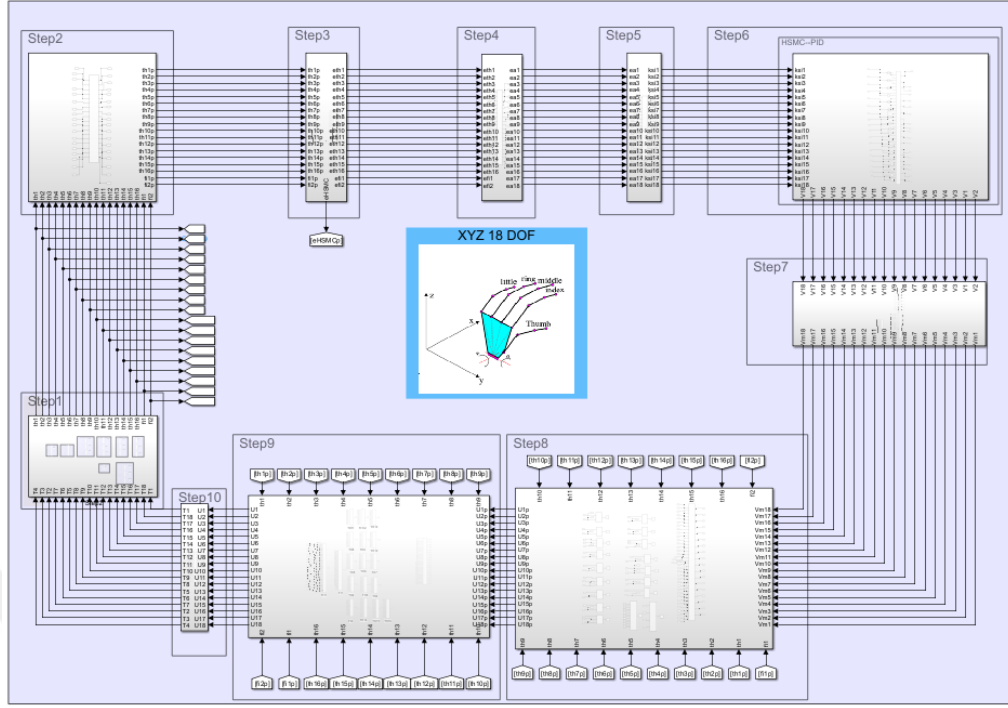
Bu bölümde 2B ve 3B sistemin MATLAB/Simulink benzetim çalışmaları ve sonuçları verilmiştir. 16 SD ve 18 SD’li el-el bileği rehabilitasyon robotunun Simulink ortamında benzetim modeli kullanılacak olan kontrol stratejilerini içerecek şekilde geliştirilmiştir. Sistemin matematiksel modelini içeren eşitlikler büyük boyutlu ve zamanla değişen girdiler olduğundan Simulink ortamına Matlab-System-function olarak aktarılmıştır. İleri kinematik çözüm yapılarak, pasif, aktif, izometrik egzersizler için konum ve konum-tork kontrolü üzerine benzetimler denenmiştir.

El ve el bileğinin kontrolü için optimizasyon algoritmalarıyla desteklenmiş HKKK, HPID uygulanmıştır. Parametre optimizasyonu için Parçacık Sürü Optimizasyonu ve Diferansiyel Gelişim Algoritmaları her iki kontrol yöntemine uygulanmış ve sonuçlar karşılaştırmalı olarak sunulmuştur.

Günlük hayatta insan elinin temel görevleri arasında tutma, kavrama, açma gibi hareketler bulunur. Bu hareketler için el ve el bileğinin abdüksiyon/addüksiyon ve fleksiyon/ekstansiyon hareketleri kontrol için baz alınmıştır. Sistemin kontrolü için empedans kontrol tercih edilmiştir. Sürtünme etkisi ihmal edilmiştir. İki boyutlu 16 serbestlik dereceli ve üç boyutlu 18 serbestlik dereceli sistemin benzetimi yapılmıştır. Benzetim çalışmaları sağlıklı bir bireyin sol eli için gerçekleştirilmiştir.

3.1.1. Denetleyici Tasarımı

16 SD ve 18 SD’ye sahip robotun denetleyici tasarımı hiyerarşik KKK ve PID yöntemleri ile yapılmıştır. Denetleyici tasarımı 10 basamakta belirlenmiştir. Temel ilk basamak ana denklemdeki açısal ivme denklemleridir. Altıncı basamakta ise istenilen denetleyici kontrol çeşitleri eklenmiştir. Geri kalan 9 basamak sırasıyla aşağıda verilmiştir. Genel denetleyici tasarımı Şekil 26’de gösterilmiştir.



Şekil 26. Tüm sistemin Simulink görüntüsü

Simulink ortamındaki Step 1, 16 SD ve 18 SD’li sisteme ait ivme eşitliklerini içermektedir. Sistemin temel matematiksel denklemlerinin yer aldığı kısımdır. Step 2 bloğunda, sistemin çıktısı olan değişken tanımlanır. Bu basamakta,

$$\theta_i = \theta_{ip}, \dot{\theta}_i = \dot{\theta}_{ip}, \ddot{\theta}_i = \ddot{\theta}_{ip}, i = 1:18 \quad (62)$$

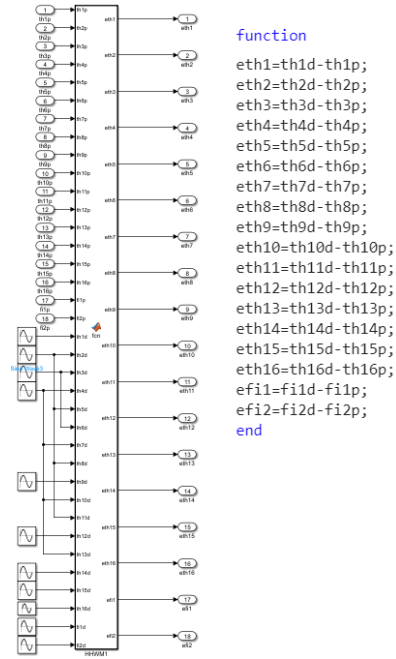
biçiminde gösterilmiştir. Burada $\theta_i, \theta_{ip}, \dot{\theta}_i, \dot{\theta}_{ip}, \ddot{\theta}_i, \ddot{\theta}_{ip}, i = 1:16$ ve

$\varphi_i, \varphi_{ip}, \dot{\varphi}_i, \dot{\varphi}_{ip}, \ddot{\varphi}_i, \ddot{\varphi}_{ip}, i = 1:2$ parametreleri i. kütlenin konumu, hızı ve ivmesidir.

Step 3 bloğunda, her bir falanks açısı hatası e_{θ_i} belirlenir,

$$\begin{aligned} e_{\theta_i} &= \theta_{id} - \theta_{ip}, \dot{e}_{\theta_i} = \dot{\theta}_{id} - \dot{\theta}_{ip}, \ddot{e}_{\theta_i} = \ddot{\theta}_{id} - \ddot{\theta}_{ip}, i = 1:18 \\ \ddot{e}_{\theta_i} &= \ddot{\theta}_{id} - \ddot{\theta}_{ip}, \ddot{e}_{\theta_i} = -\ddot{\theta}_{ip} + \ddot{\theta}_{id} \end{aligned} \quad (63)$$

Buradaki d istenen konumu, p ise bulunduğu konumu ifade etmektedir. Bu basamak Şekil 27’da gösterilmiştir.

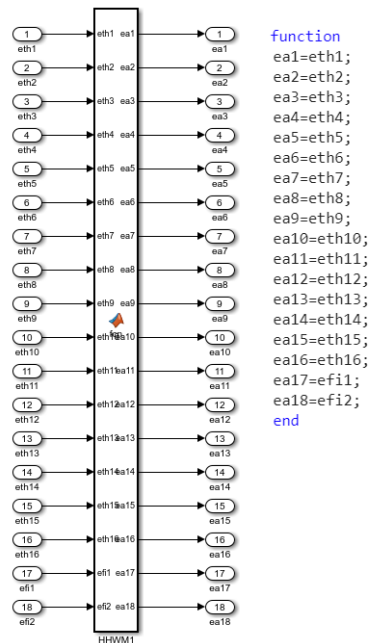


Şekil 27. Üçüncü adım denetleyici kontrol şeması

Step dört bloğunda, hatalar güncellenir.

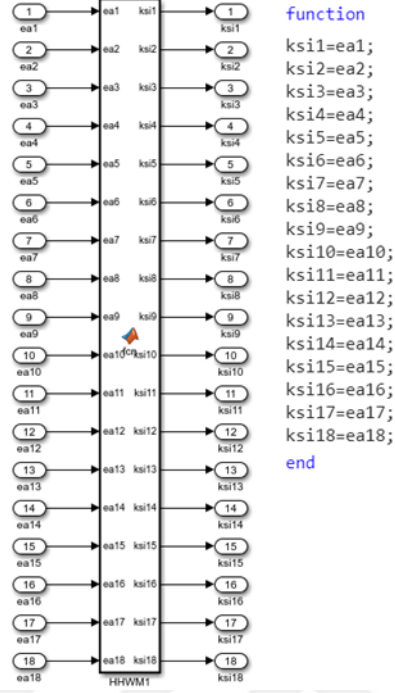
$$e_{ia} = e_{\theta i} \rightarrow \dot{e}_{ia} = \dot{e}_{\theta i} \rightarrow \ddot{e}_{ia} = \ddot{e}_{\theta i} \rightarrow i=1:18 \quad (64)$$

Denetleyici kontrol şeması Şekil 28’de gösterilmiştir.



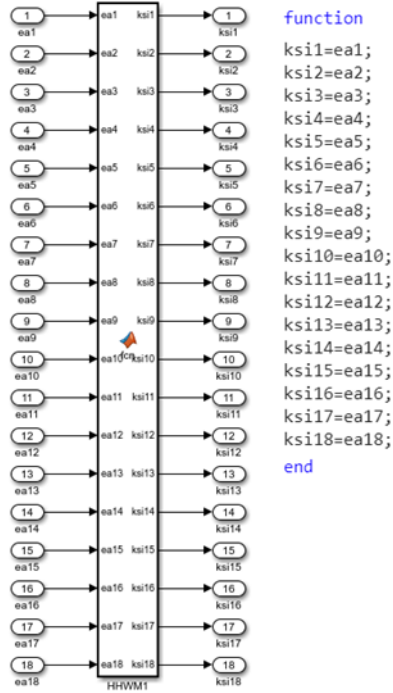
Şekil 28. Dördüncü adım denetleyici kontrol şeması

Step beş bloğunda KKK parametresi olan $\xi_i = e_{ai}$ tanımlanır. Bu basamak



Şekil 29’de gösterilmiştir.

$$\xi_i = e_{ai} \rightarrow \dot{\xi}_i = \dot{e}_{ai} \rightarrow i = 1:18 \quad (65)$$



Şekil 29. Beşinci adım denetleyici kontrol şeması

Step altı bloğunda, HKKK için 18 yardımcı kayma düzlemi oluşturulur. Bu kayma düzlemleri,

$$S_{ai} = C_i \xi_i + \dot{\xi}_i \rightarrow i = 1:18 \quad (66)$$

Bu durum Şekil 30'da gösterilmiştir. Buradaki C'ler pozitif katsayılardır ($C > 0$). Yeni bir kontrol değişkeni atanır. Yardımcı kayma düzlemleri ana kayma düzlemlerine değişken olarak atanır,

$$S_{mi} = S_{ai} \rightarrow i = 1:18 \quad (67)$$

Bu aşamada kararlılık analizi için Lyapunov fonksiyonu kontrolü yapılır.

$$\dot{S}_m \leq 0 \quad (68)$$

kararlılık durumunu ifade etmektedir. Bu aşamada signum fonksiyonu yerine tanh fonksiyonu tercih edilmiştir.

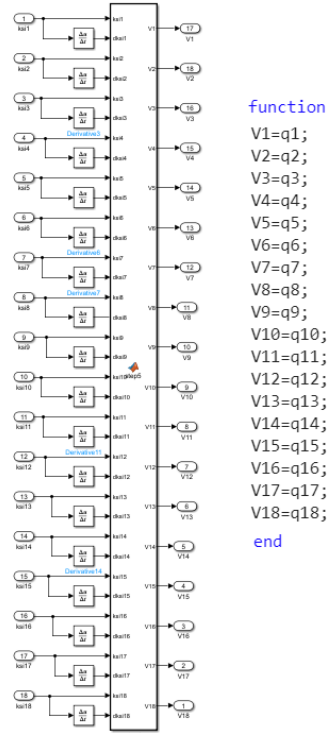
$$V_i = -k_{1_i} S_{mi} - k_{2_i} \tanh(S_{mi}) \rightarrow i = 1:18 \quad (69)$$

Burada V, değişken, S_m ana kayma düzlemi, k değerleri pozitif katsayılardır ($k > 0$). Bu aşamada HPID kullanılması durumunda 18 yardımcı ITEA hata tabanlı veri oluşturulur. Optimizasyon işlemleri için kullanılacaktır. Aynı işlem PID kontrolcüsü için,

$$V_i = (\theta_{id} - \zeta_i) * PID_i \rightarrow i = 1:18 \quad (70)$$

biçiminde gösterilmiştir.

Böylece HKKK ve HPID kontrol sistemleri ana sistem için tasarlanmış olur.



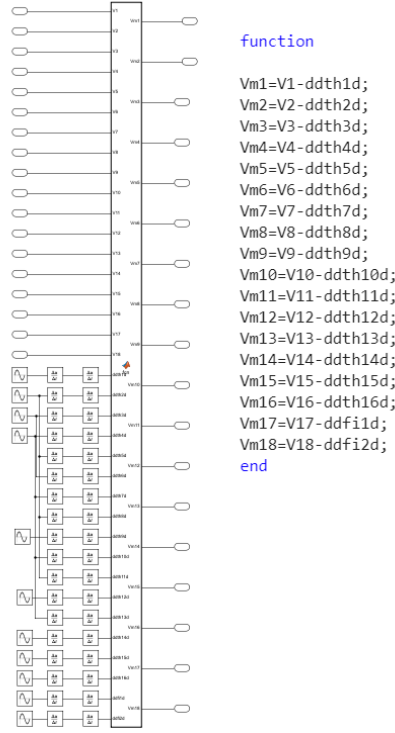
Şekil 30. Altıncı adım denetleyici kontrol şeması

Step yedi bloğunda, tekrar yeni bir kontrol değişkeni tanımlanır. Şekil 31’da gösterilmiştir.

$$\ddot{e}_{ai} = V_i \rightarrow i = 1:18$$

$$V_{mi} = V_i - \ddot{\theta}_{id} \rightarrow i = 1:18 \quad (71)$$

biçiminde gösterilmiştir.



Şekil 31. Yedinci adım denetleyici kontrol şeması

Step sekiz bloğunda, yeni bir kontrol değişkeni tanımlanır. Bu değişken de U_{ip} değişkenine atanır. Burada B değerleri ivme eşitliğinin paydasında kalan tüm sabit ve değişken sayıların kısaltılmasıdır.

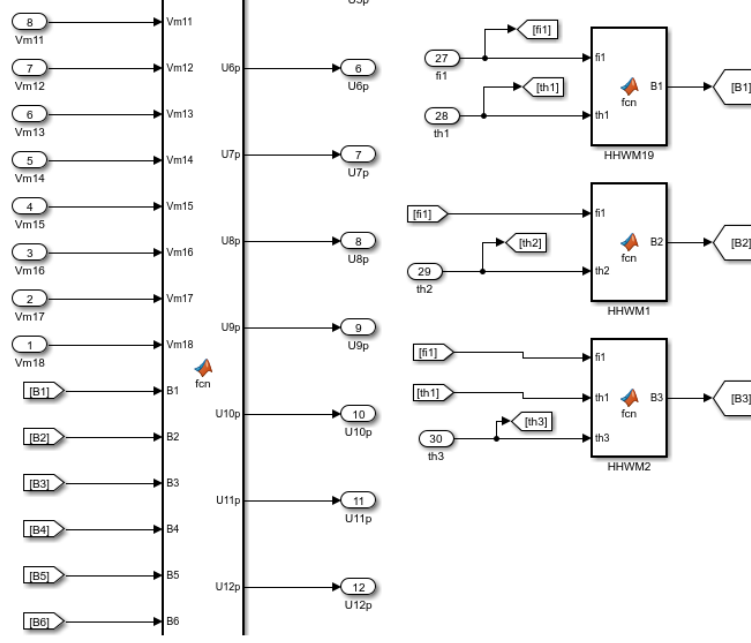
$$\begin{aligned}
 V_{mi} &= \ddot{\theta}_{ip} \rightarrow i = 1:16 \\
 V_{mi} &= \ddot{\phi}_{ip} \rightarrow i = 1:2 \\
 U_{1p} &= V_{mi} * B_i \rightarrow i = 1:18
 \end{aligned} \tag{72}$$

biçiminde gösterilmiştir. Denetleyici kontrol şeması Şekil 32’de gösterilmiştir.

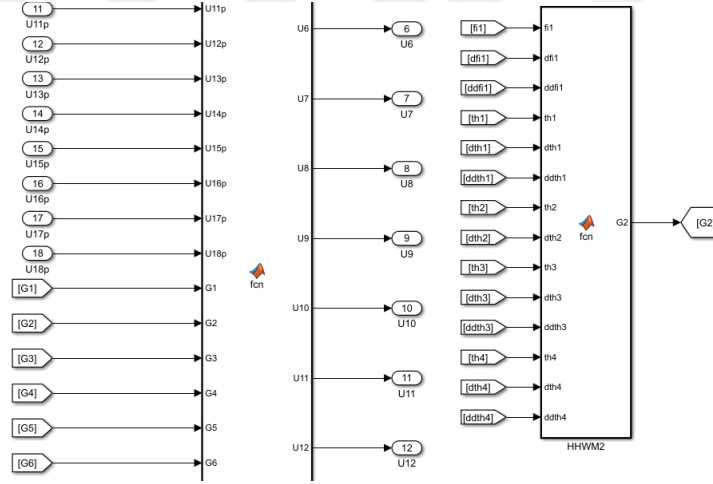
Step dokuz bloğunda da yeni bir kontrol değişkeni U tanımlanır. Şekil 33’de gösterilmiştir. Bu basamak,

$$U_i = U_{ip} - G_i \rightarrow i = 1:18 \tag{73}$$

biçiminde gösterilmiştir. Buradaki G değerleri ivme eşitliğinin pay kısmında kalan τ tork değeri hariç tüm sabit ve değişken sayıları içine almaktadır.



Şekil 32. Sekizinci adım denetleyici kontrol şeması



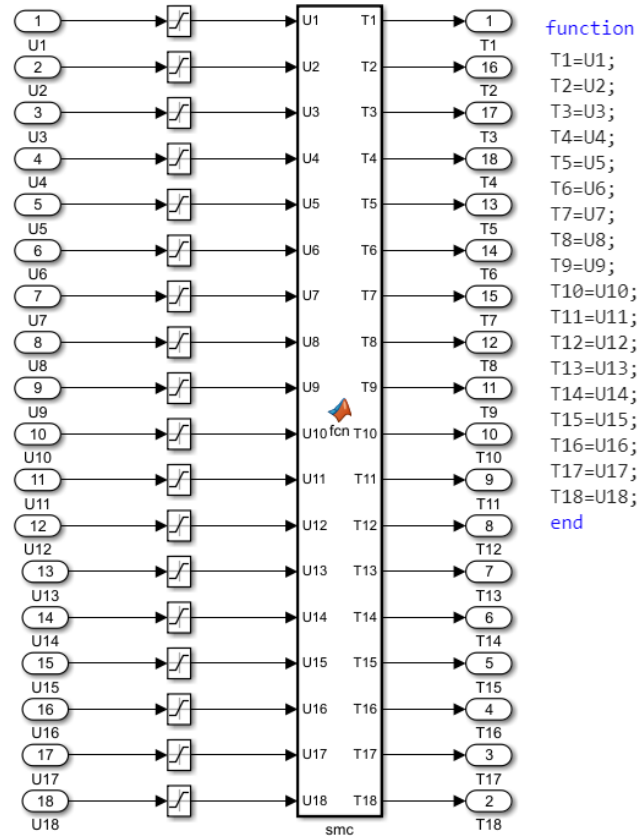
Şekil 33. Dokuzuncu adım denetleyici kontrol şeması

Step 10 bloğu sistemin son adımdır. Bu bölümde yeni bir kontrol değişkeni tanımlanır. Şekil 34’de gösterilmiştir. Bu basamak,

$$\tau_i = U_i \rightarrow i = 1:18 \quad (74)$$

biçiminde gösterilmiştir.

Bu dönüşümle birlikte temel matematiksel denklemlerin olduğu birinci adıma tork girişi yapılmaktadır. Bu kuvvetler ± 30 N saturasyonla sınırlandırılmıştır.



Şekil 34. Onuncu adım denetleyici kontrol şeması

Kontrol sistemlerinde kullanılan yörünge kontrol performans kriterine göre işlemler başlatılmıştır. Benzetim çalışmasında, tüm sistemin kontrolünde her bir falanks için 2 boyutlu düzlemde dışardan bozucu olarak sinüs dalgası $5\sin(100t)$ kullanılmıştır. 3 boyutlu düzlemde ise her bir falanks bölgesi için $0.1\sin(0.01t)$ bozucu girişi yapılmıştır. Optimizasyon işlemi için ITEA hatası performans değerlendirici olarak alınmıştır. Benzetim işlemlerinde kullanılan bu kriterler ile tüm sistemin tepkisi ölçülmüştür.

3.1.2. 16 SD'li Sistemin Benzetimi

El-el bileği modelinin dinamik davranışı MATLAB/Simulink ortamında test edilmiştir. Bu test aşamasında xy eksenini için diferansiyel denklemlerin çözümü için MATLAB ODE4 sayısal çözüm metodu kullanılmış, adım boyutu 0.001 ve tolerans 0.001 olarak alınmıştır. Bu işlemler Tablo 5'deki başlangıç şartlarına göre çözülmüştür. Çözüm

işleminde kullanılan optimizasyon arama uzayı Tablo 6’ da verilmiştir. PID filtre katsayısı ise Tablo 7’de verilmiştir.

Tez kapsamında benzetim işlemleri 16 SD’li sistem için MATLAB 2022a, Windows10_64 bit, Intel Core i5 işlemci, 2.5 GHz hız ve 8 GB RAM kapasiteli SSD hardisk kullanılmıştır. 18 SD’li eksenli koordinat sistemi için Windows 11Pro 64 bit, Intel Core İ7 12. nesil işlemci, 1.7 GHz hız ve 16 GB RAM kapasiteli SSD hardisk bilgisayar kullanılmıştır.

Tablo 5. 16 SD’li sistemin başlangıç açısı şartları (rad)

$\theta_1 = 0, \dot{\theta}_1 = 0.17$	$\theta_2 = 0, \dot{\theta}_2 = 0.34$	$\theta_3 = 0, \dot{\theta}_3 = 0.52$	$\theta_4 = 0, \dot{\theta}_4 = 0.69$
$\theta_5 = 0, \dot{\theta}_5 = 0.34$	$\theta_6 = 0, \dot{\theta}_6 = 0.52$	$\theta_7 = 0, \dot{\theta}_7 = 0.69$	$\theta_8 = 0, \dot{\theta}_8 = 0.34$
$\theta_9 = 0, \dot{\theta}_9 = 0.52$	$\theta_{10} = 0, \dot{\theta}_{10} = 0.69$	$\theta_{11} = 0, \dot{\theta}_{11} = 0.34$	$\theta_{12} = 0, \dot{\theta}_{12} = 0.52$
$\theta_{13} = 0, \dot{\theta}_{13} = 0.69$	$\theta_{14} = 0, \dot{\theta}_{14} = 0.34$	$\theta_{15} = 0, \dot{\theta}_{15} = 0.52$	$\theta_{16} = 0, \dot{\theta}_{16} = 0.69$

Tablo 6. 16 SD’li model için kontrolcü parametreleri

Kontrol	Arama Uzayı						
Hedef Fonk.	Tür	[C _i ξ _i ξ _i]		[P _i I _i D _i] i = 1:16 (5 ve 6 dahil değil)		[P _i I _i D _i] i = 5 ve 6	
		Min	Max	Min	Max	Min	Max
$\sum_{i=1}^{16} ITAE$	HKKK- PSO	[8 500 500]	[20 550 550]				
	HKKK-DE						
	PID-PSO			[8 500 500]	[20 550 50]	[450 5 1450]	[550 30 1550]
	PID-DE						
Maliyet Fonk.	HKKK- PSO	3.70181380907661				n=20 popülasyon boyutu t=15 iterasyon sayısı Koşma süresi: 0.01(s)	
	HKKK-DE	4.29942427091999					
	PID-PSO	8.22503795296195					
	PID-DE	8.27830762637150					
Çalışma Zamanı	HKKK- PSO	1305.86658570000					
	HKKK-DE	1619.03275300000					
	PID-PSO	3984.78612360000					
	PID-DE	5467.71987500000					

Tablo 7. PID katsayı değerleri

PID - [P _i I _i D _i] i :18			
Tipi	Filtre katsayısı (N)	Tipi	Filtre katsayısı (N)
P_1, I_1, D_1	$P + I \frac{1}{s} + D \frac{N}{1 + N \frac{1}{s}}$ 0.00719061790302422	P_{10}, I_{10}, D_{10}	100
P_2, I_2, D_2		P_{11}, I_{11}, D_{11}	0.00719061790302422
P_3, I_3, D_3		P_{12}, I_{12}, D_{12}	
P_4, I_4, D_4		P_{13}, I_{13}, D_{13}	
P_5, I_5, D_5		P_{14}, I_{14}, D_{14}	
P_6, I_6, D_6		P_{15}, I_{15}, D_{15}	100
P_7, I_7, D_7		P_{16}, I_{16}, D_{16}	0.00719061790302422
P_8, I_8, D_8		P_{17}, I_{17}, D_{17}	
P_9, I_9, D_9	100	P_{18}, I_{18}, D_{18}	

Matematiksel modelin çözümü için gerekli ağırlık ve uzunluk parametreleri 16 SD ve 18 SD durumları için aynı alınmıştır. Bu parametreler Tablo 8’de verilmiştir. 16 SD için algoritma çözüm parametreleri ise Tablo 9 ve Tablo 10’da verilmiştir. Bu sistemde doğrusal olmayan denklemler kullanılmıştır. Yüzey sürtünmeleri göz ardı edilmiştir.

Tablo 8. Benzetimde kullanılan el modeline ait kütle ve uzunluk parametreleri

	m (kg)			L (m)		
Bilek	m1=0.2220			L1=0.0482	La=0.0177	
İşaret	m2=0.0300	m3=0.0140	m4=0.0070	L2=0.0198	L3=0.0111	L4=0.0079
Orta	m5=0.0330	m6=0.0160	m7=0.0070	L5=0.0223	L6=0.0131	L7=0.0087
Yüzük	m8=0.0220	m9=0.0150	m10=0.0070	L8=0.0206	L9=0.0128	L10=0.0086
Küçük	m11=0.0180	m12=0.0070	m13=0.0040	L11=0.0163	L12=0.0905	L13=0.0079
Başparmak	m14=0.0330	m15=0.0160	m16=0.0100	L14=0.0231	L15=0.0157	L16=0.0108

Tablo 9. 16 SD'li sistem için HKKK optimizasyon parametreleri

Kontrol adımları	Arama Uzayı (i =1:48)					
	HKKK- PSO			HKKK-DE		
i =1:3	8.0000	544.9093	500.0000	12.4195	500.0000	542.9760
i =4:6	8.0000	500.0000	500.0000	8.4489	524.7049	535.6272
i =7:9	8.0000	500.0000	550.0000	8.1677	510.2167	550.0000
i =10:12	8.9012	550.0000	500.0000	8.0226	500.0000	536.2174
i =13:15	14.1535	550.0000	550.0000	9.7736	529.0216	522.9418
i =16:18	8.0000	530.8623	529.3529	8.0000	500.0000	515.9276
i =19:21	8.0000	500.0000	500.0000	13.0801	522.9382	513.9545
i =22:24	8.0000	500.0000	528.3791	8.0000	500.0000	545.6533
i =25:27	8.0000	509.3362	512.1695	8.80764	505.0966	514.6142
i =28:30	8.0000	500.0000	500.0000	8.0000	520.1717	513.3894
i =31:33	8.0000	500.0000	550.0000	11.5389	529.2860	510.3606
i =34:36	8.0000	500.0000	500.0000	13.1014	537.4885	518.4151
i =37:39	8.0000	500.0000	506.3983	8.41973	539.4837	547.1510
i =40:42	8.0000	514.7266	500.000	9.959706	515.8198	523.7977
i =43:45	8.13242	503.6003	550.0000	9.3023	519.8135	524.4640
i =46:48	8.0000	500.0000	550.0000	12.65509	518.3496	501.9214

Tablo 10. 16 SD'li sistem için PID optimizasyon parametreleri

Kontrol adımları	Arama Uzayı (i =1:48)					
	HPID-PSO			HPID-DE		
i =1:3	200.0000	86.7636	30.0000	353.2326	14.80141	43.0085
i =4:6	338.5178	10.0000	30.0000	399.3964	92.2994	30.9584
i =7:9	306.2414	10.0000	34.6510	214.9774	46.7891	30.0000
i =10:12	288.4919	44.54426	33.6875	317.0156	100.0000	31.4639
i =13:15	450.0000	30.0000	1450.0000	498.7792	7.1346	1450.0000
i =16:18	450.0000	1.0000	1450.0000	527.8298	11.0830	1450.0000
i =19:21	337.1304	93.97607	30.0466	267.4677	27.8923	30.0000
i =22:24	200.3352	100.0000	39.5795	485.2867	82.3483	43.8802
i =25:27	275.2487	10.0000	30.0000	298.3504	35.1632	42.5275
i =28:30	200.0000	55.40232	30.0000	263.4956	13.78147	33.6903
i =31:33	200.0000	34.0277	30.0000	500.0000	99.65955	42.8354

Tablo 10'un devamı

i=34:36	272.2456	100.0000	44.4577	408.5017	91.7565	32.8427
i=37:39	200.0000	33.9584	30.0000	243.8374	10.0000	36.3443
i=40:42	299.6893	29.94992	34.9321	392.7691	72.6536	31.0690
i=43:45	310.0527	53.0888	30.0000	200.0000	68.1363	39.4601
i=46:48	389.8488	10.0000	30.0000	359.0735	13.7879	35.6593

Pasif Egzersiz Benzetim Sonuçları: Sistemin denetimi için oluşturulan ilk deney senaryosu pasif egzersizdir. Bu senaryoya göre test düzeneği egzersiz sırasında parmaklara herhangi bir kuvvet uygulamamaktadır. Burada motorların pozisyon takip performansları değerlendirilmektedir. Tüm benzetim çalışmaları bozuculu yörünge takipli pasif egzersiz için gerçekleştirilmiştir. Bu durumlar HKKK-PSO, HKKK-DG, HPID-PSO ve HPID-DG şeklindedir. Literatürde kullanılan ortalama bir insan elinin doğal sınırları referans alınmıştır. Bu değerler

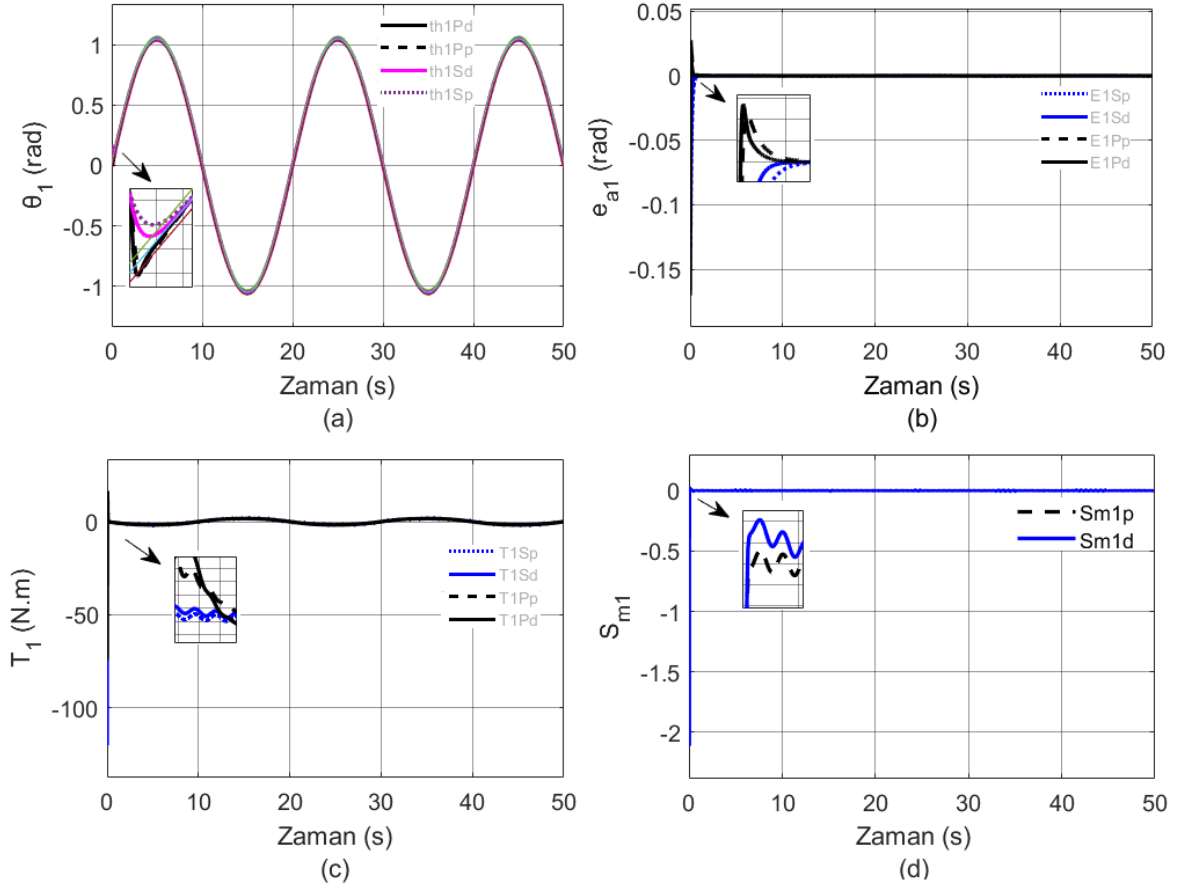
Tablo 11'de verilmiştir (Lince, 2016).

Tablo 11. 16 SD ve 18 SD'li sistem için yörünge takip parametreleri

El ve Parmaklar		Açı	Flek. (rad.)	Ekst. (rad.)	Yörünge Takibi Sinüs (rad.)		
					Amplitude	Bias	Frekans
Bilek	Flk/Eks	θ_{1d}	1.05	-1.05	1.050	---	XY:0.10 XYZ:0.25
	Radyal/Ulnar	φ_{1d}	0.43	-0.43	0.430	---	
İşaret	MCP	θ_{2d}	1.57	-0.7	1.135	0.435	
	PIP	θ_{3d}	1.92	0	0.960	0.960	
	DIP	θ_{4d}	1.48	-0.09	0.785	0.695	
Orta	MCP	θ_{5d}	1.57	-0.7	1.135	0.435	
	PIP	θ_{6d}	1.92	0	0.960	0.960	
	DIP	θ_{7d}	1.48	-0.09	0.785	0.695	
Yüzük	MCP	θ_{8d}	1.57	-0.7	1.135	0.435	
	PIP	θ_{9d}	2.09	0	1.045	1.045	
	DIP	θ_{10d}	1.48	-0.09	0.785	0.695	
Küçük	MCP	θ_{11d}	1.57	-0.7	1.135	0.435	
	PIP	θ_{12d}	2.36	0	1.180	1.180	
	DIP	θ_{13d}	1.48	-0.09	0.785	0.695	
Baş	TMC	θ_{14d}	1.22	-0.26	0.740	0.480	
	MCP	θ_{15d}	1.4	0	0.700	0.700	
	IP	θ_{16d}	1.4	-0.17	0.785	0.615	
		φ_{2d}	0.34	-0.34	0.340	---	

16 SD'li sisteme ait tüm kontrol içeriği STM32F469 mikro denetleyicisine gömülmüştür. Her kontrol döngüsünün örnekleme süresi 2 ms 'dir. Hiyerarşik KKK ve HPID kontrol parametreleri, 0.02 radyanlık konum hatasının altında izleme performansını vermek üzere ayarlanmıştır. Yörünge kontrolü her bir parmak eklemi için ayrı ayrı gerçekleştirilmiştir.

Bilek benzetim parametrelerinde belirlenen şartlar altında yörünge takibi, aç hataşı, tork ve kayma düzlemi grafikleri Şekil 35'de gösterilmiştir. Oluşturulan sinüzoidal yörünge için pasif egzersiz sonuçları verilmiştir. Grafiklerdeki 'Sd' HKKK-DG'yi, 'Sp' ise HKKK-PSO'yu temsil etmektedir. "Pd" HPID-DG'yi, 'Pp' ise HPID-PSO'yu temsil etmektedir.

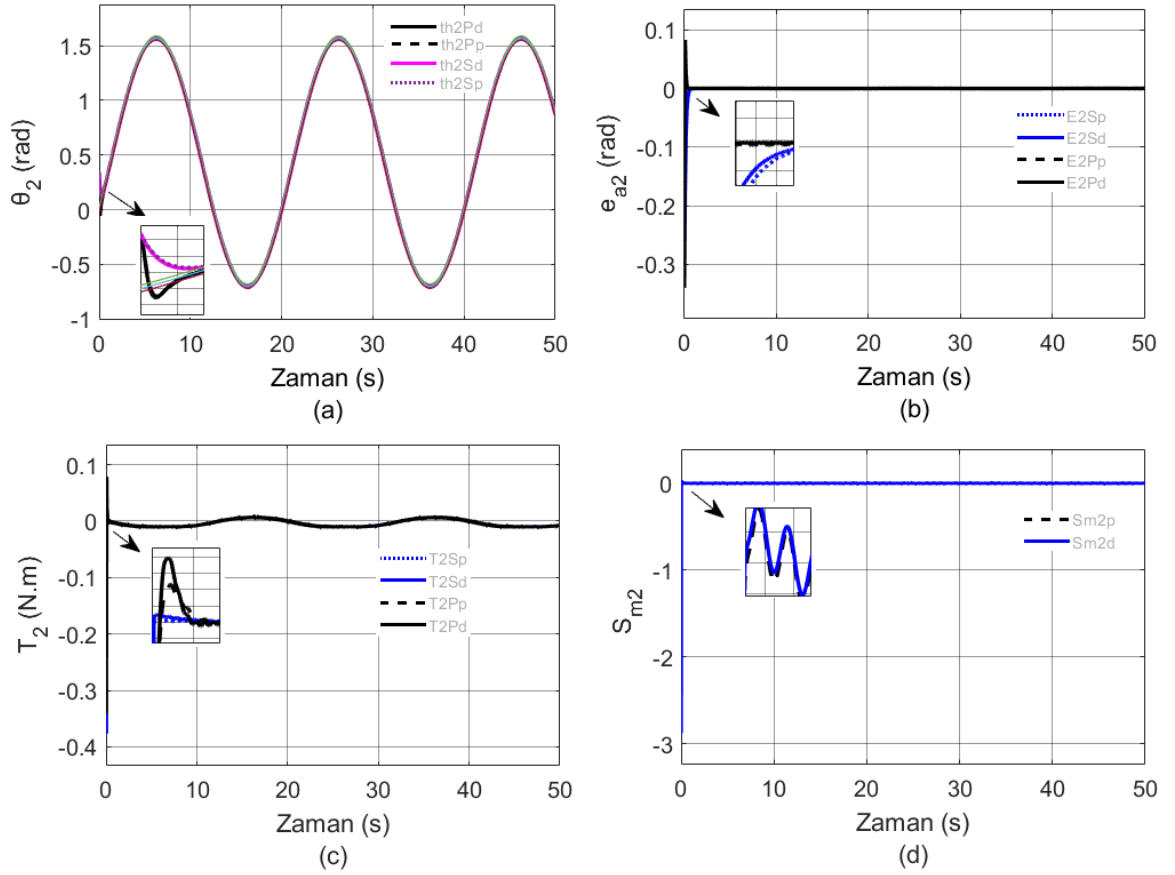


Şekil 35. 16 SD için bileğin bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlemi grafiği

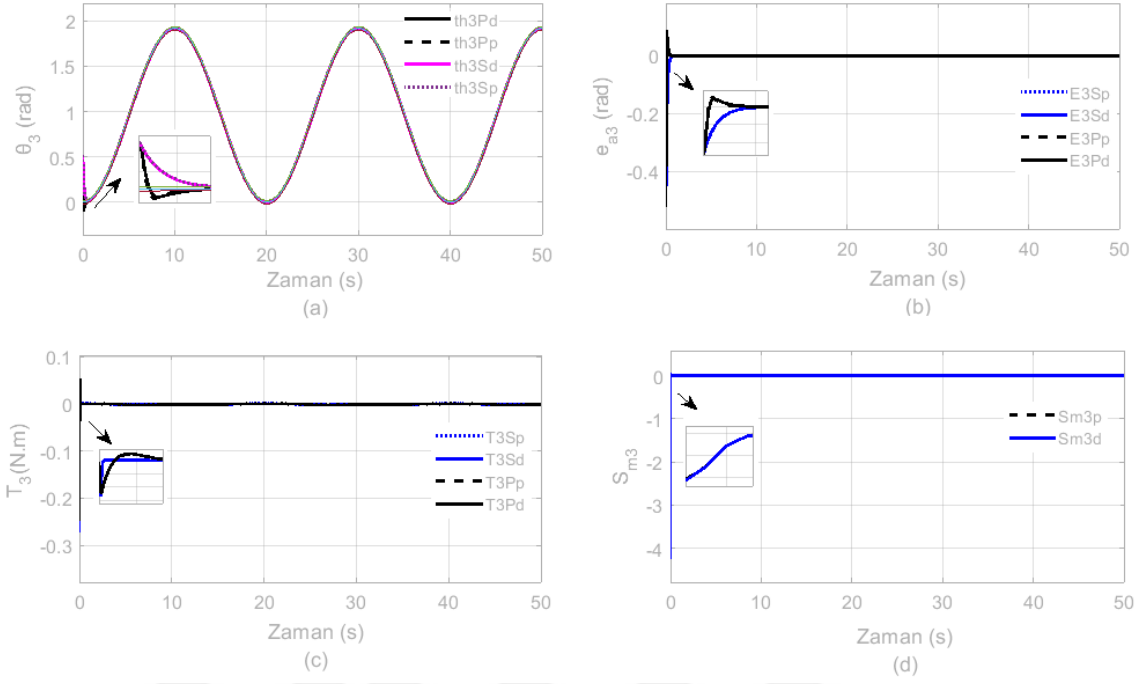
Bilek ekleminin fleksiyon ve ekstansiyon hareketine ait sonuçları Tablo 12'de verilmiştir. Her iki kontrol yönteminde de referans yörünge takibi başarılı olmuştur. Bu sonuçlara göre HKKK'nın HPID'ye göre daha kararlı sonuçlar verdiği görülmektedir. Optimizasyon algoritmaları açısından değerlendirildiğinde, HKKK-DG'nin yerleşme

zamanının daha hızlı olduğu, öte yandan HKKK-PSO'nun kayma düzleminin daha küçük olduğu görülmektedir.

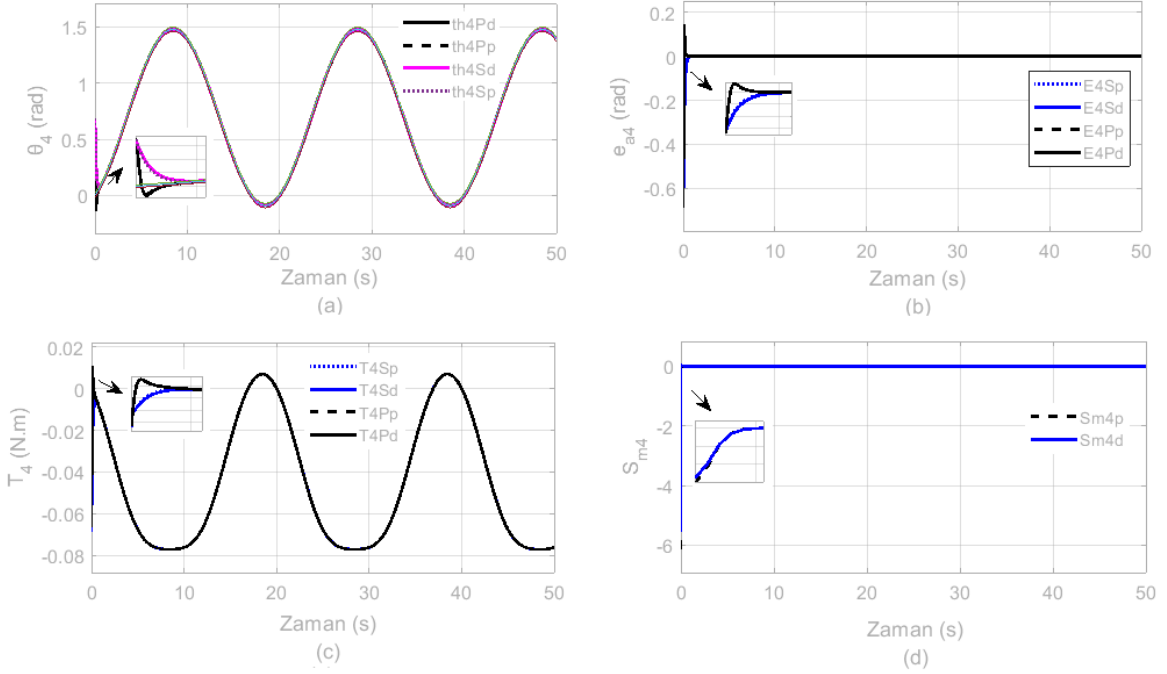
İşaret parmağının MCP eklemi için yörünge takibi, açı hatası, tork ve kayma düzlemi grafikleri Şekil 36'de gösterilmiştir. PIP eklemi için yörünge takibi, açı hatası, tork ve kayma düzlemi grafikleri Şekil 37'da gösterilmiştir. DIP eklemi için yörünge takibi, açı hatası, tork ve kayma düzlemi grafikleri Şekil 38'de verilmiştir.



Şekil 36. 16 SD için işaret parmağının MCP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği



Şekil 37. 16 SD için işaret parmağının PIP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği

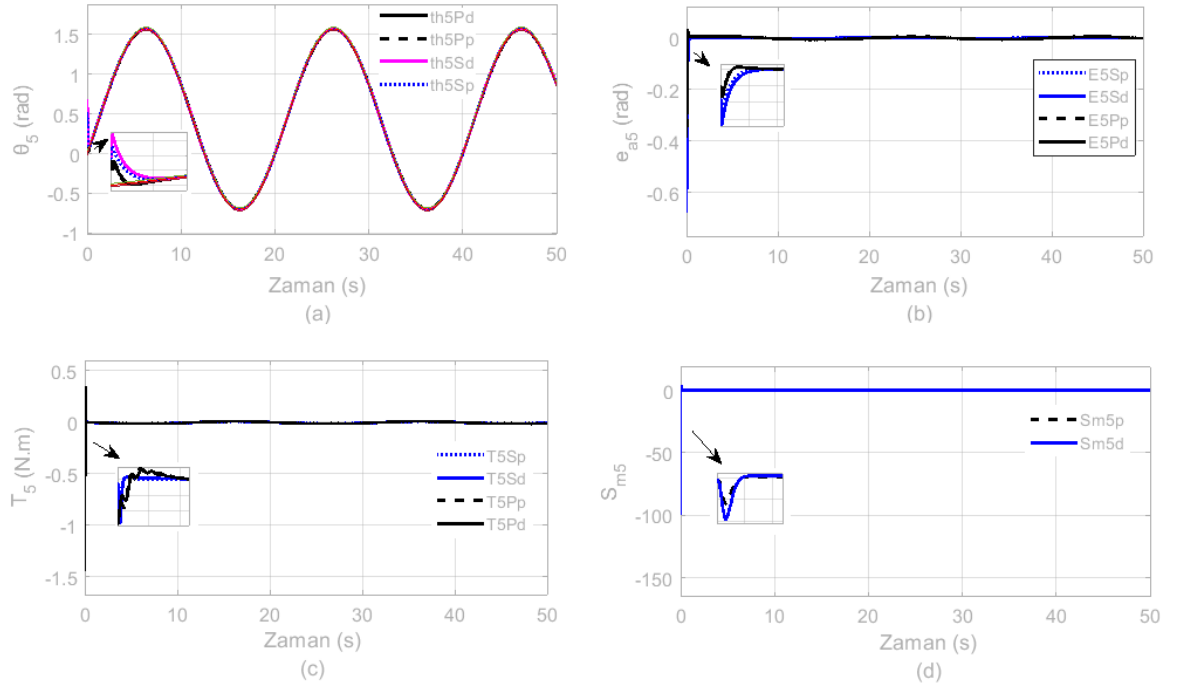


Şekil 38. 16 SD için işaret parmağının DIP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği

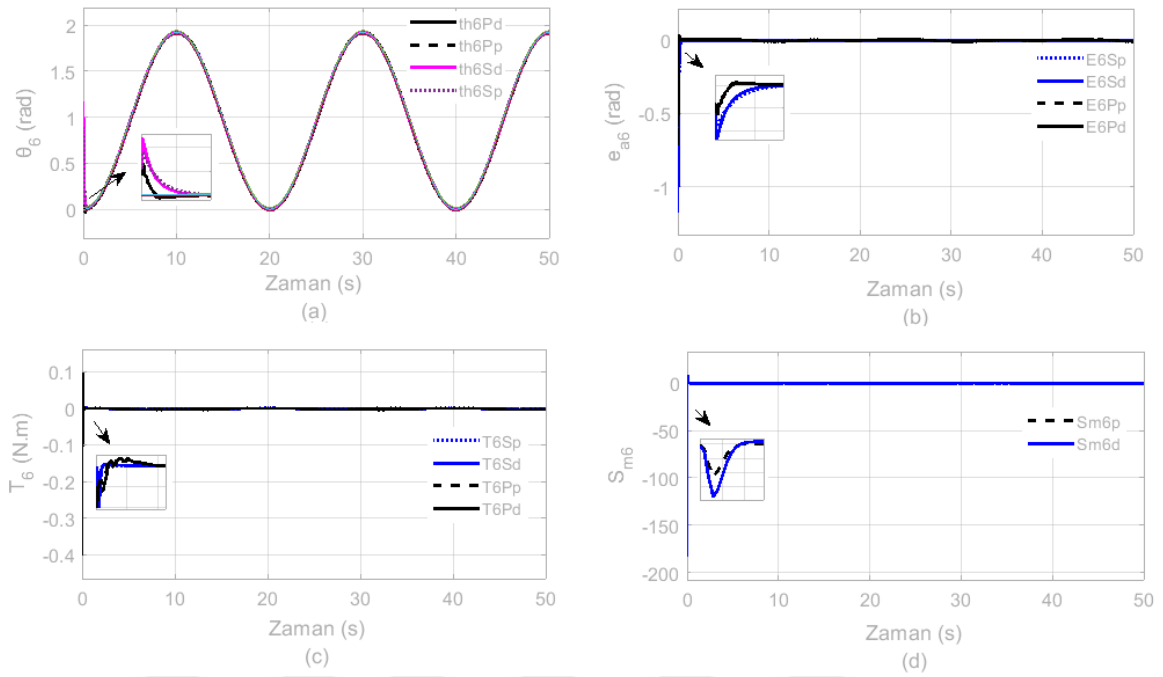
Tablo 12’de verilen sonuçlara göre, işaret parmağının MCP, PIP ve DIP eklemlerinin yörünge takibinde başarılı oldukları gözlenmiştir. Her iki kontrol yönteminde de referans

yörünge takibi başarılı olmuştur. HKKK'nın HPID'ye göre hatasız yörünge takibi yaptığı fakat daha yavaş olduğu gözlenmiştir. Optimizasyon algoritmaları açısından değerlendirildiğinde, HPID-PSO'nun daha düşük tork uyguladığı görülmektedir.

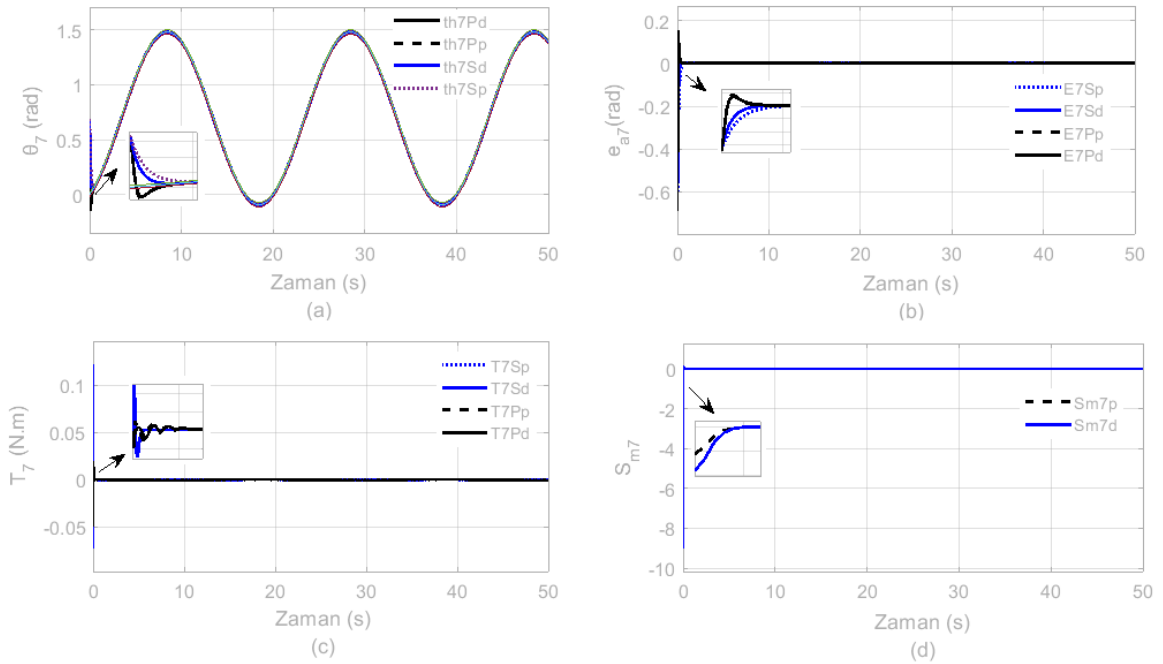
Orta parmağın MCP eklemi için yörünge takibi, açı hatası, tork ve kayma düzlemi grafikleri Şekil 39'de gösterilmiştir. PIP eklemi için yörünge takibi, açı hatası, tork ve kayma düzlemi grafikleri Şekil 40'da gösterilmiştir. DIP eklemi için yörünge takibi, açı hata, tork ve kayma düzlemi grafikleri Şekil 41'de verilmiştir.



Şekil 39. 16 SD için orta parmağın MCP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği



Şekil 40. 16 SD için orta parmağın PIP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği

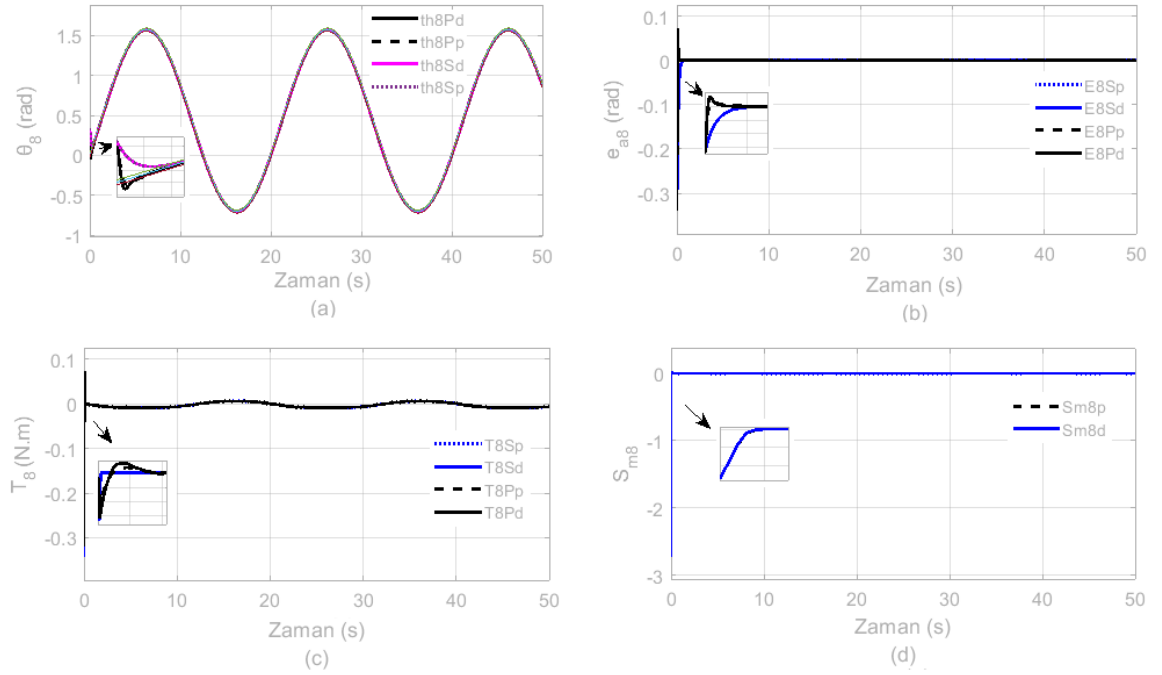


Şekil 41. 16 SD için orta parmağın DIP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği

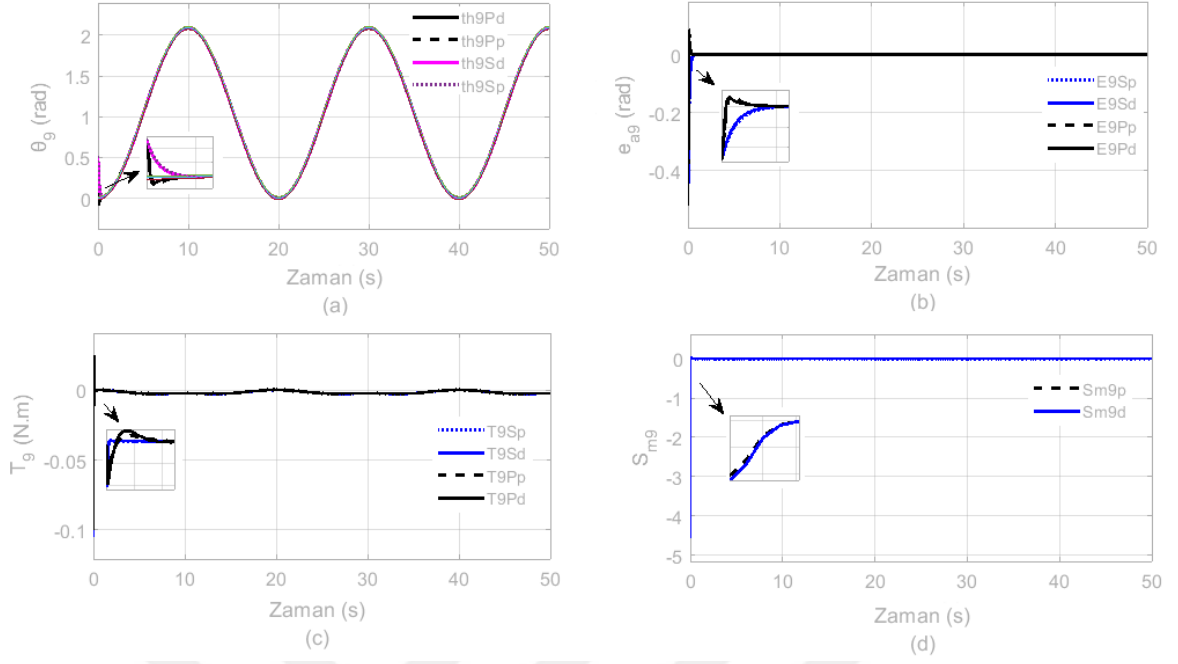
Tablo 12’de verilen sonuçlara göre, orta parmağın MCP, PIP ve DIP eklemlerinin yörünge takibinde başarılı oldukları gözlenmiştir. MCP ve PIP’nin HPID ile aşma miktarının HKKK’dan daha iyi olduğu gözlenmiştir. DIP ekleminde ise HKKK daha başarılıdır.

Optimizasyon algoritmaları açısından değerlendirildiğinde de HPID-DG'nin daha başarılı olduğu görülmektedir.

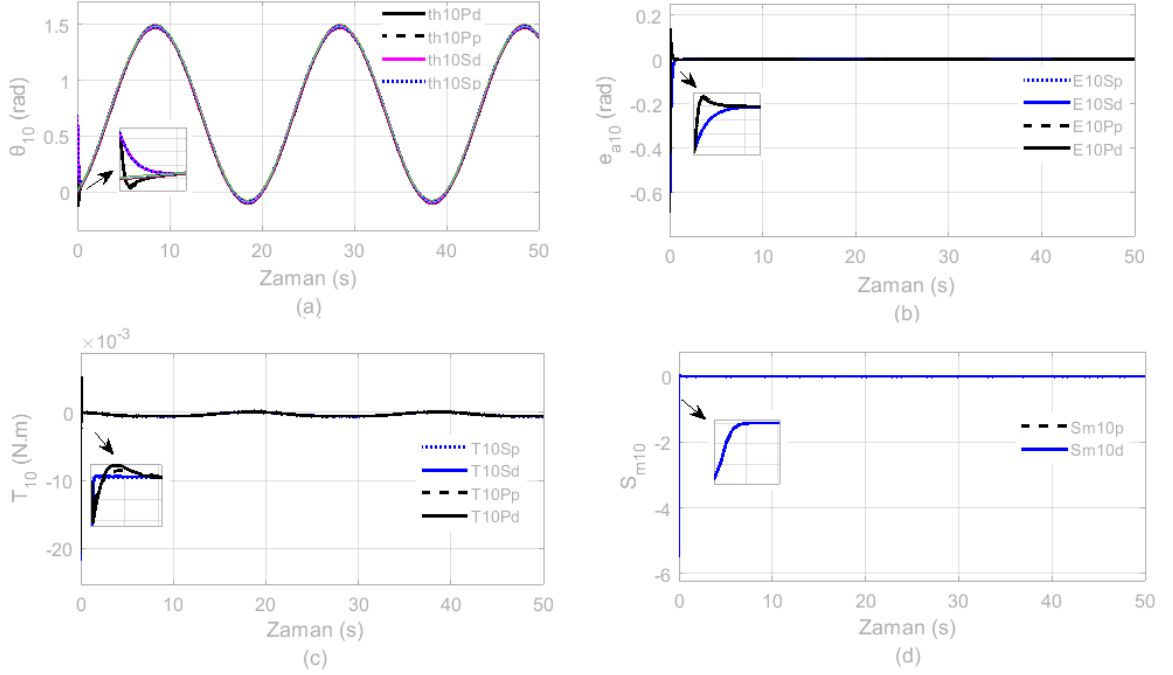
Yüzük parmağın MCP eklemi için yörünge takibi, açı hatası, tork ve kayma düzlemi grafikleri Şekil 42'de gösterilmiştir. PIP eklemi için yörünge takibi, açı hatası, tork ve kayma düzlemi grafikleri Şekil 43'de gösterilmiştir. DIP eklemi için yörünge takibi, açı hatası, tork ve kayma düzlemi grafikleri Şekil 44'de verilmiştir.



Şekil 42. 16 SD için yüzük parmağının MCP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği



Şekil 43. 16 SD için yüzük parmağının PIP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği

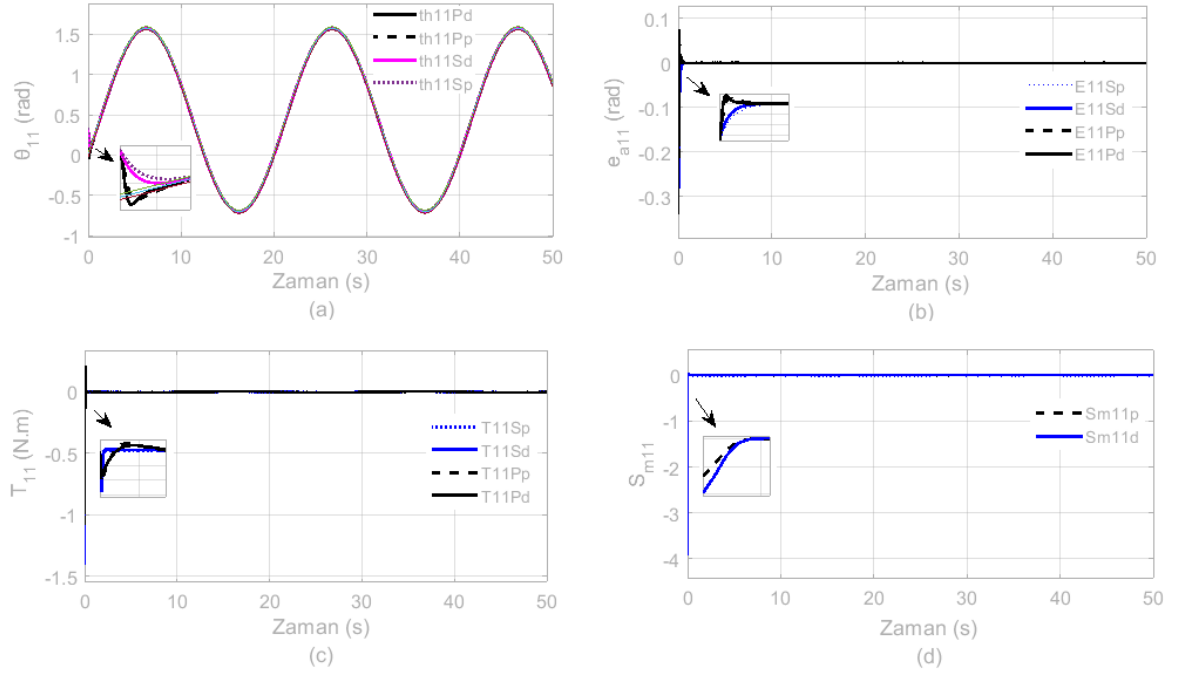


Şekil 44. 16 SD için yüzük parmağının DIP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği

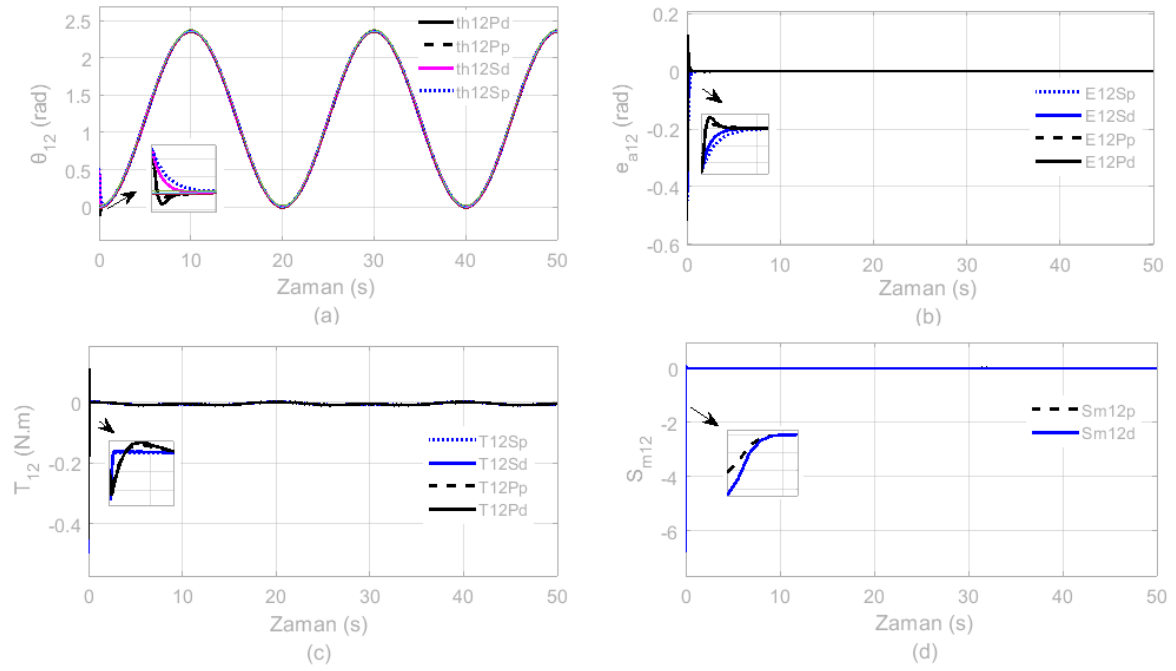
Tablo 12’de verilen sonuçlara göre, yüzük parmağın MCP, PIP ve DIP eklemlerinin yörünge takibinde başarılı oldukları gözlenmiştir. Her üç eklemdede de HKKK’nın aşma

miktarının HPID'den daha iyi olduğu gözlenmiştir. Optimizasyon algoritmaları açısından değerlendirildiğinde de HKKK-PSO'nun daha üstün olduğu görülmektedir.

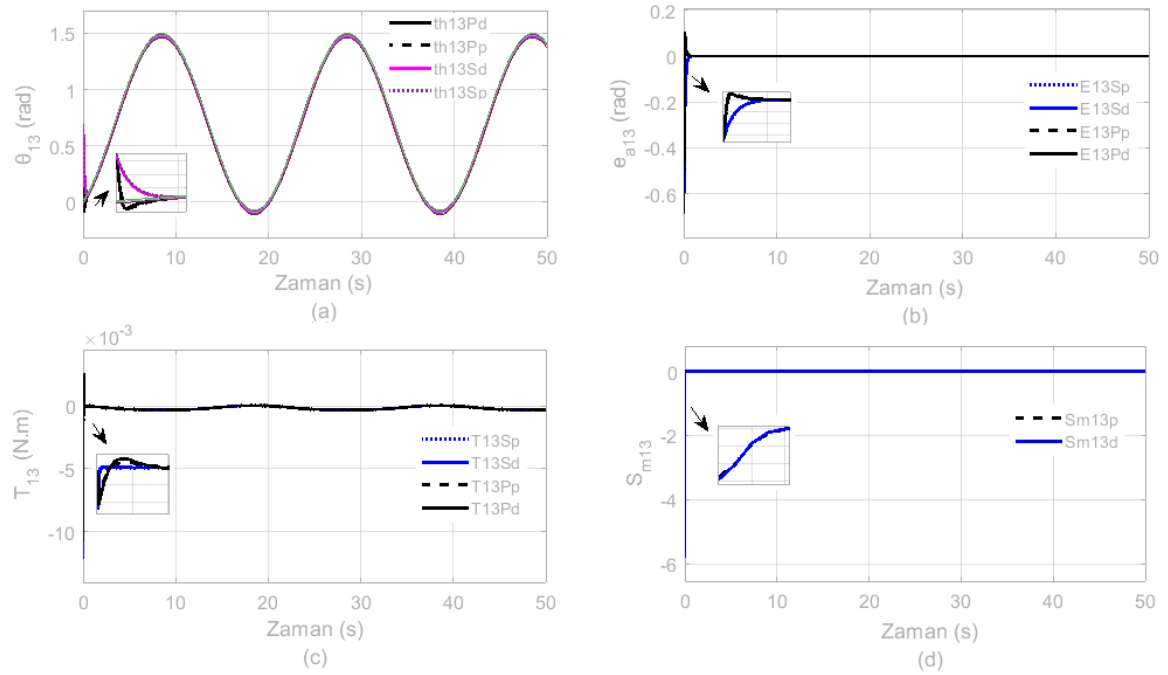
Küçük parmağın MCP eklemi için yörünge takibi, açı hatası, tork ve kayma düzlemi grafikleri Şekil 45'de gösterilmiştir. PIP eklemi için yörünge takibi, açı hatası, tork ve kayma düzlemi grafikleri Şekil 46'de gösterilmiştir. DIP eklemi için yörünge takibi, açı hatası, tork ve kayma düzlemi grafikleri Şekil 47'da verilmiştir.



Şekil 45. 16 SD için küçük parmağın MCP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği



Şekil 46. 16 SD için küçük parmağın PIP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği

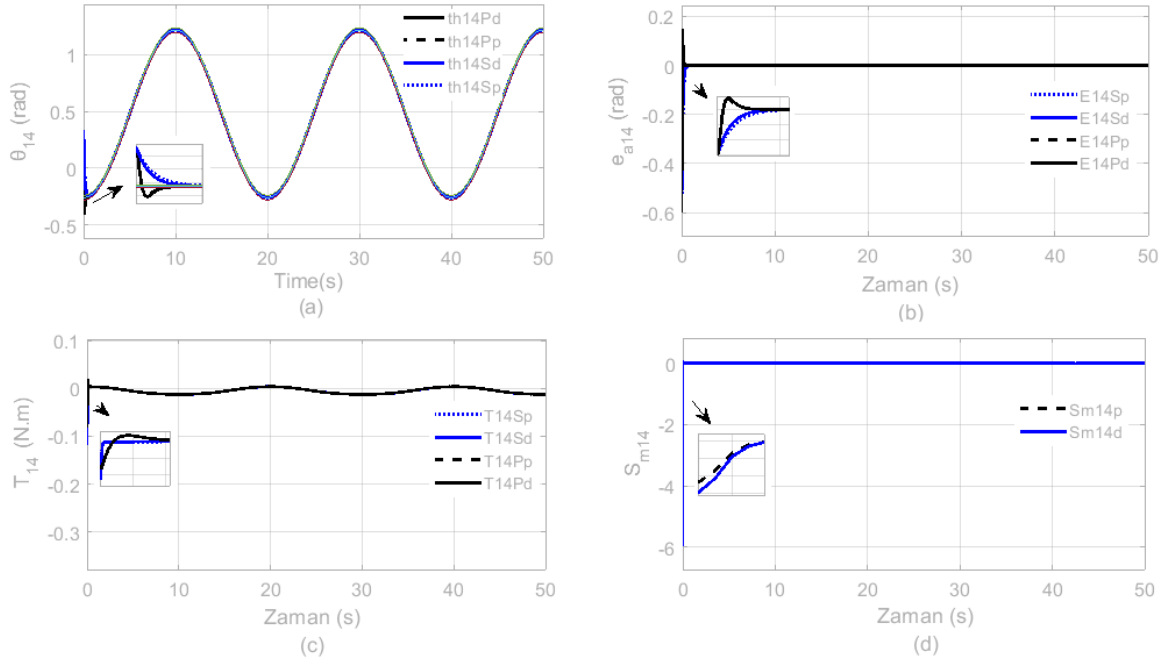


Şekil 47. 16 SD için küçük parmağın DIP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği

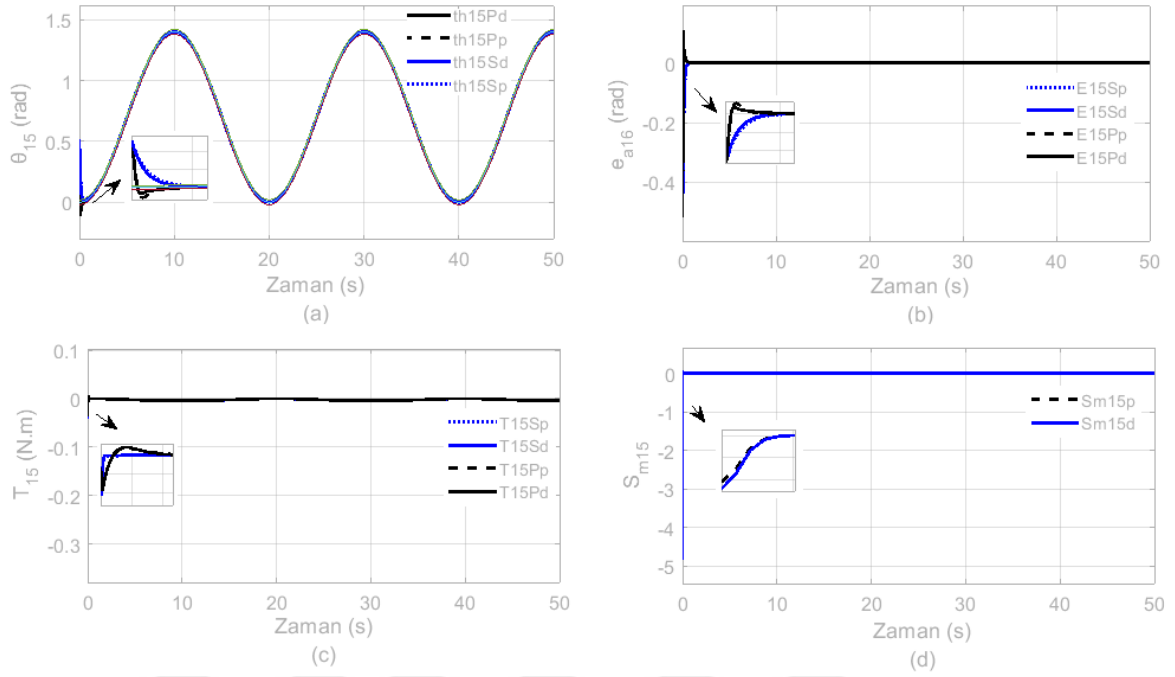
Tablo 12’de verilen sonuçlara göre, küçük parmağın MCP, PIP ve DIP eklemlerinin yörünge takibinde başarılı oldukları gözlenmiştir. Her üç eklemdede de HKKK’nın aşma

miktarının HPID'den daha iyi olduğu gözlenmiştir. Optimizasyon algoritmaları açısından değerlendirildiğinde de HPID-DG'nin daha üstün olduğu görülmektedir.

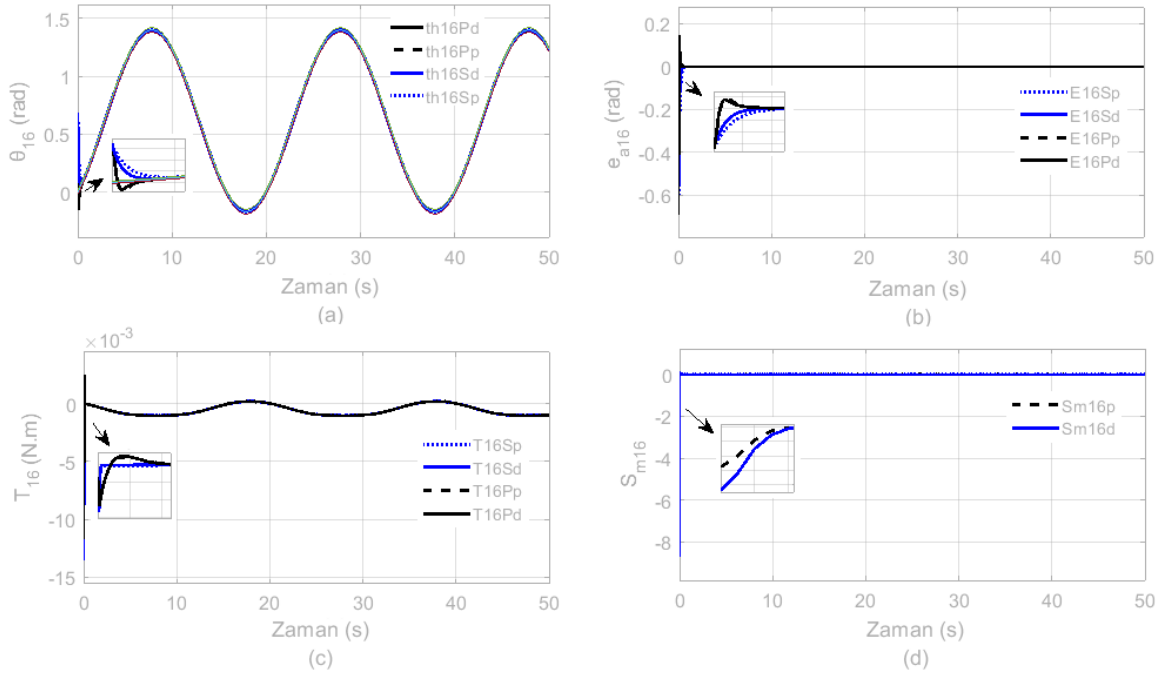
Baş parmağın TMC yörünge takibi, açı hatası, tork ve kayma düzlemi grafikleri Şekil 48'de gösterilmiştir. MCP yörünge takibi, açı hatası, tork ve kayma düzlemi grafikleri Şekil 49'de gösterilmiştir. IP yörünge takibi, açı hatası, tork ve kayma düzlemi grafikleri Şekil 50'da gösterilmiştir.



Şekil 48. 16 SD için baş parmağın TMC falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği



Şekil 49. 16 SD için baş parmağın MCP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği



Şekil 50. 16 SD için baş parmağın IP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği

Tablo 12’de verilen sonuçlara göre, baş parmağın TMC, MCP ve IP eklemlerinin yörünge takibinde başarılı oldukları gözlenmiştir. Her üç eklemdede HKKK’nın aşma

miktarının HPID'den daha iyi olduğu gözlenmiştir. Optimizasyon algoritmaları açısından değerlendirildiğinde de HPID-PSO'nun daha üstün olduğu görülmektedir.

Tablo 12. 16 SD'li sistemin benzetim parametrelerine ait sonuçlar
(izin verilen tolerans 0.02)

El ve Bilek		Tipi	Konum (rad)		Tork (N.m)	Kayma Yüzeyi (S _m)	
			Mp	ts	Mp	max.	
Bilek	Flek.-Ekst.	HKKK-PSO	no	0.2671	-110.4821	S _{m1}	-1.3601
		HKKK-DG	no	0.1719	-120.0000		-2.1113
		HPID-PSO	0.0227	0.1403	-51.3088		
		HPID-DG	0.0274	0.0967	-74.2307		
İşaret	MCP	HKKK-PSO	no	0.3533	-0.2071	S _{m2}	-2.7215
		HKKK-DG	no	0.3346	-0.3767		-2.8742
		HPID-PSO	0.0749	0.1944	-0.2442		
		HPID-DG	0.0827	0.1817	-0.3414		
	PIP	HKKK-PSO	no	0.4061	-0.2617	S _{m3}	-4.1596
		HKKK-DG	no	0.3976	-0.2735		-4.2469
		HPID-PSO	0.1035	0.2264	-0.2391		
		HPID-DG	0.0881	0.2898	-0.2487		
	DIP	HKKK-PSO	no	0.3965	-0.0771	S _{m4}	-6.1410
		HKKK-DG	no	0.4400	-0.0771		-5.5349
		HPID-PSO	0.1270	0.2726	0.0100		
		HPID-DG	0.1474	0.2549	0.0111		
Orta	MCP	HKKK-PSO	-0.5205	0.1783	-0.9341	S _{m5}	-61.8399
		HKKK-DG	-0.6799	0.2298	-1.4188		-99.1783
		HPID-PSO	-0.3859	0.1706	-1.3820		
		HPID-DG	0.0243	0.1653	-1.4463		
	PIP	HKKK-PSO	-0.8919	0.3341	-0.2791	S _{m6}	-112.9364
		HKKK-DG	-1.1744	0.2897	-0.4024		-183.7846
		HPID-PSO	-0.7225	0.2383	-0.3804		
		HPID-DG	-0.5678	0.2187	-0.4031		
	DIP	HKKK-PSO	no	0.4412	0.0756	S _{m7}	-5.5192
		HKKK-DG	no	0.2694	0.1220		-9.0240
		HPID-PSO	0.1613	0.2383	-0.0445		
		HPID-DG	0.1346	0.777	-0.0502		
Yüzük	MCP	HKKK-PSO	no	0.3534	-0.1897	S _{m8}	-2.7214
		HKKK-DG	no	0.3534	-0.3429		-2.7214
		HPID-PSO	0.0402	0.1877	-0.2246		
		HPID-DG	0.0738	0.1437	-0.3203		
	PIP	HKKK-PSO	no	0.4061	-0.0591	S _{m9}	-4.1596
		HKKK-DG	no	0.3688	-0.1045		-4.5795
		HPID-PSO	0.1041	0.2496	-0.0708		
		HPID-DG	0.0859	0.2299	-0.1001		
	DIP	HKKK-PSO	no	0.4411	-0.0128	S _{m10}	-5.5192
		HKKK-DG	no	0.4412	-0.0218		-5.5192
		HPID-PSO	0.1467	0.2588	-0.0149		
		HPID-DG	0.1198	0.2836	-0.0208		

Tablo 12'nin devamı

Küçük	MCP	HKKK-PSO	no	0.3534	-0.8798	S _{m11}	-2.7215
		HKKK-DG	no	0.2447	-1.4108		-3.9254
		HPID-PSO	0.0494	0.2357	-1.0816		
		HPID-DG	0.0765	0.1446	-0.8769		
	PIP	HKKK-PSO	no	0.4060	-0.2876	S _{m12}	-4.1596
		HKKK-DG	no	0.2477	-0.4964		-6.8121
		HPID-PSO	0.0797	0.2395	-0.3852		
		HPID-DG	0.1281	0.1996	-0.4515		
	DIP	HKKK-PSO	no	0.4412	-0.0067	S _{m13}	-5.5192
		HKKK-DG	no	0.4193	-0.0121		-5.8088
		HPID-PSO	0.1089	0.3331	-0.0079		
		HPID-DG	0.1063	0.2942	-0.0107		
Baş	TMC	HKKK-PSO	no	0.4238	-0.0979	S _{m14}	-4.7999
		HKKK-DG	no	0.3402	-0.1179		-5.9758
		HPID-PSO	0.1345	0.2108	-0.0781		
		HPID-DG	0.1504	0.2101	-0.0814		
	MCP	HKKK-PSO	no	0.3994	-0.0334	S _{m15}	-4.2286
		HKKK-DG	no	0.3492	-0.0427		-4.8369
		HPID-PSO	0.1125	0.2381	-0.0349		
		HPID-DG	0.0673	0.2793	-0.0376		
	IP	HKKK-PSO	no	0.4413	-0.0107	S _{m16}	-5.5195
		HKKK-DG	no	0.2785	-0.0135		-8.7308
		HPID-PSO	0.1677	0.2220	-0.0107		
		HPID-DG	0.1430	0.2361	-0.0116		

3.1.3. 18 SD'li Sistemin Benzetimi

18 SD'li sistem için ODE1 BE sayısal çözüm metodu ve adım boyutu 0.1 Newton Euler 1 tekrar çözüm seçimi ile yapılmıştır. ODE1 BE diferansiyel denklemleri Tablo 13'deki başlangıç şartlarına göre çözülmüştür.

Tablo 13. 18 SD'li sistem açısı başlangıç şartları (rad)

Başlangıç şartları			
$\theta_1 = 0, \dot{\theta}_1 = 0.17$	$\theta_2 = 0, \dot{\theta}_2 = 0.34$	$\theta_3 = 0, \dot{\theta}_3 = 0.52$	$\theta_4 = 0, \dot{\theta}_4 = 0.69$
$\theta_5 = 0, \dot{\theta}_5 = 0.34$	$\theta_6 = 0, \dot{\theta}_6 = 0.52$	$\theta_7 = 0, \dot{\theta}_7 = 0.69$	$\theta_8 = 0, \dot{\theta}_8 = 0.34$
$\theta_9 = 0, \dot{\theta}_9 = 1.2$	$\theta_{10} = 0, \dot{\theta}_{10} = 0.8$	$\theta_{11} = 0, \dot{\theta}_{11} = 0.34$	$\theta_{12} = 0, \dot{\theta}_{12} = 0.52$
$\theta_{13} = 0, \dot{\theta}_{13} = 0.2$	$\theta_{14} = 0, \dot{\theta}_{14} = 0.55$	$\theta_{15} = 0, \dot{\theta}_{15} = 0.65$	$\theta_{16} = 0, \dot{\theta}_{16} = 0.2$
$\varphi_1 = 0, \dot{\varphi}_1 = 0.17$	$\varphi_2 = 0, \dot{\varphi}_2 = 0.1$		

Kontrol ve optimizasyon uygulamalarında kullanılan model parametreleri Tablo 14’de verilmiştir. Sistemin algoritma arama uzayı

Tablo 15’de verilmiştir. HKKK optimizasyon parametreleri Tablo 16’de verilmiştir. HPID optimizasyon parametreleri Tablo 17’da verilmiştir.

Tablo 14. 18 SD’li model parametreleri

Kontrol		HKKK		HPID	
Kontrol Türleri	Değişkenler	[C _i ξ _i ξ̇ _i] i :18		[P _i I _i D _i] i :18	
		Min	Max	Min	Max
	HKKK- PSO	Tablo8		Tablo9	
	HKKK-DE				
	HPID-PSO				
HPID-DE					
Maliyet Fonk.	$\sum_{i=1}^{18} ITAE$				
Popülasyon	20				
İterasyon	15				
Çalışma Süresi	0.2				
Maliyet Fonk.	HKKK- PSO	9111.20687639509			
	HKKK-DE	9112.91495117948			
	HPID-PSO	39469833.6281307			
	HPID-DE	39469761.8989343			
Yakınsama Zamanı	HKKK- PSO	776.472570200000			
	HKKK-DE	1210.284690000000			
	HPID-PSO	738.348695800000			
	HPID-DE	687.446816200000			

Tablo 15. 18 SD’li sistem için algoritma arama uzayı

HKKK - [C _i ξ _i ξ̇ _i]			HPID - [P _i I _i D _i] i :18		
Değişken Tipi	Arama Değeri		Tipi	Arama Değeri	
C ₁ , ξ ₁₋₁ , ξ̇ ₂₋₁	[20 150 350]	-+0.5	P ₁ , I ₁ , D ₁	[-100 -1 100]	-+0.5
C ₂ , ξ ₁₋₂ , ξ̇ ₂₋₂	[50 100 300]	-+0.5	P ₂ , I ₂ , D ₂	[-100 -1 100]	-+0.5
C ₃ , ξ ₁₋₃ , ξ̇ ₂₋₃	[20 300 250]	-+0.5	P ₃ , I ₃ , D ₃	[-100 -1 100]	-+0.5
C ₄ , ξ ₁₋₄ , ξ̇ ₂₋₄	[20 200 250]	-+0.5	P ₄ , I ₄ , D ₄	[-100 -1 100]	-+0.5
C ₅ , ξ ₁₋₅ , ξ̇ ₂₋₅	[300 251 250]	-+0.5	P ₅ , I ₅ , D ₅	[-100 -1 100]	-+0.5
C ₆ , ξ ₁₋₆ , ξ̇ ₂₋₆	[50 115 150]	-+0.5	P ₆ , I ₆ , D ₆	[-100 -1 100]	-+0.5
C ₇ , ξ ₁₋₇ , ξ̇ ₂₋₇	[2 20 2]	-+0.5	P ₇ , I ₇ , D ₇	[-100 -1 100]	-+0.5
C ₈ , ξ ₁₋₈ , ξ̇ ₂₋₈	[2 20 2]	-+0.5	P ₈ , I ₈ , D ₈	[-100 -1 100]	-+0.5
C ₉ , ξ ₁₋₉ , ξ̇ ₂₋₉	[500 800 800]	-+0.5	P ₉ , I ₉ , D ₉	[1e5 1e5 1e5]	-+0.5
C ₁₀ , ξ ₁₋₁₀ , ξ̇ ₂₋₁₀	[300 400 100]	-+0.5	P ₁₀ , I ₁₀ , D ₁₀	[1e5 1e5 1e5]	-+0.5

Tablo 15'in devamı

$C_{11}, \xi_{1-11}, \xi_{2-11}$	[300 300 250]	-+0.5	P_{11}, I_{11}, D_{11}	[-800 -1 800]	-+0.5
$C_{12}, \xi_{1-12}, \xi_{2-12}$	[1 250 400]	-+0.5	P_{12}, I_{12}, D_{12}	[-800 -1 800]	-+0.5
$C_{13}, \xi_{1-13}, \xi_{2-13}$	[400 250 400]	-+0.5	P_{13}, I_{13}, D_{13}	[-800 -1 800]	-+0.5
$C_{14}, \xi_{1-14}, \xi_{2-14}$	[600 600 800]	-+0.5	P_{14}, I_{14}, D_{14}	[-800 -1 800]	-+0.5
$C_{15}, \xi_{1-15}, \xi_{2-15}$	[600 600 800]	-+0.5	P_{15}, I_{15}, D_{15}	[-5e4 -5e4 -5e4]	-+0.5
$C_{16}, \xi_{1-16}, \xi_{2-16}$	[900 900 900]	-+0.5	P_{16}, I_{16}, D_{16}	[-1800 -1 1200]	-+0.5
$C_{17}, \xi_{1-17}, \xi_{2-17}$	[200 800 100]	-+0.5	P_{17}, I_{17}, D_{17}	[-8e3 -8e3 -8e3]	-+0.5
$C_{18}, \xi_{1-18}, \xi_{2-18}$	[10 800 100]	-+0.5	P_{18}, I_{18}, D_{18}	[-100 -1 100]	-+0.5

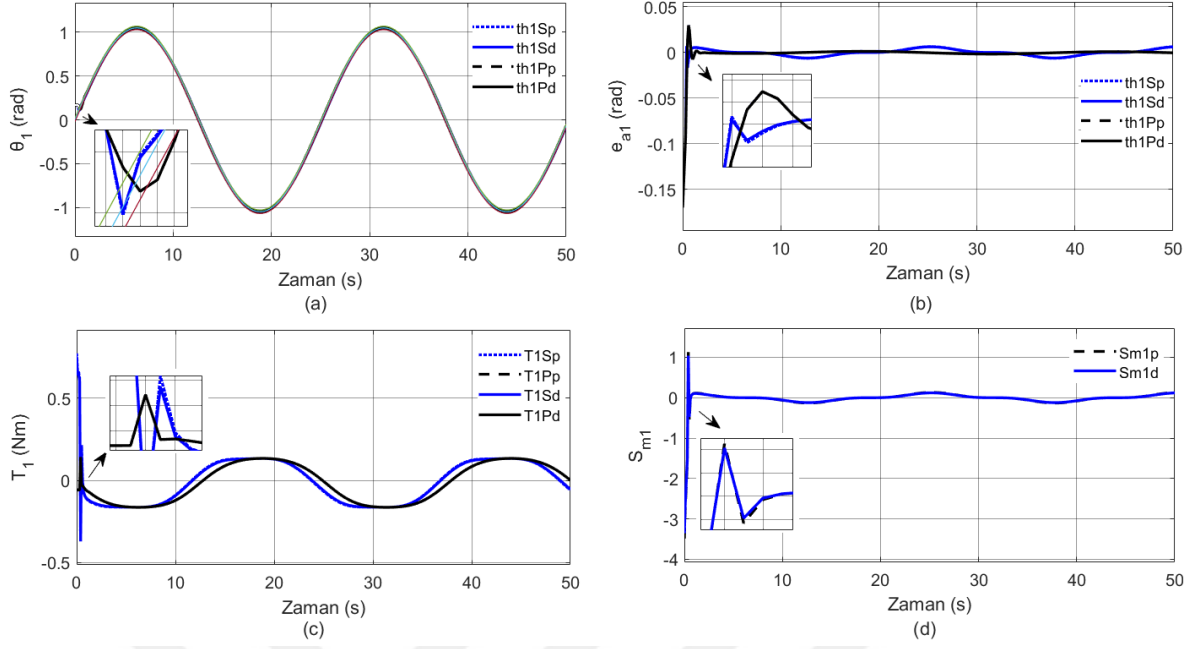
Tablo 16. 18 SD'li sistem için HKKK optimizasyon parametreleri

Kontrol	Arama Uzayı (i =1:54)					
	HKKK- PSO			HKKK-DE		
i =1:3	19.5000	19.5000	350.5000	19.7362	149.7329	350.1234
i =4:6	49.5000	100.2101	299.5283	50.4983	100.0056	299.9887
i =7:9	19.5034	299.5000	249.5000	19.5383	299.8935	250.1620
i =10:12	19.7313	200.5000	249.9927	19.9161	200.0110	250.4408
i =13:15	299.5000	250.5000	249.5000	299.7519	251.1134	249.9693
i =16:18	50.1965	115.5000	149.8716	49.5000	114.5970	149.5000
i =19:21	2.5000	19.5452	1.5881	1.7924	19.7911	1.8802
i =22:24	2.2945	19.5000	1.5000	1.5000	20.0478	2.0424
i =25:27	499.9977	799.9645	800.0417	500.2450	800.5000	799.9679
i =28:30	300.5000	399.5000	100.3851	300.2210	399.5000	99.76434
i =31:33	300.5000	299.6722	249.8885	299.5000	299.5494	249.7512
i =34:36	1.5000	250.5000	399.6884	1.1817	250.5000	399.9483
i =37:39	399.5000	249.5000	400.5000	399.8658	249.5074	400.2555
i =40:42	600.0828	600.5000	799.5360	600.1616	600.5000	799.6895
i =43:45	600.5000	599.5000	799.5265	599.8911	599.5563	800.1962
i =46:48	899.5000	899.5000	900.5000	899.5938	899.6472	899.9573
i =49:51	199.5000	799.5000	99.5085	199.6728	799.5000	99.6310
i =52:54	9.5000	799.5000	100.5000	9.5777	799.5000	99.8054

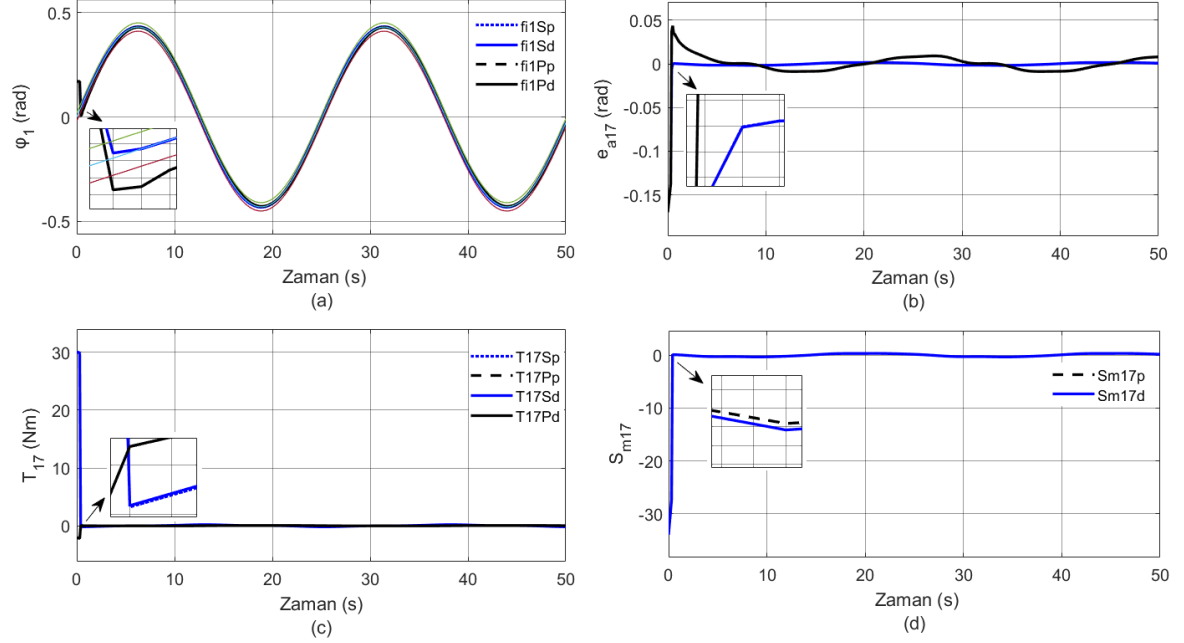
Tablo 17. 18 SD'li sistemi için HPID optimizasyon parametreleri

Kontrol	Arama Uzayı (i=1:54)					
	HPID- PSO			HPID-DE		
i =1:3	-99.8744	-1.2216	100.0652	-99.7414	-1.1207	99.8522
i =4:6	-100.2029	-1.0787	99.7152	-100.1330	-0.5000	100.3344
i =7:9	-99.9461	-1.3395	100.1253	-100.5000	-0.5558	99.6853
i =10:12	-100.1407	-1.1655	100.2156	-99.8924	-0.6316	100.3995
i =13:15	-99.7181	-0.9281	100.2869	-99.9579	-0.5000	100.1052
i =16:18	-99.7847	-0.9056	100.1410	-99.9457	-0.8291	99.7249
i =19:21	-100.1082	-0.7234	99.7021	-100.4343	-0.5331	100.0751
i =22:24	-99.6796	-1.1355	100.0931	-100.0043	-1.4944	100.3692
i =25:27	99999.5985	99999.8321	100000.2383	99999.5407	99999.5116	99999.5000
i =28:30	-9000.26150	-9000.0682	-8999.5280	-9000.5000	-9000.2585	-9000.4666
i =31:33	-800.0644	-1.4089	799.9705	-799.9930	-0.7539	799.5000
i =34:36	-799.8717	-0.8680	799.8251	-799.9852	-1.2492	800.3453
i =37:39	-800.2752	-0.9742	800.1172	-799.5000	-0.6422	799.6472
i =40:42	-799.9828	-1.3811	799.9749	-800.1927	-1.2860	800.0659
i =43:45	-49999.8933	-49999.6907	-50000.1941	-49999.5000	-49999.9129	-50000.4968
i =46:48	-1799.6804	-1.0704	1199.9361	-1799.9845	-1.2773	1200.0035
i =49:51	-7999.7931	-8000.4782	-8000.0966	-7999.8400	-7999.5935	-8000.3124
i =52:54	-100.3219	-0.6752	99.8979	-99.7227	-1.2546	100.5000

Bileğin fleksiyon-ekstansiyon yörünge takibi, açı hatası, tork ve kayma düzlemi grafikleri Şekil 51'de radyal-ulnar grafikleri Şekil 52'de gösterilmiştir. Oluşturulan sinüzoidal yörünge için pasif egzersiz sonuçları verilmiştir. Grafiklerdeki 'Sd' HKKK-DG'yi, 'Sp' ise HKKK-PSO'yu temsil etmektedir. "Pd" HPID-DG'yi, 'Pp' ise HPID-PSO'yu temsil etmektedir.



Şekil 51. 18 SD için bileğin fleksiyon-ekstansiyon bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği

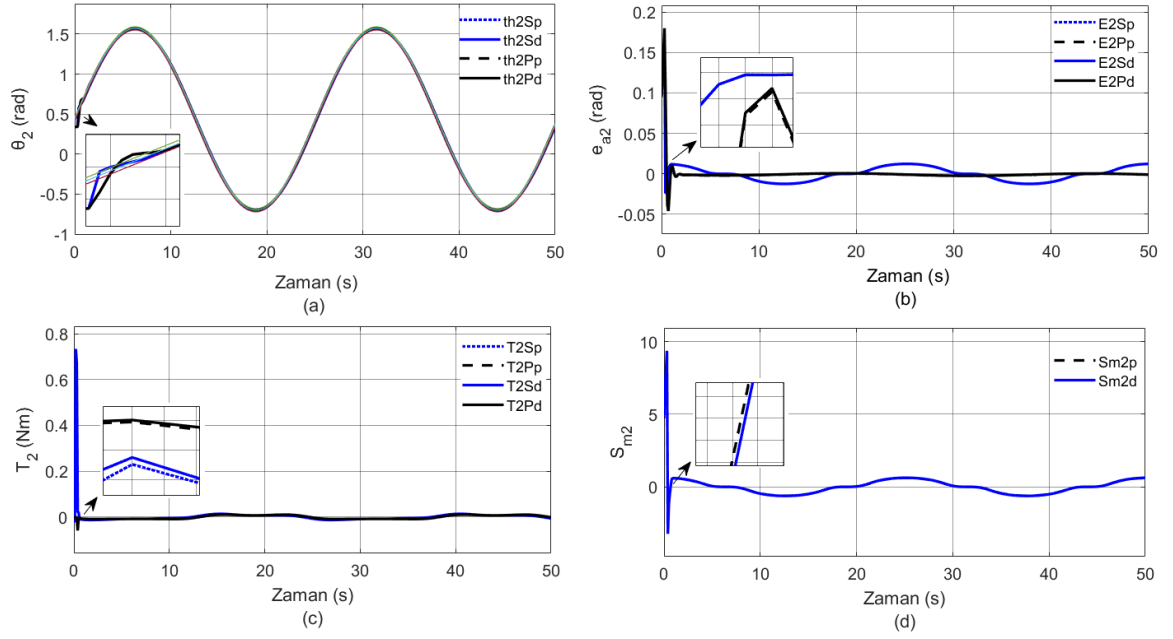


Şekil 52. 18 SD için bileğin radyal/ulnar bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği

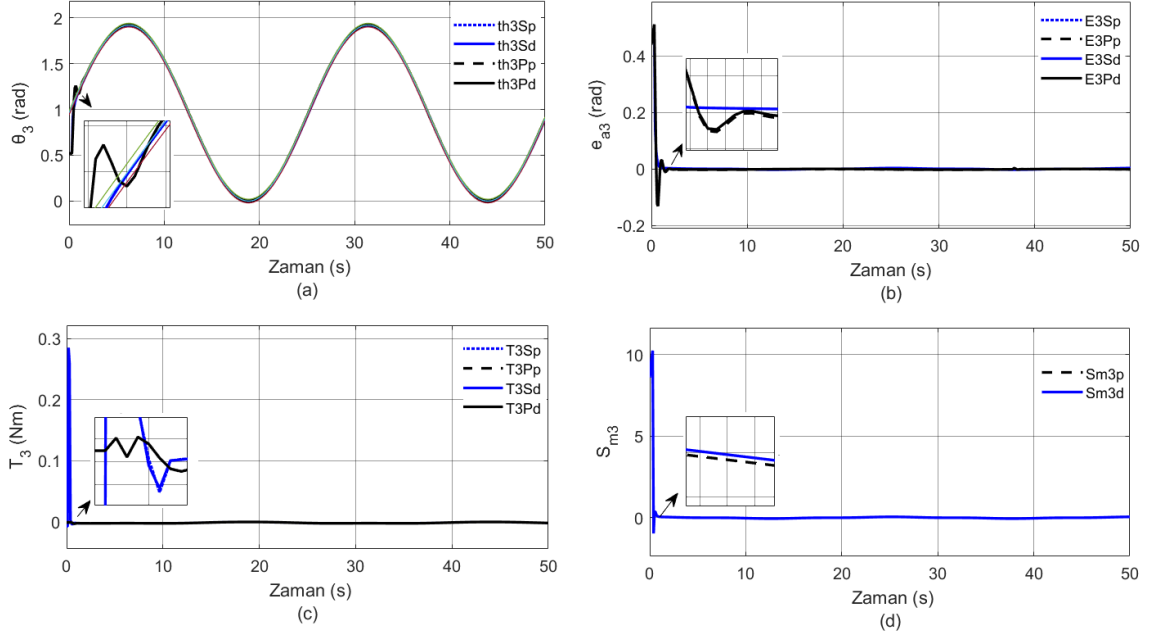
Bilek eklemine fleksiyon-ekstansiyon ve Radyal-Ulnar hareketine ait sonuçları Tablo 18’de verilmiştir. Her iki kontrol yönteminde de referans yörünge takibi başarılı olmuştur. Bu sonuçlara göre HKKK’nın HPID’ye göre daha kararlı sonuçlar verdiği görülmektedir.

Optimizasyon algoritmaları açısından değerlendirildiğinde, HKKK-PSO'nun yerleşme zamanının daha hızlı olduğu, öte yandan HKKK-DG'nin tork değerinin daha küçük olduğu görülmektedir.

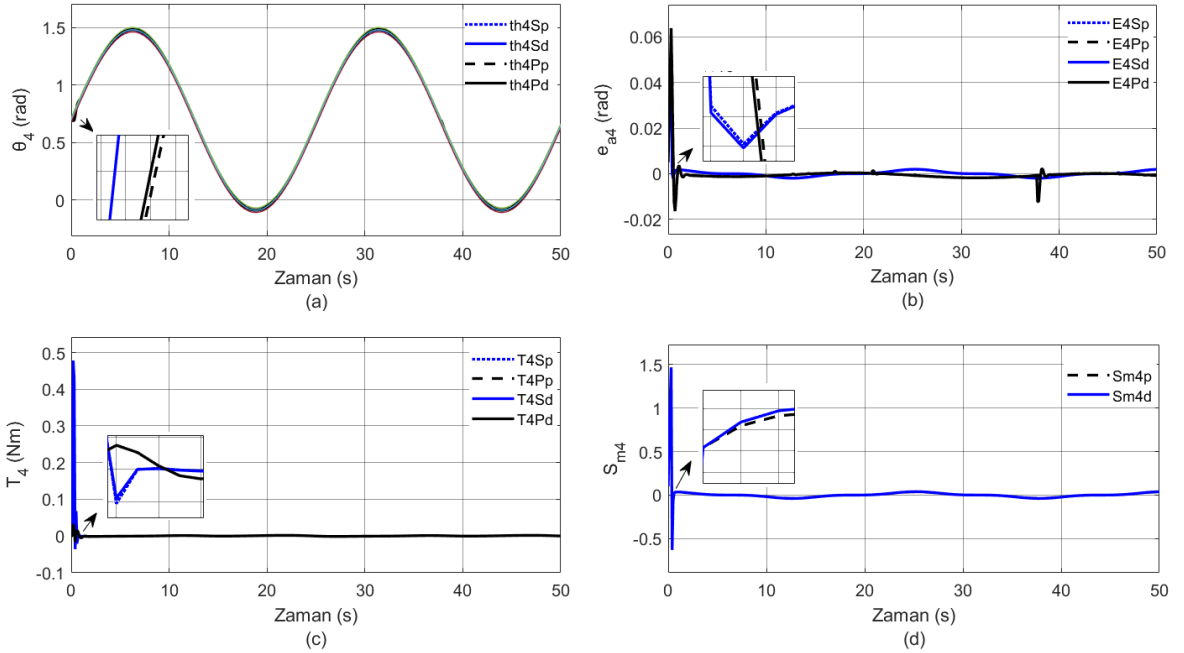
İşaret parmağının MCP eklemi için yörünge takibi, açı hatası, tork ve kayma düzlemi grafikleri Şekil 53'de gösterilmiştir. PIP eklemi için yörünge takibi, açı hatası, tork ve kayma düzlemi grafikleri Şekil 54'de gösterilmiştir. DIP eklemi için yörünge takibi, açı hatası, tork ve kayma düzlemi grafikleri Şekil 55'de verilmiştir.



Şekil 53. 18 SD için işaret parmağının MCP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği



Şekil 54. 18 SD için işaret parmağının PIP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği

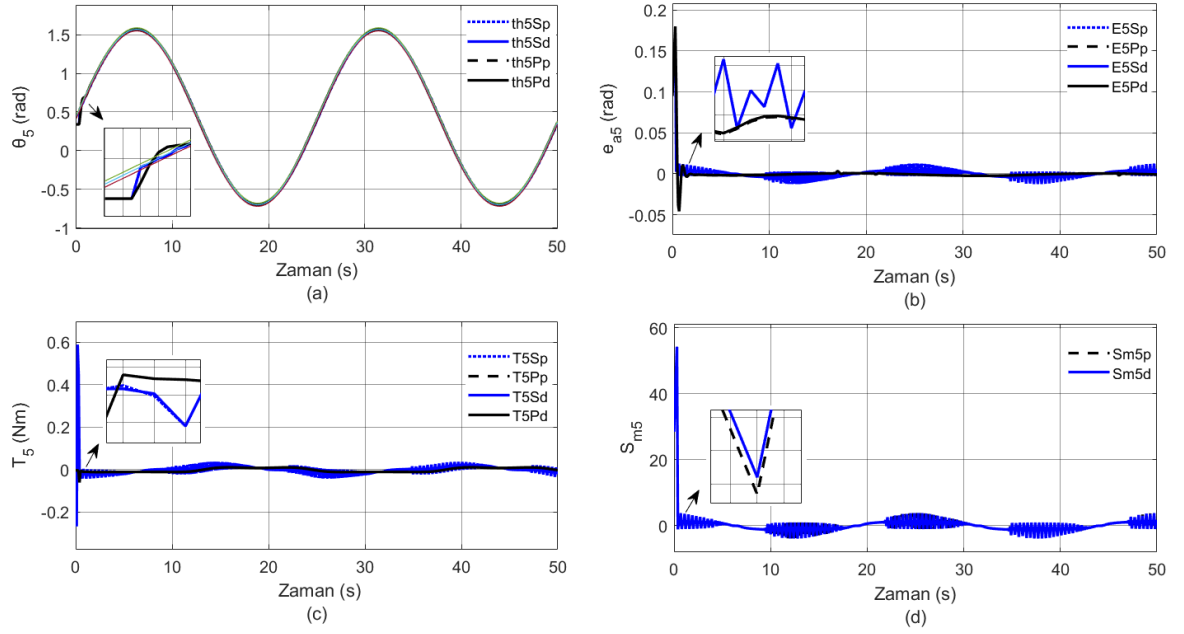


Şekil 55. 18 SD için işaret parmağının DIP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği

Tablo 18’de verilen sonuçlara göre, işaret parmağının MCP, PIP ve DIP eklemlerinin yörünge takibinde başarılı oldukları gözlenmiştir. Her iki kontrol yönteminde de referans yörünge takibi başarılı olmuştur. HKKK ile HPID hatasız yörünge takibi yaptığı fakat HPID

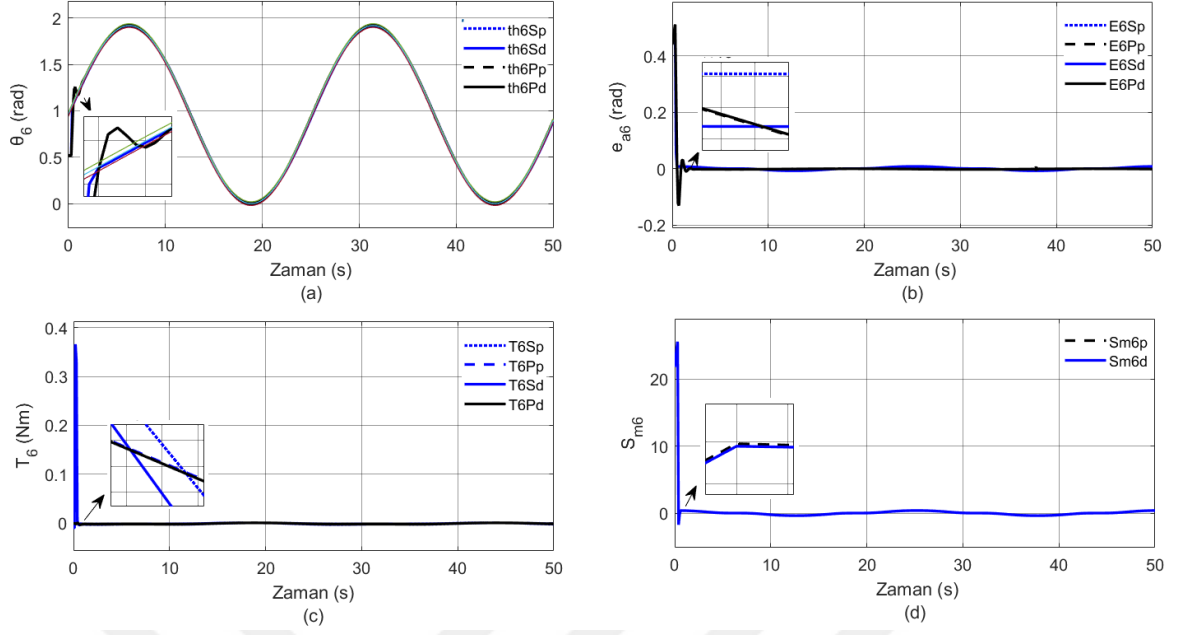
yerleşmesi daha yavaş olduğu gözlenmiştir. Optimizasyon algoritmaları açısından değerlendirildiğinde, HKKK-PSO'nun daha küçük kayma düzlemi oluşturduğu görülmektedir.

Orta parmağın MCP eklemi için yörünge takibi, açı hatası, tork ve kayma düzlemi grafikleri Şekil 56'de gösterilmiştir. PIP eklemi için yörünge takibi, açı hatası, tork ve kayma düzlemi grafikleri Şekil 57'da gösterilmiştir. DIP eklemi için yörünge takibi, açı hatası, tork ve kayma düzlemi grafikleri Şekil 58'de verilmiştir.

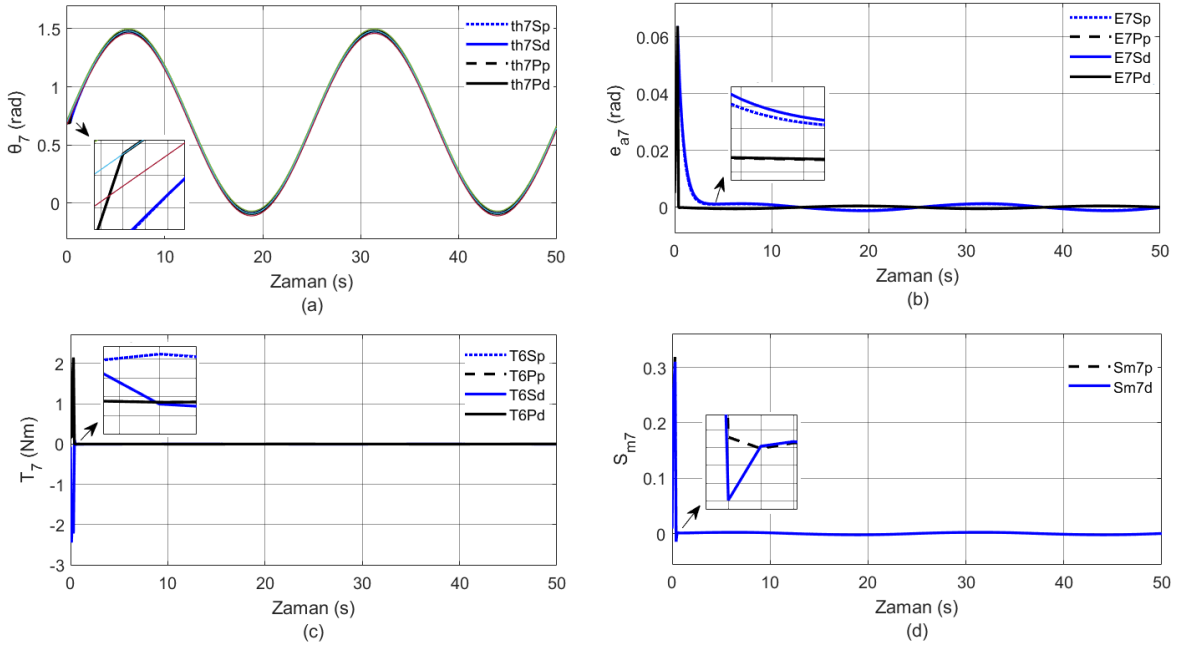


Şekil 56. 18 SD için orta parmağın MCP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği

Tablo 18'de verilen sonuçlara göre, orta parmağının MCP, PIP ve DIP eklemlerinin yörünge takibinde başarılı oldukları gözlenmiştir. Her iki kontrol yönteminde de referans yörünge takibi başarılı olmuştur. HKKK ile HPID'nin hatasız yörünge takibi yaptığı fakat HKKK tork değerlerinin daha yüksek olduğu gözlenmiştir. Optimizasyon algoritmaları açısından değerlendirildiğinde, HPID-PSO ve HPID-DG'nin eşit oldukları görülmektedir.

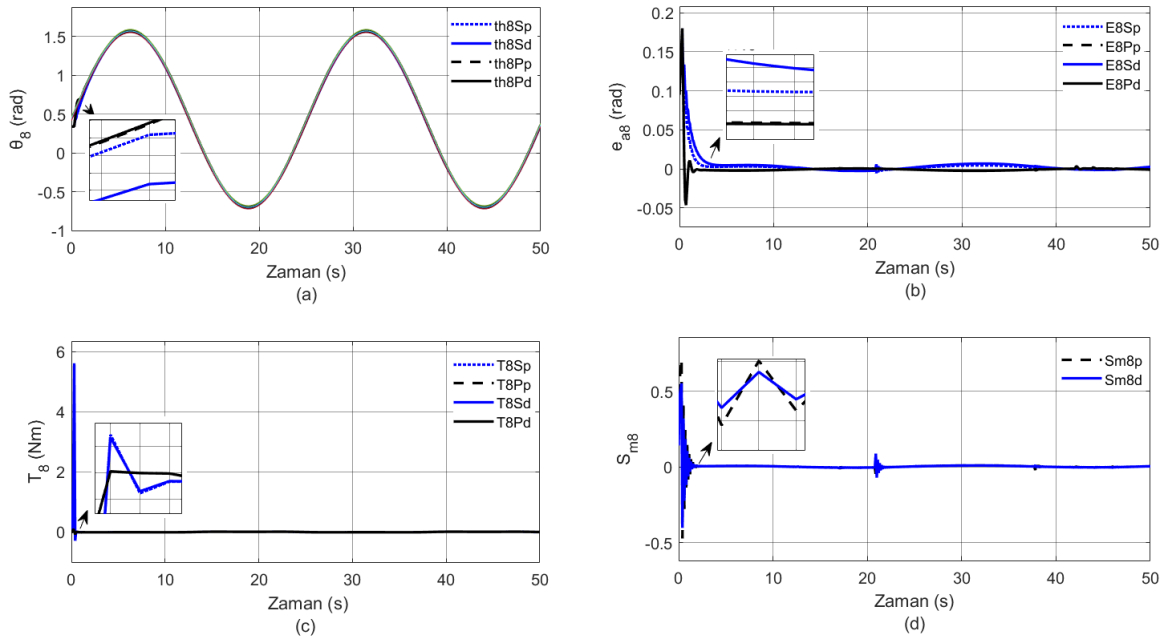


Şekil 57. 18 SD için orta parmağın PIP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği

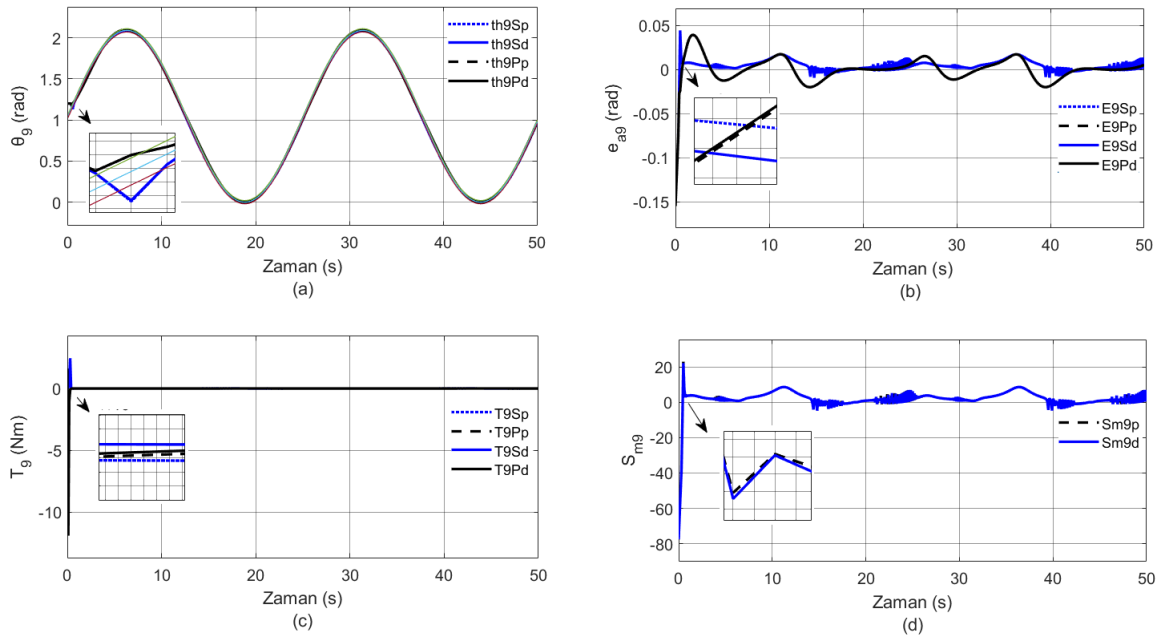


Şekil 58. 18 SD için orta parmağın DIP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği

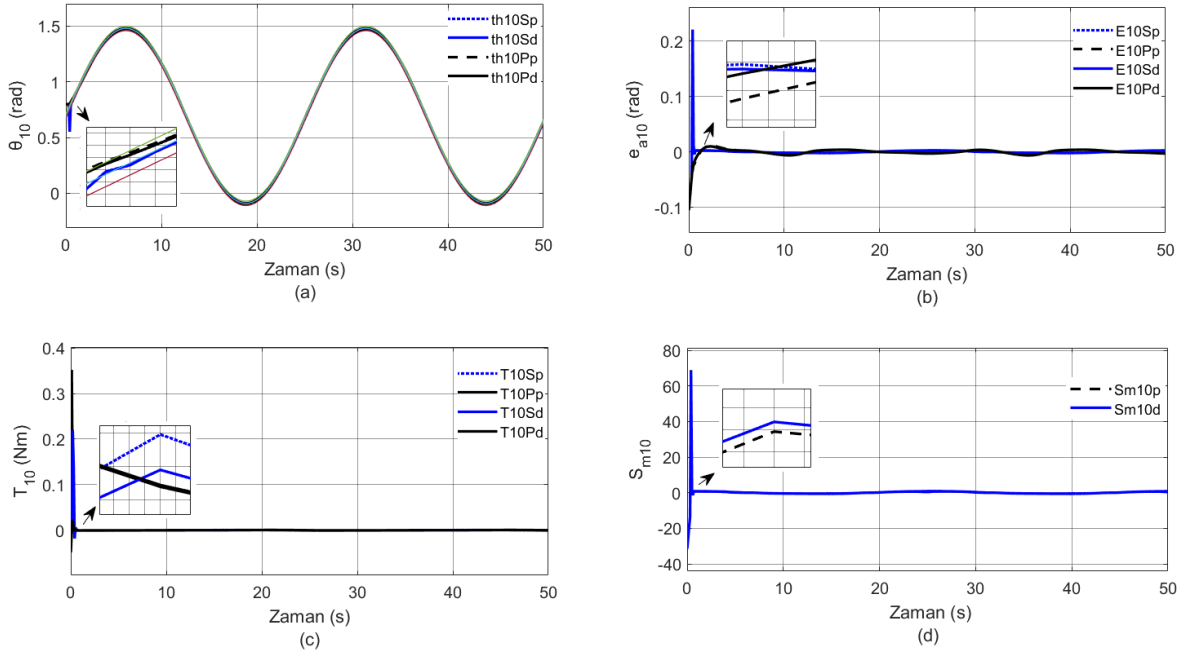
Yüzük parmağının MCP eklemi için yörünge takibi, açılı hatası, tork ve kayma düzlemi grafikleri Şekil 59’de gösterilmiştir. PIP eklemi için yörünge takibi, açılı hatası, tork ve kayma düzlemi grafikleri Şekil 60’da gösterilmiştir. DIP eklemi için yörünge takibi, açılı hatası, tork ve kayma düzlemi grafikleri Şekil 61’de verilmiştir.



Şekil 59. 18 SD için yüzük parmağının MCP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği



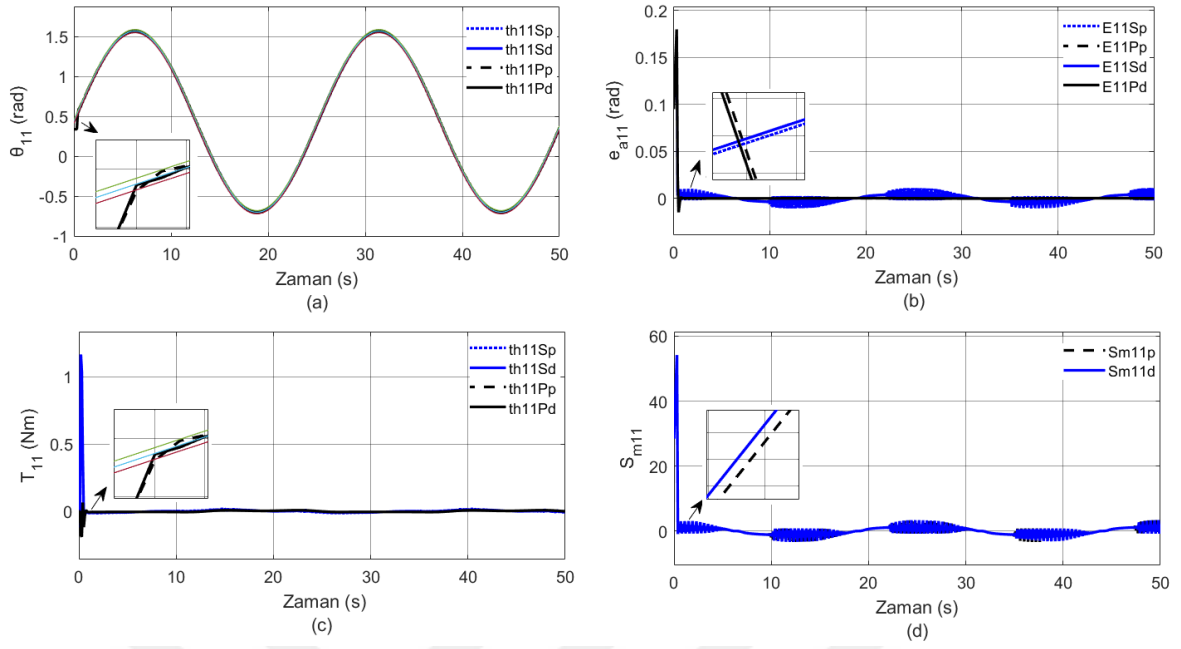
Şekil 60. 18 SD için yüzük parmağının PIP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği



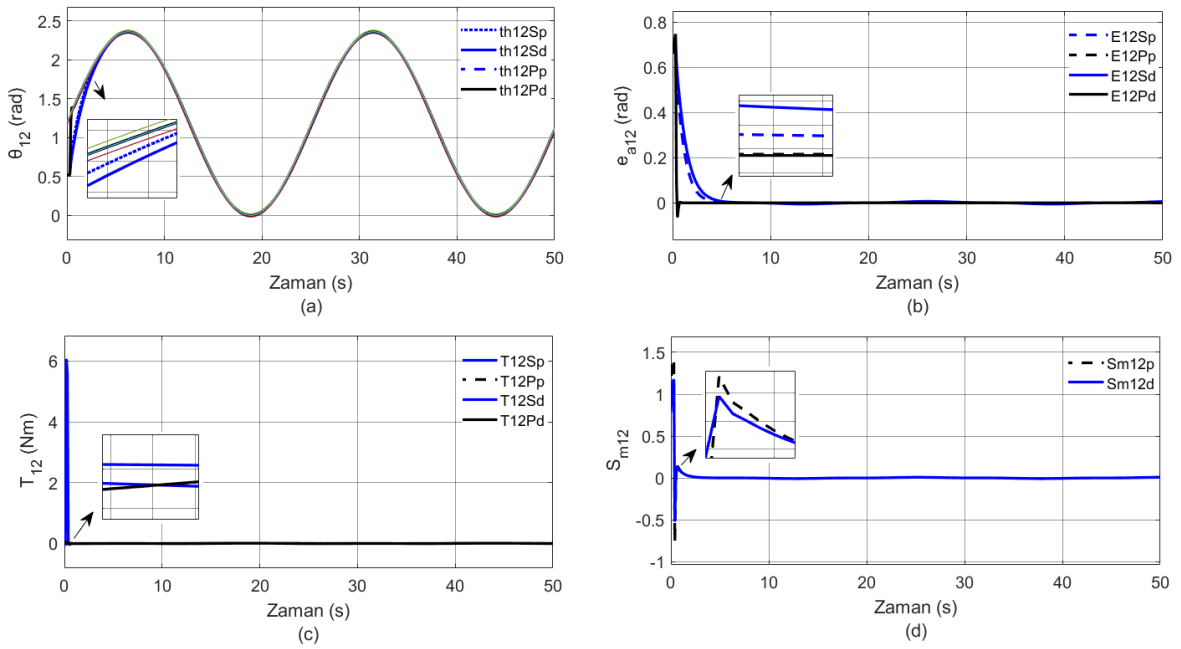
Şekil 61. 18 SD için yüzük parmağının DIP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği

Tablo 18’de verilen sonuçlara göre, yüzük parmağının MCP, PIP ve DIP eklemlerinin yörünge takibinde başarılı oldukları gözlenmiştir. Her iki kontrol yönteminde de referans yörünge takibi başarılı olmuştur. HPID’nin hatasız yörünge takibi yaptığı fakat HKKK’nın tork değerlerinin daha düşük olduğu gözlenmiştir. Optimizasyon algoritmaları açısından değerlendirildiğinde, HPID-DG’nin daha başarılı olduğu görülmektedir.

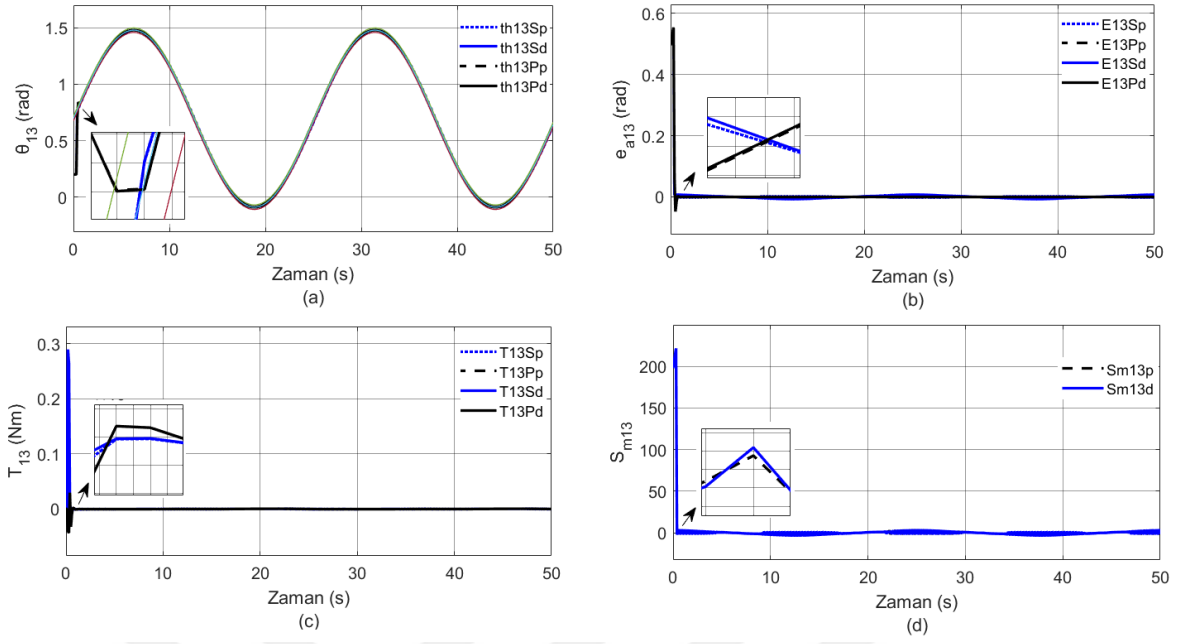
Küçük parmağın MCP eklemi için yörünge takibi, açı hatası, tork ve kayma düzlemi grafikleri Şekil 62’de gösterilmiştir. PIP eklemi için yörünge takibi, açı hatası, tork ve kayma düzlemi grafikleri Şekil 63’de gösterilmiştir. DIP eklemi için yörünge takibi, açı hatası, tork ve kayma düzlemi grafikleri Şekil 64’de verilmiştir.



Şekil 62. 18 SD için küçük parmağının MCP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği



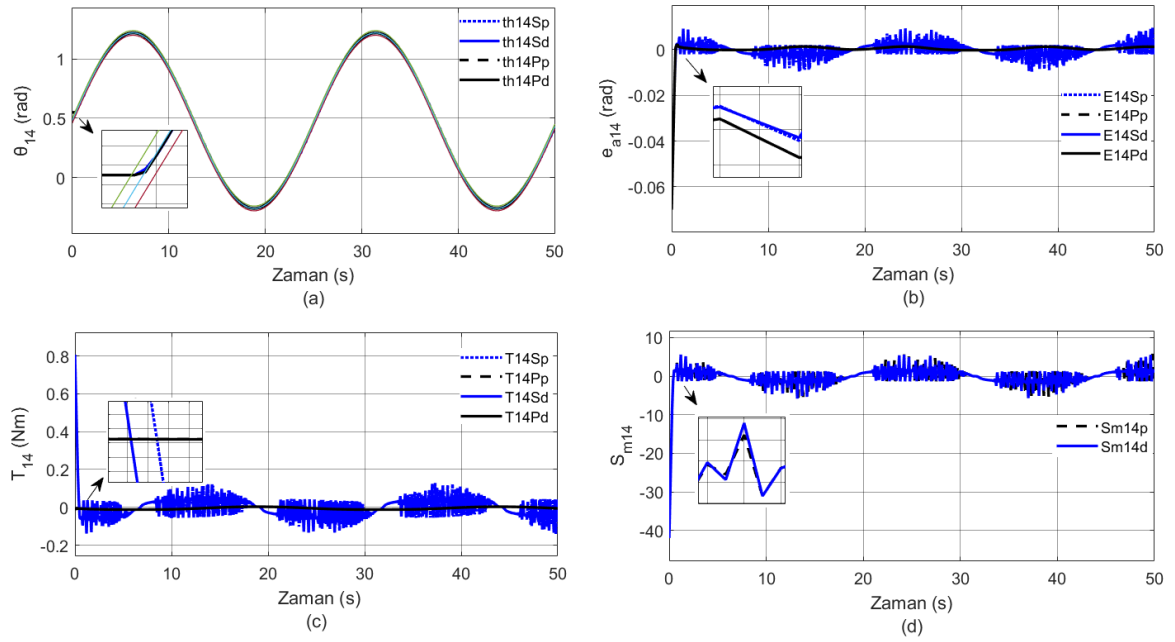
Şekil 63. 18 SD için küçük parmağının PIP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği



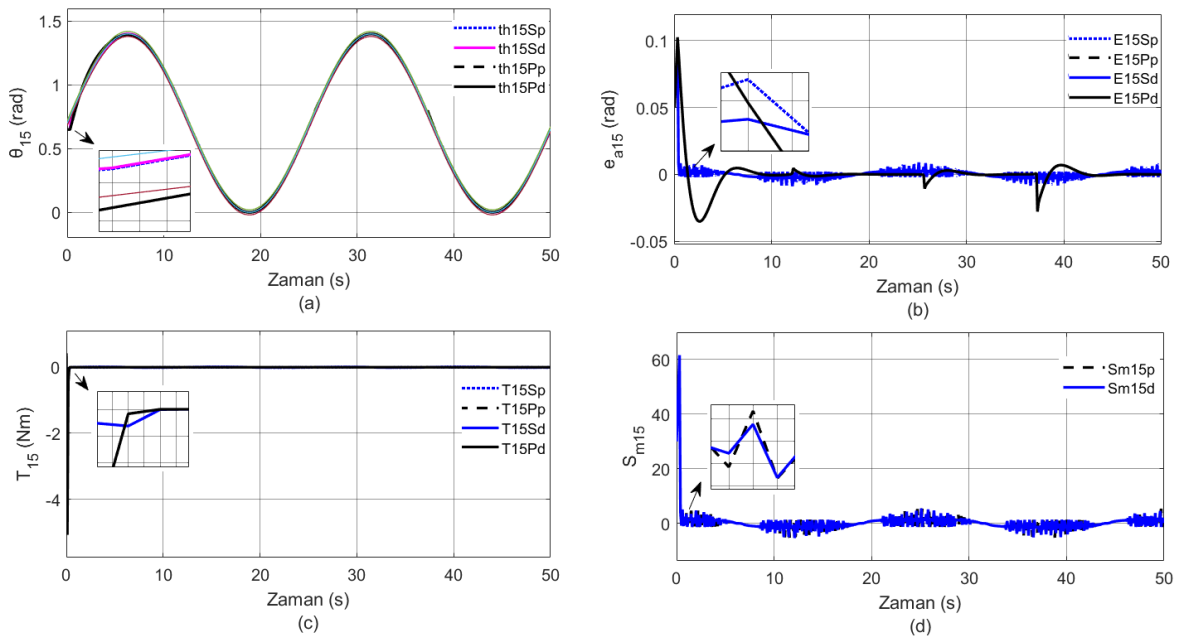
Şekil 64. 18 SD için küçük parmağının DIP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği

Tablo 18’de verilen sonuçlara göre, küçük parmağın MCP, PIP ve DIP eklemlerinin yörünge takibinde başarılı oldukları gözlenmiştir. Her iki kontrol yönteminde de referans yörünge takibi başarılı olmuştur. HKKK ve HPID’nin hatasız yörünge takibi yaptığı fakat HPID tork değerlerinin daha düşük olduğu gözlenmiştir. Optimizasyon algoritmaları açısından değerlendirildiğinde, HPID-PSO’nun daha başarılı olduğu görülmektedir.

Baş parmağın TMC eklemi için yörünge takibi, açılma hatası, tork ve kayma düzlemi grafikleri Şekil 65’de gösterilmiştir. MCP eklemi için yörünge takibi, açılma hatası, tork ve kayma düzlemi grafikleri Şekil 66’de gösterilmiştir. IP eklemi için yörünge takibi, açılma hatası, tork ve kayma düzlemi grafikleri Şekil 67’de verilmiştir. Baş parmağın abduksiyon-addüksiyon yörünge takibi, açılma hatası, tork ve kayma düzlemi grafikleri Şekil 68’de gösterilmiştir.

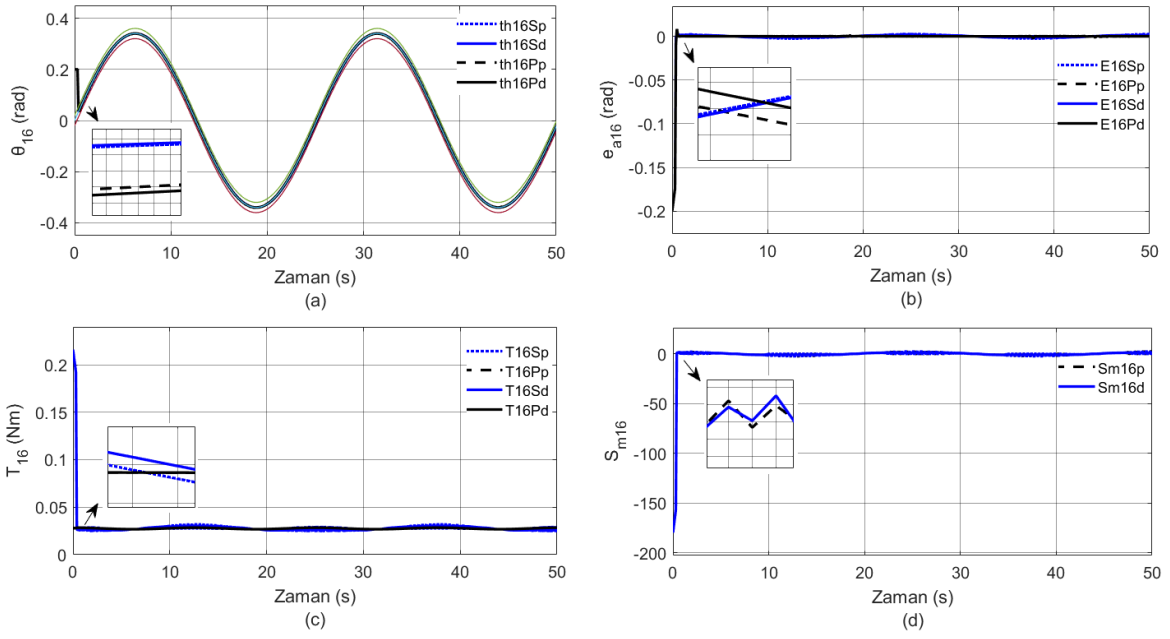


Şekil 65. 18 SD için baş parmağın TMC falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği



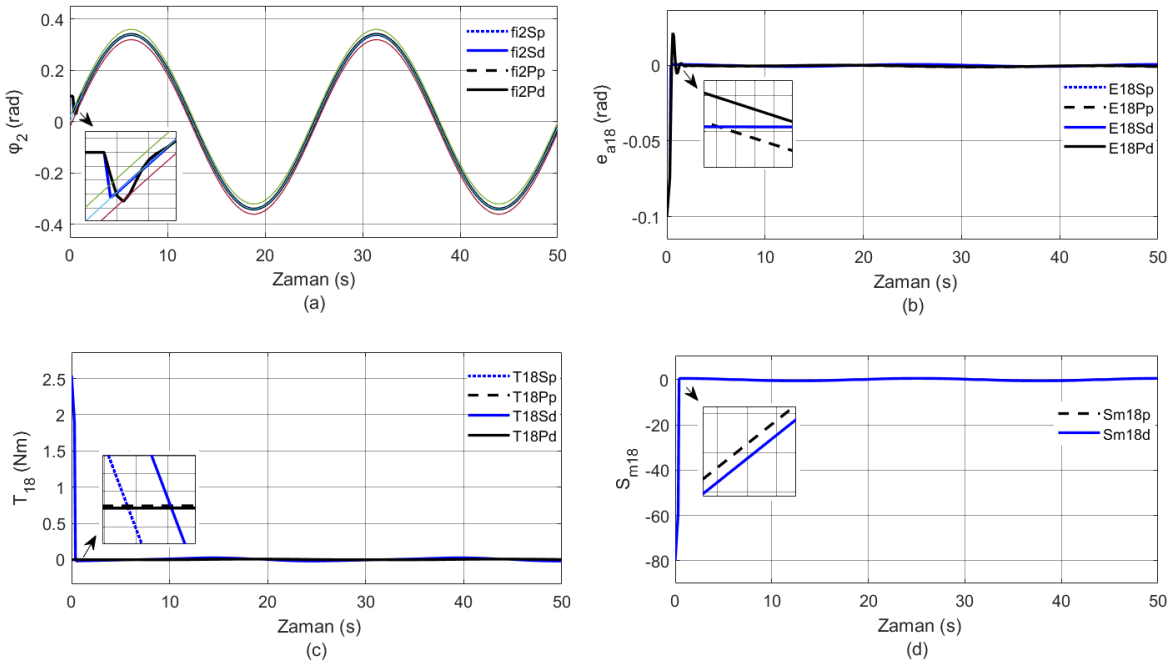
Şekil 66. 18 SD için baş parmağın MCP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği

Baş parmağın IP yörünge takibi, açılı hatası, tork ve kayma düzlemi grafikleri Şekil 67’de gösterilmiştir.



Şekil 67. 18 SD için baş parmağın IP falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği

Baş parmağın abdüksiyon-addüksiyon yörünge takibi, aç hataşı, tork ve kayma düzlemi grafikleri Şekil 68’de gösterilmiştir.



Şekil 68. 18 SD için baş parmağın Abdüksiyon-Addüksiyon falanks bozucu etkili (a) Yörünge kontrolü, (b) Hata değeri, (c) Tork değeri, (d) Kayma düzlem grafiği

Tablo 18’de verilen sonuçlara göre, baş parmağının TMC, MCP, IP ve Abb-Add. eklemlerinin yörünge takibinde başarılı oldukları gözlenmiştir. Her iki kontrol yönteminde de referans yörünge takibi başarılı olmuştur. TMC, IP ve Ab-Ad eklemlerinde HKKK ve HPID hatasız yörünge takibi yaptığı fakat HPID tork değerlerinin daha düşük olduğu gözlenmiştir. Optimizasyon algoritmaları açısından değerlendirildiğinde, HPID-PSO’nun daha başarılı olduğu görülmektedir.

3B sistemin benzetim parametrelerine ait ayrıntılı sonuçlar Tablo 18’de verilmiştir. Her bir parmak için maksimum aşma, yerleşme zamanı, tork değerleri ve kayma yüzeyine ait değerler tabloda görülmektedir. Genel olarak HKKK ve HPID’nin performanslarının benzer olduğu, yalnızca HKKK’nın daha hızlı olduğu gözlenmektedir.

Tablo 18. 18 SD’li sistemin benzetim parametrelerine ait sonuçlar
(izin verilen tolerans 0.02)

El ve Bilek		Tipi	Konum (rad)		Tork (N.m)	Kayma Yüzeyi (S_m)	
			Mp	ts	Mp	max.	
Bilek	Flek.- Ekst.	HKKK- PSO	non	0.3724	-0.3699	S_{m1}	1.1295
		HKKK-DG	non	0.3746	-0.3460		1.0402
		HPID-PSO	0.0298	0.7226	-0.1629		
		HPID-DG	0.0298	0.7226	-0.1629		
	Rad- Uln.	HKKK- PSO	non	0.3892	30.0000	S_{m17}	-33.9150
		HKKK-DG	non	0.3892	30.0000		-33.9440
		HPID-PSO	0.0437	1.6537	-2.1850		
		HPID-DG	0.0437	1.6537	-2.1849		
İşaret	MCP	HKKK- PSO	0.1800	0.5256	0.7344	S_{m2}	9.2457
		HKKK-DG	0.1800	0.5286	0.7322		9.3751
		HPID-PSO	0.1800	0.8318	-0.0606		
		HPID-DG	0.1800	0.8307	-0.0603		
	PIP	HKKK- PSO	0.5119	0.6759	0.2851	S_{m3}	10.2222
		HKKK-DG	0.5119	0.6753	0.2844		10.2418
		HPID-PSO	0.5119	1.1674	-0.0028		
		HPID-DG	0.5119	1.1721	-0.0028		
	DIP	HKKK- PSO	0.0638	0.3694	0.4781	S_{m4}	1.4424
		HKKK-DG	0.0638	0.3689	0.4760		1.4669
		HPID-PSO	0.0638	0.4711	0.0316		
		HPID-DG	0.0638	0.4630	0.0316		
Orta	MCP	HKKK- PSO	0.1800	0.3900	0.5893	S_{m5}	54.2065
		HKKK-DG	0.1800	0.3900	0.5871		54.2520
		HPID-PSO	0.1800	0.8312	-0.0614		
		HPID-DG	0.1800	0.8326	-0.0614		
	PIP	HKKK- PSO	0.5119	0.4714	0.3661	S_{m6}	25.5802
		HKKK-DG	0.5119	0.4709	0.3652		25.5802
		HPID-PSO	0.5119	1.1722	-0.0037		
		HPID-DG	0.5119	1.1720	-0.0037		
Yüzük	MCP	HKKK- PSO	0.0638	0.9678	-2.4425	S_{m7}	0.3195
		HKKK-DG	0.0638	1.0003	-2.4153		0.3102
		HPID-PSO	0.0638	0.3685	2.1407		
		HPID-DG	0.0638	0.3686	2.1468		
		HKKK- PSO	0.1800	1.3706	5.6086	S_{m8}	0.7088
		HKKK-DG	0.1800	1.9527	5.6120		0.5532
		HPID-PSO	0.1800	0.8332	0.0890		
		HPID-DG	0.1800	0.8331	0.0996		

Tablo 18'in devamı

	PIP	HKKK- PSO	0.0443	0.5838	2.4479	S _{m9}	22.8665
		HKKK-DG	0.0429	0.5837	2.4487		22.1481
		HPID-PSO	0.0391	39.5001	-11.9104		
		HPID-DG	0.0391	39.5026	-11.9103		
	DIP	HKKK- PSO	0.2203	0.4961	0.2202	S _{m10}	68.8780
		HKKK-DG	0.2192	0.4962	0.2197		68.4787
		HPID-PSO	non	0.6250	0.3521		
		HPID-DG	non	0.4878	0.3521		
Küçük	MCP	HKKK- PSO	0.1800	0.3903	1.1668	S _{m11}	54.2067
		HKKK-DG	0.1800	0.3903	1.1668		54.2067
		HPID-PSO	0.1800	0.4086	-0.1892		
		HPID-DG	0.1800	0.4083	-0.1892		
	PIP	HKKK- PSO	0.7484	3.2025	6.0719	S _{m12}	1.4170
		HKKK-DG	0.7484	3.9065	6.0645		1.1788
		HPID-PSO	0.7484	0.6169	-0.0543		
		HPID-DG	0.7484	0.6172	-0.0545		
	DIP	HKKK- PSO	0.5538	0.3980	0.2879	S _{m13}	221.4550
		HKKK-DG	0.5538	0.3979	0.2874		221.6494
		HPID-PSO	0.5538	0.5934	-0.0436		
		HPID-DG	0.5538	0.5928	-0.0436		
Baş	TMC	HKKK- PSO	non	0.2704	-0.1402	S _{m14}	5.6800
		HKKK-DG	non	0.2704	-0.1343		5.5800
		HPID-PSO	non	0.2704	-0.0010		
		HPID-DG	non	0.2704	-0.0010		
	MCP	HKKK- PSO	0.1024	0.3874	-0.0623	S _{m15}	61.6240
		HKKK-DG	0.1024	0.3874	-0.0623		61.6340
		HPID-PSO	0.1024	37.4505	-5.0779		
		HPID-DG	0.1024	37.4475	-5.0780		
	IP	HKKK- PSO	non	0.3889	0.0326	S _{m16}	3.3550
		HKKK-DG	non	0.3889	0.0328		3.3040
		HPID-PSO	non	0.3933	0.0282		
		HPID-DG	non	0.3933	0.0282		
	Ab-Ad.	HKKK- PSO	non	0.3739	-0.0199	S _{m18}	-0.5300
		HKKK-DG	non	0.3739	-0.0199		-0.5300
		HPID-PSO	0.0213	0.6560	-0.0030		
		HPID-DG	0.0215	0.6680	-0.0030		

3.2. DeneySEL Çalışmalar

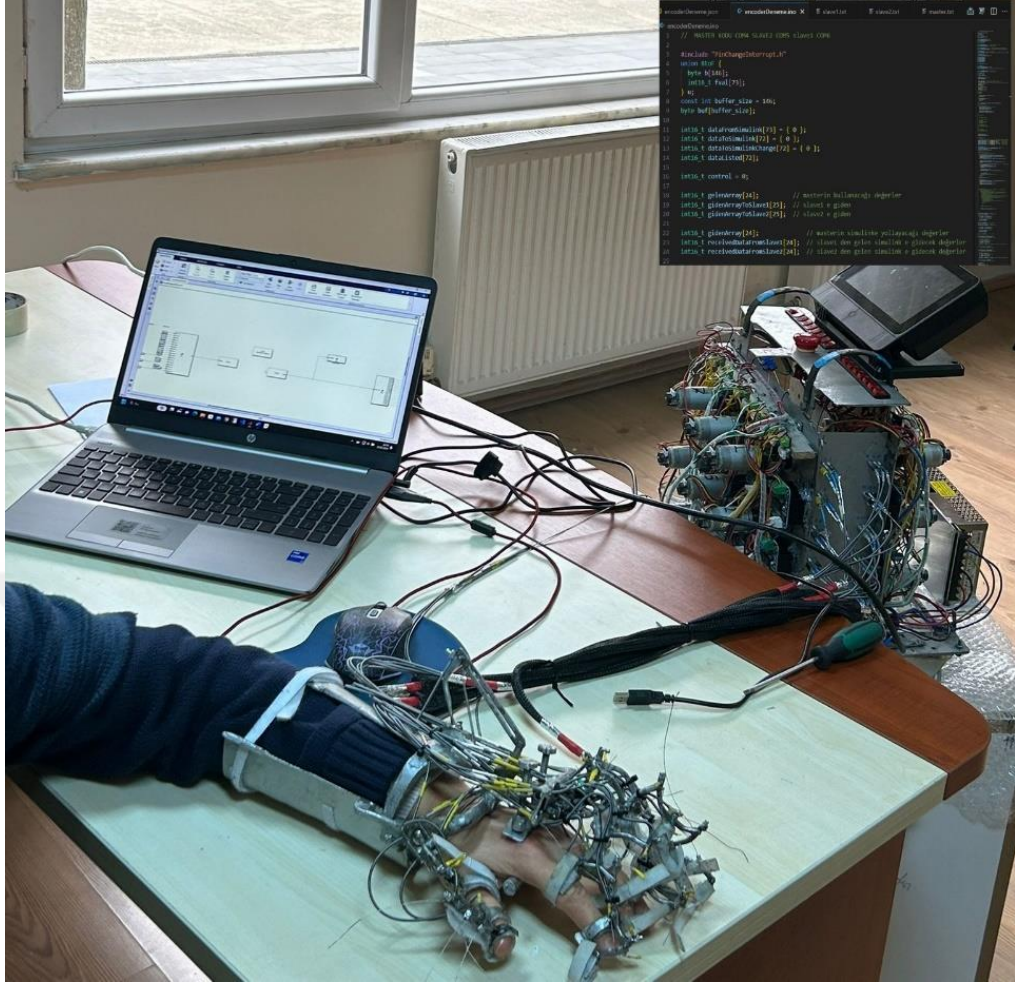
Bu çalışmadaki deneyler pasif, izometrik ve aktif egzersizleri içermektedir. Deneylerde ROM egzersiz hareketleri için denek önkolü başlangıçta Şekil 69'de görüldüğü gibi gövde kısmına tutturulur ve kol kavratılır. Önkol cırtlı kayışlarla muhafaza kısmına sabitlenir. Sol/sağ el seçimi, egzersiz türü, hareket türü, tekrar sayısı, istenilen açı ve egzersiz zorluk seviyesi gibi giriş değerleri yazılım aracılığıyla belirtilir.

Pasif ROM egzersizleri el-el bileğini belli dereceye kadar hareket ettiren veya hiç ettiremeyen hastalara eklem hareket açıklığını belli dereceye kadar hareket ettirebilmesi için uygulanırlar. Bu egzersiz süresince hasta pasif konumdadır. Fakat kaslar ve kemikler robotun çalışmasına karşı direnç gösterdiğinden kontrol ederken bu koşullara dikkat edilmelidir.

İzometrik ROM egzersizleri kuvvete karşı direnç gösterilen statik egzersizlerdir. Bu nedenle egzersiz esnasında hastanın, robotun oluşturmuş olduğu kuvvete karşı direnç göstermesi gerekmektedir. Bu testlerde ise sürekli direnç gösterme yerine ara ara direnç göstererek hem el sistemini sağlık açısından korumak hem de kaslara ve kemik yapısına zarar vermemek amaçlanmıştır. Bu yaklaşım doğrultusunda el- el bileğinin izometrik egzersiz grafikleri alınmıştır.

Aktif ROM egzersizi ise hastanın belli bir kuvvet uygulaması ile oluşturulan egzersiz çeşididir. Hasta kuvvet uygulayarak referans konuma aynı tekrar sayısında ulaşmaya çalışır. Bu durumda düşük gerilim değerlerinde hastanın dış iskelet robotunu kullanarak, motorun torkunu yenerek hareketi tamamlaması beklenir. Egzersizlerde ilgili tekrar sayısı ve açısı girilmelidir.

Deneyisel çalışma 35 yaşında sağlıklı erkek bireyin sol el-el bileği ile gerçekleştirilmiştir. Eş zamanlı olarak bilgisayara aktarılan deneyisel veriler MATLAB ortamında analiz edilmiştir. El- el bileğinin açı kontrolü, tork kontrolü, yörünge kontrolü ve tekrarlamalı kontrol deneyleri yapılmıştır. Bu deneyisel çalışma ve kontrol düzeneği Şekil 69'de gösterilmiştir. Motor sürücüleri 24VDC ve 40A güç kaynağından oluşmaktadır. Motorlar enkoderli ve kendinden redüktörlüdür (56/1). Rehabilitasyon robotu içinde kullanılan DF robot model DC elektrik motorunun sistem kontrol düzeneği Algoritma 2 'de verilmiştir.



Şekil 69. Prototip üretimi gerçekleştirilen dinamik kontrollü rehabilitasyon robotu

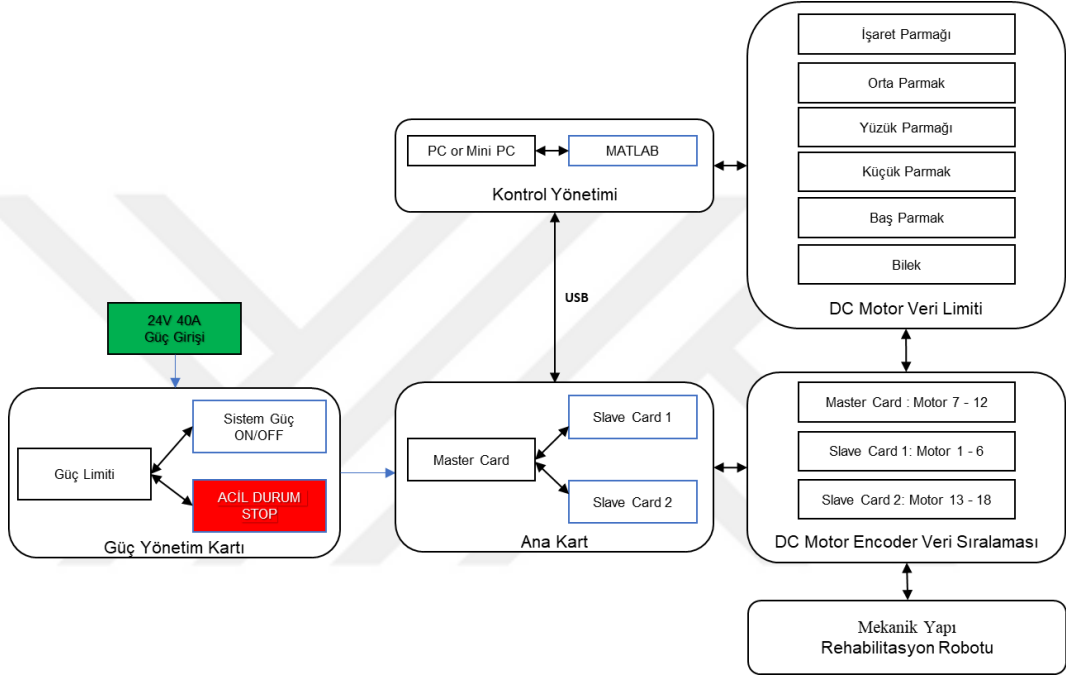
Algoritma 2. DC motor ve deney düzeneğinin ayrıntılı işlem basamakları

- Adım 1.** Sisteme 220V enerji girişi sağlanır. 0-24 V ayarlanır
- Adım 2.** Güç kaynağı açılır.
- Adım 3.** Redüktör çevrim oranı belirlenir.
- Adım 4.** Her motorun üstündeki enkoder ile açı bilgisi alınır. Başlangıç referans konum değerleri sıfırlanır. Referans açı değeri girilir.
- Adım 5.** Motorları sürmek için 18 adet PWM girişli, IBT-2 H köprülü sürücü kullanılmaktadır. Bu H-köprüleri devreye girer.
- Adım 6.** Güç girişi sağlanmış olan motorların kontrol kartı üzerinden PWM sinyalleri üretilir. Bu sinyaller açı ve hız değerlerine dönüştürülür.
- Adım 7.** Motor kontrolü için arayüzden egzersiz için uygun açı, frekans, tekrar sayısı ve süresi değişkenleri girilir.

Adım 8. Motorlar çalışır. Bu esnada tüm fiziksel veriler Matlab ortamına kaydedilir.

Adım 9. 7. Adımdaki referans değerlerine ulaşınca sistem çalışmayı durdurur.

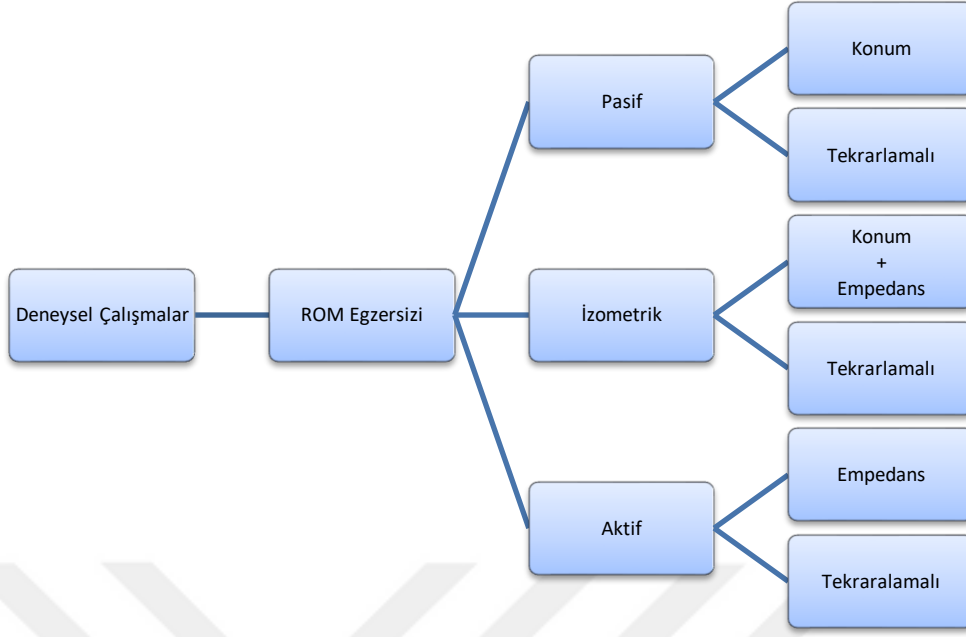
Yapılan çalışmada kullanılan DC motorun kontrolü için Visual Studio Code ve MATLAB eş zamanlı çalışmaktadır. Bu çalışma planı Şekil 70’de verilmiştir.



Şekil 70. DC motorların çalışmasına ait akış diyagramı

Deney verileri MATLAB ortamında el-el bileği üzerinde çalışan dış iskelet sistemi ile uyumlu DC motorların enkoder verileri üzerinden alınmıştır.

Tablo 11’deki genel rehabilitasyon prensipleri çerçevesinde Tablo 19’da belirtilen sınırlarda ROM egzersiz akış diyagramı verilmiştir. Pasif, izometrik ve aktif ROM egzersiz diyagramı Şekil 71’de verilmiştir.



Şekil 71. ROM egzersiz diyagramı

Pasif egzersiz işleminde tez kapsamında kullanılan DC motorlar eli istenen yörüngeye götürmektedir. İzometrik egzersizde kuvvete karşı direnç gösterilmektedir. Aktif egzersizde ise hasta motorun kuvvetini yenerek uzvunu istenen açıya götürmektedir. Bu işlemler sonucunda eli hareket ettiren motordaki açı ve tork verileri alınmıştır. İşlemler tel ve disk mekanik sistemleriyle ilerlediğinden kullanılan yöntemde kurs boyu önem arz etmektedir. Bu sebeple motor üzerinde çapı 40 mm olan diskler kullanılmıştır.

Deneyisel egzersiz uygulamalarında belirli sınırlamalar yapılmıştır. Bu sınırlamalar uygulamalar sonucunda oluşan tecrübeler doğrultusunda güvenlik amaçlı alınmıştır. El-el bileğinin açısının güvenlik açısından hareket açıklığının yaklaşık %50-60'ı kadar olması tercih edilmiştir. Pasif ve izometrik egzersiz uygulamalarında MCP falanksının bu düzenekteki motor için tork denklemindeki motor frekansının 30 Hz'den küçük seçilmemesi gerekmektedir. Sistemde en fazla güç gerektiren eklemlerden biri olmasından dolayı, orta parmak MCP eklemi pasif ve izometrik egzersizleri için de 35Hz 'den küçük olmamalıdır. DIP ve PIP falanks aktif egzersizinde robot yörüngesi referans alınırken hareket aralığı ve tekrarı düşürülmüştür. Bu durum aktif egzersize özgü alınmış özel bir durumdur. Bunun sebebi aktif egzersizde DIP ve PIP falanks referans yörüngesine gitmekte zorlanılmakta ve güvenlik riski oluşturmaktadır. Parmaklardaki konuma bağlı torklar sırasıyla küçükten büyüğe doğru DIP, PIP ve MCP şeklinde artmaktadır ki buda sistemin doğru çalıştığının somut kanıtlarındandır. TMC, MCP ve bilek tork değerleri doğal olarak yüksektir. Bu durum

elin doğal çalışma sistemi ile uyumlu olduğunu göstermektedir. El-el bileğinin bu sınırlar çerçevesinde belirlenen test egzersizleri için pasif, izometrik ve aktif egzersiz şartları Tablo 19’da verilmiştir. Tabloda ilk sütun falanksları, ikinci sütun her bir falanksın ulaşması gereken fleksiyon açısı değerini radyan olarak, üçüncü sütun ekstansiyon açısı değerini negatif açısı değeri olarak, dördüncü sütun motor frekansını Hertz olarak, beşinci sütun egzersiz tekrar sayısını ve son olarak altıncı sütun egzersiz süresini saniye olarak göstermektedir. Motor frekansına bağlı olarak motorun torku,

$$\tau = \frac{V \times I}{\omega} \times 0.02388 \quad (75)$$

$$\omega = 2\pi f$$

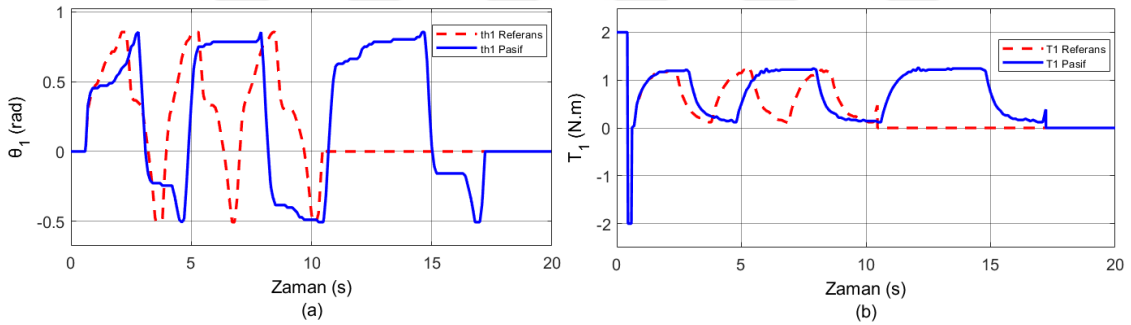
biçiminde tanımlanmıştır. V, Volt olarak gerilim, I, Amper cinsinden akımı göstermektedir.

Tablo 19. Deneysel ROM egzersiz şartları

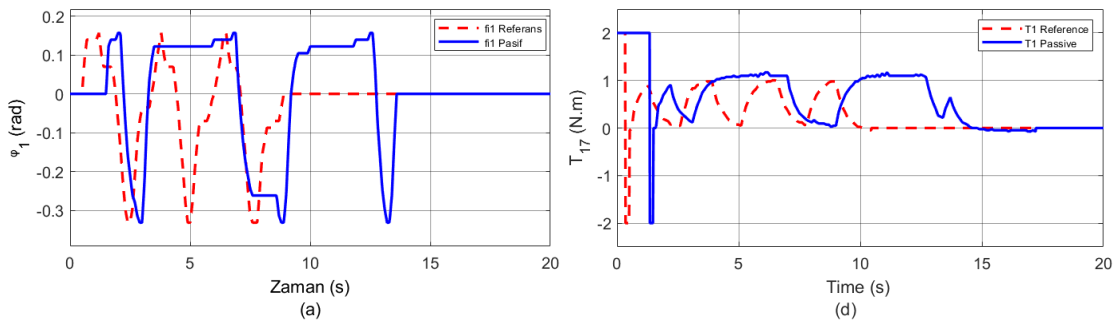
Falanks		Fleksiyon Açısı (rad)		Ekstansiyon Açısı (rad)		Frekans(Hz)		Tekrar sayısı		Zaman(s)	
		Pas-izo	Akt.	Pas-izo	Akt.	Pas-izo	Akt.	Pas-izo	Akt.	Pas-izo	Akt.
İşaret	MCP	0.87	0.87	0.26	0.26	32	22	3	3	20	20
	PIP	1.05	0.79	0	0	20	13	3	3	20	20
	DIP	0.79	0.52	0.05	0	20	12	5	3	20	20
Orta	MCP	0.87	0.87	0.26	0.26	35	25	3	3	20	20
	PIP	1.05	0.79	0	0	30	20	3	3	20	20
	DIP	0.79	0.52	0.05	0	20	12	5	3	20	20
Yüzük	MCP	0.87	0.87	0.26	0.26	32	22	3	3	20	20
	PIP	1.05	0.79	0	0	30	20	3	3	20	20
	DIP	0.79	0.52	0.05	0	20	12	5	3	20	20
Küçük	MCP	0.87	0.87	0.26	0.26	32	22	3	3	20	20
	PIP	1.05	0.79	0	0	30	20	3	3	20	20
	DIP	0.79	0.52	0.05	0	20	12	5	3	20	20
Baş	TMC	0.52	0.52	0.14	0.14	30	22	3	3	20	20
	MCP	0.79	0.79	0	0	30	20	3	3	20	20
	IP	0.79	0.52	0.05	0	20	15	5	3	20	20
	Ab/Ad	0.44	0.44	0.44	0.44	25	20	3	3	20	20
Bilek	Fl-Ek	0.87	0.87	0.52	0.52	50	20	3	3	20	20
	Ra-UI	0.17	0.17	0.34	0.34	25	15	3	3	20	20

3.2.1. Pasif ROM Egzersizi

Bu bölümde el-el bileğinin fleksiyon-ekstansiyon, radyal-ulnar ve abdüksiyon-addüksiyon hareketlerinin pasif egzersiz sonuçları verilmiştir. Bu egzersiz kısmında hasta rehabilitasyon hareketi için katkıda bulunmamaktadır. Yapılan egzersiz şartları el-el bileğinin pasif egzersizi kısmında Tablo 19'da verilmiştir. El bileğinin pasif egzersiz fleksiyon-ekstansiyon grafikleri Şekil 72'de ve radyal-ulnar grafikleri ise Şekil 73'de verilmiştir. Grafiklerde pozitif yön fleksiyonu, negatif yön ise ekstansiyonu göstermektedir. İşaret parmağının sırasıyla pasif egzersiz MCP, PIP ve DIP grafikleri Şekil 74, Şekil 75 ve Şekil 76'de verilmiştir. Orta parmağın sırasıyla pasif egzersiz MCP, PIP ve DIP grafikleri Şekil 77, Şekil 78 ve Şekil 79'de verilmiştir. Yüzük parmağının sırasıyla pasif egzersiz MCP, PIP ve DIP grafikleri Şekil 80, Şekil 81 ve Şekil 82'de verilmiştir. Küçük parmağın sırasıyla pasif egzersiz MCP, PIP ve DIP grafikleri Şekil 83, Şekil 84 ve Şekil 85'de verilmiştir. Baş parmağın sırasıyla pasif egzersiz, TMC, MCP, IP ve abdüksiyon-addüksiyon grafikleri Şekil 86, Şekil 87, Şekil 88 ve Şekil 89'de verilmiştir.

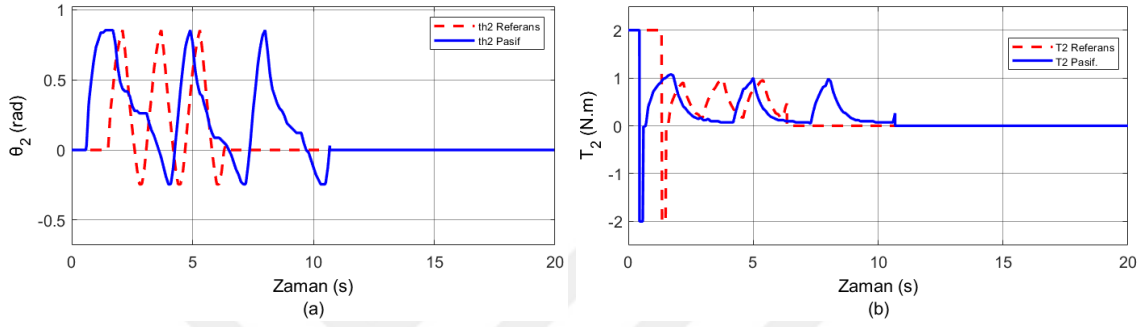


Şekil 72. El bileği fleksiyon-ekstansiyon pasif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork

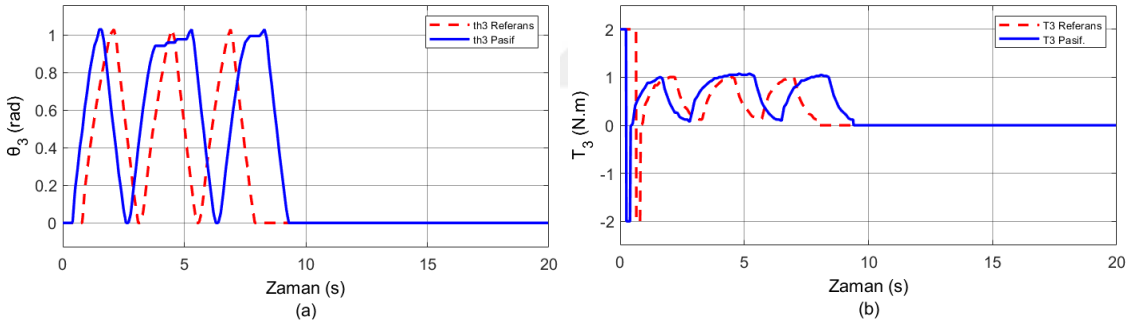


Şekil 73. El bileği radyal-ulnar pasif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork

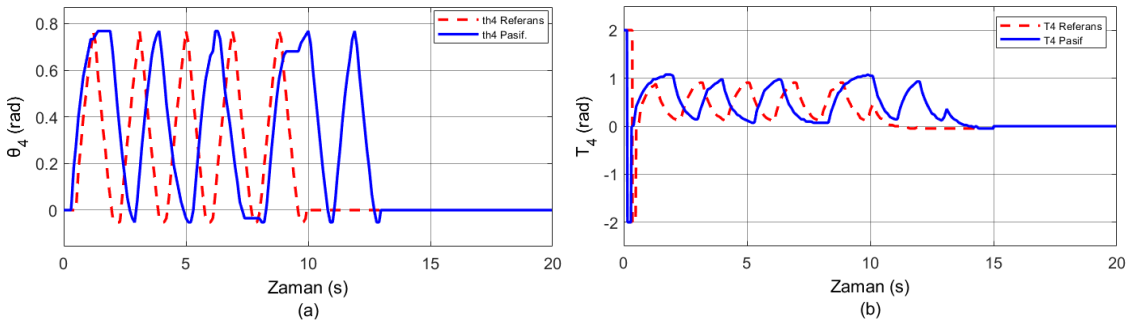
El bileğinin fleksiyon-ekstansiyon için motorun yörünge takibinde maksimum ve minimum noktalara ulaşmada güçlük yaşasa da belli zorlama süresi sonunda hedef değere ulaştığı görülmektedir. Harcanan tork değeri incelendiğinde de bu zorlanma konum grafiklerindeki sürelerle örtüşmektedir. Egzersiz tekrarının belirlenen sürede eksiksiz tamamlandığı görülmektedir. Bu durumun radyal-ulnar devinim için de aynı olduğu görülmektedir. Egzersiz tekrarı başarılmıştır.



Şekil 74. İşaret parmağı MCP pasif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork

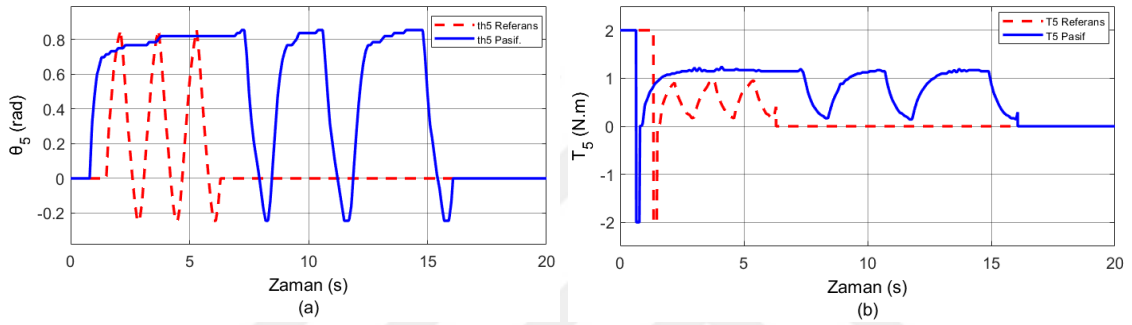


Şekil 75. İşaret parmağı PIP pasif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork

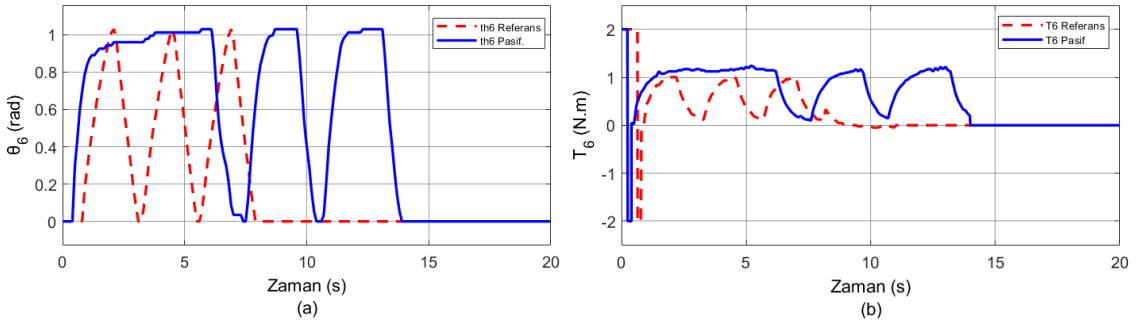


Şekil 76. İşaret parmağı DIP pasif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork

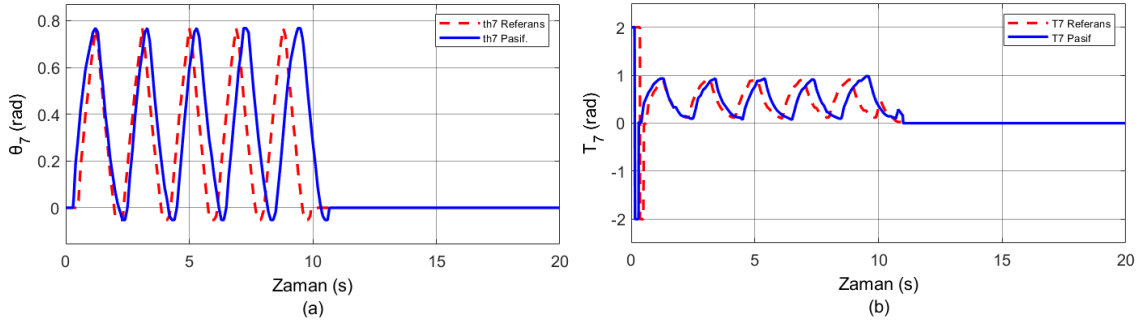
İşaret parmağının pasif egzersiz fleksiyon-ekstansiyon hareketinde MCP eklemının yörünge takibinde maksimum ve minimum noktalara rahat ulaştığı ve hareket sürelerinin referansa yakın olduğu görülmektedir. PIP eklemının ikinci ve üçüncü tekrarda fleksiyonda maksimum değere ulaşmada zorlanmalar yaşansa da yörünge takibi başarılı olmuştur. DIP eklemında referans yörünge takibi birinci ve dördüncü tekrarda fleksiyonun hedefe ulaşmasında zorlanmalar olsa da seçilen sürede beş tekrar gerçekleştirilmiştir. İlk tekrarda motorun hareketi başlatmakta zorlandığı gözlenmektedir. Harcanan tork değerleri incelendiğinde de konum grafikleri ile uyumlu olduğu görülmektedir.



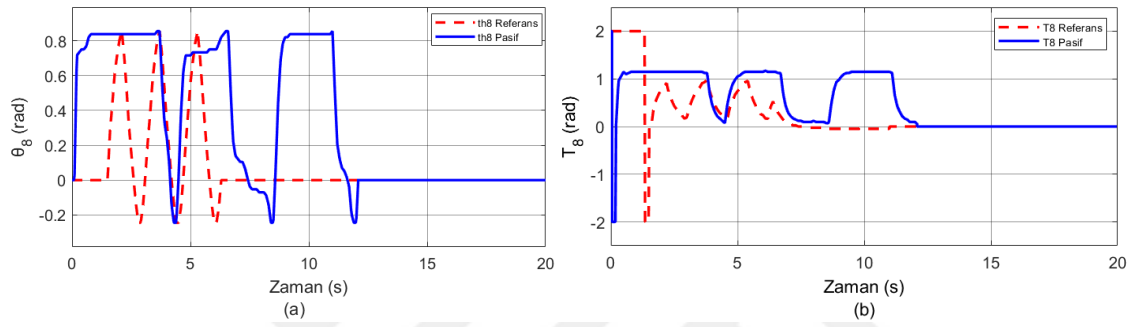
Şekil 77. Orta parmak MCP pasif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork



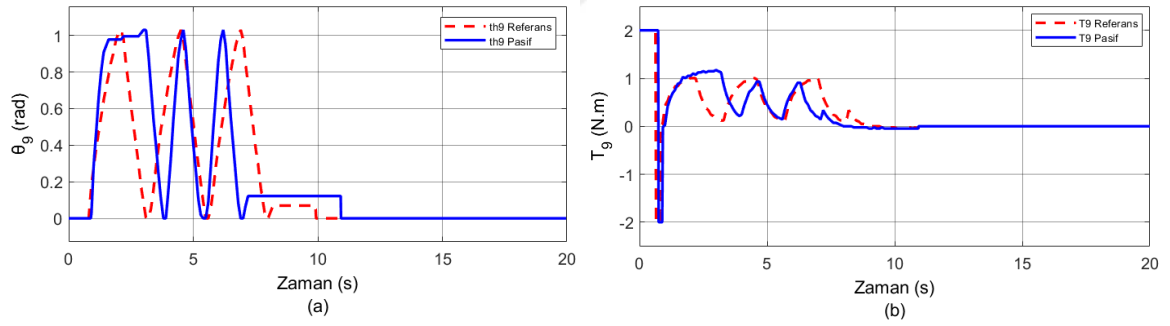
Şekil 78. Orta parmak PIP pasif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork



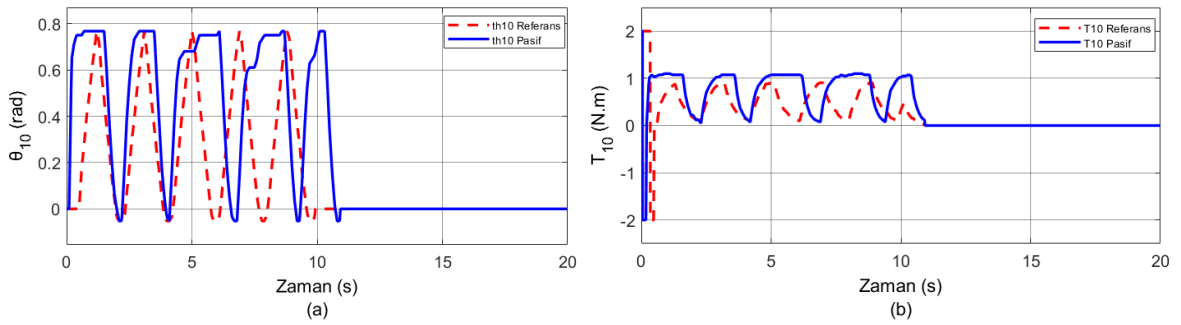
Şekil 79. Orta parmak DIP pasif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork



Şekil 80. Yüzük parmak MCP pasif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork



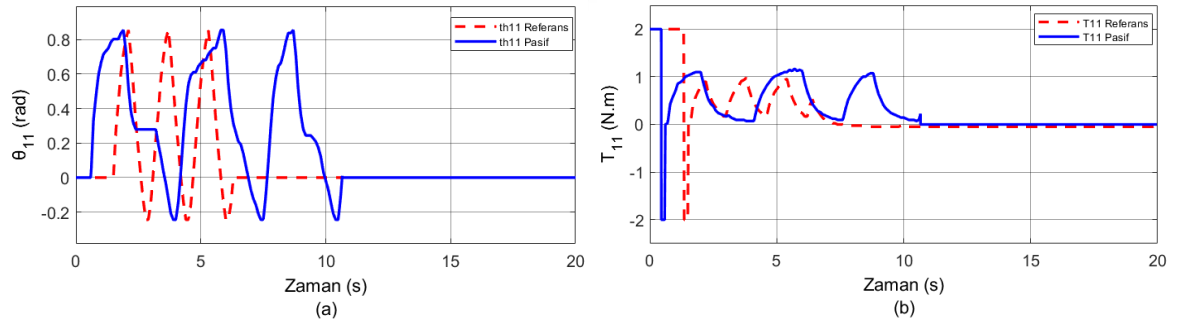
Şekil 81. Yüzük parmak PIP pasif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork



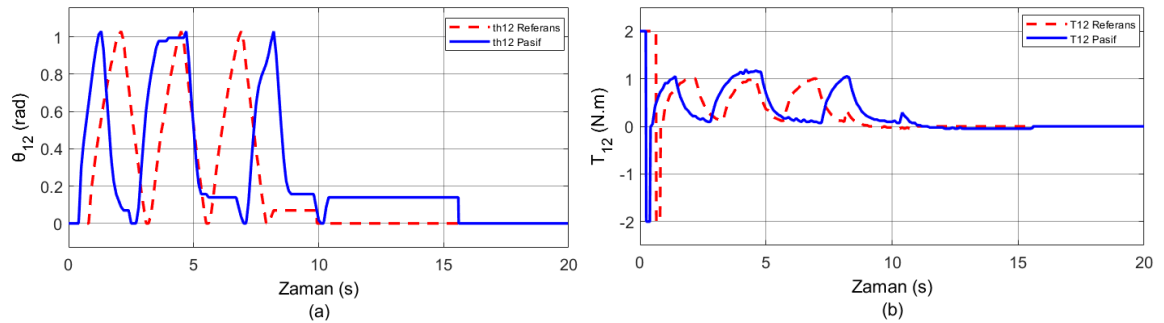
Şekil 82. Yüzük parmak DIP pasif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork

Orta parmak pasif egzersiz fleksiyon hareketinde MCP ve PIP eklemlerinin yörünge takibinde ilk tekrarda maksimum değere güçlükle ulaşmıştır. İkinci ve üçüncü tekrarda ise bu zorlanmalar azalmıştır. Bu durumun o eklemi süren motorun düzenekteki yeri, kablo sürtünmeleri ya da kullanıcının ani kasılması gibi dış etkenlere bağlı olabileceği düşünülmektedir. Her üç eklemden gerekli tekrar sayısına ulaşılmıştır. DIP ekleminde referans yörünge takibi başarılı olmuş ve seçilen sürede beş tekrar gerçekleştirilmiştir. Harcanan tork değerleri incelendiğinde de konum grafikleri ile uyumlu olduğu görülmektedir.

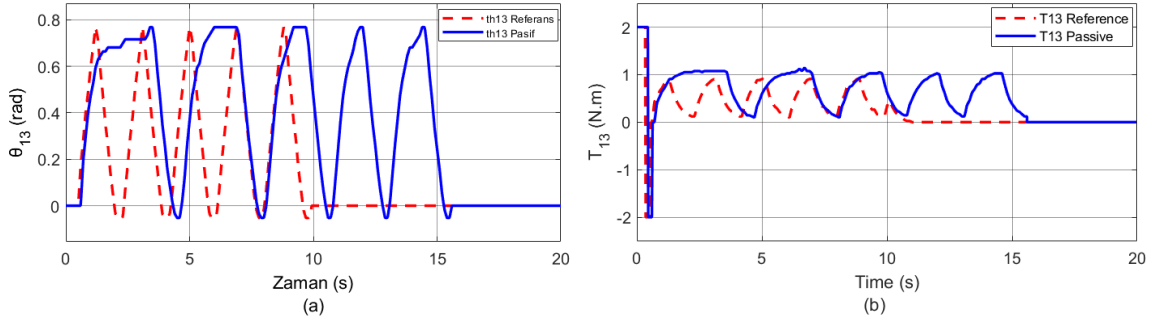
Yüzük parmağı pasif egzersiz fleksiyon hareketinde her üç eklemden de yörünge takibinde maksimum noktaya gitmede gecikmeler olduğu görülmektedir. Bu durumun o eklemi süren motorun düzenekteki yeri, kablo sürtünmeleri ya da kullanıcının ani kasılması gibi dış etkenlere bağlı olabileceği düşünülmektedir. Her üç eklemden gerekli tekrar sayısına ulaşılmıştır. Harcanan tork değerlerinin, konum grafikleri ile uyumlu olduğu görülmektedir.



Şekil 83. Küçük parmak MCP pasif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork

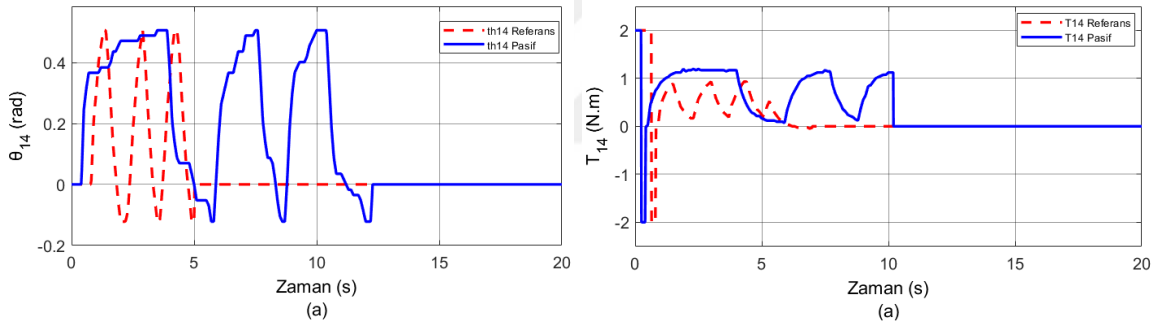


Şekil 84. Küçük parmak PIP pasif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork

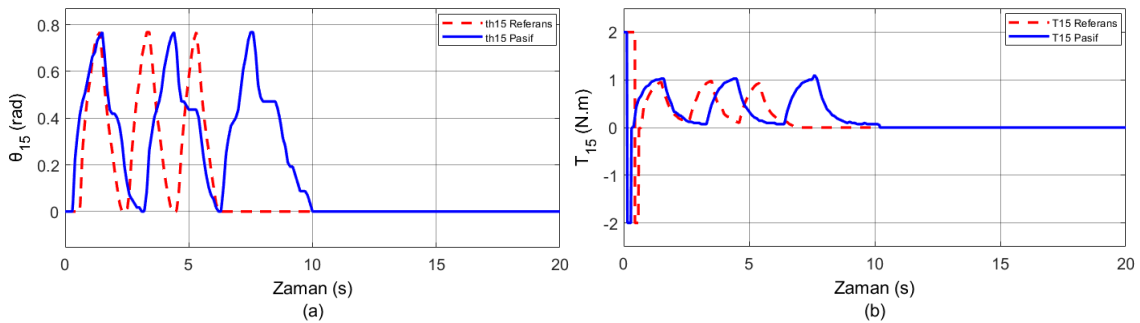


Şekil 85. Küçük parmak DIP pasif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork

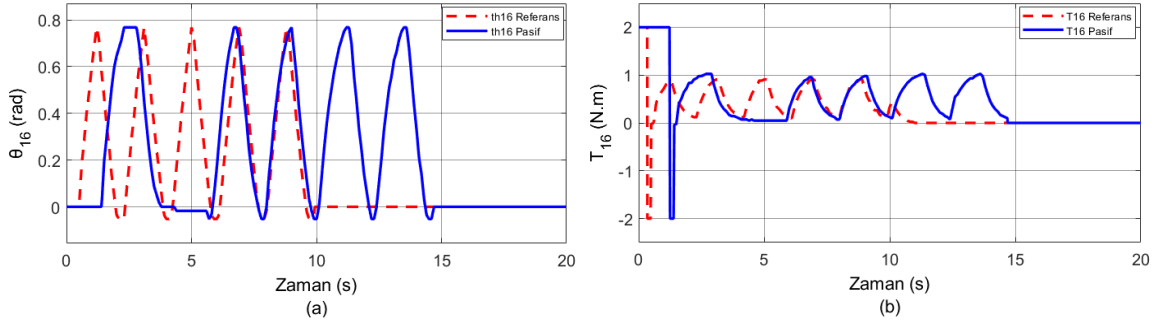
Küçük parmağın pasif egzersiz fleksiyon hareketinde MCP ve PIP eklemlerinde yörünge takibinde maksimum noktaya erişilmektedir. DIP ekleminde gecikmeler gözlenmektedir. Her üç ekleminde gerekli tekrar sayısına ulaşılmıştır. Harcanan tork değerlerinin, konum grafikleri ile uyumlu olduğu görülmektedir.



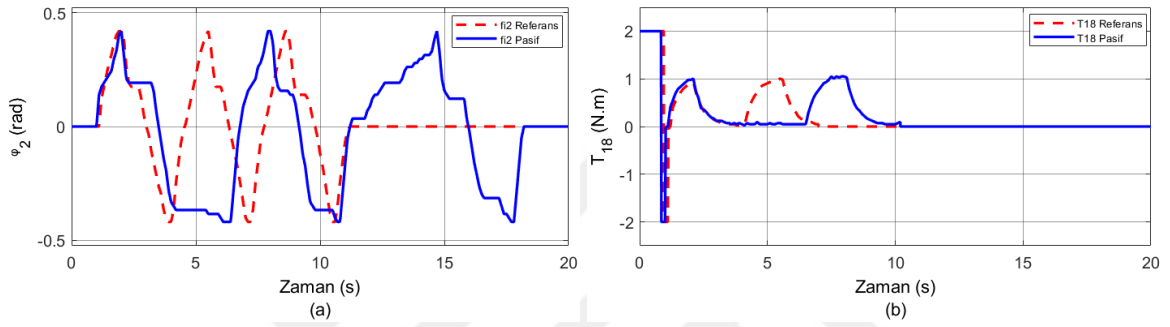
Şekil 86. Baş parmak TMC pasif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork



Şekil 87. Baş parmak MCP pasif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork



Şekil 88. Baş parmak IP pasif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork



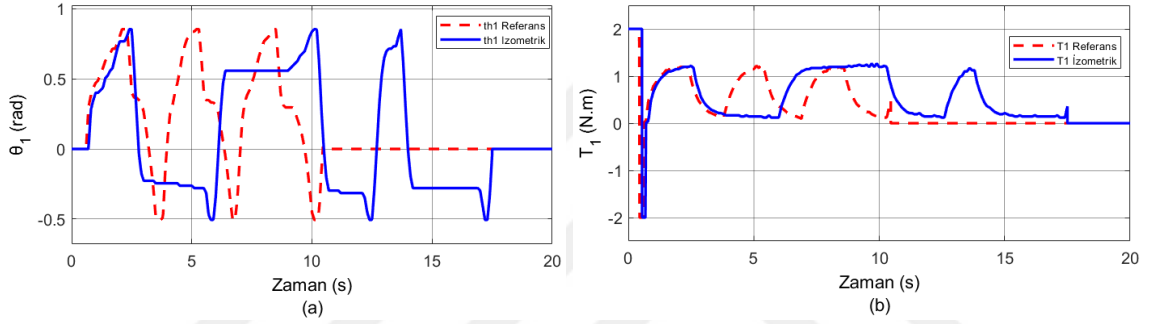
Şekil 89. Baş parmak abdüksiyon-addüksiyon pasif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork

Baş parmağın pasif egzersiz fleksiyon hareketinde TMC, MCP ve IP eklemlerinde yörünge takibinde maksimum ve minimum noktaya erişilmektedir. Baş parmağın pasif egzersiz abdüksiyon hareketinde hareket başarılı iken, addüksiyon hareketinde gecikmeler gözlenmektedir. Harcanan tork değerleri yine konum grafikleri ile uyumludur.

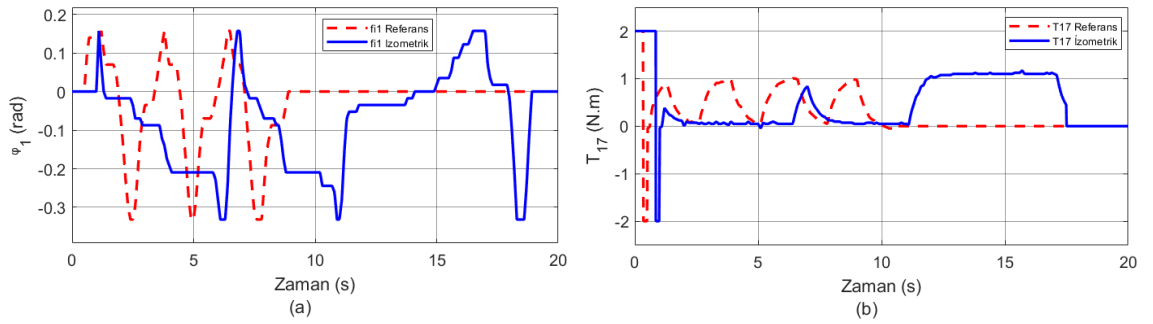
3.2.2. İzometrik ROM Egzersizi

Bu bölümde el-el bileğinin fleksiyon-ekstansiyon, radyal-ulnar ve abdüksiyon-addüksiyon hareketlerinin izometrik egzersiz deney sonuçları verilmiştir. Bu egzersizde kullanıcı rehabilitasyon süresince kuvvete karşı belli aralıklarla direnç göstermektedir. Bu direnç her uygulama esnasında belirlenen şartlara göre yapılmıştır. Yapılan deneysel çalışmada rehabilitasyon robotunun pasif egzersizdeki yörüngesi referans alınmıştır. Güvenlik açısından el-el bileğinin açısının hareket açıklığının yaklaşık %50-60'ı kadar olması tercih edilmiştir. El-el bileğinin izometrik egzersizi Tablo 19'daki belirlenen şartlar altında yapılmıştır.

El bileğinin izometrik egzersiz fleksiyon-ekstansiyon grafikleri Şekil 90'da ve radyal- ulnar grafiği ise Şekil 91'da verilmiştir. İşaret parmağının sırasıyla izometrik egzersiz MCP, PIP ve DIP grafikleri Şekil 92, Şekil 93 ve Şekil 94'da verilmiştir. Orta parmağın sırasıyla izometrik egzersiz MCP, PIP ve DIP grafiği Şekil 95, Şekil 96 ve Şekil 97'da verilmiştir. Yüzük parmağının sırasıyla izometrik egzersiz MCP, PIP ve DIP grafiği Şekil 98, Şekil 99 ve Şekil 100'de verilmiştir. Küçük parmağının sırasıyla izometrik egzersiz MCP, PIP ve DIP grafiği Şekil 101, Şekil 102 ve Şekil 103'de verilmiştir. Baş parmağın sırasıyla izometrik egzersiz, TMC, MCP, IP ve abdüksiyon- addüksiyon grafiği Şekil 104, Şekil 105, Şekil 106 ve Şekil 107'da verilmiştir.



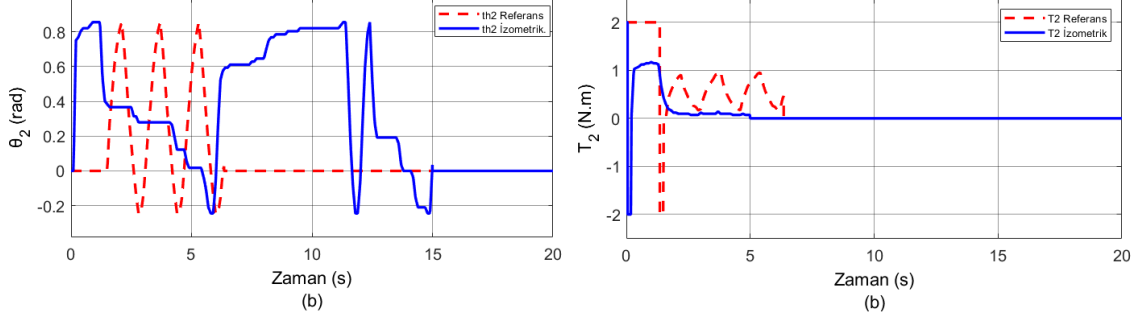
Şekil 90. El bileği fleksiyon-ekstansiyon izometrik egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork



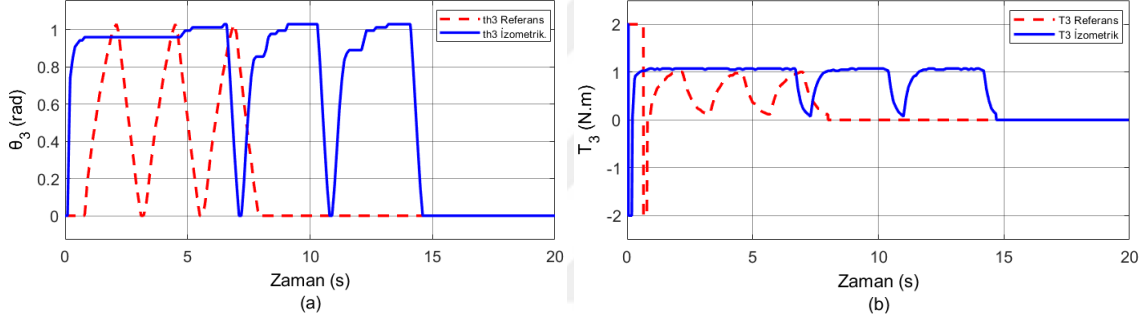
Şekil 91. El bileği radyal-ulnar izometrik egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork

El bileğinin izometrik egzersiz ekstansiyon hareketinde kuvvete karşı direnç belirgin, fleksiyon hareketinde birinci ve üçüncü tekrarda bu direnç daha az gözlenmekte fakat ikinci tekrarda belirgin gözlenmektedir. Bu dirence karşılık harcanan tork değerlerinin,

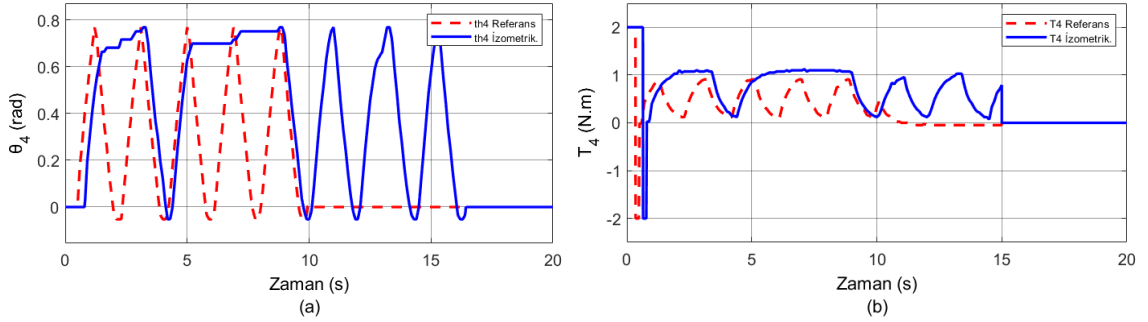
konum grafikleri ile uyumlu olduğu görülmektedir. Radyal egzersizde direnç gösterilmemiş fakat ulnar deviasyonda bu direnç belirgindir. Uygulanan tork ile uyumludur.



Şekil 92. İşaret parmağı MCP izometrik egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork

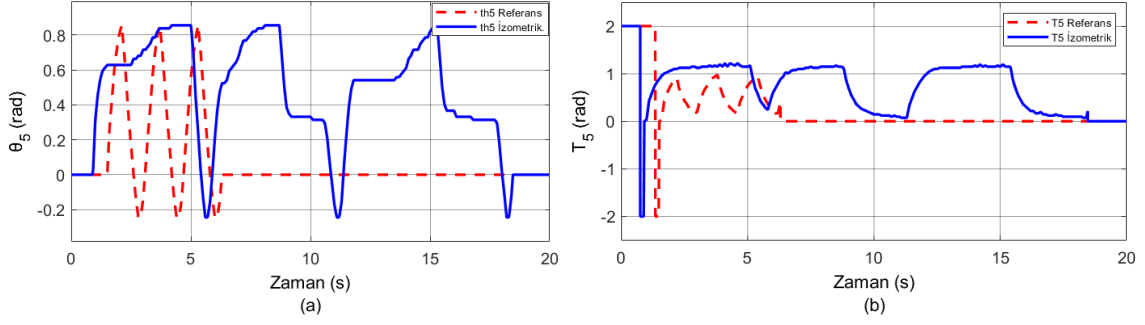


Şekil 93. İşaret parmağı PIP izometrik egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork

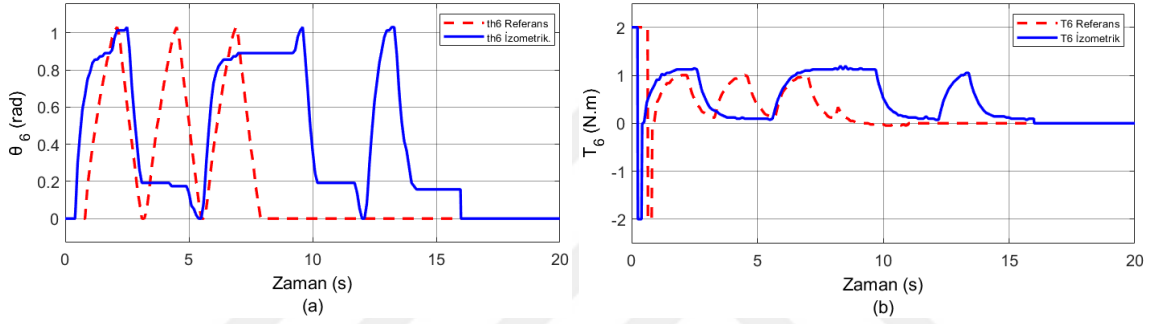


Şekil 94. İşaret parmağı DIP izometrik egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork

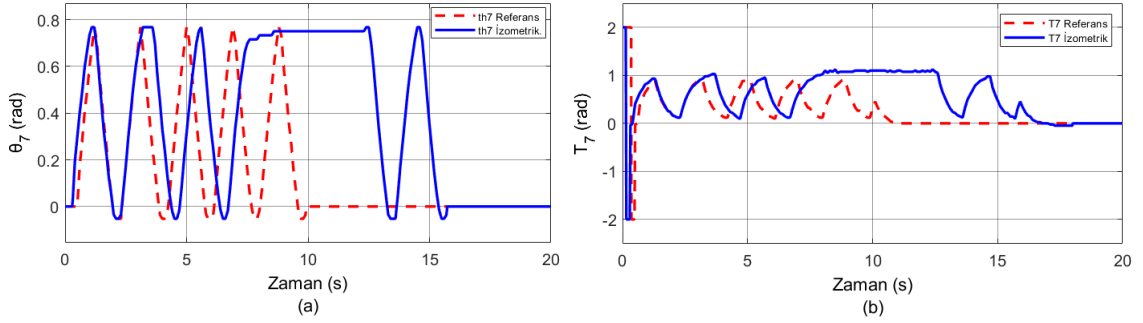
İşaret parmağının izometrik egzersiz MCP eklemindeki fleksiyon hareketinde ilk ve üçüncü tekrarın ilk ilerlemesinde kuvvete karşı direnç gösterememiş fakat ikinci tekrarda belirgin bir direnç gösterme görülmektedir. Ekstansiyon hareketinin geri dönüşünde bu direnç daha az gözlenmektedir. Bu dirence karşılık harcanan tork değerlerinin, konum grafikleri ile uyumlu olduğu görülmektedir.



Şekil 95. Orta parmak MCP izometrik egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork

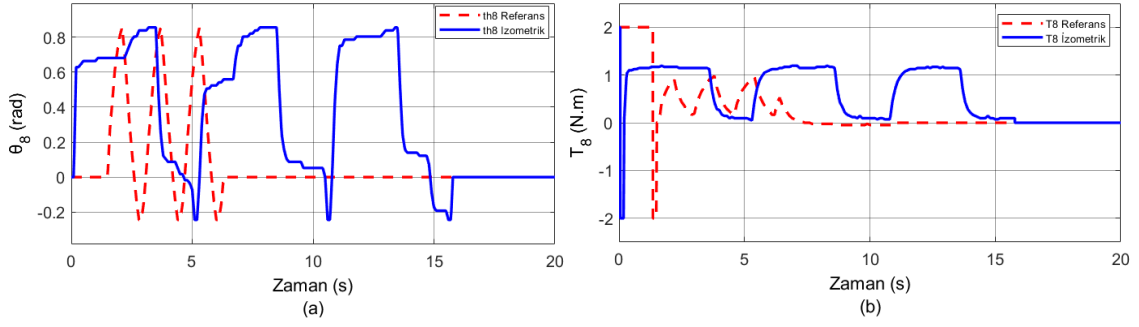


Şekil 96. Orta parmak PIP izometrik egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork

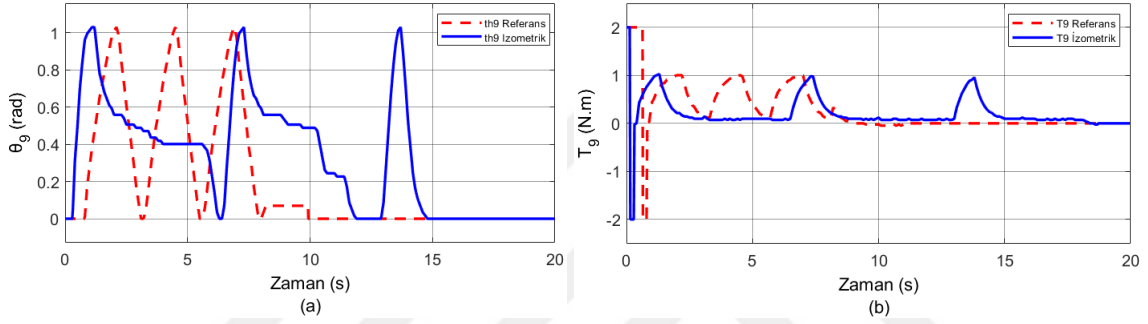


Şekil 97. Orta parmak DIP izometrik egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork

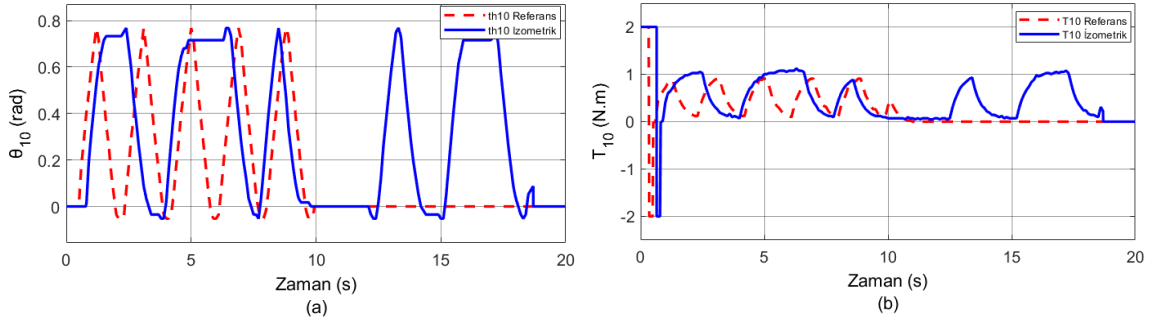
Orta parmağın izometrik egzersiz fleksiyon hareketinde MCP ve PIP eklemlerinde başarı sağlanmıştır. Sadece DIP ekleminde bu direnç çok belirgin değildir. Bu dirence karşılık harcanan tork değerlerinin, konum grafikleri ile uyumlu olduğu görülmektedir.



Şekil 98. Yüzük parmak MCP izometrik egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork

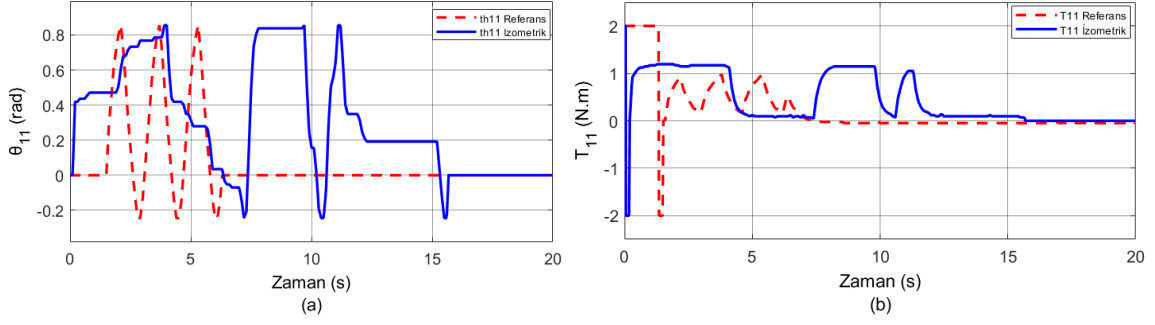


Şekil 99. Yüzük parmak PIP izometrik egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork

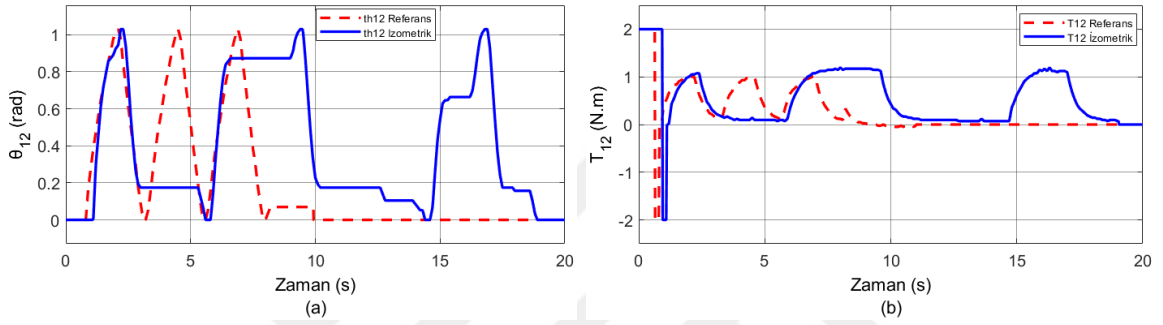


Şekil 100. Yüzük parmak DIP izometrik egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork

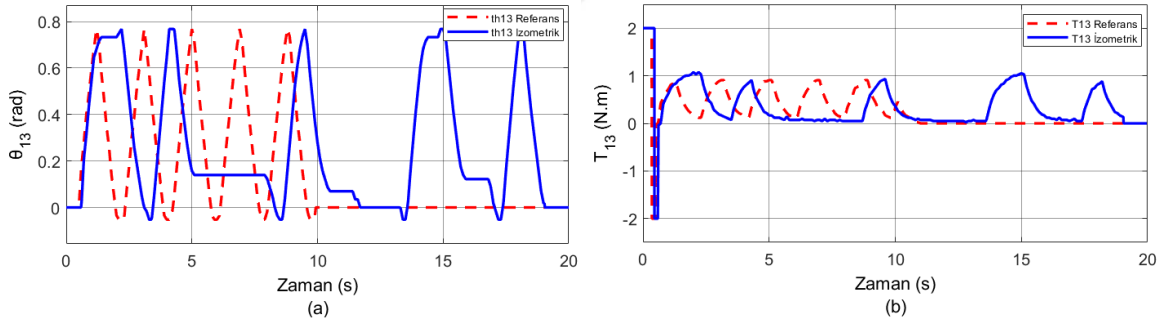
Yüzük parmağının izometrik egzersiz fleksiyon hareketinde MCP ve DIP eklemlerinde başarı sağlanırken, PIP ekleminin geri dönüşünde bu direnç belirgin gözlenmiştir. Bu dirence karşılık harcanan tork değerlerinin, konum grafikleri ile uyumlu olduğu görülmektedir.



Şekil 101. Küçük parmak MCP izometrik egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork

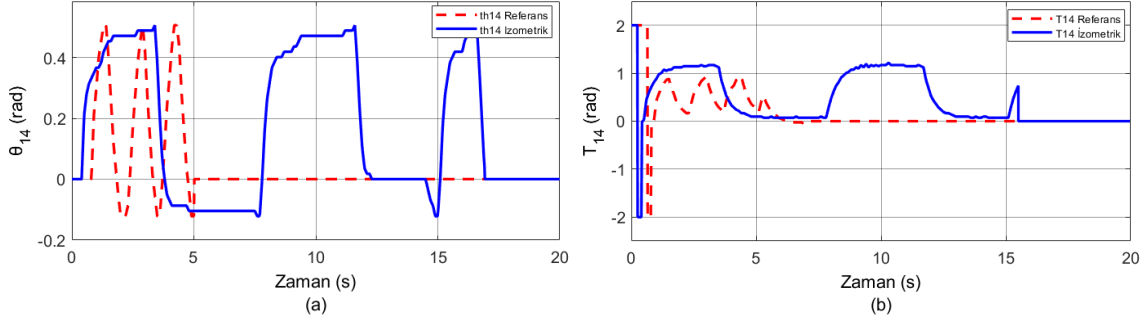


Şekil 102. Küçük parmak PIP izometrik egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork

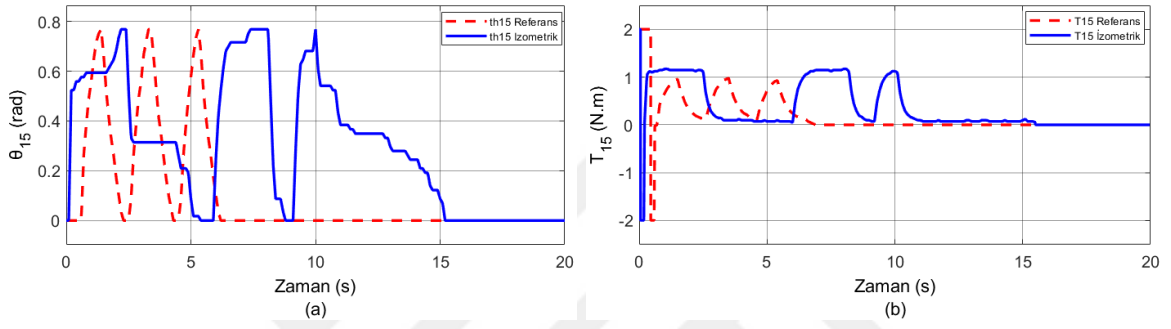


Şekil 103. Küçük parmak DIP izometrik egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork

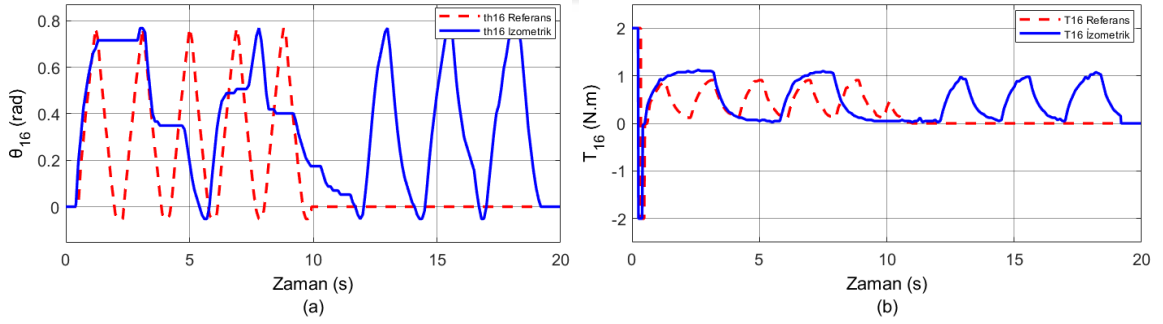
Küçük parmağın izometrik egzersiz fleksiyon hareketinde MCP ekleminde başlangıçta zorlanmalar gözlenmektedir. PIP ve DIP eklemlerinde başarılı olduğu gözlenmiştir. Bu dirence karşılık harcanan tork değerlerinin, konum grafikleri ile uyumlu olduğu görülmektedir.



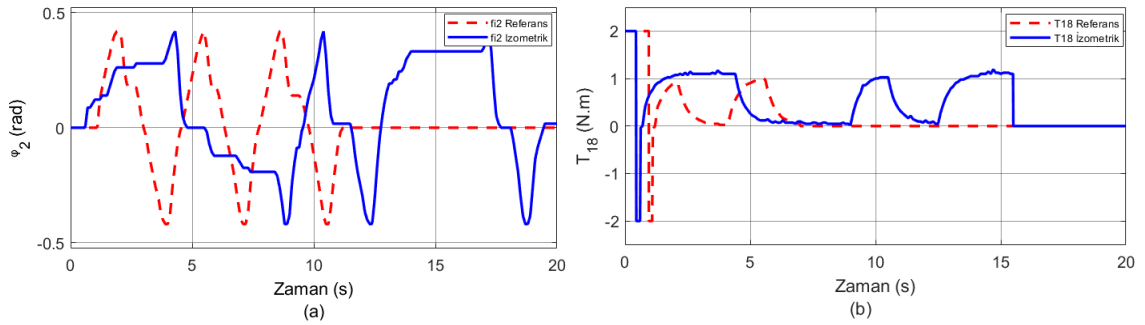
Şekil 104. Baş parmak TMC izometrik egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork



Şekil 105. Baş parmak MCP izometrik egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork



Şekil 106. Baş parmak IP izometrik egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork



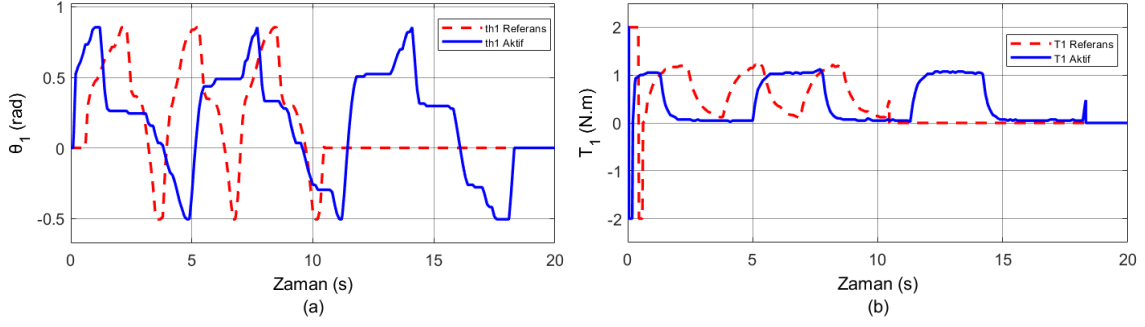
Şekil 107. Baş parmak abdüksiyon-addüksiyon izometrik egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork

Baş parmağın izometrik egzersiz fleksiyon hareketinde TMC ekleminde başarı sağlanırken, MCP ekleminde fleksiyonun ileri yönlü gidişinde direnç gözlenmezken, geri dönüşte gözlenmiştir. IP eklemlerinde ilk iki tekrarlar başarı sağlanırken, son tekrarlar bu direnç belirgin gözlenmemiştir. Bu dirence karşılık harcanan tork değerlerinin, konum grafikleri ile uyumlu olduğu görülmektedir. Baş parmak abduksiyon ve addüksiyon hareketlerinde kuvvete karşı direnç gösterildiği görülmektedir.

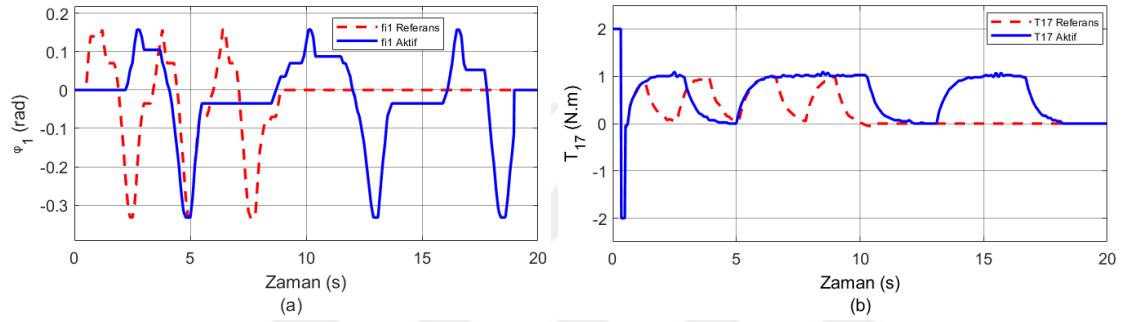
3.2.3. Aktif ROM Egzersizi

Bu bölümde el-el bileğinin fleksiyon-ekstansiyon, radyal-ulnar ve abduksiyon-addüksiyon hareketlerinin aktif egzersiz deney sonuçları verilmiştir. Bu egzersiz kısmında kullanıcının rehabilitasyon hareketi için kuvvet uygulayarak robotun mekanizmasını hareket ettirmesidir. Kişi egzersizi tamamlayabilecek yeterli kuvveti uygulayamazsa, bu durumda robot kişiye destek vererek hareket tamamlanır. Cihaz kendi dinamik yükünü karşılayacak kadar güç üretir. Bu direnç her uygulama esnasında belirlenen şartlara göre yapılmıştır. Yapılan deneysel çalışmada rehabilitasyon robotunun pasif egzersizdeki yörüngesi referans alınmıştır. Güvenlik açısından el-el bileğinin açısının hareket açıklığının yaklaşık %50-60'ı kadar olması tercih edilmiştir. El-el bileğinin izometrik egzersizi Tablo 19'daki belirlenen şartlar altında yapılmıştır.

El bileğinin izometrik egzersiz fleksiyon-ekstansiyon grafiği Şekil 108'de ve radyal-ulnar grafiği ise Şekil 109'de verilmiştir. İşaret parmağının sırasıyla aktif egzersiz MCP, PIP ve DIP grafiği Şekil 110, Şekil 111 ve Şekil 112'de verilmiştir. Orta parmağın sırasıyla aktif egzersiz MCP, PIP ve DIP grafiği Şekil 113, Şekil 114 ve Şekil 115'de verilmiştir. Yüzük parmağının sırasıyla aktif egzersiz MCP, PIP ve DIP grafiği Şekil 116, Şekil 117 ve Şekil 118'de verilmiştir. Küçük parmağın sırasıyla aktif egzersiz MCP, PIP ve DIP grafiği Şekil 119, Şekil 120 ve Şekil 121'de verilmiştir. Baş parmağın sırasıyla aktif egzersiz, TMC, MCP, IP ve abduksiyon-addüksiyon grafiği Şekil 122, Şekil 123, Şekil 124 ve Şekil 125'de verilmiştir.

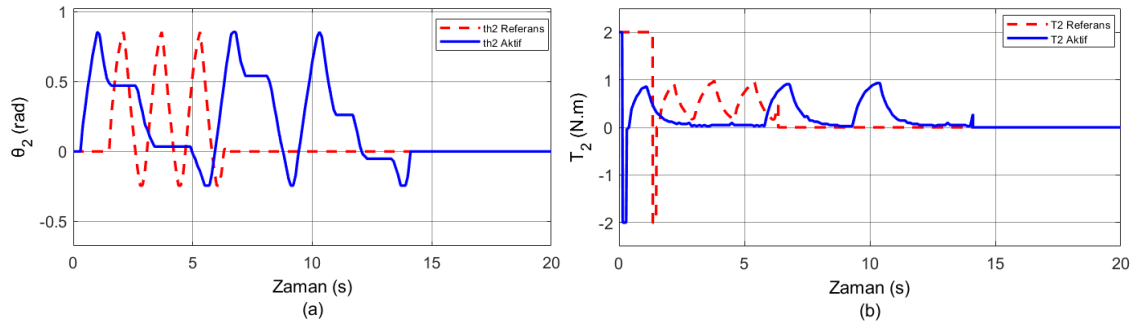


Şekil 108. El bileği fleksiyon-ekstansiyon aktif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork

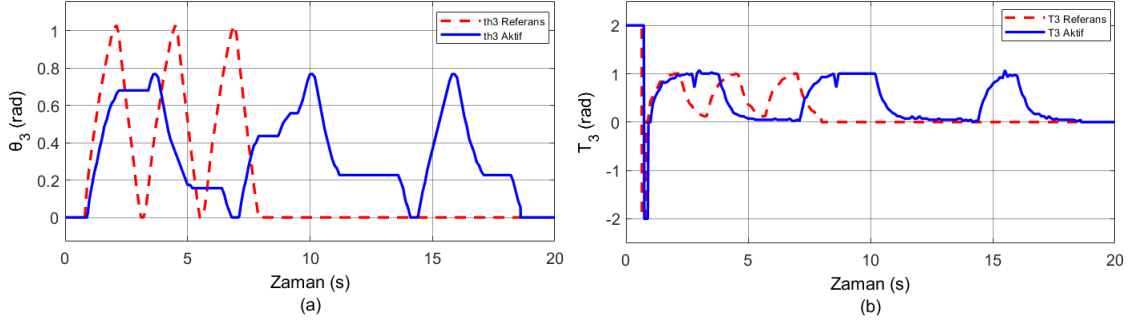


Şekil 109. El bileği radyal-ulnar aktif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork

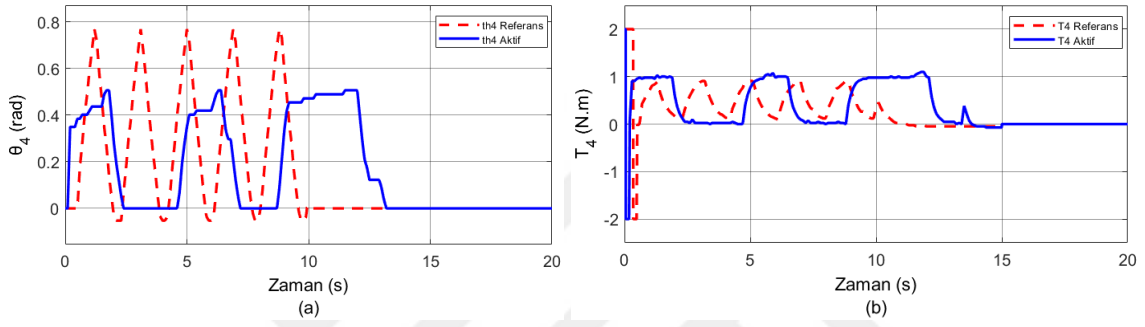
El bileğinin aktif egzersiz ekstansiyon hareketinde, duraklama bölümleri kullanıcının kuvvetinin yetersiz kaldığı bölümler olarak değerlendirilebilir. Bu süreçten sonra robot kişiye yörüngeyi tamamlaması için destek vermektedir. Bu dirence karşılık harcanan tork değerlerinin, konum grafikleri ile uyumlu olduğu görülmektedir. Radyal egzersizde direnç gösterilmemiş fakat ulnar deviasyonda bu direnç belirgindir. Uygulanan tork ile uyumludur.



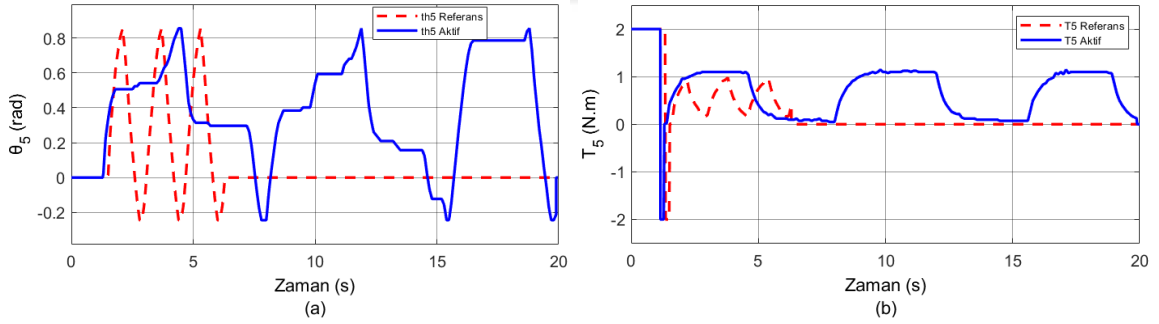
Şekil 110. İşaret parmağı MCP aktif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork



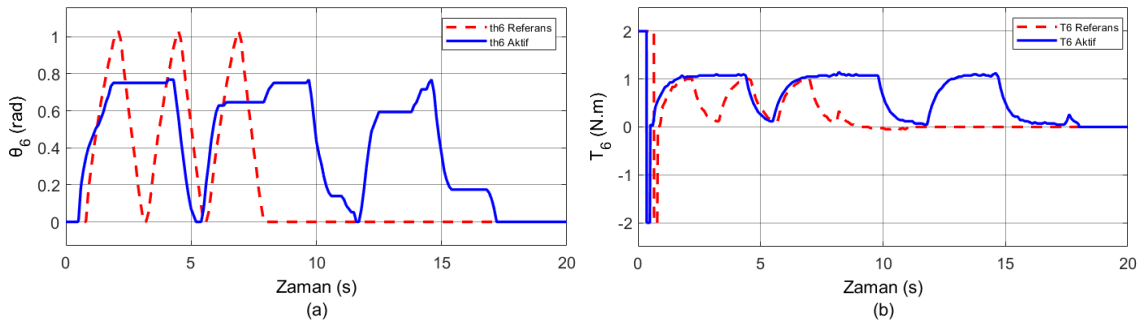
Şekil 111. İşaret parmağı PIP aktif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork



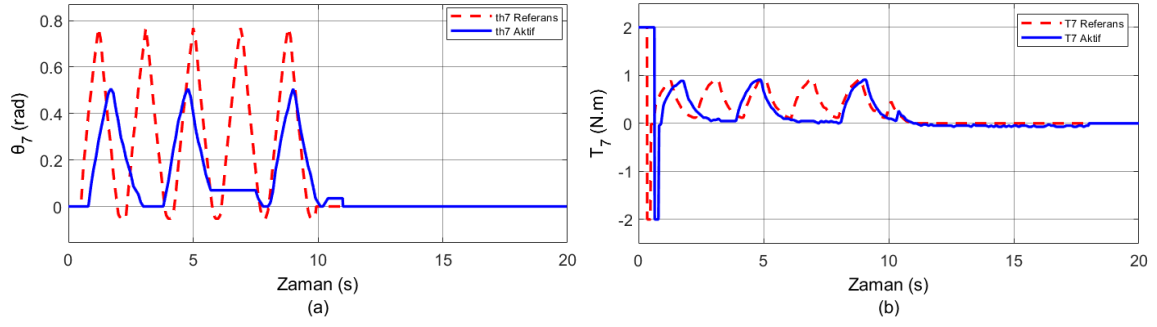
Şekil 112. İşaret parmağı DIP aktif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork



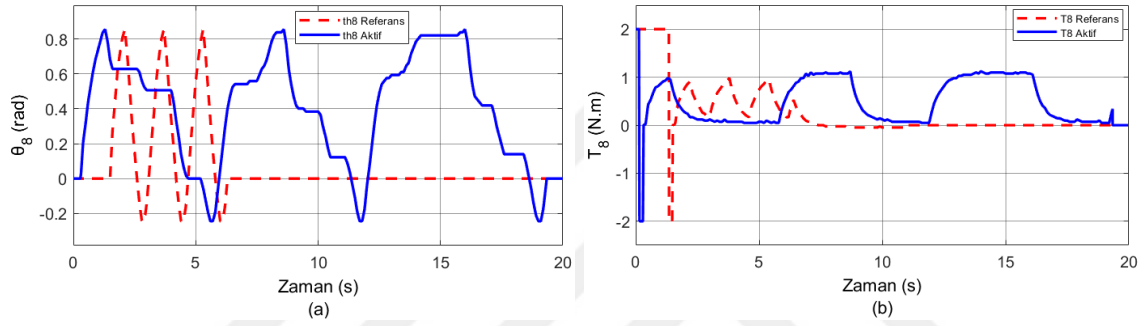
Şekil 113. Orta parmak MCP aktif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork



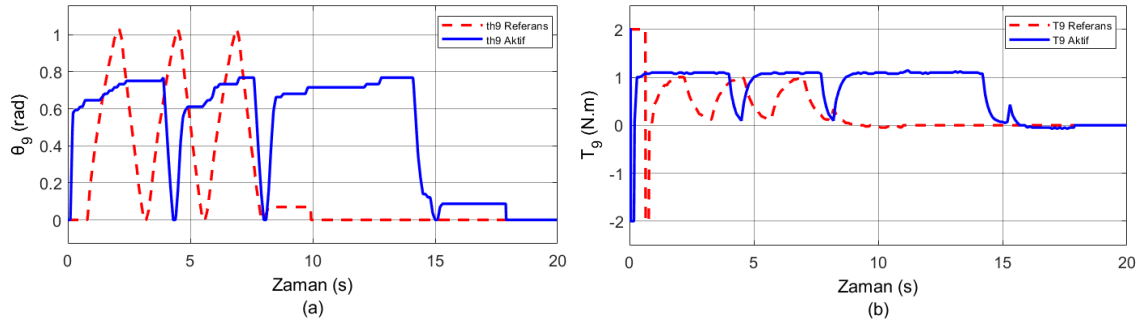
Şekil 114. Orta parmak PIP aktif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork



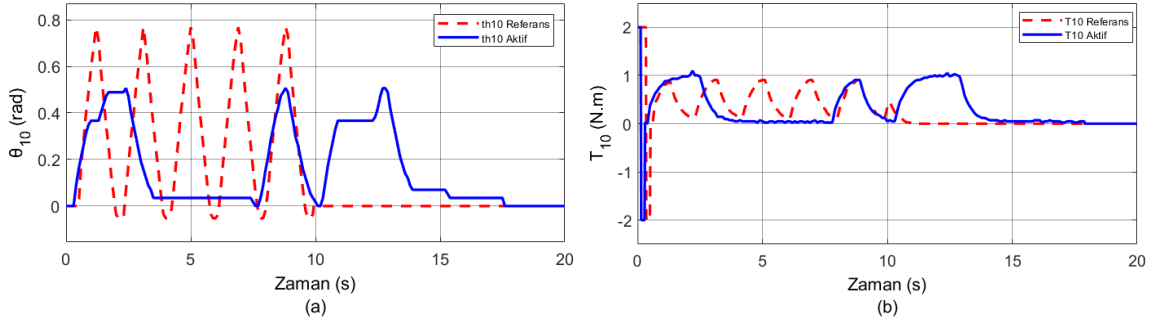
Şekil 115. Orta parmak DIP aktif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork



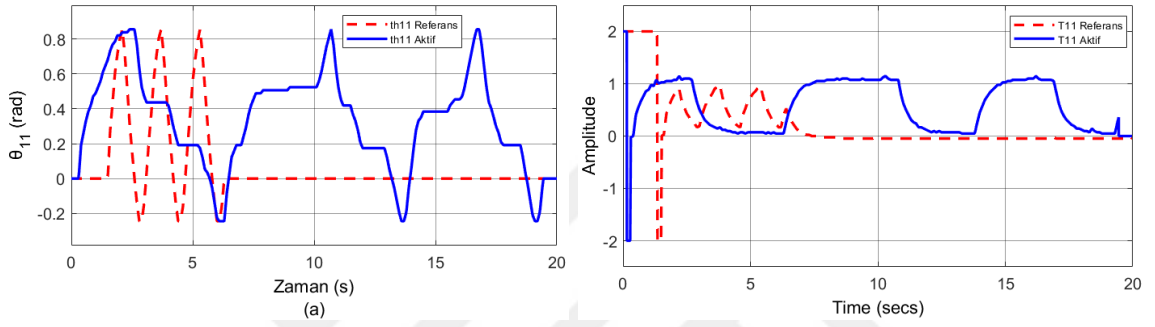
Şekil 116. Yüzük parmak MCP aktif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork



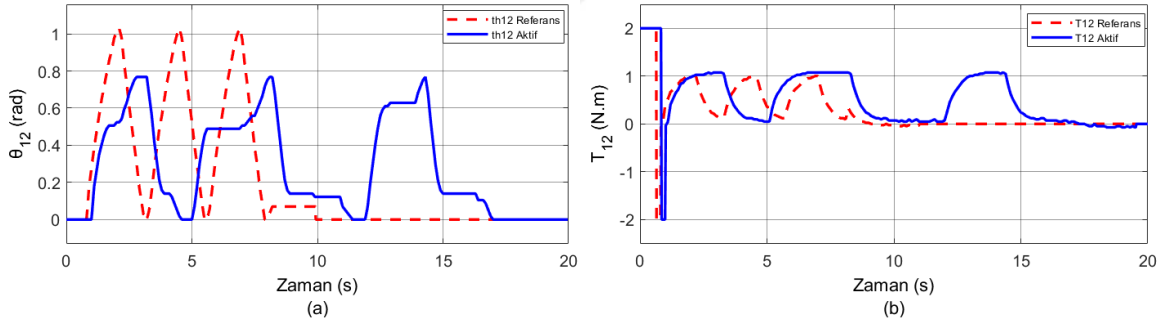
Şekil 117. Yüzük parmak PIP aktif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork



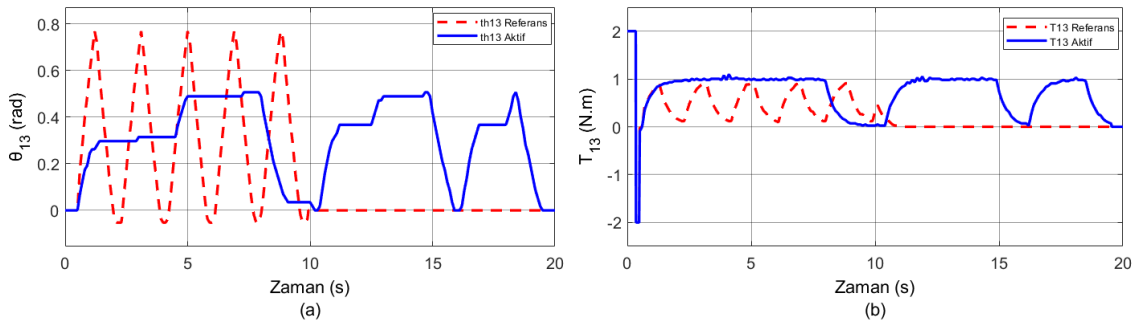
Şekil 118. Yüzük parmak DIP aktif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork



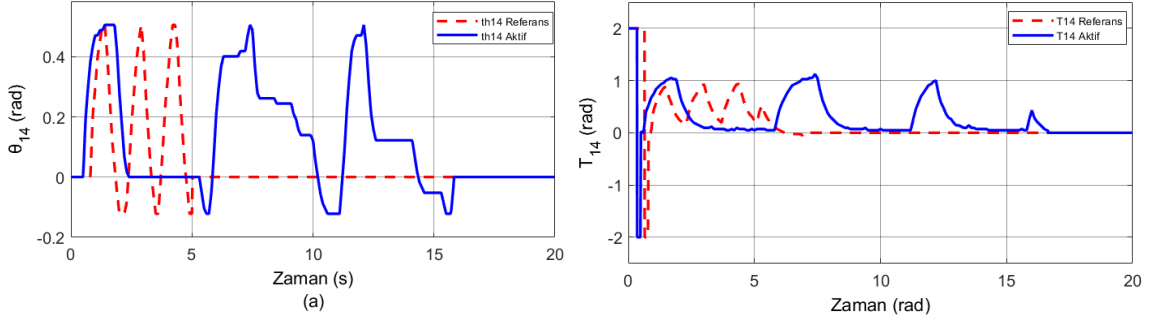
Şekil 119. Küçük parmak MCP aktif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork



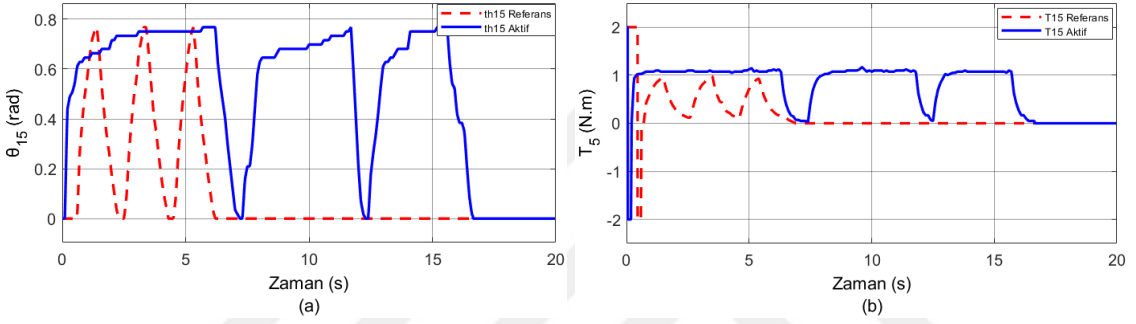
Şekil 120. Küçük parmak PIP aktif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork



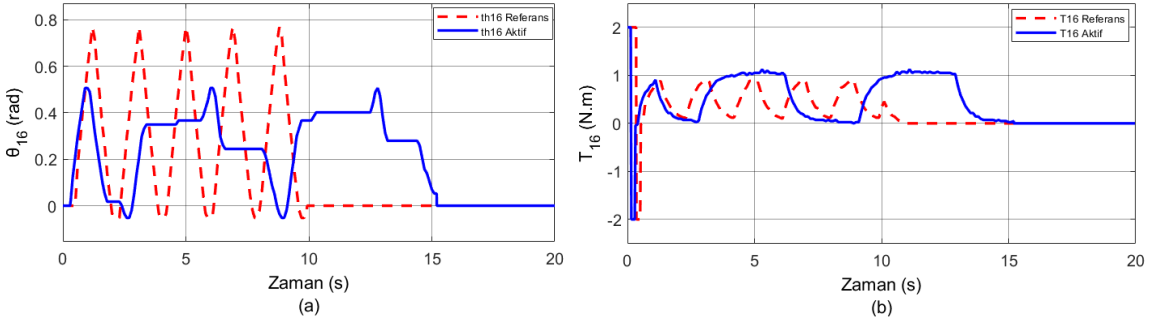
Şekil 121. Küçük parmak DIP aktif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork



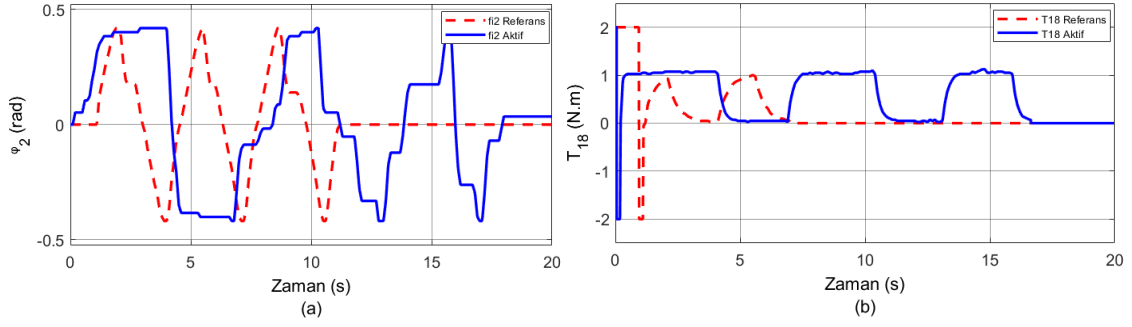
Şekil 122. Baş parmak TMC aktif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork



Şekil 123. Baş parmak MCP aktif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork



Şekil 124. Baş parmak IP aktif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork



Şekil 125. Baş parmak abdüksiyon-addüksiyon aktif egzersiz için a) robot referans & pasif ölçülen konum, b) robot referans & pasif ölçülen tork

Grafikler incelendiğinde sağlıklı deneğin tüm parmaklar ve tüm eklemler için (MCP, PIP, DIP, TMC, IP) belirtilen egzersiz hareketlerini fleksiyon ekstansiyon ve abdüksiyon-addüksiyon için verilen yönergeye göre yerine getirmeye çalıştığı görülmektedir. Konum değerleri istenilen konum açısına benzer bir yol izlese de aralarında büyük zaman farkları gözlenmektedir. Ayrıca bazı parmaklarda fleksiyonda maksimum değere ulaşamamıştır. Aynı durum, istenen ve ölçülen torklar arasında da gözlenmektedir. Aktif egzersizde hareketin doğru gerçekleştirilmesi zamanlamadan daha önemli kabul edilmektedir. İstenen ve elde edilen egzersizlerin aynı zamanlı olması izokinetik egzersizlerde daha çok önem taşımaktadır.

4. TARTIŞMA

Bu doktora tez çalışmasında, 18 serbestlik dereceli kablo destekli el ve el bileği rehabilitasyonu için taşınabilir, nispeten hafif ve ucuz bir dış iskelet robotu tasarlanmış ve imal edilmiştir.

İmal edilen sistem çok serbestlik dereceli bir yapıya sahiptir. Bu sebeple hareket denklemlerinin Newton mekaniği kullanılarak oluşturulması zordur. Bu zorluğu aşabilmek amacıyla sistemin 2B ve 3B matematiksel modelleri basitleştirilmiş Lagrange yöntemi ile oluşturulmuştur. Sistemin mekanik yapısı eklem-uzuv modeli ile ifade edilmiş olup yumuşak doku hareketleri ve dolayısıyla eklem sürtünmeleri ihmal edilmiştir. El ve bileğin yalnızca fleksiyon-ekstansiyon durumunun incelendiği 16 SD'li sistem için matematiksel model elde edilmiş ve benzetimi gerçekleştirilmiştir. Daha sonra bileğin radyal-ulnar deviasyonu da dahil edilerek 18 SD'li sistemin matematiksel modeli oluşturulmuş ve benzetimi gerçekleştirilmiştir. Bu çözümleme işleminde 18 diferansiyel denklem eş zamanlı çözümlenirken aynı anda 54 değişkenli optimizasyon algoritmasının maliyet analizine bağlı optimizasyonu gerçekleştirilmiştir. Tez kapsamında üretilen rehabilitasyon robotunun matematiksel modeli MATLAB/Simulink ortamında başarılı bir şekilde çözümlenmiştir.

Literatürde el ve bilek eklemlerinin hareketinin doğru gerçekleştirilmesi için pek çok araştırma olduğu gözlenmiştir. Söz konusu çalışmaların sonuçlarına göre el üzerine yerleştirilen mekanizmalar daha üstün performans göstermektedir (Liu et al., 2022). Bu nedenle bu çalışmada kablo ile desteklenen dört çubuk mekanizmasına sahip özgün bir dış iskelet sistemi tasarlanmış ve imal edilmiştir. Üretilen robot prototipinin deneysel rehabilitasyon sürecinde parmakların fleksiyon ve ekstansiyon hareketlerini başarılı bir şekilde yaptırıyor olması mekanizma tasarımının doğru şekilde yapıldığını destekler niteliktedir. Devamında sisteme eklenen robot kontrol ünitesi, kontrol paneli, robot manipülatörü ve uç efektörü sayesinde bilimsel bir rehabilitasyon robotu geliştirilmiştir.

Kontrol kutusunda kullanılan motorların konum kontrolü ve konuma bağlı tork kontrolü için redüktörlü DC motor tercih edilmiştir. Bu motorların çok hızlı tepki vermektedir. DC motorlarda konum kontrolü zor olduğundan yapılan çalışma bu yönüyle tezin özgün yanlarından birini oluşturmaktadır. 18 DC motora ait enkoder verileri elde edilmiştir. Enkoder verilerinden açı, akım, frekans ve tekrar verileri elde edilmiştir. Akım ve frekans verilerinden motor torku hesaplanmıştır. 18 DC motor konuma bağlı torkunun

aynı anda hesaplaması yapılmıştır. Bu verilerle pasif, izometrik ve aktif egzersizler gerçekleştirilmiştir. 18 motorun kontrolü ve aynı anda çalıştırılması, bu tezin literatürdeki çalışmalardan ayrılan yönlerindendir.

KKK ve PID küçük boyutlu sistemlerin matematiksel denklemlerini kontrol etmek için yeterli olurken; gerçekleştirilen denemeler neticesinde, tez kapsamındaki denklemleri çözmede yetersiz kaldığı tespit edilmiştir. Bu sebeple tez kapsamında büyük sistemleri parçalara bölme yoluyla çalışan hiyerarşik teknikler uygulanmış ve Hiyerarşik Kayan Kipli Kontrol (HKKK) ile HPID başarılı olmuştur. Bu sonuçlar aynı zamanda optimizasyon işlemleri ile optimize edilmiştir. Bu optimizasyonlar HKKK-PSO, HKKK-DG, HPID-PSO ve HPID-DG olarak dört tanedir. Optimizasyon işlemlerinin benzetim performansını artırdığı ve başarı gösterdiği sonucuna ulaşılmıştır. Öte yandan HKKK denetleyicisinin HPID'ye göre daha başarılı sonuçlar verdiği gözlenmiştir. Bu sistemde tasarlanan denetleyicilerden HKKK-PSO HKKK-DG'ye göre el-el bileğinin fleksiyon-ekstansiyon, MCP, PIP ve DIP falankslarında toplam 16 SD'nin 14 tanesinde aşım olmadan başarılı bir kontrol sağlamıştır. Yerleşme zamanı t_s bakımından HPID'nin gerisinde kaldığı sonucuna ulaşılmıştır. Her iki denetleyicinin de PSO'lu kontrolü daha başarılı olmuştur. Kayma yüzeyi bakımından HKKK-PSO'nun HKKK-DG'ye göre 16 SD'nin 14 tanesinde daha iyi, 1 tanesinde daha kötü, 1 tanesinde ise eşit değerlere sahip olduğu gözlenmiştir.

3B sistemin sonuçlarına göre de HKKK denetleyicisinin HPID ye göre yaklaşık aynı sonuçlar verdiği gözlenmiştir. HKKK-PSO'nun HKKK-DG'ye göre el-el bileğinin fleksiyon-ekstansiyon, MCP, PIP ve DIP falankslarında M_p maksimum aşım bakımından benzer kontrol yeteneğine sahip olduğu gözlenmiştir. Yerleşme zamanı t_s bakımından HKKK'nin daha hızlı olduğu gözlenmiştir. HPID'li tork değerlerinin daha iyi olduğu gözlenmiştir. Kayma yüzeyi bakımından HKKK-PSO'nun HKKK-DE ile eşdeğer performans sergilediği gözlenmiştir.

HKKK ve HPID yalnızca benzetim modeli ile sınırlı kalmış, gerçek sistem üzerinde denemeler yapılmasına rağmen, başarılı bir kontrol gerçekleştirilememiştir. Deneysel sistemde oransal kontrolcü ile yörünge ve tork kontrolü gerçekleştirilmiştir. Egzersiz uygulamalarına geçmeden önce 18 serbestlik derecesine sahip robotun her bir referans yörüngesi elde edilmiştir. Her bir falanks için pasif, izometrik ve aktif olmak üzere 20 saniyelik sürelerle 3 veya 5 tekrarlı 54 farklı durum için grafikler elde edilmiştir. Tez kapsamında yapılan deneysel uygulamalarda (pasif, izometrik ve aktif egzersizler)

hedeflenen açılara başarılı bir şekilde ulaşılmıştır. Deneysel uygulamalardan alınan verilerin rehabilitasyon robotunun el-el bileği ile uyumlu çalıştığı sonucuna ulaşılmıştır.

Deneysel pasif egzersiz uygulamalarında, robotun baş parmak (abdüksiyon-addüksiyon, TMC, MCP), diğer parmakların (dijit 2-5) MCP eklemlerinde ve el bileği egzersizlerinde kısmen zorlandığı gözlenmiştir.

Deneysel izometrik egzersiz uygulamalarında robot kuvvetine karşı direnç gösterme egzersizinde DIP ekleminde zorluk yaşandığı gözlenmiştir. Fleksiyon hareketi esnasında karşı koyulan kuvvetin, ekstansiyon hareketi esnasındaki karşı koyulan kuvvete oranla daha küçük olduğu gözlenmiştir. Bu durum el-el bileğindeki falanksların kuvvetlerle paralellik gösterdiği ile açıklanabilir. Fleksiyon egzersizlerine karşı daha düşük izometrik kuvvetler ortaya çıkmıştır. Bu deneysel sonuçlar, belirlenen şartlardaki egzersizlerin başarılı sonuçlar verdiğini göstermektedir.

Deneysel aktif egzersiz uygulamalarında robot kuvvetine karşı direnç kuvvetini yenip belirlenen şartlardaki rehabilitasyonu tamamlamasında MCP ekleminde zorlanmalar gözlenmiştir. Bunun sebepleri arasında geniş hareket aralığı ve elin biyomekanik modelinde yapılan sadeleştirmeler yer alabilir. Fleksiyon hareketi esnasında oluşan kuvvetin ekstansiyon hareketi esnasında oluşan kuvvete oranla daha büyük olduğu düşünülmektedir. Fleksiyon egzersizlerine karşı daha güçlü aktif kuvvetler ortaya çıkmıştır. Elde edilen deneysel sonuçlar bir bütün olarak değerlendirildiğinde, geliştirilen dinamik rehabilitasyon robotunun, tasarlanan egzersiz hareketlerini aynı tekrar sayısında ve doğru bir şekilde gerçekleştirdiği gözlenmiştir. Arada yaşanan zaman gecikmelerinin, sistemde seçilen motorlardan kaynaklandığı düşünülmektedir. Bu durum hareketin gerçekleştirilmesinde bir sorun teşkil etmemektedir. Ancak izokinetik hareketlerde önem arz etmektedir. Bu doktora tez çalışmasında dinamik kontrollü robotun geliştirilmesi ve rehabilitasyon egzersizleri için kullanılması hedeflendiğinden, insan kol dinamiklerinin çıkarılması kısmına yönelik analizler yapılmamıştır.

5. SONUÇLAR

El-el bileği rehabilitasyon robotları alanında, literatürde oldukça fazla çalışma yer almaktadır. Bu çalışmalar incelendiğinde, çoğunluğunun az serbestlik dereceli sistemler ve dış iskelet tasarımının geliştirilmesi konularında yoğunlaştığı görülmektedir. El ve bilek rehabilitasyon robotlarının yeni yöntemlerle denetiminin geliştirilmesi gereken konular arasında olduğu görülmektedir. El-el bileği rehabilitasyonu alanındaki çalışmalarda çok serbestlik dereceli sistemler için matematiksel modelin elde edilmesi ve deneysel çalışmaların az olması göz önünde bulundurulduğunda bu doktora tez çalışmasının alana katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Deneysel çalışmalarda zamana bağlı gecikmeler oluşsa da istenen açılara ulaşılmaktadır. Egzersizlerde egzersizin hızlı gerçekleştirilmesinden ziyade hasta için egzersiz protokolüne bağlı planlanan egzersiz hareketinin sağlanmasının daha önemli olduğu ifade edilmiştir. Bu bilgiler ışığında tez çalışmasının sonuçları madeler halinde aşağıda sunulmuştur:

1. Bu doktora tez çalışmasında el-el bileğinin rehabilitasyonu için özgün bir dinamik kontrollü dış iskelet robotu geliştirilmesi hedeflenmiştir. Tez kapsamında elde edilen çıktılarına göre bu hedefe ulaşıldığı görülmüştür.
2. Geliştirilen rehabilitasyon robotunun mekanik yapısı el ve bilek üzerine monte edilen ve bowden kablo iletimi ile desteklenen bir dört çubuk mekanizmasına sahiptir. Tasarlanan ve imal edilen bu mekanizmanın rehabilitasyon sürecinde pasif, izometrik ve aktif egzersizleri yerine getirmeye elverişli olduğu görülmüştür.
3. 18 serbestlik dereceli olarak geliştirilen el-el bileği rehabilitasyon robotunun matematiksel modeli basitleştirilmiş Lagrange yöntemi ile ortaya koyulmuştur.
4. Farklı egzersizler için elde edilen benzetim sonuçlarına göre matematiksel modelin sistemi yaklaşık doğrulukla temsil ettiği görülmüştür.
5. Sistemin benzetimi 16 ve 18 serbestlik dereceli olarak gerçekleştirilmiştir. 16 serbestlik derecede fleksiyon/ekstansiyon, 18 serbestlik derecede ise fleksiyon/ekstansiyona ek olarak bileğin ve başparmağın radyal/ulnar ve abdüksiyon/addüksiyon hareketleri dahil edilerek başarılı sonuçlara ulaşılmıştır.
6. Sistemin benzetiminde Hiyerarşik Kayan Kipli Kontrol ve Hiyerarşik PID kontrol kullanılmış ve sistem cevabı parametrelerine göre HKKK'nın daha üstün performans sergilediği görülmüştür.

7. Kontrol algoritmalarının parametre tahmini için optimizasyon yöntemlerinden PSO ve DGO algoritmaları hem HKKK ile hem de HPID ile birlikte kullanılmıştır. Optimizasyon işlemlerinde PSO algoritmasının hem HKKK ile hem de HPID ile daha hızlı ve gürbüz sonuçlar verdiği görülmüştür.
8. Fiziksel sistem elemanlarının birçoğu atölyede imal edilerek, üretim maliyeti düşürülmüştür.
9. Deneysel pasif egzersiz uygulamalarında robotun baş parmak (abdüksiyon-addüksiyon, TMC, MCP), diğer parmaklar (MCP kısımlarında) ve el bileği egzersizlerinde kısmen zorlandığı gözlenmiştir. Deneysel pasif egzersiz uygulamasında oluşan bu zorlanmaların egzersiz yönteminden kaynaklandığı görülmüştür.
10. Deneysel izometrik egzersiz uygulamalarında robot kuvvetine karşı direnç egzersizini tamamlamasında DIP ekleminde zorlanmalar gözlenmiştir. Fleksiyon hareketi esnasında karşı koyulan kuvvetin ekstansiyon hareketi esnasındaki karşı koyulan kuvvete oranla daha düşük olduğu gözlenmiştir. Bu durum el-el bileğindeki eklemlerin hareketinin kuvvetlerle paralellik gösterdiğini düşündürmektedir. Fleksiyon egzersizlerine karşı daha düşük izometrik kuvvetler ortaya çıkmıştır. Bu deneysel durum belirlenen şartlardaki egzersizlerin başarılı sonuçlar verdiğini göstermektedir.
11. Deneysel aktif egzersiz uygulamalarında robot kuvvetine karşı direnç kuvvetini yenip belirlenen şartlardaki rehabilitasyonu tamamlamasında MCP ekleminde zorlanmalar gözlenmiştir. Fleksiyon egzersizlerine karşı daha güçlü aktif kuvvetler ortaya çıkmıştır. Bu deneysel durum belirlenen şartlardaki egzersizlerin başarılı sonuçlar verdiğini göstermektedir.
12. Tez kapsamında geliştirilen robot; makine mühendisliği, fizyoterapi ve rehabilitasyon, biyomedikal, mekatronik, kontrol ve elektrik-elektronik mühendisliği gibi disiplinler arası bilime hitap etmektedir.

6. ÖNERİLER

Doktora tezi olarak sunulan bu çalışmada, el-el bileği için dinamik kontrollü rehabilitasyon robotunun imalatı ve kontrolü geliştirilmiştir. Bu alanda çalışma yapmak isteyen araştırmacılara deneysel çalışmalar sonucunda aşağıdaki öneriler belirtilmiştir:

1. Bu doktora tez çalışmasında tek bir sağlıklı denek ile ölçümler yapılmıştır. Bundan sonraki çalışmalar için sağlıklı ve hasta birey sayısının artırılması sistemin test edilmesi bakımından önemlidir.
2. Sistemin matematiksel modelinde basitleştirilmiş Lagrange yöntemi kullanılmıştır. Bundan sonraki çalışmalar için sistemdeki sürtünme ve bozucuların modele dahil edilerek, denetim aşamasına geçilmesi önerilmektedir.
3. Robot sisteminde mekanik olarak bowden kablo iletim tekniği kullanıldığından sistemin doğasında olan sürtünme vb. durumlar mekanik çalışmayı olumsuz etkileyebilir. Bu olumsuz etkiler sistemin daha çok kuvvete ihtiyacını doğurmaktadır. Kendinden yağlamalı kablo iletim tekniği kullanılabilir. Uygulamalarda doğru DC motor seçimi önemlidir. Bundan sonra gerçekleştirilecek rehabilitasyon robotu uygulamalarında; güçlü redüktöre sahip motorlar kullanılması önerilmektedir.
4. Mekanik sistemlerin motor üzerindeki kuvvet ve baskılarını azaltmak için daha hafif ve dayanıklı kompozit malzemeler kullanılabilir. Fakat bu durum robot maliyetini arttırabilir.
5. Sistemdeki gürültüyü önlemek için daha donanımlı güç kaynakları ve iletkenlik oranı yüksek kablolar kullanılabilir.
6. Tez kapsamında robotun enkoder verilerine bağlı olarak açı, akım ve frekans verileri alınarak kontrol sağlanmıştır. Sensörler kullanmak vasıtasıyla, kuvvet ve tork büyüklükleri hesaplanabilir. Hastaya ait kütle, rijitlik, sönüm katsayısı gibi fiziksel büyüklükler deneyden elde edilebilir.
7. Gelecek çalışmalarda farklı kontrol tekniklerinin kullanılması önerilir.
8. İleriki çalışmalarda el-el bileği rehabilitasyon robotunun dış iskeleti için tasarım iyileştirme konularında patent ve faydalı model çalışmaları düşünülmektedir.

7. KAYNAKLAR

- Abdallah, I. B., Bouteraa, Y., & Rekik, C. (2017). Design and development of 3d printed myoelectric robotic exoskeleton for hand rehabilitation. *International Journal on Smart Sensing and Intelligent Systems*, 10(2), 1-26. doi:10.21307/ijssis-2017-215
- Ahmed, T., Assad-Uz-Zaman, M., Islam, M. R., Gottheardt, D., McGonigle, E., Brahmi, B., & Rahman, M. H. (2021). Flexohand: A hybrid exoskeleton-based novel hand rehabilitation device. *Micromachines (Basel)*, 12(11). doi:10.3390/mi12111274
- Akdoğan, E. (2007). *Rehabilitasyon amaçlı bir robot kolunun kuvvet ve konumunun zeki kontrolü / intelligent force and position control of a robot manipulator for rehabilitation*. Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü. İstanbul.
- Akdoğan, E. (2015). WO 2015/041618 A3. World Intellectual Property Organization.
- Akdoğan, E., Aktan, M. E., Koru, A. T., Selçuk Arslan, M., Atlıhan, M., & Kuran, B. (2018). Hybrid impedance control of a robot manipulator for wrist and forearm rehabilitation: Performance analysis and clinical results. *Mechatronics*, 49, 77-91. doi:https://doi.org/10.1016/j.mechatronics.2017.12.001
- Aktan, M. E., & Akdoğan, E. (2021). Development of an intelligent controller for robot-aided assessment and treatment guidance in physical medicine and rehabilitation. *Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences*, 29, 403-420. doi:doi:10.3906/elk-2007-24
- Alain, F. (2014). *Glove exoskeleton for extra-vehicular activities: Analysis of requirements and prototype design*. Politecnico di Torino, Retrieved from <http://porto.polito.it/2546950/>
- Barkana, D. E., & Özkul, F. (2012). *Rehabilitasyon amaçlı robotik sistemi (rehabroby)*. Retrieved from TUBİTAK:
- Bataller, A., Cabrera, J. A., Clavijo, M., & Castillo, J. J. (2016). Evolutionary synthesis of mechanisms applied to the design of an exoskeleton for finger rehabilitation. *Mechanism and Machine Theory*, 105, 31-43. doi:https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2016.06.022
- Baugh, L. S. (2024). Homunculus. Encyclopedia britannica. *Homunculus*. Retrieved from <https://www.britannica.com/science/homunculus-biology>
- Bazira, P. J. (2022). Surgical anatomy of the hand. *Surgery (Oxford)*, 40(3), 155-162. doi:https://doi.org/10.1016/j.mpsur.2022.01.001
- Becchi, F., Sale, P., Sieklicki, W., & Stellin, G. (2017). United States Patent No. US 2017 / 0266075 A1. Patent Application Publication.
- Beenken, G. M. (1994). United States Patent No. 5 541 191. United States Patent.

- Biryukova, E. V., & Yourovskaya, V. Z. (1994). A model of human hand dynamics. In F. Schuind, K. N. An, W. P. Cooney, & M. Garcia-Elias (Eds.), *Advances in the biomechanics of the hand and wrist* (pp. 107-122). Boston, MA: Springer US.
- Bouzit, M., Burdea, G., Popescu, G., & Boian, R. (2002). The rutgers master ii-new design force-feedback glove. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 7(2), 256-263. doi:10.1109/TMECH.2002.1011262
- Bützer, T., Lambercy, O., Arata, J., & Gassert, R. (2021). Fully wearable actuated soft exoskeleton for grasping assistance in everyday activities. *Soft Robot*, 8(2), 128-143. doi:10.1089/soro.2019.0135
- Chapra, S. C. (2012). *Applied numerical methods with matlab for engineers and scientists* (Vol. Third Edition). USA: McGraw-Hill Companies.
- Chen Chen, F., Appendino, S., Battezzato, A., Favetto, A., Mousavi, M., & Pescarmona, F. (2013). Constraint study for a hand exoskeleton: Human hand kinematics and dynamics. *Journal of Robotics*, 2013, 910961. doi:10.1155/2013/910961
- Chu, C. Y., & Patterson, R. M. (2018). Soft robotic devices for hand rehabilitation and assistance: A narrative review. *J Neuroeng Rehabil*, 15(1), 9. doi:10.1186/s12984-018-0350-6
- Conti, R., Meli, E., & Ridolfi, A. (2016). A novel kinematic architecture for portable hand exoskeletons. *Mechatronics*, 35, 192-207. doi:https://doi.org/10.1016/j.mechatronics.2016.03.002
- Conti, R., Meli, E., Ridolfi, A., Bianchi, M., Governi, L., Volpe, Y., & Allotta, B. (2017). Kinematic synthesis and testing of a new portable hand exoskeleton. *Meccanica*, 52(11), 2873-2897. doi:10.1007/s11012-016-0602-0
- Decker, M., & Kim, Y. J. I. W. H. C. (2017). A hand exoskeleton device for robot assisted sensory-motor training after stroke. 436-441.
- Deshpande, A., & Priyanshu Agarwal. (2016). United States Patent No. US 2016/0296345 A1. Patent Application Publication.
- Dickmann, T., Wilhelm, N. J., Glowalla, C., Haddadin, S., Van der Smagt, P., & Burgkart, R. (2021). An adaptive mechatronic exoskeleton for force-controlled finger rehabilitation. *Front Robot AI*, 8, 716451. doi:10.3389/frobt.2021.716451
- Dimapasoc, B. (2017). *Design of a dexterous three-fingered hand exoskeleton for stroke patient rehabilitation*. University of California, ProQuest LLC.
- Dittli, J., Vasileiou, C., Asanovski, H., Lieber, J., Lin, J. B., Meyer-Heim, A., . . . Lambercy, O. (2022). Design of a compliant, stabilizing wrist mechanism for a pediatric hand exoskeleton. *IEEE Int Conf Rehabil Robot*, 2022, 1-6. doi:10.1109/icorr55369.2022.9896550

- Du Plessis, T., Djouani, K., & Oosthuizen, C. (2021). A review of active hand exoskeletons for rehabilitation and assistance. *10*(1), 40.
- Fausti, D., & Seneci, C. (2011). United States Patent No. US 2013/0072829 A1. Patent Application Publication.
- Festo. (2021). İnsan ve makine için yeni eylem alanları. <https://www.festo.com/group/en/cms/10233.htm>.
- Fontana, M., Dettori, A., Salsedo, F., & Bergamasco, M. (2009, 12-17 May 2009). *Mechanical design of a novel hand exoskeleton for accurate force displaying*. Paper presented at the 2009 IEEE International Conference on Robotics and Automation.
- Güdemez, E., Ataker, Y., & Ece, S. C. (2013). *El rehabilitasyonu*. Amerikan Hastanesi Yayınları: Vehbi Koç Vakfı Amerikan Hastanesi.
- Hinchet, R., Vechev, V., Shea, H. R., & Hilliges, O. (2018). Dextres: Wearable haptic feedback for grasping in vr via a thin form-factor electrostatic brake. *Proceedings of the 31st Annual ACM Symposium on User Interface Software Technology*, 901-912.
- Hoffman, H. B., & Blakey, G. L. (2011). New design of dynamic orthoses for neurological conditions. *NeuroRehabilitation*, 28(1), 55-61. doi:10.3233/nre-2011-0632
- Hu, Y., & Wang, H. (2020). Robust tracking control for vehicle electronic throttle using adaptive dynamic sliding mode and extended state observer. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 135, 106375. doi:<https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2019.106375>
- İnal, S. (2003). *Rehabilitasyon ders notları*. Marmara Üniversitesi B.E.S.Y.O.
- Iqbal, J., Khan, H., Tsagarakis, N. G., & Caldwell, D. G. (2014). A novel exoskeleton robotic system for hand rehabilitation – conceptualization to prototyping. *Biocybernetics and Biomedical Engineering*, 34(2), 79-89. doi:<https://doi.org/10.1016/j.bbe.2014.01.003>
- Iqbal, J., Tsagarakis, N. G., & Caldwell, D. G. (2015). Four-fingered lightweight exoskeleton robotic device accommodating different hand sizes. *51*(12), 888-890. doi:<https://doi.org/10.1049/el.2015.0850>
- Jo, I., Lee, J., Park, Y., & Bae, J. (2017). Design of a wearable hand exoskeleton for exercising flexion/extension of the fingers. *IEEE Int Conf Rehabil Robot*, 2017, 1615-1620. doi:10.1109/icorr.2017.8009479
- Jo, I., Park, Y., Lee, J., & Bae, J. (2019). A portable and spring-guided hand exoskeleton for exercising flexion/extension of the fingers. *Mechanism and Machine Theory*, 135, 176-191. doi:<https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2019.02.004>

- Kabir, R., Sunny, M. S. H., Ahmed, H. U., & Rahman, M. H. (2022). Hand rehabilitation devices: A comprehensive systematic review. *Micromachines (Basel)*, 13(7). doi:10.3390/mi13071033
- Kelly, R. (2016). US Patent No.US 9 387 110 B2
- Kennedy, J., & Eberhart, R. (1995, 27 Nov.-1 Dec. 1995). *Particle swarm optimization*. Paper presented at the Proceedings of ICNN'95 - International Conference on Neural Networks.
- Kim, S., Lee, J., & Bae, J. (2017). Analysis of finger muscular forces using a wearable hand exoskeleton system. *Journal of Bionic Engineering*, 14(4), 680-691. doi:https://doi.org/10.1016/S1672-6529(16)60434-1
- Kim, S., Lee, J., Park, W., & Bae, J. (2017). Quantitative evaluation of hand functions using a wearable hand exoskeleton system. *IEEE Int Conf Rehabil Robot*, 2017, 1488-1493. doi:10.1109/icorr.2017.8009458
- Leonardis, D., Barsotti, M., Loconsole, C., Solazzi, M., Troncossi, M., Mazzotti, C., . . . Frisoli, A. (2015). An emg-controlled robotic hand exoskeleton for bilateral rehabilitation. *IEEE Trans Haptics*, 8(2), 140-151. doi:10.1109/toh.2015.2417570
- Lince, A. (2016). *Rehand - a portable assistive rehabilitation hand exoskeleton*. (Doctor of Philosophy Thesis), Politecnico di Torino
- Lince, A., Celadon, N., Battezzato, A., Favetto, A., Appendino, S., Ariano, P., & Paleari, M. (2017). Design and testing of an under-actuated surface emg-driven hand exoskeleton. *IEEE Int Conf Rehabil Robot*, 2017, 670-675. doi:10.1109/icorr.2017.8009325
- Liu, C., Lu, J., Yang, H., & Guo, K. (2022). Current state of robotics in hand rehabilitation after stroke: A systematic review. *Applied Sciences*, 12(9). doi:10.3390/app12094540
- Marconi, D., Baldoni, A., McKinney, Z., Cempini, M., Crea, S., & Vitiello, N. (2019). A novel hand exoskeleton with series elastic actuation for modulated torque transfer. *Mechatronics*, 61, 69-82. doi:https://doi.org/10.1016/j.mechatronics.2019.06.001
- Mata Amritanandamayi, D., Udupa, G., & Sreedharan, P. (2018). A novel underactuated multi-fingered soft robotic hand for prosthetic application. *Robotics and Autonomous Systems*, 100, 267-277. doi:https://doi.org/10.1016/j.robot.2017.11.005
- Mayetin, U. (2022). *Taşınabilir bilek rehabilitasyon robotu tasarımı ve geliştirilmesi*. (Ph.D), Kocaeli Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü. Retrieved from https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi/tezSorguSonucYeni.jsp (716593)
- McConnell, A. C., Moiola, R. C., Brasil, F. L., Vallejo, M., Corne, D. W., Vargas, P. A., & Stokes, A. A. (2017). Robotic devices and brain-machine interfaces for hand

- rehabilitation post-stroke. *J Rehabil Med*, 49(6), 449-460. doi:10.2340/16501977-2229
- Michael Kam Fai Tsui, & Kai Yu Tong. (2017). U.S. Patent No.: R.-R. C. Limited.
- Molteni, F., Gasperini, G., Cannaviello, G., & Guanziroli, E. (2018). Exoskeleton and end-effector robots for upper and lower limbs rehabilitation: Narrative review. *PM&R*, 10(9, Supplement 2), S174-S188. doi:https://doi.org/10.1016/j.pmrj.2018.06.005
- Nordin, M., & Frankel, V. H. (2012). *Basic biomechanics of the musculoskeletal system*. (Vol. 4th Edition).
- Noronha, B., Ng, C. Y., Little, K., Xiloyannis, M., Kuah, C. W. K., Wee, S. K., . . . Accoto, D. (2022). Soft, lightweight wearable robots to support the upper limb in activities of daily living: A feasibility study on chronic stroke patients. *IEEE Trans Neural Syst Rehabil Eng*, 30, 1401-1411. doi:10.1109/tnsre.2022.3175224
- Ou, Y. K., Wang, Y. L., Chang, H. C., & Chen, C. C. (2020). Design and development of a wearable exoskeleton system for stroke rehabilitation. *Healthcare (Basel)*, 8(1). doi:10.3390/healthcare8010018
- Pezent, E. (2017). *Design, characterization, and validation of the openwrist exoskeleton*. (Master of Science Engineering), Rice University, Published by ProQuest LLC.
- Pezent, E., Rose, C. G., Deshpande, A. D., & O'Malley, M. K. (2017). Design and characterization of the openwrist: A robotic wrist exoskeleton for coordinated hand-wrist rehabilitation. *IEEE Int Conf Rehabil Robot*, 2017, 720-725. doi:10.1109/icorr.2017.8009333
- Polygerinos, P., Wang, Z., Galloway, K. C., Wood, R. J., Walsh, C. J. J. R., & Systems, A. (2015). Soft robotic glove for combined assistance and at-home rehabilitation. 73, 135-143.
- Proietti, T., Crocher, V., Roby-Brami, A., & Jarrasse, N. (2016). Upper-limb robotic exoskeletons for neurorehabilitation: A review on control strategies. *IEEE Rev Biomed Eng*, 9, 4-14. doi:10.1109/rbme.2016.2552201
- R.L. Drake, W. Vogl, & Mitchell, A. W. M. (2004). *Gray's anatomy for students*. Churchill Livingstone Elsevier.
- Rahman, A., & Al-Jumaily, A. (2013). Design and development of a bilateral therapeutic hand device for stroke rehabilitation. 10(12), 405. doi:10.5772/56809
- Rätz, R., Conti, F., Müri, R. M., & Marchal-Crespo, L. (2021). A novel clinical-driven design for robotic hand rehabilitation: Combining sensory training, effortless setup, and large range of motion in a palmar device. *Front Neurorobot*, 15, 748196. doi:10.3389/fnbot.2021.748196

- Sabater-Navarro, J. M., Garcia, N., Ramos, D., Camayo, E., & Vivas, A. (2015). Hand neuro-rehabilitation system using nitinol spring actuators. *Robotics and Autonomous Systems*, 63, 50-56. doi:<https://doi.org/10.1016/j.robot.2014.09.015>
- Sale, P., Sellin, G., Stefano, M., Becchi, F., & Sieklicki, W. (2018). Fex a fingers extending exoskeleton for rehabilitation and regaining mobility.
- Schabowsky, C. N. (2010). *Robot-assisted hand movement therapy after stroke*. (Doctor of Philosophy), The Catholic University of America, ProQuest LLC.
- Schabowsky, C. N., Godfrey, S. B., Holley, R. J., & Lum, P. S. (2010). Development and pilot testing of hexorr: Hand exoskeleton rehabilitation robot. *J Neuroeng Rehabil*, 7, 36. doi:10.1186/1743-0003-7-36
- Sebastian, F. (2018). *The design and characterization of a soft haptic interface for rehabilitation of impaired hand function*. (Master of Science), Arizona State University, ProQuest LLC.
- Serbest, K. (2017). *El kaslarının rehabilitasyonu İçin aktif dinamik el – el bileği ortezi tasarımı*. . Sakarya Üniversitesi, Fenbilimleri Enstitüsü, Sakarya.
- Shao, F., Meng, W., Ai, Q., & Xie, S. Q. (2021, 3-5 Feb. 2021). *Neural network adaptive control of hand rehabilitation robot driven by flexible pneumatic muscles*. Paper presented at the 2021 7th International Conference on Mechatronics and Robotics Engineering (ICMRE).
- Skidmore, E. R., & Shih, M. (2022). Stroke rehabilitation: Recent progress and future promise. *OTJR (Thorofare N J)*, 42(3), 175-181. doi:10.1177/15394492221082630
- Son, C., Kim, S., Kim, S.-j., Choi, J., & Kim, D. (2018). Detection of muscle activation through multi-electrode sensing using electrical stimulation. *Sensors and Actuators A: Physical*, 275, 19-28. doi:<https://doi.org/10.1016/j.sna.2018.03.030>
- Storn, R., & Price, K. (1997). Differential evolution – a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of Global Optimization*, 11(4), 341-359. doi:10.1023/A:1008202821328
- Sumner, J., Lim, H. W., Chong, L. S., Bundele, A., Mukhopadhyay, A., & Kayambu, G. (2023). Artificial intelligence in physical rehabilitation: A systematic review. *Artificial Intelligence in Medicine*, 146, 102693. doi:<https://doi.org/10.1016/j.artmed.2023.102693>
- Sun, N., Li, G., & Cheng, L. (2021). Design and validation of a self-aligning index finger exoskeleton for post-stroke rehabilitation. *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering*, 29, 1513-1523. doi:10.1109/TNSRE.2021.3097888
- Taheri, H., Rowe, J. B., Gardner, D., Chan, V., Gray, K., Bower, C., . . . Wolbrecht, E. T. (2014). Design and preliminary evaluation of the finger rehabilitation robot:

- Controlling challenge and quantifying finger individuation during musical computer game play. *J Neuroeng Rehabil*, 11, 10. doi:10.1186/1743-0003-11-10
- Tong, K. Y., Ho, S. K., Pang, P. K., Hu, X. L., Tam, W. K., Fung, K. L., . . . Chen, M. (2010). An intention driven hand functions task training robotic system. *Annu Int Conf IEEE Eng Med Biol Soc*, 2010, 3406-3409. doi:10.1109/iembs.2010.5627930
- Tong, K. Y., Pang, P. M. K., C., M. C. C., Ho, S. K., Zhou, H., & Chan, D. T. W. (2013). US Patent No.: U. S. Patent.
- TTGV. (2013). *Dünyada ve türkiye’de tıbbi cihaz sektörü ve strateji önerisi*: Türkiye Teknoloji Gelistirme Vakfı
- Ueki, S., Kawasaki, H., Ito, S., Nishimoto, Y., Motoyuki Abe, Aoki, T., . . . Mouri, T. (2012). Development of a hand-assist robot with multi-degrees-of-freedom for rehabilitation therapy. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 17(1), 136-146. doi:10.1109/TMECH.2010.2090353
- Uğurlu, Ü. (2008). *Development of a new orthosis (neuro-orthosis) for the control of wrist movements in patients with carpal tunnel syndrome / karpal tünel sendromunda el bileği hareketlerinin kontrolü için yeni bir ortezin (nöro-ortez) geliştirilmesi*. Boğaziçi Üniversitesi Biyo-Medikal Mühendislik Enstitüsü. İstanbul.
- Unluhisarcikli, O. (2012). *Human-robot interaction control of neurorehabilitation robots*. Northeastern University,
- Üzgün, H. D. (2015). *Robot hand design using flexible and continuum structures*. (Master Degree), İstanbul Technical University, Retrieved from <https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi/>
- Wang, H., Li, Z., Jin, X., Huang, Y., Kong, H., Yu, M., . . . Sun, Z. (2018). Adaptive integral terminal sliding mode control for automobile electronic throttle via an uncertainty observer and experimental validation. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 67(9), 8129-8143. doi:10.1109/TVT.2018.2850923
- Wang, J.-J., & Liu, G.-Y. (2019). Hierarchical sliding-mode control of spatial inverted pendulum with heterogeneous comprehensive learning particle swarm optimization. *Information Sciences*, 495, 14-36. doi:https://doi.org/10.1016/j.ins.2019.05.004
- Wang, T., Mantini, D., & Gillebert, C. R. (2018). The potential of real-time fmri neurofeedback for stroke rehabilitation: A systematic review. *Cortex*, 107, 148-165. doi:10.1016/j.cortex.2017.09.006
- Wang, Y., & Xu, Q. (2021). Design and testing of a soft parallel robot based on pneumatic artificial muscles for wrist rehabilitation. *Sci Rep*, 11(1), 1273. doi:10.1038/s41598-020-80411-0
- Wang, Y., Zhu, H., Elangovan, N., Cappello, L., Sandini, G., Masia, L., & Konczak, J. (2021). A robot-aided visuomotor wrist training induces gains in proprioceptive and

movement accuracy in the contralateral wrist. *Sci Rep*, 11(1), 5281. doi:10.1038/s41598-021-84767-9

WHO. (2010). *Medical devices managing the mismatch : An outcome of the priority medical devices project*. Geneva, Switzerland: World Health Organization.

WHO. (2022). *Global atlas of medical devices 2022*: World Health Organization.

Winter, D. A. (1990). *Biomechanics and motor control of human movement* (Vol. 4.nd Edition): John Wiley & Sons New Jersey Published simultaneously in Canada.

Wolbrecht, E. T., Morse, K. J., Perry, J. C., & Reinkensmeyer, D. J. (2016, 16-20 Aug. 2016). *Design of a thumb module for the finger rehabilitation robot*. Paper presented at the 2016 38th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society (EMBC).

Wu, J., Huang, J., Wang, Y., & Xing, K. (2010). A wearable rehabilitation robotic hand driven by pmts actuators. *Intelligent Robotics and Applications, LNAI 6425*, 440–450. doi:10.1007/978-3-642-16587-0_41 · Source: DBLP

Xu, D., Wu, Q., & Zhu, Y. (2021). Development of a soft cable-driven hand exoskeleton for assisted rehabilitation training. *Industrial Robot: the international journal of robotics research and application*, 48(2), 189-198. doi:10.1108/IR-06-2020-0127

Yap, H. K., Jeong Hoon, L., Nasrallah, F., Goh, J. C. H., & Yeow, R. C. H. (2015, 26-30 May 2015). *A soft exoskeleton for hand assistive and rehabilitation application using pneumatic actuators with variable stiffness*. Paper presented at the 2015 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA).

Zhang, F., Hua, L., Fu, Y., Chen, H., & Wang, S. (2014). Design and development of a hand exoskeleton for rehabilitation of hand injuries. *Mechanism and Machine Theory*, 73, 103-116. doi:https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2013.10.015

Zhao, H. (2017). *Fabrication, sensation and control of fluidic elastomer actuators and their application towards hand orthotics and prosthetics*. (Ph.D), Cornell University, Published by ProQuest LLC.

8. EKLER

- EK-A (2B Hareket Denklemi)

EK-A. 1

$$\sin \theta_1^2 + \cos \theta_1^2 = 1$$

EK-A. 2

$$K_{16} = \left(\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7 + m_8 + m_9 + m_{10} + m_{11}) \\ + m_{12} + m_{13} \end{array} \right) L_1^2 \dot{\theta}_1^2 \\ + (m_{14} + m_{15} + m_{16}) L_a^2 \dot{\theta}_1^2 + (m_2 + m_3 + m_4) L_2^2 \dot{\theta}_2^2 + (m_3 + m_4) L_3^2 \dot{\theta}_3^2 + m_4 L_4^2 \dot{\theta}_4^2 \\ 0.5 + (m_5 + m_6 + m_7) L_5^2 \dot{\theta}_5^2 + (m_6 + m_7) L_6^2 \dot{\theta}_6^2 + m_7 L_7^2 \dot{\theta}_7^2 \\ + (m_8 + m_9 + m_{10}) L_8^2 \dot{\theta}_8^2 + (m_9 + m_{10}) L_9^2 \dot{\theta}_9^2 + m_{10} L_{10}^2 \dot{\theta}_{10}^2 \\ + (m_{11} + m_{12} + m_{13}) L_{11}^2 \dot{\theta}_{11}^2 + (m_{12} + m_{13}) L_{12}^2 \dot{\theta}_{12}^2 + m_{13} L_{13}^2 \dot{\theta}_{13}^2 \\ + (m_{14} + m_{15} + m_{16}) L_{14}^2 \dot{\theta}_{14}^2 + (m_{15} + m_{16}) L_{15}^2 \dot{\theta}_{15}^2 + m_{16} L_{16}^2 \dot{\theta}_{16}^2 \end{array} \right) \\ + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 L_1 L_2 \, c(\theta_1 - \theta_2) (m_2 + m_3 + m_4) \\ + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 L_1 L_3 \, c(\theta_1 - \theta_3) (m_3 + m_4) + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 L_1 L_4 \, c(\theta_1 - \theta_4) m_4 \\ + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 L_1 L_5 \, c(\theta_1 - \theta_5) (m_5 + m_6 + m_7) + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_6 L_1 L_6 \, c(\theta_1 - \theta_6) (m_6 + m_7) \\ + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_7 L_1 L_7 \, c(\theta_1 - \theta_7) m_7 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_8 L_1 L_8 \, c(\theta_1 - \theta_8) (m_8 + m_9 + m_{10}) \\ + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_9 L_1 L_9 \, c(\theta_1 - \theta_9) (m_9 + m_{10}) + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{10} L_1 L_{10} \, c(\theta_1 - \theta_{10}) m_{10} \\ + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{11} L_1 L_{11} \, c(\theta_1 - \theta_{11}) (m_{11} + m_{12} + m_{13}) + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{12} L_1 L_{12} \, c(\theta_1 - \theta_{12}) (m_{12} + m_{13}) \\ + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{13} L_1 L_{13} \, c(\theta_1 - \theta_{13}) m_{13} \\ + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{14} L_a L_{14} \, c(\theta_1 - \theta_{14}) (m_{14} + m_{15} + m_{16}) + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{15} L_a L_{15} \, c(\theta_1 - \theta_{15}) (m_{15} + m_{16}) \\ + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{16} L_a L_{16} \, c(\theta_1 - \theta_{16}) m_{16} \\ + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 L_2 L_3 \, c(\theta_2 - \theta_3) (m_3 + m_4) + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 L_2 L_4 \, c(\theta_2 - \theta_4) m_4 \\ + \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 L_3 L_4 \, c(\theta_3 - \theta_4) m_4 + \dot{\theta}_5 \dot{\theta}_6 L_5 L_6 \, c(\theta_5 - \theta_6) (m_6 + m_7) \\ + \dot{\theta}_5 \dot{\theta}_7 L_5 L_7 \, c(\theta_5 - \theta_7) m_7 + \dot{\theta}_6 \dot{\theta}_7 L_6 L_7 \, c(\theta_6 - \theta_7) m_7 \\ + \dot{\theta}_8 \dot{\theta}_9 L_8 L_9 \, c(\theta_8 - \theta_9) (m_9 + m_{10}) + \dot{\theta}_8 \dot{\theta}_{10} L_8 L_{10} \, c(\theta_8 - \theta_{10}) m_{10} \\ + \dot{\theta}_9 \dot{\theta}_{10} L_9 L_{10} \, c(\theta_9 - \theta_{10}) m_{10} + \dot{\theta}_{11} \dot{\theta}_{12} L_{11} L_{12} \, c(\theta_{11} - \theta_{12}) (m_{12} + m_{13}) \\ + \dot{\theta}_{11} \dot{\theta}_{13} L_{11} L_{13} \, c(\theta_{11} - \theta_{13}) m_{13} + \dot{\theta}_{12} \dot{\theta}_{13} L_{12} L_{13} \, c(\theta_{12} - \theta_{13}) m_{13} \\ + \dot{\theta}_{14} \dot{\theta}_{15} L_{14} L_{15} \, c(\theta_{14} - \theta_{15}) (m_{15} + m_{16}) + \dot{\theta}_{14} \dot{\theta}_{16} L_{14} L_{16} \, c(\theta_{14} - \theta_{16}) m_{16} \\ + \dot{\theta}_{15} \dot{\theta}_{16} L_{15} L_{16} \, c(\theta_{15} - \theta_{16}) m_{16} \end{array} \right)$$

EK-A. 3

$$\begin{aligned}
L_B = & \left(\left(\left(\begin{aligned} & \left(m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7 + m_8 + m_9 + m_{10} + m_{11} \right) L_1^2 \dot{\theta}_1^2 \\ & + m_{12} + m_{13} \end{aligned} \right) \right. \right. \\
& 0.5 \left(\begin{aligned} & + (m_{14} + m_{15} + m_{16}) L_a^2 \dot{\theta}_1^2 + (m_2 + m_3 + m_4) L_2^2 \dot{\theta}_2^2 + (m_3 + m_4) L_3^2 \dot{\theta}_3^2 + m_4 L_4^2 \dot{\theta}_4^2 \\ & + (m_5 + m_6 + m_7) L_5^2 \dot{\theta}_5^2 + (m_6 + m_7) L_6^2 \dot{\theta}_6^2 + m_7 L_7^2 \dot{\theta}_7^2 \\ & + (m_8 + m_9 + m_{10}) L_8^2 \dot{\theta}_8^2 + (m_9 + m_{10}) L_9^2 \dot{\theta}_9^2 + m_{10} L_{10}^2 \dot{\theta}_{10}^2 \\ & + (m_{11} + m_{12} + m_{13}) L_{11}^2 \dot{\theta}_{11}^2 + (m_{12} + m_{13}) L_{12}^2 \dot{\theta}_{12}^2 + m_{13} L_{13}^2 \dot{\theta}_{13}^2 \\ & + (m_{14} + m_{15} + m_{16}) L_{14}^2 \dot{\theta}_{14}^2 + (m_{15} + m_{16}) L_{15}^2 \dot{\theta}_{15}^2 + m_{16} L_{16}^2 \dot{\theta}_{16}^2 \end{aligned} \right) \right) \\
& + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 L_1 L_2 \text{c}(\theta_1 - \theta_2)(m_2 + m_3 + m_4) \\
& + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 L_1 L_3 \text{c}(\theta_1 - \theta_3)(m_3 + m_4) + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 L_1 L_4 \text{c}(\theta_1 - \theta_4) m_4 \\
& + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 L_1 L_5 \text{c}(\theta_1 - \theta_5)(m_5 + m_6 + m_7) + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_6 L_1 L_6 \text{c}(\theta_1 - \theta_6)(m_6 + m_7) \\
& + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_7 L_1 L_7 \text{c}(\theta_1 - \theta_7) m_7 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_8 L_1 L_8 \text{c}(\theta_1 - \theta_8)(m_8 + m_9 + m_{10}) \\
& + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_9 L_1 L_9 \text{c}(\theta_1 - \theta_9)(m_9 + m_{10}) + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{10} L_1 L_{10} \text{c}(\theta_1 - \theta_{10}) m_{10} \\
& + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{11} L_1 L_{11} \text{c}(\theta_1 - \theta_{11})(m_{11} + m_{12} + m_{13}) + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{12} L_1 L_{12} \text{c}(\theta_1 - \theta_{12})(m_{12} + m_{13}) \\
& + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{13} L_1 L_{13} \text{c}(\theta_1 - \theta_{13}) m_{13} \\
& + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{14} L_a L_{14} \text{c}(\theta_1 - \theta_{14})(m_{14} + m_{15} + m_{16}) + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{15} L_a L_{15} \text{c}(\theta_1 - \theta_{15})(m_{15} + m_{16}) \\
& + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{16} L_a L_{16} \text{c}(\theta_1 - \theta_{16}) m_{16} \\
& + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 L_2 L_3 \text{c}(\theta_2 - \theta_3)(m_3 + m_4) + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 L_2 L_4 \text{c}(\theta_2 - \theta_4) m_4 \\
& + \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 L_3 L_4 \text{c}(\theta_3 - \theta_4) m_4 + \dot{\theta}_5 \dot{\theta}_6 L_5 L_6 \text{c}(\theta_5 - \theta_6)(m_6 + m_7) \\
& + \dot{\theta}_5 \dot{\theta}_7 L_5 L_7 \text{c}(\theta_5 - \theta_7) m_7 + \dot{\theta}_6 \dot{\theta}_7 L_6 L_7 \text{c}(\theta_6 - \theta_7) m_7 \\
& + \dot{\theta}_8 \dot{\theta}_9 L_8 L_9 \text{c}(\theta_8 - \theta_9)(m_9 + m_{10}) + \dot{\theta}_8 \dot{\theta}_{10} L_8 L_{10} \text{c}(\theta_8 - \theta_{10}) m_{10} \\
& + \dot{\theta}_9 \dot{\theta}_{10} L_9 L_{10} \text{c}(\theta_9 - \theta_{10}) m_{10} + \dot{\theta}_{11} \dot{\theta}_{12} L_{11} L_{12} \text{c}(\theta_{11} - \theta_{12})(m_{12} + m_{13}) \\
& + \dot{\theta}_{11} \dot{\theta}_{13} L_{11} L_{13} \text{c}(\theta_{11} - \theta_{13}) m_{13} + \dot{\theta}_{12} \dot{\theta}_{13} L_{12} L_{13} \text{c}(\theta_{12} - \theta_{13}) m_{13} \\
& + \dot{\theta}_{14} \dot{\theta}_{15} L_{14} L_{15} \text{c}(\theta_{14} - \theta_{15})(m_{15} + m_{16}) + \dot{\theta}_{14} \dot{\theta}_{16} L_{14} L_{16} \text{c}(\theta_{14} - \theta_{16}) m_{16} \\
& + \dot{\theta}_{15} \dot{\theta}_{16} L_{15} L_{16} \text{c}(\theta_{15} - \theta_{16}) m_{16} \\
& - \left(\begin{aligned} & (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) g L_1 \text{c} \theta_1 + (m_2 + m_3 + m_4) g L_2 \text{c} \theta_2 \\ & + (m_3 + m_4) g L_3 \text{c} \theta_3 + m_4 g L_4 \text{c} \theta_4 \\ & + (m_5 + m_6 + m_7) g L_5 \text{c} \theta_5 + (m_6 + m_7) g L_6 \text{c} \theta_6 + m_7 g L_7 \text{c} \theta_7 \\ & + (m_8 + m_9 + m_{10}) g L_8 \text{c} \theta_8 + (m_9 + m_{10}) g L_9 \text{c} \theta_9 + m_{10} g L_{10} \text{c} \theta_{10} \\ & + (m_{11} + m_{12} + m_{13}) g L_{11} \text{c} \theta_{11} + (m_{12} + m_{13}) g L_{12} \text{c} \theta_{12} + m_{13} g L_{13} \text{c} \theta_{13} \\ & + (m_{14} + m_{15} + m_{16}) g L_a \text{c} \theta_1 + (m_{14} + m_{15} + m_{16}) g L_{14} \text{c} \theta_{14} \\ & + (m_{15} + m_{16}) g L_{15} \text{c} \theta_{15} + m_{16} g L_{16} \text{c} \theta_{16} \end{aligned} \right) \right)
\end{aligned}$$

EK-A. 4

$$\frac{\partial L_B}{\partial \dot{\theta}_1} = \left(\begin{array}{l} -\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 L_1 L_2 s(\theta_1 - \theta_2)(m_2 + m_3 + m_4) - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 L_1 L_3 s(\theta_1 - \theta_3)(m_3 + m_4) \\ -\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 L_1 L_4 s(\theta_1 - \theta_4)m_4 \\ -\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 L_1 L_5 s(\theta_1 - \theta_5)(m_5 + m_6 + m_7) - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_6 L_1 L_6 s(\theta_1 - \theta_6)(m_6 + m_7) \\ -\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_7 L_1 L_7 s(\theta_1 - \theta_7)m_7 \\ -\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_8 L_1 L_8 s(\theta_1 - \theta_8)(m_8 + m_9 + m_{10}) - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_9 L_1 L_9 s(\theta_1 - \theta_9)(m_9 + m_{10}) \\ -\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{10} L_1 L_{10} s(\theta_1 - \theta_{10})m_{10} \\ -\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{11} L_1 L_{11} s(\theta_1 - \theta_{11})(m_{11} + m_{12} + m_{13}) \\ -\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{12} L_1 L_{12} s(\theta_1 - \theta_{12})(m_{12} + m_{13}) - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{13} L_1 L_{13} s(\theta_1 - \theta_{13})m_4 \\ -\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{14} L_a L_{14} s(\theta_1 - \theta_{14})(m_{14} + m_{15} + m_{16}) \\ -\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{15} L_a L_{15} s(\theta_1 - \theta_{15})(m_{15} + m_{16}) - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{16} L_{01} L_{16} s(\theta_1 - \theta_{16})m_{16} \\ + g L_1 s \theta_1 (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7 + m_8 + m_9 + m_{10} \\ + m_{11} + m_{12} + m_{13}) + g L_a s \theta_1 (m_{14} + m_{15} + m_{16}) \end{array} \right)$$

EK-A. 5

$$\frac{\partial L_B}{\partial \dot{\theta}_1} = \left(\begin{array}{l} L_1^2 \dot{\theta}_1 (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7 + m_8 + m_9 + m_{10} + m_{11} + m_{12} + m_{13}) \\ + L_{01}^2 \dot{\theta}_1 (m_{14} + m_{15} + m_{16}) \\ + \dot{\theta}_2 L_1 L_2 c(\theta_1 - \theta_2)(m_2 + m_3 + m_4) \\ + \dot{\theta}_3 L_1 L_3 c(\theta_1 - \theta_3)(m_3 + m_4) + \dot{\theta}_4 L_1 L_4 c(\theta_1 - \theta_4)m_4 \\ + \dot{\theta}_5 L_1 L_5 c(\theta_1 - \theta_5)(m_5 + m_6 + m_7) + \dot{\theta}_6 L_1 L_6 c(\theta_1 - \theta_6)(m_6 + m_7) \\ + \dot{\theta}_7 L_1 L_7 c(\theta_1 - \theta_7)m_7 + \dot{\theta}_8 L_1 L_8 c(\theta_1 - \theta_8)(m_8 + m_9 + m_{10}) \\ + \dot{\theta}_9 L_1 L_9 c(\theta_1 - \theta_9)(m_9 + m_{10}) + \dot{\theta}_{10} L_1 L_{10} c(\theta_1 - \theta_{10})m_{10} \\ + \dot{\theta}_{11} L_1 L_{11} c(\theta_1 - \theta_{11})(m_{11} + m_{12} + m_{13}) + \dot{\theta}_{12} L_1 L_{12} c(\theta_1 - \theta_{12})(m_{12} + m_{13}) \\ + \dot{\theta}_{13} L_1 L_{13} c(\theta_1 - \theta_{13})m_{13} \\ + \dot{\theta}_{14} L_1 L_{14} c(\theta_1 - \theta_{14})(m_{14} + m_{15} + m_{16}) + \dot{\theta}_{15} L_1 L_{15} c(\theta_1 - \theta_{15})(m_{15} + m_{16}) \\ + \dot{\theta}_{16} L_1 L_{16} c(\theta_1 - \theta_{16})m_{16} \end{array} \right)$$

EK-A. 6

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_B}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \begin{pmatrix} \text{zamanabağıltümdeğişkenlerin_t ürevialınır...} \\ \text{budeğişkenlerise} \rightarrow \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3, \dot{\theta}_4, \dot{\theta}_5, \dot{\theta}_6, \dot{\theta}_7, \dot{\theta}_8 \\ \dot{\theta}_9, \dot{\theta}_{10}, \dot{\theta}_{11}, \dot{\theta}_{12}, \dot{\theta}_{13}, \dot{\theta}_{14}, \dot{\theta}_{15}, \dot{\theta}_{16} \\ \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8, \\ \theta_9, \theta_{10}, \theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{14}, \theta_{15}, \theta_{16} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_B}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \begin{pmatrix} L_1^2 \ddot{\theta}_1 (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7 + m_8 + m_9 + m_{10} + m_{11} + m_{12} + m_{13}) \\ + L_{01}^2 \ddot{\theta}_1 (m_{14} + m_{15} + m_{16}) \\ + \ddot{\theta}_2 L_1 L_2 c(\theta_1 - \theta_2) (m_2 + m_3 + m_4) + \ddot{\theta}_3 L_1 L_3 c(\theta_1 - \theta_3) (m_3 + m_4) \\ + \ddot{\theta}_4 L_1 L_4 c(\theta_1 - \theta_4) m_4 + \ddot{\theta}_5 L_1 L_5 c(\theta_1 - \theta_5) (m_5 + m_6 + m_7) \\ + \ddot{\theta}_6 L_1 L_6 c(\theta_1 - \theta_6) (m_6 + m_7) + \ddot{\theta}_7 L_1 L_7 c(\theta_1 - \theta_7) m_7 \\ + \ddot{\theta}_8 L_1 L_8 c(\theta_1 - \theta_8) (m_8 + m_9 + m_{10}) + \ddot{\theta}_9 L_1 L_9 c(\theta_1 - \theta_9) (m_9 + m_{10}) \\ + \ddot{\theta}_{10} L_1 L_{10} c(\theta_1 - \theta_{10}) m_{10} + \ddot{\theta}_{11} L_1 L_{11} c(\theta_1 - \theta_{11}) (m_{11} + m_{12} + m_{13}) \\ + \ddot{\theta}_{12} L_1 L_{12} c(\theta_1 - \theta_{12}) (m_{12} + m_{13}) + \ddot{\theta}_{13} L_1 L_{13} c(\theta_1 - \theta_{13}) m_{13} \\ + \ddot{\theta}_{14} L_1 L_{14} c(\theta_1 - \theta_{14}) (m_{14} + m_{15} + m_{16}) + \ddot{\theta}_{15} L_1 L_{15} c(\theta_1 - \theta_{15}) (m_{15} + m_{16}) \\ + \ddot{\theta}_{16} L_1 L_{16} c(\theta_1 - \theta_{16}) m_{16} \\ - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 L_1 L_2 s(\theta_1 - \theta_2) (m_2 + m_3 + m_4) - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 L_1 L_3 s(\theta_1 - \theta_3) (m_3 + m_4) \\ - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 L_1 L_4 s(\theta_1 - \theta_4) m_4 - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 L_1 L_5 s(\theta_1 - \theta_5) (m_5 + m_6 + m_7) \\ - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_6 L_1 L_6 s(\theta_1 - \theta_6) (m_6 + m_7) - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_7 L_1 L_7 s(\theta_1 - \theta_7) m_7 \\ - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_8 L_1 L_8 s(\theta_1 - \theta_8) (m_8 + m_9 + m_{10}) - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_9 L_1 L_9 s(\theta_1 - \theta_9) (m_9 + m_{10}) \\ - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{10} L_1 L_{10} s(\theta_1 - \theta_{10}) m_{10} - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{11} L_1 L_{11} s(\theta_1 - \theta_{11}) (m_{11} + m_{12} + m_{13}) \\ - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{12} L_1 L_{12} s(\theta_1 - \theta_{12}) (m_{12} + m_{13}) - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{13} L_1 L_{13} s(\theta_1 - \theta_{13}) m_{13} \\ - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{14} L_{01} L_{12} s(\theta_1 - \theta_{14}) (m_{14} + m_{15} + m_{16}) - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{15} L_1 L_{15} s(\theta_1 - \theta_{15}) (m_{15} + m_{16}) \\ - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{16} L_1 L_{16} s(\theta_1 - \theta_{16}) m_{16} \\ + \dot{\theta}_2^2 L_1 L_2 s(\theta_1 - \theta_2) (m_2 + m_3 + m_4) + \dot{\theta}_3^2 L_1 L_3 s(\theta_1 - \theta_3) (m_3 + m_4) \\ + \dot{\theta}_4^2 L_1 L_4 s(\theta_1 - \theta_4) m_4 + \dot{\theta}_5^2 L_1 L_5 s(\theta_1 - \theta_5) (m_5 + m_6 + m_7) \\ + \dot{\theta}_6^2 L_1 L_6 s(\theta_1 - \theta_6) (m_6 + m_7) + \dot{\theta}_7^2 L_1 L_7 s(\theta_1 - \theta_7) m_7 \\ + \dot{\theta}_8^2 L_1 L_8 s(\theta_1 - \theta_8) (m_8 + m_9 + m_{10}) + \dot{\theta}_9^2 L_1 L_9 s(\theta_1 - \theta_9) (m_9 + m_{10}) \\ + \dot{\theta}_{10}^2 L_1 L_{10} s(\theta_1 - \theta_{10}) m_{10} + \dot{\theta}_{11}^2 L_1 L_{11} s(\theta_1 - \theta_{11}) (m_{11} + m_{12} + m_{13}) \\ + \dot{\theta}_{12}^2 L_1 L_{12} s(\theta_1 - \theta_{12}) (m_{12} + m_{13}) + \dot{\theta}_{13}^2 L_1 L_{13} s(\theta_1 - \theta_{13}) m_{13} \\ + \dot{\theta}_{14}^2 L_{01} L_{12} s(\theta_1 - \theta_{14}) (m_{14} + m_{15} + m_{16}) + \dot{\theta}_{15}^2 L_1 L_{15} s(\theta_1 - \theta_{15}) (m_{15} + m_{16}) \\ + \dot{\theta}_{16}^2 L_1 L_{16} s(\theta_1 - \theta_{16}) m_{16} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4, \dot{\theta}_5 \\ \dot{\theta}_6, \dot{\theta}_7 \\ \dot{\theta}_8, \dot{\theta}_9 \\ \dot{\theta}_{10}, \dot{\theta}_{11} \\ \dot{\theta}_{12}, \dot{\theta}_{13} \\ \dot{\theta}_{14}, \dot{\theta}_{15} \\ \dot{\theta}_{16} \\ \theta_1 \\ \theta_2, \theta_3 \\ \theta_4, \theta_5 \\ \theta_6, \theta_7 \\ \theta_8, \theta_9 \\ \theta_{10}, \theta_{11} \\ \theta_{12}, \theta_{13} \\ \theta_{14}, \theta_{15} \\ \theta_{16} \end{bmatrix}$$

EK-A. 7

$$\begin{pmatrix}
L_1^2 \ddot{\theta} (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7 + m_8 + m_9 + m_{10} + m_{11} + m_{12} + m_{13}) \\
+ L_{01}^2 \ddot{\theta}_1 (m_{14} + m_{15} + m_{16}) \\
+ \ddot{\theta}_2 L_1 L_2 c(\theta_1 - \theta_2)(m_2 + m_3 + m_4) + \ddot{\theta}_3 L_1 L_3 c(\theta_1 - \theta_3)(m_3 + m_4) \\
+ \ddot{\theta}_4 L_1 L_4 c(\theta_1 - \theta_4)m_4 + \ddot{\theta}_5 L_1 L_5 c(\theta_1 - \theta_5)(m_5 + m_6 + m_7) \\
+ \ddot{\theta}_6 L_1 L_6 c(\theta_1 - \theta_6)(m_6 + m_7) + \ddot{\theta}_7 L_1 L_7 c(\theta_1 - \theta_7)m_7 \\
+ \ddot{\theta}_8 L_1 L_8 c(\theta_1 - \theta_8)(m_8 + m_9 + m_{10}) + \ddot{\theta}_9 L_1 L_9 c(\theta_1 - \theta_9)(m_9 + m_{10}) \\
+ \ddot{\theta}_{10} L_1 L_{10} c(\theta_1 - \theta_{10})m_{10} + \ddot{\theta}_{11} L_1 L_{11} c(\theta_1 - \theta_{11})(m_{11} + m_{12} + m_{13}) \\
+ \ddot{\theta}_{12} L_1 L_{12} c(\theta_1 - \theta_{12})(m_{12} + m_{13}) + \ddot{\theta}_{13} L_1 L_{13} c(\theta_1 - \theta_{13})m_{13} \\
+ \ddot{\theta}_{14} L_1 L_{14} c(\theta_1 - \theta_{14})(m_{14} + m_{15} + m_{16}) + \ddot{\theta}_{15} L_1 L_{15} c(\theta_1 - \theta_{15})(m_{15} + m_{16}) \\
+ \ddot{\theta}_{16} L_1 L_{16} c(\theta_1 - \theta_{16})m_{16} \\
- \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 L_1 L_2 s(\theta_1 - \theta_2)(m_2 + m_3 + m_4) - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 L_1 L_3 s(\theta_1 - \theta_3)(m_3 + m_4) \\
- \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 L_1 L_4 s(\theta_1 - \theta_4)m_4 - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 L_1 L_5 s(\theta_1 - \theta_5)(m_5 + m_6 + m_7) \\
- \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_6 L_1 L_6 s(\theta_1 - \theta_6)(m_6 + m_7) - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_7 L_1 L_7 s(\theta_1 - \theta_7)m_7 \\
- \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_8 L_1 L_8 s(\theta_1 - \theta_8)(m_8 + m_9 + m_{10}) - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_9 L_1 L_9 s(\theta_1 - \theta_9)(m_9 + m_{10}) \\
- \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{10} L_1 L_{10} s(\theta_1 - \theta_{10})m_{10} - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{11} L_1 L_{11} s(\theta_1 - \theta_{11})(m_{11} + m_{12} + m_{13}) \\
- \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{12} L_1 L_{12} s(\theta_1 - \theta_{12})(m_{12} + m_{13}) - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{13} L_1 L_{13} s(\theta_1 - \theta_{13})m_{13} \\
- \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{14} L_1 L_{14} s(\theta_1 - \theta_{14})(m_{14} + m_{15} + m_{16}) - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{15} L_1 L_{15} s(\theta_1 - \theta_{15})(m_{15} + m_{16}) \\
- \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{16} L_1 L_{16} s(\theta_1 - \theta_{16})m_{16} \\
+ \dot{\theta}_2^2 L_1 L_2 s(\theta_1 - \theta_2)(m_2 + m_3 + m_4) + \dot{\theta}_3^2 L_1 L_3 s(\theta_1 - \theta_3)(m_3 + m_4) \\
+ \dot{\theta}_4^2 L_1 L_4 s(\theta_1 - \theta_4)m_4 + \dot{\theta}_5^2 L_1 L_5 s(\theta_1 - \theta_5)(m_5 + m_6 + m_7) \\
+ \dot{\theta}_6^2 L_1 L_6 s(\theta_1 - \theta_6)(m_6 + m_7) + \dot{\theta}_7^2 L_1 L_7 s(\theta_1 - \theta_7)m_7 \\
+ \dot{\theta}_8^2 L_1 L_8 s(\theta_1 - \theta_8)(m_8 + m_9 + m_{10}) + \dot{\theta}_9^2 L_1 L_9 s(\theta_1 - \theta_9)(m_9 + m_{10}) \\
+ \dot{\theta}_{10}^2 L_1 L_{10} s(\theta_1 - \theta_{10})m_{10} + \dot{\theta}_{11}^2 L_1 L_{11} s(\theta_1 - \theta_{11})(m_{11} + m_{12} + m_{13}) \\
+ \dot{\theta}_{12}^2 L_1 L_{12} s(\theta_1 - \theta_{12})(m_{12} + m_{13}) + \dot{\theta}_{13}^2 L_1 L_{13} s(\theta_1 - \theta_{13})m_{13} \\
+ \dot{\theta}_{14}^2 L_1 L_{14} s(\theta_1 - \theta_{14})(m_{14} + m_{15} + m_{16}) + \dot{\theta}_{15}^2 L_1 L_{15} s(\theta_1 - \theta_{15})(m_{15} + m_{16}) \\
+ \dot{\theta}_{16}^2 L_1 L_{16} s(\theta_1 - \theta_{16})m_{16}
\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}
-\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 L_1 L_2 s(\theta_1 - \theta_2)(m_2 + m_3 + m_4) \\
-\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 L_1 L_3 s(\theta_1 - \theta_3)(m_3 + m_4) \\
-\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 L_1 L_4 s(\theta_1 - \theta_4)m_4 \\
-\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 L_1 L_5 s(\theta_1 - \theta_5)(m_5 + m_6 + m_7) \\
-\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_6 L_1 L_6 s(\theta_1 - \theta_6)(m_6 + m_7) \\
-\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_7 L_1 L_7 s(\theta_1 - \theta_7)m_7 \\
-\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_8 L_1 L_8 s(\theta_1 - \theta_8)(m_8 + m_9 + m_{10}) \\
-\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_9 L_1 L_9 s(\theta_1 - \theta_9)(m_9 + m_{10}) \\
-\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{10} L_1 L_{10} s(\theta_1 - \theta_{10})m_{10} \\
-\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{11} L_1 L_{11} s(\theta_1 - \theta_{11})(m_{11} + m_{12} + m_{13}) \\
-\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{12} L_1 L_{12} s(\theta_1 - \theta_{12})(m_{12} + m_{13}) \\
-\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{13} L_1 L_{13} s(\theta_1 - \theta_{13})m_{13} \\
-\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{14} L_1 L_{14} s(\theta_1 - \theta_{14})(m_{14} + m_{15} + m_{16}) \\
-\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{15} L_1 L_{15} s(\theta_1 - \theta_{15})(m_{15} + m_{16}) \\
-\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{16} L_1 L_{16} s(\theta_1 - \theta_{16})m_{16} \\
+ g L_1 s \theta_1 (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7 \\
+ m_8 + m_9 + m_{10} + m_{11} + m_{12} + m_{13}) \\
+ g L_a s \theta_1 (m_{14} + m_{15} + m_{16})
\end{pmatrix} = \tau_1$$

EK-A. 8

$$\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 = \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

EK-A. 9

$$\frac{\partial L_I}{\partial \theta_2} = \begin{pmatrix}
\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 L_1 L_2 s(\theta_1 - \theta_2)(m_2 + m_3 + m_4) - \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 L_2 L_3 s(\theta_2 - \theta_3)(m_3 + m_4) \\
-\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 L_2 L_4 s(\theta_2 - \theta_4)m_4 + g L_1 s \theta_2 (m_2 + m_3 + m_4)
\end{pmatrix}$$

EK-A. 10

$$\frac{\partial L_I}{\partial \dot{\theta}_2} = \begin{pmatrix}
(m_2 + m_3 + m_4) L_2^2 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1 L_1 L_2 c(\theta_1 - \theta_2)(m_2 + m_3 + m_4) \\
+ \dot{\theta}_3 L_2 L_3 c(\theta_2 - \theta_3)(m_3 + m_4) + \dot{\theta}_4 L_2 L_4 c(\theta_2 - \theta_4)m_4
\end{pmatrix}$$

EK-A. 11

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_I}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = \begin{pmatrix} \text{zamanabağıltümdeğişkenlerin_türevialınır...} \\ \text{budeğişkenlerise} \rightarrow \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3, \dot{\theta}_4, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_I}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 L_1 L_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)(m_2 + m_3 + m_4) \\ \ddot{\theta}_2 L_2^2 (m_2 + m_3 + m_4) \\ \ddot{\theta}_3 L_2 L_3 \cos(\theta_2 - \theta_3)(m_3 + m_4) \\ \ddot{\theta}_4 L_2 L_4 \cos(\theta_2 - \theta_4)m_4 \\ -\dot{\theta}_1^2 L_1 L_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)(m_2 + m_3 + m_4) \\ +\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 L_1 L_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)(m_2 + m_3 + m_4) \\ -\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 L_1 L_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)(m_3 + m_4) \\ -\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 L_2 L_4 \sin(\theta_2 - \theta_4)m_4 \\ +\dot{\theta}_3^2 L_2 L_3 \sin(\theta_2 - \theta_3)(m_3 + m_4) \\ \dot{\theta}_4^2 L_2 L_4 \sin(\theta_2 - \theta_4)m_4 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_I}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 L_1 L_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)(m_2 + m_3 + m_4) + \ddot{\theta}_2 L_2^2 (m_2 + m_3 + m_4) \\ +\ddot{\theta}_3 L_2 L_3 \cos(\theta_2 - \theta_3)(m_3 + m_4) + \ddot{\theta}_4 L_2 L_4 \cos(\theta_2 - \theta_4)m_4 \\ -\dot{\theta}_1^2 L_1 L_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)(m_2 + m_3 + m_4) \\ +\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 L_1 L_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)(m_2 + m_3 + m_4) \\ -\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 L_1 L_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)(m_3 + m_4) - \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 L_2 L_4 \sin(\theta_2 - \theta_4)m_4 \\ +\dot{\theta}_3^2 L_2 L_3 \sin(\theta_2 - \theta_3)(m_3 + m_4) + \dot{\theta}_4^2 L_2 L_4 \sin(\theta_2 - \theta_4)m_4 \end{pmatrix}$$

EK-A. 12

$$\left(\begin{array}{l}
\ddot{\theta}_1 L_1 L_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)(m_2 + m_3 + m_4) \\
+\ddot{\theta}_2 L_2^2 (m_2 + m_3 + m_4) \\
+\ddot{\theta}_3 L_2 L_3 \cos(\theta_2 - \theta_3)(m_3 + m_4) \\
+\ddot{\theta}_4 L_2 L_4 \cos(\theta_2 - \theta_4)m_4 \\
-\dot{\theta}_1^2 L_1 L_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)(m_2 + m_3 + m_4) \\
+\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 L_1 L_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)(m_2 + m_3 + m_4) \\
-\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 L_2 L_3 \sin(\theta_2 - \theta_3)(m_3 + m_4) \\
-\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 L_2 L_4 \sin(\theta_2 - \theta_4)m_4 \\
+\dot{\theta}_3^2 L_2 L_3 \sin(\theta_2 - \theta_3)(m_3 + m_4) \\
+\dot{\theta}_4^2 L_2 L_4 \sin(\theta_2 - \theta_4)m_4
\end{array} \right) - \left(\begin{array}{l}
\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 L_1 L_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)(m_2 + m_3 + m_4) \\
-\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 L_2 L_3 \sin(\theta_2 - \theta_3)(m_3 + m_4) \\
-\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 L_2 L_4 \sin(\theta_2 - \theta_4)m_4 \\
+gL_1 \sin \theta_2 (m_2 + m_3 + m_4)
\end{array} \right) = \tau_2$$

EK-A. 13

$$\frac{\partial L_I}{\partial \theta_3} = \left(\begin{array}{l}
\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 L_1 L_3 \sin(\theta_1 - \theta_3)(m_3 + m_4) + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 L_2 L_3 \sin(\theta_2 - \theta_3)(m_3 + m_4) \\
-\dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 L_3 L_4 \sin(\theta_3 - \theta_4)m_4 + gL_3 \sin \theta_3 (m_3 + m_4)
\end{array} \right)$$

EK-A. 14

$$\frac{\partial L_I}{\partial \dot{\theta}_3} = \left(\begin{array}{l}
(m_3 + m_4)L_3^2 \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 L_1 L_3 \cos(\theta_1 - \theta_3)(m_3 + m_4) \\
+\dot{\theta}_2 L_2 L_3 \cos(\theta_2 - \theta_3)(m_3 + m_4) + \dot{\theta}_4 L_3 L_4 \cos(\theta_3 - \theta_4)m_4
\end{array} \right)$$

EK-A. 15

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_I}{\partial \dot{\theta}_3} \right) = \left(\begin{array}{l}
\text{zamanabağıltı tüm değişkenlerin türevi alınır...} \\
\text{budeğişkenler ise } \rightarrow \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3, \dot{\theta}_4, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4
\end{array} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_I}{\partial \dot{\theta}_3} \right) = \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 L_1 L_3 \csc(\theta_1 - \theta_3)(m_3 + m_4) \\ \ddot{\theta}_2 L_2 L_3 \csc(\theta_2 - \theta_3)(m_3 + m_4) \\ \ddot{\theta}_3 L_3^2 (m_3 + m_4) \\ + \ddot{\theta}_4 L_3 L_4 \csc(\theta_3 - \theta_4)m_4 \\ - \dot{\theta}_1^2 L_1 L_3 \sec(\theta_1 - \theta_3)(m_3 + m_4) \\ - \dot{\theta}_2^2 L_2 L_3 \sec(\theta_2 - \theta_3)(m_3 + m_4) \\ + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 L_1 L_3 \sec(\theta_1 - \theta_3)(m_3 + m_4) \\ + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 L_2 L_3 \sec(\theta_2 - \theta_3)m_4 \\ - \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 L_3 L_4 \sec(\theta_3 - \theta_4)m_4 \\ + \dot{\theta}_4^2 L_3 L_4 \sec(\theta_3 - \theta_4)m_4 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix}$$

EK-A. 16

$$\begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 L_1 L_3 \csc(\theta_1 - \theta_3)(m_3 + m_4) \\ \ddot{\theta}_2 L_2 L_3 \csc(\theta_2 - \theta_3)(m_3 + m_4) \\ \ddot{\theta}_3 L_3^2 (m_3 + m_4) \\ + \ddot{\theta}_4 L_3 L_4 \csc(\theta_3 - \theta_4)m_4 \\ - \dot{\theta}_1^2 L_1 L_3 \sec(\theta_1 - \theta_3)(m_3 + m_4) \\ - \dot{\theta}_2^2 L_2 L_3 \sec(\theta_2 - \theta_3)(m_3 + m_4) \\ + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 L_1 L_3 \sec(\theta_1 - \theta_3)(m_3 + m_4) \\ + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 L_2 L_3 \sec(\theta_2 - \theta_3)m_4 \\ - \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 L_3 L_4 \sec(\theta_3 - \theta_4)m_4 \\ + \dot{\theta}_4^2 L_3 L_4 \sec(\theta_3 - \theta_4)m_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 L_1 L_3 \sec(\theta_1 - \theta_3)(m_3 + m_4) \\ + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 L_2 L_3 \sec(\theta_2 - \theta_3)(m_3 + m_4) \\ - \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 L_3 L_4 \sec(\theta_3 - \theta_4)m_4 \\ + g L_3 \sec \theta_3 (m_3 + m_4) \end{pmatrix} = \tau_3$$

EK-A. 17

$$\frac{\partial L_I}{\partial \theta_4} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 L_1 L_4 \sec(\theta_1 - \theta_4)m_4 + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 L_2 L_4 \sec(\theta_2 - \theta_4)m_4 \\ + \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 L_3 L_4 \sec(\theta_3 - \theta_4)m_4 + g L_4 \sec \theta_4 m_4 \end{pmatrix}$$

EK-A. 18

$$\frac{\partial L_I}{\partial \dot{\theta}_4} = \begin{pmatrix} m_4 L_4^2 \dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_1 L_1 L_4 \csc(\theta_1 - \theta_4)m_4 \\ + \dot{\theta}_2 L_2 L_4 \csc(\theta_2 - \theta_4)m_4 + \dot{\theta}_3 L_3 L_4 \csc(\theta_3 - \theta_4)m_4 \end{pmatrix}$$

EK-A. 19

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_I}{\partial \dot{\theta}_4} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{zamanabağıltümdeğişkenlerin_türevialınır...} \\ \text{budeğişkenlerise} \rightarrow \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3, \dot{\theta}_4, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4 \end{array} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_I}{\partial \dot{\theta}_4} \right) = \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 L_1 L_4 \cos(\theta_1 - \theta_4) m_4 \\ \ddot{\theta}_2 L_2 L_4 \cos(\theta_2 - \theta_4) m_4 \\ \ddot{\theta}_3 L_3 L_4 \cos(\theta_3 - \theta_4) m_4 \\ \ddot{\theta}_4 L_4^2 m_4 \\ -\dot{\theta}_1^2 L_1 L_4 \sin(\theta_1 - \theta_4) m_4 \\ -\dot{\theta}_2^2 L_2 L_4 \sin(\theta_2 - \theta_4) m_4 \\ -\dot{\theta}_3^2 L_3 L_4 \sin(\theta_3 - \theta_4) m_4 \\ +\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 L_1 L_4 \sin(\theta_1 - \theta_4) m_4 \\ +\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 L_2 L_4 \sin(\theta_2 - \theta_4) m_4 \\ -\dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 L_3 L_4 \sin(\theta_3 - \theta_4) m_4 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix}$$

EK-A. 20

$$\begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 L_1 L_4 \cos(\theta_1 - \theta_4) m_4 + \ddot{\theta}_2 L_2 L_4 \cos(\theta_2 - \theta_4) m_4 \\ + \ddot{\theta}_3 L_3 L_4 \cos(\theta_3 - \theta_4) m_4 + \ddot{\theta}_4 L_4^2 m_4 \\ - \dot{\theta}_1^2 L_1 L_4 \sin(\theta_1 - \theta_4) m_4 - \dot{\theta}_2^2 L_2 L_4 \sin(\theta_2 - \theta_4) m_4 \\ - \dot{\theta}_3^2 L_3 L_4 \sin(\theta_3 - \theta_4) m_4 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 L_1 L_4 \sin(\theta_1 - \theta_4) m_4 \\ + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 L_2 L_4 \sin(\theta_2 - \theta_4) m_4 - \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 L_3 L_4 \sin(\theta_3 - \theta_4) m_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 L_1 L_4 \sin(\theta_1 - \theta_4) m_4 + \\ \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 L_2 L_4 \sin(\theta_2 - \theta_4) m_4 \\ + \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 L_3 L_4 \sin(\theta_3 - \theta_4) m_4 \\ + g L_4 \sin \theta_4 m_4 \end{pmatrix} = \tau_4$$

EK-B (3B Hareket Denklemi)

EK-B. 1

$$\begin{aligned}\dot{x}_1^2 &= L_1^2 \dot{\varphi}_1^2 s^2 \varphi_1 s^2 \theta_1 + L_1^2 \dot{\theta}_1^2 c^2 \varphi_1 c^2 \theta_1 - 2L_1^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_1 \\ \dot{y}_1^2 &= L_1^2 \dot{\varphi}_1^2 c^2 \theta_1 c^2 \varphi_1 + L_1^2 \dot{\theta}_1^2 s^2 \theta_1 s^2 \varphi_1 - 2L_1^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_1 \\ \dot{z}_1^2 &= L_1^2 \dot{\varphi}_1^2 s^2 \varphi_1 c^2 \theta_1 + L_1^2 \dot{\theta}_1^2 c^2 \varphi_1 s^2 \theta_1 + 2L_1^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_1\end{aligned}$$

EK-B. 2

$$\frac{\partial L_W}{\partial \theta_1} = \left(\begin{aligned} &\frac{\partial L_{WTV1}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial L_{ITV2}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial L_{ITV3}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial L_{ITV4}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial L_{MTV5}}{\partial \theta_1} \\ &+ \frac{\partial L_{MTV6}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial L_{MTV7}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial L_{RTV8}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial L_{RTV9}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial L_{RTV10}}{\partial \theta_1} \\ &+ \frac{\partial L_{LTV11}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial L_{LTV12}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial L_{LTV13}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial L_{TTV14}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial L_{TTV15}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial L_{TTV16}}{\partial \theta_1} \end{aligned} \right)$$

$$\frac{\partial L_{WTV1}}{\partial \theta_1} = \left(\begin{aligned} &m_1 \left(\begin{aligned} &-\dot{\varphi}_1^2 L_1^2 (c \theta_1 s \theta_1 c^2 \varphi_1) - \dot{\theta}_1^2 L_1^2 (c^2 \varphi_1 c \theta_1 s \theta_1 + s \theta_1 c \theta_1) \\ &-\dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 L_1^2 c \varphi_1 s \varphi_1 (c^2 \theta_1 - s^2 \theta_1) \end{aligned} \right) \\ &+ m_1 g L_1 c \varphi_1 s \theta_1 \end{aligned} \right)$$

$$\frac{\partial L_{ITV2}}{\partial \theta_1} = \left(\begin{aligned} &m_2 \left(\begin{aligned} &\dot{\varphi}_1^2 \left(-L_1^2 (c \theta_1 s \theta_1 c^2 \varphi_1) + L_1 L_2 (2s^2 \varphi_1 c \theta_1 s \theta_2 - s \theta_1 c \theta_2) \right) \\ &+ \dot{\theta}_1^2 L_1^2 (s \theta_1 c \theta_1 s^2 \varphi_1) + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 \left(\begin{aligned} &L_1 L_2 s \varphi_1 s \theta_2 c \varphi_1 s \theta_1 \\ &+ L_1^2 s \varphi_1 c \varphi_1 (c^2 \theta_1 - s^2 \theta_1) \end{aligned} \right) \\ &-\dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 (L_1 L_2 s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_1 c \theta_2) + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 L_1 L_2 (-c^2 \varphi_1 s \theta_1 c \theta_2 + c \theta_1 s \theta_2) \end{aligned} \right) \\ &+ m_2 g (L_1 c \varphi_1 s \theta_1) \end{aligned} \right)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_{ITV3}}{\partial \theta_1} &= \left(\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} -\dot{\phi}_1^2 L_1^2 (c\theta_1 s\theta_1 c^2 \phi_1) + L_1 L_2 (s^2 \phi_1 c\theta_1 s\theta_2 - s\theta_1 c\theta_2) \\ + \dot{\phi}_1^2 L_1^2 (s\theta_1 c\theta_1 - c^2 \phi_1 c\theta_1 s\theta_1) \\ + \dot{\phi}_1 \dot{\theta}_1 \left(\begin{array}{l} -L_1^2 s\phi_1 c\phi_1 (c^2 \theta_1 - s^2 \theta_1) \\ + L_1 L_2 s\phi_1 s\theta_2 c\phi_1 s\theta_1 + L_1 L_3 s\phi_1 s\theta_3 c\phi_1 s\theta_1 \end{array} \right) \\ - \dot{\phi}_1 \dot{\theta}_2 (L_1 L_2 s\phi_1 c\theta_1 c\phi_1 c\theta_2) \\ - \dot{\phi}_1 \dot{\theta}_3 (L_1 L_3 s\phi_1 c\theta_1 c\phi_1 c\theta_3) \\ + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 L_1 L_2 (-c^2 \phi_1 c\theta_2 s\theta_1 + c\theta_1 s\theta_2) \\ + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 L_1 L_3 (-c^2 \phi_1 s\theta_1 c\theta_3 + c\theta_1 s\theta_3) \end{array} \right) \\ + m_3 g (L_1 c\phi_1 s\theta_1) \end{array} \right) \\
\frac{\partial L_{ITV4}}{\partial \theta_1} &= \left(\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} \dot{\phi}_1^2 (L_1^2 (s^2 \phi_1 s\theta_1 c\theta_1 - c\theta_1 s\theta_1)) - \dot{\phi}_1^2 L_1^2 (c^2 \phi_1 c\theta_1 s\theta_1 + s^2 \theta_1) \\ + \dot{\phi}_1 \dot{\theta}_1 \left(\begin{array}{l} -L_1^2 s\phi_1 c\phi_1 (c^2 \theta_1 - s^2 \theta_1) \\ + s\phi_1 c\phi_1 s\theta_1 (L_1 L_2 s\theta_2 + L_1 L_3 s\theta_3 + L_1 L_4 s\theta_4) \end{array} \right) \\ - \dot{\phi}_1 \dot{\theta}_2 s\phi_1 c\phi_1 c\theta_2 L_1 L_2 c\theta_1 - \dot{\phi}_1 \dot{\theta}_3 s\phi_1 c\phi_1 c\theta_3 L_1 L_3 c\theta_1 \\ - \dot{\phi}_1 \dot{\theta}_4 s\phi_1 c\phi_1 c\theta_4 L_1 L_4 s\theta_1 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (L_1 L_2 (-c^2 \phi_1 s\theta_1 c\theta_2 + c\theta_1 s\theta_2)) \\ + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 (L_1 L_3 (-c^2 \phi_1 s\theta_1 c\theta_3 + c\theta_1 s\theta_3)) + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 (L_1 L_4 (-c^2 \phi_1 s\theta_1 c\theta_4 + c\theta_1 s\theta_4)) \end{array} \right) \\ + m_4 g L_1 c\phi_1 s\theta_1 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial L_{MTV5}}{\partial \theta_1} = \left(\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} \dot{\phi}_1^2 \left(-L_1^2 (c\theta_1 s\theta_1 c^2 \varphi_1) \right. \right. \\ \left. \left. + L_1 L_2 (2s^2 \varphi_1 c\theta_1 s\theta_5 - s\theta_1 c\theta_5) \right) \right) + \dot{\theta}_1^2 L_1^2 (s\theta_1 c\theta_1 s^2 \varphi_1) \\ m_5 + \dot{\phi}_1 \dot{\theta}_1 \left(L_1 L_5 s\varphi_1 s\theta_5 c\varphi_1 s\theta_1 + L_1^2 s\varphi_1 c\varphi_1 (c^2 \theta_1 - s^2 \theta_1) \right) \\ - \dot{\phi}_1 \dot{\theta}_5 (L_1 L_5 s\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_1 c\theta_5) + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 L_1 L_5 (-c^2 \varphi_1 s\theta_1 c\theta_5 + c\theta_1 s\theta_5) \\ + m_2 g (L_1 c \varphi_1 s\theta_1) \end{array} \right) \end{array} \right)$$

$$\frac{\partial L_{MTV6}}{\partial \theta_1} = \left(\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} -\dot{\phi}_1^2 L_1^2 (c\theta_1 s\theta_1 c^2 \varphi_1) + L_1 L_5 (s^2 \varphi_1 c\theta_1 s\theta_5 - s\theta_1 c\theta_5) \\ + \dot{\theta}_1^2 L_1^2 (s\theta_1 c\theta_1 - c^2 \varphi_1 c\theta_1 s\theta_1) \\ + \dot{\phi}_1 \dot{\theta}_1 \left(-L_1^2 s\varphi_1 c\varphi_1 (c^2 \theta_1 - s^2 \theta_1) \right. \right. \\ \left. \left. + L_1 L_5 s\varphi_1 s\theta_5 c\varphi_1 s\theta_1 + L_1 L_6 s\varphi_1 s\theta_6 c\varphi_1 s\theta_1 \right) \right) \\ - \dot{\phi}_1 \dot{\theta}_2 (L_1 L_5 s\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_1 c\theta_5) - \dot{\phi}_1 \dot{\theta}_6 (L_1 L_6 \dot{\phi}_1 \dot{\theta}_6 s\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_1 c\theta_6) \\ + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 L_1 L_5 (-c^2 \varphi_1 c\theta_5 s\theta_1 + c\theta_1 s\theta_5) \\ + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_6 L_1 L_6 (-c^2 \varphi_1 s\theta_1 c\theta_6 + c\theta_1 s\theta_6) \\ + m_6 g (L_1 c \varphi_1 s\theta_1) \end{array} \right) \end{array} \right)$$

$$\frac{\partial L_{MTV7}}{\partial \theta_1} = \left(\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} \dot{\phi}_1^2 \left(L_1^2 (s^2 \varphi_1 s\theta_1 c\theta_1 - c\theta_1 s\theta_1) \right) - \dot{\theta}_1^2 L_1^2 (c^2 \varphi_1 c\theta_1 s\theta_1 + s^2 \theta_1) \\ + \dot{\phi}_1 \dot{\theta}_1 \left(-L_1^2 s\varphi_1 c\varphi_1 (c^2 \theta_1 - s^2 \theta_1) \right. \right. \\ \left. \left. - s\varphi_1 c\varphi_1 s\theta_1 (-L_1 L_5 s\theta_5 - L_1 L_6 s\theta_6 - L_1 L_7 s\theta_7) \right) \right) \\ m_7 - \dot{\phi}_1 \dot{\theta}_5 s\varphi_1 c\varphi_1 c\theta_5 L_1 L_5 c\theta_1 - \dot{\phi}_1 \dot{\theta}_6 s\varphi_1 c\varphi_1 c\theta_6 L_1 L_6 c\theta_1 \\ - \dot{\phi}_1 \dot{\theta}_7 s\varphi_1 c\varphi_1 c\theta_7 L_1 L_7 s\theta_1 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 \left(L_1 L_5 (-c^2 \varphi_1 s\theta_1 c\theta_5 + c\theta_1 s\theta_5) \right) \\ + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_6 \left(L_1 L_6 (-c^2 \varphi_1 s\theta_1 c\theta_6 + c\theta_1 s\theta_6) \right) \\ + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_7 \left(L_1 L_7 (-c^2 \varphi_1 s\theta_1 c\theta_7 + c\theta_1 s\theta_7) \right) \\ + m_7 g L_1 c \varphi_1 s\theta_1 \end{array} \right) \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_{RTV8}}{\partial \theta_1} &= \left(m_8 \left(\begin{aligned} &\dot{\phi}_1^2 \left(-L_1^2 (c\theta_1 s\theta_1 c^2 \varphi_1) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + L_1 L_8 (2s^2 \varphi_1 c\theta_1 s\theta_8 - s\theta_1 c\theta_8) \right) \right. \\ &\quad + \dot{\theta}_1^2 L_1^2 (s\theta_1 c\theta_1 s^2 \varphi_1) \\ &\quad + \dot{\phi}_1 \dot{\theta}_1 \left(L_1 L_8 s\varphi_1 s\theta_8 c\varphi_1 s\theta_1 + L_1^2 s\varphi_1 c\varphi_1 (c^2 \theta_1 - s^2 \theta_1) \right) \\ &\quad - \dot{\phi}_1 \dot{\theta}_8 (L_1 L_8 s\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_1 c\theta_8) \\ &\quad \left. + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_8 L_1 L_8 (-c^2 \varphi_1 s\theta_1 c\theta_8 + c\theta_1 s\theta_8) \right) \\ &\quad \left. + m_8 g (L_1 c \varphi_1 s\theta_1) \right) \end{aligned} \right) \\
\frac{\partial L_{RTV9}}{\partial \theta_1} &= \left(m_9 \left(\begin{aligned} &-\dot{\phi}_1^2 L_1^2 (c\theta_1 s\theta_1 c^2 \varphi_1) + L_1 L_8 (s^2 \varphi_1 c\theta_1 s\theta_8 - s\theta_1 c\theta_8) \\ &\quad + \dot{\theta}_1^2 L_1^2 (s\theta_1 c\theta_1 - c^2 \varphi_1 c\theta_1 s\theta_1) \\ &\quad + \dot{\phi}_1 \dot{\theta}_1 \left(-L_1^2 s\varphi_1 c\varphi_1 (c^2 \theta_1 - s^2 \theta_1) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + L_1 L_8 s\varphi_1 s\theta_8 c\varphi_1 s\theta_1 + L_1 L_9 s\varphi_1 s\theta_9 c\varphi_1 s\theta_1 \right) \right. \\ &\quad - \dot{\phi}_1 \dot{\theta}_8 (L_1 L_8 s\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_1 c\theta_8) \\ &\quad - \dot{\phi}_1 \dot{\theta}_9 (L_1 L_9 s\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_1 c\theta_9) \\ &\quad + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_8 L_1 L_8 (-c^2 \varphi_1 c\theta_8 s\theta_1 + c\theta_1 s\theta_8) \\ &\quad \left. + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_9 L_1 L_9 (-c^2 \varphi_1 s\theta_1 c\theta_9 + c\theta_1 s\theta_9) \right) \\ &\quad \left. + m_9 g (L_1 c \varphi_1 s\theta_1) \right) \end{aligned} \right)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial L_{RTV10}}{\partial \theta_1} = m_{10} \left(\begin{array}{l} \dot{\varphi}_1^2 \left(L_1^2 \left(s^2 \varphi_1 s \theta_1 c \theta_1 - c \theta_1 s \theta_1 \right) \right) - \dot{\theta}_1^2 L_1^2 \left(c^2 \varphi_1 c \theta_1 s \theta_1 + s^2 \theta_1 \right) \\ + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 \left(\begin{array}{l} -L_1^2 s \varphi_1 c \varphi_1 \left(c^2 \theta_1 - s^2 \theta_1 \right) \\ -s \varphi_1 c \varphi_1 s \theta_1 \left(-L_1 L_8 s \theta_8 - L_1 L_9 s \theta_9 - L_1 L_{10} s \theta_{10} \right) \end{array} \right) \\ - \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_8 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_8 L_1 L_8 c \theta_1 - \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_9 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_9 L_1 L_9 c \theta_1 \\ - \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{10} s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_{10} L_1 L_{10} s \theta_1 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_8 \left(L_1 L_8 \left(-c^2 \varphi_1 s \theta_1 c \theta_8 + c \theta_1 s \theta_8 \right) \right) \\ + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_9 \left(L_1 L_9 \left(-c^2 \varphi_1 s \theta_1 c \theta_9 + c \theta_1 s \theta_9 \right) \right) \\ + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{10} \left(L_1 L_{10} \left(-c^2 \varphi_1 s \theta_1 c \theta_{10} + c \theta_1 s \theta_{10} \right) \right) \\ + m_{10} g L_1 c \varphi_1 s \theta_1 \end{array} \right)$$

$$\frac{\partial L_{LTV11}}{\partial \theta_1} = m_{11} \left(\begin{array}{l} \dot{\varphi}_1^2 \left(-L_1^2 \left(c \theta_1 s \theta_1 c^2 \varphi_1 \right) + L_1 L_{11} \left(2 s^2 \varphi_1 c \theta_1 s \theta_{11} - s \theta_1 c \theta_{11} \right) \right) \\ + \dot{\theta}_1^2 L_1^2 \left(s \theta_1 c \theta_1 s^2 \varphi_1 \right) \\ + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 \left(L_1 L_{11} s \varphi_1 s \theta_{11} c \varphi_1 s \theta_1 + L_1^2 s \varphi_1 c \varphi_1 \left(c^2 \theta_1 - s^2 \theta_1 \right) \right) \\ - \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{11} \left(L_1 L_{11} s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{11} \right) + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{11} L_1 L_{11} \left(-c^2 \varphi_1 s \theta_1 c \theta_{11} + c \theta_1 s \theta_{11} \right) \\ + m_{11} g \left(L_1 c \varphi_1 s \theta_1 \right) \end{array} \right)$$

$$\frac{\partial L_{LTV12}}{\partial \theta_1} = m_{12} \left(\begin{array}{l} -\dot{\varphi}_1^2 L_1^2 \left(c \theta_1 s \theta_1 c^2 \varphi_1 \right) + L_1 L_{11} \left(s^2 \varphi_1 c \theta_1 s \theta_{11} - s \theta_1 c \theta_{11} \right) \\ + \dot{\theta}_1^2 L_1^2 \left(s \theta_1 c \theta_1 - c^2 \varphi_1 c \theta_1 s \theta_1 \right) \\ + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 \left(\begin{array}{l} -L_1^2 s \varphi_1 c \varphi_1 \left(c^2 \theta_1 - s^2 \theta_1 \right) \\ + L_1 L_{11} s \varphi_1 s \theta_{11} c \varphi_1 s \theta_1 + L_1 L_{12} s \varphi_1 s \theta_{12} c \varphi_1 s \theta_1 \end{array} \right) \\ - \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{11} \left(L_1 L_{11} s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{11} \right) - \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{12} \left(L_1 L_{12} s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{12} \right) \\ + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{11} L_1 L_{11} \left(-c^2 \varphi_1 c \theta_{11} s \theta_1 + c \theta_1 s \theta_{11} \right) + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{12} L_1 L_{12} \left(-c^2 \varphi_1 s \theta_1 c \theta_{12} + c \theta_1 s \theta_{12} \right) \\ + m_{12} g \left(L_1 c \varphi_1 s \theta_1 \right) \end{array} \right)$$

$$\frac{\partial L_{ITV13}}{\partial \theta_1} = m_{13} \left(\begin{array}{l} \left(\dot{\varphi}_1^2 \left(L_1^2 \left(s^2 \varphi_1 s \theta_1 c \theta_1 - c \theta_1 s \theta_1 \right) \right) - \dot{\theta}_1^2 L_1^2 \left(c^2 \varphi_1 c \theta_1 s \theta_1 + s^2 \theta_1 \right) \right) \\ + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 \left(-L_1^2 s \varphi_1 c \varphi_1 \left(c^2 \theta_1 - s^2 \theta_1 \right) \right. \\ \left. - s \varphi_1 c \varphi_1 s \theta_1 \left(-L_1 L_{11} s \theta_{11} - L_1 L_{12} s \theta_{12} - L_1 L_{13} s \theta_{13} \right) \right) \\ - \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{11} s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_{11} L_1 L_{11} c \theta_1 - \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{12} s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_{12} L_1 L_{12} c \theta_1 \\ - \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{13} s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_{13} L_1 L_{13} s \theta_1 \\ + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{11} \left(L_1 L_{11} \left(-c^2 \varphi_1 s \theta_1 c \theta_{11} + c \theta_1 s \theta_{11} \right) \right) \\ + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{12} \left(L_1 L_{12} \left(-c^2 \varphi_1 s \theta_1 c \theta_{12} + c \theta_1 s \theta_{12} \right) \right) \\ + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{13} \left(L_1 L_{13} \left(-c^2 \varphi_1 s \theta_1 c \theta_{13} + c \theta_1 s \theta_{13} \right) \right) \\ + m_{13} g L_1 c \varphi_1 s \theta_1 \end{array} \right)$$

$$\frac{\partial L_{ITV14}}{\partial \theta_1} = m_{14} \left(\begin{array}{l} \left(\dot{\varphi}_1^2 L_a^2 \left(s^2 \varphi_1 s \theta_1 c \theta_1 - c \theta_1 s \theta_1 \right) + \dot{\theta}_1^2 L_a^2 \left(-c^2 \varphi_1 c \theta_1 s \theta_1 + s \theta_1 c \theta_1 \right) \right) \\ + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 \left(-L_a^2 s \varphi_1 c \varphi_1 \left(c^2 \theta_1 - s^2 \theta_1 \right) \right) \\ + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{14} L_a L_{14} \left(-s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14} + s \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{14} s \varphi_2 - s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14} \right) \\ + \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 L_a L_{14} \left(s \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{14} + s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{14} c \varphi_2 - s \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{14} \right) \\ + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{14} L_a L_{14} \left(-c \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14} + c \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{14} s \varphi_2 + c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14} \right) \\ + \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 L_a L_{14} \left(c \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{14} - c \theta_1 s \varphi_1 c \theta_{14} c \varphi_2 + c \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{14} \right) \\ + \dot{\theta}_{14} \dot{\varphi}_2 \left(-L_{14}^2 c \varphi_2 c \theta_{14} s \varphi_2 s \theta_{14} \right) \\ + m_{14} g \left(L_a c \varphi_1 s \theta_1 \right) \end{array} \right)$$

$$\frac{\partial L_{ITV15}}{\partial \theta_1} = m_{15} \left(\begin{array}{l} \left(\dot{\varphi}_1^2 L_a^2 \left(s^2 \varphi_1 s \theta_1 c \theta_1 - c \theta_1 s \theta_1 \right) + \dot{\theta}_1^2 \left(L_a^2 \left(c^2 \varphi_1 c \theta_1 s \theta_1 + s \theta_1 c \theta_1 \right) \right) \right) \\ - \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 L_a^2 s \varphi_1 c \varphi_1 \left(c^2 \theta_1 - s^2 \theta_1 \right) \\ + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{14} L_a L_{14} \left(-s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14} + s \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{14} s \varphi_2 - s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14} \right) \\ + \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \left(L_a L_{14} \left(-s \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{14} - s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{14} c \varphi_2 - s \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{14} \right) \right. \\ \left. + L_a L_{15} \left(s \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{15} - s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{15} c \varphi_2 - s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{15} \right) \right) \\ + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{15} L_a L_{15} \left(-s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{15} + s \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{15} s \varphi_2 - s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{15} \right) \\ + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{14} L_a L_{14} \left(-c \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14} + c \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{14} s \varphi_2 - s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14} \right) \\ + \dot{\theta}_1 \dot{\varphi}_2 \left(L_a L_{14} \left(c \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{14} - s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{14} c \varphi_2 - s \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{14} \right) \right. \\ \left. + L_a L_{15} \left(c \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{15} - s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{15} c \varphi_2 + s \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{15} \right) \right) \\ + \dot{\theta}_{15} \dot{\varphi}_2 L_a L_{15} \left(-c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{15} - s \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{15} s \varphi_2 - c \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{15} \right) \\ + m_{15} g \left(L_a c \varphi_1 s \theta_1 \right) \end{array} \right)$$

$$\frac{\partial L_{TTV16}}{\partial \dot{\theta}_1} = m_{16} \left(\begin{aligned} & \left(\dot{\phi}_1^2 \left(L_a^2 \left(2s^2 \varphi_1 s \theta_1 c \theta_1 - c \theta_1 s \theta_1 c^2 \varphi_1 \right) \right) + \dot{\theta}_1^2 \left(L_a^2 \left(-2c^2 \varphi_1 c \theta_1 s \theta_1 + s \theta_1 c \theta_1 s^2 \varphi_1 \right) \right) \right) \\ & + \dot{\phi}_1 \dot{\theta}_1 L_a^2 \left(-s \varphi_1 c \varphi_1 \left(c^2 \theta_1 - s^2 \theta_1 \right) \right) + \dot{\phi}_1 \dot{\theta}_1 L_a L_{14} \left(s \theta_1 c \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 \right) \\ & + \dot{\phi}_1 \dot{\theta}_2 \left(\begin{aligned} & - \left(L_a s \varphi_1 c \theta_1 \right) s \varphi_2 \left(-L_{14} s \theta_{14} - L_{15} s \theta_{15} - L_{16} s \theta_{16} \right) \\ & - \left(L_a s \theta_1 c \varphi_1 \right) c \varphi_2 \left(L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15} + L_{16} c \theta_{16} \right) \\ & - \left(L_a s \varphi_1 s \theta_1 \right) s \varphi_2 \left(-L_{14} c \theta_{14} - L_{15} c \theta_{15} - L_{16} c \theta_{16} \right) \end{aligned} \right) \\ & + \dot{\phi}_1 \dot{\theta}_1 L_a L_{15} \left(-s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{15} + s \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{15} s \varphi_2 + s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{15} \right) \\ & + \dot{\phi}_1 \dot{\theta}_1 L_a L_{16} \left(-s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{16} + s \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{16} s \varphi_2 + s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{16} \right) \\ & + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{14} L_a L_{14} \left(-c \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14} + c \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{14} s \varphi_2 - c \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14} \right) \\ & + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \left(\begin{aligned} & - \left(L_a c \varphi_1 s \theta_1 \right) s \varphi_2 \left(-L_{14} s \theta_{14} - L_{15} s \theta_{15} - L_{16} s \theta_{16} \right) \\ & - \left(L_a c \theta_1 s \varphi_1 \right) c \varphi_2 \left(L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15} + L_{16} c \theta_{16} \right) \\ & - \left(L_a s \theta_1 c \varphi_1 \right) s \varphi_2 \left(-L_{14} c \theta_{14} - L_{15} c \theta_{15} - L_{16} c \theta_{16} \right) \end{aligned} \right) \\ & + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{15} L_a L_{15} \left(-c \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{15} + c \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{15} s \varphi_2 + c \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{15} \right) \\ & + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{16} L_a L_{16} \left(-c \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{16} + c \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{16} s \varphi_2 + c \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{16} \right) \end{aligned} \right) \\ + m_{16} g \left(L_a c \varphi_1 s \theta_1 \right) \end{aligned} \right)$$

EK-B. 3

$$\frac{\partial L_W}{\partial \dot{\theta}_1} = \left(\begin{aligned} & \frac{\partial L_{WTV1}}{\partial \dot{\theta}_1} + \frac{\partial L_{ITV2}}{\partial \dot{\theta}_1} + \frac{\partial L_{ITV3}}{\partial \dot{\theta}_1} + \frac{\partial L_{ITV4}}{\partial \dot{\theta}_1} + \frac{\partial L_{MTV5}}{\partial \dot{\theta}_1} \\ & + \frac{\partial L_{MTV6}}{\partial \dot{\theta}_1} + \frac{\partial L_{MTV7}}{\partial \dot{\theta}_1} + \frac{\partial L_{RTV8}}{\partial \dot{\theta}_1} + \frac{\partial L_{RTV9}}{\partial \dot{\theta}_1} + \frac{\partial L_{RTV10}}{\partial \dot{\theta}_1} \\ & + \frac{\partial L_{LTV11}}{\partial \dot{\theta}_1} + \frac{\partial L_{LTV12}}{\partial \dot{\theta}_1} + \frac{\partial L_{LTV13}}{\partial \dot{\theta}_1} + \frac{\partial L_{TTV14}}{\partial \dot{\theta}_1} + \frac{\partial L_{TTV15}}{\partial \dot{\theta}_1} + \frac{\partial L_{TTV16}}{\partial \dot{\theta}_1} \end{aligned} \right)$$

$$\frac{\partial L_{WTV1}}{\partial \dot{\theta}_1} = m_1 \left(\dot{\theta}_1 L_1^2 \left(c^2 \varphi_1 c^2 \theta_1 + s^2 \theta_1 \right) - \dot{\phi}_1 L_1^2 c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_1 \right)$$

$$\frac{\partial L_{ITV2}}{\partial \dot{\theta}_1} = m_2 \left(\begin{aligned} & \dot{\theta}_1 \left(L_1^2 \left(c^2 \varphi_1 + s^2 \theta_1 s^2 \varphi_1 \right) \right) \\ & + \dot{\phi}_1 \left(-L_1 L_2 s \varphi_1 s \theta_2 c \varphi_1 c \theta_1 + L_1^2 c \theta_1 s \varphi_1 c \varphi_1 s \theta_1 \right) \\ & + \dot{\theta}_2 \left(L_1 L_2 \left(c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_2 + s \theta_1 s \theta_2 \right) \right) \end{aligned} \right)$$

$$\frac{\partial L_{ITV3}}{\partial \dot{\theta}_1} = m_3 \left(\begin{array}{l} \dot{\theta}_1 (L_1^2 (s^2 \theta_1 + c^2 \varphi_1 c^2 \theta_1)) \\ + \dot{\varphi}_1 (-L_1^2 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_1 - L_1 L_2 s \varphi_1 s \theta_2 c \varphi_1 c \theta_1 - L_1 L_3 s \varphi_1 s \theta_3 c \varphi_1 c \theta_1) \\ + \dot{\theta}_2 L_1 L_2 (c^2 \varphi_1 c \theta_2 c \theta_1 + s \theta_1 s \theta_2) + \dot{\theta}_3 L_1 L_3 (c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_3 + s \theta_1 s \theta_3) \end{array} \right)$$

$$\frac{\partial L_{ITV4}}{\partial \dot{\theta}_1} = m_4 \left(\begin{array}{l} \dot{\theta}_1 (L_1^2 (c^2 \varphi_1 c^2 \theta_1 + s^2 \theta_1)) \\ + \dot{\varphi}_1 (s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_1 (-L_1^2 s \theta_1 - L_1 L_2 s \theta_2 - L_1 L_3 s \theta_3 - L_1 L_4 s \theta_4)) \\ + \dot{\theta}_2 (L_1 L_2 (c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_2 + s \theta_1 s \theta_2)) + \dot{\theta}_3 (L_1 L_3 (c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_3 + s \theta_1 s \theta_3)) \\ + \dot{\theta}_4 (L_1 L_4 (c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_4 + s \theta_1 s \theta_4)) \end{array} \right)$$

$$\frac{\partial L_{MTV5}}{\partial \dot{\theta}_1} = m_5 \left(\begin{array}{l} \dot{\theta}_1 (L_1^2 (c^2 \varphi_1 + s^2 \theta_1 s^2 \varphi_1)) \\ + \dot{\varphi}_1 (-L_1 L_5 s \varphi_1 s \theta_5 c \varphi_1 c \theta_1 + L_1^2 c \theta_1 s \varphi_1 c \varphi_1 s \theta_1) \\ + \dot{\theta}_5 (L_1 L_5 (c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_5 + s \theta_1 s \theta_5)) \end{array} \right)$$

$$\frac{\partial L_{MTV6}}{\partial \dot{\theta}_1} = m_6 \left(\begin{array}{l} \dot{\theta}_1 (L_1^2 (s^2 \theta_1 + c^2 \varphi_1 c^2 \theta_1)) \\ + \dot{\varphi}_1 (-L_1^2 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_1 - L_1 L_5 s \varphi_1 s \theta_5 c \varphi_1 c \theta_1 - L_1 L_6 s \varphi_1 s \theta_6 c \varphi_1 c \theta_1) \\ + \dot{\theta}_5 L_1 L_5 (c^2 \varphi_1 c \theta_5 c \theta_1 + s \theta_1 s \theta_5) + \dot{\theta}_6 L_1 L_6 (c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_6 + s \theta_1 s \theta_6) \end{array} \right)$$

$$\frac{\partial L_{MTV7}}{\partial \dot{\theta}_1} = m_4 \left(\begin{array}{l} \dot{\theta}_1 (L_1^2 (c^2 \varphi_1 c^2 \theta_1 + s^2 \theta_1)) \\ + \dot{\varphi}_1 (s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_1 (-L_1^2 s \theta_1 - L_1 L_5 s \theta_5 - L_1 L_6 s \theta_6 - L_1 L_7 s \theta_7)) \\ + \dot{\theta}_5 (L_1 L_5 (c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_5 + s \theta_1 s \theta_5)) + \dot{\theta}_6 (L_1 L_6 (c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_6 + s \theta_1 s \theta_6)) \\ + \dot{\theta}_7 (L_1 L_7 (c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_7 + s \theta_1 s \theta_7)) \end{array} \right)$$

$$\frac{\partial L_{RTV8}}{\partial \dot{\theta}_1} = m_8 \left(\begin{array}{l} \dot{\theta}_1 (L_1^2 (c^2 \varphi_1 + s^2 \theta_1 s^2 \varphi_1)) \\ + \dot{\varphi}_1 (-L_1 L_8 s \varphi_1 s \theta_8 c \varphi_1 c \theta_1 + L_1^2 c \theta_1 s \varphi_1 c \varphi_1 s \theta_1) \\ + \dot{\theta}_8 (L_1 L_8 (c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_8 + s \theta_1 s \theta_8)) \end{array} \right)$$

$$\frac{\partial L_{RTV9}}{\partial \dot{\theta}_1} = m_9 \left(\begin{array}{l} \dot{\theta}_1 (L_1^2 (s^2 \theta_1 + c^2 \varphi_1 c^2 \theta_1)) \\ + \dot{\varphi}_1 (-L_1^2 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_1 - L_1 L_8 s \varphi_1 s \theta_8 c \varphi_1 c \theta_1 - L_1 L_9 s \varphi_1 s \theta_9 c \varphi_1 c \theta_1) \\ + \dot{\theta}_8 L_1 L_8 (c^2 \varphi_1 c \theta_8 c \theta_1 + s \theta_1 s \theta_8) + \dot{\theta}_9 L_1 L_9 (c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_9 + s \theta_1 s \theta_9) \end{array} \right)$$

$$\frac{\partial L_{RTV10}}{\partial \dot{\theta}_1} = m_{10} \left(\begin{aligned} &\dot{\theta}_1 (L_1^2 (c^2 \varphi_1 c^2 \theta_1 + s^2 \theta_1)) \\ &+ \dot{\varphi}_1 (s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_1 (-L_1^2 s \theta_1 - L_1 L_8 s \theta_8 - L_1 L_9 s \theta_9 - L_1 L_{10} s \theta_{10})) \\ &+ \dot{\theta}_8 (L_1 L_8 (c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_8 + s \theta_1 s \theta_8)) + \dot{\theta}_9 (L_1 L_9 (c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_9 + s \theta_1 s \theta_9)) \\ &+ \dot{\theta}_{10} (L_1 L_{10} (c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_{10} + s \theta_1 s \theta_{10})) \end{aligned} \right)$$

$$\frac{\partial L_{LTV11}}{\partial \dot{\theta}_1} = m_{11} \left(\begin{aligned} &\dot{\theta}_1 (L_1^2 (c^2 \varphi_1 + s^2 \theta_1 s^2 \varphi_1)) \\ &+ \dot{\varphi}_1 (-L_1 L_{11} s \varphi_1 s \theta_{11} c \varphi_1 c \theta_1 + L_1^2 c \theta_1 s \varphi_1 c \varphi_1 s \theta_1) \\ &+ \dot{\theta}_{11} (L_1 L_{11} (c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_{11} + s \theta_1 s \theta_{11})) \end{aligned} \right)$$

$$\frac{\partial L_{RTV12}}{\partial \dot{\theta}_1} = m_{12} \left(\begin{aligned} &\dot{\theta}_1 (L_1^2 (s^2 \theta_1 + c^2 \varphi_1 c^2 \theta_1)) \\ &+ \dot{\varphi}_1 (-L_1^2 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_1 - L_1 L_{11} s \varphi_1 s \theta_{11} c \varphi_1 c \theta_1 - L_1 L_{12} s \varphi_1 s \theta_{12} c \varphi_1 c \theta_1) \\ &+ \dot{\theta}_{11} L_1 L_{11} (c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_{11} + s \theta_1 s \theta_{11}) + \dot{\theta}_{12} L_1 L_{12} (c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_{12} + s \theta_1 s \theta_{12}) \end{aligned} \right)$$

$$\frac{\partial L_{RTV13}}{\partial \dot{\theta}_1} = m_{13} \left(\begin{aligned} &\dot{\theta}_1 (L_1^2 (c^2 \varphi_1 c^2 \theta_1 + s^2 \theta_1)) \\ &+ \dot{\varphi}_1 (s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_1 (-L_1^2 s \theta_1 - L_1 L_{11} s \theta_{11} - L_1 L_{12} s \theta_{12} - L_1 L_{13} s \theta_{13})) \\ &+ \dot{\theta}_{11} (L_1 L_{11} (c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_{11} + s \theta_1 s \theta_{11})) + \dot{\theta}_{12} (L_1 L_{12} (c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_{12} + s \theta_1 s \theta_{12})) \\ &+ \dot{\theta}_{13} (L_1 L_{13} (c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_{13} + s \theta_1 s \theta_{13})) \end{aligned} \right)$$

$$\frac{\partial L_{TTV14}}{\partial \dot{\theta}_1} = m_{14} \left(\begin{aligned} &\dot{\theta}_1 L_a^2 (c^2 \varphi_1 c^2 \theta_1 + s^2 \theta_1) - \dot{\varphi}_1 L_a^2 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_1 \\ &+ \dot{\theta}_{14} L_a L_{14} (c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14} + s \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{14} s \varphi_2 + c \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14}) \\ &+ \dot{\varphi}_2 L_a L_{14} (-c \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{14} - s \theta_1 s \varphi_1 c \theta_{14} c \varphi_2 + c \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{14}) \end{aligned} \right)$$

$$\frac{\partial L_{TTV15}}{\partial \dot{\theta}_1} = m_{15} \left(\begin{aligned} &\dot{\theta}_1 (L_a^2 (c^2 \varphi_1 c^2 \theta_1 + s^2 \theta_1)) + \dot{\varphi}_1 L_a^2 (-s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_1) \\ &+ \dot{\theta}_{14} (L_a L_{14} (c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14} + s \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{14} s \varphi_2 + c \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14})) \\ &+ \dot{\varphi}_2 \left(L_a L_{14} (-c \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{14} + c \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{14} c \varphi_2 + s \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{14}) \right. \\ &\quad \left. + L_a L_{15} (-c \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{15} + c \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{15} c \varphi_2 + s \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{15}) \right) \\ &+ \dot{\theta}_{15} (L_a L_{15} (c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{15} + s \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{15} s \varphi_2 + c \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{15})) \end{aligned} \right)$$

$$\frac{\partial L_{ITV16}}{\partial \dot{\theta}_1} = m_{16} \left(\begin{array}{l} \dot{\theta}_1 \left(L_a^2 (2c^2 \varphi_1 c^2 \theta_1 + s^2 \theta_1 s^2 \varphi_1) \right) \\ \dot{\varphi}_1 \left(L_a^2 (s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_1 - 2c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_1) \right) \\ \dot{\theta}_{14} \left(L_a L_{14} (c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14} + s \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{14} s \varphi_2 + c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14}) \right) \\ \dot{\varphi}_2 \left(\begin{array}{l} (L_a c \varphi_1 c \theta_1) (-L_{14} s \varphi_2 s \theta_{14} - L_{15} s \varphi_2 s \theta_{15} - L_{16} s \varphi_2 s \theta_{16}) \\ + (-L_a s \theta_1 s \varphi_1) (L_{14} c \theta_{14} c \varphi_2 + L_{15} c \theta_{15} c \varphi_2 + L_{16} c \theta_{16} c \varphi_2) \\ + (L_a c \theta_1 c \varphi_1) (-L_{14} s \varphi_2 c \theta_{14} - L_{15} s \varphi_2 c \theta_{15} - L_{16} s \varphi_2 c \theta_{16}) \end{array} \right) \\ \dot{\theta}_{15} \left(L_a L_{15} (c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{15} + s \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{15} s \varphi_2 - c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{15}) \right) \\ \dot{\theta}_{16} \left(L_a L_{16} (c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{16} + s \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{16} s \varphi_2 - c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{16}) \right) \end{array} \right)$$

EK-B. 4

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_W}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \left(\begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{WTV1}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{ITV2}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{ITV3}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{ITV4}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) \\ + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{MTV5}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{MTV6}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{MTV7}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) \\ + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{RTV8}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{RTV9}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{RTV10}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) \\ + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{LTV11}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{LTV12}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{LTV13}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) \\ + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{TTV14}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{TTV15}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{TTV16}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) \end{array} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_W}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{zamanabağıltümdeğişkenlerin_t ürevialınır.} \\ \text{budeğişkenlerise} \rightarrow \\ \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3, \dot{\theta}_4, \dot{\theta}_5, \dot{\theta}_6, \dot{\theta}_7, \dot{\theta}_8, \dot{\theta}_9, \dot{\theta}_{10}, \dot{\theta}_{11}, \dot{\theta}_{12}, \dot{\theta}_{13}, \dot{\theta}_{14}, \dot{\theta}_{15}, \dot{\theta}_{16} \\ \varphi_1, \varphi_2, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8, \theta_9, \theta_{10}, \theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{14}, \theta_{15}, \theta_{16} \end{array} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{WTV1}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{zamanabağıltümdeğişkenlerin_t ürevialınır.} \\ \text{budeğişkenlerise} \rightarrow \dot{\varphi}_1, \dot{\theta}_1, \varphi_1, \theta_1 \end{array} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{WTV1}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \left(\begin{array}{l} -m_1 \ddot{\varphi}_1 L_1^2 c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_1 + m_1 \ddot{\theta}_1 L_1^2 (c^2 \varphi_1 c^2 \theta_1 + s^2 \theta_1) \\ -m_1 \dot{\varphi}_1 (\dot{\theta}_1 L_1^2 (2c \varphi_1 s \varphi_1 c^2 \theta_1) - \dot{\varphi}_1 L_1^2 c \theta_1 s \theta_1 (c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1)) \\ -m_1 \dot{\theta}_1 (2\dot{\theta}_1 L_1^2 (c^2 \varphi_1 c \theta_1 s \theta_1 + s \theta_1 c \theta_1) - \dot{\varphi}_1 L_1^2 c \varphi_1 s \varphi_1 (c^2 \theta_1 - s^2 \theta_1)) \end{array} \right) \left(\begin{array}{l} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \varphi_1 \\ \theta_1 \end{array} \right)$$

İşlemler sadeleştirilir. $\ddot{\theta}_1$ kat sayısının dışındaki tüm işlemler C1 olarak simgelenmiştir.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{WTV1}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \left(\ddot{\theta}_1 m_1 L_1^2 (c^2 \varphi_1 c^2 \theta_1 + s^2 \theta_1) + C1 \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{ITV2}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \left(\begin{array}{l} m_2 \ddot{\theta}_1 \left(-L_1 L_2 s \varphi_1 s \theta_2 c \varphi_1 c \theta_1 + L_1^2 c \theta_1 s \varphi_1 c \varphi_1 s \theta_1 \right) \\ + m_2 \ddot{\theta}_1 L_1^2 (c^2 \varphi_1 + s^2 \theta_1 s^2 \varphi_1) \\ + m_2 \ddot{\theta}_2 L_1 L_2 (c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_2 + s \theta_1 s \theta_2) \\ + m_2 \dot{\theta}_1 \left(\begin{array}{l} 2 \dot{\theta}_1 L_1^2 (-c \varphi_1 s \varphi_1 + s^2 \theta_1 s \varphi_1 c \varphi_1) \\ + \dot{\varphi}_1 (-L_1 L_2 c \theta_1 s \theta_2 (c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1) + L_1^2 c \theta_1 s \theta_1 (c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1)) \\ + \dot{\theta}_2 L_1 L_2 (-2 c \varphi_1 s \varphi_1 c \theta_1 c \theta_2) \end{array} \right) \\ + m_2 \dot{\theta}_1 \left(\begin{array}{l} \dot{\theta}_1 L_1^2 (2 s \theta_1 c \theta_1 s^2 \varphi_1) \\ + \dot{\varphi}_1 (L_1 L_2 s \varphi_1 s \theta_2 c \varphi_1 s \theta_1 + L_1^2 s \varphi_1 c \varphi_1 (c^2 \theta_1 - s^2 \theta_1)) \\ + \dot{\theta}_2 L_1 L_2 (-c^2 \varphi_1 c \theta_1 s \theta_2 + c \theta_1 s \theta_2) \end{array} \right) \\ + m_2 \dot{\theta}_2 \left(-\dot{\varphi}_1 L_1 L_2 s \varphi_1 c \theta_2 c \varphi_1 c \theta_1 + \dot{\theta}_2 L_1 L_2 (-c^2 \varphi_1 c \theta_1 s \theta_2 + s \theta_1 c \theta_2) \right) \end{array} \right) \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \varphi_1 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

İşlemler sadeleştirilir. $\ddot{\theta}_1$ katsayısının dışındaki tüm işlemler C2 olarak simgelenmiştir.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{ITV2}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \left(m_2 \ddot{\theta}_1 L_1^2 (c^2 \varphi_1 + s^2 \theta_1 s^2 \varphi_1) + C2 \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{ITV3}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \left(\begin{array}{l} m_3 \ddot{\theta}_1 \left(-L_1^2 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_1 - L_1 L_2 s \varphi_1 s \theta_2 c \varphi_1 c \theta_1 - L_1 L_3 s \varphi_1 s \theta_3 c \varphi_1 c \theta_1 \right) + m_3 \ddot{\theta}_1 \left(L_1^2 (s^2 \theta_1 + c^2 \varphi_1 c^2 \theta_1) \right) \\ + m_3 \ddot{\theta}_2 L_1 L_2 (c^2 \varphi_1 c \theta_2 c \theta_1 + s \theta_1 s \theta_2) + m_3 \ddot{\theta}_3 L_1 L_3 (c^2 \varphi_1 c \theta_3 c \theta_1 + s \theta_1 s \theta_3) \\ + m_3 \dot{\theta}_1 \left(\begin{array}{l} -2 \dot{\theta}_1 L_1^2 c \varphi_1 s \varphi_1 c^2 \theta_1 \\ + \dot{\varphi}_1 \left((c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1) (-L_1^2 c \theta_1 s \theta_1 - L_1 L_2 c \theta_1 s \theta_2 - L_1 L_3 c \theta_1 s \theta_3) \right) \\ - 2 \dot{\theta}_2 L_1 L_2 c \varphi_1 s \varphi_1 c \theta_2 c \theta_1 - 2 \dot{\theta}_3 L_1 L_3 c \varphi_1 s \varphi_1 c \theta_3 c \theta_1 \end{array} \right) \\ + m_3 \dot{\theta}_1 \left(\begin{array}{l} \dot{\theta}_1 (2 L_1^2 (s \theta_1 c \theta_1 - c^2 \varphi_1 c \theta_1 s \theta_1)) \\ + \dot{\varphi}_1 (-L_1^2 s \varphi_1 c \varphi_1 (c^2 \theta_1 - s^2 \theta_1) + L_1 L_2 s \varphi_1 s \theta_2 c \varphi_1 s \theta_1 + L_1 L_3 s \varphi_1 s \theta_3 c \varphi_1 s \theta_1) \\ + \dot{\theta}_2 L_1 L_2 (-c^2 \varphi_1 c \theta_2 s \theta_1 + c \theta_1 s \theta_2) + \dot{\theta}_3 L_1 L_3 (-c^2 \varphi_1 c \theta_3 s \theta_1 + c \theta_1 s \theta_3) \end{array} \right) \\ + m_3 \dot{\theta}_2 \left(-\dot{\varphi}_1 L_1 L_2 s \varphi_1 c \theta_2 c \varphi_1 c \theta_1 + \dot{\theta}_2 L_1 L_2 (-c^2 \varphi_1 s \theta_2 c \theta_1 + s \theta_1 c \theta_2) \right) \\ + m_3 \dot{\theta}_3 \left(\dot{\varphi}_1 (-L_1 L_3 s \varphi_1 c \theta_3 c \varphi_1 c \theta_1) + \dot{\theta}_3 L_1 L_3 (-c^2 \varphi_1 c \theta_3 s \theta_1 + s \theta_1 c \theta_3) \right) \end{array} \right) \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \varphi_1 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

İşlemler sadeleştirilir. $\ddot{\theta}_1$ katsayısının dışındaki tüm işlemler C3 olarak simgelenmiştir.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{ITV3}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \left(m_3 \ddot{\theta}_1 L_1^2 (s^2 \theta_1 + c^2 \varphi_1 c^2 \theta_1) + C3 \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{ITV4}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \left(\begin{array}{l} m_4 \ddot{\theta}_1 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_1 (-L_1^2 s \theta_1 - L_1 L_2 s \theta_2 - L_1 L_3 s \theta_3 - L_1 L_4 s \theta_4) \\ + m_4 \ddot{\theta}_1 (L_1^2 (c^2 \varphi_1 c^2 \theta_1 + s^2 \theta_1)) + m_4 \ddot{\theta}_2 (L_1 L_2 (c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_2 + s \theta_1 s \theta_2)) \\ + m_4 \ddot{\theta}_3 (L_1 L_3 (c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_3 + s \theta_1 s \theta_3)) + m_4 \ddot{\theta}_4 (L_1 L_4 (c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_4 + s \theta_1 s \theta_4)) \\ + m_4 \dot{\theta}_1 \left(\begin{array}{l} -2 \dot{\theta}_1 L_1^2 c \varphi_1 s \varphi_1 c^2 \theta_1 \\ + \dot{\varphi}_1 ((c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1) c \theta_1 (-L_1^2 s \theta_1 - L_1 L_2 s \theta_2 - L_1 L_3 s \theta_3 - L_1 L_4 s \theta_4)) \\ - 2 \dot{\theta}_2 L_1 L_2 (c \varphi_1 s \varphi_1 c \theta_1 c \theta_2) - 2 \dot{\theta}_3 L_1 L_3 (c \varphi_1 s \varphi_1 c \theta_1 c \theta_3) \\ - 2 \dot{\theta}_4 L_1 L_4 (c \varphi_1 s \varphi_1 c \theta_1 c \theta_4) \end{array} \right) \\ + m_4 \dot{\theta}_1 \left(\begin{array}{l} 2 \dot{\theta}_1 (L_1^2 (-c^2 \varphi_1 c \theta_1 s \theta_1 + s \theta_1 c \theta_1)) \\ - \dot{\varphi}_1 L_1^2 s \varphi_1 c \varphi_1 (c^2 \theta_1 - s^2 \theta_1) - \dot{\varphi}_1 s \varphi_1 c \varphi_1 s \theta_1 (-L_1 L_2 s \theta_2 - L_1 L_3 s \theta_3 - L_1 L_4 s \theta_4) \\ + \dot{\theta}_2 (L_1 L_2 (-c^2 \varphi_1 s \theta_1 c \theta_2 + c \theta_1 s \theta_2)) + \dot{\theta}_3 (L_1 L_3 (-c^2 \varphi_1 s \theta_1 c \theta_3 + c \theta_1 s \theta_3)) \\ + \dot{\theta}_4 (L_1 L_4 (-c^2 \varphi_1 s \theta_1 c \theta_4 + c \theta_1 s \theta_4)) \end{array} \right) \\ + m_4 \dot{\theta}_2 (-\dot{\varphi}_1 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_1 L_1 L_2 c \theta_2 + \dot{\theta}_2 L_1 L_2 (-c^2 \varphi_1 c \theta_1 s \theta_2 + s \theta_1 c \theta_2)) \\ m_4 \dot{\theta}_3 (-\dot{\varphi}_1 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_1 (L_1 L_3 c \theta_3) + \dot{\theta}_3 L_1 L_3 (-c^2 \varphi_1 c \theta_1 s \theta_3 + s \theta_1 c \theta_3)) \\ m_4 \dot{\theta}_4 (\dot{\varphi}_1 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_1 (-L_1 L_4 c \theta_4) + \dot{\theta}_4 L_1 L_4 (-c^2 \varphi_1 c \theta_1 s \theta_4 + s \theta_1 c \theta_4)) \end{array} \right) \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \\ \varphi_1 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{pmatrix}$$

İşlemler sadeleştirilir. $\ddot{\theta}_1$ katsayısının dışındaki tüm işlemler C4 olarak simgelenmiştir.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{ITV4}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \left(m_4 \ddot{\theta}_1 (L_1^2 (c^2 \varphi_1 c^2 \theta_1 + s^2 \theta_1)) + C4 \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{MTV5}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \begin{pmatrix} m_5 \ddot{\theta}_1 \left(-L_1 L_5 s \varphi_1 s \theta_5 c \varphi_1 c \theta_1 + L_1^2 c \theta_1 s \varphi_1 c \varphi_1 s \theta_1 \right) \\ + m_5 \ddot{\theta}_1 L_1^2 \left(c^2 \varphi_1 + s^2 \theta_1 s^2 \varphi_1 \right) + m_5 \ddot{\theta}_5 L_1 L_5 \left(c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_5 + s \theta_1 s \theta_5 \right) \\ + m_5 \dot{\theta}_1 \begin{pmatrix} 2 \dot{\theta}_1 L_1^2 \left(-c \varphi_1 s \varphi_1 + s^2 \theta_1 s \varphi_1 c \varphi_1 \right) \\ + \dot{\varphi}_1 \left(-L_1 L_5 c \theta_1 s \theta_5 \left(c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1 \right) + L_1^2 c \theta_1 s \theta_1 \left(c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1 \right) \right) \\ + \dot{\theta}_5 L_1 L_5 \left(-2 c \varphi_1 s \varphi_1 c \theta_1 c \theta_5 \right) \end{pmatrix} \\ + m_5 \dot{\theta}_1 \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 L_1^2 \left(2 s \theta_1 c \theta_1 s^2 \varphi_1 \right) \\ + \dot{\varphi}_1 \left(L_1 L_5 s \varphi_1 s \theta_5 c \varphi_1 s \theta_1 + L_1^2 s \varphi_1 c \varphi_1 \left(c^2 \theta_1 - s^2 \theta_1 \right) \right) \\ + \dot{\theta}_5 L_1 L_5 \left(-c^2 \varphi_1 c \theta_1 s \theta_5 + c \theta_1 s \theta_5 \right) \end{pmatrix} \\ + m_5 \dot{\theta}_5 \left(-\dot{\varphi}_1 L_1 L_5 s \varphi_1 c \theta_5 c \varphi_1 c \theta_1 + \dot{\theta}_5 L_1 L_5 \left(-c^2 \varphi_1 c \theta_1 s \theta_5 + s \theta_1 c \theta_5 \right) \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_5 \\ \varphi_1 \\ \theta_1 \\ \theta_5 \end{pmatrix}$$

İşlemler sadeleştirilir. $\ddot{\theta}_1$ katsayısının dışındaki tüm işlemler C5 olarak simgelenmiştir.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{MTV5}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \left(m_5 \ddot{\theta}_1 L_1^2 \left(c^2 \varphi_1 + s^2 \theta_1 s^2 \varphi_1 \right) + C5 \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{MTV6}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \begin{pmatrix} m_6 \ddot{\theta}_1 \left(-L_1^2 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_1 - L_1 L_5 s \varphi_1 s \theta_5 c \varphi_1 c \theta_1 - L_1 L_6 s \varphi_1 s \theta_6 c \varphi_1 c \theta_1 \right) + m_6 \ddot{\theta}_1 \left(L_1^2 \left(s^2 \theta_1 + c^2 \varphi_1 c^2 \theta_1 \right) \right) \\ + m_6 \ddot{\theta}_5 L_1 L_5 \left(c^2 \varphi_1 c \theta_5 c \theta_1 + s \theta_1 s \theta_5 \right) + m_6 \ddot{\theta}_6 L_1 L_6 \left(c^2 \varphi_1 c \theta_6 c \theta_1 + s \theta_1 s \theta_6 \right) \\ + m_6 \dot{\theta}_1 \begin{pmatrix} -2 \dot{\theta}_1 L_1^2 c \varphi_1 s \varphi_1 c^2 \theta_1 \\ + \dot{\varphi}_1 \left(\left(c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1 \right) \left(-L_1^2 c \theta_1 s \theta_1 - L_1 L_5 c \theta_1 s \theta_5 - L_1 L_6 c \theta_1 s \theta_6 \right) \right) \\ - 2 \dot{\theta}_5 L_1 L_5 c \varphi_1 s \varphi_1 c \theta_5 c \theta_1 - 2 \dot{\theta}_6 L_1 L_6 c \varphi_1 s \varphi_1 c \theta_6 c \theta_1 \end{pmatrix} \\ + m_6 \dot{\theta}_1 \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \left(2 L_1^2 \left(s \theta_1 c \theta_1 - c^2 \varphi_1 c \theta_1 s \theta_1 \right) \right) \\ + \dot{\varphi}_1 \left(-L_1^2 s \varphi_1 c \varphi_1 \left(c^2 \theta_1 - s^2 \theta_1 \right) + L_1 L_5 s \varphi_1 s \theta_5 c \varphi_1 s \theta_1 + L_1 L_6 s \varphi_1 s \theta_6 c \varphi_1 s \theta_1 \right) \\ + \dot{\theta}_5 L_1 L_5 \left(-c^2 \varphi_1 c \theta_5 s \theta_1 + c \theta_1 s \theta_5 \right) + \dot{\theta}_6 L_1 L_6 \left(-c^2 \varphi_1 s \theta_1 c \theta_6 + c \theta_1 s \theta_6 \right) \end{pmatrix} \\ + m_6 \dot{\theta}_5 \left(-\dot{\varphi}_1 L_1 L_5 s \varphi_1 c \theta_5 c \varphi_1 c \theta_1 + \dot{\theta}_5 L_1 L_5 \left(-c^2 \varphi_1 s \theta_5 c \theta_1 + s \theta_1 c \theta_5 \right) \right) \\ + m_6 \dot{\theta}_6 \left(\dot{\varphi}_1 \left(-L_1 L_6 s \varphi_1 c \theta_6 c \varphi_1 c \theta_1 \right) + \dot{\theta}_6 L_1 L_6 \left(-c^2 \varphi_1 c \theta_1 s \theta_6 + s \theta_1 c \theta_6 \right) \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_5 \\ \dot{\theta}_6 \\ \varphi_1 \\ \theta_1 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \end{pmatrix}$$

İşlemler sadeleştirilir. $\ddot{\theta}_1$ katsayısının dışındaki tüm işlemler C6 olarak simgelenmiştir.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{MTV6}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \left(m_6 \ddot{\theta}_1 L_1^2 \left(s^2 \theta_1 + c^2 \varphi_1 c^2 \theta_1 \right) + C6 \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{MTV7}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \begin{pmatrix} m_7 \ddot{\theta}_1 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_1 (-L_1^2 s \theta_1 - L_1 L_5 s \theta_5 - L_1 L_6 s \theta_6 - L_1 L_7 s \theta_7) \\ + m_7 \ddot{\theta}_1 (L_1^2 (c^2 \varphi_1 c^2 \theta_1 + s^2 \theta_1)) + m_7 \ddot{\theta}_5 (L_1 L_5 (c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_5 + s \theta_1 s \theta_5)) \\ + m_7 \ddot{\theta}_6 (L_1 L_6 (c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_6 + s \theta_1 s \theta_6)) + m_7 \ddot{\theta}_7 (L_1 L_7 (c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_7 + s \theta_1 s \theta_7)) \\ + m_7 \dot{\theta}_1 \begin{pmatrix} -2 \dot{\theta}_1 L_1^2 c \varphi_1 s \varphi_1 c^2 \theta_1 \\ + \dot{\varphi}_1 ((c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1) c \theta_1 (-L_1^2 s \theta_1 - L_1 L_5 s \theta_5 - L_1 L_6 s \theta_6 - L_1 L_7 s \theta_7)) \\ - 2 \dot{\theta}_5 L_1 L_5 (c \varphi_1 s \varphi_1 c \theta_1 c \theta_5) - 2 \dot{\theta}_6 L_1 L_6 (c \varphi_1 s \varphi_1 c \theta_1 c \theta_6) \\ - 2 \dot{\theta}_7 L_1 L_7 (c \varphi_1 s \varphi_1 c \theta_1 c \theta_7) \end{pmatrix} \\ + m_7 \dot{\theta}_1 \begin{pmatrix} 2 \dot{\theta}_1 (L_1^2 (-c^2 \varphi_1 c \theta_1 s \theta_7 + s \theta_1 c \theta_1)) \\ - \dot{\varphi}_1 L_1^2 s \varphi_1 c \varphi_1 (c^2 \theta_1 - s^2 \theta_1) - \dot{\varphi}_1 s \varphi_1 c \varphi_1 s \theta_1 (-L_1 L_5 s \theta_5 - L_1 L_6 s \theta_6 - L_1 L_7 s \theta_7) \\ + \dot{\theta}_5 (L_1 L_5 (-c^2 \varphi_1 s \theta_1 c \theta_5 + c \theta_1 s \theta_5)) + \dot{\theta}_6 (L_1 L_6 (-c^2 \varphi_1 s \theta_1 c \theta_6 + c \theta_1 s \theta_6)) \\ + \dot{\theta}_7 (L_1 L_7 (-c^2 \varphi_1 s \theta_1 c \theta_7 + c \theta_1 s \theta_7)) \end{pmatrix} \\ + m_7 \dot{\theta}_5 (-\dot{\varphi}_1 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_1 L_1 L_5 c \theta_5 + \dot{\theta}_5 L_1 L_5 (-c^2 \varphi_1 c \theta_1 s \theta_5 + s \theta_1 c \theta_5)) \\ + m_7 \dot{\theta}_6 (-\dot{\varphi}_1 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_1 (L_1 L_6 c \theta_6) + \dot{\theta}_6 L_1 L_6 (-c^2 \varphi_1 c \theta_1 s \theta_6 + s \theta_1 c \theta_6)) \\ + m_7 \dot{\theta}_7 (\dot{\varphi}_1 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_1 (-L_1 L_7 c \theta_7) + \dot{\theta}_7 L_1 L_7 (-c^2 \varphi_1 c \theta_1 s \theta_7 + s \theta_1 c \theta_7)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_5 \\ \dot{\theta}_6 \\ \dot{\theta}_7 \\ \varphi_1 \\ \theta_1 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \theta_7 \end{pmatrix}$$

İşlemler sadeleştirilir. $\ddot{\theta}_1$ katsayısının dışındaki tüm işlemler C4 olarak simgelenmiştir.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{MTV7}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = (m_7 \ddot{\theta}_1 L_1^2 (c^2 \varphi_1 c^2 \theta_1 + s^2 \theta_1) + C7)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{RTV8}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \begin{pmatrix} m_8 \ddot{\theta}_1 (-L_1 L_8 s \varphi_1 s \theta_8 c \varphi_1 c \theta_1 + L_1^2 c \theta_1 s \varphi_1 c \varphi_1 s \theta_1) \\ + m_8 \ddot{\theta}_1 L_1^2 (c^2 \varphi_1 + s^2 \theta_1 s^2 \varphi_1) \\ + m_8 \ddot{\theta}_8 L_1 L_8 (c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_8 + s \theta_1 s \theta_8) \\ + m_8 \dot{\theta}_1 \begin{pmatrix} 2 \dot{\theta}_1 L_1^2 (-c \varphi_1 s \varphi_1 + s^2 \theta_1 s \varphi_1 c \varphi_1) \\ + \dot{\varphi}_1 (-L_1 L_2 c \theta_1 s \theta_8 (c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1) + L_1^2 c \theta_1 s \theta_1 (c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1)) \\ + \dot{\theta}_8 L_1 L_8 (-2 c \varphi_1 s \varphi_1 c \theta_1 c \theta_8) \end{pmatrix} \\ + m_8 \dot{\theta}_1 \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 L_1^2 (2 s \theta_1 c \theta_1 s^2 \varphi_1) \\ + \dot{\varphi}_1 (L_1 L_8 s \varphi_1 s \theta_8 c \varphi_1 s \theta_1 + L_1^2 s \varphi_1 c \varphi_1 (c^2 \theta_1 - s^2 \theta_1)) \\ + \dot{\theta}_8 L_1 L_8 (-c^2 \varphi_1 c \theta_1 s \theta_8 + c \theta_1 s \theta_8) \end{pmatrix} \\ + m_8 \dot{\theta}_8 \begin{pmatrix} -\dot{\varphi}_1 L_1 L_8 s \varphi_1 c \theta_8 c \varphi_1 c \theta_1 \\ + \dot{\theta}_8 L_1 L_8 (-c^2 \varphi_1 c \theta_1 s \theta_8 + s \theta_1 c \theta_8) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_8 \\ \varphi_1 \\ \theta_1 \\ \theta_8 \end{pmatrix}$$

İşlemler sadeleştirilir. $\ddot{\theta}_1$ katsayısının dışındaki tüm işlemler C8 olarak simgelenmiştir.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{RTV8}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \left(m_8 \ddot{\theta}_1 L_1^2 (c^2 \varphi_1 + s^2 \theta_1 s^2 \varphi_1) + C8 \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{RTV9}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \left(\begin{aligned} & m_9 \ddot{\theta}_1 \left(-L_1^2 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_1 - L_1 L_8 s \varphi_1 s \theta_8 c \varphi_1 c \theta_1 - L_1 L_9 s \varphi_1 s \theta_9 c \varphi_1 c \theta_1 \right) + m_9 \ddot{\theta}_1 \left(L_1^2 (s^2 \theta_1 + c^2 \varphi_1 c^2 \theta_1) \right) \\ & + m_9 \ddot{\theta}_8 L_1 L_8 (c^2 \varphi_1 c \theta_8 c \theta_1 + s \theta_1 s \theta_8) + m_9 \ddot{\theta}_9 L_1 L_9 (c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_9 + s \theta_1 s \theta_9) \\ & + m_9 \dot{\theta}_1 \left(\begin{aligned} & -2 \dot{\theta}_1 L_1^2 c \varphi_1 s \varphi_1 c^2 \theta_1 \\ & + \dot{\varphi}_1 \left((c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1) (-L_1^2 c \theta_1 s \theta_1 - L_1 L_8 c \theta_1 s \theta_8 - L_1 L_9 c \theta_1 s \theta_9) \right) \\ & - 2 \dot{\theta}_8 L_1 L_8 c \varphi_1 s \varphi_1 c \theta_8 c \theta_1 - 2 \dot{\theta}_9 L_1 L_9 c \varphi_1 s \varphi_1 c \theta_1 c \theta_9 \end{aligned} \right) \\ & + m_9 \dot{\theta}_1 \left(\begin{aligned} & \dot{\theta}_1 \left(2 L_1^2 (s \theta_1 c \theta_1 - c^2 \varphi_1 c \theta_1 s \theta_1) \right) \\ & - \dot{\varphi}_1 \left(-L_1^2 s \varphi_1 c \varphi_1 (c^2 \theta_1 - s^2 \theta_1) + L_1 L_2 s \varphi_1 s \theta_8 c \varphi_1 s \theta_1 + L_1 L_9 s \varphi_1 s \theta_9 c \varphi_1 s \theta_1 \right) \\ & + \dot{\theta}_8 L_1 L_8 (-c^2 \varphi_1 c \theta_8 s \theta_1 + c \theta_1 s \theta_8) + \dot{\theta}_9 L_1 L_9 (-c^2 \varphi_1 s \theta_1 c \theta_9 + c \theta_1 s \theta_9) \end{aligned} \right) \\ & + m_9 \dot{\theta}_8 \left(-\dot{\varphi}_1 L_1 L_8 s \varphi_1 c \theta_8 c \varphi_1 c \theta_1 + \dot{\theta}_8 L_1 L_8 (-c^2 \varphi_1 s \theta_8 c \theta_1 + s \theta_1 c \theta_8) \right) \\ & + m_9 \dot{\theta}_9 \left(\dot{\varphi}_1 (-L_1 L_9 s \varphi_1 c \theta_9 c \varphi_1 c \theta_1) + \dot{\theta}_9 L_1 L_9 (-c^2 \varphi_1 c \theta_1 s \theta_9 + s \theta_1 c \theta_9) \right) \end{aligned} \right) \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_8 \\ \dot{\theta}_9 \\ \varphi_1 \\ \theta_1 \\ \theta_8 \\ \theta_9 \end{pmatrix}$$

İşlemler sadeleştirilir. $\ddot{\theta}_1$ katsayısının dışındaki tüm işlemler C9 olarak simgelenmiştir.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{RTV9}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \left(m_9 \ddot{\theta}_1 L_1^2 (s^2 \theta_1 + c^2 \varphi_1 c^2 \theta_1) + C9 \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{RTV10}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \left(\begin{aligned} & m_{10} \ddot{\theta}_1 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_1 (-L_1^2 s \theta_1 - L_1 L_8 s \theta_8 - L_1 L_9 s \theta_9 - L_1 L_{10} s \theta_{10}) \\ & + m_{10} \ddot{\theta}_1 \left(L_1^2 (c^2 \varphi_1 c^2 \theta_1 + s^2 \theta_1) \right) + m_{10} \ddot{\theta}_8 \left(L_1 L_8 (c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_8 + s \theta_1 s \theta_8) \right) \\ & + m_{10} \ddot{\theta}_9 \left(L_1 L_9 (c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_9 + s \theta_1 s \theta_9) \right) + m_{10} \ddot{\theta}_{10} \left(L_1 L_{10} (c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_{10} + s \theta_1 s \theta_{10}) \right) \\ & + m_{10} \dot{\theta}_1 \left(\begin{aligned} & -2 \dot{\theta}_1 L_1^2 c \varphi_1 s \varphi_1 c^2 \theta_1 \\ & + \dot{\varphi}_1 \left((c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1) c \theta_1 (-L_1^2 s \theta_1 - L_1 L_8 s \theta_8 - L_1 L_9 s \theta_9 - L_1 L_{10} s \theta_{10}) \right) \\ & - 2 \dot{\theta}_8 L_1 L_8 (c \varphi_1 s \varphi_1 c \theta_1 c \theta_8) - 2 \dot{\theta}_9 L_1 L_9 (c \varphi_1 s \varphi_1 c \theta_1 c \theta_9) \\ & - 2 \dot{\theta}_{10} L_1 L_{10} (c \varphi_1 s \varphi_1 c \theta_1 c \theta_{10}) \end{aligned} \right) \\ & + m_{10} \dot{\theta}_1 \left(\begin{aligned} & 2 \dot{\theta}_1 \left(L_1^2 (-c^2 \varphi_1 c \theta_1 s \theta_1 + s \theta_1 c \theta_1) \right) \\ & - \dot{\varphi}_1 L_1^2 s \varphi_1 c \varphi_1 (c^2 \theta_1 - s^2 \theta_1) - \dot{\varphi}_1 s \varphi_1 c \varphi_1 s \theta_1 (-L_1 L_8 s \theta_8 - L_1 L_9 s \theta_9 - L_1 L_{10} s \theta_{10}) \\ & + \dot{\theta}_8 \left(L_1 L_8 (-c^2 \varphi_1 s \theta_1 c \theta_8 + c \theta_1 s \theta_8) \right) + \dot{\theta}_9 \left(L_1 L_9 (-c^2 \varphi_1 s \theta_1 c \theta_9 + c \theta_1 s \theta_9) \right) \\ & + \dot{\theta}_{10} \left(L_1 L_{10} (-c^2 \varphi_1 s \theta_1 c \theta_{10} + c \theta_1 s \theta_{10}) \right) \end{aligned} \right) \\ & + m_{10} \dot{\theta}_8 \left(-\dot{\varphi}_1 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_1 L_1 L_8 c \theta_8 + \dot{\theta}_8 L_1 L_8 (-c^2 \varphi_1 c \theta_1 s \theta_8 + s \theta_1 c \theta_8) \right) \\ & + m_{10} \dot{\theta}_9 \left(-\dot{\varphi}_1 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_1 (L_1 L_9 c \theta_9) + \dot{\theta}_9 L_1 L_9 (-c^2 \varphi_1 c \theta_1 s \theta_9 + s \theta_1 c \theta_9) \right) \\ & + m_{10} \dot{\theta}_{10} \left(\dot{\varphi}_1 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_1 (-L_1 L_{10} c \theta_{10}) + \dot{\theta}_{10} L_1 L_{10} (-c^2 \varphi_1 c \theta_1 s \theta_{10} + s \theta_1 c \theta_{10}) \right) \end{aligned} \right) \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_8 \\ \dot{\theta}_9 \\ \dot{\theta}_{10} \\ \varphi_1 \\ \theta_1 \\ \theta_8 \\ \theta_9 \\ \theta_{10} \end{pmatrix}$$

İşlemler sadeleştirilir. $\ddot{\theta}_1$ katsayısının dışındaki tüm işlemler C10 olarak simgelenmiştir.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{RTV10}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \left(m_{10} \ddot{\theta}_1 L_1^2 (c^2 \varphi_1 c^2 \theta_1 + s^2 \theta_1) + C10 \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{LTV11}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \left(\begin{array}{l} m_{11} \ddot{\theta}_1 \left(-L_1 L_{11} s \varphi_1 s \theta_{11} c \varphi_1 c \theta_1 + L_1^2 c \theta_1 s \varphi_1 c \varphi_1 s \theta_{11} \right) \\ + m_{11} \ddot{\theta}_1 L_1^2 (c^2 \varphi_1 + s^2 \theta_1 s^2 \varphi_1) \\ + m_{11} \ddot{\theta}_{11} L_1 L_{11} (c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_{11} + s \theta_1 s \theta_{11}) \\ + m_{11} \dot{\theta}_1 \left(\begin{array}{l} 2 \dot{\theta}_1 L_1^2 (-c \varphi_1 s \varphi_1 + s^2 \theta_1 s \varphi_1 c \varphi_1) \\ - L_1 L_2 c \theta_1 s \theta_{11} (c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1) + L_1^2 c \theta_1 s \theta_1 (c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1) \\ + \dot{\theta}_{11} L_1 L_{11} (-2 c \varphi_1 s \varphi_1 c \theta_1 c \theta_{11}) \end{array} \right) \\ + m_{11} \dot{\theta}_1 \left(\begin{array}{l} \dot{\theta}_1 L_1^2 (2 s \theta_1 c \theta_1 s^2 \varphi_1) \\ + \dot{\theta}_1 \left(L_1 L_{11} s \varphi_1 s \theta_{11} c \varphi_1 s \theta_1 + L_1^2 s \varphi_1 c \varphi_1 (c^2 \theta_1 - s^2 \theta_1) \right) \\ + \dot{\theta}_{11} L_1 L_{11} (-c^2 \varphi_1 c \theta_1 s \theta_{11} + c \theta_1 s \theta_{11}) \end{array} \right) \\ + m_{11} \dot{\theta}_{11} \left(\begin{array}{l} -\dot{\theta}_1 L_1 L_{11} s \varphi_1 c \theta_{11} c \varphi_1 c \theta_1 \\ + \dot{\theta}_{11} L_1 L_{11} (-c^2 \varphi_1 c \theta_1 s \theta_{11} + s \theta_1 c \theta_{11}) \end{array} \right) \end{array} \right) \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_{11} \\ \varphi_1 \\ \theta_1 \\ \theta_{11} \end{pmatrix}$$

İşlemler sadeleştirilir. $\ddot{\theta}_1$ katsayısının dışındaki tüm işlemler C11 olarak simgelenmiştir.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{LTV11}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \left(m_{11} \ddot{\theta}_1 L_1^2 (c^2 \varphi_1 + s^2 \theta_1 s^2 \varphi_1) + C11 \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{LTV12}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \left(\begin{array}{l} m_{12} \ddot{\theta}_1 \left(-L_1^2 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_1 - L_1 L_{11} s \varphi_1 s \theta_{11} c \varphi_1 c \theta_1 - L_1 L_{12} s \varphi_1 s \theta_{12} c \varphi_1 c \theta_1 \right) + m_{12} \ddot{\theta}_1 \left(L_1^2 (s^2 \theta_1 + c^2 \varphi_1 c^2 \theta_1) \right) \\ + m_{12} \ddot{\theta}_{11} L_1 L_{11} (c^2 \varphi_1 c \theta_{11} c \theta_1 + s \theta_1 s \theta_{11}) + m_{12} \ddot{\theta}_{12} L_1 L_{12} (c^2 \varphi_1 c \theta_{12} c \theta_1 + s \theta_1 s \theta_{12}) \\ + m_{12} \dot{\theta}_1 \left(\begin{array}{l} -2 \dot{\theta}_1 L_1^2 c \varphi_1 s \varphi_1 c^2 \theta_1 \\ + \dot{\theta}_1 \left((c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1) (-L_1^2 c \theta_1 s \theta_1 - L_1 L_{11} c \theta_1 s \theta_{11} - L_1 L_{12} c \theta_1 s \theta_{12}) \right) \\ - 2 \dot{\theta}_{11} L_1 L_{11} c \varphi_1 s \varphi_1 c \theta_{11} c \theta_1 - 2 \dot{\theta}_{12} L_1 L_{12} c \varphi_1 s \varphi_1 c \theta_{12} c \theta_1 \end{array} \right) \\ + \dot{\theta}_1 \left(\begin{array}{l} 2 L_1^2 (s \theta_1 c \theta_1 - c^2 \varphi_1 c \theta_1 s \theta_1) \\ + \dot{\theta}_1 \left(-L_1^2 s \varphi_1 c \varphi_1 (c^2 \theta_1 - s^2 \theta_1) + L_1 L_{11} s \varphi_1 s \theta_{11} c \varphi_1 s \theta_1 + L_1 L_{12} s \varphi_1 s \theta_{12} c \varphi_1 s \theta_1 \right) \\ + \dot{\theta}_{11} L_1 L_{11} (-c^2 \varphi_1 c \theta_{11} s \theta_1 + c \theta_1 s \theta_{11}) + \dot{\theta}_{12} L_1 L_{12} (-c^2 \varphi_1 s \theta_{12} c \theta_1 + c \theta_1 s \theta_{12}) \end{array} \right) \\ + m_{12} \dot{\theta}_{11} \left(-\dot{\theta}_1 L_1 L_{11} s \varphi_1 c \theta_{11} c \varphi_1 c \theta_1 + \dot{\theta}_{11} L_1 L_{11} (-c^2 \varphi_1 s \theta_{11} c \theta_1 + s \theta_1 c \theta_{11}) \right) \\ + m_{12} \dot{\theta}_{12} \left(\dot{\theta}_1 (-L_1 L_{12} s \varphi_1 c \theta_{12} c \varphi_1 c \theta_1) + \dot{\theta}_{12} L_1 L_{12} (-c^2 \varphi_1 c \theta_{12} s \theta_1 + s \theta_1 c \theta_{12}) \right) \end{array} \right) \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_{11} \\ \dot{\theta}_{12} \\ \varphi_1 \\ \theta_1 \\ \theta_{11} \\ \theta_{12} \end{pmatrix}$$

İşlemler sadeleştirilir. $\ddot{\theta}_1$ katsayısının dışındaki tüm işlemler C12 olarak simgelenmiştir.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{RTV12}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \left(m_{12} \ddot{\theta}_1 L_1^2 (s^2 \theta_1 + c^2 \varphi_1 c^2 \theta_1) + C12 \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{RTV13}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \left(\begin{array}{l} m_{13} \ddot{\theta}_1 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_1 (-L_1^2 s \theta_1 - L_1 L_{11} s \theta_{11} - L_1 L_{12} s \theta_{12} - L_1 L_{13} s \theta_{13}) \\ + m_{13} \ddot{\theta}_1 (L_1^2 (c^2 \varphi_1 c^2 \theta_1 + s^2 \theta_1)) + m_{13} \ddot{\theta}_{11} (L_1 L_{11} (c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_{11} + s \theta_1 s \theta_{11})) \\ + m_{13} \ddot{\theta}_{12} (L_1 L_{12} (c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_{12} + s \theta_1 s \theta_{12})) + m_{13} \ddot{\theta}_{13} (L_1 L_{13} (c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_{13} + s \theta_1 s \theta_{13})) \\ + m_{13} \dot{\theta}_1 \left(\begin{array}{l} -2 \dot{\theta}_1 L_1^2 c \varphi_1 s \varphi_1 c^2 \theta_1 \\ + \dot{\varphi}_1 ((c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1) c \theta_1 (-L_1^2 s \theta_1 - L_1 L_{11} s \theta_{11} - L_1 L_{12} s \theta_{12} - L_1 L_{13} s \theta_{13})) \\ - 2 \dot{\theta}_{11} L_1 L_{11} (c \varphi_1 s \varphi_1 c \theta_1 c \theta_{11}) - 2 \dot{\theta}_{12} L_1 L_{12} (c \varphi_1 s \varphi_1 c \theta_1 c \theta_{12}) \\ - 2 \dot{\theta}_{13} L_1 L_{13} (c \varphi_1 s \varphi_1 c \theta_1 c \theta_{13}) \end{array} \right) \\ + m_{13} \dot{\theta}_1 \left(\begin{array}{l} 2 \dot{\theta}_1 (L_1^2 (-c^2 \varphi_1 c \theta_1 s \theta_1 + s \theta_1 c \theta_1)) \\ - \dot{\varphi}_1 L_1^2 s \varphi_1 c \varphi_1 (c^2 \theta_1 - s^2 \theta_1) - \dot{\varphi}_1 s \varphi_1 c \varphi_1 s \theta_1 (-L_1 L_{11} s \theta_{11} - L_1 L_{12} s \theta_{12} - L_1 L_{13} s \theta_{13}) \\ + \dot{\theta}_{11} (L_1 L_{11} (-c^2 \varphi_1 s \theta_1 c \theta_{11} + c \theta_1 s \theta_{11})) + \dot{\theta}_{12} (L_1 L_{12} (-c^2 \varphi_1 s \theta_1 c \theta_{12} + c \theta_1 s \theta_{12})) \\ + \dot{\theta}_{13} (L_1 L_{13} (-c^2 \varphi_1 s \theta_1 c \theta_{13} + c \theta_1 s \theta_{13})) \end{array} \right) \\ + m_{13} \dot{\theta}_{11} (-\dot{\varphi}_1 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_1 L_1 L_{11} c \theta_{11} + \dot{\theta}_{11} L_1 L_{11} (-c^2 \varphi_1 c \theta_1 s \theta_{11} + s \theta_1 c \theta_{11})) \\ + m_{13} \dot{\theta}_{12} (-\dot{\varphi}_1 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_1 (L_1 L_{12} c \theta_{12}) + \dot{\theta}_{12} L_1 L_{12} (-c^2 \varphi_1 c \theta_1 s \theta_{12} + s \theta_1 c \theta_{12})) \\ + m_{13} \dot{\theta}_{13} (\dot{\varphi}_1 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_1 (-L_1 L_{13} c \theta_{13}) + \dot{\theta}_{13} L_1 L_{13} (-c^2 \varphi_1 c \theta_1 s \theta_{13} + s \theta_1 c \theta_{13})) \end{array} \right) \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_{11} \\ \dot{\theta}_{12} \\ \dot{\theta}_{13} \\ \varphi_1 \\ \theta_1 \\ \theta_{11} \\ \theta_{12} \\ \theta_{13} \end{pmatrix}$$

İşlemler sadeleştirilir. $\ddot{\theta}_1$ katsayısının dışındaki tüm işlemler C13 olarak simgelenmiştir.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{RTV13}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \left(m_{13} \ddot{\theta}_1 (L_1^2 (c^2 \varphi_1 c^2 \theta_1 + s^2 \theta_1)) + C13 \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{TTV14}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = m_{14} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \left(-L_a^2 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_1 \right) \\ + \ddot{\theta}_2 L_a L_{14} \left(-c \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{14} - s \theta_1 s \varphi_1 c \theta_{14} c \varphi_2 + c \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{14} \right) \\ + \ddot{\theta}_1 L_a^2 \left(c^2 \varphi_1 c^2 \theta_1 + s^2 \theta_1 \right) \\ + \ddot{\theta}_{14} L_a L_{14} \left(c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14} + s \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{14} s \varphi_2 + c \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14} \right) \\ + \dot{\theta}_1 \begin{pmatrix} -\dot{\theta}_1 L_a^2 2 c \varphi_1 s \varphi_1 c^2 \theta_1 - \dot{\varphi}_1 L_a^2 s \theta_1 c \theta_1 \left(c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1 \right) \\ + \dot{\theta}_{14} L_a L_{14} \left(-s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14} + s \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{14} s \varphi_2 + s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14} \right) \\ + \dot{\varphi}_2 L_a L_{14} \left(s \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{14} - s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{14} c \varphi_2 - s \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{14} \right) \end{pmatrix} \\ + \dot{\theta}_2 \begin{pmatrix} \dot{\theta}_{14} L_a L_{14} \left(-c \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{14} + s \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{14} c \varphi_2 - c \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{14} \right) \\ + \dot{\varphi}_2 L_a L_{14} \left(-c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14} + s \theta_1 s \varphi_1 c \theta_{14} s \varphi_2 + c \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14} \right) \end{pmatrix} \\ + \dot{\theta}_1 \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 L_a^2 \left(-2 c^2 \varphi_1 c \theta_1 s \theta_1 + 2 s \theta_1 c \theta_1 \right) - \dot{\varphi}_1 L_a^2 s \varphi_1 c \varphi_1 \left(c^2 \theta_1 - s^2 \theta_1 \right) \\ + \dot{\theta}_{14} L_a L_{14} \left(-c \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14} + c \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{14} s \varphi_2 + c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14} \right) \\ + \dot{\varphi}_2 L_a L_{14} \left(c \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{14} - c \theta_1 s \varphi_1 c \theta_{14} c \varphi_2 + c \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{14} \right) \end{pmatrix} \\ + \dot{\theta}_{14} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_{14} L_a L_{14} \left(-c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14} + s \theta_1 s \varphi_1 c \theta_{14} s \varphi_2 + c \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14} \right) \\ + \dot{\varphi}_2 L_a L_{14} \left(-c \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{14} + s \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{14} c \varphi_2 - c \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{14} \right) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_{14} \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \theta_1 \\ \theta_{14} \end{pmatrix}$$

İşlemler sadeleştirilir. $\ddot{\theta}_1$ kat sayısının dışındaki tüm işlemler C14 olarak simgelenmiştir.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{TTV14}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \left(m_{14} \ddot{\theta}_1 \begin{pmatrix} L_a^2 \left(c^2 \varphi_1 c^2 \theta_1 + s^2 \theta_1 \right) \\ + 2 \dot{\theta}_{14} L_a L_{14} \left(c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14} + s \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{14} s \varphi_2 + c \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14} \right) \\ + 2 \dot{\varphi}_2^2 L_a L_{14} \left(-c \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{14} - s \theta_1 s \varphi_1 c \theta_{14} c \varphi_2 + c \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{14} \right) \end{pmatrix} + C14 \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{TTV15}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \begin{pmatrix} -m_{15} \ddot{\theta}_1 L_a^2 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_1 \\ + m_{15} \ddot{\theta}_2 \left(L_a L_{14} (-c \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{14} + c \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{14} c \varphi_2 + s \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{14}) \right. \\ \left. + L_a L_{15} (-c \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{15} + c \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{15} c \varphi_2 + s \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{15}) \right) \\ + m_{15} \ddot{\theta}_1 L_a^2 (c^2 \varphi_1 c^2 \theta_1 + s^2 \theta_1) + m_{15} \ddot{\theta}_{14} L_a L_{14} (c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14} + s \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{14} s \varphi_2 + c \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14}) \\ + m_{15} \ddot{\theta}_{15} L_a L_{15} (c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{15} + s \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{15} s \varphi_2 + c \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{15}) \\ \left(\begin{array}{l} -2 \dot{\theta}_1 L_a^2 c \varphi_1 s \varphi_1 c^2 \theta_1 - \dot{\theta}_1 L_a^2 s \theta_1 c \theta_1 (c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1) \\ + \dot{\theta}_{14} L_a L_{14} (-s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14} + s \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{14} s \varphi_2 - s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14}) \\ + m_{15} \dot{\varphi}_1 \left(L_a L_{14} (s \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{14} - c \theta_1 s \varphi_1 c \theta_{14} c \varphi_2 + c \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{14}) \right. \\ \left. + L_a L_{15} (s \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{15} - c \theta_1 s \varphi_1 c \theta_{15} c \varphi_2 + c \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{15}) \right) \\ + \dot{\theta}_{15} L_a L_{15} (-s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{15} + s \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{15} s \varphi_2 - s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{15}) \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{l} + \dot{\theta}_{14} L_a L_{14} (-c \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{14} + s \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{14} c \varphi_2 - c \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{14}) \\ + \dot{\varphi}_2 \left(L_a L_{14} (-c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14} - c \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{14} s \varphi_2 + s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14}) \right. \\ \left. + L_a L_{15} (-c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{15} - c \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{15} s \varphi_2 + s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{15}) \right) \\ + \dot{\theta}_{15} L_a L_{15} (-c \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{15} + s \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{15} c \varphi_2 - c \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{15}) \end{array} \right) \\ + m_{15} \dot{\theta}_{14} \left(\begin{array}{l} \dot{\theta}_{14} L_a L_{14} (-c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14} + s \theta_1 s \varphi_1 c \theta_{14} s \varphi_2 + c \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14}) \\ + \dot{\varphi}_2 L_a L_{14} (-c \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{14} - c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{14} c \varphi_2 - s \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{14}) \end{array} \right) \\ + m_{15} \dot{\theta}_{15} \left(\begin{array}{l} \dot{\varphi}_2 L_a L_{15} (-c \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{15} - c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{15} c \varphi_2 - s \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{15}) \\ + \dot{\theta}_{15} L_a L_{15} (-c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{15} + s \theta_1 s \varphi_1 c \theta_{15} s \varphi_2 + c \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{15}) \end{array} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_{14} \\ \dot{\theta}_{15} \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \theta_1 \\ \theta_{14} \\ \theta_{15} \end{pmatrix}$$

İşlemler sadeleştirilir. $\ddot{\theta}_1$ kat sayısının dışındaki tüm işlemler C15 olarak simgelenmiştir.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{TTV15}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = m_{15} \ddot{\theta}_1 L_a^2 (c^2 \varphi_1 c^2 \theta_1 + s^2 \theta_1) + C15$$

$$\begin{aligned}
& \left(m_{16} \ddot{\varphi}_1 L_a^2 (s\varphi_1 s\theta_1 c\varphi_1 c\theta_1 - 2c\theta_1 c\varphi_1 s\theta_1 s\varphi_1) \right. \\
& + m_{16} \ddot{\varphi}_2 \left(\begin{aligned} & -L_a c\varphi_1 c\theta_1 (L_{14} s\varphi_2 s\theta_{14} + L_{15} s\varphi_2 s\theta_{15} + L_{16} s\varphi_2 s\theta_{16}) \\ & -L_a s\theta_1 s\varphi_1 (L_{14} c\theta_{14} c\varphi_2 + L_{15} c\theta_{15} c\varphi_2 + L_{16} c\theta_{16} c\varphi_2) \\ & -L_a c\theta_1 c\varphi_1 (L_{14} s\varphi_2 c\theta_{14} + L_{15} s\varphi_2 c\theta_{15} + L_{16} s\varphi_2 c\theta_{16}) \end{aligned} \right) \\
& + m_{16} \ddot{\theta}_1 L_a^2 (2c^2\varphi_1 c^2\theta_1 + s^2\theta_1 s^2\varphi_1) \\
& + m_{16} \ddot{\theta}_{14} L_a L_{14} (c\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{14} + s\theta_1 s\varphi_1 s\theta_{14} s\varphi_2 + c\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{14}) \\
& + m_{16} \ddot{\theta}_{15} L_a L_{15} (c\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{15} + s\theta_1 s\varphi_1 s\theta_{15} s\varphi_2 - c\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{15}) \\
& + m_{16} \ddot{\theta}_{16} L_a L_{16} (c\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{16} + s\theta_1 s\varphi_1 s\theta_{16} s\varphi_2 - c\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{16}) \\
& + m_{16} \dot{\varphi}_1 \left(\begin{aligned} & \dot{\theta}_1 L_a^2 (-4c\varphi_1 s\varphi_1 c^2\theta_1 + 2s^2\theta_1 s\varphi_1 c\varphi_1) + \dot{\varphi}_1 L_a^2 (-s\theta_1 c\theta_1 (c^2\varphi_1 - s^2\varphi_1)) \\ & + \dot{\theta}_{14} L_a L_{14} (-s\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{14} + s\theta_1 c\varphi_1 s\theta_{14} s\varphi_2 - s\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{14}) \\ & + \dot{\varphi}_2 \left(\begin{aligned} & L_a s\varphi_1 c\theta_1 (L_{14} s\varphi_2 s\theta_{14} + L_{15} s\varphi_2 s\theta_{15} + L_{16} s\varphi_2 s\theta_{16}) \\ & -L_a s\theta_1 c\varphi_1 (L_{14} c\theta_{14} c\varphi_2 + L_{15} c\theta_{15} c\varphi_2 + L_{16} c\theta_{16} c\varphi_2) \\ & + L_a c\theta_1 s\varphi_1 (L_{14} s\varphi_2 c\theta_{14} + L_{15} s\varphi_2 c\theta_{15} + L_{16} s\varphi_2 c\theta_{16}) \end{aligned} \right) \\ & + \dot{\theta}_{15} (L_a L_{15} (-s\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{15} + s\theta_1 c\varphi_1 s\theta_{15} s\varphi_2 + s\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{15})) \\ & + \dot{\theta}_{16} (L_a L_{16} (-s\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{16} + s\theta_1 c\varphi_1 s\theta_{16} s\varphi_2 + s\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{16})) \end{aligned} \right) \\
& + m_{16} \dot{\varphi}_2 \left(\begin{aligned} & \dot{\theta}_{14} (L_a L_{14} (-c\varphi_1 c\theta_1 s\varphi_2 c\theta_{14} + s\theta_1 s\varphi_1 s\theta_{14} c\varphi_2 - c\varphi_1 c\theta_1 s\varphi_2 s\theta_{14})) \\ & + \dot{\varphi}_2 \left(\begin{aligned} & -L_a c\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 (L_{14} s\theta_{14} + L_{15} s\theta_{15} + L_{16} s\theta_{16}) \\ & + L_a s\theta_1 s\varphi_1 s\varphi_2 (L_{14} c\theta_{14} + L_{15} c\theta_{15} + L_{16} c\theta_{16}) \\ & -L_a c\theta_1 c\varphi_1 c\varphi_2 (L_{14} c\theta_{14} + L_{15} c\theta_{15} + L_{16} c\theta_{16}) \end{aligned} \right) \\ & + \dot{\theta}_{15} L_a L_{15} (-c\varphi_1 c\theta_1 s\varphi_2 c\theta_{15} + s\theta_1 s\varphi_1 s\theta_{15} c\varphi_2 + c\varphi_1 c\theta_1 s\varphi_2 s\theta_{15}) \\ & + \dot{\theta}_{16} L_a L_{16} (-c\varphi_1 c\theta_1 s\varphi_2 c\theta_{16} + s\theta_1 s\varphi_1 s\theta_{16} c\varphi_2 + c\varphi_1 c\theta_1 s\varphi_2 s\theta_{16}) \end{aligned} \right) \\
& + m_{16} \dot{\theta}_1 \left(\begin{aligned} & \dot{\theta}_1 L_a^2 (-4c^2\varphi_1 c\theta_1 s\theta_1 + 2s\theta_1 c\theta_1 s^2\varphi_1) + \dot{\varphi}_1 L_a^2 (-s\varphi_1 c\varphi_1 (c^2\theta_1 - s^2\theta_1)) \\ & + \dot{\theta}_{14} L_a L_{14} (-c\varphi_1 s\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{14} + c\theta_1 s\varphi_1 s\theta_{14} s\varphi_2 - c\varphi_1 s\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{14}) \\ & + \dot{\varphi}_2 \left(\begin{aligned} & L_a c\varphi_1 s\theta_1 (L_{14} s\varphi_2 s\theta_{14} + L_{15} s\varphi_2 s\theta_{15} + L_{16} s\varphi_2 s\theta_{16}) \\ & -L_a c\theta_1 s\varphi_1 (L_{14} c\theta_{14} c\varphi_2 + L_{15} c\theta_{15} c\varphi_2 + L_{16} c\theta_{16} c\varphi_2) \\ & + L_a s\theta_1 c\varphi_1 (L_{14} s\varphi_2 c\theta_{14} + L_{15} s\varphi_2 c\theta_{15} + L_{16} s\varphi_2 c\theta_{16}) \end{aligned} \right) \\ & + \dot{\theta}_{15} L_a L_{15} (-c\varphi_1 s\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{15} + c\theta_1 s\varphi_1 s\theta_{15} s\varphi_2 + c\varphi_1 s\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{15}) \\ & + \dot{\theta}_{16} L_a L_{16} (-c\varphi_1 s\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{16} + c\theta_1 s\varphi_1 s\theta_{16} s\varphi_2 + c\varphi_1 s\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{16}) \end{aligned} \right) \\
& + m_{16} \dot{\theta}_{14} \left(\begin{aligned} & \dot{\theta}_{14} L_a L_{14} (-c\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{14} + s\theta_1 s\varphi_1 c\theta_{14} s\varphi_2 + c\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{14}) \\ & + \dot{\varphi}_2 (-L_a c\varphi_1 c\theta_1 L_{14} s\varphi_2 c\theta_{14} + L_a s\theta_1 s\varphi_1 L_{14} s\theta_{14} c\varphi_2 + L_a c\theta_1 c\varphi_1 L_{14} s\varphi_2 s\theta_{14}) \end{aligned} \right) \\
& + m_{16} \dot{\theta}_{15} \left(\begin{aligned} & \dot{\varphi}_2 (-L_a c\varphi_1 c\theta_1 L_{15} s\varphi_2 c\theta_{15} + L_a s\theta_1 s\varphi_1 L_{15} c\theta_{15} s\varphi_2 + L_a c\theta_1 c\varphi_1 L_{15} s\varphi_2 s\theta_{15}) \\ & + \dot{\theta}_{15} L_a L_{15} (-c\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{15} + s\theta_1 s\varphi_1 c\theta_{15} s\varphi_2 + c\varphi_1 c\theta_1 s\varphi_2 s\theta_{15}) \end{aligned} \right) \\
& + m_{16} \left(\begin{aligned} & \dot{\varphi}_2 (-L_a c\varphi_1 c\theta_1 L_{16} s\varphi_2 c\theta_{16} + L_a s\theta_1 s\varphi_1 L_{16} c\theta_{16} s\varphi_2 + L_a c\theta_1 c\varphi_1 L_{16} s\varphi_2 s\theta_{16}) \\ & + \dot{\theta}_{16} L_a L_{16} (-c\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{16} + s\theta_1 s\varphi_1 c\theta_{16} s\varphi_2 - c\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{16}) \end{aligned} \right) \Bigg) \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_{14} \\ \dot{\theta}_{15} \\ \dot{\theta}_{16} \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \theta_1 \\ \theta_{14} \\ \theta_{15} \\ \theta_{16} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

İşlemler sadeleştirilir. $\ddot{\theta}_1$ kat sayısının dışındaki tüm işlemler C16 olarak simgelenmiştir.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{TTV16}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = m_{16} \ddot{\theta}_1 L_a^2 (2c^2 \varphi_1 c^2 \theta_1 + s^2 \theta_1 s^2 \varphi_1) + C16$$

EK-B. 5

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_W}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L_W}{\partial \theta_1} = \tau_1$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_W}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \left[\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{WTV1}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{ITV2}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{ITV3}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{ITV4}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) \\ & + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{MTV5}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{MTV6}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{MTV7}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) \\ & + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{RTV8}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{RTV9}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{RTV10}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) \\ & + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{LTV11}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{LTV12}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{LTV13}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) \\ & + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{TTV14}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{TTV15}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{TTV16}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) \end{aligned} \right]$$

$$\frac{\partial L_W}{\partial \theta_1} = \left[\begin{aligned} & \frac{\partial L_{WTV1}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial L_{ITV2}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial L_{ITV3}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial L_{ITV4}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial L_{MTV5}}{\partial \theta_1} \\ & + \frac{\partial L_{MTV6}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial L_{MTV7}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial L_{RTV8}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial L_{RTV9}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial L_{RTV10}}{\partial \theta_1} \\ & + \frac{\partial L_{LTV11}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial L_{LTV12}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial L_{LTV13}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial L_{TTV14}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial L_{TTV15}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial L_{TTV16}}{\partial \theta_1} \end{aligned} \right]$$

EK-B. 6

$$\frac{\partial L_W}{\partial \varphi_1} = \left[\begin{aligned} & \frac{\partial L_{WTV1}}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial L_{ITV2}}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial L_{ITV3}}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial L_{ITV4}}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial L_{MTV5}}{\partial \varphi_1} \\ & + \frac{\partial L_{MTV6}}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial L_{MTV7}}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial L_{RTV8}}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial L_{RTV9}}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial L_{RTV10}}{\partial \varphi_1} \\ & + \frac{\partial L_{LTV11}}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial L_{LTV12}}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial L_{LTV13}}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial L_{TTV14}}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial L_{TTV15}}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial L_{TTV16}}{\partial \varphi_1} \end{aligned} \right]$$

$$\frac{\partial L_{wTV1}}{\partial \varphi_1} = \left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} \dot{\varphi}_1^2 \left(L_1^2 \left(-s\varphi_1 c\varphi_1 - c^2 \theta_1 c\varphi_1 s\varphi_1 \right) \right) \\ + \dot{\theta}_1^2 \left(L_1^2 \left(-c\varphi_1 s\varphi_1 c^2 \theta_1 + s^2 \theta_1 \right) \right) \\ - \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 L_1^2 c \theta_1 s\theta_1 \left(c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1 \right) \end{array} \right) \\ + m_1 g L_1 s\varphi_1 c \theta_1 \end{array} \right)$$

$$\frac{\partial L_{ITV2}}{\partial \varphi_1} = \left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} \dot{\varphi}_1^2 \left(L_1^2 \left(s\varphi_1 c\varphi_1 - c^2 \theta_1 c\varphi_1 s\varphi_1 \right) + L_2^2 \left(s\varphi_1 c\varphi_1 - c^2 \theta_2 c\varphi_1 s\varphi_1 \right) \right) \\ + 2L_1 L_2 \left(s\varphi_1 c\varphi_1 s \theta_1 s \theta_2 \right) \\ + \dot{\theta}_1^2 \left(L_1^2 \left(-c\varphi_1 s\varphi_1 + s^2 \theta_1 s\varphi_1 c\varphi_1 \right) \right) \\ + \dot{\theta}_2^2 \left(L_2^2 \left(-c\varphi_1 s\varphi_1 + s^2 \theta_2 s\varphi_1 c\varphi_1 \right) \right) \\ + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 \left(-L_1 L_2 s \theta_2 c\theta_1 \left(c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1 \right) + L_1^2 c\theta_1 s \theta_1 \left(c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1 \right) \right) \\ + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 \left(-L_1 L_2 s \theta_1 c\theta_2 \left(c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1 \right) - L_2^2 c\theta_2 s\theta_2 \left(c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1 \right) \right) \\ + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \left(L_1 L_2 \left(-c\varphi_1 s\varphi_1 c\theta_1 c\theta_2 + s\theta_1 s\theta_2 \right) \right) \end{array} \right) \\ + m_2 g \left(L_1 s\varphi_1 c \theta_1 + L_2 s\varphi_1 c \theta_2 \right) \end{array} \right)$$

$$\frac{\partial L_{ITV3}}{\partial \varphi_1} = \left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} \dot{\varphi}_1^2 \left(L_1^2 \left(s\varphi_1 c\varphi_1 - c^2 \theta_1 c\varphi_1 s\varphi_1 \right) + L_2^2 \left(s\varphi_1 c\varphi_1 - c^2 \theta_2 c\varphi_1 s\varphi_1 \right) \right) \\ + L_3^2 \left(s\varphi_1 c\varphi_1 - c^2 \theta_3 c\varphi_1 s\varphi_1 \right) \\ + 2 \left(L_1 L_2 \left(s\varphi_1 c\varphi_1 s \theta_1 s \theta_2 \right) + L_2 L_3 \left(s\varphi_1 c\varphi_1 s \theta_2 s \theta_3 \right) \right) \\ + \dot{\theta}_1^2 L_1^2 \left(-c\varphi_1 s\varphi_1 c^2 \theta_1 \right) + \dot{\theta}_2^2 L_2^2 \left(-c\varphi_1 s\varphi_1 s^2 \theta_2 \right) \\ + \dot{\theta}_3^2 L_3^2 \left(-c\varphi_1 s\varphi_1 c^2 \theta_3 \right) \\ + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 \left(c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1 \right) \left(-L_1^2 s \theta_1 c\theta_1 - L_1 L_2 s \theta_2 c\theta_1 - L_1 L_3 s \theta_3 c\theta_1 \right) \\ + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 \left(c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1 \right) \left(-L_1 L_2 c\theta_2 s \theta_1 - L_2^2 s \theta_2 c\theta_2 - L_2 L_3 s \theta_3 c\theta_2 \right) \\ + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_3 \left(c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1 \right) \left(-L_1 L_3 s \theta_1 c\theta_3 - L_2 L_3 s \theta_2 c\theta_3 - L_3^2 c\theta_3 s \theta_3 \right) \\ + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \left(L_1 L_2 \right) \left(-2c\varphi_1 s\varphi_1 c\theta_2 c\theta_1 \right) + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \left(\left(L_1 L_3 \right) \left(-2c\varphi_1 s\varphi_1 c\theta_1 c\theta_3 \right) \right) \\ + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \left(\left(L_2 L_3 \right) \left(-2c\varphi_1 s\varphi_1 c\theta_2 c\theta_3 \right) \right) \end{array} \right) \\ + m_3 g \left(L_1 s\varphi_1 c \theta_1 + L_2 s\varphi_1 c \theta_2 + L_3 s\varphi_1 c \theta_3 \right) \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_{ITV4}}{\partial \varphi_1} = & \left(\begin{aligned} & \dot{\varphi}_1^2 \left(L_1^2 (s\varphi_1 c\varphi_1 s^2 \theta_1) + L_2^2 (s\varphi_1 c\varphi_1 s^2 \theta_2) \right. \\ & \quad \left. + L_3^2 (s\varphi_1 c\varphi_1 s^2 \theta_3) + L_4^2 (s\varphi_1 c\varphi_1 s^2 \theta_4) \right) \\ & + \dot{\theta}_1^2 (L_1^2 (-c\varphi_1 s\varphi_1 c^2 \theta_1)) + \dot{\theta}_2^2 (L_2^2 (-c\varphi_1 s\varphi_1 c^2 \theta_2)) \\ & + \dot{\theta}_3^2 (L_3^2 (-c\varphi_1 s\varphi_1 c^2 \theta_3)) + \dot{\theta}_4^2 (L_4^2 (-c\varphi_1 s\varphi_1 c^2 \theta_4)) \\ & + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 ((c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1) c\theta_1 (-L_1^2 s\theta_1 - L_1 L_2 s\theta_2 - L_1 L_3 s\theta_3 - L_1 L_4 s\theta_4)) \\ & + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 ((c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1) c\theta_2 (-L_1 L_2 s\theta_1 - L_2^2 s\theta_2 - L_2 L_3 s\theta_3 - L_2 L_4 s\theta_4)) \\ & + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_3 ((c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1) c\theta_3 (-L_1 L_3 s\theta_1 - L_2 L_3 s\theta_2 - L_3^2 s\theta_3 - L_3 L_4 s\theta_4)) \\ & + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_4 ((c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1) c\theta_4 (-L_1 L_4 s\theta_1 - L_2 L_4 s\theta_2 - L_3 L_4 s\theta_3 - L_4^2 s\theta_4)) \\ & + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (L_1 L_2 (-2c\varphi_1 s\varphi_1 c\theta_1 c\theta_2)) + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 (L_1 L_3 (-2c\varphi_1 s\varphi_1 c\theta_1 c\theta_3)) \\ & + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 (L_1 L_4 (-2c\varphi_1 s\varphi_1 c\theta_1 c\theta_4)) + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 (L_2 L_3 (-2c\varphi_1 s\varphi_1 c\theta_2 c\theta_3)) \\ & + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 (L_2 L_4 (-2c\varphi_1 s\varphi_1 c\theta_2 c\theta_4)) + \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 (L_3 L_4 (-2c\varphi_1 s\varphi_1 c\theta_3 c\theta_4)) \\ & + m_4 g (L_1 s\varphi_1 c\theta_1 + L_2 s\varphi_1 c\theta_2 + L_3 s\varphi_1 c\theta_3 + L_4 s\varphi_1 c\theta_4) \end{aligned} \right) \\
\frac{\partial L_{MTV5}}{\partial \varphi_1} = & \left(\begin{aligned} & \dot{\varphi}_1^2 \left(L_1^2 (s\varphi_1 c\varphi_1 - c^2 \theta_1 c\varphi_1 s\varphi_1) + L_2^2 (s\varphi_1 c\varphi_1 - c^2 \theta_5 c\varphi_1 s\varphi_1) \right. \\ & \quad \left. + 2L_1 L_5 (s\varphi_1 c\varphi_1 s\theta_1 s\theta_5) \right) \\ & + \dot{\theta}_1^2 (L_1^2 (-c\varphi_1 s\varphi_1 + s^2 \theta_1 s\varphi_1 c\varphi_1)) \\ & + \dot{\theta}_5^2 (L_5^2 (-c\varphi_1 s\varphi_1 + s^2 \theta_5 s\varphi_1 c\varphi_1)) \\ & + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 (-L_1 L_5 s\theta_5 c\theta_1 (c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1) + L_1^2 c\theta_1 s\theta_1 (c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1)) \\ & + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_5 (-L_1 L_5 s\theta_1 c\theta_5 (c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1) - L_5^2 c\theta_5 s\theta_5 (c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1)) \\ & + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 (L_1 L_5 (-c\varphi_1 s\varphi_1 c\theta_1 c\theta_5 + s\theta_1 s\theta_5)) \\ & + m_5 g (L_1 s\varphi_1 c\theta_1 + L_5 s\varphi_1 c\theta_5) \end{aligned} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_{MTV6}}{\partial \varphi_1} &= m_6 \left(\begin{aligned} &\left(\begin{aligned} &L_1^2 (s\varphi_1 c\varphi_1 - c^2\theta_1 c\varphi_1 s\varphi_1) + L_5^2 (s\varphi_1 c\varphi_1 - c^2\theta_5 c\varphi_1 s\varphi_1) \\ &+ L_6^2 (s\varphi_1 c\varphi_1 - c^2\theta_6 c\varphi_1 s\varphi_1) \\ &2(L_1 L_5 (s\varphi_1 c\varphi_1 s\theta_1 s\theta_5) + L_5 L_6 (s\varphi_1 c\varphi_1 s\theta_5 s\theta_6)) \end{aligned} \right) \\ &+ \dot{\theta}_1^2 L_1^2 (-c\varphi_1 s\varphi_1 c^2\theta_1) + \dot{\theta}_5^2 L_5^2 (-c\varphi_1 s\varphi_1 s^2\theta_5) \\ &+ \dot{\theta}_6^2 L_6^2 (-c\varphi_1 s\varphi_1 c^2\theta_6) \\ &+ \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 (c^2\varphi_1 - s^2\varphi_1) (-L_1^2 s\theta_1 c\theta_1 - L_1 L_5 s\theta_5 c\theta_1 - L_1 L_6 s\theta_6 c\theta_1) \\ &+ \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_5 (c^2\varphi_1 - s^2\varphi_1) (-L_1 L_5 c\theta_5 s\theta_1 - L_5^2 s\theta_5 c\theta_5 - L_5 L_6 s\theta_6 c\theta_5) \\ &+ \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_6 (c^2\varphi_1 - s^2\varphi_1) (-L_1 L_6 s\theta_1 c\theta_6 - L_5 L_6 s\theta_5 c\theta_6 - L_6^2 c\theta_6 s\theta_6) \\ &+ \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 (L_1 L_5) (-2c\varphi_1 s\varphi_1 c\theta_5 c\theta_1) + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_6 ((L_1 L_6) (-2c\varphi_1 s\varphi_1 c\theta_1 c\theta_6)) \\ &+ \dot{\theta}_5 \dot{\theta}_6 ((L_5 L_6) (-2c\varphi_1 s\varphi_1 c\theta_5 c\theta_6)) \end{aligned} \right) \\ &+ m_6 g (L_1 s\varphi_1 c\theta_1 + L_5 s\varphi_1 c\theta_5 + L_6 s\varphi_1 c\theta_6)
\end{aligned} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_{MTV7}}{\partial \varphi_1} &= m_7 \left(\begin{aligned} &\left(\begin{aligned} &L_1^2 (s\varphi_1 c\varphi_1 s^2\theta_1) + L_5^2 (s\varphi_1 c\varphi_1 s^2\theta_5) \\ &+ L_6^2 (s\varphi_1 c\varphi_1 s^2\theta_6) + L_7^2 (s\varphi_1 c\varphi_1 s^2\theta_7) \end{aligned} \right) \\ &+ \dot{\theta}_1^2 (L_1^2 (-c\varphi_1 s\varphi_1 c^2\theta_1)) + \dot{\theta}_5^2 (L_5^2 (-c\varphi_1 s\varphi_1 c^2\theta_5)) \\ &+ \dot{\theta}_6^2 (L_6^2 (-c\varphi_1 s\varphi_1 c^2\theta_6)) + \dot{\theta}_7^2 (L_7^2 (-c\varphi_1 s\varphi_1 c^2\theta_7)) \\ &+ \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 ((c^2\varphi_1 - s^2\varphi_1) c\theta_1 (-L_1^2 s\theta_1 - L_1 L_5 s\theta_5 - L_1 L_6 s\theta_6 - L_1 L_7 s\theta_7)) \\ &+ \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_5 ((c^2\varphi_1 - s^2\varphi_1) c\theta_5 (-L_1 L_5 s\theta_1 - L_5^2 s\theta_5 - L_5 L_6 s\theta_6 - L_5 L_7 s\theta_7)) \\ &+ \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_6 ((c^2\varphi_1 - s^2\varphi_1) c\theta_6 (-L_1 L_6 s\theta_1 - L_5 L_6 s\theta_5 - L_6^2 s\theta_6 - L_6 L_7 s\theta_7)) \\ &+ \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_7 ((c^2\varphi_1 - s^2\varphi_1) c\theta_7 (-L_1 L_7 s\theta_1 - L_5 L_7 s\theta_5 - L_6 L_7 s\theta_6 - L_7^2 s\theta_7)) \\ &+ \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 (L_1 L_5 (-2c\varphi_1 s\varphi_1 c\theta_1 c\theta_5)) + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_6 (L_1 L_6 (-2c\varphi_1 s\varphi_1 c\theta_1 c\theta_6)) \\ &+ \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_7 (L_1 L_7 (-2c\varphi_1 s\varphi_1 c\theta_1 c\theta_7)) + \dot{\theta}_5 \dot{\theta}_6 (L_5 L_6 (-2c\varphi_1 s\varphi_1 c\theta_5 c\theta_6)) \\ &+ \dot{\theta}_5 \dot{\theta}_7 (L_5 L_7 (-2c\varphi_1 s\varphi_1 c\theta_5 c\theta_7)) + \dot{\theta}_6 \dot{\theta}_7 (L_6 L_7 (-2c\varphi_1 s\varphi_1 c\theta_6 c\theta_7)) \end{aligned} \right) \\ &+ m_7 g (L_1 s\varphi_1 c\theta_1 + L_5 s\varphi_1 c\theta_5 + L_6 s\varphi_1 c\theta_6 + L_7 s\varphi_1 c\theta_7)
\end{aligned} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_{RTV8}}{\partial \varphi_1} &= \left(\begin{aligned} &\left(\begin{aligned} &\dot{\varphi}_1^2 \left(L_1^2 (s\varphi_1 c\varphi_1 - c^2\theta_1 c\varphi_1 s\varphi_1) + L_8^2 (s\varphi_1 c\varphi_1 - c^2\theta_8 c\varphi_1 s\varphi_1) \right) \\ &+ 2L_1 L_8 (s\varphi_1 c\varphi_1 s\theta_1 s\theta_8) \end{aligned} \right) \\ &+ \dot{\theta}_1^2 \left(L_1^2 (-c\varphi_1 s\varphi_1 + s^2\theta_1 s\varphi_1 c\varphi_1) \right) \\ &+ \dot{\theta}_8^2 \left(L_8^2 (-c\varphi_1 s\varphi_1 + s^2\theta_8 s\varphi_1 c\varphi_1) \right) \\ &+ \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 \left(-L_1 L_8 s\theta_8 c\theta_1 (c^2\varphi_1 - s^2\varphi_1) + L_1^2 c\theta_1 s\theta_1 (c^2\varphi_1 - s^2\varphi_1) \right) \\ &+ \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_8 \left(-L_1 L_8 s\theta_1 c\theta_8 (c^2\varphi_1 - s^2\varphi_1) - L_8^2 c\theta_8 s\theta_8 (c^2\varphi_1 - s^2\varphi_1) \right) \\ &+ \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_8 (L_1 L_8 (-c\varphi_1 s\varphi_1 c\theta_1 c\theta_8 + s\theta_1 s\theta_8)) \end{aligned} \right) \\ &+ m_8 g (L_1 s\varphi_1 c\theta_1 + L_8 s\varphi_1 c\theta_8) \end{aligned} \right) \\
\frac{\partial L_{RTV9}}{\partial \varphi_1} &= \left(\begin{aligned} &\left(\begin{aligned} &\dot{\varphi}_1^2 \left(L_1^2 (s\varphi_1 c\varphi_1 - c^2\theta_1 c\varphi_1 s\varphi_1) + L_8^2 (s\varphi_1 c\varphi_1 - c^2\theta_8 c\varphi_1 s\varphi_1) \right) \\ &+ L_9^2 (s\varphi_1 c\varphi_1 - c^2\theta_9 c\varphi_1 s\varphi_1) \\ &+ 2(L_1 L_8 (s\varphi_1 c\varphi_1 s\theta_1 s\theta_8) + L_8 L_9 (s\varphi_1 c\varphi_1 s\theta_8 s\theta_9)) \end{aligned} \right) \\ &+ \dot{\theta}_1^2 L_1^2 (-c\varphi_1 s\varphi_1 c^2\theta_1) + \dot{\theta}_8^2 L_8^2 (-c\varphi_1 s\varphi_1 s^2\theta_8) \\ &+ \dot{\theta}_9^2 L_9^2 (-c\varphi_1 s\varphi_1 c^2\theta_9) \\ &+ \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 (c^2\varphi_1 - s^2\varphi_1) (-L_1^2 s\theta_1 c\theta_1 - L_1 L_8 s\theta_8 c\theta_1 - L_1 L_9 s\theta_9 c\theta_1) \\ &+ \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_8 (c^2\varphi_1 - s^2\varphi_1) (-L_1 L_8 c\theta_8 s\theta_1 - L_8^2 s\theta_8 c\theta_8 - L_8 L_9 s\theta_9 c\theta_8) \\ &+ \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_9 (c^2\varphi_1 - s^2\varphi_1) (-L_1 L_9 s\theta_1 c\theta_9 - L_8 L_9 s\theta_8 c\theta_9 - L_9^2 c\theta_9 s\theta_9) \\ &+ \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_8 (L_1 L_8) (-2c\varphi_1 s\varphi_1 c\theta_8 c\theta_1) + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_9 ((L_1 L_9) (-2c\varphi_1 s\varphi_1 c\theta_1 c\theta_9)) \\ &+ \dot{\theta}_8 \dot{\theta}_9 ((L_8 L_9) (-2c\varphi_1 s\varphi_1 c\theta_8 c\theta_9)) \end{aligned} \right) \\ &+ m_9 g (L_1 s\varphi_1 c\theta_1 + L_8 s\varphi_1 c\theta_8 + L_9 s\varphi_1 c\theta_9) \end{aligned} \right)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial L_{RTV10}}{\partial \varphi_1} = m_{10} \left(\begin{aligned} & \dot{\varphi}_1^2 \left(L_1^2 (s\varphi_1 c\varphi_1 s^2 \theta_1) + L_8^2 (s\varphi_1 c\varphi_1 s^2 \theta_8) \right. \\ & \quad \left. + L_9^2 (s\varphi_1 c\varphi_1 s^2 \theta_9) + L_{10}^2 (s\varphi_1 c\varphi_1 s^2 \theta_{10}) \right) \\ & + \dot{\theta}_1^2 (L_1^2 (-c\varphi_1 s\varphi_1 c^2 \theta_1)) + \dot{\theta}_8^2 (L_8^2 (-c\varphi_1 s\varphi_1 c^2 \theta_8)) \\ & + \dot{\theta}_9^2 (L_9^2 (-c\varphi_1 s\varphi_1 c^2 \theta_9)) + \dot{\theta}_{10}^2 (L_{10}^2 (-c\varphi_1 s\varphi_1 c^2 \theta_{10})) \\ & + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 ((c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1) c\theta_1 (-L_1^2 s\theta_1 - L_1 L_2 s\theta_8 - L_1 L_9 s\theta_9 - L_1 L_{10} s\theta_{10})) \\ & + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_8 ((c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1) c\theta_8 (-L_1 L_8 s\theta_1 - L_8^2 s\theta_8 - L_8 L_9 s\theta_9 - L_8 L_{10} s\theta_{10})) \\ & + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_9 ((c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1) c\theta_9 (-L_1 L_9 s\theta_1 - L_8 L_9 s\theta_8 - L_9^2 s\theta_9 - L_9 L_{10} s\theta_{10})) \\ & + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{10} ((c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1) c\theta_{10} (-L_1 L_{10} s\theta_1 - L_8 L_{10} s\theta_8 - L_9 L_{10} s\theta_9 - L_{10}^2 s\theta_{10})) \\ & + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_8 (L_1 L_8 (-2c\varphi_1 s\varphi_1 c\theta_1 c\theta_8)) + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_9 (L_1 L_9 (-2c\varphi_1 s\varphi_1 c\theta_1 c\theta_9)) \\ & + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{10} (L_1 L_{10} (-2c\varphi_1 s\varphi_1 c\theta_1 c\theta_{10})) + \dot{\theta}_8 \dot{\theta}_9 (L_8 L_9 (-2c\varphi_1 s\varphi_1 c\theta_8 c\theta_9)) \\ & + \dot{\theta}_8 \dot{\theta}_{10} (L_8 L_{10} (-2c\varphi_1 s\varphi_1 c\theta_8 c\theta_{10})) + \dot{\theta}_9 \dot{\theta}_{10} (L_9 L_{10} (-2c\varphi_1 s\varphi_1 c\theta_9 c\theta_{10})) \\ & + m_{10} g (L_1 s\varphi_1 c\theta_1 + L_8 s\varphi_1 c\theta_8 + L_9 s\varphi_1 c\theta_9 + L_{10} s\varphi_1 c\theta_{10}) \end{aligned} \right)$$

$$\frac{\partial L_{LTV11}}{\partial \varphi_1} = m_{11} \left(\begin{aligned} & \dot{\varphi}_1^2 \left(L_1^2 (s\varphi_1 c\varphi_1 - c^2 \theta_1 c\varphi_1 s\varphi_1) + L_{11}^2 (s\varphi_1 c\varphi_1 - c^2 \theta_{11} c\varphi_1 s\varphi_1) \right. \\ & \quad \left. + 2L_1 L_{11} (s\varphi_1 c\varphi_1 s\theta_1 s\theta_{11}) \right) \\ & + \dot{\theta}_1^2 (L_1^2 (-c\varphi_1 s\varphi_1 + s^2 \theta_1 s\varphi_1 c\varphi_1)) \\ & + \dot{\theta}_{11}^2 (L_{11}^2 (-c\varphi_1 s\varphi_1 + s^2 \theta_{11} s\varphi_1 c\varphi_1)) \\ & + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 (-L_1 L_{11} s\theta_{11} c\theta_1 (c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1) + L_1^2 c\theta_1 s\theta_1 (c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1)) \\ & + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{11} (-L_1 L_{11} s\theta_1 c\theta_{11} (c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1) - L_{11}^2 c\theta_{11} s\theta_{11} (c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1)) \\ & + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{11} (L_1 L_{11} (-c\varphi_1 s\varphi_1 c\theta_1 c\theta_{11} + s\theta_1 s\theta_{11})) \\ & + m_{11} g (L_1 s\varphi_1 c\theta_1 + L_{11} s\varphi_1 c\theta_{11}) \end{aligned} \right)$$

$$\frac{\partial L_{LTV12}}{\partial \varphi_1} = \left(\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} L_1^2 (s\varphi_1 c\varphi_1 - c^2\theta_1 c\varphi_1 s\varphi_1) + L_{11}^2 (s\varphi_1 c\varphi_1 - c^2\theta_{11} c\varphi_1 s\varphi_1) \\ + L_{12}^2 (s\varphi_1 c\varphi_1 - c^2\theta_{12} c\varphi_1 s\varphi_1) \\ 2(L_1 L_{11} (s\varphi_1 c\varphi_1 s\theta_1 s\theta_{11}) + L_{11} L_{12} (s\varphi_1 c\varphi_1 s\theta_{11} s\theta_{12})) \end{array} \right) \\ + \dot{\theta}_1^2 L_1^2 (-c\varphi_1 s\varphi_1 c^2\theta_1) + \dot{\theta}_{11}^2 L_{11}^2 (-c\varphi_1 s\varphi_1 s^2\theta_{11}) \\ + \dot{\theta}_{12}^2 L_{12}^2 (-c\varphi_1 s\varphi_1 c^2\theta_{12}) \\ + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 (c^2\varphi_1 - s^2\varphi_1) (-L_1^2 s\theta_1 c\theta_1 - L_1 L_{11} s\theta_{11} c\theta_1 - L_1 L_{12} s\theta_{12} c\theta_1) \\ + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{11} (c^2\varphi_1 - s^2\varphi_1) (-L_1 L_{11} c\theta_{11} s\theta_1 - L_{11}^2 s\theta_{11} c\theta_{11} - L_{11} L_{12} s\theta_{12} c\theta_{11}) \\ + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{12} (c^2\varphi_1 - s^2\varphi_1) (-L_1 L_{12} s\theta_1 c\theta_{12} - L_{11} L_{12} s\theta_{11} c\theta_{12} - L_{12}^2 c\theta_{12} s\theta_{12}) \\ + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{11} (L_1 L_{11}) (-2c\varphi_1 s\varphi_1 c\theta_{11} c\theta_1) + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{12} ((L_1 L_{12}) (-2c\varphi_1 s\varphi_1 c\theta_1 c\theta_{12})) \\ + \dot{\theta}_{11} \dot{\theta}_{12} ((L_{11} L_{12}) (-2c\varphi_1 s\varphi_1 c\theta_{11} c\theta_{12})) \end{array} \right) \\ + m_{12} g (L_1 s\varphi_1 c\theta_1 + L_{11} s\varphi_1 c\theta_{11} + L_{12} s\varphi_1 c\theta_{12}) \end{array} \right)$$

$$\frac{\partial L_{LTV13}}{\partial \varphi_1} = \left(\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} L_1^2 (s\varphi_1 c\varphi_1 s^2\theta_1) + L_{11}^2 (s\varphi_1 c\varphi_1 s^2\theta_{11}) \\ + L_{12}^2 (s\varphi_1 c\varphi_1 s^2\theta_{12}) + L_{13}^2 (s\varphi_1 c\varphi_1 s^2\theta_{13}) \end{array} \right) \\ + \dot{\theta}_1^2 (L_1^2 (-c\varphi_1 s\varphi_1 c^2\theta_1)) + \dot{\theta}_{11}^2 (L_{11}^2 (-c\varphi_1 s\varphi_1 c^2\theta_{11})) \\ + \dot{\theta}_{12}^2 (L_{12}^2 (-c\varphi_1 s\varphi_1 c^2\theta_{12})) + \dot{\theta}_{13}^2 (L_{13}^2 (-c\varphi_1 s\varphi_1 c^2\theta_{13})) \\ + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 ((c^2\varphi_1 - s^2\varphi_1) c\theta_1 (-L_1^2 s\theta_1 - L_1 L_{11} s\theta_{11} - L_1 L_{12} s\theta_{12} - L_1 L_{13} s\theta_{13})) \\ + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{11} ((c^2\varphi_1 - s^2\varphi_1) c\theta_{11} (-L_1 L_{11} s\theta_1 - L_{11}^2 s\theta_{11} - L_{11} L_{12} s\theta_{12} - L_{11} L_{13} s\theta_{13})) \\ + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{12} ((c^2\varphi_1 - s^2\varphi_1) c\theta_{12} (-L_1 L_{12} s\theta_1 - L_{11} L_{12} s\theta_{11} - L_{12}^2 s\theta_{12} - L_{12} L_{13} s\theta_{13})) \\ + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{13} ((c^2\varphi_1 - s^2\varphi_1) c\theta_{13} (-L_1 L_{13} s\theta_1 - L_{11} L_{13} s\theta_{11} - L_{12} L_{13} s\theta_{12} - L_{13}^2 s\theta_{13})) \\ + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{11} (L_1 L_{11} (-2c\varphi_1 s\varphi_1 c\theta_1 c\theta_{11})) + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{12} (L_1 L_{12} (-2c\varphi_1 s\varphi_1 c\theta_1 c\theta_{12})) \\ + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{13} (L_1 L_{13} (-2c\varphi_1 s\varphi_1 c\theta_1 c\theta_{13})) + \dot{\theta}_{12} \dot{\theta}_{13} (L_{11} L_{12} (-2c\varphi_1 s\varphi_1 c\theta_{11} c\theta_{12})) \\ + \dot{\theta}_{11} \dot{\theta}_{13} (L_{11} L_{13} (-2c\varphi_1 s\varphi_1 c\theta_{11} c\theta_{13})) + \dot{\theta}_{12} \dot{\theta}_{13} (L_{12} L_{13} (-2c\varphi_1 s\varphi_1 c\theta_{12} c\theta_{13})) \end{array} \right) \\ + m_{13} g (L_1 s\varphi_1 c\theta_1 + L_{11} s\varphi_1 c\theta_{11} + L_{12} s\varphi_1 c\theta_{12} + L_{13} s\varphi_1 c\theta_{13}) \end{array} \right)$$

$$\frac{\partial L_{TTV14}}{\partial \varphi_1} = m_{14} \left(\begin{array}{l} \dot{\varphi}_1^2 L_u^2 (s\varphi_1 c\varphi_1 s^2\theta_1) + \dot{\theta}_1^2 L_u^2 (-c\varphi_1 s\varphi_1 c^2\theta_1) \\ + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 (-L_a^2 s\theta_1 c\theta_1 (c^2\varphi_1 - s^2\varphi_1)) \\ + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{14} L_a L_{14} (-c\varphi_1 s\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{14} + c\theta_1 s\varphi_1 s\theta_{14} s\varphi_2 + c\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{14}) \\ + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 L_a L_{14} (c\varphi_1 s\theta_1 s\varphi_2 s\theta_{14} + c\theta_1 s\varphi_1 c\theta_{14} c\varphi_2 + c\varphi_1 c\theta_1 s\varphi_2 c\theta_{14}) \\ + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{14} L_a L_{14} (-s\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{14} + s\theta_1 c\varphi_1 s\theta_{14} s\varphi_2 - s\varphi_1 s\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{14}) \\ + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 L_a L_{14} (s\varphi_1 c\theta_1 s\varphi_2 s\theta_{14} - s\theta_1 c\varphi_1 c\theta_{14} c\varphi_2 - s\varphi_1 s\theta_1 s\varphi_2 c\theta_{14}) \\ + g (L_a s\varphi_1 c\theta_1 + L_{14} s\varphi_1 c\theta_{14}) \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_{TTV15}}{\partial \varphi_1} &= m_{15} \left(\begin{aligned} &\left(\dot{\varphi}_1^2 \left(L_a^2 \left(s\varphi_1 c\varphi_1 s^2 \theta_1 \right) \right) + \dot{\theta}_1^2 \left(L_a^2 \left(-c\varphi_1 s\varphi_1 c^2 \theta_1 \right) \right) \right. \\ &+ \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 \left(-L_a^2 s\theta_1 c\theta_1 \left(c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1 \right) \right) \\ &+ \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{14} \left(L_a L_{14} \left(-c\varphi_1 s\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{14} + c\theta_1 s\varphi_1 s\theta_{14} s\varphi_2 + c\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{14} \right) \right) \\ &+ \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \left(L_a L_{14} \left(-c\varphi_1 s\theta_1 s\varphi_2 s\theta_{14} - c\theta_1 s\varphi_1 c\theta_{14} c\varphi_2 + c\varphi_1 c\theta_1 s\varphi_2 c\theta_{14} \right) \right. \\ &\quad \left. + L_a L_{15} \left(c\varphi_1 s\theta_1 s\varphi_2 s\theta_{15} - c\theta_1 s\varphi_1 c\theta_{15} c\varphi_2 + c\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{15} \right) \right) \\ &+ \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{15} \left(L_a L_{15} \left(-c\varphi_1 s\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{15} + c\theta_1 s\varphi_1 s\theta_{15} s\varphi_2 + c\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{15} \right) \right) \\ &+ \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{14} \left(L_a L_{14} \left(-s\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{14} + s\theta_1 c\varphi_1 s\theta_{14} s\varphi_2 - s\varphi_1 s\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{14} \right) \right) \\ &+ \dot{\theta}_1 \dot{\varphi}_2 \left(L_a L_{14} \left(s\varphi_1 c\theta_1 s\varphi_2 s\theta_{14} - c\theta_1 s\varphi_1 c\theta_{14} c\varphi_2 + c\varphi_1 c\theta_1 s\varphi_2 c\theta_{14} \right) \right. \\ &\quad \left. + L_a L_{15} \left(s\varphi_1 c\theta_1 s\varphi_2 s\theta_{15} - c\theta_1 s\varphi_1 c\theta_{15} c\varphi_2 + c\varphi_1 s\theta_1 s\varphi_2 c\theta_{15} \right) \right) \\ &\quad \left. + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{15} \left(L_a L_{15} \left(-s\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{15} + s\theta_1 c\varphi_1 s\theta_{15} s\varphi_2 - s\varphi_1 s\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{15} \right) \right) \right) \\ &+ m_{15} g \left(L_a s\varphi_1 c\theta_1 \right) \end{aligned} \right) \\
\frac{\partial L_{TTV16}}{\partial \varphi_1} &= m_{16} \left(\begin{aligned} &\left(\dot{\varphi}_1^2 L_a^2 \left(2s\varphi_1 c\varphi_1 s^2 \theta_1 - c^2 \theta_1 c\varphi_1 s\varphi_1 \right) + \dot{\theta}_1^2 L_a^2 \left(-2c\varphi_1 s\varphi_1 c^2 \theta_1 + s^2 \theta_1 s\varphi_1 c\varphi_1 \right) \right. \\ &+ \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 \left(L_a^2 \left(-c\theta_1 s\theta_1 \left(c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1 \right) \right) \right) + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{14} \left(L_a L_{14} \left(c\theta_1 s\theta_{14} s\varphi_1 s\varphi_2 \right) \right) \\ &+ \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \left(L_a c\varphi_1 s\theta_1 s\varphi_2 \left(L_{14} s\theta_{14} + L_{15} s\theta_{15} + L_{16} s\theta_{16} \right) \right. \\ &\quad \left. - L_a c\theta_1 s\varphi_1 c\varphi_2 \left(L_{14} c\theta_{14} + L_{15} c\theta_{15} + L_{16} c\theta_{16} \right) \right. \\ &\quad \left. + L_a c\varphi_1 s\theta_1 s\varphi_2 \left(L_{14} c\theta_{14} + L_{15} c\theta_{15} + L_{16} c\theta_{16} \right) \right) \\ &+ \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{15} L_a L_{15} \left(-c\varphi_1 s\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{15} + c\theta_1 s\varphi_1 s\theta_{15} s\varphi_2 + c\varphi_1 s\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{15} \right) \\ &+ \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{16} L_a L_{16} \left(-c\varphi_1 s\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{16} + c\theta_1 s\varphi_1 s\theta_{16} s\varphi_2 + c\varphi_1 s\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{16} \right) \\ &+ \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{14} L_a L_{14} \left(-s\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{14} + s\theta_1 c\varphi_1 s\theta_{14} s\varphi_2 - s\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{14} \right) \\ &+ \dot{\theta}_1 \dot{\varphi}_2 \left(L_a s\varphi_1 c\theta_1 s\varphi_2 \left(L_{14} s\theta_{14} + L_{15} s\theta_{15} + L_{16} s\theta_{16} \right) \right. \\ &\quad \left. - L_a s\theta_1 c\varphi_1 c\varphi_2 \left(L_{14} c\theta_{14} + L_{15} c\theta_{15} + L_{16} c\theta_{16} \right) \right. \\ &\quad \left. + L_a c\theta_1 s\varphi_1 s\varphi_2 \left(L_{14} c\theta_{14} + L_{15} c\theta_{15} + L_{16} c\theta_{16} \right) \right) \\ &+ \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{15} L_a L_{15} \left(-s\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{15} + s\theta_1 c\varphi_1 s\theta_{15} s\varphi_2 + s\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{15} \right) \\ &+ \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{16} L_a L_{16} \left(-s\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{16} + s\theta_1 c\varphi_1 s\theta_{16} s\varphi_2 + s\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{16} \right) \\ &\quad \left. + m_{16} g \left(L_a c\theta_1 s\varphi_1 \right) \right) \end{aligned} \right)
\end{aligned}$$

EK-B. 7

$$\frac{\partial L_W}{\partial \dot{\phi}_1} = \left(\begin{array}{l} \frac{\partial L_{WTV1}}{\partial \dot{\phi}_1} + \frac{\partial L_{ITV2}}{\partial \dot{\phi}_1} + \frac{\partial L_{ITV3}}{\partial \dot{\phi}_1} + \frac{\partial L_{ITV4}}{\partial \dot{\phi}_1} + \frac{\partial L_{MTV5}}{\partial \dot{\phi}_1} \\ + \frac{\partial L_{MTV6}}{\partial \dot{\phi}_1} + \frac{\partial L_{MTV7}}{\partial \dot{\phi}_1} + \frac{\partial L_{RTV8}}{\partial \dot{\phi}_1} + \frac{\partial L_{RTV9}}{\partial \dot{\phi}_1} + \frac{\partial L_{RTV10}}{\partial \dot{\phi}_1} \\ + \frac{\partial L_{LTV11}}{\partial \dot{\phi}_1} + \frac{\partial L_{LTV12}}{\partial \dot{\phi}_1} + \frac{\partial L_{LTV13}}{\partial \dot{\phi}_1} + \frac{\partial L_{ITV14}}{\partial \dot{\phi}_1} + \frac{\partial L_{TTV15}}{\partial \dot{\phi}_1} + \frac{\partial L_{TTV16}}{\partial \dot{\phi}_1} \end{array} \right)$$

$$\frac{\partial L_{WTV1}}{\partial \dot{\phi}_1} = m_1 \left(\dot{\phi}_1 L_1^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_1 c^2 \varphi_1) - \dot{\theta}_1 L_1^2 c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_1 \right)$$

$$\frac{\partial L_{ITV2}}{\partial \dot{\phi}_1} = m_2 \left(\begin{array}{l} \dot{\phi}_1 \left(L_1^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_1 c^2 \varphi_1) + L_2^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_2 c^2 \varphi_1) \right) \\ + 2L_1 L_2 (s^2 \varphi_1 s \theta_1 s \theta_2 + c \theta_1 c \theta_2) \\ + \dot{\theta}_1 (-L_1 L_2 s \varphi_1 s \theta_2 c \varphi_1 c \theta_1 + L_1^2 c \theta_1 s \varphi_1 c \varphi_1 s \theta_1) \\ + \dot{\theta}_2 (-L_1 L_2 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_2 - L_2^2 c \theta_2 c \varphi_1 s \theta_2 s \varphi_1) \end{array} \right)$$

$$\frac{\partial L_{ITV3}}{\partial \dot{\phi}_1} = m_3 \left(\begin{array}{l} \dot{\phi}_1 \left(L_1^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_1 c^2 \varphi_1) + L_2^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_2 c^2 \varphi_1) \right. \\ \left. + L_3^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_3 c^2 \varphi_1) \right. \\ \left. + 2(L_1 L_2 (s^2 \varphi_1 s \theta_1 s \theta_2 + c \theta_1 c \theta_2) + L_2 L_3 (s^2 \varphi_1 s \theta_2 s \theta_3 + c \theta_2 c \theta_3)) \right) \\ + \dot{\theta}_1 (-L_1^2 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_1 - L_1 L_2 s \varphi_1 s \theta_2 c \varphi_1 c \theta_1 - L_1 L_3 s \varphi_1 s \theta_3 c \varphi_1 c \theta_1) \\ + \dot{\theta}_2 (-L_1 L_2 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_2 - L_2^2 s \varphi_1 s \theta_2 c \varphi_1 c \theta_2 - L_2 L_3 s \varphi_1 s \theta_3 c \varphi_1 c \theta_2) \\ + \dot{\theta}_3 (-L_1 L_3 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_3 - L_2 L_3 s \varphi_1 s \theta_2 c \varphi_1 c \theta_3 - L_3^2 c \varphi_1 c \theta_3 s \varphi_1 s \theta_3) \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_{ITV4}}{\partial \dot{\phi}_1} &= m_4 \left(\begin{aligned} &\dot{\phi}_1 \left(L_1^2 (s^2 \varphi_1 s^2 \theta_1 + c^2 \theta_1) + L_2^2 (s^2 \varphi_1 s^2 \theta_2 + c^2 \theta_2) \right. \\ &\quad \left. + L_3^2 (s^2 \varphi_1 s^2 \theta_3 + c^2 \theta_3) + L_4^2 (s^2 \varphi_1 s^2 \theta_4 + c^2 \theta_4) \right) \\ &+ \dot{\theta}_1 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_1 (-L_1^2 s \theta_1 - L_1 L_2 s \theta_2 - L_1 L_3 s \theta_3 - L_1 L_4 s \theta_4) \\ &+ \dot{\theta}_2 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_2 (-L_1 L_2 s \theta_1 - L_2^2 s \theta_2 - L_2 L_3 s \theta_3 - L_2 L_4 s \theta_4) \\ &+ \dot{\theta}_3 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_3 (-L_1 L_3 s \theta_1 - L_2 L_3 s \theta_2 - L_3^2 s \theta_3 - L_3 L_4 s \theta_4) \\ &+ \dot{\theta}_4 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_4 (-L_1 L_4 s \theta_1 - L_2 L_4 s \theta_2 - L_3 L_4 s \theta_3 - L_4^2 s \theta_4) \end{aligned} \right) \\
\frac{\partial L_{MTV5}}{\partial \dot{\phi}_1} &= m_5 \left(\begin{aligned} &\dot{\phi}_1 \left(L_1^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_1 c^2 \varphi_1) + L_5^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_5 c^2 \varphi_1) \right) \\ &\quad + 2 L_1 L_5 (s^2 \varphi_1 s \theta_1 s \theta_5 + c \theta_1 c \theta_5) \end{aligned} \right) \\
&\quad + \dot{\theta}_1 (-L_1 L_5 s \varphi_1 s \theta_5 c \varphi_1 c \theta_1 + L_1^2 c \theta_1 s \varphi_1 c \varphi_1 s \theta_1) \\
&\quad + \dot{\theta}_5 (-L_1 L_5 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_5 - L_5^2 c \theta_5 c \varphi_1 s \theta_5 s \varphi_1) \\
\frac{\partial L_{ITV6}}{\partial \dot{\phi}_1} &= m_6 \left(\begin{aligned} &\dot{\phi}_1 \left(L_1^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_1 c^2 \varphi_1) + L_5^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_5 c^2 \varphi_1) \right. \\ &\quad + L_6^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_6 c^2 \varphi_1) \\ &\quad \left. + 2 (L_1 L_5 (s^2 \varphi_1 s \theta_1 s \theta_5 + c \theta_1 c \theta_5) + L_5 L_6 (s^2 \varphi_1 s \theta_5 s \theta_6 + c \theta_5 c \theta_6)) \right) \\ &+ \dot{\theta}_1 (-L_1^2 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_1 - L_1 L_5 s \varphi_1 s \theta_5 c \varphi_1 c \theta_1 - L_1 L_6 s \varphi_1 s \theta_6 c \varphi_1 c \theta_1) \\ &+ \dot{\theta}_5 (-L_1 L_5 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_5 - L_5^2 s \varphi_1 s \theta_5 c \varphi_1 c \theta_5 - L_5 L_6 s \varphi_1 s \theta_6 c \varphi_1 c \theta_5) \\ &+ \dot{\theta}_6 (-L_1 L_6 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_6 - L_5 L_6 s \varphi_1 s \theta_5 c \varphi_1 c \theta_6 - L_6^2 c \varphi_1 c \theta_6 s \varphi_1 s \theta_6) \end{aligned} \right) \\
\frac{\partial L_{MTV7}}{\partial \dot{\phi}_1} &= m_7 \left(\begin{aligned} &\dot{\phi}_1 \left(L_1^2 (s^2 \varphi_1 s^2 \theta_1 + c^2 \theta_1) + L_5^2 (s^2 \varphi_1 s^2 \theta_5 + c^2 \theta_5) \right. \\ &\quad \left. + L_6^2 (s^2 \varphi_1 s^2 \theta_6 + c^2 \theta_6) + L_7^2 (s^2 \varphi_1 s^2 \theta_7 + c^2 \theta_7) \right) \\ &+ \dot{\theta}_1 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_1 (-L_1^2 s \theta_1 - L_1 L_5 s \theta_5 - L_1 L_6 s \theta_6 - L_1 L_7 s \theta_7) \\ &+ \dot{\theta}_5 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_5 (-L_1 L_5 s \theta_1 - L_5^2 s \theta_5 - L_5 L_6 s \theta_6 - L_5 L_7 s \theta_7) \\ &+ \dot{\theta}_6 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_6 (-L_1 L_6 s \theta_1 - L_5 L_6 s \theta_5 - L_6^2 s \theta_6 - L_6 L_7 s \theta_7) \\ &+ \dot{\theta}_7 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_7 (-L_1 L_7 s \theta_1 - L_5 L_7 s \theta_5 - L_6 L_7 s \theta_6 - L_7^2 s \theta_7) \end{aligned} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_{RTV8}}{\partial \dot{\phi}_1} &= m_8 \left(\begin{aligned} &\dot{\phi}_1 \left(L_1^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_1 c^2 \varphi_1) + L_8^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_8 c^2 \varphi_1) \right) \\ &+ 2L_1 L_8 (s^2 \varphi_1 s \theta_1 s \theta_8 + c \theta_1 c \theta_8) \end{aligned} \right) \\
&\quad + \dot{\theta}_1 (-L_1 L_8 s \varphi_1 s \theta_8 c \varphi_1 c \theta_1 + L_1^2 c \theta_1 s \varphi_1 c \varphi_1 s \theta_1) \\
&\quad + \dot{\theta}_8 (-L_1 L_8 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_8 - L_8^2 c \theta_8 c \varphi_1 s \theta_8 s \varphi_1) \\
\frac{\partial L_{RTV9}}{\partial \dot{\phi}_1} &= m_9 \left(\begin{aligned} &\dot{\phi}_1 \left(L_1^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_1 c^2 \varphi_1) + L_8^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_8 c^2 \varphi_1) \right. \\ &\quad \left. + L_9^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_9 c^2 \varphi_1) \right. \\ &\quad \left. 2(L_1 L_8 (s^2 \varphi_1 s \theta_1 s \theta_8 + c \theta_1 c \theta_8) + L_8 L_9 (s^2 \varphi_1 s \theta_8 s \theta_9 + c \theta_8 c \theta_9)) \right) \\ &+ \dot{\theta}_1 (-L_1^2 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_1 - L_1 L_8 s \varphi_1 s \theta_8 c \varphi_1 c \theta_1 - L_1 L_9 s \varphi_1 s \theta_9 c \varphi_1 c \theta_1) \\ &+ \dot{\theta}_8 (-L_1 L_8 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_8 - L_8^2 s \varphi_1 s \theta_8 c \varphi_1 c \theta_8 - L_8 L_9 s \varphi_1 s \theta_9 c \varphi_1 c \theta_8) \\ &+ \dot{\theta}_9 (-L_1 L_9 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_9 - L_8 L_9 s \varphi_1 s \theta_8 c \varphi_1 c \theta_9 - L_9^2 c \varphi_1 c \theta_9 s \varphi_1 s \theta_9) \end{aligned} \right) \\
\frac{\partial L_{RTV10}}{\partial \dot{\phi}_1} &= m_{10} \left(\begin{aligned} &\dot{\phi}_1 \left(L_1^2 (s^2 \varphi_1 s^2 \theta_1 + c^2 \theta_1) + L_8^2 (s^2 \varphi_1 s^2 \theta_8 + c^2 \theta_8) \right. \\ &\quad \left. + L_9^2 (s^2 \varphi_1 s^2 \theta_9 + c^2 \theta_9) + L_{10}^2 (s^2 \varphi_1 s^2 \theta_{10} + c^2 \theta_{10}) \right) \\ &+ \dot{\theta}_1 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_1 (-L_1^2 s \theta_1 - L_1 L_8 s \theta_8 - L_1 L_9 s \theta_9 - L_1 L_{10} s \theta_{10}) \\ &+ \dot{\theta}_8 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_8 (-L_1 L_8 s \theta_1 - L_8^2 s \theta_8 - L_8 L_9 s \theta_9 - L_8 L_{10} s \theta_{10}) \\ &+ \dot{\theta}_9 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_9 (-L_1 L_9 s \theta_1 - L_8 L_9 s \theta_8 - L_9^2 s \theta_9 - L_9 L_{10} s \theta_{10}) \\ &+ \dot{\theta}_{10} s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_{10} (-L_1 L_{10} s \theta_1 - L_8 L_{10} s \theta_8 - L_9 L_{10} s \theta_9 - L_{10}^2 s \theta_{10}) \end{aligned} \right) \\
\frac{\partial L_{LTV11}}{\partial \dot{\phi}_1} &= m_2 \left(\begin{aligned} &\dot{\phi}_1 \left(L_1^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_1 c^2 \varphi_1) + L_{11}^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_{11} c^2 \varphi_1) \right) \\ &+ 2L_1 L_{11} (s^2 \varphi_1 s \theta_1 s \theta_{11} + c \theta_1 c \theta_{11}) \end{aligned} \right) \\
&\quad + \dot{\theta}_1 (-L_1 L_{11} s \varphi_1 s \theta_{11} c \varphi_1 c \theta_1 + L_1^2 c \theta_1 s \varphi_1 c \varphi_1 s \theta_1) \\
&\quad + \dot{\theta}_{11} (-L_1 L_{11} s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{11} - L_{11}^2 c \theta_{11} c \varphi_1 s \theta_{11} s \varphi_1)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial L_{LTV12}}{\partial \dot{\phi}_1} = m_{12} \left(\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} L_1^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_1 c^2 \varphi_1) + L_{12}^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_{12} c^2 \varphi_1) \\ + L_{12}^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_{12} c^2 \varphi_1) \\ 2 \left(\begin{array}{l} L_1 L_{11} (s^2 \varphi_1 s \theta_1 s \theta_{11} + c \theta_1 c \theta_{11}) \\ + L_{11} L_{12} (s^2 \varphi_1 s \theta_{11} s \theta_{12} + c \theta_{11} c \theta_{12}) \end{array} \right) \end{array} \right) \\ + \dot{\theta}_1 (-L_1^2 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_1 - L_1 L_{11} s \varphi_1 s \theta_{11} c \varphi_1 c \theta_1 - L_1 L_{12} s \varphi_1 s \theta_{12} c \varphi_1 c \theta_1) \\ + \dot{\theta}_{11} (-L_1 L_{11} s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{11} - L_{11}^2 s \varphi_1 s \theta_{11} c \varphi_1 c \theta_{11} - L_{11} L_{12} s \varphi_1 s \theta_{12} c \varphi_1 c \theta_{11}) \\ + \dot{\theta}_{12} (-L_1 L_{12} s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{12} - L_{11} L_{12} s \varphi_1 s \theta_{11} c \varphi_1 c \theta_{12} - L_{12}^2 c \varphi_1 c \theta_{12} s \varphi_1 s \theta_{12}) \end{array} \right)$$

$$\frac{\partial L_{LTV13}}{\partial \dot{\phi}_1} = m_{13} \left(\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} L_1^2 (s^2 \varphi_1 s^2 \theta_1 + c^2 \theta_1) + L_{11}^2 (s^2 \varphi_1 s^2 \theta_{11} + c^2 \theta_{11}) \\ + L_{12}^2 (s^2 \varphi_1 s^2 \theta_{12} + c^2 \theta_{12}) + L_{13}^2 (s^2 \varphi_1 s^2 \theta_{13} + c^2 \theta_{13}) \end{array} \right) \\ + \dot{\theta}_1 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_1 (-L_1^2 s \theta_1 - L_1 L_{11} s \theta_{11} - L_1 L_{12} s \theta_{12} - L_1 L_{13} s \theta_{13}) \\ + \dot{\theta}_{11} s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_{11} (-L_1 L_{11} s \theta_1 - L_{11}^2 s \theta_{11} - L_{11} L_{12} s \theta_{12} - L_{11} L_{13} s \theta_{13}) \\ + \dot{\theta}_{12} s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_{12} (-L_1 L_{12} s \theta_1 - L_{11} L_{12} s \theta_{11} - L_{12}^2 s \theta_{12} - L_{12} L_{13} s \theta_{13}) \\ + \dot{\theta}_{13} s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_{13} (-L_1 L_{13} s \theta_1 - L_{11} L_{13} s \theta_{11} - L_{12} L_{13} s \theta_{12} - L_{13}^2 s \theta_{13}) \end{array} \right)$$



$$\frac{\partial L_{TIV14}}{\partial \dot{\phi}_1} = m_{14} \left(\begin{array}{l} \dot{\phi}_1 (L_a^2 (s^2 \varphi_1 s^2 \theta_1 + c^2 \theta_1)) + \dot{\theta}_1 (-L_a^2 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_1) \\ + \dot{\theta}_{14} L_a L_{14} (-s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14} - c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{14} s \varphi_2 + s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14}) \\ + \dot{\phi}_2 L_a L_{14} (s \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{14} - c \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{14} c \varphi_2 + s \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{14}) \end{array} \right)$$

$$\frac{\partial L_{TIV15}}{\partial \dot{\phi}_1} = m_{15} \left(\begin{array}{l} \dot{\phi}_1 (L_a^2 (s^2 \varphi_1 s^2 \theta_1 + c^2 \theta_1)) + \dot{\theta}_1 (-L_a^2 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_1) \\ + \dot{\theta}_{14} (L_a L_{14} (-s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14} - c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{14} s \varphi_2 + s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14})) \\ + \dot{\phi}_2 \left(\begin{array}{l} L_a L_{14} (-s \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{14} + c \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{14} c \varphi_2 + s \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{14}) \\ + L_a L_{15} (s \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{15} + c \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{15} c \varphi_2 + s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{15}) \end{array} \right) \\ + \dot{\theta}_{15} (L_a L_{15} (-s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{15} - c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{15} s \varphi_2 + s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{15})) \end{array} \right)$$

$$\frac{\partial L_{TTV16}}{\partial \dot{\phi}_1} = m_{16} \left(\begin{aligned} & \dot{\phi}_1 L_a^2 (2s^2 \varphi_1 s^2 \theta_1 + c^2 \theta_1 c^2 \varphi_1) \\ & + \dot{\theta}_1 L_a^2 (-c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_1) + \dot{\theta}_{14} L_a L_{14} (-c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{14} s \varphi_2) \\ & + \dot{\phi}_2 \left(\begin{aligned} & (-L_a s \varphi_1 s \theta_1) s \varphi_2 (-L_{14} s \theta_{14} - L_{15} s \theta_{15} - L_{16} s \theta_{16}) \\ & + (L_a c \theta_1 c \varphi_1) c \varphi_2 (L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15} + L_{16} c \theta_{16}) \\ & - (L_a s \varphi_1 s \theta_1) s \varphi_2 (-L_{14} c \theta_{14} - L_{15} c \theta_{15} - L_{16} c \theta_{16}) \end{aligned} \right) \\ & + \dot{\theta}_{15} (L_a L_{15} (-s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{15} - c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{15} s \varphi_2 + s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{15})) \\ & + \dot{\theta}_{16} (L_a L_{16} (-s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{16} - c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{16} s \varphi_2 + s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{16})) \end{aligned} \right)$$

EK-B. 8

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_W}{\partial \dot{\phi}_1} \right) = \left(\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{WTV1}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{ITV2}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{ITV3}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{ITV4}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) \\ & + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{MTV5}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{MTV6}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{MTV7}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) \\ & + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{RTV8}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{RTV9}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{RTV10}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) \\ & + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{LTV11}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{LTV12}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{LTV13}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) \\ & + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{TTV14}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{TTV15}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{TTV16}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) \end{aligned} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_W}{\partial \dot{\phi}_1} \right) = \left(\begin{aligned} & \text{zamanabağıtlı tüm değişkenlerin türevi alınır.} \\ & \text{budeğişkenler ise } \rightarrow \\ & \dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3, \dot{\theta}_4, \dot{\theta}_5, \dot{\theta}_6, \dot{\theta}_7, \dot{\theta}_8, \dot{\theta}_9, \dot{\theta}_{10}, \dot{\theta}_{11}, \dot{\theta}_{12}, \dot{\theta}_{13}, \dot{\theta}_{14}, \dot{\theta}_{15}, \dot{\theta}_{16} \\ & \varphi_1, \varphi_2, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8, \theta_9, \theta_{10}, \theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{14}, \theta_{15}, \theta_{16} \end{aligned} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{WTV1}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) = \left(\begin{aligned} & \text{zamanabağıtlı tüm değişkenlerin türevi alınır.} \\ & \text{budeğişkenler ise } \rightarrow \dot{\phi}_1, \dot{\theta}_1, \varphi_1, \theta_1 \end{aligned} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{WTV1}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) = \begin{pmatrix} m_1 \ddot{\phi}_1 L_1^2 (s^2 \phi_1 + c^2 \theta_1 c^2 \phi_1) \\ -m_1 \ddot{\theta}_1 L_1^2 c \theta_1 c \phi_1 s \theta_1 s \phi_1 \\ m_1 \dot{\phi}_1 \left(\dot{\phi}_1 L_1^2 2(-s \phi_1 c \phi_1 - c^2 \theta_1 c \phi_1 s \phi_1) \right) \\ -\dot{\theta}_1 L_1^2 c \theta_1 s \theta_1 (c^2 \phi_1 - s^2 \phi_1) \\ m_1 \dot{\theta}_1 \left(\dot{\phi}_1 L_1^2 (-2 c \theta_1 s \theta_1 c^2 \phi_1) \right) \\ +\dot{\theta}_1 L_1^2 s \theta_1 c \phi_1 s \theta_1 s \phi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \phi_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}$$

İşlemler sadeleştirilir. $\ddot{\phi}_1$ kat sayısının dışındaki tüm işlemler B1 olarak simgelenmiştir.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{WTV1}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) = \begin{pmatrix} m_1 \ddot{\phi}_1 L_1^2 (s^2 \phi_1 + c^2 \theta_1 c^2 \phi_1) \\ +B1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{ITV2}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) = \begin{pmatrix} m_2 \ddot{\phi}_1 \left(L_1^2 (s^2 \phi_1 + c^2 \theta_1 c^2 \phi_1) + L_2^2 (s^2 \phi_1 + c^2 \theta_2 c^2 \phi_1) \right) \\ +2L_1 L_2 (s^2 \phi_1 s \theta_1 s \theta_2 + c \theta_1 c \theta_2) \\ +m_2 \ddot{\theta}_1 (-L_1 L_2 s \phi_1 s \theta_2 c \phi_1 c \theta_1 + L_1^2 c \theta_1 s \phi_1 c \phi_1 s \theta_1) \\ +m_2 \ddot{\theta}_2 (-L_1 L_2 s \phi_1 s \theta_1 c \phi_1 c \theta_2 - L_2^2 c \theta_2 c \phi_1 s \theta_2 s \phi_1) \\ m_2 \dot{\phi}_1 \left(2\dot{\phi}_1 \left(L_1^2 (s \phi_1 c \phi_1 - c^2 \theta_1 c \phi_1 s \phi_1) + L_2^2 (s \phi_1 c \phi_1 - c^2 \theta_2 c \phi_1 s \phi_1) \right) \right. \\ \left. +2L_1 L_2 s \phi_1 c \phi_1 s \theta_1 s \theta_2 \right) \\ +\dot{\theta}_1 (-L_1 L_2 s \theta_2 c \theta_1 (c^2 \phi_1 - s^2 \phi_1) + L_1^2 c \theta_1 s \theta_1 (c^2 \phi_1 - s^2 \phi_1)) \\ +\dot{\theta}_2 (-L_1 L_2 s \theta_1 c \theta_2 (c^2 \phi_1 - s^2 \phi_1) - L_2^2 c \theta_2 s \theta_2 (c^2 \phi_1 - s^2 \phi_1)) \\ m_2 \dot{\theta}_1 \left(\dot{\phi}_1 (-2L_1^2 c \theta_1 s \theta_1 c^2 \phi_1 + 2L_1 L_2 (s^2 \phi_1 c \theta_1 s \theta_2 - s \theta_1 c \theta_2)) \right. \\ \left. +\dot{\theta}_1 (L_1 L_2 s \phi_1 s \theta_2 c \phi_1 s \theta_1 + L_1^2 s \phi_1 c \phi_1 (c^2 \theta_1 - s^2 \theta_1)) \right. \\ \left. +\dot{\theta}_2 (-L_1 L_2 s \phi_1 c \theta_1 c \phi_1 c \theta_2) \right) \\ m_2 \dot{\theta}_2 \left(\dot{\phi}_1 \left(-2L_2^2 (c \theta_2 s \theta_2 c^2 \phi_1) \right. \right. \\ \left. \left. +2L_1 L_2 (s^2 \phi_1 s \theta_1 c \theta_2 - c \theta_1 s \theta_2) \right) \right. \\ \left. +\dot{\theta}_1 (-L_1 L_2 s \phi_1 c \theta_2 c \phi_1 c \theta_1) \right. \\ \left. +\dot{\theta}_2 (L_1 L_2 s \phi_1 s \theta_1 c \phi_1 s \theta_2 - L_2^2 c \phi_1 s \phi_1 (c^2 \theta_2 - s^2 \theta_2)) \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \phi_1 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

İşlemler sadeleştirilir. $\ddot{\phi}_1$ kat sayısının dışındaki tüm işlemler B2 olarak simgelenmiştir.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{ITV2}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) &= \begin{pmatrix} m_2 \ddot{\phi}_1 \left(L_1^2 (s^2 \phi_1 + c^2 \theta_1 c^2 \phi_1) + L_2^2 (s^2 \phi_1 + c^2 \theta_2 c^2 \phi_1) \right) \\ + 2 L_1 L_2 (s^2 \phi_1 s \theta_1 s \theta_2 + c \theta_1 c \theta_2) \\ + B2 \end{pmatrix} \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{ITV3}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) &= \begin{pmatrix} m_3 \ddot{\phi}_1 \left(L_1^2 (s^2 \phi_1 + c^2 \theta_1 c^2 \phi_1) + L_2^2 (s^2 \phi_1 + c^2 \theta_2 c^2 \phi_1) \right. \\ \left. + L_3^2 (s^2 \phi_1 + c^2 \theta_3 c^2 \phi_1) \right. \\ \left. + 2 \left(L_1 L_2 (s^2 \phi_1 s \theta_1 s \theta_2 + c \theta_1 c \theta_2) \right. \right. \\ \left. \left. + L_2 L_3 (s^2 \phi_1 s \theta_2 s \theta_3 + c \theta_2 c \theta_3) \right) \right) \\ + m_3 \ddot{\theta}_1 (-L_1^2 s \phi_1 s \theta_1 c \phi_1 c \theta_1 - L_1 L_2 s \phi_1 s \theta_2 c \phi_1 c \theta_1 - L_1 L_3 s \phi_1 s \theta_3 c \phi_1 c \theta_1) \\ + m_3 \ddot{\theta}_2 (-L_1 L_2 s \phi_1 s \theta_1 c \phi_1 c \theta_2 - L_2^2 s \phi_1 s \theta_2 c \phi_1 c \theta_2 - L_2 L_3 s \phi_1 s \theta_3 c \phi_1 c \theta_2) \\ + m_3 \ddot{\theta}_3 (-L_1 L_3 s \phi_1 s \theta_1 c \phi_1 c \theta_3 - L_2 L_3 s \phi_1 s \theta_2 c \phi_1 c \theta_3 - L_3^2 c \phi_1 c \theta_3 s \phi_1 s \theta_3) \\ + m_3 \dot{\phi}_1 \left(L_1^2 (s \phi_1 c \phi_1 - c^2 \theta_1 c \phi_1 s \phi_1) + L_2^2 (s \phi_1 c \phi_1 - c^2 \theta_2 c \phi_1 s \phi_1) \right. \\ \left. + L_3^2 (s \phi_1 c \phi_1 - c^2 \theta_3 c \phi_1 s \phi_1) \right. \\ \left. + 2 \left(L_1 L_2 (s \phi_1 c \phi_1 s \theta_1 s \theta_2) \right. \right. \\ \left. \left. + L_2 L_3 (s \phi_1 c \phi_1 s \theta_2 s \theta_3) \right) \right) \\ - \dot{\theta}_1 (c^2 \phi_1 - s^2 \phi_1) (L_1^2 s \theta_1 c \theta_1 + L_1 L_2 s \theta_2 c \theta_1 + L_1 L_3 s \theta_3 c \theta_1) \\ - \dot{\theta}_2 (c^2 \phi_1 - s^2 \phi_1) (L_1 L_2 s \theta_1 c \theta_2 + L_2^2 s \theta_2 c \theta_2 + L_2 L_3 s \theta_3 c \theta_2) \\ - \dot{\theta}_3 (c^2 \phi_1 - s^2 \phi_1) (L_1 L_3 s \theta_1 c \theta_3 + L_2 L_3 s \theta_2 c \theta_3 + L_3^2 c \theta_3 s \theta_3) \\ + m_3 \dot{\theta}_2 \left(-2 L_2^2 c \theta_2 s \theta_2 c^2 \phi_1 \right. \\ \left. + 2 \left(L_1 L_2 (s^2 \phi_1 s \theta_1 c \theta_2 - c \theta_1 s \theta_2) \right. \right. \\ \left. \left. + L_2 L_3 (s^2 \phi_1 c \theta_2 s \theta_3 - s \theta_2 c \theta_3) \right) \right) \\ + \dot{\theta}_1 (-L_1 L_2 s \phi_1 c \theta_2 c \phi_1 c \theta_1) \\ + \dot{\theta}_2 (L_1 L_2 s \phi_1 s \theta_1 c \phi_1 s \theta_2 - L_2^2 s \phi_1 c \phi_1 (c^2 \theta_2 - s^2 \theta_2) + L_2 L_3 s \phi_1 s \theta_3 c \phi_1 s \theta_2) \\ + \dot{\theta}_3 (-L_2 L_3 s \phi_1 c \theta_2 c \phi_1 c \theta_3) \\ + m_3 \dot{\theta}_3 \left(\dot{\phi}_1 (-2 L_3^2 c \theta_3 s \theta_3 c^2 \phi_1 + 2 L_2 L_3 (s^2 \phi_1 s \theta_2 c \theta_3 - c \theta_2 s \theta_3)) \right. \\ \left. + \dot{\theta}_1 (-L_1 L_3 s \phi_1 c \theta_3 c \phi_1 c \theta_1) + \dot{\theta}_2 (-L_2 L_3 s \phi_1 c \theta_3 c \phi_1 c \theta_2) \right. \\ \left. + \dot{\theta}_3 (L_1 L_3 s \phi_1 s \theta_1 c \phi_1 s \theta_3 + L_2 L_3 s \phi_1 s \theta_2 c \phi_1 s \theta_3 - L_3^2 c \phi_1 s \phi_1 (c^2 \theta_3 - s^2 \theta_3)) \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \phi_1 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

İşlemler sadeleştirilir. $\ddot{\phi}_1$ katsayısının dışındaki tüm işlemler B3 olarak simgelenmiştir.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{ITV3}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) &= \begin{pmatrix} m_3 \ddot{\phi}_1 \\ +B3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1^2 (s^2 \phi_1 + c^2 \theta_1 c^2 \phi_1) + L_2^2 (s^2 \phi_1 + c^2 \theta_2 c^2 \phi_1) \\ +L_3^2 (s^2 \phi_1 + c^2 \theta_3 c^2 \phi_1) \\ +2 \begin{pmatrix} L_1 L_2 (s^2 \phi_1 s \theta_1 s \theta_2 + c \theta_1 c \theta_2) \\ +L_2 L_3 (s^2 \phi_1 s \theta_2 s \theta_3 + c \theta_2 c \theta_3) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{ITV4}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) &= \begin{pmatrix} m_4 \ddot{\phi}_1 \left(L_1^2 (s^2 \phi_1 s^2 \theta_1 + c^2 \theta_1) + L_2^2 (s^2 \phi_1 s^2 \theta_2 + c^2 \theta_2) \right. \\ \left. + L_3^2 (s^2 \phi_1 s^2 \theta_3 + c^2 \theta_3) + L_4^2 (s^2 \phi_1 s^2 \theta_4 + c^2 \theta_4) \right) \\ + m_4 \ddot{\theta}_1 s \phi_1 c \phi_1 c \theta_1 (-L_1^2 s \theta_1 - L_1 L_2 s \theta_2 - L_1 L_3 s \theta_3 - L_1 L_4 s \theta_4) \\ + m_4 \ddot{\theta}_2 s \phi_1 c \phi_1 c \theta_2 (-L_1 L_2 s \theta_1 - L_2^2 s \theta_2 - L_2 L_3 s \theta_3 - L_2 L_4 s \theta_4) \\ + m_4 \ddot{\theta}_3 s \phi_1 c \phi_1 c \theta_3 (-L_1 L_3 s \theta_1 - L_2 L_3 s \theta_2 - L_3^2 s \theta_3 - L_3 L_4 s \theta_4) \\ + m_4 \ddot{\theta}_4 s \phi_1 c \phi_1 c \theta_4 (-L_1 L_4 s \theta_1 - L_2 L_4 s \theta_2 - L_3 L_4 s \theta_3 - L_4^2 s \theta_4) \\ + m_4 \dot{\phi}_1 \begin{pmatrix} 2 \dot{\phi}_1 s \phi_1 c \phi_1 (L_1^2 s^2 \theta_1 + L_2^2 s^2 \theta_2 + L_3^2 s^2 \theta_3 + L_4^2 s^2 \theta_4) \\ \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 c \theta_1 (-L_1^2 s \theta_1 - L_1 L_2 s \theta_2 - L_1 L_3 s \theta_3 - L_1 L_4 s \theta_4) \\ + \dot{\theta}_2 c \theta_2 (-L_1 L_2 s \theta_1 - L_2^2 s \theta_2 - L_2 L_3 s \theta_3 - L_2 L_4 s \theta_4) \\ + \dot{\theta}_3 c \theta_3 (-L_1 L_3 s \theta_1 - L_2 L_3 s \theta_2 - L_3^2 s \theta_3 - L_3 L_4 s \theta_4) \\ + \dot{\theta}_4 c \theta_4 (-L_1 L_4 s \theta_1 - L_2 L_4 s \theta_2 - L_3 L_4 s \theta_3 - L_4^2 s \theta_4) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ + m_4 \dot{\theta}_1 \begin{pmatrix} 2 \dot{\phi}_1 L_1^2 (s^2 \phi_1 s \theta_1 c \theta_1 - c \theta_1 s \theta_1) \\ - \dot{\theta}_1 L_1^2 s \phi_1 c \phi_1 (c^2 \theta_1 - s^2 \theta_1) - \dot{\theta}_1 s \phi_1 c \phi_1 s \theta_1 (-L_1 L_2 s \theta_2 - L_1 L_3 s \theta_3 - L_1 L_4 s \theta_4) \\ - \dot{\theta}_2 s \phi_1 c \phi_1 c \theta_2 L_1 L_2 c \theta_1 - \dot{\theta}_3 s \phi_1 c \phi_1 c \theta_3 L_1 L_3 c \theta_1 - \dot{\theta}_4 s \phi_1 c \phi_1 c \theta_4 L_1 L_4 c \theta_1 \end{pmatrix} \\ + m_4 \dot{\theta}_2 \begin{pmatrix} 2 \dot{\phi}_1 L_2^2 (s \phi_1 c \phi_1 s^2 \theta_2 - c \theta_2 s \theta_2) \\ - \dot{\theta}_1 s \phi_1 c \phi_1 c \theta_1 L_1 L_2 c \theta_2 \\ - \dot{\theta}_2 s \phi_1 c \phi_1 L_2^2 (c^2 \theta_2 - s^2 \theta_2) + \dot{\theta}_2 s \phi_1 c \phi_1 s \theta_2 (L_1 L_2 s \theta_1 + L_2 L_3 s \theta_3 + L_2 L_4 s \theta_4) \\ - \dot{\theta}_3 s \phi_1 c \phi_1 c \theta_3 (L_2 L_3 c \theta_2) - \dot{\theta}_4 s \phi_1 c \phi_1 c \theta_4 (L_2 L_4 c \theta_2) \end{pmatrix} \\ + m_4 \dot{\theta}_3 \begin{pmatrix} 2 \dot{\phi}_1 (L_3^2 (s^2 \phi_1 s \theta_3 c \theta_3 - c \theta_3 s \theta_3)) \\ + \dot{\theta}_1 s \phi_1 c \phi_1 c \theta_1 (-L_1 L_3 c \theta_3) + \dot{\theta}_2 s \phi_1 c \phi_1 c \theta_2 (-L_2 L_3 c \theta_3) \\ - \dot{\theta}_3 L_3^2 s \phi_1 c \phi_1 (c^2 \theta_3 - s^2 \theta_3) - \dot{\theta}_3 s \phi_1 c \phi_1 s \theta_3 (-L_1 L_3 s \theta_1 - L_2 L_3 s \theta_2 - L_3 L_4 s \theta_4) \\ + \dot{\theta}_4 s \phi_1 c \phi_1 c \theta_4 (-L_3 L_4 c \theta_3) \end{pmatrix} \\ + m_4 \dot{\theta}_4 \begin{pmatrix} 2 \dot{\phi}_1 L_4^2 (s^2 \phi_1 s \theta_4 c \theta_4 - c \theta_4 s \theta_4) + \dot{\theta}_1 s \phi_1 c \phi_1 c \theta_1 (-L_1 L_4 c \theta_4) \\ + \dot{\theta}_2 s \phi_1 c \phi_1 c \theta_2 (-L_2 L_4 c \theta_4) + \dot{\theta}_3 s \phi_1 c \phi_1 c \theta_3 (-L_3 L_4 c \theta_4) \\ - \dot{\theta}_4 L_4^2 s \phi_1 c \phi_1 (c^2 \theta_4 - s^2 \theta_4) - \dot{\theta}_4 s \phi_1 c \phi_1 s \theta_4 (-L_1 L_4 s \theta_1 - L_2 L_4 s \theta_2 - L_3 L_4 s \theta_3) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \\ \phi_1 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

İşlemler sadeleştirilir. $\ddot{\phi}_1$ katsayısının dışındaki tüm işlemler B4 olarak simgelenmiştir.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{ITV4}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) = \begin{pmatrix} m_4 \ddot{\phi}_1 \left(L_1^2 (s^2 \phi_1 s^2 \theta_1 + c^2 \theta_1) + L_2^2 (s^2 \phi_1 s^2 \theta_2 + c^2 \theta_2) \right. \\ \left. + L_3^2 (s^2 \phi_1 s^2 \theta_3 + c^2 \theta_3) + L_4^2 (s^2 \phi_1 s^2 \theta_4 + c^2 \theta_4) \right) \\ +B4 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{MTV5}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) = \begin{pmatrix} m_5 \ddot{\phi}_1 \left(L_1^2 (s^2 \phi_1 + c^2 \theta_1 c^2 \phi_1) + L_5^2 (s^2 \phi_1 + c^2 \theta_5 c^2 \phi_1) \right) \\ + 2L_1 L_5 (s^2 \phi_1 s \theta_1 s \theta_5 + c \theta_1 c \theta_5) \\ + m_5 \ddot{\theta}_1 (-L_1 L_5 s \phi_1 s \theta_5 c \phi_1 c \theta_1 + L_1^2 c \theta_1 s \phi_1 c \phi_1 s \theta_1) \\ + m_5 \ddot{\theta}_5 (-L_1 L_5 s \phi_1 s \theta_1 c \phi_1 c \theta_5 - L_5^2 c \theta_5 c \phi_1 s \theta_5 s \phi_1) \\ m_5 \dot{\phi}_1 \left(2\dot{\phi}_1 \left(L_1^2 (s \phi_1 c \phi_1 - c^2 \theta_1 c \phi_1 s \phi_1) + L_5^2 (s \phi_1 c \phi_1 - c^2 \theta_2 c \phi_1 s \phi_1) \right) \right. \\ \left. + \dot{\theta}_1 (-L_1 L_5 s \theta_5 c \theta_1 (c^2 \phi_1 - s^2 \phi_1) + L_1^2 c \theta_1 s \theta_1 (c^2 \phi_1 - s^2 \phi_1)) \right. \\ \left. + \dot{\theta}_5 (-L_1 L_5 s \theta_1 c \theta_5 (c^2 \phi_1 - s^2 \phi_1) - L_5^2 c \theta_5 s \theta_5 (c^2 \phi_1 - s^2 \phi_1)) \right) \\ m_5 \dot{\theta}_1 \left(\dot{\phi}_1 (-2L_1^2 c \theta_1 s \theta_1 c^2 \phi_1 + 2L_1 L_5 (s^2 \phi_1 c \theta_1 s \theta_5 - s \theta_1 c \theta_5)) \right. \\ \left. + \dot{\theta}_1 (L_1 L_5 s \phi_1 s \theta_5 c \phi_1 s \theta_1 + L_1^2 s \phi_1 c \phi_1 (c^2 \theta_1 - s^2 \theta_1)) \right. \\ \left. + \dot{\theta}_5 (-L_1 L_5 s \phi_1 c \theta_1 c \phi_1 c \theta_5) \right) \\ m_5 \dot{\theta}_5 \left(\dot{\phi}_1 \left(-2L_5^2 (c \theta_5 s \theta_5 c^2 \phi_1) \right. \right. \\ \left. \left. + 2L_1 L_5 (s^2 \phi_1 s \theta_1 c \theta_5 - c \theta_1 s \theta_5) \right) \right. \\ \left. + \dot{\theta}_1 (-L_1 L_5 s \phi_1 c \theta_5 c \phi_1 c \theta_1) \right. \\ \left. + \dot{\theta}_5 (L_1 L_5 s \phi_1 s \theta_1 c \phi_1 s \theta_5 - L_5^2 c \phi_1 s \phi_1 (c^2 \theta_5 - s^2 \theta_5)) \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_5 \\ \phi_1 \\ \theta_1 \\ \theta_5 \end{pmatrix}$$

İşlemler sadeleştirilir. $\ddot{\phi}_1$ katsayısının dışındaki tüm işlemler B5 olarak simgelenmiştir.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{MTV5}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) = \begin{pmatrix} m_5 \ddot{\phi}_1 \left(L_1^2 (s^2 \phi_1 + c^2 \theta_1 c^2 \phi_1) + L_5^2 (s^2 \phi_1 + c^2 \theta_5 c^2 \phi_1) \right) \\ + 2L_1 L_5 (s^2 \phi_1 s \theta_1 s \theta_5 + c \theta_1 c \theta_5) \\ + B5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{ITV6}}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) = & \left(\begin{aligned} & m_6 \ddot{\varphi}_1 \left(\begin{aligned} & L_1^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_1 c^2 \varphi_1) + L_5^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_5 c^2 \varphi_1) \\ & + L_6^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_6 c^2 \varphi_1) \\ & 2 \left(\begin{aligned} & L_1 L_5 (s^2 \varphi_1 s \theta_1 s \theta_5 + c \theta_1 c \theta_5) \\ & + L_5 L_6 (s^2 \varphi_1 s \theta_5 s \theta_6 + c \theta_5 c \theta_6) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \\ & + m_6 \ddot{\theta}_1 \left(-L_1^2 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_1 - L_1 L_5 s \varphi_1 s \theta_5 c \varphi_1 c \theta_1 - L_1 L_6 s \varphi_1 s \theta_6 c \varphi_1 c \theta_1 \right) \\ & + m_6 \ddot{\theta}_5 \left(-L_1 L_5 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_5 - L_5^2 s \varphi_1 s \theta_5 c \varphi_1 c \theta_5 - L_5 L_6 s \varphi_1 s \theta_6 c \varphi_1 c \theta_5 \right) \\ & + m_6 \ddot{\theta}_6 \left(-L_1 L_6 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_6 - L_5 L_6 s \varphi_1 s \theta_5 c \varphi_1 c \theta_6 - L_6^2 c \varphi_1 c \theta_6 s \varphi_1 s \theta_6 \right) \\ & + m_6 \dot{\varphi}_1 \left(\begin{aligned} & \left(\begin{aligned} & L_1^2 (s \varphi_1 c \varphi_1 - c^2 \theta_1 c \varphi_1 s \varphi_1) + L_5^2 (s \varphi_1 c \varphi_1 - c^2 \theta_5 c \varphi_1 s \varphi_1) \\ & + L_6^2 (s \varphi_1 c \varphi_1 - c^2 \theta_6 c \varphi_1 s \varphi_1) \end{aligned} \right) \\ & 2 \left(\begin{aligned} & L_1 L_5 (s \varphi_1 c \varphi_1 s \theta_1 s \theta_5) \\ & + L_5 L_6 (s \varphi_1 c \varphi_1 s \theta_5 s \theta_6) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \\ & - \dot{\theta}_1 \left((c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1) (L_1^2 s \theta_1 c \theta_1 + L_1 L_5 s \theta_5 c \theta_1 + L_1 L_6 s \theta_6 c \theta_1) \right) \\ & - \dot{\theta}_5 \left((c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1) (L_1 L_5 s \theta_1 c \theta_5 + L_5^2 s \theta_5 c \theta_5 + L_5 L_6 s \theta_6 c \theta_5) \right) \\ & - \dot{\theta}_6 \left((c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1) (L_1 L_6 s \theta_1 c \theta_6 + L_5 L_6 s \theta_5 c \theta_6 + L_6^2 c \theta_6 s \theta_6) \right) \\ & + m_6 \dot{\theta}_5 \left(\begin{aligned} & \dot{\varphi}_1 \left(\begin{aligned} & -2 L_5^2 c \theta_5 s \theta_5 c^2 \varphi_1 \\ & 2 \left(\begin{aligned} & L_1 L_5 (s^2 \varphi_1 s \theta_1 c \theta_5 - c \theta_1 s \theta_5) \\ & + L_5 L_6 (s^2 \varphi_1 c \theta_5 s \theta_6 - s \theta_5 c \theta_6) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \\ & + \dot{\theta}_1 (-L_1 L_5 s \varphi_1 c \theta_5 c \varphi_1 c \theta_1) \\ & + \dot{\theta}_5 (L_1 L_5 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 s \theta_5 - L_5^2 s \varphi_1 c \varphi_1 (c^2 \theta_5 - s^2 \theta_5) + L_5 L_6 s \varphi_1 s \theta_6 c \varphi_1 s \theta_5) \\ & + \dot{\theta}_6 (-L_5 L_6 s \varphi_1 c \theta_5 c \varphi_1 c \theta_6) \end{aligned} \right) \\ & + m_6 \dot{\theta}_6 \left(\begin{aligned} & \dot{\varphi}_1 \left(\begin{aligned} & -2 L_6^2 c \theta_6 s \theta_6 c^2 \varphi_1 \\ & 2 (L_5 L_6 (s^2 \varphi_1 s \theta_5 c \theta_6 - c \theta_5 s \theta_6)) \end{aligned} \right) \\ & + \dot{\theta}_1 (-L_1 L_6 s \varphi_1 c \theta_6 c \varphi_1 c \theta_1) \\ & + \dot{\theta}_5 (-L_5 L_6 s \varphi_1 c \theta_6 c \varphi_1 c \theta_5) \\ & + \dot{\theta}_6 (L_1 L_6 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 s \theta_6 + L_5 L_6 s \varphi_1 s \theta_5 c \varphi_1 s \theta_6 - L_6^2 c \varphi_1 s \varphi_1 (c^2 \theta_6 - s^2 \theta_6)) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_5 \\ \dot{\theta}_6 \\ \varphi_1 \\ \theta_1 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

İşlemler sadeleştirilir. $\ddot{\varphi}_1$ katsayısının dışındaki tüm işlemler B6 olarak simgelenmiştir.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{MTV6}}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) = \left(\begin{aligned} & m_6 \ddot{\varphi}_1 \left(\begin{aligned} & L_1^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_1 c^2 \varphi_1) + L_5^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_5 c^2 \varphi_1) \\ & + L_6^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_6 c^2 \varphi_1) \\ & + 2 \left(\begin{aligned} & L_1 L_5 (s^2 \varphi_1 s \theta_1 s \theta_5 + c \theta_1 c \theta_5) \\ & + L_5 L_6 (s^2 \varphi_1 s \theta_5 s \theta_6 + c \theta_5 c \theta_6) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \\ & + B6 \end{aligned} \right)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{MTV7}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) = & \left(\begin{aligned} & m_7 \ddot{\phi}_1 \left(L_1^2 (s^2 \varphi_1 s^2 \theta_1 + c^2 \theta_1) + L_5^2 (s^2 \varphi_1 s^2 \theta_5 + c^2 \theta_5) \right. \\ & \left. + L_6^2 (s^2 \varphi_1 s^2 \theta_6 + c^2 \theta_6) + L_7^2 (s^2 \varphi_1 s^2 \theta_7 + c^2 \theta_7) \right) \\ & + m_7 \ddot{\theta}_1 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_1 (-L_1^2 s \theta_1 - L_1 L_5 s \theta_5 - L_1 L_6 s \theta_6 - L_1 L_7 s \theta_7) \\ & + m_7 \ddot{\theta}_5 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_5 (-L_1 L_5 s \theta_1 - L_5^2 s \theta_5 - L_5 L_6 s \theta_6 - L_5 L_7 s \theta_7) \\ & + m_7 \ddot{\theta}_6 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_6 (-L_1 L_6 s \theta_1 - L_5 L_6 s \theta_5 - L_6^2 s \theta_6 - L_6 L_7 s \theta_7) \\ & + m_7 \ddot{\theta}_7 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_7 (-L_1 L_7 s \theta_1 - L_5 L_7 s \theta_5 - L_6 L_7 s \theta_6 - L_7^2 s \theta_7) \\ & + m_7 \dot{\phi}_1 \left(\begin{aligned} & 2 \dot{\phi}_1 s \varphi_1 c \varphi_1 (L_1^2 s^2 \theta_1 + L_5^2 s^2 \theta_5 + L_6^2 s^2 \theta_6 + L_7^2 s^2 \theta_7) \\ & \left(c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1 \right) \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 c \theta_1 (-L_1^2 s \theta_1 - L_1 L_5 s \theta_5 - L_1 L_6 s \theta_6 - L_1 L_7 s \theta_7) \\ \dot{\theta}_5 c \theta_5 (-L_1 L_5 s \theta_1 - L_5^2 s \theta_5 - L_5 L_6 s \theta_6 - L_5 L_7 s \theta_7) \\ \dot{\theta}_6 c \theta_6 (-L_1 L_6 s \theta_1 - L_5 L_6 s \theta_5 - L_6^2 s \theta_6 - L_6 L_7 s \theta_7) \\ \dot{\theta}_7 c \theta_7 (-L_1 L_7 s \theta_1 - L_5 L_7 s \theta_5 - L_6 L_7 s \theta_6 - L_7^2 s \theta_7) \end{pmatrix} \end{aligned} \right) \\ & + m_7 \dot{\theta}_1 \left(\begin{aligned} & 2 \dot{\phi}_1 (L_1^2 (s^2 \varphi_1 s \theta_1 c \theta_1 - c \theta_1 s \theta_1)) \\ & - \dot{\theta}_1 L_1^2 s \varphi_1 c \varphi_1 (c^2 \theta_1 - s^2 \theta_1) \\ & - \dot{\theta}_1 s \varphi_1 c \varphi_1 s \theta_1 (-L_1 L_5 s \theta_5 - L_1 L_6 s \theta_6 - L_1 L_7 s \theta_7) \\ & - \dot{\theta}_5 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_5 L_1 L_5 c \theta_1 - \dot{\theta}_6 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_6 L_1 L_6 c \theta_1 - \dot{\theta}_7 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_7 L_1 L_7 c \theta_1 \end{aligned} \right) \\ & + m_7 \dot{\theta}_5 \left(\begin{aligned} & 2 \dot{\phi}_1 L_5^2 (s \varphi_1 c \varphi_1 s^2 \theta_5 - c \theta_5 s \theta_5) - \dot{\theta}_1 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_1 L_1 L_5 c \theta_5 \\ & - \dot{\theta}_5 s \varphi_1 c \varphi_1 L_5^2 (c^2 \theta_5 - s^2 \theta_5) \\ & + \dot{\theta}_5 s \varphi_1 c \varphi_1 s \theta_5 (L_1 L_5 s \theta_1 + L_5 L_6 s \theta_6 + L_5 L_7 s \theta_7) \\ & - \dot{\theta}_6 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_6 (L_5 L_6 c \theta_5) - \dot{\theta}_7 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_7 (L_5 L_7 c \theta_5) \end{aligned} \right) \\ & + m_7 \dot{\theta}_6 \left(\begin{aligned} & 2 \dot{\phi}_1 (L_6^2 (s^2 \varphi_1 s \theta_6 c \theta_6 - c \theta_6 s \theta_6)) \\ & + \dot{\theta}_1 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_1 (-L_1 L_6 c \theta_6) + \dot{\theta}_5 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_5 (-L_5 L_6 c \theta_6) \\ & - \dot{\theta}_6 L_6^2 s \varphi_1 c \varphi_1 (c^2 \theta_6 - s^2 \theta_6) \\ & - \dot{\theta}_6 s \varphi_1 c \varphi_1 s \theta_6 (-L_1 L_6 s \theta_1 - L_5 L_6 s \theta_5 - L_6 L_7 s \theta_7) \\ & + \dot{\theta}_7 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_7 (-L_6 L_7 c \theta_6) \end{aligned} \right) \\ & + m_7 \dot{\theta}_7 \left(\begin{aligned} & 2 \dot{\phi}_1 (L_7^2 (s^2 \varphi_1 s \theta_7 c \theta_7 - c \theta_7 s \theta_7)) + \dot{\theta}_1 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_1 (-L_1 L_7 c \theta_7) \\ & + \dot{\theta}_5 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_5 (-L_5 L_7 c \theta_7) + \dot{\theta}_6 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_6 (-L_6 L_7 c \theta_7) \\ & - \dot{\theta}_7 L_7^2 s \varphi_1 c \varphi_1 (c^2 \theta_7 - s^2 \theta_7) \\ & - \dot{\theta}_7 s \varphi_1 c \varphi_1 s \theta_7 (-L_1 L_7 s \theta_1 - L_5 L_7 s \theta_5 - L_6 L_7 s \theta_6) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_5 \\ \dot{\theta}_6 \\ \dot{\theta}_7 \\ \varphi_1 \\ \theta_1 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \theta_7 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

İşlemler sadeleştirilir. $\ddot{\phi}_1$ kat sayısının dışındaki tüm işlemler B7 olarak simgelenmiştir.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{ITV7}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) = \left(\begin{aligned} & m_7 \ddot{\phi}_1 \left(L_1^2 (s^2 \varphi_1 s^2 \theta_1 + c^2 \theta_1) + L_5^2 (s^2 \varphi_1 s^2 \theta_5 + c^2 \theta_5) \right. \\ & \left. + L_6^2 (s^2 \varphi_1 s^2 \theta_6 + c^2 \theta_6) + L_7^2 (s^2 \varphi_1 s^2 \theta_7 + c^2 \theta_7) \right) \\ & + B7 \end{aligned} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{RTV8}}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) = \begin{pmatrix} m_8 \ddot{\varphi}_1 \left(L_1^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_1 c^2 \varphi_1) + L_8^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_8 c^2 \varphi_1) \right) \\ + 2L_1 L_8 (s^2 \varphi_1 s \theta_1 s \theta_8 + c \theta_1 c \theta_8) \\ + m_8 \ddot{\theta}_1 (-L_1 L_8 s \varphi_1 s \theta_8 c \varphi_1 c \theta_1 + L_1^2 c \theta_1 s \varphi_1 c \varphi_1 s \theta_1) \\ + m_8 \ddot{\theta}_8 (-L_1 L_8 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_8 - L_8^2 c \theta_8 c \varphi_1 s \theta_8 s \varphi_1) \\ 2\dot{\varphi}_1 \left(L_1^2 (s \varphi_1 c \varphi_1 - c^2 \theta_1 c \varphi_1 s \varphi_1) + L_8^2 (s \varphi_1 c \varphi_1 - c^2 \theta_8 c \varphi_1 s \varphi_1) \right) \\ + 2L_1 L_8 s \varphi_1 c \varphi_1 s \theta_1 s \theta_8 \\ + \dot{\theta}_1 (-L_1 L_8 s \theta_8 c \theta_1 (c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1) + L_1^2 c \theta_1 s \theta_1 (c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1)) \\ + \dot{\theta}_8 (-L_1 L_2 s \theta_1 c \theta_8 (c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1) - L_8^2 c \theta_8 s \theta_8 (c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1)) \\ m_8 \dot{\theta}_1 \left(\dot{\varphi}_1 (-2L_1^2 c \theta_1 s \theta_1 c^2 \varphi_1 + 2L_1 L_8 (s^2 \varphi_1 c \theta_1 s \theta_8 - s \theta_1 c \theta_8)) \right) \\ + \dot{\theta}_1 (L_1 L_8 s \varphi_1 s \theta_8 c \varphi_1 s \theta_1 + L_1^2 s \varphi_1 c \varphi_1 (c^2 \theta_1 - s^2 \theta_1)) \\ + \dot{\theta}_8 (-L_1 L_8 s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_1 c \theta_8) \\ \dot{\varphi}_1 \left(-2L_8^2 (c \theta_8 s \theta_8 c^2 \varphi_1) \right. \\ \left. + 2L_1 L_8 (s^2 \varphi_1 s \theta_1 c \theta_8 - c \theta_1 s \theta_8) \right) \\ m_8 \dot{\theta}_8 + \dot{\theta}_1 (-L_1 L_8 s \varphi_1 c \theta_8 c \varphi_1 c \theta_1) \\ + \dot{\theta}_8 (L_1 L_8 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 s \theta_8 - L_8^2 c \varphi_1 s \varphi_1 (c^2 \theta_8 - s^2 \theta_8)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_8 \\ \varphi_1 \\ \theta_1 \\ \theta_8 \end{pmatrix}$$

İşlemler sadeleştirilir. $\ddot{\varphi}_1$ katsayısının dışındaki tüm işlemler B8 olarak simgelenmiştir.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{RTV8}}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) = \begin{pmatrix} m_8 \ddot{\varphi}_1 \left(L_1^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_1 c^2 \varphi_1) + L_8^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_8 c^2 \varphi_1) \right) \\ + 2L_1 L_8 (s^2 \varphi_1 s \theta_1 s \theta_8 + c \theta_1 c \theta_8) \\ + B8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{RTV9}}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) = & \left(\begin{aligned} & m_9 \ddot{\varphi}_1 \left(\begin{aligned} & L_1^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_1 c^2 \varphi_1) + L_8^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_8 c^2 \varphi_1) \\ & + L_9^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_9 c^2 \varphi_1) \\ & + 2 \left(\begin{aligned} & L_1 L_8 (s^2 \varphi_1 s \theta_1 s \theta_8 + c \theta_1 c \theta_8) \\ & + L_8 L_9 (s^2 \varphi_1 s \theta_8 s \theta_9 + c \theta_8 c \theta_9) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \\ & + m_9 \ddot{\theta}_1 (-L_1^2 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_1 - L_1 L_8 s \varphi_1 s \theta_8 c \varphi_1 c \theta_1 - L_1 L_9 s \varphi_1 s \theta_9 c \varphi_1 c \theta_1) \\ & + m_9 \ddot{\theta}_8 (-L_1 L_8 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_8 - L_8^2 s \varphi_1 s \theta_8 c \varphi_1 c \theta_8 - L_8 L_9 s \varphi_1 s \theta_9 c \varphi_1 c \theta_8) \\ & + m_9 \ddot{\theta}_9 (-L_1 L_9 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_9 - L_8 L_9 s \varphi_1 s \theta_8 c \varphi_1 c \theta_9 - L_9^2 c \varphi_1 c \theta_9 s \varphi_1 s \theta_9) \\ & + m_9 \dot{\varphi}_1 \left(\begin{aligned} & L_1^2 (s \varphi_1 c \varphi_1 - c^2 \theta_1 c \varphi_1 s \varphi_1) + L_8^2 (s \varphi_1 c \varphi_1 - c^2 \theta_8 c \varphi_1 s \varphi_1) \\ & + 2 \dot{\varphi}_1 (s \varphi_1 c \varphi_1 - c^2 \theta_9 c \varphi_1 s \varphi_1) \\ & + 2 \left(\begin{aligned} & L_1 L_8 (s \varphi_1 c \varphi_1 s \theta_1 s \theta_8) \\ & + L_8 L_9 (s \varphi_1 c \varphi_1 s \theta_8 s \theta_9) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \\ & - \dot{\theta}_1 ((c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1)(L_1^2 s \theta_1 c \theta_1 + L_1 L_8 s \theta_8 c \theta_1 + L_1 L_9 s \theta_9 c \theta_1)) \\ & - \dot{\theta}_8 ((c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1)(L_1 L_8 s \theta_1 c \theta_8 + L_8^2 s \theta_8 c \theta_8 + L_8 L_9 s \theta_9 c \theta_8)) \\ & - \dot{\theta}_9 ((c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1)(L_1 L_9 s \theta_1 c \theta_9 + L_8 L_9 s \theta_8 c \theta_9 + L_9^2 c \theta_9 s \theta_9)) \\ & + m_3 \dot{\theta}_2 \left(\begin{aligned} & \dot{\varphi}_1 \left(\begin{aligned} & -2 L_8^2 c \theta_8 s \theta_8 c^2 \varphi_1 \\ & + 2 \left(\begin{aligned} & L_1 L_8 (s^2 \varphi_1 s \theta_1 c \theta_8 - c \theta_1 s \theta_8) \\ & + L_8 L_9 (s^2 \varphi_1 c \theta_8 s \theta_9 - s \theta_8 c \theta_9) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \\ & + \dot{\theta}_1 (-L_1 L_8 s \varphi_1 c \theta_8 c \varphi_1 c \theta_1) \\ & + \dot{\theta}_8 (L_1 L_8 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 s \theta_8 - L_8^2 s \varphi_1 c \varphi_1 (c^2 \theta_8 - s^2 \theta_8) + L_8 L_9 s \varphi_1 s \theta_9 c \varphi_1 s \theta_8) \\ & + \dot{\theta}_9 (-L_8 L_9 s \varphi_1 c \theta_8 c \varphi_1 c \theta_9) \end{aligned} \right) \\ & + m_9 \dot{\theta}_9 \left(\begin{aligned} & \dot{\varphi}_1 \left(\begin{aligned} & -2 L_9^2 c \theta_9 s \theta_9 c^2 \varphi_1 \\ & + 2 (L_8 L_9 (s^2 \varphi_1 s \theta_8 c \theta_9 - c \theta_8 s \theta_9)) \end{aligned} \right) \\ & + \dot{\theta}_1 (-L_1 L_9 s \varphi_1 c \theta_9 c \varphi_1 c \theta_1) \\ & + \dot{\theta}_8 (-L_8 L_9 s \varphi_1 c \theta_9 c \varphi_1 c \theta_8) \\ & + \dot{\theta}_9 (L_1 L_9 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 s \theta_9 + L_8 L_9 s \varphi_1 s \theta_8 c \varphi_1 s \theta_9 - L_9^2 c \varphi_1 s \varphi_1 (c^2 \theta_9 - s^2 \theta_9)) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \left(\begin{aligned} & \dot{\varphi}_1 \\ & \dot{\theta}_1 \\ & \dot{\theta}_8 \\ & \dot{\theta}_9 \\ & \varphi_1 \\ & \theta_1 \\ & \theta_8 \\ & \theta_9 \end{aligned} \right)
\end{aligned}$$

İşlemler sadeleştirilir. $\ddot{\varphi}_1$ katsayısının dışındaki tüm işlemler B9 olarak simgelenmiştir.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{RTV9}}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) = \left(\begin{aligned} & m_9 \ddot{\varphi}_1 \left(\begin{aligned} & L_1^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_1 c^2 \varphi_1) + L_8^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_8 c^2 \varphi_1) \\ & + L_9^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_9 c^2 \varphi_1) \\ & + 2 \left(\begin{aligned} & L_1 L_8 (s^2 \varphi_1 s \theta_1 s \theta_8 + c \theta_1 c \theta_8) \\ & + L_8 L_9 (s^2 \varphi_1 s \theta_8 s \theta_9 + c \theta_8 c \theta_9) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \\ & + B9 \end{aligned} \right)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{RTV10}}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) = & \left(\begin{aligned} & m_{10} \ddot{\varphi}_1 \left(L_1^2 (s^2 \varphi_1 s^2 \theta_1 + c^2 \theta_1) + L_8^2 (s^2 \varphi_1 s^2 \theta_8 + c^2 \theta_8) \right. \\ & \left. + L_9^2 (s^2 \varphi_1 s^2 \theta_9 + c^2 \theta_9) + L_{10}^2 (s^2 \varphi_1 s^2 \theta_{10} + c^2 \theta_{10}) \right) \\ & + m_{10} \ddot{\theta}_1 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_1 (-L_1^2 s \theta_1 - L_1 L_8 s \theta_8 - L_1 L_9 s \theta_9 - L_1 L_{10} s \theta_{10}) \\ & + m_{10} \ddot{\theta}_8 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_8 (-L_1 L_8 s \theta_1 - L_8^2 s \theta_8 - L_8 L_9 s \theta_9 - L_8 L_{10} s \theta_{10}) \\ & + m_{10} \ddot{\theta}_9 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_9 (-L_1 L_9 s \theta_1 - L_8 L_9 s \theta_8 - L_9^2 s \theta_9 - L_9 L_{10} s \theta_{10}) \\ & + m_{10} \ddot{\theta}_{10} s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_{10} (-L_1 L_{10} s \theta_1 - L_8 L_{10} s \theta_8 - L_9 L_{10} s \theta_9 - L_{10}^2 s \theta_{10}) \\ & + m_{10} \dot{\varphi}_1 \left(\begin{aligned} & 2 \dot{\varphi}_1 s \varphi_1 c \varphi_1 (L_1^2 s^2 \theta_1 + L_{10}^2 s^2 \theta_8 + L_9^2 s^2 \theta_9 + L_{10}^2 s^2 \theta_{10}) \\ & \left(c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1 \right) \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 c \theta_1 (-L_1^2 s \theta_1 - L_1 L_2 s \theta_8 - L_1 L_9 s \theta_9 - L_1 L_{10} s \theta_{10}) \\ \dot{\theta}_8 c \theta_8 (-L_1 L_8 s \theta_1 - L_8^2 s \theta_8 - L_8 L_9 s \theta_9 - L_8 L_{10} s \theta_{10}) \\ \dot{\theta}_9 c \theta_9 (-L_1 L_9 s \theta_1 - L_8 L_9 s \theta_8 - L_9^2 s \theta_9 - L_9 L_{10} s \theta_{10}) \\ \dot{\theta}_{10} c \theta_{10} (-L_1 L_{10} s \theta_1 - L_8 L_{10} s \theta_8 - L_9 L_{10} s \theta_9 - L_{10}^2 s \theta_{10}) \end{pmatrix} \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \\
& + m_{10} \dot{\theta}_1 \left(\begin{aligned} & 2 \dot{\varphi}_1 (L_1^2 (s^2 \varphi_1 s \theta_1 c \theta_1 - c \theta_1 s \theta_1)) \\ & - \dot{\theta}_1 L_1^2 s \varphi_1 c \varphi_1 (c^2 \theta_1 - s^2 \theta_1) - \dot{\theta}_1 s \varphi_1 c \varphi_1 s \theta_1 (-L_1 L_8 s \theta_8 - L_1 L_9 s \theta_9 - L_1 L_{10} s \theta_{10}) \\ & - \dot{\theta}_8 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_8 L_1 L_8 c \theta_1 - \dot{\theta}_9 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_9 L_1 L_9 c \theta_1 - \dot{\theta}_{10} s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_{10} L_1 L_{10} c \theta_1 \end{aligned} \right) \\
& + m_{10} \dot{\theta}_8 \left(\begin{aligned} & 2 \dot{\varphi}_1 L_8^2 (s \varphi_1 c \varphi_1 s^2 \theta_8 - c \theta_8 s \theta_8) \\ & - \dot{\theta}_8 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_1 L_1 L_8 c \theta_8 \\ & - \dot{\theta}_8 s \varphi_1 c \varphi_1 L_8^2 (c^2 \theta_8 - s^2 \theta_8) + \dot{\theta}_8 s \varphi_1 c \varphi_1 s \theta_8 (L_1 L_8 s \theta_1 + L_8 L_9 s \theta_9 + L_8 L_{10} s \theta_{10}) \\ & - \dot{\theta}_9 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_9 (L_8 L_9 c \theta_8) - \dot{\theta}_{10} s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_{10} (L_8 L_{10} c \theta_8) \end{aligned} \right) \\
& + m_{10} \dot{\theta}_9 \left(\begin{aligned} & 2 \dot{\varphi}_1 (L_9^2 (s^2 \varphi_1 s \theta_9 c \theta_9 - c \theta_9 s \theta_9)) \\ & + \dot{\theta}_1 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_1 (-L_1 L_9 c \theta_9) + \dot{\theta}_8 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_8 (-L_8 L_9 c \theta_9) \\ & - \dot{\theta}_9 L_9^2 s \varphi_1 c \varphi_1 (c^2 \theta_9 - s^2 \theta_9) - \dot{\theta}_9 s \varphi_1 c \varphi_1 s \theta_9 (-L_1 L_9 s \theta_1 - L_8 L_9 s \theta_8 - L_9 L_{10} s \theta_{10}) \\ & + \dot{\theta}_{10} s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_{10} (-L_9 L_{10} c \theta_9) \end{aligned} \right) \\
& + m_{10} \dot{\theta}_{10} \left(\begin{aligned} & 2 \dot{\varphi}_1 (L_{10}^2 (s^2 \varphi_1 s \theta_{10} c \theta_{10} - c \theta_{10} s \theta_{10})) + \dot{\theta}_1 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_1 (-L_1 L_{10} c \theta_{10}) \\ & + \dot{\theta}_8 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_8 (-L_8 L_{10} c \theta_{10}) + \dot{\theta}_9 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_9 (-L_9 L_{10} c \theta_{10}) \\ & - \dot{\theta}_{10} L_{10}^2 s \varphi_1 c \varphi_1 (c^2 \theta_{10} - s^2 \theta_{10}) - \dot{\theta}_{10} s \varphi_1 c \varphi_1 s \theta_{10} (-L_1 L_{10} s \theta_1 - L_8 L_{10} s \theta_8 - L_9 L_{10} s \theta_9) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_8 \\ \dot{\theta}_9 \\ \dot{\theta}_{10} \\ \varphi_1 \\ \theta_1 \\ \theta_8 \\ \theta_9 \\ \theta_{10} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

İşlemler sadeleştirilir. $\ddot{\varphi}_1$ katsayısının dışındaki tüm işlemler B10 olarak simgelenmiştir.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{RTV10}}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) = \left(\begin{aligned} & m_{10} \ddot{\varphi}_1 \left(L_1^2 (s^2 \varphi_1 s^2 \theta_1 + c^2 \theta_1) + L_8^2 (s^2 \varphi_1 s^2 \theta_8 + c^2 \theta_8) \right. \\ & \left. + L_9^2 (s^2 \varphi_1 s^2 \theta_9 + c^2 \theta_9) + L_{10}^2 (s^2 \varphi_1 s^2 \theta_{10} + c^2 \theta_{10}) \right) \\ & + B10 \end{aligned} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{LTV11}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) = \begin{pmatrix} m_{11} \ddot{\phi}_1 \left(L_1^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_1 c^2 \varphi_1) + L_{11}^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_{11} c^2 \varphi_1) \right) \\ + 2L_1 L_{11} (s^2 \varphi_1 s \theta_1 s \theta_{11} + c \theta_1 c \theta_{11}) \\ + m_{11} \ddot{\theta}_1 (-L_1 L_{11} s \varphi_1 s \theta_{11} c \varphi_1 c \theta_1 + L_1^2 c \theta_1 s \varphi_1 c \varphi_1 s \theta_1) \\ + m_{11} \ddot{\theta}_{11} (-L_1 L_{11} s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{11} - L_{11}^2 c \theta_{11} c \varphi_1 s \theta_{11} s \varphi_1) \\ m_{11} \dot{\phi}_1 \left(2\dot{\phi}_1 \left(L_1^2 (s \varphi_1 c \varphi_1 - c^2 \theta_1 c \varphi_1 s \varphi_1) + L_{11}^2 (s \varphi_1 c \varphi_1 - c^2 \theta_{11} c \varphi_1 s \varphi_1) \right) \right. \\ \left. + 2L_1 L_{11} s \varphi_1 c \varphi_1 s \theta_1 s \theta_{11} \right) \\ + \dot{\theta}_1 (-L_1 L_{11} s \theta_{11} c \theta_1 (c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1) + L_1^2 c \theta_1 s \theta_1 (c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1)) \\ + \dot{\theta}_{11} (-L_1 L_{11} s \theta_1 c \theta_{11} (c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1) - L_{11}^2 c \theta_{11} s \theta_{11} (c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1)) \\ m_{11} \dot{\theta}_1 \left(\dot{\phi}_1 (-2L_1^2 c \theta_1 s \theta_1 c^2 \varphi_1 + 2L_1 L_{11} (s^2 \varphi_1 c \theta_1 s \theta_{11} - s \theta_1 c \theta_{11})) \right) \\ + \dot{\theta}_1 (L_1 L_{11} s \varphi_1 s \theta_{11} c \varphi_1 s \theta_1 + L_1^2 s \varphi_1 c \varphi_1 (c^2 \theta_1 - s^2 \theta_1)) \\ + \dot{\theta}_{11} (-L_1 L_{11} s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_{11}) \\ m_{11} \dot{\theta}_{11} \left(\dot{\phi}_1 \left(-2L_1^2 (c \theta_{11} s \theta_{11} c^2 \varphi_1) \right. \right. \\ \left. \left. + 2L_1 L_{11} (s^2 \varphi_1 s \theta_1 c \theta_{11} - c \theta_1 s \theta_{11}) \right) \right) \\ + \dot{\theta}_1 (-L_1 L_{11} s \varphi_1 c \theta_{11} c \varphi_1 c \theta_1) \\ + \dot{\theta}_{11} (L_1 L_{11} s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{11} - L_{11}^2 c \varphi_1 s \varphi_1 (c^2 \theta_{11} - s^2 \theta_{11})) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \varphi_1 \\ \theta_1 \\ \theta_{11} \end{pmatrix}$$

İşlemler sadeleştirilir. $\ddot{\phi}_1$ katsayısının dışındaki tüm işlemler B11 olarak simgelenmiştir.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{LTV11}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) = \begin{pmatrix} m_{11} \ddot{\phi}_1 \left(L_1^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_1 c^2 \varphi_1) + L_{11}^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_{11} c^2 \varphi_1) \right) \\ + 2L_1 L_{11} (s^2 \varphi_1 s \theta_1 s \theta_{11} + c \theta_1 c \theta_{11}) \\ + B11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{LTV12}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) = & \left(\begin{aligned} & m_{11} \ddot{\phi}_1 \left(\begin{aligned} & L_1^2 (s^2 \phi_1 + c^2 \theta_1 c^2 \phi_1) + L_{11}^2 (s^2 \phi_1 + c^2 \theta_{11} c^2 \phi_1) \\ & + L_{12}^2 (s^2 \phi_1 + c^2 \theta_{12} c^2 \phi_1) \\ & 2 \left(\begin{aligned} & L_1 L_{11} (s^2 \phi_1 s \theta_1 s \theta_{11} + c \theta_1 c \theta_{11}) \\ & + L_{11} L_{12} (s^2 \phi_1 s \theta_{11} s \theta_{12} + c \theta_{11} c \theta_{12}) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \\ & + m_{12} \ddot{\theta}_1 \left(-L_1^2 s \phi_1 s \theta_1 c \phi_1 c \theta_1 - L_1 L_{11} s \phi_1 s \theta_{11} c \phi_1 c \theta_1 - L_1 L_{12} s \phi_1 s \theta_{12} c \phi_1 c \theta_1 \right) \\ & + m_{12} \ddot{\theta}_{11} \left(-L_1 L_{11} s \phi_1 s \theta_1 c \phi_1 c \theta_{11} - L_{11}^2 s \phi_1 s \theta_{11} c \phi_1 c \theta_{11} - L_{11} L_{12} s \phi_1 s \theta_{12} c \phi_1 c \theta_{11} \right) \\ & + m_{12} \ddot{\theta}_{12} \left(-L_1 L_{12} s \phi_1 s \theta_1 c \phi_1 c \theta_{12} - L_{11} L_{12} s \phi_1 s \theta_{11} c \phi_1 c \theta_{12} - L_{12}^2 c \phi_1 c \theta_{12} s \phi_1 s \theta_{12} \right) \\ & + m_{12} \dot{\phi}_1 \left(\begin{aligned} & L_1^2 (s \phi_1 c \phi_1 - c^2 \theta_1 c \phi_1 s \phi_1) + L_{11}^2 (s \phi_1 c \phi_1 - c^2 \theta_{11} c \phi_1 s \phi_1) \\ & + L_{12}^2 (s \phi_1 c \phi_1 - c^2 \theta_{12} c \phi_1 s \phi_1) \\ & 2 \left(\begin{aligned} & L_1 L_{11} (s \phi_1 c \phi_1 s \theta_1 s \theta_{11}) \\ & + L_{11} L_{12} (s \phi_1 c \phi_1 s \theta_{11} s \theta_{12}) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \\ & - \dot{\theta}_1 \left((c^2 \phi_1 - s^2 \phi_1) (L_1^2 s \theta_1 c \theta_1 + L_1 L_{11} s \theta_{11} c \theta_1 + L_1 L_{12} s \theta_{12} c \theta_1) \right) \\ & - \dot{\theta}_{11} \left((c^2 \phi_1 - s^2 \phi_1) (L_1 L_{11} s \theta_1 c \theta_{11} + L_{11}^2 s \theta_{11} c \theta_{11} + L_{11} L_{12} s \theta_{12} c \theta_{11}) \right) \\ & - \dot{\theta}_{12} \left((c^2 \phi_1 - s^2 \phi_1) (L_1 L_{12} s \theta_1 c \theta_{12} + L_{11} L_{12} s \theta_{11} c \theta_{12} + L_{12}^2 c \theta_{12} s \theta_{12}) \right) \\ & + m_{12} \dot{\theta}_{11} \left(\begin{aligned} & \dot{\phi}_1 \left(\begin{aligned} & -2 L_{12}^2 c \theta_{11} s \theta_{11} c^2 \phi_1 \\ & 2 \left(\begin{aligned} & L_1 L_{11} (s^2 \phi_1 s \theta_1 c \theta_{11} - c \theta_1 s \theta_{11}) \\ & + L_{11} L_{12} (s^2 \phi_1 c \theta_{11} s \theta_{12} - s \theta_{11} c \theta_{12}) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \\ & + \dot{\theta}_1 (-L_1 L_{11} s \phi_1 c \theta_{11} c \phi_1 c \theta_1) \\ & + \dot{\theta}_2 \left(\begin{aligned} & L_1 L_{11} s \phi_1 s \theta_1 c \phi_1 s \theta_{11} - L_{11}^2 s \phi_1 c \phi_1 (c^2 \theta_{11} - s^2 \theta_{11}) \\ & + L_{11} L_{12} s \phi_1 s \theta_{12} c \phi_1 s \theta_{11} \end{aligned} \right) \\ & + \dot{\theta}_{12} (-L_{11} L_{12} s \phi_1 c \theta_{11} c \phi_1 c \theta_{12}) \end{aligned} \right) \\ & + m_{12} \dot{\theta}_{12} \left(\begin{aligned} & \dot{\phi}_1 \left(\begin{aligned} & -2 L_{12}^2 c \theta_{12} s \theta_{12} c^2 \phi_1 \\ & 2 (L_{11} L_{12} (s^2 \phi_1 s \theta_{11} c \theta_{12} - c \theta_{11} s \theta_{12})) \end{aligned} \right) \\ & + \dot{\theta}_1 (-L_1 L_{12} s \phi_1 c \theta_{12} c \phi_1 c \theta_1) \\ & + \dot{\theta}_{11} (-L_{11} L_{12} s \phi_1 c \theta_{12} c \phi_1 c \theta_{11}) \\ & + \dot{\theta}_{12} \left(\begin{aligned} & L_1 L_{12} s \phi_1 s \theta_1 c \phi_1 s \theta_{12} + L_{11} L_{12} s \phi_1 s \theta_{11} c \phi_1 s \theta_{12} \\ & - L_{12}^2 c \phi_1 s \phi_1 (c^2 \theta_{12} - s^2 \theta_{12}) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_{11} \\ \dot{\theta}_{12} \\ \phi_1 \\ \theta_1 \\ \theta_{11} \\ \theta_{12} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

İşlemler sadeleştirilir. $\ddot{\phi}_1$ katsayısının dışındaki tüm işlemler B12 olarak simgelenmiştir.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{LTV12}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) &= \left(m_{12} \ddot{\phi}_1 \begin{pmatrix} L_1^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_1 c^2 \varphi_1) + L_{11}^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_{11} c^2 \varphi_1) \\ + L_{12}^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_{12} c^2 \varphi_1) \\ 2 \begin{pmatrix} L_1 L_{11} (s^2 \varphi_1 s \theta_1 s \theta_{11} + c \theta_1 c \theta_{11}) \\ + L_{11} L_{12} (s^2 \varphi_1 s \theta_{11} s \theta_{12} + c \theta_{11} c \theta_{12}) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. + B12 \right) \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{LTV13}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) &= \left(m_{13} \ddot{\phi}_1 \begin{pmatrix} L_1^2 (s^2 \varphi_1 s^2 \theta_1 + c^2 \theta_1) + L_{11}^2 (s^2 \varphi_1 s^2 \theta_{11} + c^2 \theta_{11}) \\ + L_{12}^2 (s^2 \varphi_1 s^2 \theta_{12} + c^2 \theta_{12}) + L_{13}^2 (s^2 \varphi_1 s^2 \theta_{13} + c^2 \theta_{13}) \end{pmatrix} \right. \\
&\quad + m_{13} \ddot{\theta}_1 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_1 (-L_1^2 s \theta_1 - L_1 L_{11} s \theta_{11} - L_1 L_{12} s \theta_{12} - L_1 L_{13} s \theta_{13}) \\
&\quad + m_{13} \ddot{\theta}_{11} s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_{11} (-L_1 L_{11} s \theta_1 - L_{11}^2 s \theta_{11} - L_{11} L_{12} s \theta_{12} - L_{11} L_{13} s \theta_{13}) \\
&\quad + m_{13} \ddot{\theta}_{12} s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_{12} (-L_1 L_{12} s \theta_1 - L_{11} L_{12} s \theta_{11} - L_{12}^2 s \theta_{12} - L_{12} L_{13} s \theta_{13}) \\
&\quad + m_{13} \ddot{\theta}_{13} s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_{13} (-L_1 L_{13} s \theta_1 - L_{11} L_{13} s \theta_{11} - L_{12} L_{13} s \theta_{12} - L_{13}^2 s \theta_{13}) \\
&\quad + m_{13} \dot{\phi}_1 \begin{pmatrix} 2 \dot{\phi}_1 s \varphi_1 c \varphi_1 (L_1^2 s^2 \theta_1 + L_{11}^2 s^2 \theta_{11} + L_{12}^2 s^2 \theta_{12} + L_{13}^2 s^2 \theta_{13}) \\ \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 c \theta_1 (-L_1^2 s \theta_1 - L_1 L_{11} s \theta_{11} - L_1 L_{12} s \theta_{12} - L_1 L_{13} s \theta_{13}) \\ \dot{\theta}_{11} c \theta_{11} (-L_1 L_{11} s \theta_1 - L_{11}^2 s \theta_{11} - L_{11} L_{12} s \theta_{12} - L_{11} L_{13} s \theta_{13}) \\ \dot{\theta}_{12} c \theta_{12} (-L_1 L_{12} s \theta_1 - L_{11} L_{12} s \theta_{11} - L_{12}^2 s \theta_{12} - L_{12} L_{13} s \theta_{13}) \\ \dot{\theta}_{13} c \theta_{13} (-L_1 L_{13} s \theta_1 - L_{11} L_{13} s \theta_{11} - L_{12} L_{13} s \theta_{12} - L_{13}^2 s \theta_{13}) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&\quad + m_{13} \dot{\theta}_1 \begin{pmatrix} 2 \dot{\phi}_1 (L_1^2 (s^2 \varphi_1 s \theta_1 c \theta_1 - c \theta_1 s \theta_1)) \\ - \dot{\theta}_1 L_1^2 s \varphi_1 c \varphi_1 (c^2 \theta_1 - s^2 \theta_1) - \dot{\theta}_1 s \varphi_1 c \varphi_1 s \theta_1 (-L_1 L_{11} s \theta_{11} - L_1 L_{12} s \theta_{12} - L_1 L_{13} s \theta_{13}) \\ - \dot{\theta}_{11} s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_{11} L_1 L_{11} c \theta_1 - \dot{\theta}_{12} s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_{12} L_1 L_{12} c \theta_1 - \dot{\theta}_{13} s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_{13} L_1 L_{13} c \theta_1 \end{pmatrix} \\
&\quad + m_{13} \dot{\theta}_{11} \begin{pmatrix} 2 \dot{\phi}_1 L_{11}^2 (s \varphi_1 c \varphi_1 s^2 \theta_{11} - c \theta_{11} s \theta_{11}) \\ - \dot{\theta}_1 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_{11} L_1 L_{11} c \theta_{11} \\ - \dot{\theta}_{11} s \varphi_1 c \varphi_1 L_{11}^2 (c^2 \theta_{11} - s^2 \theta_{11}) + \dot{\theta}_{11} s \varphi_1 c \varphi_1 s \theta_{11} (L_1 L_{11} s \theta_1 + L_{11} L_{12} s \theta_{12} + L_{11} L_{13} s \theta_{13}) \\ - \dot{\theta}_{12} s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_{12} (L_{11} L_{12} c \theta_{11}) - \dot{\theta}_{13} s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_{13} (L_{11} L_{13} c \theta_{11}) \end{pmatrix} \\
&\quad + m_{13} \dot{\theta}_{12} \begin{pmatrix} 2 \dot{\phi}_1 (L_{12}^2 (s^2 \varphi_1 s \theta_{12} c \theta_{12} - c \theta_{12} s \theta_{12})) \\ + \dot{\theta}_1 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_{12} (-L_1 L_{12} c \theta_{12}) + \dot{\theta}_{11} s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_{11} (-L_{11} L_{12} c \theta_{12}) \\ - \dot{\theta}_{12} L_{12}^2 s \varphi_1 c \varphi_1 (c^2 \theta_{12} - s^2 \theta_{12}) - \dot{\theta}_{12} s \varphi_1 c \varphi_1 s \theta_{12} (-L_1 L_{12} s \theta_1 - L_{11} L_{12} s \theta_{11} - L_{12} L_{13} s \theta_{13}) \\ + \dot{\theta}_{13} s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_{13} (-L_{12} L_{13} c \theta_{12}) \end{pmatrix} \\
&\quad + m_{13} \dot{\theta}_{13} \begin{pmatrix} 2 \dot{\phi}_1 (L_{13}^2 (s^2 \varphi_1 s \theta_{13} c \theta_{13} - c \theta_{13} s \theta_{13})) + \dot{\theta}_1 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_{13} (-L_1 L_{13} c \theta_{13}) \\ + \dot{\theta}_{11} s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_{11} (-L_{11} L_{13} c \theta_{13}) + \dot{\theta}_{12} s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_{12} (-L_{12} L_{13} c \theta_{13}) \\ - \dot{\theta}_{13} L_{13}^2 s \varphi_1 c \varphi_1 (c^2 \theta_{13} - s^2 \theta_{13}) - \dot{\theta}_{13} s \varphi_1 c \varphi_1 s \theta_{13} (-L_1 L_{13} s \theta_1 - L_{11} L_{13} s \theta_{11} - L_{12} L_{13} s \theta_{12}) \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_{11} \\ \dot{\theta}_{12} \\ \dot{\theta}_{13} \\ \varphi_1 \\ \theta_1 \\ \theta_{11} \\ \theta_{12} \\ \theta_{13} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

İşlemler sadeleştirilir. $\ddot{\phi}_1$ katsayısının dışındaki tüm işlemler B13 olarak simgelenmiştir.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{LTV13}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) = \left(m_{13} \ddot{\phi}_1 \begin{pmatrix} L_1^2 (s^2 \varphi_1 s^2 \theta_1 + c^2 \theta_1) + L_{11}^2 (s^2 \varphi_1 s^2 \theta_{11} + c^2 \theta_{11}) \\ + L_{12}^2 (s^2 \varphi_1 s^2 \theta_{12} + c^2 \theta_{12}) + L_{13}^2 (s^2 \varphi_1 s^2 \theta_{13} + c^2 \theta_{13}) \end{pmatrix} \right. \\
\left. + B13 \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{TTV14}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) = m_{14} + \begin{pmatrix} \ddot{\phi}_1 L_a^2 (s^2 \varphi_1 s^2 \theta_1 + c^2 \theta_1) - \ddot{\theta}_1 L_a^2 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_1 \\ + \ddot{\theta}_{14} L_a L_{14} (-s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14} - c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{14} s \varphi_2 + s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14}) \\ + \ddot{\phi}_2 L_a L_{14} (s \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{14} - c \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{14} c \varphi_2 + s \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{14}) \\ + \dot{\phi}_1 \left(\dot{\phi}_1 L_a^2 2 s \varphi_1 c \varphi_1 s^2 \theta_1 - \dot{\theta}_1 L_a^2 s \theta_1 c \theta_1 (c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1) \right. \\ \left. + \dot{\theta}_{14} L_a L_{14} \begin{pmatrix} -s \theta_1 c \theta_{14} c \varphi_2 c \varphi_1 \\ + c \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{14} s \varphi_2 + c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14} \end{pmatrix} \right. \\ \left. + \dot{\phi}_2 L_a L_{14} (c \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{14} + c \theta_1 s \varphi_1 c \theta_{14} c \varphi_2 + c \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{14}) \right) \\ + \dot{\theta}_1 \left(2 \dot{\phi}_1 L_a^2 (s^2 \varphi_1 s \theta_1 c \theta_1 - c \theta_1 s \theta_1) - 2 \dot{\theta}_1 L_a^2 s \varphi_1 c \varphi_1 (c^2 \theta_1 - s^2 \theta_1) \right. \\ \left. + \dot{\theta}_{14} L_a L_{14} \begin{pmatrix} -s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14} \\ + s \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{14} s \varphi_2 - s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14} \end{pmatrix} \right. \\ \left. + \dot{\phi}_2 L_a L_{14} (s \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{14} + s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{14} c \varphi_2 - s \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{14}) \right) \\ + \dot{\theta}_{14} \left(\dot{\theta}_{14} L_a L_{14} \begin{pmatrix} s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14} \\ - c \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{14} s \varphi_2 + s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14} \end{pmatrix} \right. \\ \left. + \dot{\phi}_2 L_a L_{14} (s \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{14} + c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{14} c \varphi_2 - s \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{14}) \right) \\ + \dot{\phi}_2 \left(\dot{\theta}_{14} L_a L_{14} \begin{pmatrix} -c \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{14} \\ - c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{14} c \varphi_2 + c \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{14} \end{pmatrix} \right. \\ \left. + \dot{\phi}_2 L_a L_{14} (c \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14} + c \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{14} s \varphi_2 + c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14}) \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_{14} \\ \dot{\phi}_2 \\ \varphi_1 \\ \theta_1 \\ \theta_{14} \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

İşlemler sadeleştirilir. $\ddot{\phi}_1$ katsayısının dışındaki tüm işlemler B14 olarak simgelenmiştir.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{TTV14}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) = \begin{pmatrix} m_{14} \ddot{\phi}_1 L_a^2 (s^2 \varphi_1 s^2 \theta_1 + c^2 \theta_1) \\ + B14 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{TTV15}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) = \begin{pmatrix} m_{15} \begin{pmatrix} \ddot{\phi}_1 (L_a^2 (s^2 \varphi_1 s^2 \theta_1 + c^2 \theta_1)) \\ + \ddot{\theta}_1 (-L_a^2 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_1) \\ + \ddot{\theta}_{14} (L_a L_{14} (-s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14} - c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{14} s \varphi_2 + s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14})) \\ + \ddot{\phi}_2 \begin{pmatrix} L_a L_{14} (-s \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{14} + c \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{14} c \varphi_2 + s \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{14}) \\ + L_a L_{15} (s \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{15} + c \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{15} c \varphi_2 + s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{15}) \end{pmatrix} \\ + \ddot{\theta}_{15} (L_a L_{15} (-s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{15} - c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{15} s \varphi_2 + s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{15})) \end{pmatrix} \\ + m_{15} \dot{\phi}_1 \begin{pmatrix} 2 \dot{\phi}_1 (L_a^2 (s \varphi_1 c \varphi_1 s^2 \theta_1)) \\ - \dot{\theta}_1 L_a^2 s \theta_1 c \theta_1 (c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1) \\ + \dot{\theta}_{14} (L_a L_{14} (-c \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14} + c \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{14} s \varphi_2 + c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14})) \\ + \dot{\phi}_2 \begin{pmatrix} L_a L_{14} (-c \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{14} - c \theta_1 s \varphi_1 c \theta_{14} c \varphi_2 + c \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{14}) \\ + L_a L_{15} (c \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{15} - c \theta_1 s \varphi_1 c \theta_{15} c \varphi_2 + c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{15}) \end{pmatrix} \\ + \dot{\theta}_{15} (L_a L_{15} (-c \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{15} + c \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{15} s \varphi_2 + c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{15})) \end{pmatrix} \\ + m_{15} \dot{\theta}_1 \begin{pmatrix} 2 \dot{\phi}_1 L_a^2 (s^2 \varphi_1 s \theta_1 c \theta_1 - c \theta_1 s \theta_1) \\ + \dot{\theta}_1 (-L_a^2 s \varphi_1 c \varphi_1 (c^2 \theta_1 - s^2 \theta_1)) \\ + \dot{\theta}_{14} (L_a L_{14} (-s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14} + s \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{14} s \varphi_2 - s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14})) \\ + \dot{\phi}_2 \begin{pmatrix} L_a L_{14} (-s \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{14} - s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{14} c \varphi_2 - s \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{14}) \\ + L_a L_{15} (s \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{15} - s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{15} c \varphi_2 - s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{15}) \end{pmatrix} \\ + \dot{\theta}_{15} (L_a L_{15} (-s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{15} + s \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{15} s \varphi_2 - s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{15})) \end{pmatrix} \\ + m_{15} \dot{\theta}_{14} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_{14} (L_a L_{14} (s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14} - c \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{14} s \varphi_2 + s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14})) \\ + \dot{\phi}_2 L_a L_{14} (-s \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{14} - c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{14} c \varphi_2 - s \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{14}) \end{pmatrix} \\ + m_{15} \dot{\phi}_2 \begin{pmatrix} + \dot{\phi}_2 \begin{pmatrix} L_a L_{14} (-s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14} - c \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{14} s \varphi_2 + s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14}) \\ + L_a L_{15} (s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{15} - c \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{15} s \varphi_2 - s \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{15}) \end{pmatrix} \\ + \dot{\theta}_{15} (L_a L_{15} (s \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{15} - c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{15} c \varphi_2 - s \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{15})) \end{pmatrix} \\ + m_{15} \dot{\theta}_{15} \begin{pmatrix} \dot{\phi}_2 L_a L_{15} (s \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{15} - c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{15} c \varphi_2 - s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{15}) \\ + \dot{\theta}_{15} L_a L_{15} (s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{15} - c \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{15} s \varphi_2 + s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{15}) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_{14} \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\theta}_{15} \\ \varphi_1 \\ \theta_1 \\ \theta_{14} \\ \varphi_2 \\ \theta_{15} \end{pmatrix}$$

İşlemler sadeleştirilir. $\ddot{\phi}_1$ katsayısının dışındaki tüm işlemler B15 olarak simgelenmiştir.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{TTV15}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) = \begin{pmatrix} m_{15} \ddot{\phi}_1 L_a^2 (s^2 \varphi_1 s^2 \theta_1 + c^2 \theta_1) \\ + B15 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{TTV16}}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) = \begin{pmatrix} m_{16} \left[\ddot{\varphi}_1 L_a^2 (2s^2 \varphi_1 s^2 \theta_1 + c^2 \theta_1 c^2 \varphi_1) + \ddot{\theta}_1 L_a^2 (-c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_1) \right. \\ \left. + \ddot{\theta}_{14} L_a L_{14} (-c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{14} s \varphi_2) \right. \\ \left. + \ddot{\varphi}_2 \left[L_a s \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 (L_{14} s \theta_{14} + L_{15} s \theta_{15} + L_{16} s \theta_{16}) \right. \right. \\ \left. \left. + L_a c \theta_1 c \varphi_1 c \varphi_2 (L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15} + L_{16} c \theta_{16}) \right. \right. \\ \left. \left. + L_a s \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 (L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15} + L_{16} c \theta_{16}) \right] \right. \\ \left. + \ddot{\theta}_{15} L_a L_{15} (-s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{15} - c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{15} s \varphi_2 + s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{15}) \right. \\ \left. + \ddot{\theta}_{16} L_a L_{16} (-s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{16} - c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{16} s \varphi_2 + s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{16}) \right] \\ + m_{16} \dot{\varphi}_1 \left[2 \dot{\varphi}_1 L_a^2 (2s \varphi_1 c \varphi_1 s^2 \theta_1 - c^2 \theta_1 c \varphi_1 s \varphi_1) \right. \\ - \dot{\theta}_1 L_a^2 c \theta_1 s \theta_1 (c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1) + \dot{\theta}_{14} L_a L_{14} c \theta_1 s \theta_{14} s \varphi_1 s \varphi_2 \\ \left. + \dot{\varphi}_2 \left[L_a c \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 (L_{14} s \theta_{14} + L_{15} s \theta_{15} + L_{16} s \theta_{16}) \right. \right. \\ \left. \left. - L_a c \theta_1 s \varphi_1 c \varphi_2 (L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15} + L_{16} c \theta_{16}) \right. \right. \\ \left. \left. + L_a c \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 (L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15} + L_{16} c \theta_{16}) \right] \right. \\ \left. + \dot{\theta}_{15} L_a L_{15} (-c \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{15} + c \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{15} s \varphi_2 + c \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{15}) \right. \\ \left. + \dot{\theta}_{16} L_a L_{16} (-c \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{16} + c \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{16} s \varphi_2 + c \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{16}) \right] \\ + m_{16} \dot{\theta}_1 \left[2 \dot{\varphi}_1 L_a^2 (2s^2 \varphi_1 s \theta_1 c \theta_1 - c \theta_1 s \theta_1 c^2 \varphi_1) \right. \\ - \dot{\theta}_1 L_a^2 c \varphi_1 s \varphi_1 (c^2 \theta_1 - s^2 \theta_1) + \dot{\theta}_{14} L_a L_{14} s \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{14} s \varphi_2 \\ \left. + \dot{\varphi}_2 \left[L_a s \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 (L_{14} s \theta_{14} + L_{15} s \theta_{15} + L_{16} s \theta_{16}) \right. \right. \\ \left. \left. - L_a s \theta_1 c \varphi_1 c \varphi_2 (L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15} + L_{16} c \theta_{16}) \right. \right. \\ \left. \left. + L_a s \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 (L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15} + L_{16} c \theta_{16}) \right] \right. \\ \left. + \dot{\theta}_{15} L_a L_{15} (-s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{15} + s \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{15} s \varphi_2 + s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{15}) \right. \\ \left. + \dot{\theta}_{16} L_a L_{16} (-s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{16} + s \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{16} s \varphi_2 + s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{16}) \right] \\ + m_{16} \dot{\theta}_{14} \left[-\dot{\theta}_{14} L_a L_{14} c \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{14} s \varphi_2 \right. \\ \left. + \dot{\varphi}_2 \left(L_a s \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 L_{14} c \theta_{14} - L_a c \theta_1 c \varphi_1 c \varphi_2 L_{14} s \theta_{14} \right) \right. \\ \left. - L_a s \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 L_{14} s \theta_{14} \right] \\ + m_{16} \dot{\varphi}_2 \left[\dot{\theta}_{14} L_a L_{14} (-c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{14} c \varphi_2) \right. \\ \left. + \dot{\varphi}_2 \left[L_a s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 (L_{14} s \theta_{14} + L_{15} s \theta_{15} + L_{16} s \theta_{16}) \right. \right. \\ \left. \left. - L_a c \theta_1 c \varphi_1 s \varphi_2 (L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15} + L_{16} c \theta_{16}) \right. \right. \\ \left. \left. + L_a s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 (L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15} + L_{16} c \theta_{16}) \right] \right. \\ \left. + \dot{\theta}_{15} L_a L_{15} (s \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{15} - c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{15} c \varphi_2 - s \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{15}) \right. \\ \left. + \dot{\theta}_{16} L_a L_{16} (s \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{16} - c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{16} c \varphi_2 - s \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{16}) \right] \\ + m_{16} \dot{\theta}_{15} \left[+ \dot{\varphi}_2 \left(L_a s \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 L_{15} c \theta_{15} - L_a c \theta_1 c \varphi_1 c \varphi_2 L_{15} s \theta_{15} \right) \right. \\ \left. - L_a s \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 L_{15} s \theta_{15} \right. \\ \left. + \dot{\theta}_{15} L_a L_{15} (-s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{15} - c \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{15} s \varphi_2 + s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{15}) \right] \\ + m_{16} \dot{\theta}_{16} \left[+ \dot{\varphi}_2 \left(L_a s \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 L_{16} c \theta_{16} - L_a c \theta_1 c \varphi_1 c \varphi_2 L_{16} s \theta_{16} \right) \right. \\ \left. - L_a s \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 L_{16} s \theta_{16} \right. \\ \left. + \dot{\theta}_{16} L_a L_{16} (s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{16} - c \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{16} s \varphi_2 + s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{16}) \right] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_{14} \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\theta}_{15} \\ \dot{\theta}_{16} \\ \varphi_1 \\ \theta_1 \\ \theta_{14} \\ \varphi_2 \\ \theta_{15} \\ \theta_{16} \end{pmatrix}$$

İşlemler sadeleştirilir. $\ddot{\varphi}_1$ katsayısının dışındaki tüm işlemler B16 olarak simgelenmiştir.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{TTV16}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) = \left(\begin{array}{c} m_{16} \ddot{\phi}_1 \left(L_a^2 \left(2s^2 \phi_1 s^2 \theta_1 + c^2 \theta_1 c^2 \phi_1 \right) \right) \\ + B16 \end{array} \right)$$

EK-B. 9

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_W}{\partial \dot{\phi}_1} \right) - \frac{\partial L_W}{\partial \phi_1} = \tau_{17}$$

$$\frac{\partial L_W}{\partial \phi_1} = \left(\begin{array}{c} \frac{\partial L_{WTV1}}{\partial \phi_1} + \frac{\partial L_{ITV2}}{\partial \phi_1} + \frac{\partial L_{ITV3}}{\partial \phi_1} + \frac{\partial L_{ITV4}}{\partial \phi_1} + \frac{\partial L_{MTV5}}{\partial \phi_1} \\ + \frac{\partial L_{MTV6}}{\partial \phi_1} + \frac{\partial L_{MTV7}}{\partial \phi_1} + \frac{\partial L_{RTV8}}{\partial \phi_1} + \frac{\partial L_{RTV9}}{\partial \phi_1} + \frac{\partial L_{RTV10}}{\partial \phi_1} \\ + \frac{\partial L_{LTV11}}{\partial \phi_1} + \frac{\partial L_{LTV12}}{\partial \phi_1} + \frac{\partial L_{LTV13}}{\partial \phi_1} + \frac{\partial L_{TTV14}}{\partial \phi_1} + \frac{\partial L_{TTV15}}{\partial \phi_1} + \frac{\partial L_{TTV16}}{\partial \phi_1} \end{array} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_W}{\partial \dot{\phi}_1} \right) = \left(\begin{array}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{WTV1}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{ITV2}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{ITV3}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{ITV4}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) \\ + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{MTV5}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{MTV6}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{MTV7}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) \\ + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{RTV8}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{RTV9}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{RTV10}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) \\ + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{LTV11}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{LTV12}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{LTV13}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) \\ + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{TTV14}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{TTV15}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{TTV16}}{\partial \dot{\phi}_1} \right) \end{array} \right)$$

EK-B. 10

$$\dot{x}_2^2 = \left(\begin{array}{c} L_1^2 \dot{\phi}_1^2 s^2 \phi_1 s^2 \theta_1 + L_2^2 \dot{\phi}_1^2 s^2 \phi_1 s^2 \theta_2 + L_1^2 \dot{\theta}_1^2 c^2 \phi_1 c^2 \theta_1 + L_2^2 \dot{\theta}_2^2 c^2 \phi_1 c^2 \theta_2 \\ + 2L_1 L_2 \dot{\phi}_1^2 s^2 \phi_1 s \theta_1 s \theta_2 + 2L_1^2 \dot{\phi}_1 \dot{\theta}_1 s \phi_1 s \theta_1 c \phi_1 c \theta_1 \\ - 2L_1 L_2 \dot{\phi}_1 \dot{\theta}_2 s \phi_1 s \theta_1 c \phi_1 c \theta_2 - 2L_1 L_2 \dot{\phi}_1 \dot{\theta}_1 s \phi_1 s \theta_2 c \phi_1 c \theta_1 \\ - 2L_2^2 \dot{\phi}_1 \dot{\theta}_2 s \phi_1 s \theta_2 c \phi_1 c \theta_2 + 2L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 c^2 \phi_1 c \theta_1 c \theta_2 \end{array} \right)$$

$$\dot{y}_2^2 = \begin{pmatrix} L_1^2 \dot{\varphi}_1^2 c^2 \theta_1 c^2 \varphi_1 + L_2^2 \dot{\varphi}_1^2 c^2 \theta_2 s^2 \varphi_1 + L_1^2 \dot{\theta}_1^2 s^2 \theta_1 s^2 \varphi_1 + L_2^2 \dot{\theta}_2^2 s^2 \theta_2 s^2 \varphi_1 \\ + 2L_1 L_2 \dot{\varphi}_1^2 c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_2 - 2L_1^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_1 \\ - 2L_1 L_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_2 s \varphi_1 - 2L_1 L_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 c \theta_2 c \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_1 \\ - 2L_2^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 c \theta_2 c \varphi_1 s \theta_2 s \varphi_1 + 2L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 s^2 \varphi_1 s \theta_1 s \theta_2 \end{pmatrix}$$

$$\dot{z}_2^2 = \begin{pmatrix} L_1^2 \dot{\varphi}_1^2 c^2 \theta_1 s^2 \varphi_1 + L_2^2 \dot{\varphi}_1^2 s^2 \varphi_1 c^2 \theta_2 + L_1^2 \dot{\theta}_1^2 c^2 \varphi_1 s^2 \theta_1 + L_2^2 \dot{\theta}_2^2 c^2 \varphi_1 s^2 \theta_2 \\ + 2L_1 L_2 \dot{\varphi}_1^2 s^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_2 + 2L_1^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 c \theta_1 s \varphi_1 c \varphi_1 s \theta_1 \\ + 2L_1 L_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_2 s \varphi_1 + 2L_1 L_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 s \varphi_1 s \theta_1 c \theta_2 c \varphi_1 \\ + 2L_2^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 s \varphi_1 s \theta_2 c \varphi_1 c \theta_2 + 2L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 c^2 \varphi_1 s \theta_1 s \theta_2 \end{pmatrix}$$

EK-B. 11

$$T_2 = 0.5m_2 \begin{pmatrix} \left(L_1^2 s^2 \varphi_1 s^2 \theta_1 + L_2^2 s^2 \varphi_1 s^2 \theta_2 + 2L_1 L_2 s^2 \varphi_1 s \theta_1 s \theta_2 \right) \\ \dot{\varphi}_1^2 \left(L_1^2 c^2 \theta_1 c^2 \varphi_1 + L_2^2 c^2 \theta_2 c^2 \varphi_1 + 2L_1 L_2 c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_2 \right. \\ \left. + L_1^2 c^2 \theta_1 s^2 \varphi_1 + L_2^2 s^2 \varphi_1 c^2 \theta_2 + 2L_1 L_2 s^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_2 \right) \\ + \dot{\theta}_1^2 \left(L_1^2 \left(c^2 \varphi_1 c^2 \theta_1 + s^2 \theta_1 s^2 \varphi_1 + c^2 \varphi_1 s^2 \theta_1 \right) \right) \\ + \dot{\theta}_2^2 \left(L_2^2 \left(c^2 \varphi_1 c^2 \theta_2 + s^2 \theta_2 s^2 \varphi_1 + c^2 \varphi_1 s^2 \theta_2 \right) \right) \\ + 2\dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 \left(-L_1 L_2 s \varphi_1 s \theta_2 c \varphi_1 c \theta_1 + L_1^2 c \theta_1 s \varphi_1 c \varphi_1 s \theta_1 \right) \\ + 2\dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 \left(-L_1 L_2 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_2 - L_2^2 c \theta_2 c \varphi_1 s \theta_2 s \varphi_1 \right) \\ + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \left(L_1 L_2 \left(c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_2 + s^2 \varphi_1 s \theta_1 s \theta_2 + c^2 \varphi_1 s \theta_1 s \theta_2 \right) \right) \end{pmatrix}$$

EK-B. 12

$$\dot{x}_3^2 = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1^2 \left(L_1^2 s \varphi_1^2 s^2 \theta_1 + L_2^2 s^2 \varphi_1 s^2 \theta_2 + L_3^2 s^2 \varphi_1 s^2 \theta_3 \right) \\ + \dot{\theta}_1^2 L_1^2 c^2 \varphi_1 c^2 \theta_1 + \dot{\theta}_2^2 L_2^2 c^2 \varphi_1 c^2 \theta_2 + \dot{\theta}_3^2 L_3^2 c^2 \varphi_1 c^2 \theta_3 \\ + 2 \left(L_1 L_2 \dot{\varphi}_1^2 s^2 \varphi_1 s \theta_1 s \theta_2 + L_1 L_3 \dot{\varphi}_1^2 s^2 \varphi_1 s \theta_1 s \theta_3 - L_1^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_1 \right. \\ - L_1 L_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_2 - L_1 L_3 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_3 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_3 \\ + L_2 L_3 \dot{\varphi}_1^2 s^2 \varphi_1 s \theta_2 s \theta_3 - L_1 L_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 s \varphi_1 s \theta_2 c \varphi_1 c \theta_1 - L_2^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 s \varphi_1 s \theta_2 c \varphi_1 c \theta_2 \\ - L_2 L_3 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_3 s \varphi_1 s \theta_2 c \varphi_1 c \theta_3 - L_1 L_3 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 s \varphi_1 s \theta_3 c \varphi_1 c \theta_1 - L_2 L_3 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 c \varphi_1 c \theta_2 s \varphi_1 s \theta_3 \\ - L_3^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_3 c \varphi_1 c \theta_3 s \varphi_1 s \theta_3 + L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 c^2 \varphi_1 c \theta_2 c \theta_1 + L_1 L_3 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_3 \\ \left. + L_2 L_3 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 c^2 \varphi_1 c \theta_2 c \theta_3 \right) \end{pmatrix}$$

$$\dot{y}_3^2 = \left(\begin{aligned} & \dot{\varphi}_1^2 \left(L_1^2 c^2 \theta_1 c \varphi_1^2 + L_2^2 c^2 \theta_2 c^2 \varphi_1 + L_3^2 c^2 \theta_3 c^2 \varphi_1 \right) \\ & + \dot{\theta}_1^2 L_1^2 s^2 \theta_1 s^2 \varphi_1 + \dot{\theta}_2^2 L_2^2 s^2 \theta_2 s^2 \varphi_1 + \dot{\theta}_3^2 L_3^2 s^2 \theta_3 s^2 \varphi_1 \\ & + 2 \left(\begin{aligned} & L_1 L_2 \dot{\varphi}_1^2 c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_2 + L_1 L_3 \dot{\varphi}_1^2 c \varphi_1^2 c \theta_1 c \theta_3 - L_1^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_1 \\ & - L_1 L_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_2 s \varphi_1 - L_1 L_3 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_3 c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_3 s \varphi_1 \\ & + L_2 L_3 \dot{\varphi}_1^2 c^2 \varphi_1 c \theta_2 c \theta_3 - L_1 L_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 c \theta_2 c \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_1 - L_2^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 c \theta_2 c \varphi_1 s \theta_2 s \varphi_1 \\ & - L_2 L_3 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_3 c \theta_2 c \varphi_1 s \theta_3 s \varphi_1 - L_1 L_3 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 c \theta_3 c \varphi_1 s \theta_3 s \varphi_1 - L_2 L_3 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 c \theta_3 c \varphi_1 s \theta_3 s \varphi_1 \\ & - L_3^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_3 c \theta_3 c \varphi_1 s \theta_3 s \varphi_1 + L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 s^2 \varphi_1 s \theta_1 s \theta_2 + L_1 L_3 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 c^2 \varphi_1 s \theta_1 s \theta_3 \\ & + L_2 L_3 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 s^2 \varphi_1 s \theta_2 s \theta_3 \end{aligned} \right) \end{aligned} \right)$$

$$\dot{z}_3^2 = \left(\begin{aligned} & \dot{\varphi}_1^2 \left(L_1^2 s \varphi_1^2 c^2 \theta_1 + L_2^2 s^2 \varphi_1 c^2 \theta_2 + L_3^2 s^2 \varphi_1 c^2 \theta_3 \right) \\ & + \dot{\theta}_1^2 L_1^2 c^2 \varphi_1 s^2 \theta_1 + \dot{\theta}_2^2 L_2^2 c^2 \varphi_1 s^2 \theta_2 + \dot{\theta}_3^2 L_3^2 c^2 \varphi_1 s^2 \theta_3 \\ & + 2 \left(\begin{aligned} & L_1 L_2 \dot{\varphi}_1^2 s^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_2 + L_1 L_3 \dot{\varphi}_1^2 s \varphi_1^2 c \theta_1 c \theta_3 + L_1^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_1 \\ & + L_1 L_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_2 + L_1 L_3 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_3 s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_3 \\ & + L_2 L_3 \dot{\varphi}_1^2 s^2 \varphi_1 c \theta_2 c \theta_3 + L_1 L_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 s \varphi_1 c \theta_2 c \varphi_1 s \theta_1 + L_2^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 s \varphi_1 c \theta_2 c \varphi_1 s \theta_2 \\ & + L_2 L_3 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_3 s \varphi_1 c \theta_2 c \varphi_1 s \theta_3 + L_1 L_3 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 s \varphi_1 c \theta_3 c \varphi_1 s \theta_1 + L_2 L_3 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 s \varphi_1 c \theta_3 c \varphi_1 s \theta_2 \\ & + L_3^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_3 s \varphi_1 c \theta_3 c \varphi_1 s \theta_3 + L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 c^2 \varphi_1 s \theta_1 s \theta_2 + L_1 L_3 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 c^2 \varphi_1 s \theta_1 s \theta_3 \\ & + L_2 L_3 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 c^2 \varphi_1 s \theta_2 s \theta_3 \end{aligned} \right) \end{aligned} \right)$$

EK-B. 13

$$T_3 = 0.5m_3 \left(\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} L_1^2 (s^2 \varphi_1 s^2 \theta_1 + c^2 \theta_1 c^2 \varphi_1 + s^2 \varphi_1 c^2 \theta_1) + L_2^2 (s^2 \varphi_1 s^2 \theta_2 + c^2 \theta_2 c^2 \varphi_1 + s^2 \varphi_1 c^2 \theta_2) \\ + L_3^2 (s^2 \varphi_1 s^2 \theta_3 + c^2 \theta_3 c^2 \varphi_1 + s^2 \varphi_1 c^2 \theta_3) \\ 2 \left(\begin{array}{l} L_1 L_2 (s^2 \varphi_1 s \theta_1 s \theta_2 + c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_2 + s^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_2) \\ + L_2 L_3 (s^2 \varphi_1 s \theta_2 s \theta_3 + c^2 \varphi_1 c \theta_2 c \theta_3 + s^2 \varphi_1 c \theta_2 c \theta_3) \end{array} \right) \end{array} \right) \\ + \dot{\theta}_1^2 (L_1^2 (c^2 \varphi_1 c^2 \theta_1 + s^2 \theta_1 s^2 \varphi_1 + c^2 \varphi_1 s^2 \theta_1)) \\ + \dot{\theta}_2^2 (L_2^2 (c^2 \varphi_1 s^2 \theta_2 + s^2 \theta_2 s^2 \varphi_1 + c^2 \varphi_1 s^2 \theta_2)) \\ + \dot{\theta}_3^2 (L_3^2 (c^2 \varphi_1 c^2 \theta_3 + s^2 \theta_3 s^2 \varphi_1 + c^2 \varphi_1 s^2 \theta_3)) \\ + 2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 (-L_1^2 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_1 - L_1 L_2 s \varphi_1 s \theta_2 c \varphi_1 c \theta_1 - L_1 L_3 s \varphi_1 s \theta_3 c \varphi_1 c \theta_1) \\ + 2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 (-L_1 L_2 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_2 - L_2^2 s \varphi_1 s \theta_2 c \varphi_1 c \theta_2 - L_2 L_3 s \varphi_1 s \theta_3 c \varphi_1 c \theta_2) \\ + 2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_3 (-L_1 L_3 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_3 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_3 - L_2 L_3 s \varphi_1 s \theta_2 c \varphi_1 c \theta_3 - L_3^2 c \varphi_1 c \theta_3 s \varphi_1 s \theta_3) \\ + 2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 ((L_1 L_2) (c^2 \varphi_1 c \theta_2 c \theta_1 + s^2 \varphi_1 s \theta_1 s \theta_2 + c^2 \varphi_1 s \theta_1 s \theta_2)) \\ + 2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 ((L_1 L_3) (c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_3 + s^2 \varphi_1 s \theta_1 s \theta_3 + c^2 \varphi_1 s \theta_1 s \theta_3)) \\ + 2 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 ((L_2 L_3) (c^2 \varphi_1 c \theta_2 c \theta_3 + s^2 \varphi_1 s \theta_2 s \theta_3 + c^2 \varphi_1 s \theta_2 s \theta_3)) \end{array} \right)$$

EK-B. 14

$$\dot{x}_4^2 = \left(\begin{aligned} & \dot{\varphi}_1^2 \left(L_1^2 s^2 \varphi_1 s^2 \theta_1 + L_2^2 s^2 \varphi_1 s^2 \theta_2 + L_3^2 s^2 \varphi_1 s^2 \theta_3 + L_4^2 s^2 \varphi_1 s^2 \theta_4 \right) \\ & + \dot{\theta}_1^2 L_1^2 c^2 \varphi_1 c^2 \theta_1 + \dot{\theta}_2^2 L_2^2 c^2 \varphi_1 c^2 \theta_2 + \dot{\theta}_3^2 L_3^2 c^2 \varphi_1 c^2 \theta_3 + \dot{\theta}_4^2 L_4^2 c^2 \varphi_1 c^2 \theta_4 \\ & \left(\begin{aligned} & L_1 L_2 \dot{\varphi}_1^2 s^2 \varphi_1 s \theta_1 s \theta_2 + L_1 L_3 \dot{\varphi}_1^2 s^2 \varphi_1 s \theta_1 s \theta_3 + L_1 L_4 \dot{\varphi}_1^2 s^2 \varphi_1 s \theta_1 s \theta_4 \\ & - L_1^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_1 - L_1 L_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_2 - L_1 L_3 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_3 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_3 \\ & - L_1 L_4 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_4 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_4 + L_2 L_3 \dot{\varphi}_1^2 s^2 \varphi_1 s \theta_2 s \theta_3 + L_2 L_4 \dot{\varphi}_1^2 s^2 \varphi_1 s \theta_2 s \theta_4 \\ & - L_1 L_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 s \varphi_1 s \theta_2 c \varphi_1 c \theta_1 - L_2^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 s \varphi_1 s \theta_2 c \varphi_1 c \theta_2 - L_2 L_3 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_3 s \varphi_1 s \theta_2 c \varphi_1 c \theta_3 \\ & - L_2 L_4 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_4 s \varphi_1 s \theta_2 c \varphi_1 c \theta_4 + L_3 L_4 \dot{\varphi}_1^2 s^2 \varphi_1 s \theta_3 s \theta_4 - L_1 L_3 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 s \varphi_1 s \theta_3 c \varphi_1 c \theta_1 \\ & - L_2 L_3 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 c \varphi_1 c \theta_2 s \varphi_1 s \theta_3 - L_3^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_3 c \varphi_1 c \theta_3 s \varphi_1 s \theta_3 - L_3 L_4 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_4 s \varphi_1 s \theta_3 c \varphi_1 c \theta_4 \\ & - L_1 L_4 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 s \varphi_1 s \theta_4 c \varphi_1 c \theta_1 - L_2 L_4 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 s \varphi_1 s \theta_4 c \varphi_1 c \theta_2 - L_3 L_4 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_3 s \varphi_1 s \theta_4 c \varphi_1 c \theta_4 \\ & - L_4^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_4 s \varphi_1 s \theta_4 c \varphi_1 c \theta_4 + L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_2 + L_1 L_3 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_3 \\ & + L_1 L_4 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_4 + L_2 L_3 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 c^2 \varphi_1 c \theta_2 c \theta_3 + L_2 L_4 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 c^2 \varphi_1 c \theta_2 c \theta_4 \\ & + L_3 L_4 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 c^2 \varphi_1 c \theta_3 c \theta_4 \end{aligned} \right) \end{aligned} \right)$$

$$\dot{y}_4^2 = \left(\begin{aligned} & \dot{\varphi}_1^2 \left(L_1^2 c^2 \theta_1 c^2 \varphi_1 + L_2^2 c^2 \theta_2 c^2 \varphi_1 + L_3^2 c^2 \theta_3 c^2 \varphi_1 + L_4^2 c^2 \theta_4 c^2 \varphi_1 \right) \\ & + \dot{\theta}_1^2 L_1^2 s^2 \theta_1 s^2 \varphi_1 + \dot{\theta}_2^2 L_2^2 s^2 \theta_2 s^2 \varphi_1 + \dot{\theta}_3^2 L_3^2 s^2 \theta_3 s^2 \varphi_1 + \dot{\theta}_4^2 L_4^2 s^2 \theta_4 s^2 \varphi_1 \\ & \left(\begin{aligned} & L_1 L_2 \dot{\varphi}_1^2 c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_2 + L_1 L_3 \dot{\varphi}_1^2 c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_3 + L_1 L_4 \dot{\varphi}_1^2 c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_4 \\ & - L_1^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 c \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_1 s \theta_1 - L_1 L_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 c \varphi_1 c \theta_1 s \theta_2 s \varphi_1 - L_1 L_3 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_3 c \varphi_1 c \theta_1 s \theta_3 s \varphi_1 \\ & - L_1 L_4 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_4 c \varphi_1 c \theta_1 s \theta_4 s \varphi_1 + L_2 L_3 \dot{\varphi}_1^2 c^2 \varphi_1 c \theta_2 c \theta_3 + L_2 L_4 \dot{\varphi}_1^2 c^2 \varphi_1 c \theta_2 c \theta_4 \\ & - L_1 L_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 c \varphi_1 c \theta_2 s \varphi_1 s \theta_1 - L_2^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 c \varphi_1 c \theta_2 s \theta_2 s \varphi_1 - L_2 L_3 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_3 c \varphi_1 c \theta_2 s \theta_3 s \varphi_1 \\ & - L_2 L_4 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_4 c \varphi_1 c \theta_2 s \theta_4 s \varphi_1 + L_3 L_4 \dot{\varphi}_1^2 c^2 \varphi_1 c \theta_3 s \theta_4 - L_1 L_3 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 c \varphi_1 c \theta_3 s \theta_1 s \varphi_1 \\ & - L_2 L_3 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 c \varphi_1 c \theta_3 s \theta_2 s \varphi_1 - L_3^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_3 c \varphi_1 c \theta_3 s \theta_3 s \varphi_1 - L_3 L_4 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_4 c \varphi_1 c \theta_3 s \theta_4 s \varphi_1 \\ & - L_1 L_4 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 c \varphi_1 c \theta_4 s \theta_1 s \varphi_1 - L_2 L_4 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 c \varphi_1 c \theta_4 s \theta_2 s \varphi_1 - L_3 L_4 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_3 c \varphi_1 c \theta_4 s \theta_3 s \varphi_1 \\ & - L_4^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_4 c \varphi_1 c \theta_4 s \theta_4 s \varphi_1 + L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 s^2 \varphi_1 s \theta_1 s \theta_2 + L_1 L_3 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 s^2 \varphi_1 s \theta_1 s \theta_3 \\ & + L_1 L_4 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 s^2 \varphi_1 s \theta_1 s \theta_4 + L_2 L_3 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 s^2 \varphi_1 s \theta_2 s \theta_3 + L_2 L_4 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 s^2 \varphi_1 s \theta_2 s \theta_4 \\ & + L_3 L_4 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 s^2 \varphi_1 s \theta_3 s \theta_4 \end{aligned} \right) \end{aligned} \right)$$

$$\dot{z}_4^2 = \left(\begin{aligned} & \dot{\varphi}_1^2 \left(L_1^2 s^2 \varphi_1 c^2 \theta_1 + L_2^2 s^2 \varphi_1 c^2 \theta_2 + L_3^2 s^2 \varphi_1 c^2 \theta_3 + L_4^2 s^2 \varphi_1 c^2 \theta_4 \right) \\ & + \dot{\theta}_1^2 L_1^2 c^2 \varphi_1 s^2 \theta_1 + \dot{\theta}_2^2 L_2^2 c^2 \varphi_1 s^2 \theta_2 + \dot{\theta}_3^2 L_3^2 c^2 \varphi_1 s^2 \theta_3 + \dot{\theta}_4^2 L_4^2 c^2 \varphi_1 s^2 \theta_4 \\ & \left(\begin{aligned} & L_1 L_2 \dot{\varphi}_1^2 s^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_2 + L_1 L_3 \dot{\varphi}_1^2 s^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_3 + L_1 L_4 \dot{\varphi}_1^2 s^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_4 \\ & + L_1^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_1 + L_1 L_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_2 + L_1 L_3 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_3 s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_3 \\ & + L_1 L_4 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_4 s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_4 + L_2 L_3 \dot{\varphi}_1^2 s^2 \varphi_1 c \theta_2 c \theta_3 + L_2 L_4 \dot{\varphi}_1^2 s^2 \varphi_1 c \theta_2 c \theta_4 \\ & + L_1 L_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 s \varphi_1 c \theta_2 c \varphi_1 s \theta_1 + L_2^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 s \varphi_1 c \theta_2 c \varphi_1 s \theta_2 + L_2 L_3 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_3 s \varphi_1 c \theta_2 c \varphi_1 s \theta_3 \\ & + L_2 L_4 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_4 s \varphi_1 c \theta_2 c \varphi_1 s \theta_4 + L_3 L_4 \dot{\varphi}_1^2 s^2 \varphi_1 c \theta_3 c \theta_4 + L_1 L_3 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_3 s \varphi_1 c \theta_3 c \varphi_1 s \theta_1 \\ & + L_2 L_3 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_3 s \varphi_1 c \theta_3 c \varphi_1 s \theta_2 + L_3^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_3 s \varphi_1 c \theta_3 c \varphi_1 s \theta_3 + L_3 L_4 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_4 s \varphi_1 c \theta_3 c \varphi_1 s \theta_4 \\ & + L_1 L_4 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_4 s \varphi_1 c \theta_4 c \varphi_1 s \theta_1 + L_2 L_4 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 s \varphi_1 c \theta_4 c \varphi_1 s \theta_1 + L_3 L_4 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_3 s \varphi_1 c \theta_4 c \varphi_1 s \theta_3 \\ & + L_4^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_4 s \varphi_1 c \theta_4 c \varphi_1 s \theta_4 + L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 c^2 \varphi_1 s \theta_1 s \theta_2 + L_1 L_3 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 c^2 \varphi_1 s \theta_1 s \theta_3 \\ & + L_1 L_4 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 c^2 \varphi_1 s \theta_1 s \theta_4 + L_2 L_3 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 c^2 \varphi_1 s \theta_2 s \theta_3 + L_2 L_4 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 c^2 \varphi_1 s \theta_2 s \theta_4 \\ & + L_3 L_4 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 c^2 \varphi_1 s \theta_3 s \theta_4 \end{aligned} \right) \end{aligned} \right)$$

EK-B. 15

$$T_4 = 0.5m_4 \left(\begin{aligned} & \dot{\varphi}_1^2 \left(L_1^2 \left(s^2 \varphi_1 s^2 \theta_1 + c^2 \theta_1 c^2 \varphi_1 + s^2 \varphi_1 c^2 \theta_1 \right) + L_2^2 \left(s^2 \varphi_1 s^2 \theta_2 + c^2 \theta_2 c^2 \varphi_1 + s^2 \varphi_1 c^2 \theta_2 \right) \right. \\ & \left. + L_3^2 \left(s^2 \varphi_1 s^2 \theta_3 + c^2 \theta_3 c^2 \varphi_1 + s^2 \varphi_1 c^2 \theta_3 \right) + L_4^2 \left(s^2 \varphi_1 s^2 \theta_4 + c^2 \theta_4 c^2 \varphi_1 + s^2 \varphi_1 c^2 \theta_4 \right) \right) \\ & + \dot{\theta}_1^2 \left(L_1^2 \left(c^2 \varphi_1 c^2 \theta_1 + s^2 \theta_1 s^2 \varphi_1 + c^2 \varphi_1 s^2 \theta_1 \right) \right) + \dot{\theta}_2^2 \left(L_2^2 \left(c^2 \varphi_1 c^2 \theta_2 + s^2 \theta_2 s^2 \varphi_1 + c^2 \varphi_1 s^2 \theta_2 \right) \right) \\ & + \dot{\theta}_3^2 \left(L_3^2 \left(c^2 \varphi_1 c^2 \theta_3 + s^2 \theta_3 s^2 \varphi_1 + c^2 \varphi_1 s^2 \theta_3 \right) \right) + \dot{\theta}_4^2 \left(L_4^2 \left(c^2 \varphi_1 c^2 \theta_4 + s^2 \theta_4 s^2 \varphi_1 + c^2 \varphi_1 s^2 \theta_4 \right) \right) \\ & + 2\dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 \left(s \varphi_1 c \theta_1 c \theta_1 \left(-L_1^2 s \theta_1 - L_1 L_2 s \theta_2 - L_1 L_3 s \theta_3 - L_1 L_4 s \theta_4 \right) \right) \\ & + 2\dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 \left(s \varphi_1 c \theta_1 c \theta_2 \left(-L_1 L_2 s \theta_1 - L_2^2 s \theta_2 - L_2 L_3 s \theta_3 - L_2 L_4 s \theta_4 \right) \right) \\ & + 2\dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_3 \left(s \varphi_1 c \theta_1 c \theta_3 \left(-L_1 L_3 s \theta_1 - L_2 L_3 s \theta_2 - L_3^2 s \theta_3 - L_3 L_4 s \theta_4 \right) \right) \\ & + 2\dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_4 \left(s \varphi_1 c \theta_1 c \theta_4 \left(-L_1 L_4 s \theta_1 - L_2 L_4 s \theta_2 - L_3 L_4 s \theta_3 - L_4^2 s \theta_4 \right) \right) \\ & + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \left(L_1 L_2 \left(c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_2 + s^2 \varphi_1 s \theta_1 s \theta_2 + c^2 \varphi_1 s \theta_1 s \theta_2 \right) \right) \\ & + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \left(L_1 L_3 \left(c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_3 + s^2 \varphi_1 s \theta_1 s \theta_3 + c^2 \varphi_1 s \theta_1 s \theta_3 \right) \right) \\ & + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 \left(L_1 L_4 \left(c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_4 + s^2 \varphi_1 s \theta_1 s \theta_4 + c^2 \varphi_1 s \theta_1 s \theta_4 \right) \right) \\ & + 2\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \left(L_2 L_3 \left(c^2 \varphi_1 c \theta_2 c \theta_3 + s^2 \varphi_1 s \theta_2 s \theta_3 + c^2 \varphi_1 s \theta_2 s \theta_3 \right) \right) \\ & + 2\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 \left(L_2 L_4 \left(c^2 \varphi_1 c \theta_2 c \theta_4 + s^2 \varphi_1 s \theta_2 s \theta_4 + c^2 \varphi_1 s \theta_2 s \theta_4 \right) \right) \\ & + 2\dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 \left(L_3 L_4 \left(c^2 \varphi_1 c \theta_3 c \theta_4 + s^2 \varphi_1 s \theta_3 s \theta_4 + c^2 \varphi_1 s \theta_3 s \theta_4 \right) \right) \end{aligned} \right)$$

$$\begin{aligned}
T_I = & \left(\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} m_1 L_1^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_1 c^2 \varphi_1) \\ + m_2 (L_1^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_1 c^2 \varphi_1) + L_2^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_2 c^2 \varphi_1) + 2 L_1 L_2 (s^2 \varphi_1 s \theta_1 s \theta_2 + c \theta_1 c \theta_2)) \\ + m_3 \left(L_1^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_1 c^2 \varphi_1) + L_2^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_2 c^2 \varphi_1) + L_3^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_3 c^2 \varphi_1) \right) \\ + 2 (L_1 L_2 (s^2 \varphi_1 s \theta_1 s \theta_2 + c \theta_1 c \theta_2) + L_2 L_3 (s^2 \varphi_1 s \theta_2 s \theta_3 + c \theta_2 c \theta_3)) \\ + m_4 (L_1^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_1 c^2 \varphi_1) + L_2^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_2 c^2 \varphi_1) + L_3^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_3 c^2 \varphi_1) + L_4^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_4 c^2 \varphi_1)) \end{array} \right) \\ 0.5 \left(\begin{array}{l} + \dot{\theta}_1^2 (L_1^2 (c^2 \varphi_1 c^2 \theta_1 + s^2 \theta_1) (m_1 + m_2 + m_3 + m_4)) \\ + \dot{\theta}_2^2 (L_2^2 (c^2 \varphi_1 c^2 \theta_2 + s^2 \theta_2) (m_2 + m_3 + m_4)) \\ + \dot{\theta}_3^2 (L_3^2 (c^2 \varphi_1 c^2 \theta_3 + s^2 \theta_3) (m_3 + m_4)) \\ + \dot{\theta}_4^2 (L_4^2 (c^2 \varphi_1 c^2 \theta_4 + s^2 \theta_4) m_4) \end{array} \right) \end{array} \right) \\
& + \dot{\varphi}_1 \left(\begin{array}{l} s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_1 (-L_1^2 s \theta_1) + s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_1 (-L_1 L_2 s \theta_2 - L_1^2 s \theta_1) \\ + s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_1 (-L_1^2 s \theta_1 - L_1 L_2 s \theta_2 - L_1 L_3 s \theta_3) \\ + s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_1 (-L_1^2 s \theta_1 - L_1 L_2 s \theta_2 - L_1 L_3 s \theta_3 - L_1 L_4 s \theta_4) \end{array} \right) \\
& + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 \left(\begin{array}{l} s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_2 (-L_1 L_2 s \theta_1 - L_2^2 s \theta_2) + s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_2 (-L_1 L_2 s \theta_1 - L_2^2 s \theta_2 - L_2 L_3 s \theta_3) \\ + s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_2 (-L_1 L_2 s \theta_1 - L_2^2 s \theta_2 - L_2 L_3 s \theta_3 - L_2 L_4 s \theta_4) \end{array} \right) \\
& + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_3 (s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_3 (-L_1 L_3 s \theta_1 - L_2 L_3 s \theta_2 - L_3^2 s \theta_3) + s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_3 (-L_1 L_3 s \theta_1 - L_2 L_3 s \theta_2 - L_3^2 s \theta_3 - L_3 L_4 s \theta_4)) \\
& + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_4 (s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_4 (-L_1 L_4 s \theta_1 - L_2 L_4 s \theta_2 - L_3 L_4 s \theta_3 - L_4^2 s \theta_4)) \\
& + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (L_1 L_2 (c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_2 + s \theta_1 s \theta_2) + L_1 L_2 (c^2 \varphi_1 c \theta_2 c \theta_1 + s \theta_1 s \theta_2) + L_1 L_2 (c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_2 + s \theta_1 s \theta_2)) \\
& + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 (L_1 L_3 (c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_3 + s \theta_1 s \theta_3) + L_1 L_3 (c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_3 + s \theta_1 s \theta_3)) \\
& + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 (L_1 L_4 (c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_4 + s \theta_1 s \theta_4)) \\
& + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 (L_2 L_3 (c^2 \varphi_1 c \theta_2 c \theta_3 + s \theta_2 s \theta_3) + L_2 L_3 (c^2 \varphi_1 c \theta_2 c \theta_3 + s \theta_2 s \theta_3)) \\
& + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 (L_2 L_4 (c^2 \varphi_1 c \theta_2 c \theta_4 + s \theta_2 s \theta_4)) + \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 (L_3 L_4 (c^2 \varphi_1 c \theta_3 c \theta_4 + s \theta_3 s \theta_4))
\end{array} \right)
\end{aligned}$$

EK-B. 16

$$L_I = \left(\left(\left(\begin{array}{l} L_1^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_1 c^2 \varphi_1) (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) + L_2^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_2 c^2 \varphi_1) (m_2 + m_3 + m_4) \\ \dot{\varphi}_1^2 + L_3^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_3 c^2 \varphi_1) (m_3 + m_4) + L_4^2 (s^2 \varphi_1 + c^2 \theta_4 c^2 \varphi_1) m_4 \\ + 2L_1 L_2 (s^2 \varphi_1 s \theta_1 s \theta_2 + c \theta_1 c \theta_2) (m_2 + m_3) + L_2 L_3 (s^2 \varphi_1 s \theta_2 s \theta_3 + c \theta_2 c \theta_3) m_3 \\ 0.5 + \dot{\theta}_1^2 (L_1^2 (c^2 \varphi_1 c^2 \theta_1 + s^2 \theta_1) (m_1 + m_2 + m_3 + m_4)) \\ + \dot{\theta}_2^2 (L_2^2 (c^2 \varphi_1 c^2 \theta_2 + s^2 \theta_2) (m_2 + m_3 + m_4)) \\ + \dot{\theta}_3^2 (L_3^2 (c^2 \varphi_1 c^2 \theta_3 + s^2 \theta_3) (m_3 + m_4)) + \dot{\theta}_4^2 (L_4^2 (c^2 \varphi_1 c^2 \theta_4 + s^2 \theta_4) m_4) \end{array} \right) \right) \right) \\ + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 (s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_1 (-4L_1^2 s \theta_1 - 3L_1 L_2 s \theta_2 - 2L_1 L_3 s \theta_3 - L_1 L_4 s \theta_4)) \\ + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 (s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_2 (-3L_2^2 s \theta_2 - 3L_1 L_2 s \theta_1 - 2L_2 L_3 s \theta_3 - L_2 L_4 s \theta_4)) \\ + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_3 (s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_3 (-2L_1 L_3 s \theta_1 - 2L_2 L_3 s \theta_2 - 2L_3^2 s \theta_3 - L_3 L_4 s \theta_4)) \\ + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_4 (s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_4 (-L_1 L_4 s \theta_1 - L_2 L_4 s \theta_2 - L_3 L_4 s \theta_3 - L_4^2 s \theta_4)) \\ + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (3L_1 L_2 (c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_2 + s \theta_1 s \theta_2)) + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 (2L_1 L_3 (c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_3 + s \theta_1 s \theta_3)) \\ + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 (L_1 L_4 (c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_4 + s \theta_1 s \theta_4)) + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 (2L_2 L_3 (c^2 \varphi_1 c \theta_2 c \theta_3 + s \theta_2 s \theta_3)) \\ + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 (L_2 L_4 (c^2 \varphi_1 c \theta_2 c \theta_4 + s \theta_2 s \theta_4)) + \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 (L_3 L_4 (c^2 \varphi_1 c \theta_3 c \theta_4 + s \theta_3 s \theta_4)) \\ - g c \varphi_1 \left(L_1 c \theta_1 (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) + L_2 c \theta_2 (m_2 + m_3 + m_4) \right) \\ + L_3 c \theta_3 (m_3 + m_4) + L_4 c \theta_4 m_4 \end{array} \right)$$

EK-B. 17

$$\frac{\partial L_I}{\partial \theta_2} = \left(\begin{array}{l} -L_2^2 c \theta_2 s \theta_2 c^2 \varphi_1 (m_2 + m_3 + m_4) \\ \dot{\varphi}_1^2 + L_1 L_2 (s^2 \varphi_1 s \theta_1 c \theta_2 - c \theta_1 s \theta_2) (m_2 + m_3) \\ + 0.5 L_2 L_3 (s^2 \varphi_1 c \theta_2 s \theta_3 - s \theta_2 c \theta_3) m_3 \\ + \dot{\theta}_2^2 L_2^2 (-c^2 \varphi_1 c \theta_2 s \theta_2 + s \theta_2 c \theta_2) (m_2 + m_3 + m_4) + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_1 (-3L_1 L_2 c \theta_2) \\ - \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 s \varphi_1 c \varphi_1 s \theta_2 (-3L_2^2 s \theta_2 + 3L_2^2 c \theta_2 - 3L_1 L_2 s \theta_1 - 2L_2 L_3 s \theta_3 - L_2 L_4 s \theta_4) \\ - 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 L_2 L_3 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_3 c \theta_2 - \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_4 L_2 L_4 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_4 c \theta_2 \\ + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 3L_1 L_2 (-c^2 \varphi_1 c \theta_1 s \theta_2 + s \theta_1 c \theta_2) + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 2L_2 L_3 (-c^2 \varphi_1 s \theta_2 c \theta_3 + c \theta_2 s \theta_3) \\ + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 L_2 L_4 (-c^2 \varphi_1 s \theta_2 c \theta_4 + s \theta_2 s \theta_4) + g c \varphi_1 L_2 s \theta_2 (m_2 + m_3 + m_4) \end{array} \right)$$

EK-B. 18

$$\frac{\partial L_I}{\partial \dot{\theta}_2} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_2 \left(L_2^2 (c^2 \varphi_1 c^2 \theta_2 + s^2 \theta_2) (m_2 + m_3 + m_4) \right) \\ + \dot{\varphi}_1 \left(s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_2 (-3 L_2^2 s \theta_2 - 3 L_1 L_2 s \theta_1 - 2 L_2 L_3 s \theta_3 - L_2 L_4 s \theta_4) \right) \\ + \dot{\theta}_1 \left(3 L_1 L_2 (c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_2 + s \theta_1 s \theta_2) \right) + \dot{\theta}_3 \left(2 L_2 L_3 (c^2 \varphi_1 c \theta_2 c \theta_3 + s \theta_2 s \theta_3) \right) \\ + \dot{\theta}_4 \left(L_2 L_4 (c^2 \varphi_1 c \theta_2 c \theta_4 + s \theta_2 s \theta_4) \right) \end{pmatrix}$$

EK-B. 19

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_I}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = \begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_1 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_2 (-3 L_2^2 s \theta_2 - 3 L_1 L_2 s \theta_1 - 2 L_2 L_3 s \theta_3 - L_2 L_4 s \theta_4) \\ + \ddot{\theta}_1 3 L_1 L_2 (c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_2 + s \theta_1 s \theta_2) + \ddot{\theta}_2 L_2^2 (c^2 \varphi_1 c^2 \theta_2 + s^2 \theta_2) (m_2 + m_3 + m_4) \\ + \ddot{\theta}_3 2 L_2 L_3 (c^2 \varphi_1 c \theta_2 c \theta_3 + s \theta_2 s \theta_3) + \ddot{\theta}_4 L_2 L_4 (c^2 \varphi_1 c \theta_2 c \theta_4 + s \theta_2 s \theta_4) \\ + \dot{\theta}_2 L_2^2 (-2 \dot{\varphi}_1 c \varphi_1 s \varphi_1 c^2 \theta_2) (m_2 + m_3 + m_4) \\ + \dot{\varphi}_1 c \theta_2 \dot{\varphi}_1 (c^2 \varphi_1 - s^2 \varphi_1) (-3 L_2^2 s \theta_2 - 3 L_1 L_2 s \theta_1 - 2 L_2 L_3 s \theta_3 - L_2 L_4 s \theta_4) \\ - \dot{\theta}_1 3 L_1 L_2 2 \dot{\varphi}_1 c \varphi_1 s \varphi_1 c \theta_1 c \theta_2 - \dot{\theta}_3 2 L_2 L_3 2 \dot{\varphi}_1 c \varphi_1 s \varphi_1 c \theta_2 c \theta_3 \\ - \dot{\theta}_4 L_2 L_4 2 \dot{\varphi}_1 c \varphi_1 s \varphi_1 c \theta_2 c \theta_4 \\ - \dot{\varphi}_1 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_2 3 \dot{\theta}_1 L_1 L_2 c \theta_1 + \dot{\theta}_1^2 3 L_1 L_2 (-c^2 \varphi_1 s \theta_1 c \theta_2 + c \theta_1 s \theta_2) \\ + \dot{\theta}_2 2 L_2^2 \dot{\theta}_2 (-c^2 \varphi_1 c \theta_2 s \theta_2 + s \theta_2 c \theta_2) (m_2 + m_3 + m_4) \\ + \dot{\varphi}_1 \begin{pmatrix} s \varphi_1 c \varphi_1 \dot{\theta}_2 3 L_2^2 (s^2 \theta_2 - c^2 \theta_2) \\ - s \varphi_1 c \varphi_1 \dot{\theta}_2 s \theta_2 (-3 L_1 L_2 s \theta_1 - 2 L_2 L_3 s \theta_3 - L_2 L_4 s \theta_4) \end{pmatrix} \\ + \dot{\theta}_1 3 L_1 L_2 \dot{\theta}_2 (-c^2 \varphi_1 c \theta_1 s \theta_2 + s \theta_1 c \theta_2) + \dot{\theta}_3 2 L_2 L_3 \dot{\theta}_2 (-c^2 \varphi_1 s \theta_2 c \theta_3 + c \theta_2 s \theta_3) \\ + \dot{\theta}_4 L_2 L_4 \dot{\theta}_2 (-c^2 \varphi_1 s \theta_2 c \theta_4 + c \theta_2 s \theta_4) \\ + \dot{\varphi}_1 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_2 (-2 L_2 L_3 \dot{\theta}_3 c \theta_3) + \dot{\theta}_3 2 L_2 L_3 \dot{\theta}_3 (-c^2 \varphi_1 c \theta_2 s \theta_3 + s \theta_2 c \theta_3) \\ - \dot{\varphi}_1 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_2 L_2 L_4 \dot{\theta}_4 c \theta_4 + \dot{\theta}_4 L_2 L_4 \dot{\theta}_4 (-c^2 \varphi_1 c \theta_2 s \theta_4 + s \theta_2 c \theta_4) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \\ \varphi_1 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix}$$

EK-B. 20

$$\frac{\partial L_I}{\partial \theta_3} = \left(\begin{aligned} &\dot{\varphi}_1^2 \left(-L_3^2 s \theta_3 c \theta_3 c^2 \varphi_1 (m_3 + m_4) + 0.5 L_2 L_3 (s^2 \varphi_1 s \theta_2 c \theta_3 - c \theta_2 s \theta_3) m_3 \right) \\ &+ \dot{\theta}_3^2 L_3^2 \left(-c^2 \varphi_1 s \theta_3 c \theta_3 + c \theta_3 s \theta_3 \right) (m_3 + m_4) \\ &- \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_1 2 L_1 L_3 c \theta_3 - \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_2 2 L_2 L_3 c \theta_3 \\ &+ \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_3 2 s \varphi_1 c \varphi_1 L_3^2 (c^2 \theta_3 - s^2 \theta_3) \\ &- \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_3 s \varphi_1 c \varphi_1 s \theta_3 (-2 L_1 L_3 s \theta_1 - 2 L_2 L_3 s \theta_2 - L_3 L_4 s \theta_4) \\ &+ \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_4 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_4 (-L_1 L_4 s \theta_1 - L_2 L_4 s \theta_2 - L_3 L_4 c \theta_3 - L_4^2 s \theta_4) \\ &+ \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 2 L_1 L_3 (-c^2 \varphi_1 c \theta_1 s \theta_3 + s \theta_1 c \theta_3) + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 2 L_2 L_3 (-c^2 \varphi_1 c \theta_2 s \theta_3 + s \theta_2 c \theta_3) \\ &+ \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 L_3 L_4 (-c^2 \varphi_1 s \theta_3 c \theta_4 + c \theta_3 s \theta_4) \\ &+ g c \varphi_1 L_3 s \theta_3 (m_3 + m_4) \end{aligned} \right)$$

EK-B. 21

$$\frac{\partial L_I}{\partial \dot{\theta}_3} = \left(\begin{aligned} &+ \dot{\varphi}_1 \left(s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_3 (-2 L_1 L_3 s \theta_1 - 2 L_2 L_3 s \theta_2 - 2 L_3^2 s \theta_3 - L_3 L_4 s \theta_4) \right) \\ &+ \dot{\theta}_1 \left(2 L_1 L_3 (c^2 \varphi_1 c \theta_1 c \theta_3 + s \theta_1 s \theta_3) \right) \\ &+ \dot{\theta}_2 \left(2 L_2 L_3 (c^2 \varphi_1 c \theta_2 c \theta_3 + s \theta_2 s \theta_3) \right) \\ &+ \dot{\theta}_3 \left(L_3^2 (c^2 \varphi_1 c^2 \theta_3 + s^2 \theta_3) (m_3 + m_4) \right) \\ &+ \dot{\theta}_4 \left(L_3 L_4 (c^2 \varphi_1 c \theta_3 c \theta_4 + s \theta_3 s \theta_4) \right) \end{aligned} \right)$$

EK-B. 22

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_I}{\partial \dot{\theta}_3} \right) = \left(\begin{array}{l} +\ddot{\varphi}_1 \left(s\varphi_1 c\varphi_1 c\theta_3 \left(-2L_1 L_3 s\theta_1 - 2L_2 L_3 s\theta_2 - 2L_3^2 s\theta_3 - L_3 L_4 s\theta_4 \right) \right) \\ +\ddot{\theta}_1 \left(2L_1 L_3 \left(c^2 \varphi_1 c\theta_1 c\theta_3 + s\theta_1 s\theta_3 \right) \right) + \ddot{\theta}_2 \left(2L_2 L_3 \left(c^2 \varphi_1 c\theta_2 c\theta_3 + s\theta_2 s\theta_3 \right) \right) \\ +\ddot{\theta}_3 \left(L_3^2 \left(c^2 \varphi_1 c^2 \theta_3 + s^2 \theta_3 \right) (m_3 + m_4) \right) + \ddot{\theta}_4 \left(L_3 L_4 \left(c^2 \varphi_1 c\theta_3 c\theta_4 + s\theta_3 s\theta_4 \right) \right) \\ +\dot{\varphi}_1^2 \left(c\theta_3 \left(-2L_1 L_3 s\theta_1 - 2L_2 L_3 s\theta_2 - 2L_3^2 s\theta_3 - L_3 L_4 s\theta_4 \right) \right) \\ +\dot{\theta}_1 \left(2L_1 L_3 \dot{\varphi}_1 \left(-2c\varphi_1 s\varphi_1 c\theta_1 c\theta_3 \right) \right) + \dot{\theta}_2 \left(2L_2 L_3 \dot{\varphi}_1 \left(-2c\varphi_1 s\varphi_1 c\theta_2 c\theta_3 \right) \right) \\ +\dot{\theta}_3 \left(L_3^2 \dot{\varphi}_1 \left(-2c\varphi_1 s\varphi_1 c^2 \theta_3 \right) (m_3 + m_4) \right) \\ +\dot{\theta}_4 \left(L_3 L_4 \dot{\varphi}_1 \left(-2c\varphi_1 s\varphi_1 c\theta_3 c\theta_4 \right) \right) + \dot{\varphi}_1 \left(s\varphi_1 c\varphi_1 c\theta_3 \left(-2L_1 L_3 \dot{\theta}_1 c\theta_1 \right) \right) \\ +\dot{\theta}_1 \left(2L_1 L_3 \left(-c^2 \varphi_1 \dot{\theta}_1 s\theta_1 c\theta_3 \right) \right) + \dot{\varphi}_1 \left(s\varphi_1 c\varphi_1 c\theta_3 \left(-2L_2 L_3 \dot{\theta}_2 c\theta_2 \right) \right) \\ +\dot{\theta}_2 \left(2L_2 L_3 \dot{\theta}_2 \left(-c^2 \varphi_1 s\theta_2 c\theta_3 + c\theta_2 s\theta_3 \right) \right) + \dot{\varphi}_1 \left(s\varphi_1 c\varphi_1 c\theta_3 \left(-2L_3^2 \dot{\theta}_3 c\theta_3 \right) \right) \\ +\dot{\theta}_1 \left(2L_1 L_3 \dot{\theta}_3 \left(-c^2 \varphi_1 c\theta_1 s\theta_3 + s\theta_1 c\theta_3 \right) \right) + \dot{\theta}_2 \left(2L_2 L_3 \dot{\theta}_3 \left(-c^2 \varphi_1 c\theta_2 s\theta_3 + s\theta_2 c\theta_3 \right) \right) \\ +\dot{\theta}_3 \left(2L_3^2 \dot{\theta}_3 \left(-c^2 \varphi_1 c\theta_3 s\theta_3 + s\theta_3 c\theta_3 \right) (m_3 + m_4) \right) \\ +\dot{\theta}_4 \left(L_3 L_4 \dot{\theta}_3 \left(-c^2 \varphi_1 s\theta_3 c\theta_4 + c\theta_3 s\theta_4 \right) \right) + \dot{\varphi}_1 \left(s\varphi_1 c\varphi_1 c\theta_3 \left(-L_3 L_4 \dot{\theta}_4 c\theta_4 \right) \right) \\ +\dot{\theta}_4 \left(L_3 L_4 \left(-c^2 \varphi_1 c\theta_3 s\theta_4 + s\theta_3 c\theta_4 \right) \right) \end{array} \right) \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \\ \varphi_1 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix}$$

işlemler ortak paranteze alınıp düzenlenir,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_I}{\partial \dot{\theta}_3} \right) = \left(\begin{array}{l} +\ddot{\varphi}_1 \left(s\varphi_1 c\varphi_1 c\theta_3 \left(-2L_1 L_3 s\theta_1 - 2L_2 L_3 s\theta_2 - 2L_3^2 s\theta_3 - L_3 L_4 s\theta_4 \right) \right) \\ +\ddot{\theta}_1 \left(2L_1 L_3 \left(c^2 \varphi_1 c\theta_1 c\theta_3 + s\theta_1 s\theta_3 \right) \right) + \ddot{\theta}_2 \left(2L_2 L_3 \left(c^2 \varphi_1 c\theta_2 c\theta_3 + s\theta_2 s\theta_3 \right) \right) \\ +\ddot{\theta}_3 \left(L_3^2 \left(c^2 \varphi_1 c^2 \theta_3 + s^2 \theta_3 \right) (m_3 + m_4) \right) + \ddot{\theta}_4 \left(L_3 L_4 \left(c^2 \varphi_1 c\theta_3 c\theta_4 + s\theta_3 s\theta_4 \right) \right) \\ +\dot{\varphi}_1^2 \left(c\theta_3 \left(-2L_1 L_3 s\theta_1 - 2L_2 L_3 s\theta_2 - 2L_3^2 s\theta_3 - L_3 L_4 s\theta_4 \right) \right) \\ +\dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 \left(-4L_1 L_3 \left(c\varphi_1 s\varphi_1 c\theta_1 c\theta_3 \right) \right) + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 \left(s\varphi_1 c\varphi_1 c\theta_3 \left(-2L_1 L_3 c\theta_1 \right) \right) \\ +\dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 \left(-4L_2 L_3 \left(c\varphi_1 s\varphi_1 c\theta_2 c\theta_3 \right) \right) + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 \left(s\varphi_1 c\varphi_1 c\theta_3 \left(-2L_2 L_3 c\theta_2 \right) \right) \\ +\dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_3 \left(L_3^2 \left(-2c\varphi_1 s\varphi_1 c^2 \theta_3 \right) (m_3 + m_4) \right) + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_3 \left(s\varphi_1 c\varphi_1 c\theta_3 \left(-2L_3^2 c\theta_3 \right) \right) \\ +\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \left(2L_1 L_3 \left(-c^2 \varphi_1 c\theta_1 s\theta_3 + s\theta_1 c\theta_3 \right) \right) \\ +\dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_4 \left(L_3 L_4 \left(-2c\varphi_1 s\varphi_1 c\theta_3 c\theta_4 \right) \right) - \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_4 L_3 L_4 s\varphi_1 c\varphi_1 c\theta_3 c\theta_4 \\ +\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \left(2L_2 L_3 \left(-c^2 \varphi_1 c\theta_2 s\theta_3 + s\theta_2 c\theta_3 \right) \right) + \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 L_3 L_4 \left(-c^2 \varphi_1 s\theta_3 c\theta_4 + c\theta_3 s\theta_4 \right) \\ +\dot{\theta}_1^2 \left(2L_1 L_3 \left(-c^2 \varphi_1 s\theta_1 c\theta_3 \right) \right) + \dot{\theta}_2^2 \left(2L_2 L_3 \left(-c^2 \varphi_1 s\theta_2 c\theta_3 + c\theta_2 s\theta_3 \right) \right) \\ +\dot{\theta}_3^2 \left(2L_3^2 \left(-c^2 \varphi_1 c\theta_3 s\theta_3 + s\theta_3 c\theta_3 \right) (m_3 + m_4) \right) + \dot{\theta}_4^2 L_3 L_4 \left(-c^2 \varphi_1 c\theta_3 s\theta_4 + s\theta_3 c\theta_4 \right) \end{array} \right) \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \\ \varphi_1 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix}$$

EK-B. 23

$$\frac{\partial L_I}{\partial \theta_4} = \left(\begin{array}{l} 0.5 \dot{\varphi}_1^2 L_4^2 (s^2 \varphi_1 + 2c\theta_4 s\theta_4 c^2 \varphi_1) m_4 + \dot{\theta}_4^2 L_4^2 (-c^2 \varphi_1 s\theta_4 s\theta_4 + s\theta_4 c\theta_4) m_4 \\ + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_1 (-L_1 L_4 c\theta_4) + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_2 (-L_2 L_4 c\theta_4) \\ + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_3 s \varphi_1 c \varphi_1 c \theta_3 (-L_3 L_4 c\theta_4) \\ + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_4 (-s \varphi_1 c \varphi_1 s\theta_4 (-L_1 L_4 s \theta_1 - L_2 L_4 s \theta_2 - L_3 L_4 s \theta_3)) + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_4 s \varphi_1 c \varphi_1 L_4^2 (c^2 \theta_4 - s^2 \theta_4) \\ + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 L_1 L_4 (-c^2 \varphi_1 c \theta_1 s\theta_4 + s \theta_1 c\theta_4) + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 L_2 L_4 (-c^2 \varphi_1 c \theta_2 s\theta_4 + s \theta_2 c\theta_4) \\ + \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 L_3 L_4 (-c^2 \varphi_1 c \theta_3 s\theta_4 + s \theta_3 c\theta_4) \\ - g c \varphi_1 (-L_4 s\theta_4 m_4) \end{array} \right)$$

EK-B. 24

$$\frac{\partial L_I}{\partial \dot{\theta}_4} = \left(\begin{array}{l} \dot{\theta}_4 (L_4^2 (c^2 \varphi_1 c^2 \theta_4 + s^2 \theta_4) m_4) \\ + \dot{\varphi}_1 (s \varphi_1 c \varphi_1 c\theta_4 (-L_1 L_4 s \theta_1 - L_2 L_4 s \theta_2 - L_3 L_4 s \theta_3 - L_4^2 s \theta_4)) \\ + \dot{\theta}_1 (L_1 L_4 (c^2 \varphi_1 c \theta_1 c\theta_4 + s \theta_1 s\theta_4)) + \dot{\theta}_2 (L_2 L_4 (c^2 \varphi_1 c \theta_2 c\theta_4 + s \theta_2 s\theta_4)) \\ + \dot{\theta}_3 (L_3 L_4 (c^2 \varphi_1 c \theta_3 c\theta_4 + s \theta_3 s\theta_4)) \end{array} \right)$$

$$\frac{\partial L_I}{\partial \dot{\theta}_4} = \left(\begin{array}{l} \dot{\varphi}_1 (s \varphi_1 c \varphi_1 c\theta_4 (-L_1 L_4 s \theta_1 - L_2 L_4 s \theta_2 - L_3 L_4 s \theta_3 - L_4^2 s \theta_4)) \\ + \dot{\theta}_1 (L_1 L_4 (c^2 \varphi_1 c \theta_1 c\theta_4 + s \theta_1 s\theta_4)) + \dot{\theta}_2 (L_2 L_4 (c^2 \varphi_1 c \theta_2 c\theta_4 + s \theta_2 s\theta_4)) \\ + \dot{\theta}_3 (L_3 L_4 (c^2 \varphi_1 c \theta_3 c\theta_4 + s \theta_3 s\theta_4)) + \dot{\theta}_4 (L_4^2 (c^2 \varphi_1 c^2 \theta_4 + s^2 \theta_4) m_4) \end{array} \right)$$

EK-B. 25

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_I}{\partial \dot{\theta}_4} \right) = \begin{pmatrix} \ddot{\phi}_1 \left(s\phi_1 c\phi_1 c\theta_4 \left(-L_1 L_4 s\theta_1 - L_2 L_4 s\theta_2 - L_3 L_4 s\theta_3 - L_4^2 s\theta_4 \right) \right) \\ + \ddot{\theta}_1 L_1 L_4 \left(c^2 \phi_1 c\theta_1 c\theta_4 + s\theta_1 s\theta_4 \right) + \ddot{\theta}_2 L_2 L_4 \left(c^2 \phi_1 c\theta_2 c\theta_4 + s\theta_2 s\theta_4 \right) \\ + \ddot{\theta}_3 L_3 L_4 \left(c^2 \phi_1 c\theta_3 c\theta_4 + s\theta_3 s\theta_4 \right) + \ddot{\theta}_4 L_4^2 \left(c^2 \phi_1 c^2 \theta_4 + s^2 \theta_4 \right) m_4 \\ + \dot{\phi}_1 \left(c\theta_4 \left(-L_1 L_4 s\theta_1 - L_2 L_4 s\theta_2 - L_3 L_4 s\theta_3 - L_4^2 s\theta_4 \right) \right) \\ + \dot{\theta}_1 \left(L_1 L_4 \left(-2c\phi_1 s\phi_1 c\theta_1 c\theta_4 \right) \right) + \dot{\theta}_2 \left(L_2 L_4 \left(-2c\phi_1 s\phi_1 c\theta_2 c\theta_4 \right) \right) \\ + \dot{\theta}_3 \left(L_3 L_4 \left(-2c\phi_1 s\phi_1 c\theta_3 c\theta_4 \right) \right) + \dot{\theta}_4 \left(L_4^2 \left(-2c\phi_1 s\phi_1 c^2 \theta_4 + s^2 \theta_4 \right) m_4 \right) \\ + \dot{\phi}_1 \left(s\phi_1 c\phi_1 c\theta_4 \left(-L_1 L_4 c\theta_1 \right) \right) + \dot{\theta}_1 \left(L_1 L_4 \left(-c^2 \phi_1 s\theta_1 c\theta_4 \right) \right) \\ + \dot{\phi}_1 \left(s\phi_1 c\phi_1 c\theta_4 \left(-L_2 L_4 c\theta_2 \right) \right) + \dot{\theta}_2 \left(-L_2 L_4 \left(c^2 \phi_1 s\theta_2 c\theta_4 + c\theta_2 s\theta_4 \right) \right) \\ + \dot{\phi}_1 \left(s\phi_1 c\phi_1 c\theta_4 \left(-L_3 L_4 c\theta_3 \right) \right) + \dot{\theta}_3 \left(L_3 L_4 \left(-c^2 \phi_1 s\theta_3 c\theta_4 + c\theta_3 s\theta_4 \right) \right) \\ + \dot{\phi}_1 \left(-s\phi_1 c\phi_1 s\theta_4 \left(-L_1 L_4 s\theta_1 - L_2 L_4 s\theta_2 - L_3 L_4 s\theta_3 \right) \right) + \dot{\phi}_1 \left(-s\phi_1 c\phi_1 L_4^2 \right) \\ + \dot{\theta}_1 L_1 L_4 \left(-c^2 \phi_1 c\theta_1 s\theta_4 - s\theta_1 c\theta_4 \right) + \dot{\theta}_2 L_2 L_4 \left(-c^2 \phi_1 c\theta_2 s\theta_4 + s\theta_2 c\theta_4 \right) \\ + \dot{\theta}_3 L_3 L_4 \left(-c^2 \phi_1 c\theta_3 s\theta_4 + s\theta_3 c\theta_4 \right) + \dot{\theta}_4 L_4^2 \left(-2c^2 \phi_1 c\theta_4 s\theta_4 + 2s\theta_4 c\theta_4 \right) m_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \\ \phi_1 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{pmatrix}$$

EK-B. 26

$$\dot{x}_{14}^2 = \begin{pmatrix} L_a^2 \dot{\phi}_1^2 s^2 \phi_1 s^2 \theta_1 + L_a^2 \dot{\theta}_1^2 c^2 \phi_1 c^2 \theta_1 + L_{14}^2 \dot{\theta}_{14}^2 c^2 \phi_2 c^2 \theta_{14} + L_{14}^2 \dot{\phi}_2^2 s^2 \phi_2 s^2 \theta_{14} \\ - 2L_a^2 \dot{\phi}_1 \dot{\theta}_1 s\phi_1 s\theta_1 c\phi_1 c\theta_1 - 2L_a L_{14} \dot{\phi}_1 \dot{\theta}_{14} s\phi_1 s\theta_1 c\phi_2 c\theta_{14} \\ + 2L_a L_{14} \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 s\phi_1 s\theta_1 s\phi_2 s\theta_{14} + 2L_a L_{14} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{14} c\phi_1 c\theta_1 c\phi_2 c\theta_{14} \\ - 2L_a L_{14} \dot{\theta}_1 \dot{\phi}_2 c\phi_1 c\theta_1 s\phi_2 s\theta_{14} - 2L_{14}^2 \dot{\theta}_{14} \dot{\phi}_2 c\phi_2 c\theta_{14} s\phi_2 s\theta_{14} \end{pmatrix}$$

$$\dot{y}_{14}^2 = \begin{pmatrix} L_a^2 \dot{\phi}_1^2 c^2 \theta_1 c^2 \phi_1 + L_a^2 \dot{\theta}_1^2 s^2 \theta_1 s^2 \phi_1 + L_{14}^2 \dot{\theta}_{14}^2 s^2 \theta_{14} s^2 \phi_2 + L_{14}^2 \dot{\phi}_2^2 c^2 \theta_{14} c^2 \phi_2 \\ - 2L_a^2 \dot{\phi}_1 \dot{\theta}_1 c\phi_1 c\theta_1 s\phi_1 s\theta_1 - 2L_a L_{14} \dot{\phi}_1 \dot{\theta}_{14} c\phi_1 c\theta_1 s\phi_{14} s\phi_2 \\ - 2L_a L_{14} \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 c\theta_1 c\phi_1 c\theta_{14} c\phi_2 + 2L_a L_{14} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{14} s\theta_1 s\phi_1 s\theta_{14} s\phi_2 \\ - 2L_a L_{14} \dot{\theta}_1 \dot{\phi}_2 s\theta_1 s\phi_1 c\theta_{14} c\phi_2 - 2L_{14}^2 \dot{\theta}_{14} \dot{\phi}_2 s\theta_{14} s\phi_2 c\theta_{14} c\phi_2 \end{pmatrix}$$

$$\dot{z}_{14}^2 = \left(L_a^2 \dot{\varphi}_1^2 s^2 \varphi_1 c^2 \theta_1 + L_a^2 \dot{\theta}_1^2 c^2 \varphi_1 s^2 \theta_1 + L_{14}^2 \dot{\theta}_{14}^2 c^2 \varphi_2 s^2 \theta_{14} + L_{14}^2 \dot{\varphi}_2^2 s^2 \varphi_2 c^2 \theta_{14} \right. \\ \left. + 2L_a^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_1 + 2L_a L_{14} \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{14} s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14} \right. \\ \left. + 2L_a L_{14} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 s \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{14} + 2L_a L_{14} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{14} c \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14} \right. \\ \left. + 2L_a L_{14} \dot{\theta}_1 \dot{\varphi}_2 c \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{14} + 2L_{14}^2 \dot{\theta}_{14} \dot{\varphi}_2 c \varphi_2 s \theta_{14} s \varphi_2 c \theta_{14} \right)$$

EK-B. 27

$$\dot{\chi}_{15}^2 = \left(L_a^2 \dot{\varphi}_1^2 s^2 \varphi_1 s^2 \theta_1 + L_a^2 \dot{\theta}_1^2 c^2 \varphi_1 c^2 \theta_1 + L_{14}^2 \dot{\theta}_{14}^2 c^2 \varphi_2 c^2 \theta_{14} + L_{14}^2 \dot{\varphi}_2^2 s^2 \varphi_2 s^2 \theta_{14} \right. \\ \left. + L_{15}^2 \dot{\varphi}_2^2 s^2 \varphi_2 s^2 \theta_{15} + L_{15}^2 \dot{\theta}_2^2 c^2 \varphi_2 c^2 \theta_{15} \right. \\ \left. - 2L_a^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_1 - 2L_a L_{14} \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{14} s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14} + 2L_a L_{14} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 s \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{14} \right. \\ \left. + 2L_a L_{15} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 s \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{15} - 2L_a L_{15} \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{15} s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{15} + 2L_a L_{14} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{14} c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14} \right. \\ \left. - 2L_a L_{14} \dot{\theta}_1 \dot{\varphi}_2 c \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{14} - 2L_a L_{15} \dot{\theta}_1 \dot{\varphi}_2 c \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{15} + 2L_a L_{15} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{15} c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{15} \right. \\ \left. - 2L_{14}^2 \dot{\theta}_{14} \dot{\varphi}_2 c \varphi_2 c \theta_{14} s \varphi_2 s \theta_{14} - 2L_{14} L_{15} \dot{\theta}_{14} \dot{\varphi}_2 c \varphi_2 c \theta_{14} s \varphi_2 s \theta_{15} + 2L_{14} L_{15} \dot{\theta}_{14} \dot{\theta}_{15} c \varphi_2 c \theta_{14} c \varphi_2 c \theta_{15} \right. \\ \left. + 2L_{14} L_{15} \dot{\varphi}_2^2 s^2 \varphi_2 s \theta_{14} s \theta_{15} - 2L_{14} L_{15} \dot{\varphi}_2 \dot{\theta}_{15} s \varphi_2 s \theta_{14} c \varphi_2 c \theta_{15} - 2L_{15}^2 \dot{\varphi}_2 \dot{\theta}_{15} s \varphi_2 s \theta_{15} c \varphi_2 c \theta_{15} \right)$$

$$\dot{y}_{15}^2 = \left(\begin{aligned} &L_a^2 \dot{\varphi}_1^2 c^2 \theta_1^2 \varphi_1 + L_a^2 \dot{\theta}_1^2 s^2 \theta_1 s^2 \varphi_1 + L_{14}^2 \dot{\theta}_{14}^2 s^2 \theta_{14} s^2 \varphi_2 + L_{14}^2 \dot{\varphi}_2^2 c^2 \theta_{14} c^2 \varphi_2 \\ &+ L_{15}^2 \dot{\varphi}_2^2 c^2 \theta_{15} c^2 \varphi_2 + L_{15}^2 \dot{\theta}_{15}^2 s^2 \theta_{15} s^2 \varphi_2 \\ &- 2L_a^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_1 - 2L_a L_{14} \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{14} c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{14} s \varphi_2 - 2L_a L_{14} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 c \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{14} c \varphi_2 \\ &- 2L_a L_{15} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 c \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{15} c \varphi_2 - 2L_a L_{15} \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{15} c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{15} s \varphi_2 + 2L_a L_{14} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{14} s \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{14} s \varphi_2 \\ &- 2L_a L_{14} \dot{\theta}_1 \dot{\varphi}_2 s \theta_1 s \varphi_1 c \theta_{14} c \varphi_2 - 2L_a L_{15} \dot{\theta}_1 \dot{\varphi}_2 s \theta_1 s \varphi_1 c \theta_{15} c \varphi_2 - 2L_a L_{15} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{15} s \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{15} s \varphi_2 \\ &- 2L_{14}^2 \dot{\theta}_{14} \dot{\varphi}_2 s \theta_{14} s \varphi_2 c \theta_{14} c \varphi_2 - 2L_{14} L_{15} \dot{\theta}_{14} \dot{\varphi}_2 s \theta_{14} s \varphi_2 c \theta_{15} c \varphi_2 + 2L_{14} L_{15} \dot{\theta}_{14} \dot{\theta}_{15} s \theta_{14} s \varphi_2 s \theta_{15} s \varphi_2 \\ &+ 2L_{14} L_{15} \dot{\varphi}_2^2 c \theta_{14} c \varphi_2 c \theta_{15} c \varphi_2 + 2L_{14} L_{15} \dot{\varphi}_2 \dot{\theta}_{15} c \theta_{14} c \varphi_2 s \theta_{15} s \varphi_2 - 2L_{15}^2 \dot{\varphi}_2 \dot{\theta}_{15} c \theta_{14} c \varphi_2 s \theta_{15} s \varphi_2 \end{aligned} \right)$$

$$\dot{z}_{15}^2 = \left(L_a^2 \dot{\varphi}_1^2 s^2 \varphi_1 c^2 \theta_1 + L_a^2 \dot{\theta}_1^2 c^2 \varphi_1 s^2 \theta_1 + L_{14}^2 \dot{\theta}_{14}^2 c^2 \varphi_2 s^2 \theta_{14} + L_{14}^2 \dot{\varphi}_2^2 s^2 \varphi_2 c^2 \theta_{14} \right. \\ + L_{15}^2 \dot{\varphi}_2^2 s^2 \varphi_2 c^2 \theta_{15} + L_{15}^2 \dot{\theta}_{15}^2 c^2 \varphi_2 s^2 \theta_{15} \\ + 2L_a^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 s \varphi_1 c \theta_1 c \theta_1 s \varphi_1 + 2L_a L_{14} \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{14} s \theta_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14} + 2L_a L_{14} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 s \theta_1 c \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{14} \\ + 2L_a L_{15} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 s \theta_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{15} + 2L_a L_{15} \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{15} s \theta_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{15} \\ + 2L_a L_{14} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{14} c \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14} + 2L_a L_{14} \dot{\theta}_1 \dot{\varphi}_2 c \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{14} + 2L_a L_{15} \dot{\theta}_1 \dot{\varphi}_2 c \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{15} \\ + 2L_a L_{15} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{15} c \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{15} + 2L_{14}^2 \dot{\theta}_{14} \dot{\varphi}_2 c \varphi_2 s \theta_{14} s \varphi_2 c \theta_{14} + 2L_{14} L_{15} \dot{\theta}_{14} \dot{\varphi}_2 c \varphi_2 s \theta_{14} s \varphi_2 c \theta_{15} \\ + 2L_{14} L_{15} \dot{\theta}_{14} \dot{\theta}_{15} c \varphi_2 s \theta_{14} c \varphi_2 s \theta_{15} + 2L_{14} L_{15} \dot{\varphi}_2^2 s \varphi_2 c \theta_{14} s \varphi_2 c \theta_{15} + 2L_{14} L_{15} \dot{\varphi}_2 \dot{\theta}_{15} s \varphi_2 c \theta_{14} c \varphi_2 s \theta_{15} \\ \left. + 2L_{15}^2 \dot{\varphi}_2 \dot{\theta}_{15} s \varphi_2 c \theta_{15} c \varphi_2 s \theta_{15} \right)$$

EK-B. 28

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{16}^2 = & \left(L_a^2 \dot{\varphi}_1^2 s^2 \varphi_1 s^2 \theta_1 + L_a^2 \dot{\theta}_1^2 c^2 \varphi_1 c^2 \theta_1 + L_{14}^2 \dot{\theta}_{14}^2 c^2 \varphi_2 c^2 \theta_{14} + \dot{\varphi}_2^2 \left(L_{14}^2 s^2 \varphi_2 s^2 \theta_{14} + L_{15}^2 s^2 \varphi_2 s^2 \theta_{15} \right) \right. \\
& + L_{15}^2 \dot{\theta}_{15}^2 c^2 \varphi_2 c^2 \theta_{15} + L_{16}^2 \dot{\theta}_{16}^2 c^2 \varphi_2 c^2 \theta_{16} \\
& \left. \left(L_{14}^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_1 - L_a L_{14} \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{14} s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14} + \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 (-L_a s \varphi_1 s \theta_1) \left(\begin{array}{l} L_{14} s \varphi_2 s \theta_{14} - L_{15} s \varphi_2 s \theta_{15} \\ -L_{16} s \varphi_2 s \theta_{16} \end{array} \right) \right. \right. \\
& - L_a L_{15} \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{15} s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{15} - L_a L_{16} \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{16} s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{16} + L_a L_{14} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{14} c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14} \\
& + \dot{\theta}_1 \dot{\varphi}_2 (L_a c \varphi_1 c \theta_1) (-L_{14} s \varphi_2 s \theta_{14} - L_{15} s \varphi_2 s \theta_{15} - L_{16} s \varphi_2 s \theta_{16}) + L_a L_{15} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{15} c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{15} \\
& + 2 L_a L_{16} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{16} c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{16} + \dot{\theta}_{14} \dot{\varphi}_2 (L_{14} c \varphi_2 c \theta_{14}) (-L_{14} s \varphi_2 s \theta_{14} - L_{15} s \varphi_2 s \theta_{15} - L_{16} s \varphi_2 s \theta_{16}) \\
& + L_{14} L_{15} \dot{\theta}_{14} \dot{\theta}_{15} c^2 \varphi_2 c \theta_{14} c \theta_{15} + L_{14} L_{16} \dot{\theta}_{14} \dot{\theta}_{16} c^2 \varphi_2 c \theta_{14} c \theta_{16} \\
& + \dot{\varphi}_2 \dot{\theta}_{15} (L_{15} c \varphi_2 c \theta_{15}) (-L_{14} s \varphi_2 s \theta_{14} - L_{15} s \varphi_2 s \theta_{15} - L_{16} s \varphi_2 s \theta_{16}) \\
& + \dot{\varphi}_2 \dot{\theta}_{16} (L_{16} c \varphi_2 c \theta_{16}) (-L_{14} s \varphi_2 s \theta_{14} - L_{15} s \varphi_2 s \theta_{15} - L_{16} s \varphi_2 s \theta_{16}) \\
& \left. + L_{15} L_{16} \dot{\theta}_{15} \dot{\theta}_{16} c^2 \varphi_2 c \theta_{15} c \theta_{16} \right) \\
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{y}_{16}^2 = & \left(L_a^2 \dot{\varphi}_1^2 c^2 \theta_1 c^2 \varphi_1 + L_a^2 \dot{\theta}_1^2 s^2 \theta_1 s^2 \varphi_1 + L_{14}^2 \dot{\theta}_{14}^2 s^2 \theta_{14} s^2 \varphi_2 + \dot{\varphi}_2^2 \left(L_{14}^2 c^2 \theta_{14} c^2 \varphi_2 + L_{15}^2 c^2 \theta_{15} c^2 \varphi_2 \right) \right. \\
& + L_{15}^2 \dot{\theta}_{15}^2 s^2 \theta_{15} s^2 \varphi_2 + L_{16}^2 \dot{\theta}_{16}^2 s^2 \theta_{16} s^2 \varphi_2 \\
& \left(L_a^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_1 - L_a L_{14} \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{14} c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{14} s \varphi_2 \right. \\
& - \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 (L_a c \theta_1 c \varphi_1) (L_{14} c \theta_{14} c \varphi_2 + L_{15} c \theta_{15} c \varphi_2 + L_{16} c \theta_{16} c \varphi_2) \\
& - L_a L_{15} \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{15} c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{15} s \varphi_2 + L_a L_{16} \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{16} c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{16} s \varphi_2 + L_a L_{14} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{14} s \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{14} s \varphi_2 \\
& + \dot{\theta}_1 \dot{\varphi}_2 (-L_a s \theta_1 s \varphi_1) (L_{14} c \theta_{14} c \varphi_2 + L_{15} c \theta_{15} c \varphi_2 + L_{16} c \theta_{16} c \varphi_2) + L_a L_{15} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{15} s \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{15} s \varphi_2 \\
& + 2 L_a L_{16} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{16} s \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{16} s \varphi_2 + \dot{\theta}_{14} \dot{\varphi}_2 (-L_{14} s \theta_{14} s \varphi_2) (L_{14} c \theta_{14} c \varphi_2 + L_{15} c \theta_{15} c \varphi_2 + L_{16} c \theta_{16} c \varphi_2) \\
& + L_{14} L_{15} \dot{\theta}_{14} \dot{\theta}_{15} s \theta_{14} s^2 \varphi_2 s \theta_{15} + L_{14} L_{16} \dot{\theta}_{14} \dot{\theta}_{16} s \theta_{14} s^2 \varphi_2 s \theta_{16} \\
& + \dot{\varphi}_2 \dot{\theta}_{15} (-L_{15} s \theta_{15} s \varphi_2) (L_{14} c \theta_{14} c \varphi_2 + L_{15} c \theta_{15} c \varphi_2 + L_{16} c \theta_{16} c \varphi_2) \\
& + \dot{\varphi}_2 \dot{\theta}_{16} (-L_{16} s \theta_{16} s \varphi_2) (L_{14} c \theta_{14} c \varphi_2 + L_{15} c \theta_{15} c \varphi_2 + L_{16} c \theta_{16} c \varphi_2) \\
& \left. + L_{15} L_{16} \dot{\theta}_{15} \dot{\theta}_{16} s \theta_{15} s^2 \varphi_2 s \theta_{16} \right)
\end{aligned}$$

$$\dot{z}_{16}^2 = \left(\begin{aligned} &L_a^2 \dot{\varphi}_1^2 s^2 \varphi_1 c^2 \theta_1 + L_a^2 \dot{\theta}_1^2 c^2 \varphi_1 c^2 \theta_1 + L_{14}^2 \dot{\theta}_{14}^2 c^2 \varphi_2 s^2 \theta_{14} \\ &+ \dot{\varphi}_2^2 (L_{14}^2 s^2 \varphi_2 c^2 \theta_{14} + L_{15}^2 s^2 \varphi_2 c^2 \theta_{15} + L_{16}^2 s^2 \varphi_2 c^2 \theta_{16}) \\ &+ L_{15}^2 \dot{\varphi}_2^2 c^2 \varphi_2 s^2 \theta_{15} + L_{16}^2 \dot{\varphi}_2^2 c^2 \varphi_2 s^2 \theta_{16} \\ &\left(\begin{aligned} &-L_a^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_1 + L_a L_{14} \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{14} s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14} \\ &+ \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 (-L_a s \varphi_1 s \theta_1) (-L_{14} s \varphi_2 c \theta_{14} - L_{15} s \varphi_2 c \theta_{15} - L_{16} s \varphi_2 c \theta_{16}) \\ &+ L_a L_{15} \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{15} s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{15} + L_a L_{16} \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{16} s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{16} + L_a L_{14} \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{14} c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14} \\ &+ \dot{\theta}_2^2 (L_a c \varphi_1 c \theta_1) (-L_{14} s \varphi_2 c \theta_{14} - L_{15} s \varphi_2 c \theta_{15} - L_{16} s \varphi_2 c \theta_{16}) \\ &+ L_a L_{15} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{15} c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{15} - L_a L_{16} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{16} c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{16} \\ &+ \dot{\theta}_{14} \dot{\varphi}_2 (-L_{14} c \varphi_2 s \theta_{14}) (-L_{14} s \varphi_2 c \theta_{14} - L_{15} s \varphi_2 c \theta_{15} - L_{16} s \varphi_2 c \theta_{16}) \\ &+ L_{14} L_{15} \dot{\theta}_{14} \dot{\theta}_{15} c^2 \varphi_2 s \theta_{14} s \theta_{15} + L_{14} L_{16} \dot{\theta}_{14} \dot{\theta}_{16} c^2 \varphi_2 s \theta_{14} s \theta_{16} \\ &+ \dot{\varphi}_2 \dot{\theta}_{15} (-L_{15} c \varphi_2 s \theta_{15}) (-L_{14} s \varphi_2 c \theta_{14} - L_{15} s \varphi_2 c \theta_{15} - L_{16} s \varphi_2 c \theta_{16}) \\ &+ \dot{\varphi}_2 \dot{\theta}_{16} (-L_{16} c \varphi_2 s \theta_{16}) (-L_{14} s \varphi_2 c \theta_{14} - L_{15} s \varphi_2 c \theta_{15} - L_{16} s \varphi_2 c \theta_{16}) \\ &L_{15} L_{16} \dot{\theta}_{15} \dot{\theta}_{16} c^2 \varphi_2 s \theta_{15} s \theta_{16} \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) + 2 \left(\begin{aligned} &-L_a^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_1 + L_a L_{14} \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{14} s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14} \\ &+ \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 (-L_a s \varphi_1 s \theta_1) (-L_{14} s \varphi_2 c \theta_{14} - L_{15} s \varphi_2 c \theta_{15} - L_{16} s \varphi_2 c \theta_{16}) \\ &+ L_a L_{15} \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{15} s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{15} + L_a L_{16} \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{16} s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{16} + L_a L_{14} \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{14} c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14} \\ &+ \dot{\theta}_2^2 (L_a c \varphi_1 c \theta_1) (-L_{14} s \varphi_2 c \theta_{14} - L_{15} s \varphi_2 c \theta_{15} - L_{16} s \varphi_2 c \theta_{16}) \\ &+ L_a L_{15} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{15} c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{15} - L_a L_{16} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{16} c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{16} \\ &+ \dot{\theta}_{14} \dot{\varphi}_2 (-L_{14} c \varphi_2 s \theta_{14}) (-L_{14} s \varphi_2 c \theta_{14} - L_{15} s \varphi_2 c \theta_{15} - L_{16} s \varphi_2 c \theta_{16}) \\ &+ L_{14} L_{15} \dot{\theta}_{14} \dot{\theta}_{15} c^2 \varphi_2 s \theta_{14} s \theta_{15} + L_{14} L_{16} \dot{\theta}_{14} \dot{\theta}_{16} c^2 \varphi_2 s \theta_{14} s \theta_{16} \\ &+ \dot{\varphi}_2 \dot{\theta}_{15} (-L_{15} c \varphi_2 s \theta_{15}) (-L_{14} s \varphi_2 c \theta_{14} - L_{15} s \varphi_2 c \theta_{15} - L_{16} s \varphi_2 c \theta_{16}) \\ &+ \dot{\varphi}_2 \dot{\theta}_{16} (-L_{16} c \varphi_2 s \theta_{16}) (-L_{14} s \varphi_2 c \theta_{14} - L_{15} s \varphi_2 c \theta_{15} - L_{16} s \varphi_2 c \theta_{16}) \\ &L_{15} L_{16} \dot{\theta}_{15} \dot{\theta}_{16} c^2 \varphi_2 s \theta_{15} s \theta_{16} \end{aligned} \right) \end{aligned}$$

İşlemler ortak paranteze alınır ve trigonometrik özdeşlikler uygulanırsa kinetik enerji,

$$\begin{aligned}
T_{16} = m_{16} & \left(\begin{aligned}
& \left(\dot{\varphi}_1^2 L_a^2 (2s^2 \varphi_1 s^2 \theta_1 + c^2 \theta_1 c^2 \varphi_1) + \dot{\theta}_1^2 L_a^2 (2c^2 \varphi_1 c^2 \theta_1 + s^2 \theta_1 s^2 \varphi_1) \right) \\
& + \dot{\theta}_{14}^2 L_{14}^2 (c^2 \varphi_2 c^2 \theta_{14} + s^2 \theta_{14}) \\
& + \dot{\varphi}_2^2 \left(L_{14}^2 (s^2 \varphi_2 s^2 \theta_{14} + c^2 \theta_{14}) + L_{15}^2 (s^2 \varphi_2 s^2 \theta_{15} + c^2 \theta_{15}) \right) \\
& + L_{16}^2 (s^2 \varphi_2 s^2 \theta_{16} + c^2 \theta_{16}) \\
& + \dot{\theta}_{15}^2 L_{15}^2 (c^2 \varphi_2 c^2 \theta_{15} + s^2 \theta_{15}) + \dot{\theta}_{16}^2 L_{16}^2 (c^2 \varphi_2 c^2 \theta_{16} + s^2 \theta_{16}) \end{aligned} \right) \\
& + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 L_a^2 (-c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_1) + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{14} L_a L_{14} (-c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{14} s \varphi_2) \\
& + \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \left(\begin{aligned}
& (-L_a s \varphi_1 s \theta_1) s \varphi_2 (-L_{14} s \theta_{14} - L_{15} s \theta_{15} - L_{16} s \theta_{16}) \\
& + (L_a c \theta_1 c \varphi_1) c \varphi_2 (L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15} + L_{16} c \theta_{16}) \\
& - (L_a s \varphi_1 s \theta_1) s \varphi_2 (-L_{14} c \theta_{14} - L_{15} c \theta_{15} - L_{16} c \theta_{16})
\end{aligned} \right) \\
& + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{15} L_a L_{15} (-s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{15} - c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{15} s \varphi_2 + s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{15}) \\
& + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{16} L_a L_{16} (-s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{16} - c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{16} s \varphi_2 + s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{16}) \\
& + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{14} L_a L_{14} (c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14} + s \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{14} s \varphi_2 + c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14}) \\
& + \dot{\theta}_1 \dot{\varphi}_2 \left(\begin{aligned}
& L_a c \varphi_1 c \theta_1 (-L_{14} s \varphi_2 s \theta_{14} - L_{15} s \varphi_2 s \theta_{15} - L_{16} s \varphi_2 s \theta_{16}) \\
& - L_a s \theta_1 s \varphi_1 (L_{14} c \theta_{14} c \varphi_2 + L_{15} c \theta_{15} c \varphi_2 + L_{16} c \theta_{16} c \varphi_2) \\
& + L_a c \theta_1 c \varphi_1 (-L_{14} s \varphi_2 c \theta_{14} - L_{15} s \varphi_2 c \theta_{15} - L_{16} s \varphi_2 c \theta_{16})
\end{aligned} \right) \\
& + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{15} L_a L_{15} (c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{15} + s \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{15} s \varphi_2 - c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{15}) \\
& + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{16} L_a L_{16} (c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{16} + s \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{16} s \varphi_2 - c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{16}) \\
& + \dot{\theta}_{14} \dot{\varphi}_2 \left(\begin{aligned}
& L_{14} c \varphi_2 c \theta_{14} (-L_{14} s \varphi_2 s \theta_{14} - L_{15} s \varphi_2 s \theta_{15} - L_{16} s \varphi_2 s \theta_{16}) \\
& - L_{14} s \theta_{14} s \varphi_2 (L_{14} c \theta_{14} c \varphi_2 + L_{15} c \theta_{15} c \varphi_2 + L_{16} c \theta_{16} c \varphi_2) \\
& - L_{14} c \varphi_2 s \theta_{14} (-L_{14} s \varphi_2 c \theta_{14} - L_{15} s \varphi_2 c \theta_{15} - L_{16} s \varphi_2 c \theta_{16})
\end{aligned} \right) \\
& + \dot{\theta}_{14} \dot{\theta}_{15} L_{14} L_{15} (c^2 \varphi_2 c \theta_{14} c \theta_{15} + s \theta_{14} s \theta_{15}) \\
& + \dot{\theta}_{14} \dot{\theta}_{16} L_{14} L_{16} (c^2 \varphi_2 c \theta_{14} c \theta_{16} + s \theta_{14} s \theta_{16}) \\
& + \dot{\varphi}_2 \dot{\theta}_{15} \left(\begin{aligned}
& L_{15} c \varphi_2 c \theta_{15} (-L_{14} s \varphi_2 s \theta_{14} - L_{15} s \varphi_2 s \theta_{15} - L_{16} s \varphi_2 s \theta_{16}) \\
& - L_{15} s \theta_{15} s \varphi_2 (L_{14} c \theta_{14} c \varphi_2 + L_{15} c \theta_{15} c \varphi_2 + L_{16} c \theta_{16} c \varphi_2) \\
& - L_{15} c \varphi_2 s \theta_{15} (-L_{14} s \varphi_2 c \theta_{14} - L_{15} s \varphi_2 c \theta_{15} - L_{16} s \varphi_2 c \theta_{16})
\end{aligned} \right) \\
& + \dot{\varphi}_2 \dot{\theta}_{16} \left(\begin{aligned}
& L_{16} c \varphi_2 c \theta_{16} (-L_{14} s \varphi_2 s \theta_{14} - L_{15} s \varphi_2 s \theta_{15} - L_{16} s \varphi_2 s \theta_{16}) \\
& - L_{16} s \theta_{16} s \varphi_2 (L_{14} c \theta_{14} c \varphi_2 + L_{15} c \theta_{15} c \varphi_2 + L_{16} c \theta_{16} c \varphi_2) \\
& - L_{16} c \varphi_2 s \theta_{16} (-L_{14} s \varphi_2 c \theta_{14} + L_{15} s \varphi_2 c \theta_{15} + L_{16} s \varphi_2 c \theta_{16})
\end{aligned} \right) \\
& + \dot{\theta}_{15} \dot{\theta}_{16} L_{15} L_{16} (c^2 \varphi_2 c \theta_{15} c \theta_{16} + s \theta_{15} s \theta_{16})
\end{aligned} \right)
\end{aligned} \tag{1}$$

$$V_{16} = m_{16} g h_{16} \tag{2}$$

$$V_{16} = m_{16} g (L_a c \theta_1 c \varphi_1 + L_{14} c \theta_{14} c \varphi_2 + L_{15} c \theta_{15} c \varphi_2 + L_{16} c \theta_{16} c \varphi_2) \tag{3}$$

m16 kütlelerinin kinetik (T) ve potansiyel (V) enerji bulunma tamamlanmıştır.

EK-B. 29

$$C_1 = m_{14} \left(\begin{array}{l} 0.5 \left(\begin{array}{l} \dot{\varphi}_1^2 L_a^2 \left(s^2 \varphi_1 s^2 \theta_1 + c^2 \theta_1 \right) + \dot{\theta}_1^2 L_a^2 \left(c^2 \varphi_1 c^2 \theta_1 + s^2 \theta_1 \right) \\ + \dot{\theta}_1^2 L_{14}^2 \left(c^2 \varphi_2 c^2 \theta_{14} + s^2 \theta_{14} \right) + \dot{\varphi}_2^2 L_{14}^2 \left(s^2 \varphi_2 s^2 \theta_{14} + c^2 \theta_{14} \right) \end{array} \right) \\ + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 \left(-L_a^2 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_1 \right) + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{14} L_a L_{14} \left(-s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14} - c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{14} s \varphi_2 + s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14} \right) \\ + \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 L_a L_{14} \left(s \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{14} - c \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{14} c \varphi_2 + s \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{14} \right) \\ + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{14} L_a L_{14} \left(c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14} + s \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{14} s \varphi_2 + c \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14} \right) \\ + \dot{\theta}_1 \dot{\varphi}_2 L_a L_{14} \left(-c \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{14} - s \theta_1 s \varphi_1 c \theta_{14} c \varphi_2 + c \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{14} \right) \\ + \dot{\theta}_{14} \dot{\varphi}_2 \left(-L_{14}^2 c \varphi_2 c \theta_{14} s \varphi_2 s \theta_{14} \right) \end{array} \right)$$

$$C_2 = m_{15} \left(\begin{array}{l} 0.5 \left(\begin{array}{l} \dot{\varphi}_1^2 L_a^2 \left(s^2 \varphi_1 s^2 \theta_1 + c^2 \theta_1 \right) + \dot{\theta}_1^2 L_a^2 \left(c^2 \varphi_1 c^2 \theta_1 + s^2 \theta_1 \right) + \dot{\theta}_1^2 L_{14}^2 \left(c^2 \varphi_2 c^2 \theta_{14} + s^2 \theta_{14} \right) \\ + \dot{\varphi}_2^2 \left(\begin{array}{l} L_{14}^2 \left(c^2 \theta_{14} c^2 \varphi_2 + s^2 \theta_{14} \right) + L_{15}^2 \left(c^2 \theta_{15} c^2 \varphi_2 + c^2 \theta_{15} \right) \\ + L_{14} L_{15} \left(s^2 \varphi_2 s \theta_{14} s \theta_{15} + c^2 \varphi_2 c \theta_{14} c \theta_{15} + s^2 \varphi_2 c \theta_{14} c \theta_{15} \right) \end{array} \right) \\ + \dot{\theta}_{15}^2 \left(L_{15}^2 \left(c^2 \varphi_2 c^2 \theta_{15} + s^2 \theta_{15} \right) \right) \end{array} \right) \\ + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 \left(-L_a^2 s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_1 c \theta_1 \right) \\ + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{14} L_a L_{14} \left(-s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14} - c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{14} s \varphi_2 + s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14} \right) \\ + \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \left(\begin{array}{l} L_a L_{14} \left(-s \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{14} + c \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{14} c \varphi_2 + s \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{14} \right) \\ + L_a L_{15} \left(s \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{15} + c \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{15} c \varphi_2 + s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{15} \right) \end{array} \right) \\ + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{15} L_a L_{15} \left(-s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{15} - c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{15} s \varphi_2 + s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{15} \right) \\ + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{14} L_a L_{14} \left(c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14} + s \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{14} s \varphi_2 + c \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14} \right) \\ + \dot{\theta}_1 \dot{\varphi}_2 \left(\begin{array}{l} L_a L_{14} \left(-c \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{14} + c \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{14} c \varphi_2 + s \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{14} \right) \\ + L_a L_{15} \left(-c \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{15} + c \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{15} c \varphi_2 + s \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{15} \right) \end{array} \right) \\ + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{15} L_a L_{15} \left(c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{15} + s \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{15} s \varphi_2 + c \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{15} \right) \\ + \dot{\theta}_{14} \dot{\varphi}_2 L_{14} \left(\begin{array}{l} L_{14} \left(-c \varphi_2 c \theta_{14} s \varphi_2 s \theta_{14} - s \theta_{14} s \varphi_2 c \theta_{14} c \varphi_2 + c \varphi_2 s \theta_{14} s \varphi_2 c \theta_{14} \right) \\ + L_{15} \left(-c \varphi_2 c \theta_{14} s \varphi_2 s \theta_{15} + s \theta_{14} s \varphi_2 s \theta_{15} c \varphi_2 + c \varphi_2 s \theta_{14} s \varphi_2 c \theta_{15} \right) \end{array} \right) \\ + \dot{\theta}_{14} \dot{\theta}_{15} L_{14} L_{15} \left(c \varphi_2 c \theta_{14} c \varphi_2 c \theta_{15} + s \theta_{14} s \varphi_2 s \theta_{15} s \varphi_2 + c \varphi_2 s \theta_{14} c \varphi_2 s \theta_{15} \right) \\ + \dot{\varphi}_2 \dot{\theta}_{15} \left(\begin{array}{l} L_{14} L_{15} \left(-s \varphi_2 c \varphi_2 s \theta_{14} c \theta_{15} + c \theta_{14} c \varphi_2 s \theta_{15} s \varphi_2 + s \varphi_2 c \theta_{14} c \varphi_2 s \theta_{15} \right) \\ + L_{15}^2 \left(-s \varphi_2 s \theta_{15} c \varphi_2 c \theta_{15} + c \theta_{15} c \varphi_2 s \theta_{15} s \varphi_2 + s \varphi_2 c \theta_{15} c \varphi_2 s \theta_{15} \right) \end{array} \right) \end{array} \right)$$

$$C_3 = m_{16} \left[\begin{aligned} & \dot{\phi}_1^2 L_a^2 \left(2s^2 \varphi_1 s^2 \theta_1 + c^2 \theta_1 c^2 \varphi_1 \right) + \dot{\theta}_1^2 L_a^2 \left(2c^2 \varphi_1 c^2 \theta_1 + s^2 \theta_1 s^2 \varphi_1 \right) + \dot{\theta}_1^2 L_{14}^2 \left(c^2 \varphi_2 c^2 \theta_{14} + s^2 \theta_{14} s^2 \varphi_2 \right) \\ & + \dot{\varphi}_2^2 \left(L_{14}^2 \left(s^2 \varphi_2 s^2 \theta_{14} + c^2 \theta_{14} c^2 \varphi_2 \right) + L_{15}^2 \left(s^2 \varphi_2 s^2 \theta_{15} + c^2 \theta_{15} c^2 \varphi_2 \right) + L_{16}^2 \left(s^2 \varphi_2 s^2 \theta_{16} + c^2 \theta_{16} c^2 \varphi_2 \right) \right) \\ & + \dot{\theta}_{15}^2 L_{15}^2 \left(c^2 \varphi_2 c^2 \theta_{15} + s^2 \theta_{15} s^2 \varphi_2 \right) + \dot{\theta}_{16}^2 L_{16}^2 \left(c^2 \varphi_2 c^2 \theta_{16} + s^2 \theta_{16} s^2 \varphi_2 \right) \end{aligned} \right]$$

$$C_4 = m_{16} \left[\begin{aligned} & \dot{\phi}_1 \dot{\theta}_1 L_a^2 \left(-c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_1 \right) + \dot{\phi}_1 \dot{\theta}_{14} L_a L_{14} \left(-c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{14} s \varphi_2 \right) \\ & + \dot{\phi}_1 \dot{\varphi}_2 \left(L_a s \varphi_1 s \varphi_2 s \theta_1 \left(L_{14} s \theta_{14} + L_{15} s \theta_{15} + L_{16} s \theta_{16} \right) + L_a c \theta_1 c \varphi_1 c \varphi_2 \left(L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15} + L_{16} c \theta_{16} \right) \right) \\ & + L_a s \varphi_1 s \varphi_2 s \theta_1 \left(L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15} + L_{16} c \theta_{16} \right) \\ & + \dot{\phi}_1 \dot{\theta}_{15} L_a L_{15} \left(-s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{15} - c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{15} s \varphi_2 + s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{15} \right) \\ & + \dot{\phi}_1 \dot{\theta}_{16} L_a L_{16} \left(-s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{16} - c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{16} s \varphi_2 + s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{16} \right) \\ & + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{14} L_a L_{14} \left(c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14} + s \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{14} s \varphi_2 + c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14} \right) \\ & + \dot{\theta}_1 \dot{\varphi}_2 c \varphi_1 s \varphi_2 \left(-L_a c \theta_1 \left(L_{14} s \theta_{14} + L_{15} s \theta_{15} + L_{16} s \theta_{16} \right) - L_a s \theta_1 \left(L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15} + L_{16} c \theta_{16} \right) \right) \\ & - L_a c \theta_1 \left(L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15} + L_{16} c \theta_{16} \right) \\ & + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{15} L_a L_{15} \left(c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{15} + s \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{15} s \varphi_2 - c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{15} \right) \\ & + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{16} L_a L_{16} \left(c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{16} + s \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{16} s \varphi_2 - c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{16} \right) \\ & + \dot{\theta}_{14} \dot{\varphi}_2 c \varphi_2 s \varphi_2 \left(-L_{14} c \theta_{14} \left(L_{14} s \theta_{14} + L_{15} s \theta_{15} + L_{16} s \theta_{16} \right) - L_{14} s \theta_{14} \left(L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15} + L_{16} c \theta_{16} \right) \right) \\ & + L_{14} s \theta_{14} \left(L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15} + L_{16} c \theta_{16} \right) \\ & + \dot{\theta}_{14} \dot{\theta}_{15} L_{14} L_{15} \left(c^2 \varphi_2 c \theta_{14} c \theta_{15} + s \theta_{14} s \theta_{15} \right) + \dot{\theta}_{14} \dot{\theta}_{16} L_{14} L_{16} \left(c^2 \varphi_2 c \theta_{14} c \theta_{16} + s \theta_{14} s \theta_{16} \right) \\ & + \dot{\varphi}_2 \dot{\theta}_{15} c \varphi_2 s \varphi_2 \left(-L_{15} c \theta_{15} \left(L_{14} s \theta_{14} + L_{15} s \theta_{15} + L_{16} s \theta_{16} \right) - L_{15} s \theta_{15} \left(L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15} + L_{16} c \theta_{16} \right) \right) \\ & + L_{15} s \theta_{15} \left(L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15} + L_{16} c \theta_{16} \right) \\ & + \dot{\varphi}_2 \dot{\theta}_{16} c \varphi_2 s \varphi_2 \left(-L_{16} c \theta_{16} \left(L_{14} s \theta_{14} + L_{15} s \theta_{15} + L_{16} s \theta_{16} \right) - L_{16} s \theta_{16} \left(L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15} + L_{16} c \theta_{16} \right) \right) \\ & - L_{16} s \theta_{16} \left(L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15} + L_{16} c \theta_{16} \right) \\ & + \dot{\theta}_{15} \dot{\theta}_{16} L_{15} L_{16} \left(c^2 \varphi_2 c \theta_{15} c \theta_{16} + s \theta_{15} s \theta_{16} \right) \end{aligned} \right]$$

$$V_T = \left(\begin{aligned} & m_{14} g \left(L_a c \varphi_1 c \theta_1 + L_{14} c \varphi_2 c \theta_{14} \right) + m_{15} g \left(L_a c \varphi_1 c \theta_1 + L_{14} c \varphi_2 c \theta_{14} + L_{15} c \varphi_2 c \theta_{15} \right) \\ & + m_{16} g \left(L_a c \theta_1 c \varphi_1 + L_{14} c \varphi_2 c \theta_{14} + L_{15} c \varphi_2 c \theta_{15} + L_{16} c \varphi_2 c \theta_{16} \right) \end{aligned} \right)$$

işlemler ortak paranteze alınır,

$$V_T = g \left(\begin{aligned} & L_a c \varphi_1 c \theta_1 (m_{14} + m_{15} + m_{16}) + L_{14} c \varphi_2 c \theta_{14} (m_{14} + m_{15} + m_{16}) \\ & + L_{15} c \varphi_2 c \theta_{15} (m_{15} + m_{16}) + L_{16} c \varphi_2 c \theta_{16} m_{16} \end{aligned} \right)$$

EK-B. 30

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_T}{\partial \theta_{14}} = & \left(\begin{aligned} & m_{14} \left(\begin{aligned} & \dot{\theta}_{14}^2 L_{14}^2 \left(-c^2 \varphi_2 c \theta_{14} s \theta_{14} + s \theta_{14} c \theta_{14} \right) + \dot{\varphi}_2^2 L_{14}^2 \left(s^2 \varphi_2 s \theta_{14} c \theta_{14} - c \theta_{14} s \theta_{14} \right) \\ & + \dot{\theta}_{14} \dot{\theta}_{14} L_a L_{14} \left(s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14} - c \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{14} s \varphi_2 + s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14} \right) \\ & + \dot{\theta}_1 \dot{\varphi}_2 L_a L_{14} \left(s \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{14} + c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{14} c \varphi_2 - s \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{14} \right) \\ & + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{14} L_a L_{14} \left(-c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14} + s \theta_1 s \varphi_1 c \theta_{14} s \varphi_2 + c \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14} \right) \\ & + \dot{\theta}_1 \dot{\varphi}_2 L_a L_{14} \left(-c \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{14} + s \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{14} c \varphi_2 - c \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{14} \right) \\ & + \dot{\theta}_{14} \dot{\varphi}_2 \left(L_{14}^2 c \varphi_2 s \varphi_2 s \theta_{14} c \theta_{14} \right) \end{aligned} \right) \\ & + m_{15} \left(\begin{aligned} & \dot{\theta}_{14}^2 L_{14}^2 \left(-c^2 \varphi_2 c \theta_{14} s \theta_{14} + s \theta_{14} c \theta_{14} \right) \\ & + \dot{\varphi}_2^2 \left(L_{14}^2 \left(-c \theta_{14} s \theta_{14} c^2 \varphi_2 s \varphi_2 + s \theta_{14} c \theta_{14} \right) + 0.5 L_{14} L_{15} \left(s^2 \varphi_2 c \theta_{14} s \theta_{15} - c^2 \varphi_2 s \theta_{14} c \theta_{15} - s^2 \varphi_2 s \theta_{14} c \theta_{15} \right) \right) \\ & + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{14} L_a L_{14} \left(s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14} - c \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{14} s \varphi_2 + s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14} \right) \\ & + \dot{\theta}_1 \dot{\varphi}_2 L_a L_{14} \left(-s \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{14} - c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{14} c \varphi_2 - s \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{14} \right) \\ & + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{14} L_a L_{14} \left(-c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14} + s \theta_1 s \varphi_1 c \theta_{14} s \varphi_2 + c \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14} \right) \\ & + \dot{\theta}_1 \dot{\varphi}_2 L_a L_{14} \left(-c \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{14} - c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{14} c \varphi_2 - s \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{14} \right) \\ & + \dot{\theta}_{14} \dot{\varphi}_2 L_{14} \left(L_{14} \left(-c \varphi_2 s \varphi_2 \left(c^2 \theta_{14} - s^2 \theta_{14} \right) - s \varphi_2 c \varphi_2 \left(c^2 \theta_{14} - s^2 \theta_{14} \right) + c \varphi_2 s \varphi_2 \left(c^2 \theta_{14} - s^2 \theta_{14} \right) \right) \right. \\ & \quad \left. + L_{15} \left(c \varphi_2 s \theta_{14} s \varphi_2 s \theta_{15} + c \theta_{14} s \varphi_2 s \varphi_2 s \theta_{15} + c \varphi_2 c \theta_{14} s \varphi_2 c \theta_{15} \right) \right) \\ & + \dot{\theta}_{14} \dot{\theta}_{15} L_{14} L_{15} \left(-c \varphi_2 s \theta_{14} c \varphi_2 c \theta_{15} + c \theta_{14} s \varphi_2 s \theta_{15} s \varphi_2 + c \varphi_2 c \theta_{14} s \varphi_2 s \theta_{15} \right) \\ & + \varphi_2 \dot{\theta}_{15} L_{15} L_{14} \left(-s \varphi_2 c \varphi_2 c \theta_{14} c \theta_{15} - s \theta_{14} c \varphi_2 s \theta_{15} s \varphi_2 - s \varphi_2 s \theta_{14} c \varphi_2 s \theta_{15} \right) \end{aligned} \right) \\ & + m_{16} \left(\dot{\theta}_{14}^2 L_{14}^2 \left(-c^2 \varphi_2 c \theta_{14} s \theta_{14} + s \theta_{14} c \theta_{14} \right) + \dot{\varphi}_2^2 L_{14}^2 \left(s^2 \varphi_2 s \theta_{14} c \theta_{14} - c \theta_{14} s \theta_{14} \right) \right) \\ & + m_{16} \left(\begin{aligned} & \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{14} L_a L_{14} \left(-c \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{14} s \varphi_2 \right) \\ & + \dot{\theta}_1 \dot{\varphi}_2 L_a L_{14} \left(s \varphi_1 s \varphi_2 s \theta_1 c \theta_{14} - c \theta_1 c \varphi_1 c \varphi_2 s \theta_{14} - s \varphi_1 s \varphi_2 s \theta_1 s \theta_{14} \right) \\ & + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{14} L_a L_{14} \left(-c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14} + s \theta_1 s \varphi_1 c \theta_{14} s \varphi_2 + c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14} \right) \\ & + \dot{\theta}_1 \dot{\varphi}_2 c \varphi_1 s \varphi_2 L_a L_{14} \left(-c \theta_1 c \theta_{14} + s \theta_1 s \theta_{14} - c \theta_1 s \theta_{14} \right) \\ & + \dot{\theta}_{14} \dot{\varphi}_2 c \varphi_2 s \varphi_2 \left(-L_{14}^2 \left(c^2 \theta_{14} - s^2 \theta_{14} \right) \right) \\ & + \dot{\theta}_{14} \dot{\theta}_{15} L_{14} L_{15} \left(-c^2 \varphi_2 s \theta_{14} c \theta_{15} + c \theta_{14} s \theta_{15} \right) + \dot{\theta}_{14} \dot{\theta}_{16} L_{14} L_{16} \left(-c^2 \varphi_2 s \theta_{14} c \theta_{16} + c \theta_{14} s \theta_{16} \right) \\ & + \varphi_2 \dot{\theta}_{15} c \varphi_2 s \varphi_2 L_{14} L_{15} \left(-c \theta_{15} c \theta_{14} + s \theta_{15} s \theta_{14} - s \theta_{15} s \theta_{14} \right) \\ & + \varphi_2 \dot{\theta}_{16} c \varphi_2 s \varphi_2 L_{14} L_{16} \left(-c \theta_{16} c \theta_{14} + s \theta_{16} s \theta_{14} - s \theta_{16} s \theta_{14} \right) \end{aligned} \right) \\ & + g L_{14} c \varphi_2 s \theta_{14} \left(m_{14} + m_{15} + m_{16} \right) \end{aligned} \right)
\end{aligned}$$

EK-B. 31

$$\frac{\partial L_T}{\partial \dot{\theta}_{14}} = \left(\begin{array}{l} m_{14} \left(\begin{array}{l} \dot{\theta}_{14} L_{14}^2 \left(c^2 \varphi_2 c^2 \theta_{14} + s^2 \theta_{14} \right) + \dot{\varphi}_1 L_a L_{14} \left(-s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14} - c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{14} s \varphi_2 + s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14} \right) \\ + \dot{\theta}_1 L_a L_{14} \left(c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14} + s \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{14} s \varphi_2 + c \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14} \right) \\ + \dot{\varphi}_2 \left(-L_{14}^2 c \varphi_2 c \theta_{14} s \varphi_2 s \theta_{14} \right) \end{array} \right) \\ + m_{15} \left(\begin{array}{l} \dot{\theta}_{14} L_{14}^2 \left(c^2 \varphi_2 c^2 \theta_{14} + s^2 \theta_{14} \right) + \dot{\varphi}_1 L_a L_{14} \left(-s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14} - c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{14} s \varphi_2 + s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14} \right) \\ + \dot{\theta}_1 L_a L_{14} \left(c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14} + s \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{14} s \varphi_2 + c \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14} \right) \\ + \dot{\varphi}_2 L_{14} \left(\begin{array}{l} L_{14} \left(-c \varphi_2 c \theta_{14} s \varphi_2 s \theta_{14} - s \theta_{14} s \varphi_2 c \theta_{14} c \varphi_2 + c \varphi_2 s \theta_{14} s \varphi_2 c \theta_{14} \right) \\ + L_{15} \left(-c \varphi_2 c \theta_{14} s \varphi_2 s \theta_{15} + s \theta_{14} s \varphi_2 c \varphi_2 s \theta_{15} + c \varphi_2 s \theta_{14} s \varphi_2 c \theta_{15} \right) \end{array} \right) \\ + \dot{\theta}_{15} L_{14} L_{15} \left(c \varphi_2 c \theta_{14} c \varphi_2 c \theta_{15} + s \theta_{14} s \varphi_2 s \theta_{15} s \varphi_2 + c \varphi_2 s \theta_{14} s \varphi_2 s \theta_{15} \right) \end{array} \right) \\ + m_{16} \dot{\theta}_{14} L_{14}^2 \left(c^2 \varphi_2 c^2 \theta_{14} + s^2 \theta_{14} \right) \\ + m_{16} \left(\begin{array}{l} \dot{\varphi}_1 L_a L_{14} \left(-c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{14} s \varphi_2 \right) + \dot{\theta}_1 L_a L_{14} \left(c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14} + s \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{14} s \varphi_2 + c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14} \right) \\ + \dot{\varphi}_2 c \varphi_2 s \varphi_2 \left(\begin{array}{l} -L_{14} c \theta_{14} \left(L_{14} s \theta_{14} + L_{15} s \theta_{15} + L_{16} s \theta_{16} \right) \\ -L_{14} s \theta_{14} \left(L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15} + L_{16} c \theta_{16} \right) \\ + L_{14} s \theta_{14} \left(L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15} + L_{16} c \theta_{16} \right) \end{array} \right) \\ + \dot{\theta}_{15} L_{14} L_{15} \left(c^2 \varphi_2 c \theta_{14} c \theta_{15} + s \theta_{14} s \theta_{15} \right) + \dot{\theta}_{16} L_{14} L_{16} \left(c^2 \varphi_2 c \theta_{14} c \theta_{16} + s \theta_{14} s \theta_{16} \right) \end{array} \right) \end{array} \right)$$

EK-B. 32

$$dfi1 = \ddot{\varphi}_1 \left(\begin{array}{l} m_{14} L_a L_{14} \left(-s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14} - c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{14} s \varphi_2 + s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14} \right) \\ + m_{15} L_a L_{14} \left(-s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14} - c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{14} s \varphi_2 + s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14} \right) \\ + m_{16} L_a L_{14} \left(-c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{14} s \varphi_2 \right) \end{array} \right)$$

$$dfi2 = \ddot{\varphi}_2 \left(\begin{array}{l} m_{14} 2 \left(-L_{14}^2 c \varphi_2 c \theta_{14} s \varphi_2 s \theta_{14} \right) \\ + m_{15} L_{14} \left(\begin{array}{l} L_{14} \left(-c \varphi_2 c \theta_{14} s \varphi_2 s \theta_{14} - s \theta_{14} s \varphi_2 c \theta_{14} c \varphi_2 + c \varphi_2 s \theta_{14} s \varphi_2 c \theta_{14} \right) \\ + L_{15} \left(-c \varphi_2 c \theta_{14} s \varphi_2 s \theta_{15} + s \theta_{14} s \varphi_2 c \varphi_2 s \theta_{15} + c \varphi_2 s \theta_{14} s \varphi_2 c \theta_{15} \right) \end{array} \right) \\ + m_{16} c \varphi_2 s \varphi_2 \left(\begin{array}{l} -L_{14} c \theta_{14} \left(L_{14} s \theta_{14} + L_{15} s \theta_{15} + L_{16} s \theta_{16} \right) \\ -L_{14} s \theta_{14} \left(L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15} + L_{16} c \theta_{16} \right) \\ + \left(L_{14} s \theta_{14} \right) \left(L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15} + L_{16} c \theta_{16} \right) \end{array} \right) \end{array} \right)$$

$$dtheta1 = \ddot{\theta}_1 \left(\begin{array}{l} m_{14} L_a L_{14} \left(c\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{14} + s\theta_1 s\varphi_1 s\theta_{14} s\varphi_2 + c\varphi_1 s\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{14} \right) \\ + m_{15} L_a L_{14} \left(c\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{14} + s\theta_1 s\varphi_1 s\theta_{14} s\varphi_2 + c\varphi_1 s\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{14} \right) \\ + m_{16} L_a L_{14} \left(c\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{14} + s\theta_1 s\varphi_1 s\theta_{14} s\varphi_2 + c\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{14} \right) \end{array} \right)$$

$$dtheta14 = \ddot{\theta}_{14} \left(\begin{array}{l} m_{14} L_{14}^2 \left(c^2 \varphi_2 c^2 \theta_{14} + s^2 \theta_{14} \right) \\ + m_{15} L_{14}^2 \left(c^2 \varphi_2 c^2 \theta_{14} + s^2 \theta_{14} \right) \\ + m_{16} L_{14}^2 \left(c^2 \varphi_2 c^2 \theta_{14} + s^2 \theta_{14} \right) \end{array} \right)$$

$$dtheta15 = \ddot{\theta}_{15} \left(\begin{array}{l} m_{15} L_{14} L_{15} (c\varphi_2 c\theta_{14} c\varphi_2 c\theta_{15} + s\theta_{14} s\varphi_2 s\theta_{15} s\varphi_2 + c\varphi_2 s\theta_{14} s\varphi_2 s\theta_{15}) \\ + m_{16} L_{14} L_{15} (c^2 \varphi_2 c\theta_{14} c\theta_{15} + s\theta_{14} s\theta_{15}) \end{array} \right)$$

$$dtheta16 = \ddot{\theta}_{16} m_{16} L_{14} L_{16} (c^2 \varphi_2 c\theta_{14} c\theta_{16} + s\theta_{14} s\theta_{16})$$

$$f_{i1} = \dot{\phi}_1 \left(\begin{array}{l} m_{14} \left(\begin{array}{l} \dot{\phi}_1 L_a L_{14} (-c\varphi_1 s\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{14} + c\theta_1 s\varphi_1 s\theta_{14} s\varphi_2 + c\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{14}) \\ + \dot{\theta}_1 L_a L_{14} (-s\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{14} + s\theta_1 c\varphi_1 s\theta_{14} s\varphi_2 - s\varphi_1 s\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{14}) \end{array} \right) \\ + m_{15} \left(\begin{array}{l} \dot{\phi}_1 L_a L_{14} (-c\varphi_1 s\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{14} + c\theta_1 s\varphi_1 s\theta_{14} s\varphi_2 + c\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{14}) \\ + \dot{\theta}_1 L_a L_{14} (-s\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{14} + s\theta_1 c\varphi_1 s\theta_{14} s\varphi_2 - s\varphi_1 s\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{14}) \end{array} \right) \\ + m_{16} \left(\begin{array}{l} \dot{\phi}_1 L_a L_{14} c\theta_1 s\varphi_1 s\theta_{14} s\varphi_2 \\ + \dot{\theta}_1 L_a L_{14} (-s\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{14} + s\theta_1 c\varphi_1 s\theta_{14} s\varphi_2 - s\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{14}) \end{array} \right) \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
fi2 = \dot{\varphi}_2 & \left(\begin{aligned} & m_{14} \left(\begin{aligned} & \dot{\theta}_{14} L_{14}^2 \left(-2c\varphi_2 s\varphi_2 c^2 \theta_{14} + s^2 \theta_{14} \right) + \dot{\varphi}_1 L_a L_{14} \left(s\varphi_1 s \theta_1 s\varphi_2 c\theta_{14} - c\theta_1 c\varphi_1 s\theta_{14} c\varphi_2 - s\varphi_1 c\theta_1 s\varphi_2 s\theta_{14} \right) \\ & + \dot{\theta}_1 L_a L_{14} \left(-c\varphi_1 c\theta_1 s\varphi_2 c\theta_{14} + s\theta_1 s\varphi_1 s\theta_{14} c\varphi_2 - c\varphi_1 s\theta_1 s\varphi_2 s\theta_{14} \right) \\ & - \dot{\varphi}_2 L_{14}^2 c\theta_{14} s\theta_{14} \left(c^2 \varphi_2 - s^2 \varphi_2 \right) \end{aligned} \right) \\ & + m_{15} \left(\begin{aligned} & \dot{\theta}_{14} L_{14}^2 \left(-2c\varphi_2 s\varphi_2 c^2 \theta_{14} + s^2 \theta_{14} \right) + \dot{\varphi}_1 L_a L_{14} \left(s\varphi_1 s \theta_1 s\varphi_2 c\theta_{14} - c\theta_1 c\varphi_1 s\theta_{14} c\varphi_2 - s\varphi_1 c\theta_1 s\varphi_2 s\theta_{14} \right) \\ & + \dot{\theta}_1 L_a L_{14} \left(-c\varphi_1 c\theta_1 s\varphi_2 c\theta_{14} + s\theta_1 s\varphi_1 s\theta_{14} c\varphi_2 - c\varphi_1 s\theta_1 s\varphi_2 s\theta_{14} \right) \\ & + \dot{\varphi}_2 L_{14} \left(\begin{aligned} & L_{14} \left(-c\theta_{14} s\theta_{14} \left(c^2 \varphi_2 - s^2 \varphi_2 \right) \right) \\ & + L_{15} \left(-s\theta_{15} c\theta_{14} \left(c^2 \varphi_2 - s^2 \varphi_2 \right) + s\theta_{15} s\theta_{14} \left(c^2 \varphi_2 - s^2 \varphi_2 \right) + c\theta_{15} s\theta_{14} \left(c^2 \varphi_2 - s^2 \varphi_2 \right) \right) \end{aligned} \right) \\ & + \dot{\theta}_{15} L_{14} L_{15} \left(-2c\theta_{14} c\theta_{15} c\varphi_2 s\varphi_2 + 2s\theta_{14} s\theta_{15} s\varphi_2 c\varphi_2 + s\theta_{14} s\theta_{15} \left(c^2 \varphi_2 - s^2 \varphi_2 \right) \right) \end{aligned} \right) \\ & + m_{16} \dot{\theta}_{14} L_{14}^2 \left(-2c\varphi_2 s\varphi_2 c^2 \theta_{14} + s^2 \theta_{14} \right) \\ & + m_{16} \left(\begin{aligned} & \dot{\varphi}_1 L_a L_{14} \left(-c\theta_1 c\varphi_1 s\theta_{14} c\varphi_2 \right) + \dot{\theta}_1 L_a L_{14} \left(-c\varphi_1 c\theta_1 s\varphi_2 c\theta_{14} + s\theta_1 s\varphi_1 s\theta_{14} c\varphi_2 - c\varphi_1 c\theta_1 s\varphi_2 s\theta_{14} \right) \\ & + \dot{\varphi}_2 \left(c^2 \varphi_2 - s^2 \varphi_2 \right) \left(\begin{aligned} & -L_{14} c\theta_{14} \left(L_{14} s\theta_{14} + L_{15} s\theta_{15} + L_{16} s\theta_{16} \right) \\ & -L_{14} s\theta_{14} \left(L_{14} c\theta_{14} + L_{15} c\theta_{15} + L_{16} c\theta_{16} \right) \\ & +L_{14} s\theta_{14} \left(L_{14} c\theta_{14} + L_{15} c\theta_{15} + L_{16} c\theta_{16} \right) \end{aligned} \right) \\ & + \dot{\theta}_{15} L_{14} L_{15} \left(-2c\varphi_2 s\varphi_2 c\theta_{14} c\theta_{15} \right) + \dot{\theta}_{16} L_{14} L_{16} \left(-2c\varphi_2 s\varphi_2 c\theta_{14} c\theta_{16} \right) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \\
\\
theta1 = \dot{\theta}_1 & \left(\begin{aligned} & m_{14} \left(\begin{aligned} & \dot{\varphi}_1 L_a L_{14} \left(-s\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{14} + s\theta_1 c\varphi_1 s\theta_{14} s\varphi_2 - s\varphi_1 s\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{14} \right) \\ & + \dot{\theta}_1 L_a L_{14} \left(-c\varphi_1 s\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{14} + c\theta_1 s\varphi_1 s\theta_{14} s\varphi_2 + c\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{14} \right) \end{aligned} \right) \\ & + m_{15} \left(\begin{aligned} & \dot{\varphi}_1 L_a L_{14} \left(-s\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{14} + s\theta_1 c\varphi_1 s\theta_{14} s\varphi_2 - s\varphi_1 s\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{14} \right) \\ & + \dot{\theta}_1 L_a L_{14} \left(-c\varphi_1 s\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{14} + c\theta_1 s\varphi_1 s\theta_{14} s\varphi_2 + c\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{14} \right) \end{aligned} \right) \\ & + m_{16} \left(\begin{aligned} & \dot{\varphi}_1 L_a L_{14} \left(s\theta_1 c\varphi_1 s\theta_{14} s\varphi_2 \right) \\ & + \dot{\theta}_1 L_a L_{14} \left(-c\varphi_1 s\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{14} + c\theta_1 s\varphi_1 s\theta_{14} s\varphi_2 - c\varphi_1 s\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{14} \right) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_{14} = \dot{\theta}_{14} & \left(\begin{aligned} & m_{14} \left(\begin{aligned} & \dot{\theta}_{14} L_{14}^2 2 \left(-c^2 \varphi_2 c \theta_{14} s \theta_{14} + s \theta_{14} c \theta_{14} \right) \\ & + \dot{\varphi}_1 L_a L_{14} (s \varphi_1 s \theta_{14} c \varphi_2 s \theta_{14} - c \theta_{14} c \varphi_1 c \theta_{14} s \varphi_2 + s \varphi_1 c \theta_{14} c \varphi_2 c \theta_{14}) \\ & + \dot{\theta}_1 L_a L_{14} (-c \varphi_1 c \theta_{14} c \varphi_2 s \theta_{14} + s \theta_{14} s \varphi_1 c \theta_{14} s \varphi_2 + c \varphi_1 s \theta_{14} c \varphi_2 c \theta_{14}) \\ & + \dot{\varphi}_2 \left(-L_{14}^2 c \varphi_2 s \varphi_2 \left(c^2 \theta_{14} - s^2 \theta_{14} \right) \right) \end{aligned} \right) \\ & + m_{15} \left(\begin{aligned} & \dot{\theta}_{14} L_{14}^2 2 \left(-c^2 \varphi_2 c \theta_{14} s \theta_{14} + s \theta_{14} c \theta_{14} \right) \\ & + \dot{\varphi}_1 L_a L_{14} (s \varphi_1 s \theta_{14} c \varphi_2 s \theta_{14} - c \theta_{14} c \varphi_1 c \theta_{14} s \varphi_2 + s \varphi_1 c \theta_{14} c \varphi_2 c \theta_{14}) \\ & + \dot{\theta}_1 L_a L_{14} (-c \varphi_1 c \theta_{14} c \varphi_2 s \theta_{14} + s \theta_{14} s \varphi_1 c \theta_{14} s \varphi_2 + c \varphi_1 s \theta_{14} c \varphi_2 c \theta_{14}) \\ & + \dot{\varphi}_2 L_{14} \left(\begin{aligned} & L_{14} \left(c \varphi_2 s \varphi_2 \left(c^2 \theta_{14} - s^2 \theta_{14} \right) - c \varphi_2 s \varphi_2 \left(c^2 \theta_{14} - s^2 \theta_{14} \right) + c \varphi_1 s \varphi_2 \left(c^2 \theta_{14} - s^2 \theta_{14} \right) \right) \\ & + L_{15} (c \varphi_2 s \varphi_2 s \theta_{14} s \theta_{15} + c \theta_{14} s \varphi_2 s \varphi_2 s \theta_{15} + c \varphi_2 c \theta_{14} s \varphi_2 c \theta_{15}) \\ & + \dot{\theta}_{15} L_{14} L_{15} (-c \varphi_2 s \theta_{14} c \varphi_2 c \theta_{15} + c \theta_{14} s \varphi_2 s \theta_{15} s \varphi_2 + c \varphi_2 c \theta_{14} s \varphi_2 s \theta_{15}) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \\ & + m_{16} \dot{\theta}_{14} L_{14}^2 2 \left(-c^2 \varphi_2 c \theta_{14} s \theta_{14} + s \theta_{14} c \theta_{14} \right) \\ & + m_{16} \left(\begin{aligned} & \dot{\varphi}_1 L_a L_{14} (-c \theta_{14} c \varphi_1 c \theta_{14} s \varphi_2) + \dot{\theta}_1 L_a L_{14} (-c \varphi_1 c \theta_{14} c \varphi_2 s \theta_{14} + s \theta_{14} s \varphi_1 c \theta_{14} s \varphi_2 + c \varphi_1 c \theta_{14} c \varphi_2 c \theta_{14}) \\ & + \dot{\varphi}_2 c \varphi_2 s \varphi_2 \left(\begin{aligned} & -L_{14}^2 \left(c^2 \theta_{14} - s^2 \theta_{14} \right) + L_{14} s \theta_{14} (-L_{15} s \theta_{15} - L_{16} s \theta_{16}) \\ & -L_{14}^2 \left(c^2 \theta_{14} - s^2 \theta_{14} \right) - L_{14} c \theta_{14} (L_{15} c \theta_{15} + L_{16} c \theta_{16}) \\ & + L_{14}^2 \left(c^2 \theta_{14} - s^2 \theta_{14} \right) - L_{14} c \theta_{14} (-L_{15} c \theta_{15} - L_{16} c \theta_{16}) \end{aligned} \right) \\ & + \dot{\theta}_{15} L_{14} L_{15} (-c^2 \varphi_2 s \theta_{14} c \theta_{15} + c \theta_{14} s \theta_{15}) + \dot{\theta}_{16} L_{14} L_{16} (-c^2 \varphi_2 s \theta_{14} c \theta_{16} + c \theta_{14} s \theta_{16}) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_{15} = \dot{\theta}_{15} & \left(\begin{aligned} & m_{15} \left(\begin{aligned} & \dot{\varphi}_2 L_{14} L_{15} (-c \varphi_2 c \theta_{14} s \varphi_2 c \theta_{15} + s \theta_{14} s \varphi_2 s \varphi_2 c \theta_{15} - c \varphi_2 s \theta_{14} s \varphi_2 s \theta_{15}) \\ & + \dot{\theta}_{15} L_{14} L_{15} (-c \varphi_2 c \theta_{14} c \varphi_2 s \theta_{15} + s \theta_{14} s \varphi_2 c \theta_{15} s \varphi_2 + c \varphi_2 s \theta_{14} s \varphi_2 c \theta_{15}) \end{aligned} \right) \\ & + m_{16} \left(\begin{aligned} & \dot{\varphi}_2 c \varphi_2 s \varphi_2 \dot{\theta}_{15} \left(\begin{aligned} & -L_{14} c \theta_{14} (-L_{15} c \theta_{15}) \\ & -L_{14} s \theta_{14} (-L_{15} s \theta_{15}) \\ & + L_{14} s \theta_{14} (-L_{15} s \theta_{15}) \end{aligned} \right) \\ & + \dot{\theta}_{15}^2 L_{14} L_{15} \left(-c^2 \varphi_2 c \theta_{14} s \theta_{15} + s \theta_{14} s \theta_{15} \right) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_{16} = m_{16} \dot{\theta}_{16} & \left(\begin{aligned} & \dot{\varphi}_2 c \varphi_2 s \varphi_2 \left(\begin{aligned} & -L_{14} c \theta_{14} (L_{16} c \theta_{16}) \\ & -L_{14} s \theta_{14} (-L_{16} s \theta_{16}) \\ & + L_{14} s \theta_{14} (-L_{16} s \theta_{16}) \end{aligned} \right) \\ & + \dot{\theta}_{16} L_{14} L_{16} \left(-c^2 \varphi_2 c \theta_{14} s \theta_{16} + s \theta_{14} c \theta_{16} \right) \end{aligned} \right)
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_T}{\partial \dot{\theta}_{14}} \right) = \begin{pmatrix} d\mathbf{f}1 + d\mathbf{f}2 + d\theta_{14} + d\theta_{15} + d\theta_{16} \\ + \mathbf{f}1 + \mathbf{f}2 + \theta_{14} + \theta_{15} + \theta_{16} \end{pmatrix}$$

EK-B. 33

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_T}{\partial \theta_{15}} = & \left(m_{15} \left(\begin{aligned} & \dot{\phi}_2^2 \left(L_{15}^2 \left(-c\theta_{15}s\theta_{15}c^2\varphi_2 - c\theta_{15}s\theta_{15} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + 0.5L_{14}L_{15} \left(s^2\varphi_2s\theta_{14}c\theta_{15} - c^2\varphi_2c\theta_{14}s\theta_{15} - s^2\varphi_2c\theta_{14}s\theta_{15} \right) \right) \right. \\ & + \dot{\theta}_{15}^2 L_{15}^2 \left(-c^2\varphi_2c\theta_{15}s\theta_{15} + s\theta_{15}c\theta_{15} \right) \\ & + \dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 L_a L_{15} \left(s\varphi_1s\theta_1s\varphi_2c\theta_{15} - c\theta_1c\varphi_1s\theta_{15}c\varphi_2 - s\varphi_1c\theta_1c\varphi_2s\theta_{15} \right) \\ & + \dot{\phi}_1\dot{\theta}_{15} L_a L_{15} \left(s\varphi_1s\theta_1c\varphi_2s\theta_{15} - c\theta_1c\varphi_1c\theta_{15}s\varphi_2 + s\varphi_1c\theta_1c\varphi_2c\theta_{15} \right) \\ & + \dot{\theta}_{15}\dot{\phi}_2 L_a L_{15} \left(-c\varphi_1c\theta_1s\varphi_2c\theta_{15} - c\theta_1c\varphi_1s\theta_{15}c\varphi_2 - s\varphi_1s\theta_1s\varphi_2s\theta_{15} \right) \\ & + \dot{\theta}_{15}\dot{\theta}_{15} L_a L_{15} \left(-c\varphi_1c\theta_1c\varphi_2s\theta_{15} + s\theta_1s\varphi_1c\theta_{15}s\varphi_2 + c\varphi_1s\theta_1c\varphi_2c\theta_{15} \right) \\ & + \dot{\theta}_{14}\dot{\phi}_2 L_{14}L_{15} \left(-c\varphi_2c\theta_{14}s\varphi_2c\theta_{15} + s\theta_{14}s\varphi_2c\theta_{15}c\varphi_2 - c\varphi_2s\theta_{14}s\varphi_2s\theta_{15} \right) \\ & + \dot{\theta}_{14}\dot{\theta}_{15} L_{14}L_{15} \left(-c\varphi_2c\theta_{14}c\varphi_2s\theta_{15} + s\theta_{14}s\varphi_2c\theta_{15}s\varphi_2 + c\varphi_2s\theta_{14}s\varphi_2c\theta_{15} \right) \\ & \left. \left(L_{14}L_{15} \left(s\varphi_2c\varphi_2s\theta_{14}s\theta_{15} + c\theta_{14}c\varphi_2c\theta_{15}s\varphi_2 + s\varphi_2c\theta_{14}c\varphi_2c\theta_{15} \right) \right) \right. \\ & \left. + \dot{\phi}_2\dot{\theta}_{15} \left(-s\varphi_2c\varphi_2 \left(c^2\theta_{15} - s^2\theta_{15} \right) + c\varphi_2s\varphi_2 \left(c^2\theta_{15} - s^2\theta_{15} \right) \right) \right. \\ & \left. + L_{15}^2 \left(+s\varphi_2c\varphi_2 \left(c^2\theta_{15} - s^2\theta_{15} \right) \right) \right) \right) \\ & + m_{16} \left(\dot{\phi}_2^2 L_{15}^2 \left(s^2\varphi_2s\theta_{15}c\theta_{15} - c\theta_{15}s\theta_{15} \right) + \dot{\theta}_{15}^2 L_{15}^2 \left(-c^2\varphi_2c\theta_{15}s\theta_{15} + s\theta_{15}c\theta_{15} \right) \right) \\ & + m_{16} \left(\begin{aligned} & \dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 \left(L_a s\varphi_1s\varphi_2s\theta_1 \left(L_{15}c\theta_{15} \right) + L_a c\theta_1c\varphi_1c\varphi_2 \left(-L_{15}s\theta_{15} \right) \right. \\ & \left. + L_a s\varphi_1s\varphi_2s\theta_1 \left(-L_{15}s\theta_{15} \right) \right) \\ & + \dot{\phi}_1\dot{\theta}_{15} L_a L_{15} \left(s\varphi_1s\theta_1c\varphi_2s\theta_{15} - c\theta_1c\varphi_1s\theta_{15}c\varphi_2 + s\varphi_1s\theta_1c\varphi_2c\theta_{15} \right) \\ & + \dot{\theta}_{15}\dot{\phi}_2 c\varphi_1s\varphi_2 \left(-L_a c\theta_1 \left(L_{15}c\theta_{15} \right) - L_a s\theta_1 \left(-L_{15}s\theta_{15} \right) \right. \\ & \left. + L_a c\theta_1 \left(-L_{15}s\theta_{15} \right) \right) \\ & + \dot{\theta}_{15}\dot{\theta}_{15} L_a L_{15} \left(-c\varphi_1c\theta_1c\varphi_2s\theta_{15} + s\theta_1s\varphi_1c\theta_{15}s\varphi_2 - c\varphi_1c\theta_1c\varphi_2c\theta_{15} \right) \\ & + \dot{\theta}_{14}\dot{\phi}_2 c\varphi_2s\varphi_2 \left(-L_{14}c\theta_{14} \left(L_{15}c\theta_{15} \right) - L_{14}s\theta_{14} \left(-L_{15}s\theta_{15} \right) \right. \\ & \left. + L_{14}s\theta_{14} \left(-L_{15}s\theta_{15} \right) \right) \\ & + \dot{\theta}_{14}\dot{\theta}_{15} L_{14}L_{15} \left(-c^2\varphi_2c\theta_{14}s\theta_{15} + s\theta_{14}c\theta_{15} \right) \\ & + \dot{\phi}_2\dot{\theta}_{15} c\varphi_2s\varphi_2 \left(-L_{15}^2 \left(c^2\theta_{15} - s^2\theta_{15} \right) - L_{15}^2 \left(c^2\theta_{15} - s^2\theta_{15} \right) \right. \\ & \left. + L_{15}^2 \left(c^2\theta_{15} - s^2\theta_{15} \right) \right) \\ & + \dot{\phi}_2\dot{\theta}_{16} c\varphi_2s\varphi_2 \left(-L_{16}c\theta_{16} \left(L_{15}c\theta_{15} \right) - L_{16}s\theta_{16} \left(-L_{15}s\theta_{15} \right) \right. \\ & \left. - L_{16}s\theta_{16} \left(-L_{15}s\theta_{15} \right) \right) \\ & + \dot{\theta}_{15}\dot{\theta}_{16} L_{15}L_{16} \left(-c^2\varphi_2s\theta_{15}c\theta_{16} + \cos_{15} \sin_{16} \right) \end{aligned} \right) \\ & + gL_{15}c\varphi_2s\theta_{15}(m_{15} + m_{16}) \end{aligned}
\end{aligned}$$

EK-B. 34

$$\frac{\partial L_T}{\partial \dot{\theta}_{15}} = \left(\begin{array}{l} m_{15} \left(\begin{array}{l} \dot{\theta}_{15} L_{15}^2 \left(c^2 \varphi_2 c^2 \theta_{15} + s^2 \theta_{15} \right) \\ + \dot{\phi}_1 L_a L_{15} \left(-s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{15} - c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{15} s \varphi_2 + s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{15} \right) \\ + \dot{\theta}_1 L_a L_{15} \left(c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{15} + s \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{15} s \varphi_2 + c \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{15} \right) \\ + \dot{\theta}_{14} L_{14} L_{15} \left(c \varphi_2 c \theta_{14} c \varphi_2 c \theta_{15} + s \theta_{14} s \varphi_2 s \theta_{15} s \varphi_2 + c \varphi_2 s \theta_{14} s \varphi_2 s \theta_{15} \right) \end{array} \right) \\ + \dot{\phi}_2 \left(\begin{array}{l} L_{14} L_{15} \left(-s \varphi_2 c \varphi_2 s \theta_{14} c \theta_{15} + c \theta_{14} c \varphi_2 s \theta_{15} s \varphi_2 + s \varphi_2 c \theta_{14} c \varphi_2 s \theta_{15} \right) \\ + L_{15}^2 \left(-s \varphi_2 s \theta_{15} c \varphi_2 c \theta_{15} + c \theta_{15} c \varphi_2 s \theta_{15} s \varphi_2 + s \varphi_2 c \theta_{15} c \varphi_2 s \theta_{15} \right) \end{array} \right) \end{array} \right) \\ + m_{16} \left(\begin{array}{l} \dot{\theta}_{15} L_{15}^2 \left(c^2 \varphi_2 c^2 \theta_{15} + s^2 \theta_{15} \right) \\ + \dot{\phi}_1 \left(L_a L_{15} \left(-s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{15} - c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{15} s \varphi_2 + s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{15} \right) \right) \\ + \dot{\theta}_1 \left(L_a L_{15} \left(c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{15} + s \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{15} s \varphi_2 - c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{15} \right) \right) \\ + \dot{\theta}_{14} \left(L_{14} L_{15} \left(c^2 \varphi_2 c \theta_{14} c \theta_{15} + s \theta_{14} s \theta_{15} \right) \right) \\ + \dot{\phi}_2 c \varphi_2 s \varphi_2 \left(\begin{array}{l} \left(L_{15} c \theta_{15} \right) \left(-L_{14} s \theta_{14} - L_{15} s \theta_{15} - L_{16} s \theta_{16} \right) \\ - \left(L_{15} s \theta_{15} \right) \left(L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15} + L_{16} c \theta_{16} \right) \\ + \left(L_{15} s \theta_{15} \right) \left(L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15} + L_{16} c \theta_{16} \right) \end{array} \right) \\ + \dot{\theta}_{16} \left(L_{15} L_{16} \left(c^2 \varphi_2 c \theta_{15} c \theta_{16} + s \theta_{15} s \theta_{16} \right) \right) \end{array} \right) \end{array} \right)$$

EK-B. 35

$$dfi1 = \ddot{\phi}_1 \left(\begin{array}{l} m_{15} L_a L_{15} \left(-s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{15} - c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{15} s \varphi_2 + s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{15} \right) \\ + m_{16} L_a L_{15} \left(-s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{15} - c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{15} s \varphi_2 + s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{15} \right) \end{array} \right)$$

$$dfi2 = \ddot{\phi}_2 \left(\begin{array}{l} m_{15} \left(\begin{array}{l} L_{14} L_{15} \left(-s \varphi_2 c \varphi_2 s \theta_{14} c \theta_{15} + c \theta_{14} c \varphi_2 s \theta_{15} s \varphi_2 + s \varphi_2 c \theta_{14} c \varphi_2 s \theta_{15} \right) \\ + L_{15}^2 \left(-s \varphi_2 s \theta_{15} c \varphi_2 c \theta_{15} + c \theta_{15} c \varphi_2 s \theta_{15} s \varphi_2 + s \varphi_2 c \theta_{15} c \varphi_2 s \theta_{15} \right) \end{array} \right) \\ + m_{16} c \varphi_2 s \varphi_2 \left(\begin{array}{l} \left(L_{15} c \theta_{15} \right) \left(-L_{14} s \theta_{14} - L_{15} s \theta_{15} - L_{16} s \theta_{16} \right) \\ - \left(L_{15} s \theta_{15} \right) \left(L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15} + L_{16} c \theta_{16} \right) \\ + \left(L_{15} s \theta_{15} \right) \left(L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15} + L_{16} c \theta_{16} \right) \end{array} \right) \end{array} \right)$$

$$dtheta1 = \ddot{\theta}_1 \left(\begin{array}{l} m_{15} \left(L_a L_{15} \left(c\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{15} + s\theta_1 s\varphi_1 s\theta_{15} s\varphi_2 + c\varphi_1 s\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{15} \right) \right) \\ + m_{16} \left(L_a L_{15} \left(c\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{15} + s\theta_1 s\varphi_1 s\theta_{15} s\varphi_2 - c\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{15} \right) \right) \end{array} \right)$$

$$dthete14 = \ddot{\theta}_{14} \left(\begin{array}{l} m_{15} \left(L_{14} L_{15} \left(c\varphi_2 c\theta_{14} c\varphi_2 c\theta_{15} + s\theta_{14} s\varphi_2 s\theta_{15} s\varphi_2 + c\varphi_2 s\theta_{14} s\varphi_2 s\theta_{15} \right) \right) \\ + m_{16} \left(L_{14} L_{15} \left(c^2 \varphi_2 c\theta_{14} c\theta_{15} + s\theta_{14} s\theta_{15} \right) \right) \end{array} \right)$$

$$dthete15 = \ddot{\theta}_{15} \left(m_{15} L_{15}^2 \left(c^2 \varphi_2 c^2 \theta_{15} + s^2 \theta_{15} \right) + m_{16} L_{15}^2 \left(c^2 \varphi_2 c^2 \theta_{15} + s^2 \theta_{15} \right) \right)$$

$$dthete16 = \ddot{\theta}_{16} m_{16} L_{15} L_{16} \left(c^2 \varphi_2 c\theta_{15} c\theta_{16} + s\theta_{15} s\theta_{16} \right)$$

$$f\ddot{l}1 = \dot{\varphi}_1 \left(\begin{array}{l} m_{15} \left(\begin{array}{l} +\dot{\varphi}_1 L_a L_{15} \left(-c\varphi_1 s\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{15} + c\theta_1 s\varphi_1 s\theta_{15} s\varphi_2 + c\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{15} \right) \\ +\dot{\theta}_1 L_a L_{15} \left(-s\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{15} + s\theta_1 c\varphi_1 s\theta_{15} s\varphi_2 - s\varphi_1 s\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{15} \right) \end{array} \right) \\ + m_{16} \left(\begin{array}{l} +\dot{\varphi}_1 \left(L_a L_{15} \left(-c\varphi_1 s\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{15} + s\theta_1 c\varphi_1 s\theta_{15} s\varphi_2 + c\varphi_1 s\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{15} \right) \right) \\ +\dot{\theta}_1 \left(L_a L_{15} \left(-s\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{15} + c\theta_1 s\varphi_1 s\theta_{15} s\varphi_2 + s\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{15} \right) \right) \end{array} \right) \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{l} m_{15} \left(\begin{array}{l} +\dot{\phi}_1 L_a L_{15} \left(s\varphi_1 s\theta_1 s\varphi_2 c\theta_{15} - c\theta_1 c\varphi_1 s\theta_{15} c\varphi_2 - s\varphi_1 c\theta_1 s\varphi_2 s\theta_{15} \right) \\ +\dot{\theta}_1 L_a L_{15} \left(-c\varphi_1 c\theta_1 s\varphi_2 c\theta_{15} + s\theta_1 s\varphi_1 s\theta_{15} c\varphi_2 - c\varphi_1 s\theta_1 s\varphi_2 s\theta_{15} \right) \\ +\dot{\theta}_{14} L_{14} L_{15} \left(-2c\theta_{14} c\theta_{15} c\varphi_2 s\varphi_2 + 2s\theta_{14} s\theta_{15} s\varphi_2 c\varphi_2 + s\theta_{14} s\theta_{15} \left(c^2\varphi_2 - s^2\varphi_2 \right) \right) \\ \left(\begin{array}{l} L_{14} L_{15} \left(\begin{array}{l} -s\theta_{14} c\theta_{15} \left(c^2\varphi_2 - s^2\varphi_2 \right) + c\theta_{14} s\theta_{15} \left(c^2\varphi_2 - s^2\varphi_2 \right) \end{array} \right) \\ +c\theta_{14} s\theta_{15} \left(c^2\varphi_2 - s^2\varphi_2 \right) \end{array} \right) \\ +\dot{\phi}_2 \left(\begin{array}{l} -s\theta_{15} c\theta_{15} \left(c^2\varphi_2 - s^2\varphi_2 \right) + c\theta_{14} s\theta_{15} \left(c^2\varphi_2 - s^2\varphi_2 \right) \\ +L_{15}^2 \left(\begin{array}{l} -s\theta_{15} c\theta_{15} \left(c^2\varphi_2 - s^2\varphi_2 \right) + c\theta_{14} s\theta_{15} \left(c^2\varphi_2 - s^2\varphi_2 \right) \\ +c\theta_{15} s\theta_{15} \left(c^2\varphi_2 - s^2\varphi_2 \right) \end{array} \right) \end{array} \right) \end{array} \right) \\
fi2 = \dot{\phi}_2 + m_{16} \dot{\theta}_{15} L_{15}^2 \left(-2c\varphi_2 s\varphi_2 c^2\theta_{15} + s^2\theta_{15} \right) \\
+ m_{16} \left(\begin{array}{l} +\dot{\phi}_1 \left(L_a L_{15} \left(s\varphi_1 s\theta_1 s\varphi_2 c\theta_{15} - c\theta_1 c\varphi_1 s\theta_{15} c\varphi_2 - s\varphi_1 s\theta_1 s\varphi_2 s\theta_{15} \right) \right) \\ +\dot{\theta}_1 \left(L_a L_{15} \left(-c\varphi_1 c\theta_1 s\varphi_2 c\theta_{15} + s\theta_1 s\varphi_1 s\theta_{15} c\varphi_2 + c\varphi_1 c\theta_1 s\varphi_2 s\theta_{15} \right) \right) \\ +\dot{\theta}_{14} \left(L_{14} L_{15} \left(-2c\varphi_2 s\varphi_2 c\theta_{14} c\theta_{15} \right) \right) \\ +\dot{\phi}_2 \left(c^2\varphi_2 - s^2\varphi_2 \right) \left(\begin{array}{l} \left(L_{15} c\theta_{15} \right) \left(-L_{14} s\theta_{14} - L_{15} s\theta_{15} - L_{16} s\theta_{16} \right) \\ - \left(L_{15} s\theta_{15} \right) \left(L_{14} c\theta_{14} + L_{15} c\theta_{15} + L_{16} c\theta_{16} \right) \\ + \left(L_{15} s\theta_{15} \right) \left(L_{14} c\theta_{14} + L_{15} c\theta_{15} + L_{16} c\theta_{16} \right) \end{array} \right) \\ +\dot{\theta}_{16} \left(L_{15} L_{16} \left(-2c\varphi_2 s\varphi_2 c\theta_{15} c\theta_{16} \right) \right) \end{array} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
thete1 = \dot{\theta}_1 & \left(\begin{array}{l} m_{15} \left(\begin{array}{l} +\dot{\phi}_1 L_a L_{15} \left(-s\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{15} + s\theta_1 c\varphi_1 s\theta_{15} s\varphi_2 - s\varphi_1 s\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{15} \right) \\ +\dot{\theta}_1 L_a L_{15} \left(-c\varphi_1 s\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{15} + c\theta_1 s\varphi_1 s\theta_{15} s\varphi_2 + c\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{15} \right) \end{array} \right) \\ +m_{16} \left(\begin{array}{l} +\dot{\phi}_1 \left(L_a L_{15} \left(-s\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{15} + s\theta_1 c\varphi_1 s\theta_{15} s\varphi_2 + s\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{15} \right) \right) \\ +\dot{\theta}_1 \left(L_a L_{15} \left(-c\varphi_1 s\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{15} + c\theta_1 s\varphi_1 s\theta_{15} s\varphi_2 + c\varphi_1 s\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{15} \right) \right) \end{array} \right) \end{array} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
thete14 = \dot{\theta}_{14} & \left(\begin{array}{l} m_{15} \left(\begin{array}{l} +\dot{\theta}_{14} L_{14} L_{15} \left(-c\varphi_2 s\theta_{14} c\varphi_2 c\theta_{15} + c\theta_{14} s\varphi_2 s\theta_{15} s\varphi_2 + c\varphi_2 c\theta_{14} s\varphi_2 s\theta_{15} \right) \\ +\dot{\phi}_2 \left(L_{14} L_{15} \left(-s\varphi_2 c\varphi_2 c\theta_{14} c\theta_{15} - s\theta_{14} c\varphi_2 s\theta_{15} s\varphi_2 - s\varphi_2 s\theta_{14} c\varphi_2 s\theta_{15} \right) \right) \end{array} \right) \\ +m_{16} \left(\begin{array}{l} \dot{\theta}_{14} \left(L_{14} L_{15} \left(-c^2\varphi_2 s\theta_{14} c\theta_{15} + c\theta_{14} s\theta_{15} \right) \right) \\ +\dot{\phi}_2 c\varphi_2 s\varphi_2 \left(\begin{array}{l} -L_{14} L_{15} c\theta_{15} c\theta_{14} \\ +L_{14} L_{15} s\theta_{14} s\theta_{15} \\ -L_{14} L_{15} s\theta_{15} s\theta_{14} \end{array} \right) \end{array} \right) \end{array} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{thete15} = \dot{\theta}_{15} & \left(\begin{aligned} & m_{15} \left(\begin{aligned} & \dot{\theta}_{15} L_{15}^2 \left(-2c^2 \varphi_2 c \theta_{15} s \theta_{15} + 2s \theta_{15} c \theta_{15} \right) \\ & + \dot{\varphi}_1 L_a L_{15} \left(s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{15} - c \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{15} s \varphi_2 + s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{15} \right) \\ & + \dot{\theta}_1 L_a L_{15} \left(-c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{15} + s \theta_1 s \varphi_1 c \theta_{15} s \varphi_2 + c \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{15} \right) \\ & + \dot{\theta}_{14} L_{14} L_{15} \left(-c \varphi_2 c \theta_{14} c \varphi_2 s \theta_{15} + s \theta_{14} s \varphi_2 c \theta_{15} s \varphi_2 + c \varphi_2 s \theta_{14} s \varphi_2 c \theta_{15} \right) \\ & + \dot{\varphi}_2 \left(\begin{aligned} & L_{14} L_{15} \left(s \varphi_2 c \varphi_2 s \theta_{14} s \theta_{15} + c \theta_{14} c \varphi_2 c \theta_{15} s \varphi_2 + s \varphi_2 c \theta_{14} c \varphi_2 c \theta_{15} \right) \\ & + L_{15}^2 \left(-s \varphi_2 c \varphi_2 \left(c^2 \theta_{15} - s^2 \theta_{15} \right) + c \varphi_2 s \varphi_2 \left(c^2 \theta_{15} - s^2 \theta_{15} \right) \right) \\ & + s \varphi_2 c \varphi_2 \left(c^2 \theta_{15} - s^2 \theta_{15} \right) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \\ & + m_{16} \dot{\theta}_{15} L_{15}^2 \left(-2c^2 \varphi_2 c \theta_{15} s \theta_{15} + 2s \theta_{15} c \theta_{15} \right) \\ & + m_{16} \left(\begin{aligned} & \dot{\varphi}_1 \left(L_a L_{15} \left(s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{15} - c \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{15} s \varphi_2 + s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{15} \right) \right) \\ & + \dot{\theta}_1 \left(L_a L_{15} \left(-c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{15} + s \theta_1 s \varphi_1 c \theta_{15} s \varphi_2 - c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{15} \right) \right) \\ & + \dot{\theta}_{14} \left(L_{14} L_{15} \left(-c^2 \varphi_2 c \theta_{14} s \theta_{15} + s \theta_{14} c \theta_{15} \right) \right) \\ & + \dot{\varphi}_2 c \varphi_2 s \varphi_2 \left(\begin{aligned} & -L_{15}^2 \left(c^2 \theta_{15} - s^2 \theta_{15} \right) - \left(L_{15} s \theta_{15} \right) \left(-L_{14} s \theta_{14} - L_{16} s \theta_{16} \right) \\ & -L_{15}^2 \left(c^2 \theta_{15} - s^2 \theta_{15} \right) - \left(L_{15} c \theta_{15} \right) \left(L_{14} c \theta_{14} + L_{16} c \theta_{16} \right) \\ & + L_{15}^2 \left(c^2 \theta_{15} - s^2 \theta_{15} \right) + \left(L_{15} c \theta_{15} \right) \left(L_{14} c \theta_{14} + L_{16} c \theta_{16} \right) \end{aligned} \right) \\ & + \dot{\theta}_{16} \left(L_{15} L_{16} \left(-c^2 \varphi_2 s \theta_{15} c \theta_{16} + c \theta_{15} s \theta_{16} \right) \right) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right)
\end{aligned}$$

$$\text{thete16} = \dot{\theta}_{16} \left(m_{16} \left(\begin{aligned} & + \dot{\varphi}_2 c \varphi_2 s \varphi_2 \left(\begin{aligned} & \left(L_{15} c \theta_{15} \right) \left(-L_{16} c \theta_{16} \right) - \left(L_{15} s \theta_{15} \right) \left(-L_{16} s \theta_{16} \right) \\ & + \left(L_{15} s \theta_{15} \right) \left(-L_{16} s \theta_{16} \right) \end{aligned} \right) \right) \\ & + \dot{\theta}_{16} \left(L_{15} L_{16} \left(-c^2 \varphi_2 c \theta_{15} s \theta_{16} + s \theta_{15} c \theta_{16} \right) \right) \end{aligned} \right) \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_T}{\partial \dot{\theta}_{15}} \right) = \begin{pmatrix} d\dot{f}_1 + d\dot{f}_2 + d\text{thete1} + d\text{thete14} + d\text{thete15} + d\text{thete16} \\ \dot{f}_1 + \dot{f}_2 + \text{thete1} + \text{thete14} + \text{thete15} + \text{thete16} \end{pmatrix}$$

EK-B. 36

$$\frac{\partial L_T}{\partial \theta_{16}} = \left(\begin{array}{l} m_{16} \left(\begin{array}{l} \dot{\phi}_2^2 L_{16}^2 \left(s^2 \varphi_2 s \theta_{16} c \theta_{16} - c \theta_{16} s \theta_{16} \right) \\ + \dot{\theta}_{16}^2 L_{16}^2 \left(-c^2 \varphi_2 c \theta_{16} s \theta_{16} + s \theta_{16} c \theta_{16} \right) \end{array} \right) \\ + m_{16} \left(\begin{array}{l} \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \left(\begin{array}{l} L_a s \varphi_1 s \varphi_2 s \theta_1 \left(L_{16} c \theta_{16} \right) + L_a c \theta_1 c \varphi_1 c \varphi_2 \left(-L_{16} s \theta_{16} \right) \\ + L_a s \varphi_1 s \varphi_2 s \theta_1 \left(-L_{16} s \theta_{16} \right) \end{array} \right) \\ + \dot{\phi}_1 \dot{\theta}_{16} L_a L_{16} \left(s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{16} - c \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{16} s \varphi_2 + s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{16} \right) \\ + \dot{\theta}_1 \dot{\phi}_2 c \varphi_1 s \varphi_2 \left(\begin{array}{l} -L_a c \theta_1 \left(L_{16} c \theta_{16} \right) - L_a s \theta_1 \left(-L_{16} s \theta_{16} \right) \\ - L_a c \theta_1 \left(-L_{16} s \theta_{16} \right) \end{array} \right) \\ + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_{16} L_a L_{16} \left(-c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{16} + s \theta_1 s \varphi_1 c \theta_{16} s \varphi_2 - c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{16} \right) \\ + \dot{\theta}_{14} \dot{\phi}_2 c \varphi_2 s \varphi_2 \left(\begin{array}{l} -L_{14} c \theta_{14} \left(L_{16} c \theta_{16} \right) - L_{14} s \theta_{14} \left(-L_{16} s \theta_{16} \right) \\ + L_{14} s \theta_{14} \left(-L_{16} s \theta_{16} \right) \end{array} \right) \\ + \dot{\theta}_{14} \dot{\theta}_{16} L_{14} L_{16} \left(-c^2 \varphi_2 c \theta_{14} s \theta_{16} + s \theta_{14} c \theta_{16} \right) \\ + \dot{\phi}_2 \dot{\theta}_{15} c \varphi_2 s \varphi_2 \left(\begin{array}{l} -L_{15} c \theta_{15} \left(L_{16} c \theta_{16} \right) - L_{15} s \theta_{15} \left(-L_{16} s \theta_{16} \right) \\ + L_{15} s \theta_{15} \left(-L_{16} s \theta_{16} \right) \end{array} \right) \\ + \dot{\phi}_2 \dot{\theta}_{16} c \varphi_2 s \varphi_2 \left(-L_{16}^2 \left(c^2 \theta_{16} - s^2 \theta_{16} \right) \left(\begin{array}{l} L_{16} s \theta_{16} \left(L_{14} s \theta_{14} + L_{15} s \theta_{15} \right) \\ - L_{16} c \theta_{16} \left(L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15} \right) \\ - L_{16} c \theta_{16} \left(-L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15} \right) \end{array} \right) \right) \\ + \dot{\theta}_{15} \dot{\theta}_{16} L_{15} L_{16} \left(-c^2 \varphi_2 c \theta_{15} s \theta_{16} + s \theta_{15} c \theta_{16} \right) \end{array} \right) \\ + m_{16} g c \varphi_2 s \theta_{16} \end{array} \right)$$

EK-B. 37

$$\frac{\partial L_T}{\partial \dot{\theta}_{16}} = m_{16} \left(\begin{array}{l} \dot{\theta}_{16} L_{16}^2 \left(c^2 \varphi_2 c^2 \theta_{16} + s^2 \theta_{16} \right) \\ \dot{\phi}_1 L_a L_{16} \left(-s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{16} - c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{16} s \varphi_2 + s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{16} \right) \\ + \dot{\theta}_1 L_a L_{16} \left(c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{16} + s \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{16} s \varphi_2 - c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{16} \right) \\ + \dot{\theta}_{14} L_{14} L_{16} \left(c^2 \varphi_2 c \theta_{14} c \theta_{16} + s \theta_{14} s \theta_{16} \right) \\ + \dot{\phi}_2 c \varphi_2 s \varphi_2 \left(\begin{array}{l} L_{16} c \theta_{16} \left(-L_{14} s \theta_{14} - L_{15} s \theta_{15} - L_{16} s \theta_{16} \right) \\ - L_{16} s \theta_{16} \left(L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15} + L_{16} c \theta_{16} \right) \\ - L_{16} s \theta_{16} \left(-L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15} + L_{16} c \theta_{16} \right) \end{array} \right) \\ + \dot{\theta}_{15} L_{15} L_{16} \left(c^2 \varphi_2 c \theta_{15} c \theta_{16} + s \theta_{15} s \theta_{16} \right) \end{array} \right)$$

EK-B. 38

$$dfi1 = \ddot{\phi}_1 m_{16} L_a L_{16} \left(-s\phi_1 s\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{16} - c\theta_1 c\phi_1 s\theta_{16} s\varphi_2 + s\phi_1 s\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{16} \right)$$

$$dfi2 = \ddot{\phi}_2 m_{16} c\varphi_2 s\varphi_2 \left[\begin{array}{l} \left(L_{16} c\theta_{16} \right) \left(-L_{14} s\theta_{14} - L_{15} s\theta_{15} - L_{16} s\theta_{16} \right) \\ - \left(L_{16} s\theta_{16} \right) \left(L_{14} c\theta_{14} + L_{15} c\theta_{15} + L_{16} c\theta_{16} \right) \\ - \left(L_{16} s\theta_{16} \right) \left(-L_{14} c\theta_{14} + L_{15} c\theta_{15} + L_{16} c\theta_{16} \right) \end{array} \right]$$

$$dtheta1 = m_{16} \ddot{\theta}_1 L_a L_{16} \left(c\phi_1 c\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{16} + s\theta_1 s\phi_1 s\theta_{16} s\varphi_2 - c\phi_1 c\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{16} \right)$$

$$dtheta14 = \ddot{\theta}_{14} m_{16} L_{14} L_{16} \left(c^2 \varphi_2 c\theta_{14} c\theta_{16} + s\theta_{14} s\theta_{16} \right)$$

$$dtheta15 = \ddot{\theta}_{15} m_{16} L_{15} L_{16} \left(c^2 \varphi_2 c\theta_{15} c\theta_{16} + s\theta_{15} s\theta_{16} \right)$$

$$dtheta16 = m_{16} \ddot{\theta}_{16} L_{16}^2 \left(c^2 \varphi_2 c^2 \theta_{16} + s^2 \theta_{16} \right)$$

$$fi1 = \dot{\phi}_1 m_{16} \left(\dot{\phi}_1 L_a L_{16} \left(-c\phi_1 s\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{16} + c\theta_1 s\phi_1 s\theta_{16} s\varphi_2 + c\phi_1 s\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{16} \right) + \dot{\phi}_1 L_a L_{16} \left(-s\phi_1 c\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{16} + s\theta_1 c\phi_1 s\theta_{16} s\varphi_2 - s\phi_1 c\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{16} \right) \right)$$

$$fi2 = \dot{\phi}_2 m_{16} \left(\begin{array}{l} \dot{\theta}_{16} L_{16}^2 \left(-2c\varphi_2 s\varphi_2 c^2 \theta_{16} \right) \\ + \dot{\phi}_1 L_a L_{16} \left(s\phi_1 s\theta_1 s\varphi_2 c\theta_{16} - c\theta_1 c\phi_1 s\theta_{16} c\varphi_2 - s\phi_1 s\theta_1 s\varphi_2 s\theta_{16} \right) \\ + \dot{\theta}_1 L_a L_{16} \left(-c\phi_1 c\theta_1 s\varphi_2 c\theta_{16} + s\theta_1 s\phi_1 s\theta_{16} c\varphi_2 + c\phi_1 c\theta_1 s\varphi_2 s\theta_{16} \right) \\ + \dot{\theta}_{14} L_{14} L_{16} \left(-2c\varphi_2 s\varphi_2 c\theta_{14} c\theta_{16} \right) \\ + \dot{\phi}_2 \left(c^2 \varphi_2 - s^2 \varphi_2 \right) \left[\begin{array}{l} \left(L_{16} c\theta_{16} \right) \left(-L_{14} s\theta_{14} - L_{15} s\theta_{15} - L_{16} s\theta_{16} \right) \\ - \left(L_{16} s\theta_{16} \right) \left(L_{14} c\theta_{14} + L_{15} c\theta_{15} + L_{16} c\theta_{16} \right) \\ - \left(L_{16} s\theta_{16} \right) \left(-L_{14} c\theta_{14} + L_{15} c\theta_{15} + L_{16} c\theta_{16} \right) \end{array} \right] \\ + \dot{\theta}_{15} L_{15} L_{16} \left(-2c\varphi_2 s\varphi_2 c\theta_{15} c\theta_{16} \right) \end{array} \right)$$

$$theta1 = m_{16} \dot{\theta}_1 \left(\dot{\phi}_1 L_a L_{16} \left(-s\phi_1 c\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{16} + s\theta_1 c\phi_1 s\theta_{16} s\varphi_2 + s\phi_1 c\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{16} \right) + \dot{\theta}_1 L_a L_{16} \left(-c\phi_1 s\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{16} + c\theta_1 s\phi_1 s\theta_{16} s\varphi_2 + c\phi_1 s\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{16} \right) \right)$$

$$theta14 = \dot{\theta}_{14} m_{16} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_{14} L_{14} L_{16} \left(-c^2 \varphi_2 s \theta_{14} c \theta_{16} + c \theta_{14} s \theta_{16} \right) \\ -\dot{\varphi}_2 c \varphi_2 s \varphi_2 L_{14} L_{16} c \theta_{14} c \theta_{16} \end{pmatrix}$$

$$theta15 = \dot{\theta}_{15} m_{16} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_2 c \varphi_2 s \varphi_2 \left(-L_{15} L_{16} c \theta_{15} c \theta_{16} + 2 L_{15} L_{16} s \theta_{16} s \theta_{15} \right) \\ + \dot{\theta}_{15} L_{15} L_{16} \left(-c^2 \varphi_2 s \theta_{15} c \theta_{16} + c \theta_{15} s \theta_{16} \right) \end{pmatrix}$$

$$theta16 = \dot{\theta}_{16} m_{16} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_{16} L_{16}^2 (-2 c^2 \varphi_2 c \theta_{16} s \theta_{16} + s \theta_{16} c \theta_{16}) \\ \dot{\varphi}_1 L_a L_{16} \left(s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{16} - c \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{16} s \varphi_2 + s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{16} \right) \\ + \dot{\theta}_1 L_a L_{16} \left(-c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{16} + s \theta_1 s \varphi_1 c \theta_{16} s \varphi_2 - c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{16} \right) \\ + \dot{\theta}_{14} L_{14} L_{16} \left(-c^2 \varphi_2 c \theta_{14} s \theta_{16} + s \theta_{14} c \theta_{16} \right) \\ - \dot{\varphi}_2 c \varphi_2 s \varphi_2 L_{16}^2 \left(c^2 \theta_{16} - s^2 \theta_{16} \right) \begin{pmatrix} -L_{16} s \theta_{16} (-L_{14} s \theta_{14} - L_{15} s \theta_{15}) \\ -L_{16} c \theta_{16} (L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15}) \\ -L_{16} c \theta_{16} (-L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15}) \end{pmatrix} \\ + \dot{\theta}_{15} L_{15} L_{16} \left(-c^2 \varphi_2 c \theta_{15} s \theta_{16} + s \theta_{15} c \theta_{16} \right) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial L_T}{\partial \varphi_2} = \left(\begin{array}{l} m_{14} \left(\begin{array}{l} -\dot{\theta}_{14}^2 L_{14}^2 c \varphi_2 s \varphi_2 c^2 \theta_{14} + \dot{\varphi}_2^2 L_{14}^2 s \varphi_2 c \varphi_2 s^2 \theta_{14} + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{14} L_a L_{14} (-s \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{14} + c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{14} c \varphi_2 - s \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{14}) \\ + \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 L_a L_{14} (s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14} + c \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{14} s \varphi_2 - s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14}) \\ + \dot{\theta}_{14} \dot{\theta}_{14} L_a L_{14} (-c \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{14} + s \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{14} c \varphi_2 - c \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{14}) \\ + \dot{\theta}_{14} \dot{\varphi}_2 L_a L_{14} (-c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14} + s \theta_1 s \varphi_1 c \theta_{14} s \varphi_2 + c \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14}) - \dot{\theta}_{14} \dot{\varphi}_2 L_{14}^2 c \theta_{14} s \theta_{14} (c^2 \varphi_2 - s^2 \varphi_2) \end{array} \right) \\ + m_{15} \left(\begin{array}{l} -\dot{\theta}_{14}^2 L_{14}^2 c \varphi_2 s \varphi_2 c^2 \theta_{14} \\ + \dot{\varphi}_2^2 \left(L_{14}^2 (-c^2 \theta_{14} c \varphi_2 s \varphi_2) + L_{15}^2 (-c^2 \theta_{15} c \varphi_2 s \varphi_2) \right. \\ \left. + L_{14} L_{15} (s \varphi_2 c \varphi_2 s \theta_{14} s \theta_{15} - c \varphi_2 s \varphi_2 c \theta_{14} c \theta_{15} + s \varphi_2 c \varphi_2 c \theta_{14} c \theta_{15}) \right) \\ - \dot{\theta}_{15}^2 L_{15}^2 c \varphi_2 s \varphi_2 c^2 \theta_{15} \\ + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{14} L_a L_{14} (s \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{14} - c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{14} c \varphi_2 - s \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{14}) \\ + \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \left(L_a L_{14} (-s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14} - c \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{14} s \varphi_2 + s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14}) \right. \\ \left. + L_a L_{15} (s \varphi_1 s \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{15} - c \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{15} s \varphi_2 - s \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{15}) \right) \\ + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{15} L_a L_{15} (s \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{15} - c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{15} c \varphi_2 - s \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{15}) \\ + \dot{\theta}_{14} \dot{\theta}_{14} L_a L_{14} (-c \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{14} + s \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{14} c \varphi_2 - c \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{14}) \\ + \dot{\theta}_{14} \dot{\varphi}_2 \left(L_a L_{14} (-c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{14} - c \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{14} s \varphi_2 + s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{14}) \right. \\ \left. + L_a L_{15} (-c \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 s \theta_{15} - c \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{15} s \varphi_2 + s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{15}) \right) \\ + \dot{\theta}_{14} \dot{\theta}_{15} L_a L_{15} (-c \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{15} + s \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{15} c \varphi_2 - c \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{15}) \\ + \dot{\theta}_{14} \dot{\varphi}_2 L_{14} \left(L_{14} (c^2 \varphi_2 - s^2 \varphi_2) (-c \theta_{14} s \theta_{14} - s \theta_{14} c \theta_{14} + s \theta_{14} c \theta_{14}) \right. \\ \left. + L_{15} (c^2 \varphi_2 - s^2 \varphi_2) (-c \theta_{14} s \theta_{15} + s \theta_{14} s \theta_{15} + s \theta_{14} c \theta_{15}) \right) \\ + \dot{\theta}_{14} \dot{\theta}_{15} L_{14} L_{15} (-2 c \theta_{14} c \theta_{15} c \varphi_2 s \varphi_2 + 2 s \theta_{14} s \theta_{15} s \varphi_2 c \varphi_2 + 2 s \theta_{14} s \theta_{15} c \varphi_2 s \varphi_2) \\ + \dot{\varphi}_2 \dot{\theta}_{15} \left(L_{14} L_{15} (c^2 \varphi_2 - s^2 \varphi_2) (-s \theta_{14} c \theta_{15} + c \theta_{14} s \theta_{15} + c \theta_{14} s \theta_{15}) \right. \\ \left. + L_{15}^2 (c^2 \varphi_2 - s^2 \varphi_2) (-s \theta_{15} c \theta_{15} + c \theta_{14} s \theta_{15} + c \theta_{15} s \theta_{15}) \right) \end{array} \right) \\ + m_{16} \left(\begin{array}{l} -\dot{\theta}_{14}^2 L_{14}^2 c \varphi_2 s \varphi_2 c^2 \theta_{14} + \dot{\varphi}_2^2 s \varphi_2 c \varphi_2 (L_{14}^2 s^2 \theta_{14} + L_{15}^2 s^2 \theta_{15} + L_{16}^2 s^2 \theta_{16}) \\ - \dot{\theta}_{15}^2 L_{15}^2 c \varphi_2 s \varphi_2 c^2 \theta_{15} - \dot{\theta}_{16}^2 L_{16}^2 c \varphi_2 s \varphi_2 c^2 \theta_{16} \\ \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{14} L_a L_{14} (-c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{14} c \varphi_2) \\ + \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \left(-L_a s \varphi_1 c \varphi_2 s \theta_1 (-L_{14} s \theta_{14} - L_{15} s \theta_{15} - L_{16} s \theta_{16}) - L_a c \theta_1 s \varphi_1 s \varphi_2 (L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15} + L_{16} c \theta_{16}) \right. \\ \left. - L_a s \varphi_1 c \varphi_2 s \theta_1 (-L_{14} c \theta_{14} - L_{15} c \theta_{15} - L_{16} c \theta_{16}) \right) \\ + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{15} L_a L_{15} (s \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{15} - c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{15} c \varphi_2 - s \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{15}) \\ + \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_{16} L_a L_{16} (s \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{16} - c \theta_1 c \varphi_1 s \theta_{16} c \varphi_2 + s \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{16}) \\ + \dot{\theta}_{14} \dot{\theta}_{14} L_a L_{14} (-c \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{14} + s \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{14} c \varphi_2 - c \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{14}) \\ + \dot{\theta}_{14} \dot{\varphi}_2 c \varphi_1 c \varphi_2 \left(-L_a c \theta_1 (L_{14} s \theta_{14} + L_{15} s \theta_{15} + L_{16} s \theta_{16}) - L_a s \theta_1 (L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15} + L_{16} c \theta_{16}) \right. \\ \left. + L_a c \theta_1 (-L_{14} c \theta_{14} - L_{15} c \theta_{15} - L_{16} c \theta_{16}) \right) \\ + \dot{\theta}_{14} \dot{\theta}_{15} L_a L_{15} (-c \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{15} + s \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{15} c \varphi_2 + c \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{15}) \\ + \dot{\theta}_{14} \dot{\theta}_{16} L_a L_{16} (-c \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{16} + s \theta_1 s \varphi_1 s \theta_{16} c \varphi_2 + c \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{16}) \\ + \dot{\theta}_{14} \dot{\varphi}_2 (c^2 \varphi_2 - s^2 \varphi_2) \left(-L_{14} c \theta_{14} (L_{14} s \theta_{14} + L_{15} s \theta_{15} + L_{16} s \theta_{16}) - L_{14} s \theta_{14} (L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15} + L_{16} c \theta_{16}) \right. \\ \left. + L_{14} s \theta_{14} (L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15} + L_{16} c \theta_{16}) \right) \\ - 2 \dot{\theta}_{14} \dot{\theta}_{15} L_{14} L_{15} c \varphi_2 s \varphi_2 c \theta_{14} c \theta_{15} - 2 \dot{\theta}_{14} \dot{\theta}_{16} L_{14} L_{16} c \varphi_2 s \varphi_2 c \theta_{14} c \theta_{16} \\ + \dot{\varphi}_2 \dot{\theta}_{15} (c^2 \varphi_2 - s^2 \varphi_2) \left(-L_{15} c \theta_{15} (L_{14} s \theta_{14} + L_{15} s \theta_{15} + L_{16} s \theta_{16}) - L_{15} s \theta_{15} (L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15} + L_{16} c \theta_{16}) \right. \\ \left. + L_{15} s \theta_{15} (L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15} + L_{16} c \theta_{16}) \right) \\ + \dot{\varphi}_2 \dot{\theta}_{16} (c^2 \varphi_2 - s^2 \varphi_2) \left(-L_{16} c \theta_{16} (L_{14} s \theta_{14} + L_{15} s \theta_{15} + L_{16} s \theta_{16}) - L_{16} s \theta_{16} (L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15} + L_{16} c \theta_{16}) \right. \\ \left. + L_{16} s \theta_{16} (-L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15} + L_{16} c \theta_{16}) \right) \\ - 2 \dot{\theta}_{15} \dot{\theta}_{16} L_{15} L_{16} c \varphi_2 s \varphi_2 c \theta_{15} c \theta_{16} \end{array} \right) \\ + g s \varphi_2 (L_{14} c \theta_{14} (m_{14} + m_{15} + m_{16}) + L_{15} c$$

EK-B. 40

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_T}{\partial \dot{\phi}_2} = & \left(\begin{array}{l} m_{14} \left(\begin{array}{l} \dot{\phi}_2 L_{14}^2 \left(s^2 \varphi_2 s^2 \theta_{14} + c^2 \theta_{14} \right) \\ \dot{\phi}_1 L_a L_{14} \left(s \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{14} - c \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{14} c \varphi_2 + s \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{14} \right) \\ + \dot{\theta}_1 L_a L_{14} \left(-c \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{14} - s \theta_1 s \varphi_1 c \theta_{14} c \varphi_2 + c \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{14} \right) \\ - \dot{\theta}_{14} L_{14}^2 c \varphi_2 c \theta_{14} s \varphi_2 s \theta_{14} \end{array} \right) \\ \\ + m_{15} \left(\begin{array}{l} \dot{\phi}_2 \left(\begin{array}{l} L_{14}^2 \left(c^2 \theta_{14} c^2 \varphi_2 + s^2 \theta_{14} \right) + L_{15}^2 \left(c^2 \theta_{15} c^2 \varphi_2 + c^2 \theta_{15} \right) \\ + L_{14} L_{15} \left(s^2 \varphi_2 s \theta_{14} s \theta_{15} + c^2 \varphi_2 c \theta_{14} c \theta_{15} + s^2 \varphi_2 c \theta_{14} c \theta_{15} \right) \end{array} \right) \\ + \dot{\phi}_1 \left(\begin{array}{l} L_a L_{14} \left(-s \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{14} + c \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{14} c \varphi_2 + s \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{14} \right) \\ + L_a L_{15} \left(s \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{15} + c \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{15} c \varphi_2 + s \varphi_1 c \theta_1 c \varphi_2 c \theta_{15} \right) \\ + \dot{\theta}_1 \left(\begin{array}{l} L_a L_{14} \left(-c \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{14} + c \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{14} c \varphi_2 + s \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{14} \right) \\ + L_a L_{15} \left(-c \varphi_1 c \theta_1 s \varphi_2 s \theta_{15} + c \theta_1 c \varphi_1 c \theta_{15} c \varphi_2 + s \varphi_1 s \theta_1 s \varphi_2 c \theta_{15} \right) \end{array} \right) \end{array} \right) \\ + \dot{\theta}_{14} L_{14} \left(\begin{array}{l} L_{14} \left(-c \varphi_2 c \theta_{14} s \varphi_2 s \theta_{14} - s \theta_{14} s \varphi_2 c \theta_{14} c \varphi_2 + c \varphi_2 s \theta_{14} s \varphi_2 c \theta_{14} \right) \\ + L_{15} \left(-c \varphi_2 c \theta_{14} s \varphi_2 s \theta_{15} + s \theta_{14} s \varphi_2 c \varphi_2 s \theta_{15} + c \varphi_2 s \theta_{14} s \varphi_2 c \theta_{15} \right) \end{array} \right) \end{array} \right) \\ \\ + \dot{\phi}_2 m_{16} \left(\begin{array}{l} L_{14}^2 \left(s^2 \varphi_2 s^2 \theta_{14} + c^2 \theta_{14} \right) + L_{15}^2 \left(s^2 \varphi_2 s^2 \theta_{15} + c^2 \theta_{15} \right) \\ + L_{16}^2 \left(s^2 \varphi_2 s^2 \theta_{16} + c^2 \theta_{16} \right) \end{array} \right) \\ \\ + m_{16} \left(\begin{array}{l} \dot{\phi}_1 \left(\begin{array}{l} L_a s \varphi_1 s \varphi_2 s \theta_1 \left(L_{14} s \theta_{14} + L_{15} s \theta_{15} + L_{16} s \theta_{16} \right) \\ + L_a c \theta_1 c \varphi_1 c \varphi_2 \left(L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15} + L_{16} c \theta_{16} \right) \\ + L_a s \varphi_1 s \varphi_2 s \theta_1 \left(L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15} + L_{16} c \theta_{16} \right) \end{array} \right) \\ + \dot{\theta}_1 c \varphi_1 s \varphi_2 \left(\begin{array}{l} -L_a c \theta_1 \left(L_{14} s \theta_{14} + L_{15} s \theta_{15} + L_{16} s \theta_{16} \right) \\ -L_a s \theta_1 \left(L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15} + L_{16} c \theta_{16} \right) \\ -L_a c \theta_1 \left(L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15} + L_{16} c \theta_{16} \right) \end{array} \right) \\ + \dot{\theta}_{14} c \varphi_2 s \varphi_2 \left(\begin{array}{l} -L_{14} c \theta_{14} \left(L_{14} s \theta_{14} + L_{15} s \theta_{15} + L_{16} s \theta_{16} \right) \\ -L_{14} s \theta_{14} \left(L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15} + L_{16} c \theta_{16} \right) \\ + L_{14} s \theta_{14} \left(L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15} + L_{16} c \theta_{16} \right) \end{array} \right) \\ + \dot{\theta}_{15} c \varphi_2 s \varphi_2 \left(\begin{array}{l} -L_{15} c \theta_{15} \left(L_{14} s \theta_{14} + L_{15} s \theta_{15} + L_{16} s \theta_{16} \right) \\ -L_{15} s \theta_{15} \left(L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15} + L_{16} c \theta_{16} \right) \\ + L_{15} s \theta_{15} \left(L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15} + L_{16} c \theta_{16} \right) \end{array} \right) \\ + \dot{\theta}_{16} c \varphi_2 s \varphi_2 \left(\begin{array}{l} -L_{16} c \theta_{16} \left(L_{14} s \theta_{14} + L_{15} s \theta_{15} + L_{16} s \theta_{16} \right) \\ -L_{16} s \theta_{16} \left(L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15} + L_{16} c \theta_{16} \right) \\ -L_{16} s \theta_{16} \left(-L_{14} c \theta_{14} + L_{15} c \theta_{15} + L_{16} c \theta_{16} \right) \end{array} \right) \end{array} \right) \end{array} \right)
\end{aligned}$$

EK-B. 41

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_T}{\partial \dot{\phi}_2} \right) = \begin{pmatrix} d\text{fi1} + d\text{fi2} + d\text{theta1} + d\text{theta14} + d\text{theta15} + d\text{theta16} \\ \text{fi1} + \text{fi2} + \text{theta1} + \text{theta14} + \text{theta15} + \text{theta16} \end{pmatrix}$$

$$d\text{fi1} = \ddot{\phi}_1 \begin{pmatrix} m_{14} L_a L_{14} \left(s\varphi_1 c\theta_1 s\varphi_2 s\theta_{14} - c\theta_1 c\varphi_1 c\theta_{14} c\varphi_2 + s\varphi_1 c\theta_1 s\varphi_2 c\theta_{14} \right) \\ + m_{15} \left(L_a L_{14} \left(-s\varphi_1 s\theta_1 s\varphi_2 s\theta_{14} + c\theta_1 c\varphi_1 c\theta_{14} c\varphi_2 + s\varphi_1 c\theta_1 s\varphi_2 c\theta_{14} \right) \right. \\ \left. + L_a L_{15} \left(s\varphi_1 s\theta_1 s\varphi_2 s\theta_{15} + c\theta_1 c\varphi_1 c\theta_{15} c\varphi_2 + s\varphi_1 c\theta_1 s\varphi_2 c\theta_{15} \right) \right) \\ + m_{16} \left(L_a s\varphi_1 s\varphi_2 s\theta_1 \left(+L_{14} s\theta_{14} + L_{15} s\theta_{15} + L_{16} s\theta_{16} \right) \right. \\ \left. + L_a c\theta_1 c\varphi_1 c\varphi_2 \left(L_{14} c\theta_{14} + L_{15} c\theta_{15} + L_{16} c\theta_{16} \right) \right. \\ \left. + L_a s\varphi_1 s\varphi_2 s\theta_1 \left(L_{14} c\theta_{14} + L_{15} c\theta_{15} + L_{16} c\theta_{16} \right) \right) \end{pmatrix}$$

$$d\text{fi2} = \ddot{\phi}_2 \begin{pmatrix} m_{14} L_{14}^2 \left(s^2 \varphi_2 s^2 \theta_{14} + c^2 \theta_{14} \right) \\ + m_{15} \left(L_{14}^2 \left(c^2 \theta_{14} c^2 \varphi_2 + s^2 \theta_{14} \right) + L_{15}^2 \left(c^2 \theta_{15} c^2 \varphi_2 + c^2 \theta_{15} \right) \right. \\ \left. + L_{14} L_{15} \left(s^2 \varphi_2 s\theta_{14} s\theta_{15} + c^2 \varphi_2 c\theta_{14} c\theta_{15} + s^2 \varphi_2 c\theta_{14} c\theta_{15} \right) \right) \\ + m_{16} \left(L_{14}^2 \left(s^2 \varphi_2 s^2 \theta_{14} + c^2 \theta_{14} \right) + L_{15}^2 \left(s^2 \varphi_2 s^2 \theta_{15} + c^2 \theta_{15} \right) \right. \\ \left. + L_{16}^2 \left(s^2 \varphi_2 s^2 \theta_{16} + c^2 \theta_{16} \right) \right) \end{pmatrix}$$

$$d\text{theta1} = \ddot{\theta}_1 \begin{pmatrix} m_{14} L_a L_{14} \left(-c\varphi_1 c\theta_1 s\varphi_2 s\theta_{14} - s\theta_1 s\varphi_1 c\theta_{14} c\varphi_2 + c\varphi_1 s\theta_1 s\varphi_2 c\theta_{14} \right) \\ + m_{15} \left(L_a L_{14} \left(-c\varphi_1 c\theta_1 s\varphi_2 s\theta_{14} + c\theta_1 c\varphi_1 c\theta_{14} c\varphi_2 + s\varphi_1 c\theta_1 s\varphi_2 c\theta_{14} \right) \right. \\ \left. + L_a L_{15} \left(-c\varphi_1 c\theta_1 s\varphi_2 s\theta_{15} + c\theta_1 c\varphi_1 c\theta_{15} c\varphi_2 + s\varphi_1 s\theta_1 s\varphi_2 c\theta_{15} \right) \right) \\ + m_{16} c\varphi_1 s\varphi_2 \begin{pmatrix} -L_a c\theta_1 \left(L_{14} s\theta_{14} + L_{15} s\theta_{15} + L_{16} s\theta_{16} \right) \\ -L_a s\theta_1 \left(L_{14} c\theta_{14} + L_{15} c\theta_{15} + L_{16} c\theta_{16} \right) \\ -L_a c\theta_1 \left(L_{14} c\theta_{14} + L_{15} c\theta_{15} + L_{16} c\theta_{16} \right) \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$d\theta_{14} = \ddot{\theta}_{14} \left(\begin{array}{l} -m_{14} L_{14}^2 c\varphi_2 c\theta_{14} s\varphi_2 s\theta_{14} \\ m_{15} \left(L_{14}^2 (-c\varphi_2 c\theta_{14} s\varphi_2 s\theta_{14} - s\theta_{14} s\varphi_2 c\theta_{14} c\varphi_2 + c\varphi_2 s\theta_{14} s\varphi_2 c\theta_{14}) \right) \\ \quad + L_{14} L_{15} (-c\varphi_2 c\theta_{14} s\varphi_2 s\theta_{15} + s\theta_{14} s\varphi_2 s\theta_{15} c\varphi_2 + c\varphi_2 s\theta_{14} s\varphi_2 c\theta_{15}) \right) \\ + m_{16} c\varphi_2 s\varphi_2 \left(\begin{array}{l} -L_{14} c\theta_{14} (L_{14} s\theta_{14} + L_{15} s\theta_{15} + L_{16} s\theta_{16}) \\ -L_{14} s\theta_{14} (L_{14} c\theta_{14} + L_{15} c\theta_{15} + L_{16} c\theta_{16}) \\ + L_{14} s\theta_{14} (L_{14} c\theta_{14} + L_{15} c\theta_{15} + L_{16} c\theta_{16}) \end{array} \right) \end{array} \right)$$

$$d\theta_{15} = \ddot{\theta}_{15} m_{16} c\varphi_2 s\varphi_2 \left(\begin{array}{l} -L_{15} c\theta_{15} (L_{14} s\theta_{14} + L_{15} s\theta_{15} + L_{16} s\theta_{16}) \\ -L_{15} s\theta_{15} (L_{14} c\theta_{14} + L_{15} c\theta_{15} + L_{16} c\theta_{16}) \\ + L_{15} s\theta_{15} (L_{14} c\theta_{14} + L_{15} c\theta_{15} + L_{16} c\theta_{16}) \end{array} \right)$$

$$d\theta_{16} = \ddot{\theta}_{16} m_{16} c\varphi_2 s\varphi_2 \left(\begin{array}{l} -L_{16} c\theta_{16} (L_{14} s\theta_{14} + L_{15} s\theta_{15} + L_{16} s\theta_{16}) \\ -L_{16} s\theta_{16} (L_{14} c\theta_{14} + L_{15} c\theta_{15} + L_{16} c\theta_{16}) \\ -L_{16} s\theta_{16} (-L_{14} c\theta_{14} + L_{15} c\theta_{15} + L_{16} c\theta_{16}) \end{array} \right)$$

$$f_{i1} = \dot{\varphi}_1 \left(\begin{array}{l} m_{14} \left(\begin{array}{l} \dot{\varphi}_1 L_a L_{14} (c\varphi_1 c\theta_1 s\varphi_2 s\theta_{14} + s\theta_1 s\varphi_1 c\theta_{14} c\varphi_2 + c\varphi_1 s\theta_1 s\varphi_2 c\theta_{14}) \\ + \dot{\theta}_1 L_a L_{14} (-s\varphi_1 c\theta_1 s\varphi_2 s\theta_{14} - s\theta_1 c\varphi_1 c\theta_{14} c\varphi_2 - s\varphi_1 s\theta_1 s\varphi_2 c\theta_{14}) \end{array} \right) \\ + m_{15} \left(\begin{array}{l} \dot{\varphi}_1 \left(\begin{array}{l} L_a L_{14} (-c\varphi_1 s\theta_1 s\varphi_2 s\theta_{14} - c\theta_1 s\varphi_1 c\theta_{14} c\varphi_2 + c\varphi_1 c\theta_1 s\varphi_2 c\theta_{14}) \\ + L_a L_{15} (c\varphi_1 s\theta_1 s\varphi_2 s\theta_{15} - c\theta_1 s\varphi_1 c\theta_{15} c\varphi_2 + c\varphi_1 c\theta_1 s\varphi_2 c\theta_{15}) \end{array} \right) \\ + \dot{\theta}_1 \left(\begin{array}{l} L_a L_{14} (s\varphi_1 c\theta_1 s\varphi_2 s\theta_{14} - c\theta_1 s\varphi_1 c\theta_{14} c\varphi_2 + c\varphi_1 c\theta_1 s\varphi_2 c\theta_{14}) \\ + L_a L_{15} (s\varphi_1 c\theta_1 s\varphi_2 s\theta_{15} - c\theta_1 s\varphi_1 c\theta_{15} c\varphi_2 + c\varphi_1 s\theta_1 s\varphi_2 c\theta_{15}) \end{array} \right) \end{array} \right) \\ + m_{16} \left(\begin{array}{l} \dot{\varphi}_1 \left(\begin{array}{l} L_a c\varphi_1 s\varphi_2 s\theta_1 (L_{14} s\theta_{14} + L_{15} s\theta_{15} + L_{16} s\theta_{16}) \\ -L_a c\theta_1 s\varphi_1 c\varphi_2 (L_{14} c\theta_{14} + L_{15} c\theta_{15} + L_{16} c\theta_{16}) \\ + L_a c\varphi_1 s\varphi_2 s\theta_1 (L_{14} c\theta_{14} + L_{15} c\theta_{15} + L_{16} c\theta_{16}) \end{array} \right) \\ - \dot{\theta}_1 s\varphi_1 s\varphi_2 \left(\begin{array}{l} -L_a c\theta_1 (L_{14} s\theta_{14} + L_{15} s\theta_{15} + L_{16} s\theta_{16}) \\ -L_a s\theta_1 (L_{14} c\theta_{14} + L_{15} c\theta_{15} + L_{16} c\theta_{16}) \\ -L_a c\theta_1 (L_{14} c\theta_{14} + L_{15} c\theta_{15} + L_{16} c\theta_{16}) \end{array} \right) \end{array} \right) \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{aligned} & m_{14}\dot{\phi}_2 \left(\begin{aligned} & L_{14}^2 \left(2s\varphi_2 c\varphi_2 s^2 \theta_{14} \right) \\ & + \dot{\phi}_1 L_a L_{14} \left(c\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{14} + s\theta_1 s\varphi_1 c\theta_{14} s\varphi_2 + c\varphi_1 s\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{14} \right) \\ & + \dot{\theta}_1 L_a L_{14} \left(-c\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{14} + s\theta_1 s\varphi_1 s\theta_{14} s\varphi_2 + c\varphi_1 s\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{14} \right) \\ & - \dot{\theta}_{14} L_{14}^2 c\theta_{14} s\theta_{14} \left(c^2 \varphi_2 - s^2 \varphi_2 \right) \end{aligned} \right) \\ & + m_{15} \left(\begin{aligned} & \dot{\phi}_2 \left(\begin{aligned} & -2L_{14}^2 c^2 \theta_{14} c\varphi_2 s\varphi_2 - 2L_{15}^2 c^2 \theta_{15} c\varphi_2 s\varphi_2 \\ & + 2L_{14} L_{15} \left(s\varphi_2 c\varphi_2 s\theta_{14} s\theta_{15} - c\varphi_2 s\varphi_2 c\theta_{14} c\theta_{15} + s\varphi_2 c\varphi_2 c\theta_{14} c\theta_{15} \right) \end{aligned} \right) \\ & + \dot{\phi}_1 \left(\begin{aligned} & L_a L_{14} \left(-s\varphi_1 s\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{14} - c\theta_1 c\varphi_1 c\theta_{14} s\varphi_2 + s\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{14} \right) \\ & + L_a L_{15} \left(s\varphi_1 s\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{15} - c\theta_1 c\varphi_1 c\theta_{15} s\varphi_2 - s\varphi_1 c\theta_1 s\varphi_2 c\theta_{15} \right) \end{aligned} \right) \\ & + \dot{\theta}_1 \left(\begin{aligned} & L_a L_{14} \left(-c\varphi_1 c\theta_{15} c\varphi_2 s\theta_{14} - c\theta_1 c\varphi_1 c\theta_{14} s\varphi_2 + s\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{14} \right) \\ & + L_a L_{15} \left(-c\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{15} - c\theta_1 c\varphi_1 c\theta_{15} s\varphi_2 + s\varphi_1 s\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{15} \right) \end{aligned} \right) \\ & + \dot{\theta}_{14} \left(\begin{aligned} & L_{14}^2 \left(-c\theta_{14} s\theta_{14} (c^2 \varphi_2 - s^2 \varphi_2) - s\theta_{14} c\theta_{14} (c^2 \varphi_2 - s^2 \varphi_2) + s\theta_{14} c\theta_{14} (c^2 \varphi_2 - s^2 \varphi_2) \right) \\ & + L_{14} L_{15} \left(\begin{aligned} & -c\theta_{14} s\theta_{15} (c^2 \varphi_2 - s^2 \varphi_2) + s\theta_{14} s\theta_{15} (c^2 \varphi_2 - s^2 \varphi_2) \\ & + s\theta_{14} c\theta_{15} (c^2 \varphi_2 - s^2 \varphi_2) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \\ & + \dot{\phi}_2 m_{16} \left(L_{14}^2 \left(2s\varphi_2 c\varphi_2 s^2 \theta_{14} \right) + L_{15}^2 \left(2s\varphi_2 c\varphi_2 s^2 \theta_{15} \right) + L_{16}^2 \left(2s\varphi_2 c\varphi_2 s^2 \theta_{16} \right) \right) \\ & + m_{16}\dot{\phi}_2 \left(\begin{aligned} & \dot{\phi}_1 \left(\begin{aligned} & L_a s\varphi_1 c\varphi_2 s\theta_1 \left(L_{14} s\theta_{14} + L_{15} s\theta_{15} + L_{16} s\theta_{16} \right) \\ & - L_a c\theta_1 c\varphi_1 s\varphi_2 \left(L_{14} c\theta_{14} + L_{15} c\theta_{15} + L_{16} c\theta_{16} \right) \\ & + L_a s\varphi_1 c\varphi_2 s\theta_1 \left(L_{14} c\theta_{14} + L_{15} c\theta_{15} + L_{16} c\theta_{16} \right) \end{aligned} \right) \\ & + \dot{\theta}_1 c\varphi_1 c\varphi_2 \left(\begin{aligned} & -L_a c\theta_1 \left(L_{14} s\theta_{14} + L_{15} s\theta_{15} + L_{16} s\theta_{16} \right) \\ & - L_a s\theta_1 \left(L_{14} c\theta_{14} + L_{15} c\theta_{15} + L_{16} c\theta_{16} \right) \\ & - L_a c\theta_1 \left(L_{14} c\theta_{14} + L_{15} c\theta_{15} + L_{16} c\theta_{16} \right) \end{aligned} \right) \\ & + \dot{\theta}_{14} (c^2 \varphi_2 - s^2 \varphi_2) \left(\begin{aligned} & -L_{14} c\theta_{14} \left(L_{14} s\theta_{14} + L_{15} s\theta_{15} + L_{16} s\theta_{16} \right) \\ & - L_{14} s\theta_{14} \left(L_{14} c\theta_{14} + L_{15} c\theta_{15} + L_{16} c\theta_{16} \right) \\ & + L_{14} s\theta_{14} \left(L_{14} c\theta_{14} + L_{15} c\theta_{15} + L_{16} c\theta_{16} \right) \end{aligned} \right) \\ & + \dot{\theta}_{15} (c^2 \varphi_2 - s^2 \varphi_2) \left(\begin{aligned} & -L_{15} c\theta_{15} \left(L_{14} s\theta_{14} + L_{15} s\theta_{15} + L_{16} s\theta_{16} \right) \\ & - L_{15} s\theta_{15} \left(L_{14} c\theta_{14} + L_{15} c\theta_{15} + L_{16} c\theta_{16} \right) \\ & + L_{15} s\theta_{15} \left(L_{14} c\theta_{14} + L_{15} c\theta_{15} + L_{16} c\theta_{16} \right) \end{aligned} \right) \\ & + \dot{\theta}_{16} (c^2 \varphi_2 - s^2 \varphi_2) \left(\begin{aligned} & -L_{16} c\theta_{16} \left(L_{14} s\theta_{14} + L_{15} s\theta_{15} + L_{16} s\theta_{16} \right) \\ & - L_{16} s\theta_{16} \left(L_{14} c\theta_{14} + L_{15} c\theta_{15} + L_{16} c\theta_{16} \right) \\ & - L_{16} s\theta_{16} \left(-L_{14} c\theta_{14} + L_{15} c\theta_{15} + L_{16} c\theta_{16} \right) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{theta1} = \dot{\theta}_1 & \left(\begin{aligned} & m_{14} \left(\begin{aligned} & \dot{\phi}_1 L_a L_{14} (c\phi_1 s\theta_1 s\varphi_2 s\theta_{14} - s\theta_1 c\phi_1 c\theta_{14} c\varphi_2 - s\phi_1 s\theta_1 s\varphi_2 c\theta_{14}) \\ & + \dot{\theta}_1 L_a L_{14} (c\phi_1 s\theta_1 s\varphi_2 s\theta_{14} - c\theta_1 s\phi_1 c\theta_{14} c\varphi_2 + c\phi_1 c\theta_1 s\varphi_2 c\theta_{14}) \end{aligned} \right) \\ & + m_{15} \left(\begin{aligned} & \dot{\phi}_1 \left(\begin{aligned} & L_a L_{14} (-s\phi_1 c\theta_1 s\varphi_2 s\theta_{14} - s\theta_1 c\phi_1 c\theta_{14} c\varphi_2 - s\phi_1 s\theta_1 s\varphi_2 c\theta_{14}) \\ & + L_a L_{15} (s\phi_1 c\theta_1 s\varphi_2 s\theta_{15} - s\theta_1 c\phi_1 c\theta_{15} c\varphi_2 - s\phi_1 s\theta_1 c\varphi_2 c\theta_{15}) \end{aligned} \right) \\ & + \dot{\theta}_1 \left(\begin{aligned} & L_a L_{14} (c\phi_1 s\theta_1 s\varphi_2 s\theta_{14} - s\theta_1 c\phi_1 c\theta_{14} c\varphi_2 - s\phi_1 s\theta_1 s\varphi_2 c\theta_{14}) \\ & + L_a L_{15} (c\phi_1 s\theta_1 s\varphi_2 s\theta_{15} - s\theta_1 c\phi_1 c\theta_{15} c\varphi_2 + s\phi_1 c\theta_1 s\varphi_2 c\theta_{15}) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \\ & + m_{16} \left(\begin{aligned} & \dot{\phi}_1 \left(\begin{aligned} & L_a s\phi_1 s\varphi_2 c\theta_1 (L_{14} s\theta_{14} + L_{15} s\theta_{15} + L_{16} s\theta_{16}) \\ & - L_a s\theta_1 c\phi_1 c\varphi_2 (L_{14} c\theta_{14} + L_{15} c\theta_{15} + L_{16} c\theta_{16}) \\ & + L_a s\phi_1 s\varphi_2 c\theta_1 (L_{14} c\theta_{14} + L_{15} c\theta_{15} + L_{16} c\theta_{16}) \end{aligned} \right) \\ & + \dot{\theta}_1 c\phi_1 s\varphi_2 \left(\begin{aligned} & -L_a s\theta_1 (L_{14} s\theta_{14} + L_{15} s\theta_{15} + L_{16} s\theta_{16}) \\ & - L_a c\theta_1 (L_{14} c\theta_{14} + L_{15} c\theta_{15} + L_{16} c\theta_{16}) \\ & - L_a s\theta_1 (L_{14} c\theta_{14} + L_{15} c\theta_{15} + L_{16} c\theta_{16}) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{theta14} = \dot{\theta}_{14} & \left(\begin{aligned} & m_{14} \left(\begin{aligned} & \dot{\phi}_2 L_{14}^2 (2s^2\varphi_2 s\theta_{14} c\theta_{14} - c\theta_{14} s\theta_{14}) \\ & + \phi_1 L_a L_{14} (c\phi_1 c\theta_1 s\varphi_2 c\theta_{14} + s\theta_1 s\phi_1 s\theta_{14} c\varphi_2 - c\phi_1 s\theta_1 s\varphi_2 s\theta_{14}) \\ & + \dot{\theta}_1 L_a L_{14} (-c\phi_1 c\theta_1 s\varphi_2 c\theta_{14} + s\theta_1 s\phi_1 s\theta_{14} c\varphi_2 - c\phi_1 s\theta_1 s\varphi_2 s\theta_{14}) \\ & - \dot{\theta}_{14} L_{14}^2 c\varphi_2 s\varphi_2 (c^2\theta_{14} - s^2\theta_{14}) \end{aligned} \right) \\ & + m_{15} \left(\begin{aligned} & \dot{\phi}_2 \left(\begin{aligned} & 2L_{14}^2 (-c\theta_{14} s\theta_{14} c^2\varphi_2 + s\theta_{14} c\theta_{14}) \\ & + L_{14} L_{15} (s^2\varphi_2 c\theta_{14} s\theta_{15} - c^2\varphi_2 s\theta_{14} c\theta_{15} - s^2\varphi_2 s\theta_{14} c\theta_{15}) \end{aligned} \right) \\ & + \dot{\phi}_1 L_a L_{14} (-s\phi_1 s\theta_1 s\varphi_2 c\theta_{14} - c\theta_1 c\phi_1 s\theta_{14} c\varphi_2 - s\phi_1 c\theta_1 s\varphi_2 s\theta_{14}) \\ & + \dot{\theta}_1 L_a L_{14} (-c\phi_1 c\theta_{15} s\varphi_2 c\theta_{14} - c\theta_1 c\phi_1 s\theta_{14} c\varphi_2 - s\phi_1 c\theta_1 s\varphi_2 s\theta_{14}) \\ & + \dot{\theta}_{14} \left(\begin{aligned} & L_{14}^2 (-c\phi_2 s\varphi_2 (c^2\theta_{14} - s^2\theta_{14}) - s\phi_2 c\varphi_2 (c^2\theta_{14} - s^2\theta_{14}) + c\phi_2 s\varphi_2 (c^2\theta_{14} - s^2\theta_{14})) \\ & + L_{14} L_{15} (c\varphi_2 s\varphi_2 s\theta_{14} s\theta_{15} + c\varphi_2 s\varphi_2 c\theta_{14} s\theta_{15} + c\varphi_2 s\varphi_2 c\theta_{14} c\theta_{15}) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \\ & + 2\dot{\phi}_2 m_{16} L_{14}^2 (s^2\varphi_2 s\theta_{14} c\theta_{14} - c\theta_{14} s\theta_{14}) \\ & + m_{16} \left(\begin{aligned} & \dot{\phi}_1 (L_a s\phi_1 s\varphi_2 s\theta_1 (L_{14} c\theta_{14}) + L_a c\theta_1 c\phi_1 c\varphi_2 (-L_{14} s\theta_{14}) + L_a s\phi_1 s\varphi_2 s\theta_1 (-L_{14} s\theta_{14})) \\ & + \dot{\theta}_1 c\phi_1 s\varphi_2 (-L_a c\theta_1 (L_{14} c\theta_{14}) - L_a s\theta_1 (-L_{14} s\theta_{14}) + L_a c\theta_1 (-L_{14} s\theta_{14})) \\ & + \dot{\theta}_{14} c\varphi_2 s\varphi_2 \left(\begin{aligned} & -L_{14}^2 (c^2\theta_{14} - s^2\theta_{14}) + L_{14} s\theta_{14} (L_{15} s\theta_{15} + L_{16} s\theta_{16}) \\ & - L_{14}^2 (c^2\theta_{14} - s^2\theta_{14}) - L_{14} c\theta_{14} (L_{15} c\theta_{15} + L_{16} c\theta_{16}) \\ & L_{14}^2 (c^2\theta_{14} - s^2\theta_{14}) + L_{14} c\theta_{14} (L_{15} c\theta_{15} + L_{16} c\theta_{16}) \end{aligned} \right) \\ & + \dot{\theta}_{15} c\varphi_2 s\varphi_2 (-L_{15} c\theta_{15} (L_{14} c\theta_{14}) - L_{15} s\theta_{15} (-L_{14} s\theta_{14}) + L_{15} s\theta_{15} (-L_{14} s\theta_{14})) \\ & + \dot{\theta}_{16} c\varphi_2 s\varphi_2 (-L_{16} c\theta_{16} (L_{14} c\theta_{14}) - L_{16} s\theta_{16} (-L_{14} s\theta_{14}) - L_{16} s\theta_{16} (-L_{14} s\theta_{14})) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_{15} = \dot{\theta}_{15} & \left(\begin{aligned} & +m_{15} \left(\begin{aligned} & \dot{\phi}_2 \left(-2L_{15}^2 \left(c\theta_{15}s\theta_{15}c^2\varphi_2 - c\theta_{15}s\theta_{15} \right) + L_{14}L_{15} \left(s^2\varphi_2s\theta_{14}c\theta_{15} - c^2\varphi_2c\theta_{14}s\theta_{15} - s^2\varphi_2c\theta_{14}s\theta_{15} \right) \right) \right. \\ & + \dot{\phi}_1 L_a L_{15} \left(s\varphi_1 s\theta_1 s\varphi_2 c\theta_{15} - c\theta_1 c\varphi_1 s\theta_{15} c\varphi_2 - s\varphi_1 c\theta_1 c\varphi_2 s\theta_{15} \right) \\ & + \dot{\theta}_1 \left(L_a L_{15} \left(-c\varphi_1 c\theta_1 s\varphi_2 c\theta_{15} - c\theta_1 c\varphi_1 s\theta_{15} c\varphi_2 - s\varphi_1 s\theta_1 s\varphi_2 s\theta_{15} \right) \right) \\ & \left. + \dot{\theta}_{14} L_{14} L_{15} \left(-c\varphi_2 c\theta_{14} s\varphi_2 c\theta_{15} + s\theta_{14} c\varphi_2 s\varphi_2 c\theta_{15} - c\varphi_2 s\theta_{14} s\varphi_2 s\theta_{15} \right) \right) \right) \\ & + \dot{\phi}_2 m_{16} L_{15}^2 \left(2s^2\varphi_2 s\theta_{15} c\theta_{15} - c\theta_{15} s\theta_{15} \right) \\ & +m_{16} \left(\begin{aligned} & \dot{\phi}_1 \left(L_a s\varphi_1 s\varphi_2 s\theta_1 \left(L_{15} c\theta_{15} \right) + L_a c\theta_1 c\varphi_1 c\varphi_2 \left(-L_{15} s\theta_{15} \right) + L_a s\varphi_1 s\varphi_2 s\theta_1 \left(-L_{15} s\theta_{15} \right) \right) \\ & + \dot{\theta}_1 c\varphi_1 s\varphi_2 \left(-L_a c\theta_1 \left(L_{15} c\theta_{15} \right) - L_a s\theta_1 \left(-L_{15} s\theta_{15} \right) - L_a c\theta_1 \left(-L_{15} s\theta_{15} \right) \right) \\ & + \dot{\theta}_{14} c\varphi_2 s\varphi_2 \left(-L_{14} c\theta_{14} \left(L_{15} c\theta_{15} \right) - L_{14} s\theta_{14} \left(-L_{15} s\theta_{15} \right) + L_{14} s\theta_{14} \left(-L_{15} s\theta_{15} \right) \right) \\ & + \dot{\theta}_{15} c\varphi_2 s\varphi_2 \left(\begin{aligned} & -L_{15}^2 \left(c^2\theta_{15} - s^2\theta_{15} \right) - \left(-L_{15} s\theta_{15} \right) \left(-L_{14} s\theta_{14} - L_{16} s\theta_{16} \right) \\ & -L_{15}^2 \left(c^2\theta_{15} - s^2\theta_{15} \right) - \left(L_{15} c\theta_{15} \right) \left(L_{14} c\theta_{14} + L_{16} c\theta_{16} \right) \\ & + L_{15}^2 \left(c^2\theta_{15} - s^2\theta_{15} \right) + \left(L_{15} c\theta_{15} \right) \left(L_{14} c\theta_{14} + L_{16} c\theta_{16} \right) \end{aligned} \right) \\ & \left. + \dot{\theta}_{16} c\varphi_2 s\varphi_2 \left(-L_{16} c\theta_{16} \left(L_{15} c\theta_{15} \right) - L_{16} s\theta_{16} \left(-L_{15} s\theta_{15} \right) - L_{16} s\theta_{16} \left(-L_{15} s\theta_{15} \right) \right) \right) \right) \end{aligned} \right) \\
\theta_{16} = \dot{\theta}_{16} & \left(\begin{aligned} & \dot{\phi}_2 m_{16} L_{16}^2 \left(s^2\varphi_2 s\theta_{16} c\theta_{16} - c\theta_{16} s\theta_{16} \right) \\ & +m_{16} \left(\begin{aligned} & \dot{\phi}_1 \left(L_a s\varphi_1 s\varphi_2 s\theta_1 \left(L_{16} c\theta_{16} \right) - L_a c\theta_1 c\varphi_1 c\varphi_2 \left(L_{16} s\theta_{16} \right) - L_a s\varphi_1 s\varphi_2 s\theta_1 \left(L_{16} s\theta_{16} \right) \right) \\ & + \dot{\theta}_1 c\varphi_1 s\varphi_2 \left(-L_a c\theta_1 \left(L_{16} c\theta_{16} \right) + L_a s\theta_1 \left(L_{16} s\theta_{16} \right) + L_a c\theta_1 \left(L_{16} s\theta_{16} \right) \right) \\ & + \dot{\theta}_{14} c\varphi_2 s\varphi_2 \left(-L_{14} c\theta_{14} \left(L_{16} c\theta_{16} \right) + L_{14} s\theta_{14} \left(L_{16} s\theta_{16} \right) - L_{14} s\theta_{14} \left(L_{16} s\theta_{16} \right) \right) \\ & + \dot{\theta}_{15} c\varphi_2 s\varphi_2 \left(-L_{15} c\theta_{15} \left(L_{16} c\theta_{16} \right) + L_{15} s\theta_{15} \left(L_{16} s\theta_{16} \right) - L_{15} s\theta_{15} \left(L_{16} s\theta_{16} \right) \right) \\ & + \dot{\theta}_{16} c\varphi_2 s\varphi_2 \left(\begin{aligned} & -L_{16}^2 \left(c^2\theta_{16} - s^2\theta_{16} \right) + \begin{pmatrix} L_{16} s\theta_{16} (L_{14} s\theta_{14} + L_{15} s\theta_{15}) \\ -L_{16} c\theta_{16} (L_{14} c\theta_{14} + L_{15} c\theta_{15}) \\ -L_{16} c\theta_{16} (-L_{14} c\theta_{14} + L_{15} c\theta_{15}) \end{pmatrix} \end{aligned} \right) \right) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right)
\end{aligned}$$

ÖZGEÇMİŞ

Musa MARUL, İlköğrenimini ve lise eğitimini 2005 yılında Kocaeli’nde tamamladı. 2006-2012 yılları arasında Afyon Kocatepe Üniversitesi Teknik Eğitim Fakültesi Makine Eğitimi Bölümü Makine Resmi ve Konstrüksiyonu Lisans Programı’nı, sonrasında Fen Bilimleri Enstitüsü Makine Mühendisliği Bölümü’nde Yüksek lisans eğitimini tamamladı. 2012 yılında Artvin Çoruh Üniversitesi’nde Mekatronik Programı’nda Öğretim Görevlisi olarak çalışmaya başlamıştır. 2017 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Makina Mühendisliği Bölümü Anabilim Dalı Makina Teorisi ve Dinamiği bilim dalında doktora eğitimine başlamıştır. Robotik, kontrol teorisi ve uygulamaları, mekanizmalar, algoritma ve optimizasyon konularında çalışmalarını sürdürmektedir.

Yayınlar: <https://akademik.yok.gov.tr/AkademikArama/view/viewAuthor.jsp>