

T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER OLMAYAN İKİNCİ MERTEBEDEN FARK
DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

Tezi Hazırlayan
Mesure ŞEN

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Yasin YAZLIK

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Kasım 2024
NEVŞEHİR

T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER OLMAYAN İKİNCİ MERTEBEDEN FARK
DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

Tezi Hazırlayan
Mesure ŞEN

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Yasin YAZLIK

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Kasım 2024

Prof. Dr. Yasin YAZLIK danışmanlığında **Mesure ŞEN** tarafından hazırlanan “**Lineer Olmayan İkinci Mertebeden Fark Denklem Sistemlerinin Çözümleri Üzerine**” başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

20/11/2024

JÜRİ

Başkan : Prof. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ

Üye : Prof. Dr. Yasin YAZLIK

Üye : Doç. Dr. Merve KARA

ONAY:

Bu tezin kabulü Fen Bilimleri Enstitü Yönetim Kurulunun.....tarih ve..... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

... / ... / 2024

Prof. Dr. Cemal ÇARBOĞA

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Mesure ŞEN



TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim süresince ve tez çalışmam esnasında tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde büyük emeği olan Sayın Hocam Prof. Dr. Yasin YAZLIK' a,

Maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen annem Filiz ŞEN'e, babam Adnan ŞEN'e,

Teknik ve idari yardımlarından dolayı Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Matematik Bölümünün değerli hocalarına sonsuz teşekkür ederim.



LİNEER OLMAYAN İKİNCİ MERTEBEDEN FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

(Yüksek Lisans Tezi)

Mesure ŞEN

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÖZET

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde fark denklem ve sistemlerinin önemi, uygulama alanı ve bu tezin amacına yer verilmiştir. İkinci bölümde, fark denklemleri ve fark denklem sistemleri ile ilgili literatür taraması ile fark denklemleri ve fark denklem sistemleri ile ilgili genel tanım ve teromlerden bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde $j \in \{1, 2\}$ için a_j, b_j, c_j, d_j parametreler ve $u_{-i}, v_{-i}, i \in \{0, 1\}$, başlangıç koşulları reel sabitler olmak üzere

$$u_{n+1} = f^{-1} \left(g(v_n) \frac{a_1 f(u_n) + b_1 g(v_{n-1})}{c_1 f(u_n) + d_1 g(v_{n-1})} \right), \quad v_{n+1} = g^{-1} \left(f(u_n) \frac{a_2 g(v_n) + b_2 f(u_{n-1})}{c_2 g(v_n) + d_2 f(u_{n-1})} \right), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

iki-boyutlu ikinci mertebeden lineer olmayan fark denklem sisteminin çözümleri elde edilmiştir. Dördüncü bölümde ise, $j \in \{1, 2\}$ için a_j, b_j, c_j, d_j parametreler ve $u_{-i}, v_{-i}, i \in \{0, 1\}$, başlangıç koşulları reel sabitler olmak üzere

$$u_{n+1} = f^{-1} \left(f(u_n) \frac{a_1 g(v_n) + b_1 g(v_{n-1})}{c_1 g(v_n) + d_1 g(v_{n-1})} \right), \quad v_{n+1} = g^{-1} \left(g(v_n) \frac{a_2 f(u_n) + b_2 f(u_{n-1})}{c_2 f(u_n) + d_2 f(u_{n-1})} \right), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

ikinci mertebeden lineer olmayan fark denklem sisteminin çözümleri parametrelere göre incelenmiştir. Burada $c_j^2 + d_j^2 \neq 0, j \in \{1, 2\}$, $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli, monoton fonksiyonlar ve $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}, f(0) = 0, g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}, g(0) = 0$ dır. Son bölümde ise sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar kelimeler: *Fark Denklemi, Fark Denklem Sistemi, Genel Çözüm.*

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Yasin YAZLIK

Sayfa sayısı: 62

ON THE SOLUTIONS OF NONLINEAR SOME DIFFERENCE EQUATIONS SYSTEMS WITH SECOND ORDER

(Ms Thesis)

Mesure ŞEN

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCES

ABSTRACT

This thesis consists of five sections. In the first section, the importance of difference equations and system of difference equations, their application areas and the aim of this thesis are given. In the second section, the literature review on difference equations, systems of difference equations and the general definitions and theorems about difference equations and systems of difference equations are mentioned. In the third section, the general solution of two-dimensional nonlinear system of difference equations with second order

$$u_{n+1} = f^{-1} \left(g(v_n) \frac{a_1 f(u_n) + b_1 g(v_{n-1})}{c_1 f(u_n) + d_1 g(v_{n-1})} \right), \quad v_{n+1} = g^{-1} \left(f(u_n) \frac{a_2 g(v_n) + b_2 f(u_{n-1})}{c_2 g(v_n) + d_2 f(u_{n-1})} \right), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

where the parameters a_j, b_j, c_j, d_j , for $j \in \{1, 2\}$, and the initial conditions u_{-i}, v_{-i} , for $i \in \{0, 1\}$, are real numbers, is obtained. In the fourth section, the general solution of two-dimensional nonlinear system of difference equations with second order

$$u_{n+1} = f^{-1} \left(f(u_n) \frac{a_1 g(v_n) + b_1 g(v_{n-1})}{c_1 g(v_n) + d_1 g(v_{n-1})} \right), \quad v_{n+1} = g^{-1} \left(g(v_n) \frac{a_2 f(u_n) + b_2 f(u_{n-1})}{c_2 f(u_n) + d_2 f(u_{n-1})} \right), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

where the parameters a_j, b_j, c_j, d_j , for $j \in \{1, 2\}$, and the initial conditions u_{-i}, v_{-i} , for $i \in \{0, 1\}$, are real numbers, $c_j^2 + d_j^2 \neq 0$, $j \in \{1, 2\}$, $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ are strictly monotone continuous functions, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $f(0) = 0$, $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ and $g(0) = 0$, is obtained. Finally, the last section the results and recommendations are given.

Keywords: *Difference equation, Difference Equations system, General Solution.*

Thesis Supervisor: Prof. Dr. Yasin YAZLIK

Pages: 62

İÇİNDEKİLER

TEZ BİLDİRİM SAYFASI.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
İÇİNDEKİLER.....	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	vii
1.BÖLÜM	
GİRİŞ.....	1
1.1 Amaç ve Kapsam.....	3
2. BÖLÜM	
LİTERATÜR TARAMASI VE ÖN BİLGİLER.....	4
2.1. Kaynak Araştırması.....	4
2.2. Ön Bilgiler.....	18
3. BÖLÜM	
SİSTEM (3.1)'İN PARAMETRELERİNİN DURUMLARINA GÖRE ÇÖZÜMLERİNİN İNCELENMESİ.....	22
3.1. Sistem (3.1)'in Kapalı Formda Çözümleri.....	22
4.BÖLÜM	
SİSTEM (4.1)'İN PARAMETRELERİNİN DURUMLARINA GÖRE ÇÖZÜMLERİNİN İNCELENMESİ.....	36
4.1 Sistem (4.1)'in Kapalı Formda Çözümleri.....	36
5. BÖLÜM	
SONUÇ VE ÖNERİLER.....	49
5.1. Sonuçlar.....	49
5.2. Öneriler.....	49
KAYNALAR.....	50

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

Simgeler

Açıklama

E

Kaydırma operatörü

Δ

İleri fark operatörü

F_n

n . Fibonacci sayısı

Δ^{-1}

Ters fark operatörü

$\mathbb{R}$

Reel sayılar Kümesi

$\mathbb{N}_0$

Doğal sayılar Kümesi

$\mathbb{N}$

Sayma sayılar Kümesi

$\mathbb{N}_{n_0}$

$\{n \mid n \geq n_0, n, n_0 \in \mathbb{N}_0\}$

$\mathbb{Z}^+$

Pozitif Tam Sayılar Kümesi

$\mathbb{C}$

Kompleks Sayılar Kümesi

$\mathcal{F}$

Forbidden Set (Yasaklı Küme)

Σ

Toplam sembolü

Π

Çarpım sembolü

$\lim$

Limit

$\overline{a, b}$

$\{n \mid a \leq n \leq b, n, a, b \in \mathbb{Z}\}$

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Matematik, insanlığın en eski ve en evrensel bilim dallarından biridir. Sayılar, şekiller ve mantık aracılığıyla düşünce sistemimizi yapılandırmamıza yardımcı olan bu disiplin, sadece bir hesaplama aracı olmanın ötesinde, evrenin temel yapı taşlarını anlamamıza olanak tanır. Matematik, doğal ve sosyal bilimlerin yanı sıra mühendislik gibi disiplinlerde, karmaşık sistemlerin incelenmesi ve çözümlenmesinde merkezi bir rol oynamaktadır. Özellikle sistemlerin zaman içerisindeki değişimlerini ve etkileşimlerini tanımlamak, bu sistemlerin davranışlarını öngörmek ve kontrol etmek amacıyla diferansiyel denklemler ve fark denklemleri önemli araçlar olarak kullanılmaktadır. Gerçek dünya süreçlerinin soyut matematiksel yapılarla ifade edilmesine imkân tanıyan bu denklemler, çeşitli disiplinlerdeki problem ve sistemlerin modellenmesi için vazgeçilmezdir. Bu bağlamda, matematiksel modelleme süreci, hem teorik hem de pratik bilgi birikiminin bir araya getirildiği disiplinler arası bir yaklaşım gerektirirken, diferansiyel denklemler de bir sistemin dinamik yapısını bağımlı ve bağımsız değişkenlerin türevleri aracılığıyla tanımlamak için kritik bir rol oynar.

Diferansiyel denklemler, fiziksel, biyolojik ve mühendislik problemlerinin yanı sıra sosyo-ekonomik süreçlerin modellenmesinde yaygın olarak kullanılmaktadır. Örneğin, klasik mekanikte bir cismin hareketi Newton'un ikinci yasasıyla ifade edilirken, elektrik devrelerindeki akım ve gerilim ilişkileri Kirchhoff yasalarıyla açıklanır. Biyolojide popülasyon dinamikleri ya da ekonomide büyüme ve dalgalanma modelleri de diferansiyel denklemler yardımıyla çözümlenmektedir. Dolayısıyla, diferansiyel denklemler, sürekli değişim gösteren olguların analizi için temel bir matematiksel çerçeve sunmaktadır.

Matematiksel modelleme, gerçek dünyadaki süreçlerin matematiksel olarak ifade edilmesine olanak tanır ve modelleme sürecinin başarısı, doğru matematiksel araçların seçimine bağlıdır. Diferansiyel ve fark denklemleri, bu süreçte en çok tercih edilen yöntemler arasında yer almakta ve birçok farklı alanda etkili bir şekilde kullanılmaktadır. Örneğin, biyomedikal mühendislikte bir hastalığın yayılımı, mühendislikte bir yapının kararlılığı veya çevresel sistemlerde iklim değişikliğinin

etkileri gibi çok boyutlu problemler, matematiksel modellerle analiz edilebilir. Bu modellerin kullanımı, yalnızca sistemin mevcut durumunu anlamakla kalmaz, aynı zamanda gelecekteki davranışlarını öngörmeye de olanak tanır. Bu yaklaşım, bilimsel analiz, tahmin ve karar alma süreçlerinde geniş bir kullanım alanına sahiptir. Çeşitli disiplinlerden matematiksel modelleme örnekleri:

Fizik: Schrödinger Denklemi: Kuantum mekaniğinde, bir parçacığın dalga fonksiyonu $\psi(x,t)$, Schrödinger denklemi ile modellenir:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(x,t) + V(x)\psi(x,t)$$

Burada $\hbar$ Planck sabitinin indirgenmiş hâlini, m parçacığın kütlesini ve $V(x)$ potansiyel enerjiyi temsil eder. Bu denklem, mikroskopik dünyadaki olasılık dağılımlarını belirlemek için kullanılır.

Mühendislik: Navier-Stokes Denklemleri: Akışkanlar dinamiğinde, bir akışkanın hareketini tanımlamak için kullanılan Navier-Stokes denklemleri, momentumun korunumu esasına dayanır:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 u + f$$

Burada ρ akışkanın yoğunluğu, u hız alanı, p basınç ve μ akışkanın viskozitesidir. Bu denklem, mühendislikte ve meteorolojide sıvı ve gazların hareketini modellemek için kullanılır. Bu temel kavramları anlayanın ardından, daha karmaşık problemlere geçiş yaparak, dinamik sistemlerin ve zaman serilerinin analizinde önemli bir rol oynayan fark denklemlerini inceleyebiliriz.

Fark denklemleri, özellikle sayısal analiz ve dinamik sistemler alanında önemli bir rol oynayan matematiksel araçlardır. Sürekli zaman yerine, belirli aralıklarla tanımlanan veri noktalarını kullanan bu denklemler, sistemlerin zaman içindeki değişimlerini anlamamıza yardımcı olur. Özellikle mühendislik, ekonomi ve biyoloji gibi birçok alanda uygulama bulurlar. Fark denklemleri, bir sistemin gelecekteki durumunu belirlemek için mevcut durumları kullanır. Örneğin, bir populasyonun büyüme oranını

modellemek için geçmiş değerleri dikkate alarak gelecekteki değerleri tahmin etmek mümkündür. Bu, özellikle karmaşık dinamiklerin daha basit bir biçimde analiz edilmesine olanak tanır. Daha spesifik olarak, birinci derece fark denklemleri, ardışık terimler arasındaki ilişkiyi belirlerken, daha yüksek dereceli denklemler daha karmaşık sistemleri temsil edebilir. Bu denklemlerin çözümü, genellikle iteratif yöntemler veya analitik teknikler kullanılarak gerçekleştirilir. Sonuçlar, çeşitli uygulamalarda önemli bilgiler sunar ve sistemlerin davranışını tahmin etmemize yardımcı olur.

Sonuç olarak, fark denklemleri, belirli zaman aralıklarında meydana gelen olayları anlamak ve modellemek için kritik bir araçtır. Discrete zaman dinamiklerini analiz ederek, karmaşık sistemlerin davranışını daha iyi kavrayabiliriz. Bu, hem teorik hem de pratik alanlarda geniş bir uygulama yelpazesi sunar, böylece bilimsel ve mühendislik problemlerinin çözümünde vazgeçilmez bir rol oynar.

1.1 Amaç ve Kapsam

Bu çalışmanın temel amacı Stevo Stevic ve ark. 2022 yılında “*On a nonlinear second-order difference equation*” isimli çalışması olan

$$x_{n+1} = f^{-1} \left(f(x_n) \frac{\alpha f(x_n) + \beta f(x_{n-1})}{\gamma f(x_n) + \delta f(x_{n-1})} \right), \quad n \in \mathbb{N}_0, \text{ ikinci mertebeden fark denklemini, iki}$$

ayrı iki-boyutlu ikinci mertebeden

$$u_{n+1} = f^{-1} \left(g(v_n) \frac{a_1 f(u_n) + b_1 g(v_{n-1})}{c_1 f(u_n) + d_1 g(v_{n-1})} \right), \quad v_{n+1} = g^{-1} \left(f(u_n) \frac{a_2 g(v_n) + b_2 f(u_{n-1})}{c_2 g(v_n) + d_2 f(u_{n-1})} \right), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

Ve

$$u_{n+1} = f^{-1} \left(f(u_n) \frac{a_1 g(v_n) + b_1 g(v_{n-1})}{c_1 g(v_n) + d_1 g(v_{n-1})} \right), \quad v_{n+1} = g^{-1} \left(g(v_n) \frac{a_2 f(u_n) + b_2 f(u_{n-1})}{c_2 f(u_n) + d_2 f(u_{n-1})} \right), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

fark denklem sistemlerine genişletip, genişletilen fark denklem sistemlerinin çözümlerini parametrelerin durumlarına göre incelemektir.

2. BÖLÜM

LİTERATÜR TARAMASI VE ÖN BİLGİLER

2.1 Kaynak Araştırması

Bu bölümde fark denklemleri ve fark denklem sistemleri ile ilgili literatürde yapılmış olan çalışmalara yer verilmiştir.

Elsayed (2012), “*Solutions of rational difference equations systems of order two*” isimli çalışmasında $x_{-i}, y_{-i}, i \in \{0,1\}$, başlangıç koşulları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{\pm 1 + x_{n-1}y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{y_{n-1}}{\pm 1 + x_{n-1}x_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

ikinci mertebeden rasyonel fark denklem sistemlerinin çözümlerini elde etmiştir [12].

Touafek ve Elsayed (2012), “*On the solutions of systems of rational difference equations*” isimli çalışmalarında $x_{-i}, y_{-i}, i \in \{0,1,2,3\}$, başlangıç koşulları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-3}}{\mp 1 \pm x_{n-3}y_{n-1}}, \quad y_{n+1} = \frac{y_{n-3}}{\mp 1 \pm y_{n-3}x_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

dördüncü mertebeden rasyonel fark denklem sistemlerinin çözümleri ve çözümlerinin periyodikliğini incelemişlerdir [45].

Stević (2012), “*On some solvable systems of difference equations*” isimli çalışmasında u_n, v_n, w_n, s_n başlangıç değerleri x_0, y_0 olan x_n veya y_n dizilerinden bazıları olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{u_n}{1 + v_n}, \quad y_{n+1} = \frac{w_n}{1 + s_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

birinci mertebeden fark denklem sistemlerinden 16 durumundan 14 tanesinin çözülebilir olduğunu göstermiştir [28].

Din, Qureshi ve Khan (2012), “*Dynamics of a fourth-order system of rational difference equations*” isimli çalışmalarında $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ parametreleri ve $x_{-i}, y_{-i}, i \in \{0,1,2,3\}$, başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_{n-3}}{\beta + \gamma y_n y_{n-1} y_{n-2} y_{n-3}}, \quad y_{n+1} = \frac{\alpha_1 y_{n-3}}{\beta_1 + \gamma_1 x_n x_{n-1} x_{n-2} x_{n-3}}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

dördüncü mertebeden rasyonel fark denklem sisteminin denge noktalarını, bir denge noktasının lokal asimptotik kararlılığını, denge noktalarının kararsızlığını, pozitif çözümlerin periyodik davranışını ve bir denge noktasının global asimptotik kararlılığını incelemiştir [8].

Elsayed ve Dessoky (2013), “*Dynamics and global behavior for a fourth-order rational difference equation*” isimli çalışmalarında a, b, c, d parametreleri ve $x_{-i}, i \in \{0, 1, 2, 3\}$, başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = ax_n + \frac{bx_n x_{n-2}}{cx_{n-2} + dx_{n-3}}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

dördüncü mertebeden rasyonel fark denkleminin çözümlerini ve çözümlerinin asimptotik davranışını incelemiştir [11].

Halim, Touafek ve Elsayed (2014), “*Closed form solutions of some systems of rational difference equations in terms of Fibonacci numbers*” isimli çalışmalarında $x_{-i}, y_{-i}, i \in \{0, 1, 2, 3\}$, başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{y_n(x_{n-2} + y_{n-3})}{y_{n-3} - x_{n-2} - y_n}, & y_{n+1} = \frac{x_{n-1}(x_{n-1} + y_{n-2})}{2x_{n-1} - y_{n-2}}, \\ x_{n+1} = \frac{(y_{n-3} - x_{n-2})y_n}{y_{n-3} - x_{n-2} + y_n}, & y_{n+1} = \frac{(y_{n-2} - x_{n-1})x_{n-1}}{y_{n-2}}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

dördüncü mertebeden rasyonel fark denklem sistemlerinin çözümlerini incelemiştir [18].

Halim, Touafek ve Yazlık (2015), “*Dynamic behavior of a second-order nonlinear rational difference equation*” isimli çalışmalarında a, b, c, A, B, C parametreleri ve x_0, x_{-1} başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{ax_n^k + b \sum_{j=1}^{k-1} x_n^j x_{n-1}^{k-j} + cx_{n-1}^k}{Ax_n^k + B \sum_{j=1}^{k-1} x_n^j x_{n-1}^{k-j} + Cx_{n-1}^k}, \quad k = 3, 4, \dots, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

ikinci mertebeden fark denkleminin pozitif çözümlerinin kararlılık analizini incelemişlerdir [17].

Halim ve Bayram (2015), “*On the solutions of a higher-order difference equation in terms of generalized Fibonacci sequences*” isimli çalışmalarında $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+$ ve başlangıç koşulları x_{-i} , $i \in \{0, 1, \dots, k\}$, pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{\alpha}{\beta + \gamma x_{n-k}}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

fark denkleminin çözümlerini, kararlılık karakterini ve asimptotik davranışını incelemişlerdir [15].

Elsayed ve İbrahim (2015), “*Periodicity and solutions for some systems of nonlinear rational difference equations*” isimli çalışmalarında başlangıç koşulları x_{-i} , y_{-i} , $i \in \{0, 1, 2\}$, sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-2}y_{n-1}}{y_n(\pm 1 \pm x_{n-2}y_{n-1})}, \quad y_{n+1} = \frac{y_{n-2}x_{n-1}}{x_n(\pm 1 \pm y_{n-2}x_{n-1})}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

üçüncü mertebeden lineer olmayan fark denklem sistemlerinin periyodik davranışlarını ve çözümlerinin biçimlerini incelemişlerdir [10].

Stevic, Iricanin ve Smarda (2015), “*On a product-type system of difference equations of second order solvable in closed form*” isimli çalışmalarında $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ parametreleri ve $z_{-1}, z_0, w_{-1}, w_0 \in \mathbb{C}$ başlangıç koşulları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$z_{n+1} = \frac{z_n^a}{w_{n-1}^b}, \quad w_{n+1} = \frac{w_n^c}{z_{n-1}^d}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

fark denklem sisteminin kapalı formda çözülebilir olduğunu göstermişlerdir [29].

Stevic, Iricanin ve Smarda (2015), “*On a close to symmetric system of difference equations of second order*” isimli çalışmalarında $n \in \mathbb{N}_0$ için $a_n, b_n, \alpha_n, \beta_n$ parametreleri ve x_{-i}, y_{-i} , $i \in \{1, 2\}$, başlangıç koşulları reel sayılar olmak üzere

$$x_n = \frac{y_{n-1}y_{n-2}}{x_{n-1}(a_n + b_n y_{n-1}y_{n-2})}, y_n = \frac{x_{n-1}x_{n-2}}{y_{n-1}(\alpha_n + \beta_n x_{n-1}x_{n-2})}, n \in \mathbb{N}_0,$$

rasyonel fark denklem sisteminin iyi tanımlanmış çözümlerini elde etmişlerdir. Elde edilen çözümleri kullanarak çözümlerin asimptotik davranışlarını da incelemişlerdir [33].

Stevic, Diblik, Iricanin ve Smarda (2015), “*On the system of difference equations*” isimli çalışmalarında a, b, c, d parametreleri ve $x_{-2}, x_{-1}, y_{-2}, y_{-1}$ başlangıç koşulları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$x_n = \frac{x_{n-1}y_{n-2}}{ay_{n-2} + by_{n-1}}, y_n = \frac{y_{n-1}x_{n-2}}{cx_{n-2} + dx_{n-1}}, n \in \mathbb{N}_0,$$

fark denklem sisteminin kapalı formda çözülebilir olduğunu göstermişlerdir. Elde edilen formülleri kullanarak çözümlerin asimptotik davranışlarını göstermişlerdir[35].

Touafek ve Elsayed (2015), “*On a third order rational systems of difference equations*” isimli çalışmalarında $x_{-i}, y_{-i}, i \in \{0, 1, 2\}$, başlangıç koşulları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}y_n}{y_n \pm y_{n-2}}, y_{n+1} = \frac{x_n y_{n-1}}{x_n \pm x_{n-2}}, n \in \mathbb{N}_0,$$

üçüncü mertebeden fark denklem sistemlerinin çözümlerini formülize etmişlerdir [41].

Touafek ve Haddad (2015), “*On a mixed max-type rational system of difference equations*” isimli çalışmalarında $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ pozitif iki-periyotlu bir dizi ve başlangıç değerleri $x_0, y_0, y_{-1} \in (0, +\infty)$ olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{x_n y_n}{y_{n-1}}, y_{n+1} = \max \left\{ \frac{A_n}{x_n}, y_{n-1} \right\}, n \in \mathbb{N}_0,$$

rasyonel fark denklem sisteminin pozitif çözümlerini ve çözümlerinin periyodikliğini incelemişlerdir [42].

Ahmed ve Elsayed (2016), “*The expressions of solutions and the periodicty of some rational difference equations systems*” isimli çalışmalarında $x_{-2}, x_{-1}, x_0, y_{-2}, y_{-1}$ ve y_0 başlangıç koşulları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}y_{n-2}}{y_n(-1 \pm x_{n-1}x_{n-2})}, \quad y_{n+1} = \frac{y_{n-1}x_{n-2}}{x_n(-1 \pm y_{n-1}y_{n-2})}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

üçüncü mertebeden lineer olmayan fark denklem sistemlerinin çözümlerini ve çözümlerin periyodikliğini incelemişlerdir [2].

Stevic ve Rankovic (2016), “*On a practically solvable product-type system of difference equations of second order*” isimli çalışmalarında $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ve $z_{-1}, z_0, w_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ başlangıç koşulları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$z_{n+1} = \alpha z_n^a w_n^b, \quad w_{n+1} = \beta w_n^c z_{n-1}^d, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

ikinci mertebeden çarpılabilir tipteki fark denklem sisteminin çözülebilirliğini ayrıntılı olarak incelemişlerdir [36].

Stevic (2017), “*Existence of a unique bounded solution to a linear second-order difference equation and the linear first-order difference equation*” isimli çalışmasında $(q_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ve $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ verilen sayı dizileri olmak üzere

$$f_n = x_{n+2} - q_n x_n, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

fark denkleminin tek bir sınırlı çözümünün varlığı için bazı yeterli koşulları, lineer fark denklemleri teorisi ile Banach sabit nokta teoreminin bir kombinasyonuna dayandırarak elde etmiştir. Dahası, fark denklemlerinin çözülebilirlik teorisini kullanarak denklemi ele almıştır. Birinci mertebeden fark denkleminin çözümlerinin global yakınsaklık sonuçlarını elde etmiştir [31].

Halim ve Rabago (2018), “*On the solutions of a second-order difference equations in terms of generalized Padovan sequences*” isimli çalışmalarında $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+$ parametreleri ve x_{-1} ve x_0 başlangıç koşulları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_{n-1} + \beta}{\gamma x_n x_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

rasyonel fark denkleminin çözümünü, kararlılık karakterini ve asimptotik davranışını incelemişlerdir. Ayrıca verilen denklemin

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_{n-1} + \beta}{\gamma y_n x_{n-1}}, y_{n+1} = \frac{\alpha y_{n-1} + \beta}{\gamma x_n y_{n-1}}, n \in \mathbb{N}_0,$$

iki-boyutlu fark denklem sisteminin çözümlerini de incelemişlerdir [16].

Cömert, Yalçınkaya ve Tollu (2018), “*A study on the positive solutions of an exponential type difference equation*” isimli çalışmalarında α, β, γ parametreleri ve $x_{-k}, x_{-k+1}, \dots, x_0$ başlangıç koşulları pozitif reel sayılar ve k bir çift sayı olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta e^{-x_n}}{\gamma + x_{n-k}}, n \in \mathbb{N}_0,$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin dinamik davranışını ve kararlılığını incelemişlerdir [7].

Stevic, Iricanin, Kosmala ve Smarda (2018), “*Representation of solutions of a solvable nonlinear difference equation of second-order*” isimli çalışmalarında a, b, c parametreleri ve x_{-1}, x_0 başlangıç değerleri karmaşık sayılar ve $c \neq 0$ olmak üzere

$$x_{n+1} = a + \frac{b}{x_n} + \frac{c}{x_n x_{n-1}}, n \in \mathbb{N}_0,$$

lineer olmayan ikinci mertebeden fark denkleminin iyi tanımlanmış çözümlerinin teorik açıklamalarını sunmuşlardır. Lineer fark denklemiyle ilişkili karakteristik polinomun kökleri cinsinden üçüncü mertebeden homojen lineer fark denkleminin özel çözümünü hesaplayarak, lineer olmayan fark denkleminin çözümlerini daha somut bir şekilde incelemişlerdir [30].

Stevic (2018), “*On a two-dimensional solvable system of difference equations*” isimli çalışmasında a, b, c, d parametreleri ve $x_{-j}, y_{-j}, j = \overline{0, 2}$, başlangıç değerleri karmaşık sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{y_n y_{n-2}}{b x_{n-1} + a y_{n-2}}, y_{n+1} = \frac{x_n x_{n-2}}{d y_{n-1} + c x_{n-2}}, n \in \mathbb{N}_0,$$

iki homojen, sabit katsayılı lineer fark denklemleri için iki özel çözüm cinsinden genel çözümün bir temsilini sunmuşlardır. Genel çözümün bazı uygulamaları olarak,

literatürde yakın zamanda sunulan sistemin dört özel durumuna dair çözümlerin nasıl elde edildiğini teorik bir açıklama olmadan incelenen çalışmanın, bu çalışmada çözümlerinin nasıl elde edildiğini teorik olarak da açıklamasını yapmıştır [34].

Haddad, Touafek ve Rabago (2018), “*Well-defined solutions of a system of difference equations*” isimli çalışmalarında a, b, α, β parametreleri ve $x_{-i}, y_{-i}, i = 0, 1$, başlangıç değerleri sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{ax_n y_{n-1}}{y_n - \alpha} + \beta, \quad y_{n+1} = \frac{bx_{n-1} y_n}{x_n - \beta} + \alpha, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

$a = b$ özel durumu için çözümlerin davranışını incelemişlerdir. Ayrıca sistemin periyodik çözümler kabul edebileceği gerekli koşulları da belirlemişlerdir. Son olarak teorik sonuçları desteklemek amacıyla sayısal örnekler de vermişlerdir [19].

Akrour Touafek ve Halim (2019), “*On a system of difference equations of second-order solved in a closed form*” isimli çalışmalarında a, b, c ve $c \neq 0$ parametreleri ve x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0 başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{ay_n x_{n-1} + bx_{n-1} + c}{y_n x_{n-1}}, \quad y_{n+1} = \frac{ax_n y_{n-1} + by_{n-1} + c}{x_n y_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

fark denklem sisteminin kapalı formda çözümlerini incelemişlerdir [3].

Akrour, Touafek ve Halim (2019), “*On a system of difference equations of third order solved in closed form*” isimli çalışmalarında $n \in \mathbb{N}_0$ için a, b, c ve d parametreleri $x_{-2}, x_{-1}, x_0, y_{-2}, y_{-1}, y_0$ başlangıç koşulları sıfırdan farklı reel sayılar ve $d \neq 0$ olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{ay_{n-2} x_{n-1} y_n + bx_{n-1} y_{n-2} + cy_{n-2} + d}{y_n - 2x_{n-1} y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{ax_n - 2y_{n-1} x_n + by_{n-1} x_{n-2} + cx_{n-2} + d}{x_n - 2y_{n-1} x_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

fark denklem sisteminin kapalı formda çözülebilir olduğunu göstermişlerdir. Özellikle $a = b = c = d = 1$ olduğunda çözümlerin Tetrenacci sayıları ile ilişkili olduğunu göstermişlerdir [4].

Kara ve Yazlık (2019), “*On a solvable system of difference equations of higher-order with period two coefficients*” isimli çalışmalarında $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, (\beta_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, x_{-i}, y_{-i} \ i \in \{0, 1, \dots, k\}, a_0 = b_1$ ve $a_1 = b_0$ iki-periyodlu ve $x_{-i}, y_{-i}, i \in \{0, 1, \dots, k\}$, başlangıç koşulları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{a_n x_{n-k+1} y_{n-k}}{y_n - \alpha_n} + \beta_{n+1}, \quad y_{n+1} = \frac{b_n y_{n-k+1} x_{n-k}}{x_n - \beta_n} + \alpha_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

fark denklem sisteminin çözümlerini elde etmişler ve $a_0 = b_1$ ve $a_1 = b_0$ durumu için çözümlerin asimptotik davranışını incelemişlerdir [47].

Stevic (2019), “*On a class of systems of rational second-order difference equations solvable in closed form*” isimli çalışmasında a, b, c, d parametreleri ve x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0 başlangıç koşulları reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = ay_n + \frac{cy_n}{y_n - bx_{n-1}}, \quad y_{n+1} = bx_n + \frac{dx_n}{x_n - ay_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

lineer olmayan fark denklem sistemini, bilinen çözülebilir fark denklemine dönüştürerek kapalı formda çözülebilir olduğunu (1) $c = 0$; (2) $d = 0$; (3) $a = 0$; (4) $b = 0$ ve (5) $abcd \neq 0$ beş farklı durum için göstermiştir [37].

Stevic (2019), “*Two-dimensional solvable system of difference equations with periodic coefficients*” isimli çalışmasında $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, (c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, (d_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ periyodik diziler olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{a_n}{x_n} + \frac{b_n}{y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{c_n}{x_n} + \frac{d_n}{y_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

iki boyutlu fark denklem sisteminin çözülebilir olduğunu ve literatürdeki bazı sonuçları önemli ölçüde genellediğini göstermişlerdir. Dahası 2-periyotlu veya 3-periyotlu periyodik katsayılı sistemin çözümlerini elde etmişlerdir [38].

Khelifa Halim ve Bouchair (2020), “*On a system of three difference equations of higher order solved in terms of Lucas and Fibonacci numbers*” isimli çalışmalarında

başlangıç koşulları $x_{-i}, y_{-i}, z_{-i}, i \in \{0, 1, \dots, k\}$, -3 'e eşit olmayan reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{1+2y_{n-k}}{3+y_{n-k}}, y_{n+1} = \frac{1+2z_{n-k}}{3+z_{n-k}}, z_{n+1} = \frac{1+2x_{n-k}}{3+x_{n-k}}, n, k \in \mathbb{N}_0,$$

yüksek mertebeden rasyonel fark denklem sisteminin genel çözümünün kapalı formda çözülebilir olduğunu ve dahası çözümlerin Fibonacci ve Lucas sayıları ilişkili olduğunu göstermişlerdir [26].

Kara, Yazlık ve Tollu (2020), “*Solvability of a system of higher order nonlinear difference equations*” isimli çalışmalarında k ve l pozitif tam sayılar $a, b, c, d, \alpha, \beta, \delta, \gamma$ parametreleri ve $j = \overline{1, k+l}$ için x_{-j}, y_{-j} başlangıç şartları reel sayılar olmak üzere

$$x_n = ay_{n-k} + \frac{dy_{n-k}x_{n-(k+l)}}{bx_{n-(k+l)}cy_{n-l}}, y_n = ax_{n-k} + \frac{\delta x_{n-k}y_{n-(k+l)}}{\beta y_{n-(k+l)}\gamma x_{n-l}}, n \in \mathbb{N}_0,$$

fark denklem sisteminin kapalı formda çözülebileceğini göstermişlerdir. Ayrıca $l = 1$ için çözümlerin asimptotik davranışlarını incelemişler ve elde edilen çözümleri kullanarak iyi tanımlı olmayan çözümlerin kümesini elde etmişlerdir [21].

Kara ve Yazlık (2020), “*On the system of difference equations*”

$$x_n = \frac{x_{n-2}y_{n-3}}{y_{n-1}(a_n + b_n x_{n-2}y_{n-3})}, y_n = \frac{y_{n-2}x_{n-3}}{x_{n-1}(\alpha_n + \beta_n y_{n-2}x_{n-3})}”$$
 isimli çalışmalarında

$\forall_n \in \mathbb{N}_0, (a_n), (b_n), (\alpha_n), (\beta_n)$ dizileri ve $x_{-j}, y_{-j}, j \in \{1, 2, 3\}$, başlangıç koşulları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$x_n = \frac{x_{n-2}y_{n-3}}{y_{n-1}(a_n + b_n x_{n-2}y_{n-3})}, y_n = \frac{y_{n-2}x_{n-3}}{x_{n-1}(\alpha_n + \beta_n y_{n-2}x_{n-3})}, n \in \mathbb{N}_0,$$

fark denklemleri sisteminin kapalı formda çözülebileceğini göstermişlerdir. Tüm dizilerin $(a_n), (b_n), (\alpha_n), (\beta_n)$ sabit olduğu durum için çözümlerin asimptotik davranışını ve periyodikliğini de incelemişlerdir [23].

Taskara, Tollu, Touafek ve Yazlık (2020), “*A solvable system of difference equations*” isimli çalışmalarında $n \in \mathbb{N}_0$ için $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta, p$ parametreleri ve $x_{-2}, x_{-1}, y_{-2}, y_{-1}$ başlangıç değerleri reel sayılar olmak üzere

$$x_n = \frac{ay_{n-1}^p + b(x_n - 2y_{n-1})^{p-1}}{cy_{n-1} + dx_{n-2}^{p-1}}, y_n = \frac{\alpha x_{n-1}^p + \beta(y_n - 2x_{n-1})^{p-1}}{\gamma x_{n-1} + \delta y_{n-2}^{p-1}}, n \in \mathbb{N}_0,$$

fark denklem sisteminin çözülebilir olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca, elde edilen formülleri kullanarak söz konusu sistemin iyi tanımlanmış çözümlerinin asimptotik davranışını incelemişler ve başlangıç değerlerinin iyi tanımlı olmayan değerlerinin kümesini elde etmişlerdir [43].

Mylona, Papaschinopoulos, Schinas (2020), “*Stability and flip bifurcation of a three-dimensional exponential system of difference equations*” isimli çalışmalarında a_i, b_i, c_i, d_i ve k_i için $i = 1, 2, 3$ parametreleri ve x_0, y_0 ve z_0 başlangıç koşulları reel sayılar olmak üzere

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= a_1 \frac{y_n}{b_1 + y_n} + c_1 \frac{x_n e^{k_1 - d_1 x_n}}{1 + e^{k_1 - d_1 x_n}}, \\ y_{n+1} &= a_2 \frac{z_n}{b_2 + z_n} + c_2 \frac{y_n e^{k_2 - d_2 y_n}}{1 + e^{k_2 - d_2 y_n}}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \\ z_{n+1} &= a_3 \frac{x_n}{b_3 + x_n} + c_3 \frac{z_n e^{k_3 - d_3 z_n}}{1 + e^{k_3 - d_3 z_n}}, \end{aligned}$$

sıfır dengesinin kararlılığını ve flip çatallanmanın oluşumunu incelemişlerdir. Özdeğerlerden birinin -1’e eşit olduğu ve kalan özdeğerlerin mutlak değerinin 1’den küçük olduğu özel durumu için merkez manifold teorisini kullanarak incelemişlerdir [27].

Dilip ve Mathew (2021), “*Dynamics of a second-order nonlinear difference system with exponents*” isimli çalışmalarında $\alpha_1, \alpha_2, a, b, c, d$ parametreleri ve x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0 başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere

$$\begin{cases} x_{n+1} = \alpha_1 + ae^{-x_{n-1}} + by_n e^{-y_{n-1}}, \\ y_{n+1} = \alpha_2 + ce^{-y_{n-1}} + dx_n e^{-x_{n-1}}, \end{cases} n \in \mathbb{N}_0,$$

fark denklem sisteminin çözümlerinin sınırlılığını, yakınsaklığını ve global asimptotik kararlılığını incelemişlerdir [9].

Gümüş ve Abo-Zeid (2021), “ *Qualitative study of a third order rational system of difference equations*” isimli çalışmalarında $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ parametreleri ve $u_{-i}, v_{-i} \in (0, \infty), i = 0, 1, 2$ başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere

$$u_{n+1} = \frac{\alpha u_{n-1}^2}{\beta + \gamma u_{n-2}}, v_{n+1} = \frac{\alpha_1 u_{n-1}^2}{\beta_1 + \gamma_1 u_{n-2}}, n \in \mathbb{N}_0,$$

iki-boyutlu fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin dinamiğini incelemiştir [13].

Abualrub ve Aloqeili (2021), “*Dynamics of positive solutions of a system of difference equations*” isimli çalışmalarında parametreler $A > 0$ ve $x_i, y_i, i \in \{-k, -k+1, \dots, 0\}$, başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = A + \frac{y_n}{y_{n-k}}, y_{n+1} = A + \frac{x_n}{x_{n-k}}, n \in \mathbb{N}_0,$$

sistemin pozitif çözümlerinin asimptotik davranışını incelenmiştir [1].

Akrour, Mesmouli, Tollu ve Touafek (2021), “*On the solutions of a system of max-type difference equations*” isimli çalışmalarında $x_{-i}, y_{-i}, i \in \{0, 1, 2, 3\}$, başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \max \left\{ x_{n-1}, \frac{x_n y_{n-1}}{y_{n-2}} \right\}, y_{n+1} = \max \left\{ y_{n-1}, \frac{y_n x_{n-1}}{x_{n-2}} \right\}, n \in \mathbb{N}_0,$$

sistemin çözümlerinin açık formüllerini elde ederek maksimum tip fark denklemlerinin dinamik özelliklerini incelemiştir [5].

Kara ve Yazlık (2021), “*On eight solvable systems of difference equations in terms of generalized Padovan sequences*” isimli çalışmalarında p_n, q_n, r_n, s_n dizileri x_n ve y_n dizilerinden herhangi biri ve $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}, D_f \subseteq \mathbb{R}$ üzerinde birebir sürekli fonksiyon

$j \in \{0, 1, 2\}$ için x_{-j}, y_{-j} başlangıç şartları D_f üzerinde tanımlı reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = f^{-1}(af(p_{n-1}) + bf(q_{n-2})), y_{n+1} = f^{-1}(af(r_{n-1}) + bf(s_{n-2})), n \in \mathbb{N}_0,$$

fark denklem sistemlerinin çözümlerini genelleştirilmiş Padovan sayıları ile ilişkili olduğunu göstermiştir [22].

Tollu, Yalçınkaya, Ahmad ve Yao (2021), “*A detailed study on a solvable system related to the linear fractional difference equation*” isimli çalışmalarında a, b parametreleri ve x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0 başlangıç koşulları reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{a}{1 + y_n x_{n-1}}, \quad y_{n+1} = \frac{b}{1 + x_n y_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

sistemin genel çözümünü, üçüncü mertebeden lineer fark denkleminin karakteristik sıfırları cinsinden ifade etmişlerdir. Ayrıca, sistemin iyi tanımlanmış çözümlerini karakterize ederek iyi tanımlanmış çözümlerin asimptotik davranışlarını da incelemişlerdir [44].

Stevic, Iricanin, Kosmola ve Smarda (2022), “*On a nonlinear second-order difference equation*” isimli çalışmasında $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, parametreler ve x_{-1}, x_0 başlangıç koşulları reel sabitler olmak üzere

$$x_{n+1} = f^{-1} \left(f(x_n) \frac{\alpha f(x_n) + \beta f(x_{n-1})}{\gamma f(x_n) + \delta f(x_{n-1})} \right), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

ikinci mertebeden lineer olmayan fark denkleminin çözümleri parametrelere göre incelemiştir. Burada $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli, monoton fonksiyonlar ve $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $f(0) = 0$ dır [32].

Boulouh, Touafek ve Tollu (2022), “*On the behavior of the solutions of an abstract system of difference equations*” isimli çalışmalarında başlangıç değerleri x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0 pozitif reel sayılar ve $f_1, f_2, g_1, g_2: (0, +\infty)^2 \rightarrow (0, +\infty)$ fonksiyonları sürekli ve homojen olmak üzere

$$x_{n+1} = f_1(x_n, x_{n-1}) + f_2(y_n, y_{n-1}), \quad y_{n+1} = g_1(x_n, x_{n-1}) + g_2(y_n, y_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

genel fark denklem sisteminin çözümlerinin davranışını incelemişlerdir [6].

Stefanidou ve Papaschinopoulos (2022), “*On a generalized cyclic-type system of difference equations with maximum*” isimli çalışmalarında $n \in \mathbb{N}_0$, $A_i > 1$, $i = 1, 2, \dots, k$,

üsler p, q ve başlangıç değerler $x_i(-1), x_i(0), i \in \{1, 2, \dots, k\}$, pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_i(n+1) = \max \left\{ A_i, \frac{x_i^p(n)}{x_{i+1}^q(n-1)} \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, k-1,$$

$$x_k(n+1) = \max \left\{ A_k, \frac{x_k^p(n)}{x_1^q(n-1)} \right\}$$

k -boyutlu döngüsel maksimum tipli fark denklem sisteminin dinamik özelliklerini ve çözümlerinin davranışını incelemişlerdir [40].

Khaliq, Sadiq, Khan ve Ibrahim (2022), “*Exact solutions of three-dimensional max-type system of difference equations*” isimli çalışmalarında $u_{-i}, v_{-i}, w_{-i} \in (0, \infty), i \in \{0, 1\}$, ve $(A_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, (B_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, (C_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ pozitif iki-periyotlu periyodik diziler olmak üzere

$$u_{n+1} = \max \left\{ \left(\frac{A_n}{v_{n-1}} \right), u_n - 1 \right\}, v_{n+1} = \max \left\{ \left(\frac{B_n}{w_{n-1}} \right) \right\}, w_{n+1} = \max \left\{ \left(\frac{C_n}{u_{n-1}} \right), w_n - 1 \right\}, n \in \mathbb{N}_0,$$

maksimum tip fark denklem sisteminin çözümlerinin biçimini ve çözümlerin periyodikliğini incelemişlerdir [24].

Hamiod, Touafek, Dekkar ve Yazlık (2022), “*On a three-dimensional nonautonomous system of difference equations*” isimli çalışmalarında $\{p_n\}, \{q_n\}, \{r_n\}$ pozitif sayıların 3-periyotlu periyodik dizileri ve $i \in \{-3, -2, -1, 0\}$ için x_i, y_i, z_i pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{p_n + y_n}{p_n + y_{n-3}}, y_{n+1} = \frac{q_n + z_n}{q_n + z_{n-3}}, z_{n+1} = \frac{r_n + x_n}{r_n + x_{n-3}}, n \in \mathbb{N}_0,$$

dördüncü mertebeden rasyonel otonom olmayan üç boyutlu fark denklem sisteminin denge noktasının kararlılığını incelemişlerdir [14].

Khan ve Çalışma arkadaşları (2023), “*On stability analysis of a class of three-dimensional system of exponential difference equations*” isimli çalışmalarında a, b, c, d, e parametreleri ve $x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0, z_{-1}, z_0$ başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_{n-1}e^{-x_n}, \\ y_{n+1} = cy_n + dz_{n-1}e^{-y_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \\ z_{n+1} = ez_n + fx_{n-1}e^{-z_n}, \end{cases}$$

üç boyutlu üstel tipten fark denklem sisteminin çözümlerinin sınırlılığını, direncini ve asimptotik davranışını incelemişlerdir [25].

Stevic, Tollu (2023), “*On a two-dimensional nonlinear system of difference equations close to the bilinear system*” isimli çalışmalarında $n \in \mathbb{N}_0$ için k ve l iki doğal sayı ve $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ parametreleri ve x_{-j}, y_{-j} , $1 \leq j \leq k+l$, başlangıç koşulları reel sayılar olmak üzere

$$x_n = x_{n-k} \frac{ay_{n-1} + by_{n-(k+l)}}{cy_{n-1} + dy_{n-(k+l)}}, \quad y_n = y_{n-k} \frac{\alpha x_{n-1} + \beta x_{n-(k+l)}}{\gamma x_{n-1} + \delta x_{n-(k+l)}}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

iki-boyutlu lineer olmayan fark denklem sistemini incelemişlerdir. Fark denklem sisteminin çözülebileceğini ve genel çözümünü bulma yöntemini ayrıntılı bir şekilde sunarak göstermişlerdir. Denklem sisteminin, zaman zaman literatürde karşılık gelen bir boyutlu fark denkleminin, doğal bir genellemesi olduğunu göz önünde bulundurarak birçok sonucu genelleştirmişlerdir [39].

Yalçınkaya, El-Metwally, Bayram, Tollu (2023), “*On the dynamics of a higher-order fuzzy difference equation with rational terms*” isimli çalışmalarında z_n pozitif bulanık sayılardan oluşan bir dizi ve A, B, C ve z_{-j} , $j = 0, 1, \dots, s$ başlangıç değerleri pozitif bulanık sayılar ve m_1, m_2 negatif olmayan tamsayılar ve $s = \max\{m_1, m_2\}$ olmak üzere

$$z_{n+1} = A + \frac{B}{z_{n-m_1}} + \frac{C}{z_{n-m_2}}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

pozitif çözümlerin varlığını, sınırlılığını, asimptotik davranışını ve salınım davranışını incelemişlerdir [46].

Kara (2024), “*On a general non-linear difference equation of third-order*” isimli çalışmasında A, B, C, D , $A^2 + B^2 \neq 0 \neq C^2 + D^2$ koşulunu sağlayan parametreleri ve başlangıç değerleri x_{-i} , $i \in \{0, 1, 2\}$, reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = h^{-1} \left(h(x_n) \frac{Ah(x_{n-1}) + Bh(x_{n-2})}{Ch(x_{n-1}) + Dh(x_{n-2})} \right), n \in \mathbb{N}_0,$$

fark denkleminin kapalı form çözümlerini elde etmiştir. Burada $h, h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}, h(0) = 0$ koşullarını sağlayan monoton ve sürekli bir fonksiyondur [20].

2.2 Ön Bilgiler

Bu bölümde verilen temel bilgiler genel olarak [48], [49], [50] ve [51] numaralı kaynaklardan alınmıştır.

Tanım 2.2.1. $z : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon olsun. E öteleme (kaydırma) operatörü

$$E z(n) = z(n+1)$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.2.2. $z : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyon için Δ ileri fark operatörü veya z 'nin birinci mertebeden farkı

$$\Delta z(n) = z(n+1) - z(n)$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.2.3. $n \geq n_0$ için $\Delta H(n) = h(n)$ olsun. O zaman $n \geq n_0$ için

$$\Delta^{-1} h(n) = H(n) + c$$

biçiminde tanımlanan Δ^{-1} operatörüne, ters fark operatörü denir. $H(n)$ fonksiyonuna da $h(n)$ 'nin ters farkı denir. Burada c keyfi sabittir.

Teorem 2.2.1. $h(n), n \geq n_0$ için tanımlı bir fonksiyon olsun. O zaman

$$\Delta^{-1} h(n) = c + \sum_{j=n_0}^{n-1} h(j),$$

dir. Burada c keyfi sabittir.

Tanım 2.2.4. $n \in \mathbb{N}_0$ bağımsız değişken ve $z : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere

$$H(n, z(n), z(n+1), \dots, z(n+s)) = 0$$

ifadesine fark denklemi denir. Bu tez boyunca $z(n)$ yerine z_n sembolü kullanılmıştır.

Tanım 2.2.5. Bir fark denkleminde bağımlı değişkenin en büyük indisi ile en küçük indisinin farkına o fark denkleminin mertebesi ya da basamağı denir.

Tanım 2.2.6. $\chi_1(n), \chi_2(n), \dots, \chi_s(n)$ katsayıları ile $h(n)$, $n \geq n_0$ için tanımlı reel değerli fonksiyon ve $\mathbb{N}_{n_0}$ kümesinde $\chi_s(n) \neq 0$ olmak üzere

$$z_{n+s} + \chi_1(n)z_{n+s-1} + \dots + \chi_s(n)z_n = h(n)$$

şeklindeki fark denkleminin s . mertebeden lineer fark denklemi denir. Aksi halde ki fark denkleminin lineer olmayan fark denklemi denir.

Lineer fark denklemleri katsayıları ve $h(n)$ 'nin durumuna göre sınıflandırılırlar.

- i) Eğer $z_{n+s} + \chi_1(n)z_{n+s-1} + \dots + \chi_s(n)z_n = h(n)$ denkleminde $h(n) = 0$ ise denkleme *Lineer Homojen Fark Denklemi* denir.
- ii) $\forall i \in \{1, 2, \dots, s\}$ için $\chi_i(n) = \chi_i$ şeklinde katsayıları sabit iseler, denkleme *Sabit Katsayılı Lineer Fark Denklemi* denir.
- iii) $\exists i \in \{1, 2, \dots, s\}$ için $\chi_i(n)$ katsayılarından en az biri bağımsız değişkenin fonksiyonu ise denkleme *Değişken Katsayılı Lineer Fark Denklemi* denir.

Tanım 2.2.7. Reel sayıların herhangi bir alt aralığı I olsun. $h: I^{s+1} \rightarrow I$ sürekli diferansiyellenebilen bir fonksiyon ise $\forall z_{-s}, z_{-(s-1)}, \dots, z_0 \in I$ başlangıç koşulları için $z_{n+1} = h(z_n, z_{n-1}, \dots, z_{n-s})$, $n \in \mathbb{N}_0$,

fark denklemi bir tek $\{z_n\}_{n=-s}^{\infty}$ çözümüne sahiptir.

Tanım 2.2.8. $z_{n+1} = h(z_n, z_{n-1}, \dots, z_{n-s})$, $n \in \mathbb{N}_0$, fark denkleminin bir çözümü $\{z_n\}_{n=-s}^{\infty}$ olsun. Eğer bu çözüm $n \geq -s$ için $z_{n+s} = z_n$ eşitliğini sağlıyorsa bu çözüme s -periyotludur denir. Bu şartı sağlayan sıfırdan büyük en küçük s sayısına da asal periyot denir.

Tanım 2.2.9. $\{z_n\}$ dizisinden belli sayıda terim çıkartıldığında, kalan sonsuz sayıdaki terim için $z_{n+s} = z_n$ eşitliği sağlanıyorsa bu diziye er geç s -periyotludur denir. Bu şartı sağlayan sıfırdan büyük en küçük tam sayı s 'dir.

Tanım 2.2.10. $j \in \{1, 2\}$ için z_{-j} başlangıç koşulları reel sayılar, I reel sayıların herhangi bir alt aralığı ve $h: I^2 \rightarrow I$ sürekli diferansiyellenebilen bir fonksiyon

$$z_n = h(z_{n-1}, z_{n-2}), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

fark denklemini

$$F = \{(z_{-2}, z_{-1}) \in \mathbb{R}^2 : j \in \{1, 2\} \text{ için } z_{-j} \in I, z_n \notin I\}$$

iyi tanımlı yapmayan noktalar kümesine yasaklı küme (forbiden set) denir.

Teorem 2.2.2. (a_n) ve (b_n) birer dizi olsun. $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ için

$$w_{m+j} = a_n w_{r(n-1)+j} + b_n, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

lineer fark denkleminin çözümü

$$w_{m+j} = \left(\prod_{j=0}^n a_j \right) w_{j-r} + \sum_{k=0}^n \left(\prod_{j=k+1}^n a_j \right) b_k$$

biçimindedir. Eğer a_n ve b_n katsayıları $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve $b \in \mathbb{R}$ için $a_n = a$ ve $b_n = b$

biçiminde sabit alınır ve $\forall l < j$ için $\prod_{i=j}^l \gamma_i = 1$ ve $\sum_{i=j}^l \eta_i = 0$ eşitlikleri de göz önünde

bulundurulursa

$$w_{m+j} = a w_{r(n-1)+j} + b, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

lineer fark denkleminin çözümü

$$w_{m+j} = \begin{cases} a^{n+1} w_{j-r} + \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} b, & a \neq 1, \\ w_{j-r} + (n+1)b, & a = 1, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

biçiminde elde edilir.

Tanım 2.2.11.

$$\begin{cases} x_{n+1} = f_1(x_n, x_{n-1}, y_n, y_{n-1}) \\ y_{n+1} = f_2(x_n, x_{n-1}, y_n, y_{n-1}) \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

sistemine iki-boyutlu ve ikinci mertebeden fark denklem sistemi denir.

Teorem 2.2.3. I_1, I_2 reel sayıların herhangi iki alt aralığı ve $f_1 : I_1^2 \times I_2^2 \rightarrow I_1$ ve

$f_2 : I_1^2 \times I_2^2 \rightarrow I_2$ sürekli diferansiyellenebilen iki fonksiyon olsun. $j \in \{0, 1\}$ için

$\forall (x_{-j}, y_{-j}) \in I_1 \times I_2$ başlangıç koşulları olmak üzere

$$\begin{cases} x_{n+1} = f_1(x_n, x_{n-1}, y_n, y_{n-1}), \\ y_{n+1} = f_2(x_n, x_{n-1}, y_n, y_{n-1}), \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

sistemi tek bir $\{(x_n, y_n)\}_{n=-1}^\infty$ çözümüne sahiptir.

Tanım 2.2.12 Tanım 2.2.11’ de verilen sistemin iyi tanımlı bir çözümü $\{(x_n, y_n)\}_{n=-1}^{\infty}$ olsun. Eğer $\{(x_n, y_n)\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümü, $n \geq -1$ için $x_{n+p} = x_n, y_{n+p} = y_n$ koşulunu sağlıyorsa $\{(x_n, y_n)\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümü p -periyotludur denir. Bu şartı sağlayan en küçük pozitif p sayısına da asal periyot denir.

Tanım 2.2.13. $m, k \in \mathbb{N}$ ve $x_{-j}^{(i)} \in \mathbb{R}, j = \overline{1, k}, i = \overline{1, m}$ olmak üzere $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$\begin{aligned} x_n^{(1)} &= f_1(x_{n-1}^{(1)}, \dots, x_{n-k}^{(1)}, x_{n-1}^{(2)}, \dots, x_{n-k}^{(2)}, \dots, x_{n-1}^{(m)}, \dots, x_{n-k}^{(m)}), \\ x_n^{(2)} &= f_2(x_{n-1}^{(1)}, \dots, x_{n-k}^{(1)}, x_{n-1}^{(2)}, \dots, x_{n-k}^{(2)}, \dots, x_{n-1}^{(m)}, \dots, x_{n-k}^{(m)}), \\ &\vdots \\ x_n^{(m)} &= f_m(x_{n-1}^{(1)}, \dots, x_{n-k}^{(1)}, x_{n-1}^{(2)}, \dots, x_{n-k}^{(2)}, \dots, x_{n-1}^{(m)}, \dots, x_{n-k}^{(m)}), \end{aligned}$$

fark denklem sistemi verilsin. $n_0 \geq -1$ iken $-k \leq j \leq n_0$ için $(x_j^{(1)}, x_j^{(2)}, \dots, x_j^{(m)})$ vektör dizisi; $0 \leq j < n_0 + 1$ için sisteminin bir tanımsız çözümü olarak adlandırılır. Dahası $x_{n_0+1}^{(i_0)}, i_0 \in \{1, \dots, m\}$ tanımsız olup bu da $f_{i_0}(x_{n_0}^{(1)}, \dots, x_{n_0-k+1}^{(1)}, x_{n_0}^{(2)}, \dots, x_{n_0-k+1}^{(2)}, \dots, x_{n_0}^{(m)}, \dots, x_{n_0-k+1}^{(m)})$ ifadesinin tanımsız olduğunu gösterir. fark denklem sisteminin tanımsız çözümlerini meydana getiren, $j = \overline{1, k}, i = \overline{1, m}$ olmak üzere $x_{-j}^{(i)}$ başlangıç koşullarının kümesine fark denklem sisteminin tanımsız çözümlerinin kümesi ya da yasaklı küme denir.

Tanım 2.2.14 Başlangıç koşulları $s_0 = 0, s_1 = 1$ olmak üzere $s_{n+2} = as_{n+1} + bs_n, n \in \mathbb{N}_0$,

dizisine genelleştirilmiş Fibonacci dizisi denir. $\lambda_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \lambda^2 - a\lambda - b = 0$

karakteristik denklemin kökleri olmak üzere genelleştirilmiş Fibonacci dizisine ait binet

formülü ise $s_n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}$ şeklindedir. Öte yandan $x_{n+2} - ax_{n+1} - bx_n = 0$ ikinci mertebeden

sabit katsayılı, homojen lineer fark denkleminin genelleştirilmiş Fibonacci sayıları ile ilişkili çözümü $x_n = x_1 s_n + b x_0 s_{n-1}, n \in \mathbb{N}$, şeklindedir.

3. BÖLÜM

SİSTEM (3.1)' İN PARAMETRELERİNİN DURUMLARINA GÖRE ÇÖZÜMLERİNİN İNCELENMESİ

Bu bölümde, $j \in \{1, 2\}$ için a_j, b_j, c_j, d_j parametreler ve $u_{-i}, v_{-i}, i \in \{0, 1\}$, başlangıç koşulları reel sabitler olmak üzere

$$\begin{cases} u_{n+1} = f^{-1} \left(g(v_n) \frac{a_1 f(u_n) + b_1 g(v_{n-1})}{c_1 f(u_n) + d_1 g(v_{n-1})} \right), \\ v_{n+1} = g^{-1} \left(f(u_n) \frac{a_2 g(v_n) + b_2 f(u_{n-1})}{c_2 g(v_n) + d_2 f(u_{n-1})} \right), \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.1)$$

iki-boyutlu ikinci mertebeden lineer olmayan fark denklem sisteminin çözümleri parametrelere göre incelencektir. Burada $c_j^2 + d_j^2 \neq 0, j \in \{1, 2\}$, $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli, monoton fonksiyonlar ve $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}, f(0) = 0, g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}, g(0) = 0$ dır.

3.1. Sistem (3.1)' in Kapalı Formda Çözümleri

Burada, sistem (3.1)' in iyi tanımlı çözümleri için gerekli olan koşullar ele alınacaktır. Eğer $i \in \{0, 1\}$ için $u_{-i} = 0, v_{-i} = 0$ ise, o zaman sistem (3.1)' in çözümleri tanımsızdır. Dahası kabul edelim ki $n_0 \in \mathbb{N}_0$ için $u_{n_0} = 0$ olsun. Bu durumda sistem (3.1)' in ikinci denkleminde $v_{n_0+1} = 0$ olur ki buradan v_{n_0+2} tanımsızdır. Benzer şekilde kabul edelim ki $n_1 \in \mathbb{N}_0$ için $v_{n_1} = 0$ olsun. Bu durumda sistem (3.1)' in birinci denkleminde $u_{n_1+1} = 0$ olur ki buradan u_{n_1+2} tanımsızdır. Böylece sistem (3.1)' in her iyi tanımlı çözümü olması için gerek ve yeter koşul $i \in \{0, 1\}$ için $u_{-i} v_{-i} \neq 0$ olmasıdır. Böylece sistem (3.1)' in iyi tanımlı bir $(u_n, v_n)_{n \geq -1}$ çözümü için

$$u_n v_n \neq 0, n \in \mathbb{N}_{-1}, \quad (3.2)$$

olacaktır.

Bundan sonra sistem (3.1)' in her iyi tanımlı $(u_n, v_n)_{n \geq -1}$, (3.2)' de verilen koşulu sağladığı varsayılacaktır.

Teorem 3.1.1. $a_j, b_j, c_j, d_j, j \in \{0,1\}$, parametreler ve $u_{-i}, v_{-i}, i \in \{0,1\}$, başlangıç koşulları reel sabitler, $c_j^2 + d_j^2 \neq 0, j \in \{1,2\}$, $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli, monoton fonksiyonlar ve $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}, f(0) = 0, g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}, g(0) = 0$. Bu durumda sistem (3.1) kapalı formda çözülebilir.

İspat. İlk olarak $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}, f(0) = 0, g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}, g(0) = 0$ ve $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli, monoton fonksiyonlar olduğundan f, g bire-bir fonksiyonlar, 0 noktası f ve g fonksiyonlarının tek kökü ve bu fonksiyonlar $\mathbb{R}'$ de homeomorfizm' dir. Fonksiyonların bu özelliği dikkate alınarak, sistem (3.1)' in parametrelerin durumlarına göre çözümleri aşağıdaki gibi incelencektir.

1. **Durum:** $j \in \{1,2\}$ için $a_j d_j = b_j c_j, a_j = b_j = 0, c_j d_j \neq 0: j \in \{1,2\}$ için $a_j = b_j = 0$ olduğundan, sistem (3.1)' den $u_{n+1} = f^{-1}(0), v_{n+1} = g^{-1}(0)$ elde edilir. f ve g fonksiyonlarının özelliklerinden $u_{n+1} = v_{n+1} = 0, n \in \mathbb{N}_0$. Buradan sistem (3.1)' in çözümleri

$$u_n = 0, v_n = 0, n \in \mathbb{N}, \quad (3.3)$$

şeklindedir.

2. **Durum:** $j \in \{1,2\}$ için $a_j d_j = b_j c_j, a_j = 0, b_j d_j \neq 0: j \in \{1,2\}$ için $a_j = 0, b_j d_j \neq 0$ olduğundan, $j \in \{1,2\}$ için $c_j = 0$ olup, sistem (3.1)' den

$$u_{n+1} = f^{-1}\left(\frac{b_1}{d_1} g(v_n)\right), v_{n+1} = g^{-1}\left(\frac{b_2}{d_2} f(u_n)\right), n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.4)$$

yazılabilir. f ve g fonksiyonlarının özelliklerinden

$$f(u_{n+1}) = \frac{b_1}{d_1} g(v_n), g(v_{n+1}) = \frac{b_2}{d_2} f(u_n), n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.5)$$

elde edilir ki buradan

$$f(u_{n+1}) = \frac{b_1 b_2}{d_1 d_2} f(u_{n-1}), g(v_{n+1}) = \frac{b_1 b_2}{d_1 d_2} g(v_{n-1}), n \in \mathbb{N}, \quad (3.6)$$

bulunur. Şimdi

$$z_n = f(u_n), t_n = g(v_n), n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.7)$$

dönüşümü (3.6)' daki denklemlere uygulanırsa, (3.6)' da verilen fark denklemleri

$$z_{n+1} = \frac{b_1 b_2}{d_1 d_2} z_{n-1}, \quad t_{n+1} = \frac{b_1 b_2}{d_1 d_2} t_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.8)$$

ikinci mertebeden lineer fark denklemlerine dönüşür. $r = 2$ için Teorem 2.2.2' den, (3.8)' de verilen denklemlerin çözümleri $i \in \{0, 1\}$ için

$$z_{2n+i} = \left(\frac{b_1 b_2}{d_1 d_2} \right)^n z_i, \quad t_{2n+i} = \left(\frac{b_1 b_2}{d_1 d_2} \right)^n t_i, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.9)$$

elde edilir. Öte yandan (3.7)' de verilen değişken değişimleri ve (3.9)' da verilen çözümlerden, sistem (3.1)' in çözümleri $i \in \{0, 1\}$ için

$$u_{2n+i} = f^{-1} \left(\left(\frac{b_1 b_2}{d_1 d_2} \right)^n f(u_i) \right), \quad v_{2n+i} = g^{-1} \left(\left(\frac{b_1 b_2}{d_1 d_2} \right)^n g(v_i) \right), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.10)$$

bulunur.

3. Durum: $j \in \{1, 2\}$ için $a_j d_j = b_j c_j$, $a_j c_j \neq 0$, $b_j = 0$: $j \in \{1, 2\}$ için $a_j c_j \neq 0$, $b_j = 0$ olduğundan, $j \in \{1, 2\}$ için $d_j = 0$ olup, sistem (3.1)' den

$$u_{n+1} = f^{-1} \left(\frac{a_1}{c_1} g(v_n) \right), \quad v_{n+1} = g^{-1} \left(\frac{a_2}{c_2} f(u_n) \right), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.11)$$

yazılabilir. f ve g fonksiyonlarının özelliklerinden

$$f(u_{n+1}) = \frac{a_1}{c_1} g(v_n), \quad g(v_{n+1}) = \frac{a_2}{c_2} f(u_n), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.12)$$

elde edilir ki buradan

$$f(u_{n+1}) = \frac{a_1 a_2}{c_1 c_2} f(u_{n-1}), \quad g(v_{n+1}) = \frac{a_1 a_2}{c_1 c_2} g(v_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.13)$$

yazılabilir. Öte yandan (3.7) dönüşümleri (3.13)' deki denklemlere uygulanırsa, (3.13) 'de verilen fark denklemleri

$$z_{n+1} = \frac{a_1 a_2}{c_1 c_2} z_{n-1}, \quad t_{n+1} = \frac{a_1 a_2}{c_1 c_2} t_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.14)$$

ikinci mertebeden lineer fark denklemlerine dönüşür. $r = 2$ için Teorem 2.2.2' den, (3.14)' de verilen denklemlerin çözümleri $i \in \{0, 1\}$ için

$$z_{2n+i} = \left(\frac{a_1 a_2}{c_1 c_2} \right)^n z_i, \quad t_{2n+i} = \left(\frac{a_1 a_2}{c_1 c_2} \right)^n t_i, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.15)$$

elde edilir. Öte yandan (3.7) değişken değişimleri ve (3.15)' de verilen çözümlerden, sistem (3.1)' in çözümleri $i \in \{0,1\}$ için

$$u_{2n+i} = f^{-1} \left(\left(\frac{a_1 a_2}{c_1 c_2} \right)^n f(u_i) \right), \quad v_{2n+i} = g^{-1} \left(\left(\frac{a_1 a_2}{c_1 c_2} \right)^n g(v_i) \right), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.16)$$

bulunur.

4. Durum: $j \in \{1,2\}$ için $a_j d_j = b_j c_j$, $d_j = 0$: $j \in \{1,2\}$ için $a_j d_j = b_j c_j$, $d_j = 0$ ise, sistem (3.1)' in iyi tanımlı çözümlere sahip olması için gerekli koşul $j \in \{1,2\}$ için $c_j \neq 0$ olmalıdır. Öte yandan verilen koşulun sağlanması içinde $j \in \{1,2\}$ için $b_j = 0$ olmalıdır. O zaman burada iki durum söz konusudur. Ya $j \in \{1,2\}$ için $a_j = 0$ ya da $j \in \{1,2\}$ için $a_j \neq 0$ olmalıdır. Bu iki durumda, sırasıyla 1. durum ve 3. durumda incelenmiştir.

5. Durum: $j \in \{1,2\}$ için $a_j d_j = b_j c_j$, $c_j = 0$: $j \in \{1,2\}$ için $a_j d_j = b_j c_j$, $c_j = 0$ ise, sistem (3.1)' in iyi tanımlı çözümlere sahip olması için gerekli koşul $j \in \{1,2\}$ için $d_j \neq 0$ olmalıdır. Öte yandan verilen koşulun sağlanması içinde $j \in \{1,2\}$ için $a_j = 0$ olmalıdır. O zaman burada iki durum söz konusudur. Ya $j \in \{1,2\}$ için $b_j = 0$ ya da $j \in \{1,2\}$ için $b_j \neq 0$ olmalıdır. Bu iki durumda sırasıyla 1. durum ve 2. durumda incelenmiştir.

6. Durum: $j \in \{1,2\}$ için $a_j d_j = b_j c_j$ ve $a_j b_j c_j d_j \neq 0$: $j \in \{1,2\}$ için $a_j d_j = b_j c_j$ ve $a_j b_j c_j d_j \neq 0$ olduğundan, sistem (3.1)' de $j \in \{1,2\}$ için $a_j = \frac{b_j c_j}{d_j}$ alınırsa

$$u_{n+1} = f^{-1} \left(\frac{b_1}{d_1} g(v_n) \right), \quad v_{n+1} = g^{-1} \left(\frac{b_2}{d_2} f(u_n) \right), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.17)$$

sistemlerine indirgenir ki bu da 2. durumda incelenmiştir.

7. Durum: $j \in \{1,2\}$ için $a_j d_j \neq b_j c_j$: Bu durumda $\forall n \in \mathbb{N}_{-1}$ için $u_n \neq 0$ ve $v_n \neq 0$ olduğundan f ve g fonksiyonlarının özelliklerinden $f(u_n) \neq 0$ ve $g(v_n) \neq 0$ olacaktır. O zaman sistem (3.1)' den

$$\frac{f(u_{n+1})}{g(v_n)} = \frac{a_1 \frac{f(u_n)}{g(v_{n-1})} + b_1}{c_1 \frac{f(u_n)}{g(v_{n-1})} + d_1}, \quad \frac{g(v_{n+1})}{f(u_n)} = \frac{a_2 \frac{g(v_n)}{f(u_{n-1})} + b_2}{c_2 \frac{g(v_n)}{f(u_{n-1})} + d_2}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.18)$$

yazılabilir. Öte yandan

$$z_n = \frac{f(u_n)}{g(v_{n-1})}, \quad w_n = \frac{g(v_n)}{f(u_{n-1})}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.19)$$

değişken değişimi, (3.18)' e uygulanırsa

$$z_{n+1} = \frac{a_1 z_n + b_1}{c_1 z_n + d_1}, \quad w_{n+1} = \frac{a_2 w_n + b_2}{c_2 w_n + d_2}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.20)$$

birinci mertebeden Riccati fark denklemlerine indirgenir. Burada iki durum söz konudur.

i. $j \in \{1, 2\}$ için $c_j = 0$: Bu durumda (3.20)' de verilen denklemler

$$z_{n+1} = \frac{a_1}{d_1} z_n + \frac{b_1}{d_1}, \quad w_{n+1} = \frac{a_2}{d_2} w_n + \frac{b_2}{d_2}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.21)$$

birinci mertebeden lineer fark denklemlerine indirgenir. $j \in \{1, 2\}$ için $\frac{a_j}{d_j} = 1$

veya $\frac{a_j}{d_j} \neq 1$ olacak şekilde dört durum söz konusudur. Eğer $j \in \{1, 2\}$ için $\frac{a_j}{d_j} = 1$

ise (3.21)' de verilen denklemlerin çözümleri

$$z_n = z_0 + \frac{b_1}{d_1} n, \quad w_n = w_0 + \frac{b_2}{d_2} n, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.22)$$

şeklinde olup (3.19)' da verilen dönüşümlerden

$$f(u_n) = \left(\frac{f(u_0)}{g(v_{-1})} + \frac{b_1}{d_1} n \right) g(v_{n-1}), \quad g(v_n) = \left(\frac{g(v_0)}{f(u_{-1})} + \frac{b_2}{d_2} n \right) f(u_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.23)$$

elde edilir. (3.23)' de verilen ilk denklemde ikinci denklem, ikinci denklemde de birinci denklem yerine yazılırsa

$$\begin{cases} f(u_n) = \left(\frac{f(u_0)}{g(v_{-1})} + \frac{b_1}{d_1} n \right) \left(\frac{g(v_0)}{f(u_{-1})} + \frac{b_2}{d_2} (n-1) \right) f(u_{n-2}), \\ g(v_n) = \left(\frac{g(v_0)}{f(u_{-1})} + \frac{b_2}{d_2} n \right) \left(\frac{f(u_0)}{g(v_{-1})} + \frac{b_1}{d_1} (n-1) \right) g(v_{n-2}), \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.24)$$

elde edilir ki sistem (3.1)' in çözümleri $i \in \{-1, 0\}$ ve $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$\begin{cases} u_{2n+i} = f^{-1} \left(f(u_i) \prod_{j=1}^n \left[\frac{f(u_0)}{g(v_{-1})} + \frac{b_1}{d_1} (2j+i) \right] \left[\frac{g(v_0)}{f(u_{-1})} + \frac{b_2}{d_2} (2j+i-1) \right] \right), \\ v_{2n+i} = g^{-1} \left(g(v_i) \prod_{j=1}^n \left[\frac{g(v_0)}{f(u_{-1})} + \frac{b_2}{d_2} (2j+i) \right] \left[\frac{f(u_0)}{g(v_{-1})} + \frac{b_1}{d_1} (2j+i-1) \right] \right), \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.25)$$

şeklinde bulunur. Eğer $\frac{a_1}{d_1} = 1$ ve $\frac{a_2}{d_2} \neq 1$ ise (3.21)' de verilen denklemlerin

çözümleri

$$z_n = z_0 + \frac{b_1}{d_1} n, \quad w_n = \left(\frac{a_2}{d_2} \right)^n w_0 + b_2 \frac{\left(\frac{a_2}{d_2} \right)^n - 1}{a_2 - d_2}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.26)$$

şeklinde olup (3.19)' da verilen dönüşümlerden

$$\begin{cases} f(u_n) = \left(\left(\frac{f(u_0)}{g(v_{-1})} + \frac{b_1}{d_1} n \right) g(v_{n-1}) \right), \\ g(v_n) = \left(\left(\frac{a_2}{d_2} \right)^n \left(\frac{g(v_0)}{f(u_{-1})} \right) + b_2 \frac{\left(\frac{a_2}{d_2} \right)^n - 1}{a_2 - d_2} \right) f(u_{n-1}), \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.27)$$

elde edilir. (3.27)' de verilen ilk denklemde ikinci denklem, ikinci denklemde de birinci denklem yerine yazılırsa

$$\begin{cases} f(u_n) = \left(\frac{f(u_0)}{g(v_{-1})} + \frac{b_1}{d_1} n \right) \left(\left(\frac{a_2}{d_2} \right)^{n-1} \left(\frac{g(v_0)}{f(u_{-1})} \right) + b_2 \frac{\left(\frac{a_2}{d_2} \right)^{n-1} - 1}{a_2 - d_2} \right) f(u_{n-2}), \\ g(v_n) = \left(\left(\frac{a_2}{d_2} \right)^n \left(\frac{g(v_0)}{f(u_{-1})} \right) + b_2 \frac{\left(\frac{a_2}{d_2} \right)^n - 1}{a_2 - d_2} \right) \left(\frac{f(u_0)}{g(v_{-1})} + \frac{b_1}{d_1} (n-1) \right) g(v_{n-2}), \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.28)$$

elde edilir ki sistem (3.1)' in çözümleri $i \in \{-1, 0\}$ ve $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{2n+i} = f^{-1} \left(f(u_i) \prod_{j=1}^n \left[\frac{f(u_0)}{g(v_{-1})} + \frac{b_1}{d_1} (2j+i) \right] \left[\left(\frac{a_2}{d_2} \right)^{2j+i-1} \left(\frac{g(v_0)}{f(u_{-1})} \right) + b_2 \frac{\left(\frac{a_2}{d_2} \right)^{2j+i-1} - 1}{a_2 - d_2} \right] \right), \\ v_{2n+i} = g^{-1} \left(g(v_i) \prod_{j=1}^n \left[\left(\frac{a_2}{d_2} \right)^{2j+i} \left(\frac{g(v_0)}{f(u_{-1})} \right) + b_2 \frac{\left(\frac{a_2}{d_2} \right)^{2j+i} - 1}{a_2 - d_2} \right] \left[\frac{f(u_0)}{g(v_{-1})} + \frac{b_1}{d_1} (2j+i-1) \right] \right), \end{array} \right. \quad (3.29)$$

elde edilir. Eğer $\frac{a_1}{d_1} \neq 1$ ve $\frac{a_2}{d_2} = 1$ ise (3.21)' de verilen denklemlerin çözümleri

$$z_n = \left(\frac{a_1}{d_1} \right)^n z_0 + b_1 \frac{\left(\frac{a_1}{d_1} \right)^n - 1}{a_1 - d_1}, \quad w_n = w_0 + \frac{b_2}{d_2} n, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.30)$$

şeklinde olup (3.19)' da verilen dönüşümlerden

$$\left\{ \begin{array}{l} f(u_n) = \left[\left(\frac{a_1}{d_1} \right)^n \left(\frac{f(u_0)}{g(v_{-1})} \right) + b_1 \frac{\left(\frac{a_1}{d_1} \right)^n - 1}{a_1 - d_1} \right] g(v_{n-1}), \\ g(v_n) = \left[\frac{g(v_0)}{f(u_{-1})} + \frac{b_2}{d_2} n \right] f(u_{n-1}), \end{array} \right. \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.31)$$

elde edilir. (3.31)' de verilen birinci denklemde ikinci denklem, ikinci denklemde de birinci denklem yerine yazılırsa $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left\{ \begin{array}{l} f(u_n) = \left[\left(\frac{a_1}{d_1} \right)^n \left(\frac{f(u_0)}{g(v_{-1})} \right) + b_1 \frac{\left(\frac{a_1}{d_1} \right)^n - 1}{a_1 - d_1} \right] \left[\frac{g(v_0)}{f(u_{-1})} + \frac{b_2}{d_2} (n-1) \right] f(u_{n-2}), \\ g(v_n) = \left[\frac{g(v_0)}{f(u_{-1})} + \frac{b_2}{d_2} n \right] \left[\left(\frac{a_1}{d_1} \right)^{n-1} \left(\frac{f(u_0)}{g(v_{-1})} \right) + b_1 \frac{\left(\frac{a_1}{d_1} \right)^{n-1} - 1}{a_1 - d_1} \right] g(v_{n-2}), \end{array} \right. \quad (3.32)$$

elde edilir ki sistem (3.1)' in çözümleri $i \in \{-1, 0\}$ ve $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{2n+i} = f^{-1} \left(f(u_i) \prod_{j=1}^n \left[\left(\frac{a_1}{d_1} \right)^{2j+i} \frac{f(u_0)}{g(v_{-1})} + b_1 \frac{\left(\frac{a_1}{d_1} \right)^{2j+i} - 1}{a_1 - d_1} \right] \left[\frac{g(v_0)}{f(u_{-1})} + \frac{b_2}{d_2} (2j+i-1) \right] \right), \\ v_{2n+i} = g^{-1} \left(g(v_i) \prod_{j=1}^n \left[\frac{g(v_0)}{f(u_{-1})} + \frac{b_2}{d_2} (2j+i) \right] \left[\left(\frac{a_1}{d_1} \right)^{2j+i-1} \left(\frac{f(u_0)}{g(v_{-1})} \right) + b_1 \frac{\left(\frac{a_1}{d_1} \right)^{2j+i-1} - 1}{a_1 - d_1} \right] \right), \end{array} \right. \quad (3.33)$$

bulunur. Eğer $j \in \{1, 2\}$ için $\frac{a_j}{d_j} \neq 1$ ise (3.21)' de verilen denklemlerin çözümleri

$$z_n = \left(\frac{a_1}{d_1} \right)^n z_0 + b_1 \frac{\left(\frac{a_1}{d_1} \right)^n - 1}{a_1 - d_1}, \quad w_n = \left(\frac{a_2}{d_2} \right)^n w_0 + b_2 \frac{\left(\frac{a_2}{d_2} \right)^n - 1}{a_2 - d_2}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.34)$$

şeklinde olup (3.19)' da verilen dönüşümlerden

$$\left\{ \begin{array}{l} f(u_n) = \left[\left(\frac{a_1}{d_1} \right)^n \frac{f(u_0)}{g(v_{-1})} + b_1 \frac{\left(\frac{a_1}{d_1} \right)^n - 1}{a_1 - d_1} \right] g(v_{n-1}), \\ g(v_n) = \left[\left(\frac{a_2}{d_2} \right)^n \frac{g(v_0)}{f(u_{-1})} + b_2 \frac{\left(\frac{a_2}{d_2} \right)^n - 1}{a_2 - d_2} \right] f(u_{n-1}), \end{array} \right. \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.35)$$

elde edilir. (3.35)' de verilen birinci denklemde ikinci denklem, ikinci denklemde de birinci denklem yerine yazılırsa $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left\{ \begin{array}{l} f(u_n) = \left[\left(\frac{a_1}{d_1} \right)^n \frac{f(u_0)}{g(v_{-1})} + b_1 \frac{\left(\frac{a_1}{d_1} \right)^n - 1}{a_1 - d_1} \right] \left[\left(\frac{a_2}{d_2} \right)^{n-1} \frac{g(v_0)}{f(u_{-1})} + b_2 \frac{\left(\frac{a_2}{d_2} \right)^{n-1} - 1}{a_2 - d_2} \right] f(u_{n-2}), \\ g(v_n) = \left[\left(\frac{a_2}{d_2} \right)^n \frac{g(v_0)}{f(u_{-1})} + b_2 \frac{\left(\frac{a_2}{d_2} \right)^n - 1}{a_2 - d_2} \right] \left[\left(\frac{a_1}{d_1} \right)^{n-1} \frac{f(u_0)}{g(v_{-1})} + b_1 \frac{\left(\frac{a_1}{d_1} \right)^{n-1} - 1}{a_1 - d_1} \right] g(v_{n-2}), \end{array} \right. \quad (3.36)$$

elde edilir ki sistem (3.1)' in çözümleri $i \in \{-1, 0\}$ ve $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$\begin{cases} u_{2n+i} = f^{-1} \left(f(u_i) \prod_{j=1}^n \left(\frac{a_1}{d_1} \right)^{2j+i} \frac{f(u_0)}{g(v_{-1})} + b_1 \frac{\left(\frac{a_1}{d_1} \right)^{2j+i} - 1}{a_1 - d_1} \right) \left[\left(\frac{a_2}{d_2} \right)^{2j+i-1} \frac{g(v_0)}{f(u_{-1})} + b_2 \frac{\left(\frac{a_2}{d_2} \right)^{2j+i-1} - 1}{a_2 - d_2} \right], \\ v_{2n+i} = g^{-1} \left(g(v_i) \prod_{j=1}^n \left(\frac{a_2}{d_2} \right)^{2j+i} \frac{g(v_0)}{f(u_{-1})} + b_2 \frac{\left(\frac{a_2}{d_2} \right)^{2j+i} - 1}{a_2 - d_2} \right) \left[\left(\frac{a_1}{d_1} \right)^{2j+i-1} \frac{f(u_0)}{g(v_{-1})} + b_1 \frac{\left(\frac{a_1}{d_1} \right)^{2j+i-1} - 1}{a_1 - d_1} \right], \end{cases} \quad (3.37)$$

bulunur.

ii. $j \in \{1, 2\}$ için $c_j \neq 0$: Bu durumda, (3.20)' nin ilk denkleminde $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$c_1 z_n + d_1 = \frac{p_{n+1}}{p_n} \quad (3.38)$$

dönüşümü uygulanırsa, (3.20)' nin ilk denklemi

$$p_{n+2} - (a_1 + d_1)p_{n+1} - (b_1 c_1 - a_1 d_1)p_n = 0 \quad (3.39)$$

ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer fark denkleminde indirgenir. (3.39) fark

denkleminde ilişkin karakteristik denklem $\lambda^2 - (a_1 + d_1)\lambda - (b_1 c_1 - a_1 d_1) = 0$

şeklinde. Öte yandan $\Delta_1 = (a_1 + d_1)^2 + 4(b_1 c_1 - a_1 d_1) \neq 0$ ise karakteristik

denklemin kökleri $\lambda_1 = \frac{a_1 + d_1 + \sqrt{(a_1 + d_1)^2 + 4(b_1 c_1 - a_1 d_1)}}{2},$

$$\lambda_2 = \frac{a_1 + d_1 - \sqrt{(a_1 + d_1)^2 + 4(b_1 c_1 - a_1 d_1)}}{2}$$

şeklinde. Buradan p_0 ve p_1 , (3.39)' da verilen fark denkleminin başlangıç

koşulları olmak üzere verilen başlangıç değer probleminin çözümü

$$p_n = \frac{(p_1 - \lambda_2 p_0)\lambda_1^n - (p_1 - \lambda_1 p_0)\lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.40)$$

şeklinde. Öte yandan (3.38)' de verilen dönüşümden ve $\frac{p_1}{p_0} = c_1 z_0 + d_1$

eşitliğinden, (3.20)' nin ilk denkleminin çözümü

$$z_n = \frac{1}{c_1} \frac{(c_1 z_0 + d_1 - \lambda_2) \lambda_1^{n+1} - (c_1 z_0 + d_1 - \lambda_1) \lambda_2^{n+1}}{(c_1 z_0 + d_1 - \lambda_2) \lambda_1^n - (c_1 z_0 + d_1 - \lambda_1) \lambda_2^n} - \frac{d_1}{c_1} \quad (3.41)$$

bulunur. Öte yandan $\Delta_1 = (a_1 + d_1)^2 + 4(b_1 c_1 - a_1 d_1) = 0$ ise (3.39)' da verilen fark denkleminin ilişkin karakteristik denklemin çakışık iki kökü $\lambda_{1,2} = \frac{a_1 + d_1}{2}$ şeklindedir. Buradan p_0 ve p_1 , (3.39)' da verilen fark denkleminin başlangıç koşulları olmak üzere verilen başlangıç değer probleminin çözümü

$$p_n = ((p_1 - \lambda_1 p_0)n + \lambda_1 p_0) \lambda_1^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.42)$$

şeklinde elde edilir. Öte yandan (3.38)' de verilen dönüşümden ve $\frac{p_1}{p_0} = c_1 z_0 + d_1$

eşitliğinden, (3.20)' nin birinci denkleminin çözümü ise

$$z_n = \frac{1}{c_1} \frac{((c_1 z_0 + d_1 - \lambda_1)(n+1) + \lambda_1) \lambda_1^n}{((c_1 z_0 + d_1 - \lambda_1)n + \lambda_1) \lambda_1^{n-1}} - \frac{d_1}{c_1}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.43)$$

bulunur. Şimdi (3.20)' nin ikinci denkleminde $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$c_2 w_n + d_2 = \frac{q_{n+1}}{q_n} \quad (3.44)$$

dönüşümü uygulanırsa, (3.20)' nin ikinci denklemi

$$q_{n+2} - (a_2 + d_2)q_{n+1} - (b_2 c_2 - a_2 d_2)q_n = 0 \quad (3.45)$$

ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer fark denkleminin indirgenir. (3.45) fark denkleminin ilişkin karakteristik denklemin

$$\lambda^2 - (a_2 + d_2)\lambda - (b_2 c_2 - a_2 d_2) = 0 \quad \text{şeklindedir.} \quad \text{Öte yandan}$$

$$\Delta_2 = (a_2 + d_2)^2 + 4(b_2 c_2 - a_2 d_2) \neq 0 \quad \text{ise} \quad \text{karakteristik denklemin kökleri}$$

$$\lambda_3 = \frac{(a_2 + d_2) + \sqrt{(a_2 + d_2)^2 + 4(b_2 c_2 - a_2 d_2)}}{2},$$

$$\lambda_4 = \frac{(a_2 + d_2) - \sqrt{(a_2 + d_2)^2 + 4(b_2 c_2 - a_2 d_2)}}{2} \quad \text{elde edilir. Buradan } q_0 \text{ ve } q_1,$$

(3.45)' de verilen fark denkleminin başlangıç koşulları olmak üzere verilen başlangıç değer probleminin çözümü

$$q_n = \frac{(q_1 - \lambda_4 q_0) \lambda_3^n - (q_1 - \lambda_3 q_0) \lambda_4^n}{\lambda_3 - \lambda_4}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.46)$$

şeklindedir. Öte yandan (3.44)' de verilen dönüşümden ve $\frac{q_1}{q_0} = c_2 w_0 + d_2$

eşitliğinden, (3.20)' nin ikinci denkleminin çözümü

$$w_n = \frac{1}{c_2} \frac{(c_2 w_0 + d_2 - \lambda_4) \lambda_3^{n+1} - (c_2 w_0 + d_2 - \lambda_3) \lambda_4^{n+1}}{(c_2 w_0 + d_2 - \lambda_4) \lambda_3^n - (c_2 w_0 + d_2 - \lambda_3) \lambda_4^n} - \frac{d_2}{c_2} \quad (3.47)$$

bulunur. Öte yandan $\Delta_2 = (a_2 + d_2)^2 + 4(b_2 c_2 - a_2 d_2) = 0$ ise (3.45) fark

denkleminin ilişkin karakteristik denklemin çakışık iki kökü $\lambda_{3,4} = \frac{a_2 + d_2}{2}$

şeklindedir. Buradan q_0 ve q_1 , (3.45)' de verilen fark denkleminin başlangıç koşulları olmak üzere verilen başlangıç değer probleminin çözümü

$$w_n = \frac{1}{c_2} \frac{((c_2 w_0 + d_2 - \lambda_3)(n+1) + \lambda_3) \lambda_3^n}{((c_2 w_0 + d_2 - \lambda_3)n + \lambda_3) \lambda_3^{n-1}} - \frac{d_2}{c_2} \quad (3.48)$$

şeklindedir. Öte yandan $\Delta_1 \Delta_2 \neq 0$ olmak üzere, (3.19)' da verilen dönüşümler, (3.41) ve (3.47) verilen çözümlerden

$$\begin{cases} f(u_n) = \frac{1}{c_1} \frac{\left(c_1 \frac{f(u_0)}{g(v_{-1})} + d_1 - \lambda_2 \right) \lambda_1^{n+1} - \left(c_1 \frac{f(u_0)}{g(v_{-1})} + d_1 - \lambda_1 \right) \lambda_2^{n+1}}{\left(c_1 \frac{f(u_0)}{g(v_{-1})} + d_1 - \lambda_2 \right) \lambda_1^n - \left(c_1 \frac{f(u_0)}{g(v_{-1})} + d_1 - \lambda_1 \right) \lambda_2^n} - \frac{d_1}{c_1} g(v_{n-1}), \\ g(v_n) = \frac{1}{c_2} \frac{\left(c_2 \frac{g(v_0)}{f(u_{-1})} + d_2 - \lambda_4 \right) \lambda_3^{n+1} - \left(c_2 \frac{g(v_0)}{f(u_{-1})} + d_2 - \lambda_3 \right) \lambda_4^{n+1}}{\left(c_2 \frac{g(v_0)}{f(u_{-1})} + d_2 - \lambda_4 \right) \lambda_3^n - \left(c_2 \frac{g(v_0)}{f(u_{-1})} + d_2 - \lambda_3 \right) \lambda_4^n} - \frac{d_2}{c_2} f(u_{n-1}), \end{cases} \quad (3.49)$$

elde edilir. (3.49)' da verilen birinci denklemde ikinci denklem, ikinci denklemde de birinci denklem yerine yazılırsa $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left\{ \begin{aligned} f(u_n) &= \left[\frac{1}{c_1} \frac{\left(c_1 \frac{f(u_0)}{g(v_{-1})} + d_1 - \lambda_2 \right) \lambda_1^{n+1} - \left(c_1 \frac{f(u_0)}{g(v_{-1})} + d_1 - \lambda_1 \right) \lambda_2^{n+1}}{\left(c_1 \frac{f(u_0)}{g(v_{-1})} + d_1 - \lambda_2 \right) \lambda_1^n - \left(c_1 \frac{f(u_0)}{g(v_{-1})} + d_1 - \lambda_1 \right) \lambda_2^n} - \frac{d_1}{c_1} \right] \\ &\quad \times \left[\frac{1}{c_2} \frac{\left(c_2 \frac{g(v_0)}{f(u_{-1})} + d_2 - \lambda_4 \right) \lambda_3^n - \left(c_2 \frac{g(v_0)}{f(u_{-1})} + d_2 - \lambda_3 \right) \lambda_4^n}{\left(c_2 \frac{g(v_0)}{f(u_{-1})} + d_2 - \lambda_4 \right) \lambda_3^{n-1} - \left(c_2 \frac{g(v_0)}{f(u_{-1})} + d_2 - \lambda_3 \right) \lambda_4^{n-1}} - \frac{d_2}{c_2} \right] f(u_{n-2}), \\ g(v_n) &= \left[\frac{1}{c_2} \frac{\left(c_2 \frac{g(v_0)}{f(u_{-1})} + d_2 - \lambda_4 \right) \lambda_3^{n+1} - \left(c_2 \frac{g(v_0)}{f(u_{-1})} + d_2 - \lambda_3 \right) \lambda_4^{n+1}}{\left(c_2 \frac{g(v_0)}{f(u_{-1})} + d_2 - \lambda_4 \right) \lambda_3^n - \left(c_2 \frac{g(v_0)}{f(u_{-1})} + d_2 - \lambda_3 \right) \lambda_4^n} - \frac{d_2}{c_2} \right] \\ &\quad \times \left[\frac{1}{c_1} \frac{\left(c_1 \frac{f(u_0)}{g(v_{-1})} + d_1 - \lambda_2 \right) \lambda_1^n - \left(c_1 \frac{f(u_0)}{g(v_{-1})} + d_1 - \lambda_1 \right) \lambda_2^n}{\left(c_1 \frac{f(u_0)}{g(v_{-1})} + d_1 - \lambda_2 \right) \lambda_1^{n-1} - \left(c_1 \frac{f(u_0)}{g(v_{-1})} + d_1 - \lambda_1 \right) \lambda_2^{n-1}} - \frac{d_1}{c_1} \right] g(v_{n-2}), \end{aligned} \right. \quad (3.50)$$

elde edilir ki sistem (3.1)' in çözümleri $i \in \{-1, 0\}$ ve $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$\left\{ \begin{aligned} u_{2n+i} &= f^{-1} \left(\begin{aligned} &f(u_i) \prod_{j=1}^n \left[\frac{1}{c_1} \frac{\left(c_1 \frac{f(u_0)}{g(v_{-1})} + d_1 - \lambda_2 \right) \lambda_1^{2j+i+1} - \left(c_1 \frac{f(u_0)}{g(v_{-1})} + d_1 - \lambda_1 \right) \lambda_2^{2j+i+1}}{\left(c_1 \frac{f(u_0)}{g(v_{-1})} + d_1 - \lambda_2 \right) \lambda_1^{2j+i} - \left(c_1 \frac{f(u_0)}{g(v_{-1})} + d_1 - \lambda_1 \right) \lambda_2^{2j+i}} - \frac{d_1}{c_1} \right] \\ &\times \left[\frac{1}{c_2} \frac{\left(c_2 \frac{g(v_0)}{f(u_{-1})} + d_2 - \lambda_4 \right) \lambda_3^{2j+i} - \left(c_2 \frac{g(v_0)}{f(u_{-1})} + d_2 - \lambda_3 \right) \lambda_4^{2j+i}}{\left(c_2 \frac{g(v_0)}{f(u_{-1})} + d_2 - \lambda_4 \right) \lambda_3^{2j+i-1} - \left(c_2 \frac{g(v_0)}{f(u_{-1})} + d_2 - \lambda_3 \right) \lambda_4^{2j+i-1}} - \frac{d_2}{c_2} \right] \end{aligned} \right) \\ v_{2n+i} &= g^{-1} \left(\begin{aligned} &g(v_i) \prod_{j=1}^n \left[\frac{1}{c_2} \frac{\left(c_2 \frac{g(v_0)}{f(u_{-1})} + d_2 - \lambda_4 \right) \lambda_3^{2j+i+1} - \left(c_2 \frac{g(v_0)}{f(u_{-1})} + d_2 - \lambda_3 \right) \lambda_4^{2j+i+1}}{\left(c_2 \frac{g(v_0)}{f(u_{-1})} + d_2 - \lambda_4 \right) \lambda_3^{2j+i} - \left(c_2 \frac{g(v_0)}{f(u_{-1})} + d_2 - \lambda_3 \right) \lambda_4^{2j+i}} - \frac{d_2}{c_2} \right] \\ &\times \left[\frac{1}{c_1} \frac{\left(c_1 \frac{f(u_0)}{g(v_{-1})} + d_1 - \lambda_2 \right) \lambda_1^{2j+i} - \left(c_1 \frac{f(u_0)}{g(v_{-1})} + d_1 - \lambda_1 \right) \lambda_2^{2j+i}}{\left(c_1 \frac{f(u_0)}{g(v_{-1})} + d_1 - \lambda_2 \right) \lambda_1^{2j+i-1} - \left(c_1 \frac{f(u_0)}{g(v_{-1})} + d_1 - \lambda_1 \right) \lambda_2^{2j+i-1}} - \frac{d_1}{c_1} \right] \end{aligned} \right) \end{aligned} \right. \quad (3.51)$$

bulunur. Öte yandan $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ olmak üzere, (3.19)' da verilen dönüşümler, (3.43) ve (3.48) verilen çözümlerden

$$\left\{ \begin{array}{l} f(u_n) = \left[\frac{1}{c_1} \frac{\left(\left(c_1 \frac{f(u_o)}{g(v_{-1})} + d_1 - \lambda_1 \right) (n+1) + \lambda_1 \right) \lambda_1^n}{\left(\left(c_1 \frac{f(u_o)}{g(v_{-1})} + d_1 - \lambda_1 \right) n + \lambda_1 \right) \lambda_1^{n-1}} - \frac{d_1}{c_1} \right] g(v_{n-1}), \\ g(v_n) = \left[\frac{1}{c_2} \frac{\left(\left(c_2 \frac{g(v_o)}{f(u_{-1})} + d_2 - \lambda_3 \right) (n+1) + \lambda_3 \right) \lambda_3^n}{\left(\left(c_2 \frac{g(v_o)}{f(u_{-1})} + d_2 - \lambda_3 \right) n + \lambda_3 \right) \lambda_3^{n-1}} - \frac{d_2}{c_2} \right] f(u_{n-1}), \end{array} \right. \quad (3.52)$$

elde edilir. (3.52)' de verilen birinci denklemde ikinci denklem, ikinci denklemde de birinci denklem yerine yazılırsa $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left\{ \begin{array}{l} f(u_n) = \left[\frac{1}{c_1} \frac{\left(\left(c_1 \frac{f(u_o)}{g(v_{-1})} + d_1 - \lambda_1 \right) (n+1) + \lambda_1 \right) \lambda_1^n}{\left(\left(c_1 \frac{f(u_o)}{g(v_{-1})} + d_1 - \lambda_1 \right) n + \lambda_1 \right) \lambda_1^{n-1}} - \frac{d_1}{c_1} \right] \\ \quad \times \left[\frac{1}{c_2} \frac{\left(\left(c_2 \frac{g(v_o)}{f(u_{-1})} + d_2 - \lambda_3 \right) n + \lambda_3 \right) \lambda_3^{n-1}}{\left(\left(c_2 \frac{g(v_o)}{f(u_{-1})} + d_2 - \lambda_3 \right) (n-1) + \lambda_3 \right) \lambda_3^{n-2}} - \frac{d_2}{c_2} \right] f(u_{n-2}), \\ g(v_n) = \left[\frac{1}{c_2} \frac{\left(\left(c_2 \frac{g(v_o)}{f(u_{-1})} + d_2 - \lambda_3 \right) (n+1) + \lambda_3 \right) \lambda_3^n}{\left(\left(c_2 \frac{g(v_o)}{f(u_{-1})} + d_2 - \lambda_3 \right) n + \lambda_3 \right) \lambda_3^{n-1}} - \frac{d_2}{c_2} \right] \\ \quad \times \left[\frac{1}{c_1} \frac{\left(\left(c_1 \frac{f(u_o)}{g(v_{-1})} + d_1 - \lambda_1 \right) n + \lambda_1 \right) \lambda_1^{n-1}}{\left(\left(c_1 \frac{f(u_o)}{g(v_{-1})} + d_1 - \lambda_1 \right) (n-1) + \lambda_1 \right) \lambda_1^{n-2}} - \frac{d_1}{c_1} \right] g(v_{n-2}), \end{array} \right. \quad (3.53)$$

elde edilir ki sistem (3.1)' in çözümleri $i \in \{-1, 0\}$ ve $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{2n+i} = f^{-1} \left(\begin{array}{l} f(u_i) \prod_{j=1}^n \left[\frac{1}{c_1} \frac{\left(\left(c_1 \frac{f(u_o)}{g(v_{-1})} + d_1 - \lambda_1 \right) (2j+i+1) + \lambda_1 \right) \lambda_1^{2j+i}}{\left(\left(c_1 \frac{f(u_o)}{g(v_{-1})} + d_1 - \lambda_1 \right) (2j+i) + \lambda_1 \right) \lambda_1^{2j+i-1}} - \frac{d_1}{c_1} \right] \\ \times \left[\frac{1}{c_2} \frac{\left(\left(c_2 \frac{g(v_o)}{f(u_{-1})} + d_2 - \lambda_3 \right) (2j+i) + \lambda_3 \right) \lambda_3^{2j+i-1}}{\left(\left(c_2 \frac{g(v_o)}{f(u_{-1})} + d_2 - \lambda_3 \right) (2j+i-1) + \lambda_3 \right) \lambda_3^{2j+i-2}} - \frac{d_2}{c_2} \right] \end{array} \right), \\ v_{2n+i} = g^{-1} \left(\begin{array}{l} g(v_i) \prod_{j=1}^n \left[\frac{1}{c_2} \frac{\left(\left(c_2 \frac{g(v_o)}{f(u_{-1})} + d_2 - \lambda_3 \right) (2j+i+1) + \lambda_3 \right) \lambda_3^{2j+i}}{\left(\left(c_2 \frac{g(v_o)}{f(u_{-1})} + d_2 - \lambda_3 \right) (2j+i) + \lambda_3 \right) \lambda_3^{2j+i-1}} - \frac{d_2}{c_2} \right] \\ \times \left[\frac{1}{c_1} \frac{\left(\left(c_1 \frac{f(u_o)}{g(v_{-1})} + d_1 - \lambda_1 \right) (2j+i) + \lambda_1 \right) \lambda_1^{2j+i-1}}{\left(\left(c_1 \frac{f(u_o)}{g(v_{-1})} + d_1 - \lambda_1 \right) (2j+i-1) + \lambda_1 \right) \lambda_1^{2j+i-2}} - \frac{d_1}{c_1} \right] \end{array} \right), \end{array} \right. \quad (3.54)$$

elde edilir.

4. BÖLÜM

SİSTEM (4.1)' İN PARAMETRELERİNİN DURUMLARINA GÖRE ÇÖZÜMLERİNİN İNCELENMESİ

Bu bölümde, $j \in \{1, 2\}$ için a_j, b_j, c_j, d_j parametreler ve $u_{-i}, v_{-i}, i \in \{0, 1\}$, başlangıç koşulları reel sabitler olmak üzere

$$\begin{cases} u_{n+1} = f^{-1} \left(f(u_n) \frac{a_1 g(v_n) + b_1 g(v_{n-1})}{c_1 g(v_n) + d_1 g(v_{n-1})} \right), \\ v_{n+1} = g^{-1} \left(g(v_n) \frac{a_2 f(u_n) + b_2 f(u_{n-1})}{c_2 f(u_n) + d_2 f(u_{n-1})} \right), \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.1)$$

iki boyutlu ikinci mertebeden lineer olmayan fark denklem sisteminin çözümleri parametrelere göre incelencektir. Burada $c_j^2 + d_j^2 \neq 0, j \in \{1, 2\}$, $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli, monoton fonksiyonlar ve $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}, f(0) = 0, g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}, g(0) = 0$ dır.

4.1. Sistem (4.1)' in Kapalı Formda Çözümleri

Burada, sistem (4.1)' in iyi tanımlı çözümleri için gerekli olan koşullar ele alınacaktır. Eğer $i \in \{0, 1\}$ için $u_{-i} = 0, v_{-i} = 0$ ise, o zaman sistem (4.1)' in çözümleri tanımsızdır. Dahası kabul edelim ki $n_0 \in \mathbb{N}_0$ için $u_{n_0} = 0$ olsun. Bu durumda sistem (4.1)' in birinci denkleminde $u_{n_0+1} = 0$ olur ki buradan v_{n_0+2} tanımsızdır. Benzer şekilde kabul edelim ki $n_1 \in \mathbb{N}_0$ için $v_{n_1} = 0$ olsun. Bu durumda sistem (4.1)' in ikinci denkleminde $v_{n_1+1} = 0$ olur ki buradan u_{n_1+2} tanımsızdır. Böylece sistem (4.1)' in iyi tanımlı çözümü olması için gerek ve yeter koşul $i \in \{0, 1\}$ için $u_{-i} v_{-i} \neq 0$ olmasıdır. Böylece sistem (4.1)' in iyi tanımlı bir $(u_n, v_n)_{n \geq -1}$ çözümü için

$$u_n v_n \neq 0, n \in \mathbb{N}_{-1}, \quad (4.2)$$

olacaktır.

Bundan sonra sistem (4.1)' in her iyi tanımlı $(u_n, v_n)_{n \geq -1}$ çözümü (4.2)' de verilen koşulu sağladığı varsayılacaktır.

Teorem 4.1.1. $a_j, b_j, c_j, d_j, j \in \{1,2\}$, parametreler ve $u_{-i}, v_{-i}, i \in \{0,1\}$, başlangıç koşulları reel sabitler, $c_j^2 + d_j^2 \neq 0, j \in \{1,2\}$, $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli, monoton fonksiyonlar ve $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}, f(0) = 0, g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}, g(0) = 0$ olsun. Bu durumda sistem (4.1) kapalı formda çözülebilir.

İspat. İlk olarak $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}, f(0) = 0, g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}, g(0) = 0$ ve $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli, monoton fonksiyonlar olduğundan f, g bire-bir fonksiyonlar, 0 noktası f ve g fonksiyonlarının tek kökü ve bu fonksiyonlar $\mathbb{R}'$ de homeomorfizm olduğu kolayca görülür. Fonksiyonların bu özellikleri dikkate alındığında, sistem (4.1)' in çözümleri için farklı durumlar göz önüne alınabilir.

1. Durum: $j \in \{1,2\}$ için $a_j d_j = b_j c_j, a_j = b_j = 0, c_j d_j \neq 0: j \in \{1,2\}$ için $a_j = b_j = 0$ olduğundan, sistem (4.1)' den $u_{n+1} = f^{-1}(0), v_{n+1} = g^{-1}(0)$ elde edilir. f ve g fonksiyonlarının özelliklerinden $u_{n+1} = v_{n+1} = 0, n \in \mathbb{N}_0$. Buradan sistem (4.1)' in çözümleri

$$u_n = 0, v_n = 0, n \in \mathbb{N}, \quad (4.3)$$

şeklindedir.

2. Durum: $j \in \{1,2\}$ için $a_j d_j = b_j c_j, a_j = 0, b_j d_j \neq 0: j \in \{1,2\}$ için $a_j = 0, b_j d_j \neq 0$ olduğundan $j \in \{1,2\}$ için $c_j = 0$ olup, sistem (4.1)' den

$$u_{n+1} = f^{-1}\left(\frac{b_1}{d_1} f(u_n)\right), v_{n+1} = g^{-1}\left(\frac{b_2}{d_2} g(v_n)\right), n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.4)$$

yazılabilir. f ve g fonksiyonlarının özelliklerinden

$$f(u_{n+1}) = \frac{b_1}{d_1} f(u_n), g(v_{n+1}) = \frac{b_2}{d_2} g(v_n), n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.5)$$

elde edilir. Şimdi

$$z_n = f(u_n), t_n = g(v_n), n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.6)$$

dönüşümü (4.5)' deki denklemlere uygulanırsa, (4.5)' de verilen fark denklemleri

$$z_{n+1} = \frac{b_1}{d_1} z_n, t_{n+1} = \frac{b_2}{d_2} t_n, n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.7)$$

birinci mertebeden lineer fark denklemlerine dönüşür. $r=1$ için Teorem 2.2.2' den, (4.7)' de verilen denklemlerin çözümleri

$$z_n = \left(\frac{b_1}{d_1}\right)^n z_0, \quad t_n = \left(\frac{b_2}{d_2}\right)^n t_0, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.8)$$

elde edilir. Öte yandan (4.6)' da verilen değişken değişimleri ve (4.8)' de verilen çözümlerden, sistem (4.1)' in çözümleri

$$u_n = f^{-1}\left(\left(\frac{b_1}{d_1}\right)^n f(u_0)\right), \quad v_n = g^{-1}\left(\left(\frac{b_2}{d_2}\right)^n g(v_0)\right), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.9)$$

olarak bulunur.

3.Durum: $j \in \{1,2\}$ için $a_j d_j = b_j c_j$, $a_j c_j \neq 0$, $b_j = 0$: $j \in \{1,2\}$ için $a_j c_j \neq 0$, $b_j = 0$ olduğundan $j \in \{1,2\}$ için $d_j = 0$ olup, sistem (4.1)' den

$$u_{n+1} = f^{-1}\left(\frac{a_1}{c_1} f(u_n)\right), \quad v_{n+1} = g^{-1}\left(\frac{a_2}{c_2} g(v_n)\right), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.10)$$

yazılabilir. f ve g fonksiyonlarının özelliklerinden

$$f(u_{n+1}) = \frac{a_1}{c_1} f(u_n), \quad g(v_{n+1}) = \frac{a_2}{c_2} g(v_n), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.11)$$

bulunur. Öte yandan (4.6) dönüşümleri, (4.11)' deki denklemlere uygulanırsa, (4.11)' de verilen fark denklemleri

$$z_{n+1} = \frac{a_1}{c_1} z_n, \quad t_{n+1} = \frac{a_2}{c_2} t_n, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.12)$$

birinci mertebeden lineer fark denklemlerine dönüşür. $r=1$ için Teorem 2.2.2' den, (4.12)' de verilen denklemlerin çözümleri

$$z_n = \left(\frac{a_1}{c_1}\right)^n z_0, \quad t_n = \left(\frac{a_2}{c_2}\right)^n t_0, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.13)$$

şeklindedir. Öte yandan (4.6) değişken değişimleri ve (4.13)' de verilen çözümlerden, sistem (4.1)' in çözümleri

$$u_n = f^{-1}\left(\left(\frac{a_1}{c_1}\right)^n f(u_0)\right), \quad v_n = g^{-1}\left(\left(\frac{a_2}{c_2}\right)^n g(v_0)\right), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.14)$$

olarak bulunur.

4.Durum: $j \in \{1,2\}$ için $a_j d_j = b_j c_j$, $d_j = 0$: $j \in \{1,2\}$ için $a_j d_j = b_j c_j$, $d_j = 0$ ise, sistem (4.1)' in iyi tanımlı çözümlere sahip olması için gerekli koşul $j \in \{1,2\}$ için $c_j \neq 0$ olmalıdır. Öte yandan verilen koşulun sağlanması içinde

$j \in \{1, 2\}$ için $b_j = 0$ olmalıdır. O zaman burada iki durum söz konusudur. Ya $j \in \{1, 2\}$ için $a_j = 0$ ya da $j \in \{1, 2\}$ için $a_j \neq 0$ olmalıdır. Bu iki durumda sırasıyla 1. Durum ve 3. Durumda incelenmiştir.

5.Durum: $j \in \{1, 2\}$ için $a_j d_j = b_j c_j$, $c_j = 0$: $j \in \{1, 2\}$ için $a_j d_j = b_j c_j$, $c_j = 0$ ise, sistem (4.1)' in iyi tanımlı çözümlere sahip olması için gerekli koşul $j \in \{1, 2\}$ için $d_j \neq 0$ olmalıdır. Öte yandan verilen koşulun sağlanması içinde $j \in \{1, 2\}$ için $a_j = 0$ olmalıdır. O zaman burada da iki durum söz konusudur. Ya $j \in \{1, 2\}$ için $b_j = 0$ ya da $j \in \{1, 2\}$ için $b_j \neq 0$ olmalıdır. Bu iki durumda sırasıyla 1. durum ve 2. durumda incelenmiştir.

6.Durum: $j \in \{1, 2\}$ için $a_j d_j = b_j c_j$ ve $a_j b_j c_j d_j \neq 0$: $j \in \{1, 2\}$ için $a_j d_j = b_j c_j$ ve $a_j b_j c_j d_j \neq 0$ olduğundan, sistem (4.1)' de $j \in \{1, 2\}$ için $a_j = \frac{b_j c_j}{d_j}$ alınır

$$u_{n+1} = f^{-1} \left(\frac{b_1}{d_1} f(u_n) \right), \quad v_{n+1} = g^{-1} \left(\frac{b_2}{d_2} g(v_n) \right), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.15)$$

denklemlerine indirgenir ki bu da 2. durumda incelenmiştir.

7.Durum: $j \in \{1, 2\}$ için $a_j d_j \neq b_j c_j$: Bu durumda $\forall n \in \mathbb{N}_{-1}$ için $u_n \neq 0$ ve $v_n \neq 0$ olduğundan f ve g fonksiyonlarının özelliklerinden $\forall n \in \mathbb{N}_{-1}$ için $f(u_n) \neq 0$ ve $g(v_n) \neq 0$ olacaktır. O zaman, sistem (4.1)' den

$$\frac{f(u_{n+1})}{f(u_n)} = \frac{a_1 \frac{g(v_n)}{g(v_{n-1})} + b_1}{c_1 \frac{g(v_n)}{g(v_{n-1})} + d_1}, \quad \frac{g(v_{n+1})}{g(v_n)} = \frac{a_2 \frac{f(u_n)}{f(u_{n-1})} + b_2}{c_2 \frac{f(u_n)}{f(u_{n-1})} + d_2}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.16)$$

yazılabilir. Öte yandan

$$z_n = \frac{f(u_n)}{f(u_{n-1})}, \quad w_n = \frac{g(v_n)}{g(v_{n-1})}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.17)$$

değişken değişimi, sistem (4.16)' ya uygulanırsa

$$z_{n+1} = \frac{a_1 w_n + b_1}{c_1 w_n + d_1}, \quad w_{n+1} = \frac{a_2 z_n + b_2}{c_2 z_n + d_2}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.18)$$

birinci mertebeden Riccati fark denklem sistemine indirgenir. Burada iki durum söz konusudur.

i. $j \in \{1, 2\}$ için $c_j = 0$: Bu durumda (4.18)' de verilen fark denklem sistemi

$$z_{n+1} = \frac{a_1}{d_1} w_n + \frac{b_1}{d_1}, \quad w_{n+1} = \frac{a_2}{d_2} z_n + \frac{b_2}{d_2}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.19)$$

birinci mertebeden lineer fark denklem sistemine indirgenir. Sistem (4.19)' da $n \rightarrow n-1$ için, ikinci denklem birinci denklemde; birinci denklem de ikinci denklemde yerine yazılırsa

$$z_{n+1} = \frac{a_1 a_2}{d_1 d_2} z_{n-1} + \frac{a_1 b_2 + b_1 d_2}{d_1 d_2}, \quad w_{n+1} = \frac{a_1 a_2}{d_1 d_2} w_{n-1} + \frac{a_2 b_1 + b_2 d_1}{d_1 d_2}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4.20)$$

ikinci mertebeden lineer sabit katsayılı fark denkleminde indirgenir. Burada da

$$\frac{a_1 a_2}{d_1 d_2} = 1 \quad \text{veya} \quad \frac{a_1 a_2}{d_1 d_2} \neq 1 \quad \text{olacak şekilde iki durum söz konusudur. Eğer } \frac{a_1 a_2}{d_1 d_2} = 1$$

ise, $r = 2$ için Teorem 2.2.2' den, (4.20)' de verilen denklemlerin çözümleri $i \in \{0, 1\}$ için

$$z_{2n+i} = z_i + \frac{a_1 b_2 + b_1 d_2}{d_1 d_2} n, \quad w_{2n+i} = w_i + \frac{a_2 b_1 + b_2 d_1}{d_1 d_2} n, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.21)$$

şeklinde olup, (4.17)' de verilen dönüşümlerden $i \in \{0, 1\}$ için

$$\begin{cases} f(u_{2n+i}) = \left(\frac{f(u_i)}{f(u_{i-1})} + \frac{a_1 b_2 + b_1 d_2}{d_1 d_2} n \right) \left(\frac{f(u_{1-i})}{f(u_{-i})} + \frac{a_1 b_2 + b_1 d_2}{d_1 d_2} (n+i-1) \right) f(u_{2(n-1)+i}), \\ g(v_{2n+i}) = \left(\frac{g(v_i)}{g(v_{i-1})} + \frac{a_2 b_1 + b_2 d_1}{d_1 d_2} n \right) \left(\frac{g(v_{1-i})}{g(v_{-i})} + \frac{a_2 b_1 + b_2 d_1}{d_1 d_2} (n+i-1) \right) g(v_{2(n-1)+i}), \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4.22)$$

elde edilir ki (4.20)' de verilen denklemlerin çözümleri ise $i \in \{0, 1\}$ için

$$\begin{cases} u_{2n+i} = f^{-1} \left(f(u_i) \prod_{j=1}^n \left(\frac{f(u_j)}{f(u_{j-1})} + \frac{a_1 b_2 + b_1 d_2}{d_1 d_2} j \right) \left(\frac{f(u_{1-j})}{f(u_{-j})} + \frac{a_1 b_2 + b_1 d_2}{d_1 d_2} (j+i-1) \right) \right), \\ v_{2n+i} = g^{-1} \left(g(v_i) \prod_{j=1}^n \left(\frac{g(v_j)}{g(v_{j-1})} + \frac{a_2 b_1 + b_2 d_1}{d_1 d_2} j \right) \left(\frac{g(v_{1-j})}{g(v_{-j})} + \frac{a_2 b_1 + b_2 d_1}{d_1 d_2} (j+i-1) \right) \right), \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.23)$$

şeklinde bulunur. Eğer $\frac{a_1 a_2}{d_1 d_2} \neq 1$ ise, $r = 2$ için Teorem 2.2.2' den, (4.20)' de

verilen denklemlerin çözümleri $i \in \{0, 1\}$ için

$$\left\{ \begin{array}{l} z_{2n+i} = \left(\frac{a_1 a_2}{d_1 d_2} \right)^n z_i + (a_1 b_2 + b_1 d_2) \frac{1 - \left(\frac{a_1 a_2}{d_1 d_2} \right)^n}{(d_1 d_2 - a_1 a_2)}, \\ w_{2n+i} = \left(\frac{a_1 a_2}{d_1 d_2} \right)^n w_i + (a_2 b_1 + b_2 d_1) \frac{1 - \left(\frac{a_1 a_2}{d_1 d_2} \right)^n}{(d_1 d_2 - a_1 a_2)}, \end{array} \right. \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.24)$$

şeklinde olup (4.17)' de verilen dönüşümlerden $i \in \{0,1\}$ için

$$\left\{ \begin{array}{l} f(u_{2n+i}) = \left(\frac{a_1 a_2}{d_1 d_2} \right)^n \frac{f(u_i)}{f(u_{i-1})} + (a_1 b_2 + b_1 d_2) \frac{1 - \left(\frac{a_1 a_2}{d_1 d_2} \right)^n}{(d_1 d_2 - a_1 a_2)} \\ \quad \times \left(\frac{a_1 a_2}{d_1 d_2} \right)^{(n+i-1)} \frac{f(u_{1-i})}{f(u_{-i})} + (a_1 b_2 + b_1 d_2) \frac{1 - \left(\frac{a_1 a_2}{d_1 d_2} \right)^{(n+i-1)}}{(d_1 d_2 - a_1 a_2)} f(u_{2(n-1)+i}), \\ g(v_{2n+i}) = \left(\frac{a_1 a_2}{d_1 d_2} \right)^n \frac{g(v_i)}{g(v_{i-1})} + (a_2 b_1 + b_2 d_1) \frac{1 - \left(\frac{a_1 a_2}{d_1 d_2} \right)^n}{(d_1 d_2 - a_1 a_2)} \\ \quad \times \left(\frac{a_1 a_2}{d_1 d_2} \right)^{(n+i-1)} \frac{g(v_{1-i})}{g(v_{-i})} + (a_2 b_1 + b_2 d_1) \frac{1 - \left(\frac{a_1 a_2}{d_1 d_2} \right)^{(n+i-1)}}{(d_1 d_2 - a_1 a_2)} g(v_{2(n-1)+i}), \end{array} \right. \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.25)$$

elde edilir ki sistem (4.1)' in çözümleri ise $i \in \{0,1\}$ için

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{2n+i} = f^{-1} \left(f(u_i) \prod_{j=1}^n \left(\left(\frac{a_1 a_2}{d_1 d_2} \right)^j \frac{f(u_i)}{f(u_{i-1})} + (a_1 b_2 + b_1 d_2) \frac{1 - \left(\frac{a_1 a_2}{d_1 d_2} \right)^j}{(d_1 d_2 - a_1 a_2)} \right) \right. \\ \quad \times \left. \left(\frac{a_1 a_2}{d_1 d_2} \right)^{(j+i-1)} \frac{f(u_{i-1})}{f(u_{-i})} + (a_1 b_2 + b_1 d_2) \frac{1 - \left(\frac{a_1 a_2}{d_1 d_2} \right)^{(j+i-1)}}{(d_1 d_2 - a_1 a_2)} \right) \right\}, \\ v_{2n+i} = g^{-1} \left(g(v_i) \prod_{j=1}^n \left(\left(\frac{a_1 a_2}{d_1 d_2} \right)^j \frac{g(v_i)}{g(v_{i-1})} + (a_2 b_1 + b_2 d_1) \frac{1 - \left(\frac{a_1 a_2}{d_1 d_2} \right)^j}{(d_1 d_2 - a_1 a_2)} \right) \right. \\ \quad \times \left. \left(\frac{a_1 a_2}{d_1 d_2} \right)^{(j+i-1)} \frac{g(v_{i-1})}{g(v_{-i})} + (a_2 b_1 + b_2 d_1) \frac{1 - \left(\frac{a_1 a_2}{d_1 d_2} \right)^{(j+i-1)}}{(d_1 d_2 - a_1 a_2)} \right) \right\}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \end{array} \right. \quad (4.26)$$

bulunur.

ii. $j \in \{1, 2\}$ için $c_j \neq 0$: Bu durumda (4.18)' de verilen fark denklem sisteminde, ikinci denklem birinci denklemde; birinci denklem de ikinci denklemde yerine yazılırsa

$$z_{n+1} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 c_2) z_{n-1} + a_1 b_2 + b_1 d_2}{(a_2 c_1 + c_2 d_1) z_{n-1} + b_2 c_1 + d_1 d_2}, \quad w_{n+1} = \frac{(a_1 a_2 + b_2 c_1) w_{n-1} + a_2 b_1 + b_2 d_1}{(a_1 c_2 + c_1 d_2) w_{n-1} + b_1 c_2 + d_1 d_2}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4.27)$$

Riccati tipi fark denklemlerine dönüşür. (4.27)' de $i \in \{0, 1\}$ için n yerine $n \rightarrow 2n + i - 1$ yazılırsa, (4.27)' deki denklemler $i \in \{0, 1\}$ için

$$\left\{ \begin{array}{l} z_{2n+i} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 c_2) z_{2(n-1)+i} + a_1 b_2 + b_1 d_2}{(a_2 c_1 + c_2 d_1) z_{2(n-1)+i} + b_2 c_1 + d_1 d_2}, \\ w_{2n+i} = \frac{(a_1 a_2 + b_2 c_1) w_{2(n-1)+i} + a_2 b_1 + b_2 d_1}{(a_1 c_2 + c_1 d_2) w_{2(n-1)+i} + b_1 c_2 + d_1 d_2}, \end{array} \right. \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4.28)$$

elde edilir. (4.28)' de $n \in \mathbb{N}_0$, $i \in \{0, 1\}$, için $z_{2n+i} = z_n^{(i)}$, $w_{2n+i} = w_n^{(i)}$ dönüşümü uygulanır ve $n \rightarrow n + 1$ alınır

$$\begin{cases} z_{n+1}^{(i)} = \frac{(a_1a_2 + b_1c_2)z_n^{(i)} + a_1b_2 + b_1d_2}{(a_2c_1 + c_2d_1)z_n^{(i)} + b_2c_1 + d_1d_2}, \\ w_{n+1}^{(i)} = \frac{(a_1a_2 + b_2c_1)w_n^{(i)} + a_2b_1 + b_2d_1}{(a_1c_2 + c_1d_2)w_n^{(i)} + b_1c_2 + d_1d_2}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.29)$$

bulunur. Şimdi işlemlerin daha kolay anlaşılabilmesi için $n \in \mathbb{N}_0$ için

$z_n^{(i)} = \hat{z}_n$, $w_n^{(i)} = \hat{w}_n$ dönüşümleri tanımlansın. Bu durumda $z_0^{(i)} = \hat{z}_0$, $w_0^{(i)} = \hat{w}_0$

olacağı açıktır. Buradan, (4.29)' da verilen denklemler

$$\begin{cases} \hat{z}_{n+1} = \frac{(a_1a_2 + b_1c_2)\hat{z}_n + a_1b_2 + b_1d_2}{(a_2c_1 + c_2d_1)\hat{z}_n + b_2c_1 + d_1d_2}, \\ \hat{w}_{n+1} = \frac{(a_1a_2 + b_2c_1)\hat{w}_n + a_2b_1 + b_2d_1}{(a_1c_2 + c_1d_2)\hat{w}_n + b_1c_2 + d_1d_2}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.30)$$

iyi bilinen Riccati fark denklemine indirgenir. (4.30)' daki denklemlere $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$(a_2c_1 + c_2d_1)\hat{z}_n + b_2c_1 + d_1d_2 = \frac{p_{n+1}}{p_n}, \quad (a_1c_2 + c_1d_2)\hat{w}_n + b_1c_2 + d_1d_2 = \frac{q_{n+1}}{q_n} \quad (4.31)$$

dönüşümleri uygulanırsa

$$\begin{cases} p_{n+2} = (a_1a_2 + b_1c_2 + b_2c_1 + d_1d_2)p_{n+1} - (a_1a_2d_1d_2 + b_1b_2c_1c_2 - a_1b_2c_2d_1 - a_2b_1c_1d_2)p_n, \\ q_{n+2} = (a_1a_2 + b_2c_1 + b_1c_2 + d_1d_2)q_{n+1} - (a_1a_2d_1d_2 + b_1b_2c_1c_2 - a_1b_2c_2d_1 - a_2b_1c_1d_2)q_n, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.32)$$

ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer fark denklemlerine indirgenir. (4.32)' de verilen denklemler aynı rekürans bağıntısına sahip olduklarından, denklemlerin karakteristik denklemi

$$\lambda^2 - (a_1a_2 + b_1c_2 + b_2c_1 + d_1d_2)\lambda + (a_1a_2d_1d_2 + b_1b_2c_1c_2 - a_1b_2c_2d_1 - a_2b_1c_1d_2) = 0 \quad (4.33)$$

şeklindedir. (4.33)' de verilen karakteristik denklemlerin kökleri farklı, yani

$$\Delta_\lambda = (a_1a_2 + b_1c_2 + b_2c_1 + d_1d_2)^2 - 4(a_1a_2d_1d_2 + b_1b_2c_1c_2 - a_1b_2c_2d_1 - a_2b_1c_1d_2) \neq 0,$$

ise, kökler

$$\lambda_1 = \frac{a_1a_2 + b_1c_2 + b_2c_1 + d_1d_2 + \sqrt{\Delta_\lambda}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{a_1a_2 + b_1c_2 + b_2c_1 + d_1d_2 - \sqrt{\Delta_\lambda}}{2}, \quad (4.34)$$

şeklindedir. Buradan p_0, p_1, q_0, q_1 (4.32)' de verilen denklemlerin başlangıç koşulları olmak üzere verilen başlangıç değer problemlerinin çözümleri

$$\begin{cases} p_n = \frac{(p_1 - p_0\lambda_2)\lambda_1^n + (p_0\lambda_1 - p_1)\lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}, \\ q_n = \frac{(q_1 - q_0\lambda_2)\lambda_1^n + (q_0\lambda_1 - q_1)\lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.35)$$

elde edilir. Öte yandan (4.31)' de verilen dönüşümlerden

$$\begin{aligned} (a_2c_1 + c_2d_1)\widehat{z}_n + b_2c_1 + d_1d_2 &= \frac{(p_1 - p_0\lambda_2)\lambda_1^{n+1} + (p_0\lambda_1 - p_1)\lambda_2^{n+1}}{(p_1 - p_0\lambda_2)\lambda_1^n + (p_0\lambda_1 - p_1)\lambda_2^n} \\ &= \frac{\left(\frac{p_1}{p_0} - \lambda_2\right)\lambda_1^{n+1} - \left(\frac{p_1}{p_0} - \lambda_1\right)\lambda_2^{n+1}}{\left(\frac{p_1}{p_0} - \lambda_2\right)\lambda_1^n - \left(\frac{p_1}{p_0} - \lambda_1\right)\lambda_2^n} \end{aligned} \quad (4.36)$$

ve

$$\begin{aligned} (a_1c_2 + c_1d_2)\widehat{w}_n + b_1c_2 + d_1d_2 &= \frac{(q_1 - q_0\lambda_2)\lambda_1^{n+1} + (q_0\lambda_1 - q_1)\lambda_2^{n+1}}{(q_1 - q_0\lambda_2)\lambda_1^n + (q_0\lambda_1 - q_1)\lambda_2^n} \\ &= \frac{\left(\frac{q_1}{q_0} - \lambda_2\right)\lambda_1^{n+1} - \left(\frac{q_1}{q_0} - \lambda_1\right)\lambda_2^{n+1}}{\left(\frac{q_1}{q_0} - \lambda_2\right)\lambda_1^n - \left(\frac{q_1}{q_0} - \lambda_1\right)\lambda_2^n} \end{aligned} \quad (4.37)$$

elde edilir. Şimdi karmaşıklığı önlemek için

$\Phi_1 = a_2c_1 + c_2d_1$, $\Phi_2 = b_2c_1 + d_1d_2$, $\Psi_1 = a_1c_2 + c_1d_2$, $\Psi_2 = b_1c_2 + d_1d_2$ olmak üzere

(4.36) ve (4.37) denklemlerinden

$$\begin{cases} \widehat{z}_n = \frac{1}{\Phi_1} \frac{(\Phi_1\widehat{z}_0 + \Phi_2)\left(\frac{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}{\lambda_1 - \lambda_2}\right) - \lambda_1\lambda_2\left(\frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}\right)}{(\Phi_1\widehat{z}_0 + \Phi_2)\left(\frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}\right) - \lambda_1\lambda_2\left(\frac{\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1}}{\lambda_1 - \lambda_2}\right)} - \frac{\Phi_2}{\Phi_1}, \\ \widehat{w}_n = \frac{1}{\Psi_1} \frac{(\Psi_1\widehat{w}_0 + \Psi_2)\left(\frac{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}{\lambda_1 - \lambda_2}\right) - \lambda_1\lambda_2\left(\frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}\right)}{(\Psi_1\widehat{w}_0 + \Psi_2)\left(\frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}\right) - \lambda_1\lambda_2\left(\frac{\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1}}{\lambda_1 - \lambda_2}\right)} - \frac{\Psi_2}{\Psi_1}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.38)$$

elde edilir. $\Upsilon = a_1a_2d_1d_2 + b_1b_2c_1c_2 - a_1b_2c_2d_1 - a_2b_1c_1d_2$ olmak üzere, $z_{2n+i} = z_n^{(i)} = \widehat{z}_n$,

$w_{2n+i} = w_n^{(i)} = \widehat{w}_n$ değişken değişimleri ve Tanım 2.2.14' den

$$\begin{cases} z_{2n+i} = \frac{1}{\Phi_1} \frac{(\Phi_1 z_i + \Phi_2) s_{n+1} - \Upsilon s_n}{(\Phi_1 z_i + \Phi_2) s_n - \Upsilon s_{n-1}} - \frac{\Phi_2}{\Phi_1}, \\ w_{2n+i} = \frac{1}{\Psi_1} \frac{(\Psi_1 w_i + \Psi_2) s_{n+1} - \Upsilon s_n}{(\Psi_1 w_i + \Psi_2) s_n - \Upsilon s_{n-1}} - \frac{\Psi_2}{\Psi_1}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.39)$$

yazılabilir. Burada $i \in \{0,1\}$ ’ dir. Öte yandan (4.17)’ de verilen dönüşümlerden

$i \in \{0,1\}$ için

$$\begin{cases} f(u_{2n+i}) = \left(\frac{1}{\Phi_1} \frac{\left(\Phi_1 \frac{f(u_i)}{f(u_{i-1})} + \Phi_2 \right) s_{n+1} - \Upsilon s_n}{\left(\Phi_1 \frac{f(u_i)}{f(u_{i-1})} + \Phi_2 \right) s_n - \Upsilon s_{n-1}} - \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \right) \\ \quad \times \left(\frac{1}{\Phi_1} \frac{\left(\Phi_1 \frac{f(u_{1-i})}{f(u_{-i})} + \Phi_2 \right) s_{n+i} - \Upsilon s_{n+i-1}}{\left(\Phi_1 \frac{f(u_{1-i})}{f(u_{-i})} + \Phi_2 \right) s_{n+i-1} - \Upsilon s_{n+i-2}} - \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \right) f(u_{2(n-1)+i}), \\ g(v_{2n+i}) = \left(\frac{1}{\Psi_1} \frac{\left(\Psi_1 \frac{g(v_i)}{g(v_{i-1})} + \Psi_2 \right) s_{n+1} - \Upsilon s_n}{\left(\Psi_1 \frac{g(v_i)}{g(v_{i-1})} + \Psi_2 \right) s_n - \Upsilon s_{n-1}} - \frac{\Psi_2}{\Psi_1} \right) \\ \quad \times \left(\frac{1}{\Psi_1} \frac{\left(\Psi_1 \frac{g(v_{1-i})}{g(v_{-i})} + \Psi_2 \right) s_{n+i} - \Upsilon s_{n+i-1}}{\left(\Psi_1 \frac{g(v_{1-i})}{g(v_{-i})} + \Psi_2 \right) s_{n+i-1} - \Upsilon s_{n+i-2}} - \frac{\Psi_2}{\Psi_1} \right) g(v_{2(n-1)+i}), \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.40)$$

elde edilir ki sistem (4.1)’ in çözümleri ise $i \in \{0,1\}$ için

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{2n+i} = f^{-1} \left(f(u_i) \prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{\Phi_1} \frac{\left(\Phi_1 \frac{f(u_i)}{f(u_{i-1})} + \Phi_2 \right) s_{j+1} - \Upsilon s_j}{\left(\Phi_1 \frac{f(u_i)}{f(u_{i-1})} + \Phi_2 \right) s_j - \Upsilon s_{j-1}} - \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \right) \right. \\ \quad \times \left. \frac{1}{\Phi_1} \frac{\left(\Phi_1 \frac{f(u_{1-i})}{f(u_{-i})} + \Phi_2 \right) s_{j+i} - \Upsilon s_{j+i-1}}{\left(\Phi_1 \frac{f(u_{1-i})}{f(u_{-i})} + \Phi_2 \right) s_{j+i-1} - \Upsilon s_{j+i-2}} - \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \right) \right. \\ \quad \left. v_{2n+i} = g^{-1} \left(g(v_i) \prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{\Psi_1} \frac{\left(\Psi_1 \frac{g(v_i)}{g(v_{i-1})} + \Psi_2 \right) s_{j+1} - \Upsilon s_j}{\left(\Psi_1 \frac{g(v_i)}{g(v_{i-1})} + \Psi_2 \right) s_j - \Upsilon s_{j-1}} - \frac{\Psi_2}{\Psi_1} \right) \right. \right. \\ \quad \times \left. \left. \frac{1}{\Psi_1} \frac{\left(\Psi_1 \frac{g(v_{1-i})}{g(v_{-i})} + \Psi_2 \right) s_{j+i} - \Upsilon s_{j+i-1}}{\left(\Psi_1 \frac{g(v_{1-i})}{g(v_{-i})} + \Psi_2 \right) s_{j+i-1} - \Upsilon s_{j+i-2}} - \frac{\Psi_2}{\Psi_1} \right) \right) \end{array} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.41)$$

bulunur. Öte yandan (4.33)' de verilen karakteristik denklemlerin kökleri çakışık ise, yani

$$\Delta_\lambda = (a_1 a_2 + b_1 c_2 + b_2 c_1 + d_1 d_2)^2 - 4(a_1 a_2 d_1 d_2 + b_1 b_2 c_1 c_2 - a_1 b_2 c_2 d_1 - a_2 b_1 c_1 d_2) = 0,$$

ise, kökler

$$\lambda_3 = \lambda_4 = \frac{a_1 a_2 + b_1 c_2 + b_2 c_1 + d_1 d_2}{2}, \quad (4.42)$$

şeklindedir. Buradan p_0, p_1, q_0, q_1 (4.32)' de verilen denklemlerin başlangıç koşulları olmak üzere verilen başlangıç değer problemlerinin çözümleri

$$\begin{cases} p_n = p_0 \lambda_3^n + (p_1 - p_0 \lambda_3) n \lambda_3^{n-1} \\ q_n = q_0 \lambda_3^n + (q_1 - q_0 \lambda_3) n \lambda_3^{n-1} \end{cases} \quad (4.43)$$

elde edilir. Öte yandan,

$$\Phi_1 = a_2 c_1 + c_2 d_1, \quad \Phi_2 = b_2 c_1 + d_1 d_2, \quad \Psi_1 = a_1 c_2 + c_1 d_2, \quad \Psi_2 = b_1 c_2 + d_1 d_2 \quad \text{olmak üzere}$$

(4.31)' de verilen dönüşümlerden

$$\begin{cases} \Phi_1 \hat{z}_n + \Phi_2 = \frac{p_0 \lambda_3^{n+1} + (p_1 - p_0 \lambda_3)(n+1) \lambda_3^n}{p_0 \lambda_3^n + (p_1 - p_0 \lambda_3) n \lambda_3^{n-1}}, \\ \Psi_1 \hat{w}_n + \Psi_2 = \frac{q_0 \lambda_3^{n+1} + (q_1 - q_0 \lambda_3)(n+1) \lambda_3^n}{q_0 \lambda_3^n + (q_1 - q_0 \lambda_3) n \lambda_3^{n-1}}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.44)$$

bulunur. $z_{2n+i} = z_n^{(i)} = \widehat{z}_n$, $w_{2n+i} = w_n^{(i)} = \widehat{w}_n$ değişken değişimlerinden

$$\begin{cases} z_{2n+i} = \frac{1}{\Phi_1} \frac{(\Phi_1 z_i + \Phi_2)(n+1)\lambda_3^n - n\lambda_3^{n+1}}{n\lambda_3^{n-1} - (n-1)\lambda_3^n} - \frac{\Phi_2}{\Phi_1}, \\ w_{2n+i} = \frac{1}{\Psi_1} \frac{(\Psi_1 w_i + \Psi_2)(n+1)\lambda_3^n - n\lambda_3^{n+1}}{n\lambda_3^{n-1} - (n-1)\lambda_3^n} - \frac{\Psi_2}{\Psi_1}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.45)$$

yazılabilir. Burada $i \in \{0,1\}$ 'dır. Öte yandan (4.17)' de verilen dönüşümlerden

$i \in \{0,1\}$ için

$$\begin{cases} f(u_{2n+i}) = \left(\frac{1}{\Phi_1} \frac{\left(\Phi_1 \frac{f(u_i)}{f(u_{i-1})} + \Phi_2 \right) (n+1)\lambda_3^n - n\lambda_3^{n+1}}{n\lambda_3^{n-1} - (n-1)\lambda_3^n} - \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \right) \\ \quad \times \left(\frac{1}{\Phi_1} \frac{\left(\Phi_1 \frac{f(u_{1-i})}{f(u_{-i})} + \Phi_2 \right) (n+i)\lambda_3^{n+i-1} - (n+i-1)\lambda_3^{n+i}}{(n+i-1)\lambda_3^{n+i-2} - (n+i-2)\lambda_3^{n+i-1}} - \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \right) f(u_{2(n-1)+i}), \\ g(v_{2n+i}) = \left(\frac{1}{\Psi_1} \frac{\left(\Psi_1 \frac{g(v_i)}{g(v_{i-1})} + \Psi_2 \right) (n+1)\lambda_3^n - n\lambda_3^{n+1}}{n\lambda_3^{n-1} - (n-1)\lambda_3^n} - \frac{\Psi_2}{\Psi_1} \right) \\ \quad \times \left(\frac{1}{\Psi_1} \frac{\left(\Psi_1 \frac{g(v_{1-i})}{g(v_{-i})} + \Psi_2 \right) (n+i)\lambda_3^{n+i-1} - (n+i-1)\lambda_3^{n+i}}{(n+i-1)\lambda_3^{n+i-2} - (n+i-2)\lambda_3^{n+i-1}} - \frac{\Psi_2}{\Psi_1} \right) g(v_{2(n-1)+i}), \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.46)$$

elde edilir ki sistem (4.1)' in çözümleri ise $i \in \{0,1\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{2n+i} = f^{-1} \left(f(u_i) \prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{\Phi_1} \frac{\left(\Phi_1 \frac{f(u_i)}{f(u_{i-1})} + \Phi_2 \right) (j+1) \lambda_3^n - j \lambda_3^{j+1}}{\left(\Phi_1 \frac{f(u_i)}{f(u_{i-1})} + \Phi_2 \right) j \lambda_3^{j-1} - (j-1) \lambda_3^j} - \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \right) \right. \\ \quad \times \left. \frac{1}{\Phi_1} \frac{\left(\Phi_1 \frac{f(u_{1-i})}{f(u_{-i})} + \Phi_2 \right) (j+i) \lambda_3^{j+i-1} - (j+i-1) \lambda_3^{j+i}}{\left(\Phi_1 \frac{f(u_{1-i})}{f(u_{-i})} + \Phi_2 \right) (j+i-1) \lambda_3^{j+i-2} - (j+i-2) \lambda_3^{j+i-1}} - \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \right) \right), \\ v_{2n+i} = g^{-1} \left(g(v_i) \prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{\Psi_1} \frac{\left(\Psi_1 \frac{g(v_i)}{g(v_{i-1})} + \Psi_2 \right) (j+1) \lambda_3^j - j \lambda_3^{j+1}}{\left(\Psi_1 \frac{g(v_i)}{g(v_{i-1})} + \Psi_2 \right) j \lambda_3^{j-1} - (j-1) \lambda_3^j} - \frac{\Psi_2}{\Psi_1} \right) \right. \\ \quad \times \left. \frac{1}{\Psi_1} \frac{\left(\Psi_1 \frac{g(v_{1-i})}{g(v_{-i})} + \Psi_2 \right) (j+i) \lambda_3^{j+i-1} - (j+i-1) \lambda_3^{j+i}}{\left(\Psi_1 \frac{g(v_{1-i})}{g(v_{-i})} + \Psi_2 \right) (j+i-1) \lambda_3^{j+i-2} - (j+i-2) \lambda_3^{j+i-1}} - \frac{\Psi_2}{\Psi_1} \right) \right), \end{array} \right. \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.47)$$

bulunur.

5. BÖLÜM

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Bu çalışmada, $j \in \{1, 2\}$ için a_j, b_j, c_j, d_j parametreler ve $u_{-i}, v_{-i}, i \in \{0, 1\}$, başlangıç koşulları reel sabitler olmak üzere

$$u_{n+1} = f^{-1} \left(g(v_n) \frac{a_1 f(u_n) + b_1 g(v_{n-1})}{c_1 f(u_n) + d_1 g(v_{n-1})} \right), \quad v_{n+1} = g^{-1} \left(f(u_n) \frac{a_2 g(v_n) + b_2 f(u_{n-1})}{c_2 g(v_n) + d_2 f(u_{n-1})} \right), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

ve

$$u_{n+1} = f^{-1} \left(f(u_n) \frac{a_1 g(v_n) + b_1 g(v_{n-1})}{c_1 g(v_n) + d_1 g(v_{n-1})} \right), \quad v_{n+1} = g^{-1} \left(g(v_n) \frac{a_2 f(u_n) + b_2 f(u_{n-1})}{c_2 f(u_n) + d_2 f(u_{n-1})} \right), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

iki boyutlu ikinci mertebeden lineer olmayan fark denklem sistemlerinin iyi tanımlı çözümleri parametrelerin durumlarına göre elde edilmiştir. Burada $c_j^2 + d_j^2 \neq 0, j \in \{1, 2\}$, $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli, monoton fonksiyonlar ve $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}, f(0) = 0, g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}, g(0) = 0$ dır.

5.2 Öneriler

Bu çalışmada ele alınan sistemler, k -boyutlu sistemlere genişletilerek elde edilen sistemlerin kapalı formda çözümleri elde edilebilir.

KAYNAKLAR

1. Abualrub S., Aloqeili M., “Dynamics of positive solutions of a system of difference equations”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 392, 113489, 2021.
2. Ahmed A. M., Elsayed E. M., “The expressions of solutions and the periodicity of some rational difference equations systems”, *Journal of Applied Mathematics & Informatics*, 34(1-2), 35-48, 2016.
3. Akrou Y, Touafek N, Halim Y., “On a system of difference equations of second order solved in closed-form”, *Miskolc Mathematical Notes*, 20(2), 701-717, 2019.
4. Akrou Y., Touafek N., Halim Y., “On a system of difference equations of third order solved in closed form”, *Journal of Innovative Applied Mathematics and Computational Sciences*, 1(1), 1-15 2021.
5. Akrou Y., Mesmouli M.B., Tollu D.T., Touafek N., “On the solutions of a system of max-type difference equations”, *Tbilisi Mathematical Journal*, 14(4), 159-187 2021.
6. Boulouh M., Touafek N., Tollu D.T., “On the behavior of the solutions of an abstract system of difference equations”, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 68, 2937–2969, 2022.
7. Cömert T., Yalçinkaya I., Tollu D.T., “A study on the positive solutions of an exponential type difference equation”, *Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 6(1), 276-286, 2018.
8. Din Q., Qureshi M.N., Khan, A.Q., “Dynamics of a fourth-order system of rational difference equations”, *Advances in Difference Equations*, 215, 1-15, 2012.
9. Dilip D.S., Mathew S.M., “Dynamics of a second-order nonlinear difference system with exponents”, *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 29, 1-10 2021.
10. Elsayed E.M., Ibrahim T.F., “Periodicity and solutions for some systems of nonlinear rational difference equations”, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 44(6), 1361-1390, 2015.

11. Elsayed E.M., El-Dessoky M.M., “Dynamics and global behavior for a fourth-order rational difference equation”, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 42(5), 479-494, 2013.
12. Elsayed E.M., “Solutions of rational difference systems of order two”, *Mathematical and Computer Modelling*, 55(3-4), 378-384, 2012.
13. Gümüş M., Abo Z.R., “Qualitative study of a third order rational system of difference equations”, *Mathematica Moravica*, 25(1), 81-97, 2021.
14. Hamioud H., Touafek N., Dekkar I., Yazlik Y., “On a three-dimensional nonautonomous system of difference equations”, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 68(6), 3901-3936, 2022.
15. Halim Y., Bayram M., “On the solutions of a higher-order difference equation in terms of generalized Fibonacci sequences”, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 39(11), 2974-2982, 2016.
16. Halim Y., Rabago, J.F.T., “On the solutions of a second-order difference equation in terms of generalized Padovan sequences”, *Mathematica Slovaca*, 68(3), 625-638, 2018.
17. Halim Y., Touafek N., Yazlik Y., “Dynamic behavior of a second-order nonlinear rational difference equation”, *Turkish Journal of Mathematics*, 39(6), 1004-1018, 2015.
18. Halim Y., Touafek N., Elsayed E. M., “Closed form solution of some systems of rational difference equations in terms of Fibonacci numbers”, *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal*, 21(6), 473-486, 2014.
19. Haddad N., Touafek N., Rabago J. F. T., “Well-defined solutions of a system of difference equations”, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 56, 439-458, 2018.
20. Kara M., “On a general non-linear difference equation of third-order”, *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, 16(1), 126-136, 2024.

21. Kara M., Yazlik Y., “Solvability of a system of nonlinear difference equations of higher order”, *Turkish Journal of Mathematics*, 43(3), 1533-1565, 2019.
22. Kara M., Yazlik Y., “On eight solvable systems of difference equations in terms of generalized Padovan sequences”, *Miskolc Mathematical Notes*, 22(2), 695-708, 2021.
23. Kara M., Yazlik Y., “On the system of difference equations
$$x_n = \frac{x_{n-2}y_{n-3}}{y_{n-1}(a_n + b_n x_{n-2}y_{n-3})}, y_n = \frac{y_{n-2}x_{n-3}}{x_{n-1}(\alpha_n + \beta_n y_{n-2}x_{n-3})}$$
”, *Journal of Mathematical Extension*, 14(1), 41-59, 2020.
24. Khaliq A., Sadiq S., Khan A. Q., Ibrahim, T. F., “Exact solutions of three-dimensional max-type system of difference equations”, *Mathematical Problems in Engineering*, 2022(1), 1078283, 2022.
25. Khaliq A., Alayachi H. S., Zubair M., Rohail M., Khan A. Q., “On stability analysis of a class of three-dimensional system of exponential difference equations”, *AIMS Math*, 8, 5016-5035, 2023.
26. Khelifa A., Halim Y., Bouchair A., Berkali M., “On a system of three difference equations of higher order solved in terms of Lucas and Fibonacci numbers”, *Mathematica Slovaca*, 70(3), 641-656, 2020.
27. Mylona C., Papaschinopoulos G., Schinas C. J. C., “Stability and flip bifurcation of a three-dimensional exponential system of difference equations”, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 44(6), 4316-4329, 2020.
28. Stević S., “On some solvable systems of difference equations”, *Applied Mathematics and Computation*, 218(9), 5010-5018, 2012.
29. Stevic S., Iricanin B., Smarda Z., “On a product-type system of difference equations of second order solvable in closed form”, *Journal of Inequalities and Applications*, 2015:327, 1-15, 2015.

30. Stevic S., Iricanin B., Kosmala W., Smarda Z., “Representation of solutions of a solvable nonlinear difference equation of second order”, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 2018(95), 1-18, 2018.
31. Stevic S., “Existence of a unique bounded solution to a linear second-order difference equation and the linear first-order difference equation”, *Advances in Difference Equations*, 2017:169, 1-13, 2017.
32. Stevic S., Iricanin B., Kosmala W., Smarda Z., “On a nonlinear second order difference equations”, *Journal of Inequalities and Applications*, 2022:88, 1-11, 2022.
33. Stevic S., Iricanin B., Smarda Z., “On a close to symmetric system of difference equations of second order”, *Advances in Difference Equations*, 1-17, 2015.
34. Stevic S., “On a two-dimensional solvable system of difference equations”, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 2018(104), 1-18, 2018.
35. Stevic S., Diblik J., Iricanin B., Smarda Z., “On the system of difference equations
$$x_n = \frac{x_{n-1}y_{n-2}}{ay_{n-2} + by_{n-1}}, y_n = \frac{y_{n-1}x_{n-2}}{cx_{n-2} + dx_{n-1}},$$
 ” *Applied Mathematics and Computation*, 270, 688-704, 2015.
36. Stevic S., Rankovic D., “On a practically solvable product-type system of difference equations of second order”, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 56, 1-23, 2016.
37. Stevic S., “On a class of systems of rational second-order difference equations solvable in closed form”, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 43(3), 1001-1016, 2020.
38. Stevic S., “Two-dimensional solvable system of difference equations with periodic coefficients”, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 42(18), 6757-6774, 2019.

39. Stevic S., Tollu D.T., “On a two-dimensional nonlinear system of difference equations close to the bilinear system”, *AIMS Mathematics*, 8(9), 20561–20575, 2023.
40. Stefanidou G., Papaschinopoulos G., “On a generalized cyclic-type system of difference equations with maximum”, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 65, 1-20, 2022.
41. Touafek N., Elsayed E. M., “On a third order rational systems of difference equations”, *An Stiint Univ Al I Cuza Iași Mat.*, 61(2), 367–380, 2015.
42. Touafek N., Haddad N., “On a mixed max-type rational system of difference equations”, *Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 3(1), 164-169, 2015.
43. Taskara N., Tollu D.T., Touafek N., Yazlik Y., “A solvable system of difference equations”, *Communications of the Korean Mathematical Society*, 35(1), 301-319, 2020.
44. Tollu D.T., Yalcinkaya I., Ahmad H., Yao S.W., “A detailed study on a solvable system related to the linear fractional difference equation”, *Math. Biosci. Eng*, 18(5), 5392-5408, 2021.
45. Touafek N., Elsayed E.M., “On the solutions of systems of rational difference equations”, *Mathematical and Computer Modelling*, 55(7-8), 1987-1997, 2012.
46. Yalçinkaya İ., El-Metwally H., Bayram M., Tollu D.T., “On the dynamics of a higher-order fuzzy difference equation with rational terms”, *Soft Computing*, 27(15), 10469-10479, 2023.
47. Yazlik Y., Kara M., “On a solvable system of difference equations of higher-order with period two coefficients”, *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 68(2), 1675-1693, 2019.
48. Elaydi S., “*An Introduction to Difference Equations*”, Springer Science & Business Media, New York, 2005.

49. Bereketoğlu H., Kutay V., “*Fark Denklemleri*”, Gazi Kitabevi, Ankara, 2012.
50. Stevic S., “Domains of undefinable solutions of some equations and system of difference equations”, *Applied Mathematics and Computation*, 219, 11256-11213, 2013.
51. Stevic, S., “Representation of solutions of bilinear difference equations in terms of generalized Fibonacci sequences”, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 67, 1-15, 2017.

