



T.C.

**KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ**

**DUAL SAYILAR ÜZERİNDE EŞİTSİZLİKLER VE
TOPOLOJİLER**

**NURCAN İLAYDA KAYA
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**DANIŞMAN
Prof. Dr. HALİT GÜNDOĞAN**

KIRIKKALE-2024



**T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ**

**DUAL SAYILAR ÜZERİNDE EŞİTSİZLİKLER VE
TOPOLOJİLER**

**NURCAN İLAYDA KAYA
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**DANIŞMAN
Prof. Dr. HALİT GÜNDOĞAN**

KIRIKKALE-2024

Matematik Anabilim Dalında Nurcan İlayda KAYA tarafından hazırlanan “DUAL SAYILAR ÜZERİNDE EŞİTSİZLİKLER VE TOPOLOJİLER” adlı tez çalışması, aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ / OY ÇOKLUĞU ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman (Başkan): Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN

İmza.....

Matematik Anabilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye: Doç. Dr. Osman KEÇİLİOĞLU

İmza.....

Matematik Anabilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Olgun DURMAZ

İmza.....

Matematik Anabilim Dalı, Erzurum Teknik Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Tez Savunma Tarihi: 02/10/2024

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Recep ÇALIN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYANI

Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Nurcan İlayda KAYA

02.10.2024

ÖZET

DUAL SAYILAR ÜZERİNDE EŞİTSİZLİKLER VE TOPOLOJİLER

KAYA, Nurcan İlayda

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN

Ekim 2024, 58 sayfa

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. Bu kısımda, çalışmanın konusu ile ilgili literatürde yer alan bilgiler verilmiştir ve çalışmanın amacı belirtilmiştir.

İkinci bölümde, sonraki bölümde kullanılacak olan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda, [22] de verilen dual sıralama bağıntısı ve dual mutlak değer kavramları ele alınarak, dual mutlak değer in bazı temel özellikleri incelenmiştir. Ayrıca, [22] de verilen dual sıralama bağıntısı ve dual metrik kavramlarından faydalanılarak $\mathbb{D}$ ve $\mathbb{D}^2$ uzaylarındaki bazı topolojilerin elemanlarının $\mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{R}^3$ uzaylarındaki geometrik modelleri inşa edilmiştir.

Üçüncü bölümün ikinci kısmında ise, öncelikle [23] de verilen kısmi sıralama bağıntısından faydalanılarak dual sayılar arasında bir sıralama bağıntısı verilmiştir ve bu sıralama bağıntısının bazı temel özellikleri incelenmiştir. Bu sıralama bağıntısı dikkate alınarak, yarı dual norm ve yarı dual metrik kavramları verilmiştir. Son olarak, $\mathbb{D}$ ve $\mathbb{D}^2$ uzaylarındaki bazı topolojilerin elemanlarının $\mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{R}^3$ uzaylarındaki geometrik modelleri yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Dual Uzay, Dual Sıralama Bağıntısı, Dual Norm, Dual Metrik, Mutlak Değer, Eşitsizlik

ABSTRACT

INEQUALITIES AND TOPOLOGIES ON DUAL NUMBERS

KAYA, Nurcan İlayda

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, Master Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN

October 2024, 58 Pages

The thesis consist of three chapters.

The first chapter is devoted to the introduction. In this part, information in the literature about the subject of the study is given and the aim of the study is stated.

In the second chapter, includes the basic definitions and theorems that will be used in the next part.

The third part consists of two parts. In the first part, the concepts of dual ordering relation and dual absolute value given in [22] are discussed and some basic properties of dual absolute value are examined. In addition, geometric models of some topologies in $\mathbb{D}$ and $\mathbb{D}^2$ spaces in $\mathbb{R}^2$ and $\mathbb{R}^3$ spaces are constructed by using the concepts of dual ordering relation and dual metric given in [22].

In the second part of the third part, firstly, an ordering relation between dual numbers is given by using the partial ordering relation given in [23] and some basic properties of this ordering relation are examined. Considering this ordering relation, the concepts of semi-dual norm and semi-dual metric are given. Finally, geometric models of the elements of some topologies in $\mathbb{D}$ and $\mathbb{D}^2$ spaces in $\mathbb{R}^2$ and $\mathbb{R}^3$ spaces were made.

Key Words: Dual Space, Dual Ordering Relation, Dual Norm, Dual Metric, Absolute Value, Inequality

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca; tecrübe ve katkıları ile beni yönlendiren değerli hocam, Sayın Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN' a, çalışmalarım esnasında beni destekleyen, bilgi, ilgi ve hoşgörülerini esirgemeyen Sayın Dr. Öğr. Üyesi Büşra AKTAŞ ve Sayın Dr. Öğr. Üyesi Olgun DURMAZ hocalarıma, Kırıkkale Üniversitesi Matematik Bölümündeki değerli hocalarıma, hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen sevgili aileme ve yanımda olan arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
1.1. Tezin Amacı	2
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
3. DUAL UZAYDA BAZLAR VE TOPOLOJİLER	11
3.1. Dual Sıralama Bağıntısı İle Oluşturulan Baz Ve Topolojiler.....	11
3.2. Dual Parçalı Sıralama Bağıntısı Yardımıyla Oluşturulan Bazlar ve Topolojiler	30
KAYNAKÇA	56
ÖZGEÇMİŞ.....	58

SİMGELER DİZİNİ

$\mathcal{V}$	Vektör uzayı
$\mathfrak{F}$	Cisim
$\mathbb{D}$	Dual uzay
$\mathbb{D}^n$	n –boyutlu dual uzay
$\langle , \rangle$	Öklid uzayında iç çarpım
$\ \cdot \ $	Öklid uzayında norm
d	Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu
$\bar{d}$	Dual uzaklık fonksiyonu
$\nearrow$	Topoloji
$\bar{\nearrow}$	Dual topoloji
$B(\varphi, r)$	φ merkezli, r yarıçaplı açık yuvar
$\bar{B}(\varphi, \bar{r})$	φ merkezli, $\bar{r}$ yarıçaplı dual açık yuvar

1. GİRİŞ

Dual sayılar, 1845-1879 yılları arasında yaşamış olan İngiliz matematikçi William Kingdon Clifford tarafından tanımlanmış ve geliştirilmiştir [1]. Clifford, geometri alanında yapmış olduğu çalışmalarda bu sayıları bir araç olarak kullanmıştır. 1891'de Alman matematikçi Eduard Study tarafından doğruların geometrisi ve kinematik üzerine yaptığı çalışmalarda dual sayıları ve dual vektörleri kullanmıştır [2]. 1895'te Aleksandr Kotelnikov dual sayılar kavramını mekaniğe uygulamıştır [3]. Alman matematikçi ve fizikçi Julius Plücker doğruyu sıralı altılı bir koordinat olarak göstermiştir. Plücker'in öğrencisi olan E. Study doğrunun bu ifadesini dual sayılardan faydalanan dual vektör uzayına taşımış ve $\mathbb{R}^3$ uzayındaki yönlendirilmiş doğrular ile $\mathbb{DD}^3$ uzayında birim dual küre üzerindeki her bir nokta arasında birebir bir eşleme olduğunu göstermiştir [2]. Katı cisimlerin bilgisayar modellemesi, mekanik, kinematik, insan vücudunun modellemesi gibi alanlarda dual sayıların kullanımı mevcuttur. Örneğin, dual sayılar kullanılarak uzaysal mekanik hareketleri açıklayabiliriz [4].

Topolojinin ortaya çıkışı ile ilgili kayda değer ilk çalışma Euler'in, Königsberg'in Yedi Köprüsü probleminin çözümü ile başlamıştır. Yerel halk, kentin belirli bir noktasından hareket ederek her köprüyü bir ve yalnız bir kez geçerek başlangıç noktasına dönülebilir mi sorusunu cevabını aramışlardır. Bu problem o dönem yaşayan ünlü matematikçi Euler'in (1707–1783) ilgisini çekmiş ve Euler, 1735 yılında, kent akademisine söz konusu gezinin imkânsızlığını kanıtlayan matematiksel ispatını sunmuştur. 1741 yılında bu ispat "Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis (Konum geometrisiyle ilgili bir problemin çözümü)" adıyla akademinin dergisinde yayınlanmıştır [5]. Euler, içinde uzaklık ve ölçü kavramı olmayan ama konumlarla ilgilenen yeni bir geometriden söz ettiğinin farkındaydı. Bazılarına göre, bu olgu, topolojinin başlangıcıdır [6]. Matematikte, topoloji terimi 1847'de Gauss'un öğrencisi olan Alman matematikçi J.B. Listing tarafından ortaya konuldu. 1857'de Riemann tarafından cebirsel fonksiyonlar teorisi üzerine yaptığı çalışmada kendini gösterdi. Bu çalışmaları Alman matematikçi A.F. Möbius takip ederek, bugün Möbius şeridi

olarak bildiğimiz tek taraflı ve kenarlı yüzeyi ortaya koymuştur [7]. Topoloji büküm, buruşma, esneme ve bükme dahil olmak üzere sürekli deformasyonlar altında korunan geometrik nesnelerin özellikleri ile ilgilenir. Topoloji, fizik, bilgisayar bilimi, biyoloji, robotik, fiber sanatı gibi uygulama alanları için kullanılır.

Reel sayılar üzerinde tanımlanmış olan eşitsizlik sistemi matematik ve fiziğin birçok alt dalında yoğun bir şekilde kullanılmaktadır. Bu eşitsizliklerin varlığı birçok branşın oluşmasına büyük ölçüde katkıda bulunmuştur. Bir araştırma alanı olarak eşitsizlikler uzun bir tarihe sahip değildir. Fakat, bir matematiksel konu olarak eski matematikçiler tarafından kullanılmıştır. Eşitsizlikler ve eşitsizlik tarihi üzerine birçok çalışma yapılmıştır ([8],[9] ve [10]). Eşitsizlikler; cebir, geometri, trigonometri ve modern kalkülüs dahil olmak üzere matematiğin birçok alanında kullanılan temel araçlardır. Özellikle, bir uzayın en temel yapılarından biri olan metrik kavramını inşa etmek için eşitsizliklerin varlığına ihtiyaç vardır [11]. Günümüzde, eşitsizlik sistemi çeşitli teorik ve pratik alanlarda uygulamalara sahiptir [12].

1.1. Tezin Amacı

Bu çalışmada iki farklı eşitsizlik sistemi kullanılmıştır. İlk kısımda kullanılan eşitsizlik sistemi [21] ve [22] de ki eşitsizlik sistemidir. Bu iki eşitsizlik sisteminden yararlanarak sırasıyla ilk bölüm ve ikinci bölümde $\mathbb{D}$ ve $\mathbb{D}^2$ uzaylarındaki bazı bazlar ve bu bazlara ait topolojiler incelenmiştir. Bu topolojilerin bazı elemanlarının $\mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{R}^3$ deki geometrik modelleri incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1.1. $\forall \gamma \in \mathbb{R}$ için $-\infty < \gamma$ ve $\gamma < +\infty$ olmak üzere, $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ cümlesine genelleştirilmiş reel sayılar cümlesi denir ve

$$\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$$

biçiminde gösterilir.

Tanım 2.1.2. $H \neq \emptyset$ bir cümle ve bu cümledeki iki iç işlem T ve $\perp$ olmak üzere, $(H, T, \perp)$ üçlüsünü ele alalım. Eğer (H, T) bir abel grubu iken ikinci iç işlem olan $\perp$, H cümlesinde birleşmeli ve birinci işlem üzerine dağılımlı ise $(H, T, \perp)$ üçlüsüne halka adı verilir [13].

Tanım 2.1.3. Bir $(H, T, \perp)$ halkasında ikinci işleme göre H cümlesinin birim elemanı var ve ikinci işlemin değişme özelliği mevcut ise bu halkaya birimli ve değişmeli halka denir [13].

Tanım 2.1.4. $(H, T, \perp)$ birimli ve değişmeli bir halka ve $M \neq \emptyset$ bir cümle olsun. $\oplus : M \times M \rightarrow M$ bir iç işlem ve $\odot : H \times M \rightarrow M$ bir dış işlem olmak üzere, $(M, \oplus)$ bir abel grubu ve $\odot$ dış işlemi aşağıdaki özellikleri sağlıyor ise M cümlesine bir modül adı verilir: $w, v \in H$, $\perp$ iç işlemine göre birim eleman $P \in H$ ve $w, v \in M$ olmak üzere,

$$\text{i) } w \odot (\gamma \gamma \oplus P) = (w \odot \gamma \gamma) \oplus (w \odot P)$$

$$\text{ii) } (w \perp v) \odot \gamma \gamma = (w \odot \gamma \gamma) \oplus (v \odot \gamma \gamma)$$

$$\text{iii) } (w \perp v) \odot \gamma \gamma = w \odot (v \odot \gamma \gamma)$$

$$\text{iv) } P \odot \gamma \gamma = \gamma \gamma$$

H üzerindeki bir modül H -modül olarak adlandırılır ([13], [14] ve [15]).

Tanım 2.1.5. $\mathcal{V}\mathcal{V}$ bir $\mathfrak{F}\mathfrak{F}$ cismi üzerinde tanımlı vektör uzayı ve

$$ff : \mathcal{V}\mathcal{V} \times \mathcal{V}\mathcal{V} \rightarrow \mathfrak{F}\mathfrak{F}$$

$$(\gamma \gamma, P) \rightarrow ff(\gamma \gamma, P)$$

Bir fonksiyon olsun. Aşağıda bulunan üç aksiyom sağlanırsa bu ff fonksiyonu $\mathcal{V}\mathcal{V}$ vektör

uzayı üzerinde bir iç çarpım fonksiyonu olarak veya iç çarpım olarak adlandırılır.

(i) (Pozitif Tanımlılık Özelliği) $\forall \gamma \in \mathcal{V}$ için $ff(\gamma, \gamma) \geq 0$ dir. Ve

$$ff(\gamma, \gamma) = 0 \Leftrightarrow \gamma = 0$$

dir.

(ii) (Simetri Özelliği) $\forall \gamma, P \in \mathcal{V}$ için $ff(\gamma, P) = ff(P, \gamma)$ dir.

(iii) (Bilineerlik Özelliği) $\forall \gamma, P, \omega \in \mathcal{V}$ ve $\forall w, v \in \mathfrak{F}$ için

$$ff(w\gamma + vP, \omega) = wff(\gamma, \omega) + vff(P, \omega)$$

$$ff(\gamma, wP + v\omega) = wff(\gamma, P) + vff(\gamma, \omega)$$

dir.

Örneğin, $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ olsun. $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ ve $P = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ olmak üzere,

$$\langle, \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\gamma, P) \rightarrow \langle, \rangle(\gamma, P) = \langle \gamma, P \rangle = \gamma_1 P_1 + \gamma_2 P_2 + \dots + \gamma_n P_n$$

fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma Öklid iç çarpımı denir ([14] ve [15]).

Tanım 2.1.6. $\mathfrak{F}$ cismi $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olmak üzere; $\mathcal{V}, \mathfrak{F}$ cismi üzerinde tanımlı vektör uzayı ve

$$\| . \| : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\gamma \rightarrow \| . \|(\gamma) = \| \gamma \|$$

bir fonksiyon olsun.

i) $\forall \gamma \in \mathcal{V}$ için $\| \gamma \| \geq 0$ ve $\| \gamma \| = 0 \Leftrightarrow \gamma = 0$,

ii) $\forall \lambda \in \mathfrak{F}$ ve $\forall \gamma \in \mathcal{V}$ için $\| \lambda \gamma \| = |\lambda| \| \gamma \|$

iii) $\forall \gamma, P \in \mathcal{V}$ için $\| \gamma + P \| \leq \| \gamma \| + \| P \|^2$

özellikleri sağlanıyorsa $\| . \|$ fonksiyonuna $\mathcal{V}$ üzerinde bir norm denir. $(\mathcal{V}, \| . \|)$ sıralı ikilisine $\mathfrak{F}$ cisminin $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olmasına göre normlu reel vektör uzayı veya normlu kompleks vektör uzayı denir ([14] ve [15]).

Tanım 2.1.7. X boştan farklı bir cümle ve

$$d : XX \times XX \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\gamma\gamma, P) \rightarrow d(\gamma\gamma, P)$$

bir fonksiyon olsun.

i) $\forall \gamma\gamma, P \in XX$ için $d(\gamma\gamma, P) \geq 0$ ve $d(\gamma\gamma, P) = 0 \Leftrightarrow \gamma\gamma = P$

ii) $\forall \gamma\gamma, P \in XX$ için $d(\gamma\gamma, P) = d(P, \gamma\gamma)$

iii) $\forall \gamma\gamma, \omega \in XX$ için $d(\gamma\gamma, \omega) \leq d(\gamma\gamma, P) + d(P, \omega)$

şartları sağlanıyorsa d fonksiyonuna X üzerinde metrik ve (XX, d) sıralı ikilisine metrik uzay denir ([19] ve [20]).

Tanım 2.1.8. $A = \mathbb{R}^n$ veya $A = \mathbb{C}^n$ olmak üzere $\gamma\gamma = (\gamma\gamma_1, \gamma\gamma_2, \dots, \gamma\gamma_n)$, $P = (P_1, P_2, \dots, P_n) \in A$ için

$$d_1(\gamma\gamma, P) = \sqrt{\sum_{ii=1}^n |\gamma\gamma_{ii} - P_{ii}|^2}$$

şeklinde tanımlanan $d_1: A \times A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna A üzerinde standart metrik denir.

Tanım 2.1.9. $A = \mathbb{R}^n$ veya $A = \mathbb{C}^n$ olmak üzere $\gamma\gamma = (\gamma\gamma_1, \gamma\gamma_2, \dots, \gamma\gamma_n)$, $P = (P_1, P_2, \dots, P_n) \in A$ için

$$d_1(\gamma\gamma, P) = \sqrt{\sum_{ii=1}^n |\gamma\gamma_{ii} - P_{ii}|}$$

şeklinde tanımlanan $d_1: A \times A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna A üzerinde taksi metriği denir.

Tanım 2.1.10. A boş olmayan bir küme ve $\gamma\gamma, P \in A$ için

$$d(\gamma\gamma, P) = \begin{cases} 0, & \gamma\gamma = P \\ 1, & \gamma\gamma \neq P \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $d: A \times A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna A üzerinde ayrik metrik denir.

Tanım 2.1.11. (XX, d) bir metrik uzay, $\varphi \in XX$ ve $r > 0$ bir reel sayı olsun.

$$B(\varphi, r) = \{\gamma\gamma \in XX \mid d(\gamma\gamma, \varphi) < r\}$$

cümlesine φ merkezli r yarıçaplı açık yuvar denir.

$$S(\varphi, r) = \{\gamma\gamma \in \mathbf{XX} \mid d(\gamma\gamma, \varphi) \leq r\}$$

cümlesine φ merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar denir ([19] ve [20]).

Tanım 2.1.12. $X \neq \emptyset$ ve $\beta \subseteq P(X)$ olsun. Eğer aşağıdaki iki aksiyom sağlanırsa β ailesine X cümlesi için bir topolojik baz denir.

i) $\bigcup_{B \in \beta} B = X,$

ii) $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ olacak şekildeki $\forall B_1, B_2 \in \beta$ için $B_1 \cap B_2 = \bigcup_{B \in P \subseteq \beta} B$ dir. Burada P, β ailesinin elemanlarından oluşan bir ailedir. ([19] ve [20]).

Tanım 2.1.13. $X \neq \emptyset$ ve $\mathcal{A} \subseteq P(X)$ olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa $\mathcal{A}$ ailesine X üzerinde bir topoloji, $(X, \mathcal{A})$ ikilisine de topolojik uzay denir. $\mathcal{A}$ ailesinin elemanlarına da X cümlesinin birer açık alt cümlesi denir.

i) $X, \emptyset \in \mathcal{A},$

ii) $\forall U, V \in \mathcal{A}$ ise $U \cap V \in \mathcal{A},$

iii) I herhangi bir indis cümlesi ve $ii \in I$ için $U_{ii} \in \mathcal{A}$ ise

$$\bigcup_{ii \in I} U_{ii} \in \mathcal{A}$$

dir ([19] ve [20]).

Tanım 2.1.14. $(X, \mathcal{A})$ bir topolojik uzay, $x \in X$ ve $A \subseteq X$ olsun. $x \in U \subseteq A$ olacak şekilde bir U açık cümlesi varsa x noktasına A cümlesinin bir iç noktası denir. A cümlesinin her bir elemanı iç nokta ise A cümlesine $(X, \mathcal{A})$ topolojik uzayında bir açık cümle denir ([19] ve [20]).

Tanım 2.1.15.

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{w = (w, w^*) \mid w, w^* \in \mathbb{R}\}$$

cümlesini ele alalım. Bu cümle üzerinde bir eşitlik ve iki iç işlem aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

i) $\bar{w} = \bar{v}$ olması için gerek ve yeter şart $w = v$ ve $w^* = v^*$ olmasıdır.

ii) $+_{\mathbb{D}}: \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}, \bar{w} = (w, w^*)$ ve $\bar{v} = (v, v^*)$ için

$$\bar{w} +_{\mathbb{D}} \bar{v} = (w + v, w^* + v^*)$$

dir.

iii) $\cdot_{\mathbb{D}}: \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}, \bar{w} = (w, w^*)$ ve $\diamond = (v, v^*)$ için

$$\bar{w} \cdot_{\mathbb{D}} \bar{v} = (wv, wv^* + v w^*)$$

dir.

Eşitlik ve bu iki iç işlem $\mathbb{D}$ cümlesi üzerinde ele alındığında, $\mathbb{D}$ cümlesi dual sayılar sistemi olarak adlandırılır ve $\diamond = (w, w^*)$ elemanına bir dual sayı denir. Bu $\bar{w} = (w, w^*)$ dual sayısında, w reel sayısına $\bar{w}$ 'nin reel kısmı, w^* reel sayısına da $\bar{w}$ 'nin dual kısmı denir ([16],[17] ve [18]).

Teorem 2.1.16.

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{\diamond = (w, w^*) \mid w, w^* \in \mathbb{R}\}$$

cümlesi üzerinde tanımlanan iki iç işlem $+_{\mathbb{D}}$ ve $\cdot_{\mathbb{D}}$ ile birlikte $(\mathbb{D}, +_{\mathbb{D}}, \cdot_{\mathbb{D}})$ üçlüsü birimli ve değişmeli bir halkadır. Burada $\mathbb{D}$ cümlesinin $+_{\mathbb{D}}$ işlemine göre birim elemanı $(0,0)$ ve $\cdot_{\mathbb{D}}$ işlemine göre birim elemanı $(1,0)$ dır [16].

Sonuç 2.1.1. $(\mathbb{D}, +_{\mathbb{D}}, \cdot_{\mathbb{D}})$ üçlüsü birimli ve değişmeli bir halka olup bir cisim değildir. Gerçekten, $\diamond = (w, w^*) \in \mathbb{D}$ elemanının ikinci işleme göre tersi, $w \neq 0$ için $\diamond^{-1} = \frac{1}{ww^*}, -\frac{ww^*}{ww^2}$ şeklindedir. O halde, $w^* \neq 0$ için $(0, a^*) \in \mathbb{D}$ elemanının $\cdot_{\mathbb{D}}$ iç işlemine göre tersi yoktur [16].

Teorem 2.1.17. $\mathcal{A} = \{\bar{w} = (w, 0) \mid w \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{D}$ olmak üzere,

$$\xi\xi: \mathcal{A} \subset \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}, \xi\xi(w, 0) = w$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm izomorfizmdir [16].

Bu teoremin bir sonucu olarak, $(w, 0)$ şeklindeki dual sayılar w reel sayısı ile gösterilecektir. Yani, $(w, 0) = w$ dır [16].

Tanım 2.1.18. $\mathbb{D}$ dual sayılar sisteminin elemanı olan $(0,1)$ şeklindeki dual sayı ε ile gösterilir ve bu eleman dual birim olarak adlandırılır. $(0,1) = \varepsilon$ elemanı aşağıdaki özelliği sağlar [16] :

$$\varepsilon\varepsilon^2 = \varepsilon \cdot_{\mathbb{D}} \varepsilon = (0,0) = 0$$

Sonuç 2.1.2. Yukarıdaki tanım ve teoremler dikkate alındığında $\diamond = (w, w^*)$ dual sayısı aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned}
\Diamond &= (w, w^*) \\
&= (w, 0) +_{\mathbb{D}\mathbb{D}} (0, w^*) \\
&= (w, 0) +_{\mathbb{D}\mathbb{D}} (0, 1) \cdot_{\mathbb{D}\mathbb{D}} (w^*, 0) \\
&= w +_{\mathbb{D}\mathbb{D}} \varepsilon \varepsilon \cdot_{\mathbb{D}\mathbb{D}} w^*
\end{aligned}$$

Bu tezdeki çalışmamız boyunca $+_{\mathbb{D}\mathbb{D}}$ ve $\cdot_{\mathbb{D}\mathbb{D}}$ işlemlerini $+$ ve $\cdot$ işlemleri ile göstereceğiz.

Bütün dual sayıların cümlesi aşağıdaki şekilde verilebilir:

$$\mathbb{D}\mathbb{D} = \{\Diamond = w + \varepsilon w^* \mid w, w^* \in \mathbb{R}, \varepsilon^2 = 0\}$$

Buradan iki dual sayının toplama ve çarpma işlemleri

$$\begin{aligned}
(w + \varepsilon w^*) + (v + \varepsilon v^*) &= (w + v) + \varepsilon (w^* + v^*) \\
(w + \varepsilon w^*) \cdot (v + \varepsilon v^*) &= wv + \varepsilon (wv^* + w^*v)
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca, $\Diamond = w + \varepsilon w^*$ ve $\bar{v} = v + \varepsilon v^*$ dual sayıları için eğer $v \neq 0$ ise, bu durumda $\frac{w\Diamond}{\bar{v}}$ dual sayısı

$$\frac{w\Diamond}{\bar{v}} = \frac{wv}{v} + \varepsilon \frac{wv^* - w^*v}{v^2} \Diamond$$

şeklindeir.

Tanım 2.1.19. $\mathbb{D}\mathbb{D}^n = \mathbb{D}\mathbb{D} \times \mathbb{D}\mathbb{D} \times \dots \times \mathbb{D}\mathbb{D} = \{\vec{\Diamond} = (\Diamond_1, \dots, \Diamond_n) \mid \Diamond_{ii} \in \mathbb{D}\mathbb{D}, ii = 1, 2, \dots, n\}$ cümlesini ele alalım. Bu cümle üzerinde eşitlik, bir iç işlem ve bir dış işlem aşağıdaki şekilde tanımlanır [16]:

i) $\vec{\Diamond} = \vec{\Diamond}$ ye olması için gerek ve yeter şart $\Diamond = \bar{v}_{ii}$ olmasıdır ($1 \leq i \leq n$).

ii) $+_{\mathbb{D}\mathbb{D}^n}: \mathbb{D}\mathbb{D}^n \times \mathbb{D}\mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}\mathbb{D}^n$, $\vec{\Diamond} = (\Diamond_1, \dots, \Diamond_n)$ ve $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ için

$$\vec{\Diamond} +_{\mathbb{D}\mathbb{D}^n} \vec{v} = (\Diamond_1 + v_1, \dots, \Diamond_n + v_n)$$

iii) $\cdot_{\mathbb{D}\mathbb{D}^n}: \mathbb{D}\mathbb{D}^n \times \mathbb{D}\mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}\mathbb{D}^n$, $\vec{\lambda} = \lambda + \varepsilon \lambda^*$ ve $\vec{\Diamond} = (\Diamond_1, \dots, \Diamond_n)$ için

$$\vec{\lambda} \cdot_{\mathbb{D}\mathbb{D}^n} \vec{\Diamond} = (\vec{\lambda} \cdot \Diamond_1, \vec{\lambda} \cdot \Diamond_2, \dots, \vec{\lambda} \cdot \Diamond_n)$$

Teorem 2.1.20. $\mathbb{D}\mathbb{D}^n = \{\vec{\Diamond} = (\Diamond_1, \dots, \Diamond_n) \mid \Diamond_{ii} \in \mathbb{D}\mathbb{D}, ii = 1, 2, \dots, n\}$ cümlesi üzerinde tanımlanan $+_{\mathbb{D}\mathbb{D}^n}$ ve $\cdot_{\mathbb{D}\mathbb{D}^n}$ işlemleri göz önüne alındığında, $(\mathbb{D}\mathbb{D}^n, +_{\mathbb{D}\mathbb{D}^n}, \cdot_{\mathbb{D}\mathbb{D}^n})$ üçlüsü $(\mathbb{D}\mathbb{D}, +, \cdot)$ birimli ve değişmeli halkası üzerinde bir modül oluşturur.

Tanım 2.1.21. $(\mathbb{D}^n, +, \cdot)$ üçlününün $(\mathbb{D}, +, \cdot)$ birimli ve değişmeli halkası üzerinde oluşturduğu module $\mathbb{D}$ -Modül ve $\mathbb{D}$ -Modül'ün elemanlarına da dual vektör adı verilir [16].

Sonuç 2.1.3. $\mathbb{D}^n$ üzerinde tanımlanan iç işlem ve dış işlem dikkate alındığında bir dual vektör aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned}\vec{w} &= (w_1, w_2, \dots, w_n) \\ &= (w_1 + \varepsilon w_1^*, w_2 + \varepsilon w_2^*, \dots, w_n + \varepsilon w_n^*) \\ &= (w_1, w_2, \dots, w_n) + \varepsilon \mathcal{E}(\mathbb{D}^n) (w_1^*, w_2^*, \dots, w_n^*) \\ &= \vec{w} + \varepsilon \vec{w}^*\end{aligned}$$

Burada $\vec{w}$ ve $\vec{w}^*$ vektörleri $\mathbb{R}^n$ nin vektörleridir.

Tanım 2.1.22. $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0) = \vec{0} + \varepsilon \vec{0}^*$ dual vektörüne sıfır dual vektörü denir [16].

Sonuç 2.1.4. Burada daha rahat ifade edebilmek için $+$ ve $\cdot$ işlemlerinin yerine sırasıyla $+$ ve $\cdot$ işlemlerini kullanacağız. Bu durumda, bütün dual vektörlerin cümlesi

$$\mathbb{D}^n = \{\vec{w} = \vec{w} + \varepsilon \vec{w}^* \mid \vec{w} \in \mathbb{R}^n, \varepsilon^2 = 0\}$$

şeklindedir. İki dual vektörün toplamı ve bir dual skaler çarpımı aşağıdaki şekilde verilir:

$$\vec{w} + \vec{v} = (\vec{w} + \vec{v}) + \varepsilon (\vec{w}^* + \vec{v}^*)$$

ve

$$\lambda \cdot \vec{w} = \lambda \cdot \vec{w} + \varepsilon (\lambda \cdot \vec{w}^* + \lambda^* \cdot \vec{w})$$

dir.

Tanım 2.1.23. $e_{ii} = (\delta_{ii}^-, \delta_{ii}^-, \dots, \delta_{ii}^-)$ şeklinde vektörleri ele alalım. Burada,

$$\delta_{ii}^- = \begin{cases} 1 + \varepsilon 0, & ii = jj \\ 0 + \varepsilon 0, & ii \neq jj \end{cases} \quad 1 \leq ii, jj \leq n$$

biçiminde ifade edilir. Her $\vec{e} \in \mathbb{D}^n$ dual vektörü

$$\begin{aligned}\vec{e} &= e_1 \vec{e}_1 + e_2 \vec{e}_2 + \dots + e_n \vec{e}_n \\ &= \vec{e} + \vec{e}_2 + \dots + \vec{e}_n\end{aligned}$$

şeklinde yazılır [16].

Tanım 2.1.24. $\vec{w} = \vec{w} + \varepsilon \vec{w}$ ve $\vec{v} = \vec{v} + \varepsilon \vec{v}$ dual vektörlerini ele alalım. Bu dual vektörler arasındaki dual iç çarpım

$$\begin{aligned} \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle_{\mathbb{D}} &= \vec{w} \cdot \vec{v} + \varepsilon (\vec{w} \cdot \vec{v} + \vec{w} \cdot \vec{v}) \\ &= \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle + \varepsilon (\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır. Burada, $\vec{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ ve $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ reel vektörleri için $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle = \vec{w} \cdot \vec{v} = w_1 v_1 + w_2 v_2 + \dots + w_n v_n$ şeklinde tanımlı Öklid-iç çarpımıdır [16].

Tanım 2.1.22. $\vec{w} = \vec{w} + \varepsilon \vec{w}$ ve $\vec{v} = \vec{v} + \varepsilon \vec{v} \in \mathbb{D}^3$ olmak üzere, bu iki dual vektör arasındaki dual vektör çarpım

$$\vec{w} \times_{\mathbb{D}} \vec{v} = \vec{w} \times \vec{v} + \varepsilon (\vec{w} \times \vec{v} + \vec{w} \times \vec{v})$$

biçiminde tanımlanır. Burada $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ ve $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ için

$$\vec{w} \times \vec{v} = (w_2 v_3 - w_3 v_2, w_3 v_1 - w_1 v_3, w_1 v_2 - w_2 v_1)$$

şeklindedir [27].

3. DUAL UZAYDA BAZLAR VE TOPOLOJİLER

3.1. Dual Sıralama Bağıntısı İle Oluşturulan Baz Ve Topolojiler

Bu bölümde [21] ve [22] çalışmalarındaki dual sıralama bağıntısını kullanılarak $\mathbb{D}\mathbb{D}$ ve $\mathbb{D}\mathbb{D}^2$ uzayında baz ve topolojiler elde edilmiştir. Bu topolojilerin bazı elemanlarının $\mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{R}^3$ uzaylarındaki geometrik modelleri oluşturulmuştur.

Tanım 3.1.1. $\diamond = w + \varepsilon w^*$ ve $\bar{v} = v + \varepsilon v^*$ iki dual sayı olsun. Bu dual sayılar arasındaki $\diamond <_{\mathbb{D}\mathbb{D}} \bar{v}$ ($\diamond \leq_{\mathbb{D}\mathbb{D}} \bar{v}$) ilişkisi aşağıdaki şekildedir [22]:

- i. Öncelikle bu dual sayıların reel kısımları karşılaştırılır ve $w < v$ ($w \leq v$) olmalıdır.
- ii. Eğer bu dual sayıların reel kısımları eşit ise bu sayıların dual kısımları karşılaştırılır ve $w^* < v^*$ ($w^* \leq v^*$) olmalıdır.

Sonuç 3.1.1. $\diamond = w + \varepsilon w^*$ ve $\bar{v} = v + \varepsilon v^*$ iki dual sayı olsun. Bu dual sayılar arasındaki $\diamond <_{\mathbb{D}\mathbb{D}} \bar{v}$ ve $\diamond \leq_{\mathbb{D}\mathbb{D}} \bar{v}$ sıralamaları aşağıdaki şekildedir [22]:

- i. $\diamond <_{\mathbb{D}\mathbb{D}} \bar{v} \Leftrightarrow w < v$ veya ($w = v$ ve $w^* < v^*$)
- ii. $\diamond \leq_{\mathbb{D}\mathbb{D}} \bar{v} \Leftrightarrow w \leq v$ veya ($w = v$ ve $w^* \leq v^*$)

Tanım 3.1.2. $\bar{w} = w + \varepsilon w^*$ bir dual sayı olsun. Bu dual sayının dual mutlak değeri

$$|\bar{w}|_1 = |w| + \varepsilon |w^*|$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.1.3. $\bar{w} = w + \varepsilon w^*$, $\bar{v} = v + \varepsilon v^*$ iki dual sayı olsun. Bu durumda, aşağıdaki özellikler sağlanır:

- i. $|\bar{-w}|_1 = |\bar{w}|_1$
- ii. $|\bar{w}\bar{v}|_1 \leq_{\mathbb{D}\mathbb{D}} |\bar{w}|_1 |\bar{v}|_1$
- iii. $\frac{|\bar{w}\bar{v}|_1}{|\bar{v}|_1} \geq_{\mathbb{D}\mathbb{D}} \frac{|\bar{w}|_1}{|\bar{1}|_1}, (v \neq 0)$
- iv. $w \neq 0$ ve $v \neq 0$ için eğer $|\bar{w}|_1 = |\bar{v}|_1$ ise bu durumda $\diamond = \bar{v}$ veya ($\diamond = w + \varepsilon w^* = v - \varepsilon v^*$) veya ($\diamond = w + \varepsilon w^* = -v + \varepsilon v^*$) veya $\diamond = -\bar{v}$ dir.

İspat. $\bar{w} = w + \varepsilon\varepsilon w^*$, $\bar{v} = v + \varepsilon\varepsilon v^*$ iki dual sayı olmak üzere;

i. $|\bar{w}|_1 = |-w - \varepsilon\varepsilon w^*|_1 = |-w| + \varepsilon\varepsilon |-w^*| = |w| + \varepsilon\varepsilon |w^*| = |w|_1$

ii. $|\bar{w}\bar{v}|_1 = |(w + \varepsilon\varepsilon w^*)(v + \varepsilon\varepsilon v^*)|_1$

$$= |wv + \varepsilon\varepsilon(wv^* + w^*v)|_1$$

$$= |wv| + \varepsilon\varepsilon |wv^* + w^*v|$$

$$\leq_{DD} |w||v| + \varepsilon\varepsilon (|wv^*| + |w^*v|)$$

$$= |w||v| + \varepsilon\varepsilon (|w||v^*| + |w^*||v|)$$

$$= (|w| + \varepsilon\varepsilon |w^*|)(|v| + \varepsilon\varepsilon |v^*|)$$

$$= |w|_1 |\bar{v}|_1$$

iii. $\frac{|ww|}{|v|} = \frac{ww + sww^*}{v + sv^*} = \frac{(ww + sww^*)(v - sv^*)}{v^2} = \frac{wwv + s(ww^*v - wwv^*)}{v^2}$

$$= \frac{wwv}{v^2} + \varepsilon\varepsilon \frac{ww^*v - wwv^*}{v^2}$$

$$= \frac{|ww|}{|v|} + \varepsilon\varepsilon \frac{ww^*v - wwv^*}{v^2}$$

$$= \frac{|ww|}{|v|} + \varepsilon\varepsilon \frac{ww^*v - wwv^*}{v^2}$$

$$\geq_{DD} \frac{|ww|}{|v|} + \varepsilon\varepsilon \left(\frac{|ww^*v|}{v^2} - \frac{|wwv^*|}{v^2} \right)$$

$$= \frac{|ww|}{|v|} + \varepsilon\varepsilon \left(\frac{|ww^*||v|}{|v|^2} - \frac{|ww||v^*|}{|v|^2} \right)$$

$$\geq_{DD} \frac{|ww|}{|v|} + \varepsilon\varepsilon \left(\frac{|ww^*|}{|v|} - \frac{|ww||v^*|}{|v|^2} \right)$$

$$= \frac{|ww| + s|ww^*|}{|v| + s|v^*|}$$

$$= \frac{|w|_1}{|v|_1}$$

iv. $|w|_1 = |\bar{v}|_1$ olması durumunda

$$|w| + \varepsilon\varepsilon |w^*| = |v| + \varepsilon\varepsilon |v^*|$$

$$|w| = |v| \quad ve \quad |w^*| = |v^*|$$

$$w = \mp v \quad ve \quad w^* = \mp v^*$$

$$(w = v \text{ veya } w = -v) \text{ ve } (w^* = v^* \text{ veya } w^* = -v^*)$$

$$(w = v \text{ ve } w^* = v^*) \text{ veya } (w = v \text{ ve } w^* = -v^*) \text{ veya } (w = -v \text{ ve } w^* = v^*) \text{ veya}$$

$$(w = -v \text{ ve } w^* = -v^*)$$

$$\diamond = \bar{v} \text{ veya } (\diamond = w + \varepsilon w^* = v - \varepsilon v^*) \text{ veya } (\diamond = w + \varepsilon w^* = -v + \varepsilon v^*) \text{ veya } \diamond = -\bar{v}$$

elde edilir.

Tanım 3.1.4. $\diamond = w + \varepsilon w^* \in \mathbb{D}$ olsun. Bu durumda,

$$\mathbb{D}\mathbb{D}^{+'} = \{\diamond = w + \varepsilon w^* | w > 0, w^* > 0\}$$

$$\mathbb{D}\mathbb{D}^{+''} = \{\diamond = w + \varepsilon w^* | w > 0, w^* < 0\}$$

$$\mathbb{D}\mathbb{D}^{-'} = \{\diamond = w + \varepsilon w^* | w < 0, w^* < 0\}$$

$$\mathbb{D}\mathbb{D}^{-''} = \{\diamond = w + \varepsilon w^* | w < 0, w^* > 0\}$$

cümleleri sırasıyla dual pozitif, yarı dual pozitif, dual negatif, yarı dual negatif sayılar olarak adlandırılır.

Sonuç 3.1.2. Dual mutlak değer fonksiyonu ve yukarıdaki tanım birlikte dikkate alındığında, aşağıdaki ifadeleri yazmak mümkündür:

$$\diamond \in \mathbb{D}\mathbb{D}^{+'} \Rightarrow |\diamond|_1 = w + \varepsilon w^* = \diamond$$

$$\bar{w} \in \mathbb{D}\mathbb{D}^{+''} \Rightarrow |\diamond|_1 = w - \varepsilon w^*$$

$$\bar{w} \in \mathbb{D}\mathbb{D}^{-'} \Rightarrow |\diamond|_1 = -w - \varepsilon w^* = -\diamond$$

$$\diamond \in \mathbb{D}\mathbb{D}^{-''} \Rightarrow |\diamond|_1 = -w + \varepsilon w^*$$

Teorem 3.1.5. $\diamond = w + \varepsilon w^* \in \mathbb{D}$, $n \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$$\text{i. } |\diamond^n|_1 = |\diamond|_1^n$$

$$\text{ii. } w \neq 0 \text{ için } |\diamond^{-n}|_1 \geq_{\mathbb{D}} |\diamond|_1^{-n}$$

İspat.

- i. Eğer $w = 0$ ise $|\diamond^n|_1 = |\diamond|_1^n$ olduğu açıktır. Şimdi $w \neq 0$ olsun. Bu durumda, $|\diamond|_1 = |w| + \varepsilon |w^*|$ olup aşağıdaki ifadeleri yazmak mümkündür:

$$\begin{aligned} |\diamond|_1^n &= (|w| + \varepsilon |w^*|)^n \\ &= |w|^n + \varepsilon n |w^*| |w|^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |w^n| + \varepsilon \varepsilon n |w^*|. |w^{n-1}| \\
&= |w^n| + \varepsilon \varepsilon n |w^* w^{n-1}| \\
&= |w^n| + \varepsilon \varepsilon |w^* n w^{n-1}|_1 \\
&= |\diamond^n|_1
\end{aligned}$$

dir.

ii. $w \neq 0$ için $|\diamond^{-n}|_1 = |\diamond|_1^{-n}$ olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned}
|\diamond^{-n}|_1 &= \left| \frac{1}{\diamond^n} \right|_1 \\
&\geq_{\mathbb{D}} \frac{|1|_1}{|\diamond^n|_1} \\
&= \frac{1}{|\diamond^n|_1} \\
&= \frac{1}{|\diamond^n|_1} \\
&= |\diamond|_1^{-n}
\end{aligned}$$

dir.

Sonuç 3.1.3. Herhangi bir $\diamond = w + \varepsilon \varepsilon w^*$ dual sayısı ve $\bar{\delta\delta} = 0 + \varepsilon \varepsilon \delta\delta^* \in \mathbb{D}$ için,

$$|\diamond|_1 >_{\mathbb{D}} \bar{\delta\delta} \Leftrightarrow \diamond >_{\mathbb{D}} \bar{\delta\delta} \text{ veya } \diamond <_{\mathbb{D}} -\bar{\delta\delta}$$

dir. Burada $\delta\delta^* \in \mathbb{R}$ dir.

İspat. Herhangi bir $\diamond = w + \varepsilon \varepsilon w^*$ dual sayısı ve $\bar{\delta\delta} = 0 + \varepsilon \varepsilon \delta\delta^* \in \mathbb{D}$ için,

$$|\diamond|_1 >_{\mathbb{D}} \bar{\delta\delta} \Leftrightarrow |w| > 0 \text{ veya } (|w| = 0 \text{ ve } |w^*| > \delta\delta^*)$$

$$- (w > 0 \text{ veya } w < 0) \text{ veya } (w = 0 \text{ ve } (w^* > \delta\delta^* \text{ veya } w^* < -\delta\delta^*))$$

$$- (w > 0 \text{ veya } w < 0) \text{ veya } ((w = 0 \text{ ve } w^* > \delta\delta^*) \text{ veya } (w = 0 \text{ ve } w^* < -\delta\delta^*))$$

$$- (w + \varepsilon \varepsilon w^* > 0 + \varepsilon \varepsilon \delta\delta^*) \text{ veya } (w + \varepsilon \varepsilon w^* < 0 - \varepsilon \varepsilon \delta\delta^*)$$

$$- \diamond >_{\mathbb{D}} \bar{\delta\delta} \text{ veya } \diamond <_{\mathbb{D}} -\bar{\delta\delta}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.6. $\mathbb{D}^n$, n-boyutlu bir dual uzay ve $\| \cdot \|$, $\mathbb{R}^n$ üzerinde norm olmak üzere,

$$\| \cdot \|_1 : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}$$

$$\diamond \rightarrow \|\bar{\gamma}\|_1 = \|\gamma\| + \varepsilon \|\gamma^*\|$$

dual fonksiyonu verilsin. Bu durumda aşağıdaki ifadeler mevcuttur.

i. $\forall \bar{\gamma} \in \mathbb{D}^n$ için $\|\bar{\gamma}\|_1 \geq 0$ dir. Ayrıca, $\|\bar{\gamma}\|_1 = 0 \iff \bar{\gamma} = 0$ dir.

ii. $\forall \bar{\gamma} \in \mathbb{D}^n$ ve $\forall \bar{\lambda} \in \mathbb{D}$ için $\|\bar{\lambda}\bar{\gamma}\|_1 \leq \bar{\lambda} \cdot \|\bar{\gamma}\|_1$ dir. Özel olarak, $\lambda^* = 0$ yani; $\bar{\lambda} = \lambda$ olması durumunda $\|\bar{\lambda}\bar{\gamma}\|_1 = \bar{\lambda} \cdot \|\bar{\gamma}\|_1$ dir.

iii. $\forall \bar{\gamma}, \bar{P} \in \mathbb{D}^n$ için $\|\bar{\gamma} + \bar{P}\|_1 \leq \|\bar{\gamma}\|_1 + \|\bar{P}\|_1$ dir.

İspat.

i. $\forall \bar{\gamma} \in \mathbb{D}^n$ için $\|\bar{\gamma}\|_1 \geq 0$ dir. Gerçekten, Öklid uzayında norm fonksiyonunun birinci özelliğinden $\|\gamma\| \geq 0$ ve $\|\gamma^*\| \geq 0$ dir. O halde açıktır ki; $\|\gamma\| > 0$ veya $\|\gamma\| = 0$ dir. $\|\gamma\| > 0$ olduğunda dual sıralama bağıntısından $\|\bar{\gamma}\|_1 \geq 0$ dir. Diğer yandan, $\|\gamma\| = 0$ olması durumunda $\|\gamma^*\| \geq 0$ olduğundan dolayı $\|\bar{\gamma}\|_1 \geq 0$ elde edilir. Yani $\forall \bar{\gamma} \in \mathbb{D}^n$ için $\|\bar{\gamma}\|_1 \geq 0$ dir.

Ayrıca;

$$\|\bar{\gamma}\|_1 = 0 \iff \|\bar{\gamma}\|_1 = \|\gamma\| + \varepsilon \|\gamma^*\| = 0 + \varepsilon 0$$

$$\text{— } \|\gamma\| = 0 \text{ ve } \|\gamma^*\| = 0$$

$$\text{— } \gamma = 0 \text{ ve } \gamma^* = 0$$

$$\text{— } \bar{\gamma} = 0$$

dir.

ii. $\forall \bar{\gamma} \in \mathbb{D}^n$ ve $\forall \bar{\lambda} \in \mathbb{D}$ için $\|\bar{\lambda}\bar{\gamma}\|_1 \leq \bar{\lambda} \cdot \|\bar{\gamma}\|_1$ olduğunu gösterelim;

$$\|\bar{\lambda}\bar{\gamma}\|_1 = \|(\lambda + \varepsilon \lambda^*)(\gamma + \varepsilon \gamma^*)\|_1$$

$$= \|\lambda\gamma + \varepsilon(\lambda\gamma^* + \lambda^*\gamma)\|_1$$

$$= \|\lambda\gamma\| + \varepsilon \|\lambda\gamma^* + \lambda^*\gamma\|$$

$$= |\lambda| \|\gamma\| + \varepsilon \|\lambda\gamma^* + \lambda^*\gamma\|$$

$$\begin{aligned}
&\leq_{\mathbb{D}} |\lambda| \|\gamma\| + \varepsilon \varepsilon (\|\lambda \gamma^*\| + \|\lambda^* \gamma\|) \\
&= |\lambda| \|\gamma\| + \varepsilon \varepsilon (|\lambda| \|\gamma^*\| + |\lambda^*| \|\gamma\|) \\
&= (|\lambda| + \varepsilon \varepsilon |\lambda^*|) (\|\gamma\| + \varepsilon \varepsilon \|\gamma^*\|) \\
&= \bar{\lambda} \|\bar{\gamma}\|_1
\end{aligned}$$

Özel olarak, $\lambda^* = 0$ yani; $\bar{\lambda} = \lambda$ olması durumunda $\|\bar{\lambda} \bar{\gamma}\|_1 = \bar{\lambda} \|\bar{\gamma}\|_1$ olduğunu gösterelim

$$\begin{aligned}
\|\bar{\lambda} \bar{\gamma}\|_1 &= \|\lambda(\gamma + \varepsilon \varepsilon \gamma^*)\|_1 \\
&= \|\lambda \gamma + \varepsilon \varepsilon \lambda \gamma^*\|_1 \\
&= \|\lambda \gamma\| + \varepsilon \varepsilon \|\lambda \gamma^*\| \\
&= |\lambda| \|\gamma\| + \varepsilon \varepsilon |\lambda| \|\gamma^*\| \\
&= |\lambda| (\|\gamma\| + \varepsilon \varepsilon \|\gamma^*\|) \\
&= \bar{\lambda} \|\bar{\gamma}\|_1
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\text{iii. } \forall \bar{P} \in \mathbb{D}^n \text{ için } \|\bar{\gamma} + \bar{P}\|_1 \leq \|\gamma\|_1 + \|\bar{P}\|_1$$

$$\begin{aligned}
\|\bar{\gamma} + \bar{P}\|_1 &= \|\gamma + \varepsilon \varepsilon \gamma^* + P + \varepsilon \varepsilon P^*\|_1 \\
&= \|\gamma + P + \varepsilon \varepsilon (\gamma^* + P^*)\|_1 \\
&= \|\gamma + P\| + \varepsilon \varepsilon \|\gamma^* + P^*\| \\
&\leq_{\mathbb{D}} \|\gamma\| + \|P\| + \varepsilon \varepsilon (\|\gamma^*\| + \|P^*\|) \\
&= \|\gamma\| + \varepsilon \varepsilon \|\gamma^*\| + \|P\| + \varepsilon \varepsilon \|P^*\| \\
&= \|\gamma\|_1 + \|P\|_1
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Tanım 3.1.7. $\mathbb{D}^n$, n-boyutlu bir dual uzay ve $\|\cdot\|$, $\mathbb{R}^n$ üzerinde norm olmak üzere,

$$\|\cdot\|_1 : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}$$

$$\bar{\gamma} \mapsto \|\bar{\gamma}\|_1 = \|\gamma\| + \varepsilon \varepsilon \|\gamma^*\|$$

dual fonksiyonu verilsin. Bu fonksiyona $\mathbb{D}^n$ üzerinde bir dual bozulmuş norm adı

verilir.

Teorem 3.1.8. $d_1, d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ birer metrik olmak üzere, $\bar{d} : \mathbb{D}^n \times \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}$,

$$\bar{d}(\bar{\gamma}, \bar{P}) = d_1(\gamma, P) + \varepsilon d_2(\gamma^*, P^*)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon aşağıdaki özellikleri sağlar [22]:

- i) $\forall \bar{\gamma}, \bar{P} \in \mathbb{D}^n$ için $\bar{d}(\bar{\gamma}, \bar{P}) \geq 0$ dir.
- ii) $\forall \bar{\gamma}, \bar{P} \in \mathbb{D}^n$ için $\bar{d}(\bar{\gamma}, \bar{P}) = 0 \iff \bar{\gamma} = \bar{P}$ dir.
- iii) $\forall \bar{\gamma}, \bar{P} \in \mathbb{D}^n$ için $\bar{d}(\bar{\gamma}, \bar{P}) = \bar{d}(\bar{P}, \bar{\gamma})$ dir.
- iv) $\forall \bar{\gamma}, \bar{P}, \bar{\omega} \in \mathbb{D}^n$ için $\bar{d}(\bar{\gamma}, \bar{P}) \leq \bar{d}(\bar{\gamma}, \bar{\omega}) + \bar{d}(\bar{\omega}, \bar{P})$ dir.

İspat.

- i) $\forall \bar{\gamma}, \bar{P} \in \mathbb{D}^n$ için $\bar{d}(\bar{\gamma}, \bar{P}) \geq 0$ dir. Gerçekten, d_1 ve d_2 $\mathbb{R}^n$ de iki metrik olduklarından

$$\bar{d}(\bar{\gamma}, \bar{P}) = d_1(\gamma, P) + \varepsilon d_2(\gamma^*, P^*) \geq 0$$

dir.

- ii) $\bar{d}(\bar{\gamma}, \bar{P}) = d_1(\gamma, P) + \varepsilon d_2(\gamma^*, P^*) = 0 = 0 + \varepsilon 0$ eşitliğinin sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart $d_1(\gamma, P) = 0$ ve $d_2(\gamma^*, P^*) = 0$ olmasıdır. $d_1(\gamma, P) = 0$ ve $d_2(\gamma^*, P^*) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $\gamma = P$ ve $\gamma^* = P^*$, yani $\bar{\gamma} = \bar{P}$ olmasıdır.

- iii) $\forall \bar{\gamma}, \bar{P} \in \mathbb{D}^n$ için $\bar{d}(\bar{\gamma}, \bar{P}) = \bar{d}(\bar{P}, \bar{\gamma})$ dir. Gerçekten,

$$\bar{d}(\bar{\gamma}, \bar{P}) = d_1(\gamma, P) + \varepsilon d_2(\gamma^*, P^*) = d_1(P, \gamma) + \varepsilon d_2(P^*, \gamma^*) = \bar{d}(\bar{P}, \bar{\gamma})$$

dir.

- iv) $\forall \bar{\gamma}, \bar{P}, \bar{\omega} \in \mathbb{D}^n$ için $\bar{d}(\bar{\gamma}, \bar{P}) \leq \bar{d}(\bar{\gamma}, \bar{\omega}) + \bar{d}(\bar{\omega}, \bar{P})$ dir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} \bar{d}(\bar{\gamma}, \bar{\omega}) &= d_1(\gamma, \omega) + \varepsilon d_2(\gamma^*, \omega^*) \leq d_1(\gamma, P) + d_1(P, \omega) + \varepsilon (d_2(\gamma^*, P^*) + d_2(P^*, \omega^*)) \\ &= d_1(\gamma, P) + \varepsilon d_2(\gamma^*, P^*) + d_1(P, \omega) + \varepsilon d_2(P^*, \omega^*) \\ &= \bar{d}(\bar{\gamma}, \bar{\omega}) + \bar{d}(\bar{\omega}, \bar{P}) \end{aligned}$$

dir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.1.9. d_1 ve d_2 , $\mathbb{R}^n$ üzerinde birer metrik, $\bar{w} = w + \varepsilon w^* \in \mathbb{D}^n$ bir dual nokta ve $r, r^* \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\bar{r} = r + \varepsilon r^*$ bir dual sabit olsun. Bu durumda,

$$\phi = \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^n \mid d_1(\gamma, w) < r, \gamma^* \in \mathbb{R}^n\}$$

ve

$$\psi = \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^n \mid \gamma = c \text{ (sabit) ve } d_2(\gamma^*, w^*) < r^*\}$$

cümlelerinin bir koleksiyonu $\mathbb{D}^n$ üzerinde $\bar{\Phi}$ bazını oluşturur [22].

İspat. Öncelikle $\bigcup_{\bar{A}_{ii} \in \bar{\Phi}} \bar{A}_{ii} = \mathbb{D}^n$ olduğu açıktır. Şimdi de,

$$\phi_1 = \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^n \mid d_1(\gamma, w_1) < r_1, \gamma^* \in \mathbb{R}^n\}$$

$$\phi_2 = \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^n \mid d_1(x, w_2) < r_2, \gamma^* \in \mathbb{R}^n\}$$

$$\psi_1 = \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^n \mid \gamma = c_1 \text{ (sabit) ve } d_2(\gamma^*, w_1^*) < r_1^*\}$$

$$\psi_2 = \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^n \mid \gamma = c_2 \text{ (sabit) ve } d_2(\gamma^*, w_2^*) < r_2^*\}$$

biçimindeki cümleleri ele alalım.

- i) $\bar{P} = P + \varepsilon P^* \in \phi_1 \cap \phi_2$ olsun. Bu durumda, $d_1(P, w_1) < r_1, d_2(P, w_2) < r_2$ ve $P^* \in \mathbb{R}^n$ olur öyle ki

$$\bar{P} \in A_1 = \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^n \mid d_1(\gamma, P) < r, \gamma^* \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}^+\} \subset \phi_1 \cap \phi_2$$

olacak şekilde $A_1 \in \bar{\Phi}$ vardır.

- ii) $\bar{P} = P + \varepsilon P^* \in \phi_1 \cap \psi_2$ olsun. Bu durumda, $\bar{P} \in \phi_1 \cap \psi_2 = \psi_2 \in \bar{\Phi}$ dir.

- iii) $\bar{P} = P + \varepsilon P^* \in \psi_1 \cap \psi_2$ olsun. O halde, $P = c_1 = c_2 = c, d_2(\gamma^*, w_1^*) < r_1^*$ ve $d_2(\gamma^*, w_2^*) < r_2^*$ olur öyle ki

$$\bar{P} \in \bar{A}_2 = \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^n \mid \gamma = c \text{ (sabit) ve } d_2(\gamma^*, w^*) < r^*, r^* \in \mathbb{R}^+\} \subset \psi_1 \cap \psi_2$$

olacak şekilde $\bar{A}_2 \in \bar{\Phi}$ vardır. Böylece ispat tamamlanır.

olacak şekilde $\bar{A}_2 \in \bar{\Phi}$ vardır. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1.4. Yukarıdaki teoremden elde edilen $\bar{\Phi}$ bazındaki cümlelerin keyfi birleşiminden oluşturulan topoloji $\bar{\tau}$ ile gösterilirse,

$$\bar{\tau} = \{\bigcup_{ii \in I} \bar{A}_{ii} \mid \bar{A}_{ii} \in \bar{\Phi}\}$$

biçimindedir [22].

Tanım 3.1.10. $\bar{\varphi} \in \mathbb{DD}^n, r, r^* \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\bar{r} = r + \varepsilon r^*$ olsun.

$$\begin{aligned}\bar{K}(\bar{\varphi}, \bar{r}) &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{DD}^n \mid d_1(\bar{\gamma}, \bar{\varphi}) + \varepsilon d_2(\bar{\gamma}^*, \bar{\varphi}^*) < \bar{r}\} \\ &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{DD}^n \mid d_1(\bar{\gamma}, \bar{\varphi}) + \varepsilon d_2(\bar{\gamma}^*, \bar{\varphi}^*) < \bar{r}\} \\ &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{DD}^n \mid d_1(\bar{\gamma}, \bar{\varphi}) < r, \bar{\gamma}^* \in \mathbb{R}\} \cup \\ &\quad \{\bar{\gamma} \in \mathbb{DD}^n \mid d_1(\bar{\gamma}, \bar{\varphi}) = r, d_2(\bar{\gamma}^*, \bar{\varphi}^*) < r^*\}\end{aligned}$$

cümlesine $\bar{\varphi} = \varphi + \varepsilon \varphi^* \in \mathbb{DD}^n$ merkezli $\bar{r} = r + \varepsilon r^*$ yarıçaplı dual açık yuvar denir [22]. $\bar{K}(\bar{\varphi}, \bar{r}) \in \mathbb{R}$ olduğu açıktır.

Şimdi Tanım 3.1.10 de bahsedilen $\bar{K}(\bar{\varphi}, \bar{r})$ cümlesinin Öklid uzayındaki farklı metriklerle göre $\mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{R}^3$ uzayındaki bazı geometrik modellemelerini elde edeceğiz.

Örneğin 3.11.11. $\bar{\varphi} = \varphi + \varepsilon \varphi^* \in \mathbb{DD}$, $r, r^* \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\bar{r} = r + \varepsilon r^*$ olsun. d_1 ve d_2 alışılmış metrikler olmak üzere,

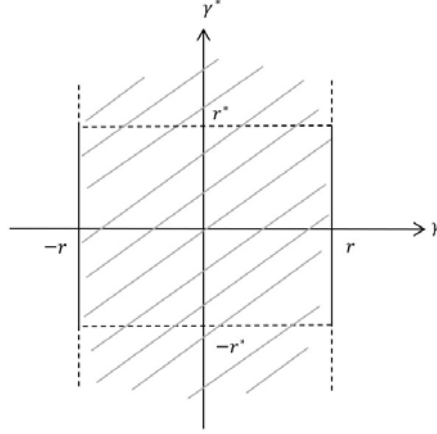
$$\begin{aligned}\bar{K}(\bar{\varphi}, \bar{r}) &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{DD} \mid d_1(\bar{\gamma}, \bar{\varphi}) + \varepsilon d_2(\bar{\gamma}^*, \bar{\varphi}^*) < \bar{r}\} \\ &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{DD} \mid d_1(\bar{\gamma}, \bar{\varphi}) + \varepsilon d_2(\bar{\gamma}^*, \bar{\varphi}^*) < \bar{r}\} \\ &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{DD} \mid d_1(\bar{\gamma}, \bar{\varphi}) < r, \bar{\gamma}^* \in \mathbb{R}\} \cup \{\bar{\gamma} \in \mathbb{DD} \mid d_1(\bar{\gamma}, \bar{\varphi}) = r, d_2(\bar{\gamma}^*, \bar{\varphi}^*) < r^*\} \\ &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{DD} \mid |\bar{\gamma} - \varphi| < r, \bar{\gamma}^* \in \mathbb{R}\} \cup \{\bar{\gamma} \in \mathbb{DD} \mid |\bar{\gamma} - \varphi| = r, |\bar{\gamma}^* - \varphi^*| < r^*\} \\ &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{DD} \mid \varphi - r < \bar{\gamma} < \varphi + r, \bar{\gamma}^* \in \mathbb{R}\} \\ &\quad \cup \{\bar{\gamma} \in \mathbb{DD} \mid (\bar{\gamma} = \varphi + r \text{ veya } \bar{\gamma} = \varphi - r) \text{ ve } (\varphi^* - r^* < \bar{\gamma}^* < \varphi^* + r^*)\} \\ &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{DD} \mid \varphi - r < \bar{\gamma} < \varphi + r, \bar{\gamma}^* \in \mathbb{R}\} \cup \{\bar{\gamma} \in \mathbb{DD} \mid \bar{\gamma} = \varphi - r \text{ ve } \varphi^* - r^* < \bar{\gamma}^* < \varphi^* + r^*\} \\ &\quad \cup \{\bar{\gamma} \in \mathbb{DD} \mid \bar{\gamma} = \varphi + r \text{ ve } \varphi^* - r^* < \bar{\gamma}^* < \varphi^* + r^*\}\end{aligned}$$

bulunur.

Özel olarak $\mathbb{DD}$ uzayındaki orijin merkezli ve $\bar{r} = r + \varepsilon r^*$ yarıçaplı dual açık yuvarını $\mathbb{R}^2$ de modelleyelim.

$$\begin{aligned}\bar{K}(\bar{0}, \bar{r}) &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{DD} \mid |\bar{\gamma}|_1 = |\bar{\gamma}| + \varepsilon |\bar{\gamma}^*| < r + \varepsilon r^*\} \\ &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{DD} \mid |\bar{\gamma}| < r \text{ veya } (|\bar{\gamma}| = r \text{ ve } |\bar{\gamma}^*| < r^*)\} \\ &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{DD} \mid -r < \bar{\gamma} < r, \bar{\gamma}^* \in \mathbb{R}\} \cup \{\bar{\gamma} \in \mathbb{DD} \mid \bar{\gamma} = r, -r^* < \bar{\gamma}^* < r^*\} \cup \{\bar{\gamma} \in \mathbb{DD} \mid \bar{\gamma} = -r, -r^* < \bar{\gamma}^* < r^*\}\end{aligned}$$

olmak üzere aşağıdaki grafik elde edilir :



Örnek 33.11.22. $\bar{\varphi} = \varphi + \varepsilon \varphi^* \in \mathbb{D}^2$, $r, r^* \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\bar{r} = r + \varepsilon r^*$ olsun. d_1, d_2 $\mathbb{R}^2$ uzayındaki alışılmış metrikler olmak üzere

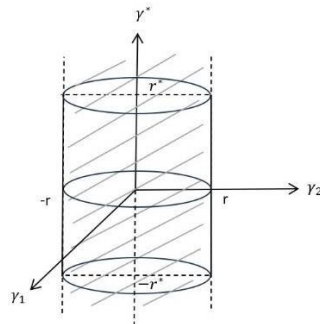
$$\begin{aligned} \bar{K}(\bar{\varphi}, \bar{r}) &= \{ \bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid d(\bar{\gamma}, \bar{\varphi}) < \bar{r} \} \\ &= \{ \bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid d_1(\gamma, \varphi) + \varepsilon d_2(\gamma^*, \varphi^*) < \bar{r} \} \\ &= \{ \bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid d_1(\gamma, \varphi) < r, \gamma^* \in \mathbb{R}^2 \} \cup \{ \bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid d_1(\gamma, \varphi) = r, d_2(\gamma^*, \varphi^*) < r^* \} \\ &= \{ \bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid \|\gamma - \varphi\| < r, \gamma^* \in \mathbb{R}^2 \} \cup \{ \bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid \|\gamma - \varphi\| = r, \|\gamma^* - \varphi^*\| < r^* \} \end{aligned}$$

elde edilir.

Orijin merkezli ve $\bar{r}$ yarıçaplı $\bar{K}(0, \bar{r})$ nin $\mathbb{R}^3$ deki geometrik modellemesini inceleyelim.

$$\bar{K}(0, \bar{r}) = \{ \bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid \|\gamma\| < r, \gamma^* \in \mathbb{R}^2 \} \cup \{ \bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid \|\gamma\| = r, \|\gamma^*\| < r^* \}$$

olduğu açıktır. $\mathbb{R}^3$ deki geometrik modelleme için $\gamma^* = (\gamma_1^*, 0)$ alalım. Bu durumda aşağıdaki grafik elde edilir:



Örnek 33.11.33. $\bar{\varphi} = \varphi + \varepsilon \varphi^* \in \mathbb{D}$, $r, r^* \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\bar{r} = r + \varepsilon r^*$ olsun. $\mathbb{R}$ uzayında d_1 alışılmış, d_2 ayık metrikler olmak üzere

$$\bar{K}(\bar{\varphi}, \bar{r}) = \{ \bar{\gamma} \in \mathbb{D} \mid d(\bar{\gamma}, \bar{\varphi}) < \bar{r} \}$$

$$= \{\gamma\bar{\gamma} \in \mathbb{DD} | d_1(\gamma\gamma, \varphi) + \varepsilon\varepsilon d_2(\gamma\gamma^*, \varphi^*) <_{\mathbb{DD}} \bar{r}\}$$

$$= \{\gamma\bar{\gamma} \in \mathbb{DD} | d_1(\gamma\gamma, \varphi) < r, \gamma\gamma^* \in \mathbb{R}\} \cup \{\bar{x} \in \mathbb{DD} | d_1(\gamma\gamma, \varphi) = r, d_2(\gamma\gamma^*, \varphi^*) < r^*\}$$

$$= \{\gamma\bar{\gamma} \in \mathbb{DD} | |\gamma\gamma - \varphi| < r, \gamma\gamma^* \in \mathbb{R}\} \cup \{\bar{x} \in \mathbb{DD} | |\gamma\gamma - \varphi| = r, d(\gamma\gamma^*, \varphi^*) < r^*\}$$

dir. $\bar{\varphi} \in \mathbb{DD}$, $\bar{r} \in \mathbb{DD}^+$ olmak üzere $\bar{\mathcal{H}}(\bar{\varphi}\bar{r})$ dual açık cümlesinin $\mathbb{R}^2$ de karşılık gelen geometrik modellemelerini aşağıdaki durumlara göre inceleyelim.

i. $0 < r^* \leq 1$ olsun. Bu durumda aşağıdaki geometrik modellemeler elde edilir.

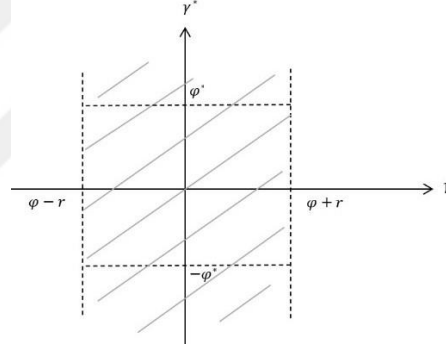
$$\bar{\mathcal{H}}(\bar{\varphi}\bar{r}) = \{\gamma\bar{\gamma} \in \mathbb{DD} | |\gamma\gamma - \varphi| + \varepsilon\varepsilon d_2(\gamma\gamma^*, \varphi^*) <_{\mathbb{DD}} r + \varepsilon\varepsilon r^*\}$$

$$= \{\gamma\bar{\gamma} \in \mathbb{DD} | |\gamma\gamma - \varphi| < r, \gamma\gamma^* \in \mathbb{R}\} \cup \{\gamma\bar{\gamma} \in \mathbb{DD} | |\gamma\gamma - \varphi| = r, d_2(\gamma\gamma^*, \varphi^*) < r^*\}$$

$$= \{\gamma\bar{\gamma} \in \mathbb{DD} | \varphi - r < \gamma\gamma < \varphi + r, \gamma\gamma^* \in \mathbb{R}\} \cup \{\gamma\bar{\gamma} \in \mathbb{DD} | \gamma\gamma = \varphi + r, \gamma\gamma^* = \varphi^*\}$$

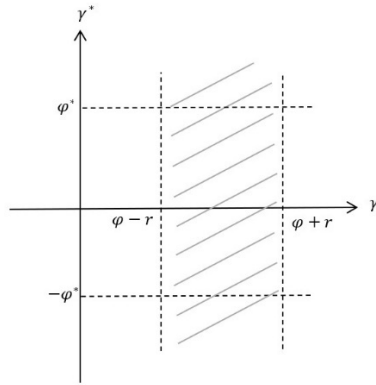
$$\cup \{\gamma\bar{\gamma} \in \mathbb{DD} | \gamma\gamma = \varphi - r, \gamma\gamma^* = \varphi^*\}$$

$$|\varphi| < r;$$

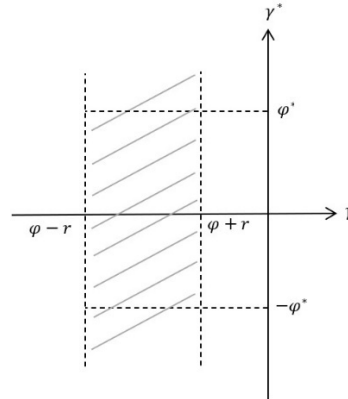


$$|\varphi| > r;$$

$$\varphi > 0;$$

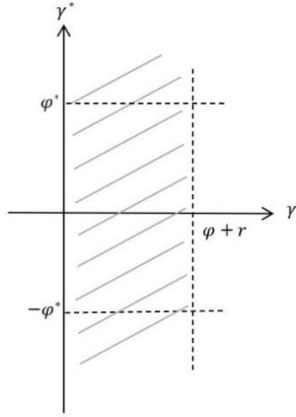


$$\varphi < 0;$$

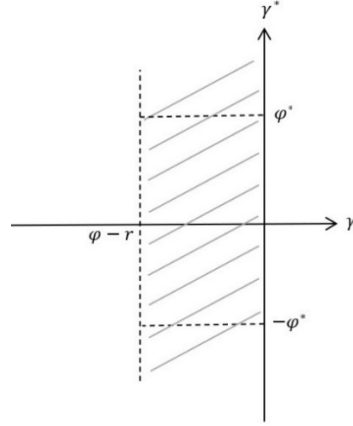


$$|\varphi| = r;$$

$$\varphi > 0;$$

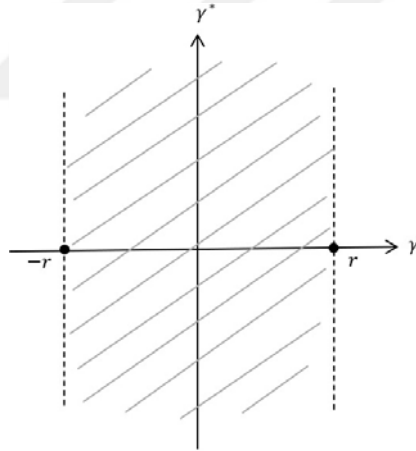


$$\varphi < 0;$$



Bu grafikler $\varphi^* > 0$ durumları göz önüne alınarak oluşturulmuştur. $\varphi^* < 0$ durumları için de benzer grafikler elde edilir.

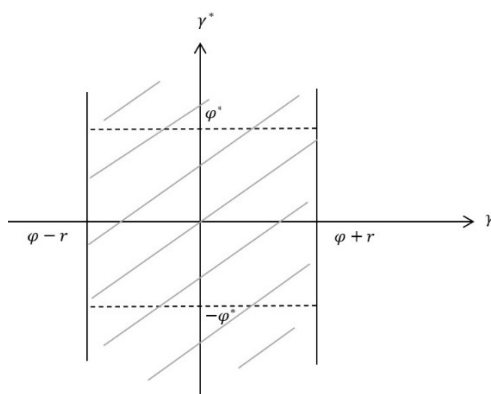
Özel olarak orijin merkezli ve $\bar{r}$ yarıçaplı $\bar{K}(0, \bar{r})$ 'nin $\mathbb{R}^2$ deki geometrik modellemesi aşağıdaki gibidir.



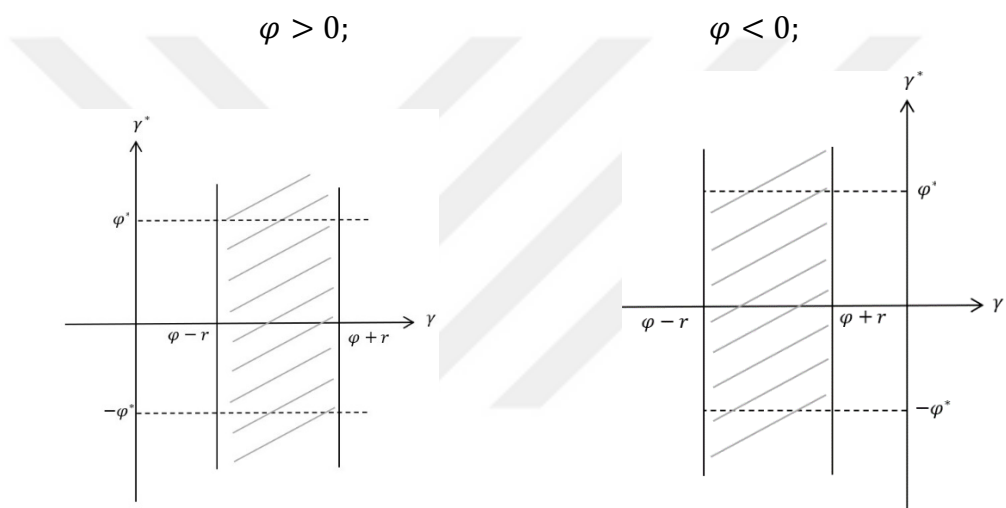
ii. $r^* > 1$ olsun.

$$\begin{aligned} \bar{K}(\varphi, \bar{r}) &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D} \mid |\gamma - \varphi| + \varepsilon d(\gamma^*, \varphi^*) <_{\mathbb{D}} r + \varepsilon r^*\} \\ &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D} \mid |\gamma - \varphi| < r, \gamma^* \in \mathbb{R}\} \cup \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D} \mid |\gamma - \varphi| = r, d(\gamma^*, \varphi^*) < r^*\} \\ &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D} \mid \varphi - r < \gamma < \varphi + r, \gamma^* \in \mathbb{R}\} \cup \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D} \mid \gamma = \varphi + r, (\gamma^* = \varphi^*) \text{ veya } (\gamma^* \neq \varphi^*)\} \\ &\quad \cup \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D} \mid \gamma = \varphi - r, (\gamma^* = \varphi^*) \text{ veya } (\gamma^* \neq \varphi^*)\} \\ &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D} \mid \varphi - r < \gamma < \varphi + r, \gamma^* \in \mathbb{R}\} \cup \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D} \mid \gamma = \varphi + r, \gamma^* \in \mathbb{R}\} \\ &\quad \cup \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D} \mid \gamma = \varphi - r, \gamma^* \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

$$|\varphi| < r;$$

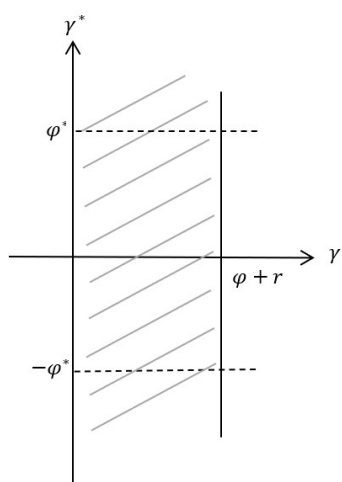


$$|\varphi| > r;$$

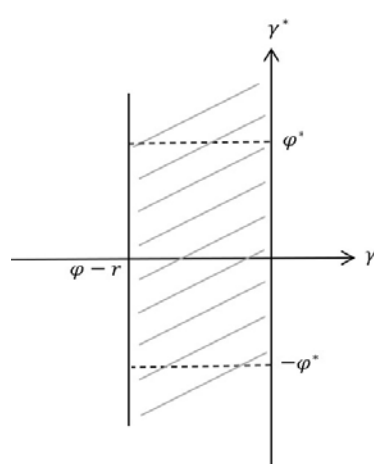


$$|\varphi| = r;$$

$$\varphi > 0;$$



$$\varphi < 0;$$



Örrrrrrrr 33.11.44. $\bar{\varphi} = \varphi + \varepsilon \varphi^* \in \mathbb{D}^2$, $r, r^* \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\bar{r} = r + \varepsilon r^*$ olsun. $\mathbb{R}^2$ uzayında, d_1 alşılmış, d_2 ayrık metrikler olmak üzere,

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{H}}(\varphi\bar{r}) &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid d_1(\gamma, \varphi) + \varepsilon d_2(\gamma^*, \varphi^*) < \bar{r}\} \\ &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid d_1(\gamma, \varphi) < r, \gamma^* \in \mathbb{R}^2\} \cup \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid d_1(\gamma, \varphi) = r \text{ ve } d_2(\gamma^*, \varphi^*) < r^*\}\end{aligned}$$

elde edilir. $\bar{\mathcal{H}}(\varphi\bar{r})$ cümlesi r^* ın durumlarına göre aşağıdaki gibi elde edilir.

- $0 < r^* \leq 1$ için;

$$\bar{\mathcal{H}}(\varphi\bar{r}) = \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid \|\gamma - \varphi\| < r, \gamma^* \in \mathbb{R}^{22}\} \cup \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid \|\gamma - \varphi\| = r, \gamma^* = \varphi^*\}$$

dir.

- $r^* > 1$ için;

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{H}}(\varphi\bar{r}) &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid \|\gamma - \varphi\| < r, \gamma^* \in \mathbb{R}^{22}\} \cup \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid \|\gamma - \varphi\| = r, \gamma^* \in \mathbb{R}^{22}\} \\ &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid \|\gamma - \varphi\| \leq r, \gamma^* \in \mathbb{R}^{22}\}\end{aligned}$$

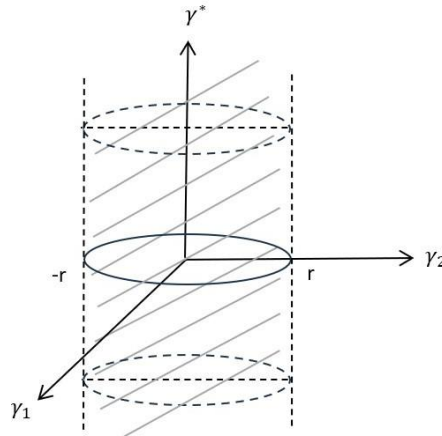
dir.

Orijin merkezli ve $\bar{r}$ yarıçaplı $\bar{\mathcal{H}}(0\bar{r})$ nin $\mathbb{R}^3$ deki geometrik modellemesini inceleyelim. $\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2$ olmak üzere $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, $\gamma^* = (\gamma_1^*, 0)$ olduğunu farzedelim.

$0 < r^* \leq 1$ için

$$\bar{\mathcal{H}}(0\bar{r}) = \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid \|\gamma\| < r, \gamma^* \in \mathbb{R}^{22}\} \cup \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid \|\gamma\| = r, \gamma^* = 0\}$$

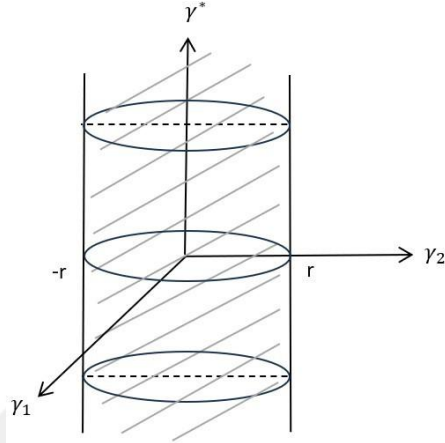
dir. Bu durum için geometrik modelleme aşağıdaki gibidir.



$r^* > 1$ için;

$$\bar{K}(\bar{\varphi}, \bar{r}) = \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid \|\gamma\| \leq r, \gamma^* \in \mathbb{R}\}$$

dir. Bu durum için geometrik modelleme aşağıdaki gibidir.



Örrrrrrr 33.11.55. $\bar{\varphi} = \varphi + \varepsilon \varphi^* \in \mathbb{D}$, $r, r^* \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\bar{r} = r + \varepsilon r^*$ olsun. $\mathbb{R}$ uzayında, d_1, d_2 ayrık metrikler olmak üzere,

$$\begin{aligned} \bar{K}(\bar{\varphi}, \bar{r}) &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D} \mid d(\bar{\gamma}, \bar{\varphi}) < \bar{r}\} \\ &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D} \mid d_1(\gamma, \varphi) + \varepsilon d_2(\gamma^*, \varphi^*) < \bar{r}\} \\ &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D} \mid d_1(\gamma, \varphi) < r, \gamma^* \in \mathbb{R}\} \cup \\ &\quad \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D} \mid d_1(\gamma, \varphi) = r \text{ ve } d_2(\gamma^*, \varphi^*) < r^*\} \end{aligned}$$

cümlesini r ve r^* ın durumlarına göre incelersek aşağıdaki dört durum elde edilir.

i. $0 < r < 1$ olsun. Bu durumda

$$\bar{K}(\bar{\varphi}, \bar{r}) = \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D} \mid \gamma = \varphi, \gamma^* \in \mathbb{R}\}$$

dir.

ii. $r = 1, 0 < r^* \leq 1$ olsun. Bu durumda

$$\bar{K}(\bar{\varphi}, \bar{r}) = \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D} \mid \gamma = \varphi, \gamma^* \in \mathbb{R}\} \cup \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D} \mid \gamma \neq \varphi, \gamma^* = \varphi^*\}$$

dir.

iii. $r = 1, r^* > 1$ olsun. Bu durumda

$$\bar{K}(\bar{\varphi}, \bar{r}) = \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D} \mid \gamma = \varphi, \gamma^* \in \mathbb{R}\} \cup \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D} \mid \gamma \neq \varphi, \gamma^* \in \mathbb{R}\}$$

dir.

iv. $r > 1$ olsun. Bu durumda

$$\bar{K}(\bar{\varphi}, \bar{r}) = \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid \gamma \in \mathbb{R}, \gamma^* \in \mathbb{R}\} = \mathbb{D}^2$$

elde edilir.

Örnek 3.1.7. $\bar{\varphi} = \varphi + \varepsilon \varphi^* \in \mathbb{D}^2$, $r, r^* \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\bar{r} = r + \varepsilon r^*$ olsun.

d_1, d_2 $\mathbb{R}^2$ uzayındaki ayık metrikler olmak üzere,

$$\begin{aligned} \bar{K}(\bar{\varphi}, \bar{r}) &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid d_1(\bar{\gamma}, \bar{\varphi}) < \bar{r}\} \\ &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid d_1(\gamma, \varphi) + \varepsilon d_2(\gamma^*, \varphi^*) < \bar{r}\} \\ &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid d_1(\gamma, \varphi) < r, \gamma^* \in \mathbb{R}^2\} \cup \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid d_1(\gamma, \varphi) = r \text{ ve } d_2(\gamma^*, \varphi^*) < r^*\} \end{aligned}$$

cümlesini r ve r^* in durumlarına göre incelersek aşağıdaki dört durum elde edilir.

i. $0 < r < 1$ olsun.

$$\bar{K}(\bar{\varphi}, \bar{r}) = \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid \gamma = \varphi, \gamma^* \in \mathbb{R}^2\}$$

dir.

ii. $r = 1, 0 < r^* \leq 1$ olsun.

$$\bar{K}(\bar{\varphi}, \bar{r}) = \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid \gamma = \varphi, \gamma^* \in \mathbb{R}^2\} \cup \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid \gamma \neq \varphi, \gamma^* = \varphi^*\}$$

dir.

iii. $r = 1, r^* > 1$ olsun.

$$\bar{K}(\bar{\varphi}, \bar{r}) = \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid \gamma = \varphi, \gamma^* \in \mathbb{R}^2\} \cup \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid \gamma \neq \varphi, \gamma^* \in \mathbb{R}^2\}$$

dir.

iv. $r > 1$ olsun.

$$\bar{K}(\bar{\varphi}, \bar{r}) = \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid \gamma \in \mathbb{R}^2, \gamma^* \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{D}^2$$

dir.

Örnek 3.1.7. $\bar{\varphi} = \varphi + \varepsilon \varphi^* \in \mathbb{D}^2$, $r, r^* \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\bar{r} = r + \varepsilon r^*$ olsun. $\mathbb{R}^2$

uzayında, d_1 alışılmış, d_2 taksi metrikler olmak üzere,

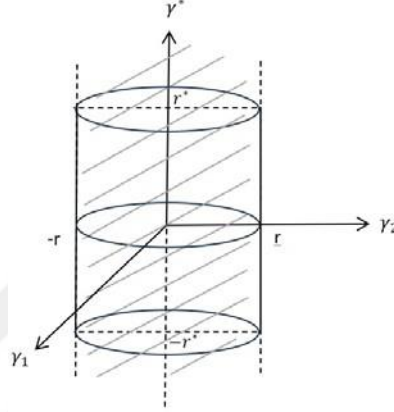
$$\begin{aligned} \bar{K}(\bar{\varphi}, \bar{r}) &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid d_1(\bar{\gamma}, \bar{\varphi}) < \bar{r}\} \\ &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid d_1(\gamma, \varphi) + \varepsilon d_2(\gamma^*, \varphi^*) < \bar{r}\} \\ &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid d_1(\gamma, \varphi) < r, \gamma^* \in \mathbb{R}^2\} \cup \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid d_1(\gamma, \varphi) = r, d_2(\gamma^*, \varphi^*) < r^*\} \end{aligned}$$

$$= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid \|\gamma - \varphi\| < r, \gamma^* \in \mathbb{R}\} \cup \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid \|\gamma - \varphi\| = r \text{ ve } |\gamma_1^* - \varphi_1^*| + |\gamma_2^* - \varphi_2^*| < r^*\}$$

elde edilir. Orijin merkezli ve $\bar{r}$ yarıçaplı $\bar{\mathcal{K}}(0, \bar{r})$ nin $\mathbb{R}^3$ deki geometrik modellemesini inceleyelim.

$$\bar{\mathcal{K}}(0, \bar{r}) = \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid \|\gamma\| < r, \gamma^* \in \mathbb{R}\} \cup \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid \|\gamma\| = r \text{ ve } |\gamma_1^*| + |\gamma_2^*| < r^*\}$$

olduğu açıktır. $\mathbb{R}^3$ deki geometrik modelleme için $\gamma^* = (\gamma_1^*, 0)$ alalım. Bu durumda aşağıdaki grafik elde edilir:



Örrrrrrr 33.11.88. $\bar{\varphi} = \varphi + \varepsilon \varepsilon \varphi^* \in \mathbb{D}^2$, $r, r^* \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\bar{r} = r + \varepsilon \varepsilon r^*$ olsun. $\mathbb{R}^2$ uzayında, d_1 taksi, d_2 alışılmış metrikler olmak üzere,

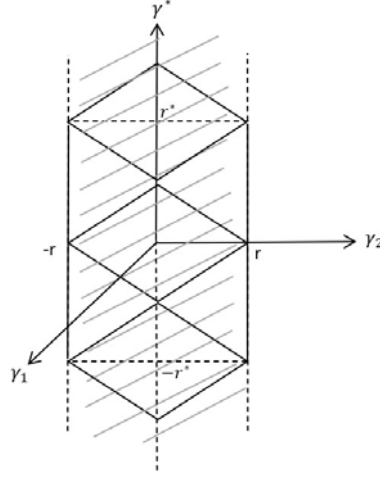
$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{K}}(\bar{\varphi}, \bar{r}) &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid d_1(\gamma, \bar{\varphi}) + \varepsilon \varepsilon d_2(\gamma^*, \varphi^*) < \bar{r}\} \\ &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid d_1(\gamma, \varphi) + \varepsilon \varepsilon d_2(\gamma^*, \varphi^*) < \bar{r}\} \\ &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid d_1(\gamma, \varphi) < r, \gamma^* \in \mathbb{R}^2\} \cup \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid d_1(\gamma, \varphi) = r, d_2(\gamma^*, \varphi^*) < r^*\} \\ &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid |\gamma_1 - \varphi_1| + |\gamma_2 - \varphi_2| < r, \gamma^* \in \mathbb{R}^2\} \\ &\quad \cup \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid |\gamma_1 - \varphi_1| + |\gamma_2 - \varphi_2| = r \text{ ve } \|\gamma^* - \varphi^*\| < r^*\} \end{aligned}$$

elde edilir. Orijin merkezli ve $\bar{r}$ yarıçaplı $\bar{\mathcal{K}}(0, \bar{r})$ nin $\mathbb{R}^3$ deki geometrik modellemesini inceleyelim.

$$\bar{\mathcal{K}}(0, \bar{r}) = \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid |\gamma_1| + |\gamma_2| < r, \gamma^* \in \mathbb{R}^2\} \cup \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid |\gamma_1| + |\gamma_2| = r \text{ ve } \|\gamma^*\| < r^*\}$$

olduğu açıktır. $\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2$ olmak üzere $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, $\gamma^* = (\gamma_1^*, 0)$ olduğunu farzedelim.

Bu durumda aşağıdaki grafik elde edilir.



Örrrrrrrr 33.11.99. $\bar{\varphi} = \varphi + \varepsilon \varphi^* \in \mathbb{D}^2$, $r, r^* \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\bar{r} = r + \varepsilon r^*$ olsun. $\mathbb{R}^2$ uzayında, d_1 taksi, d_2 ayrik metrikler olmak üzere,

$$\begin{aligned} \bar{K}(\bar{\varphi}, \bar{r}) &= \{ \bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid d_1(\bar{\gamma}, \bar{\varphi}) < \bar{r} \} \\ &= \{ \bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid d_1(\gamma, \varphi) + \varepsilon d_2(\gamma^*, \varphi^*) < \bar{r} \} \\ &= \{ \bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid d_1(\gamma, \varphi) < r, \gamma^* \in \mathbb{R}^2 \} \cup \{ \bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid d_1(\gamma, \varphi) = r \text{ ve } d_2(\gamma^*, \varphi^*) < r^* \} \end{aligned}$$

cümlesi r^* in durumlarına göre aşağıdaki gibi elde edilir.

- $0 < r^* \leq 1$ için

$$\begin{aligned} \bar{K}(\bar{\varphi}, \bar{r}) &= \{ \bar{\gamma} \in \mathbb{D}^{22} \mid |\gamma_1 - \varphi_1| + |\gamma_2 - \varphi_2| < r, \gamma^* \in \mathbb{R}^{22} \} \cup \\ &\{ \bar{\gamma} \in \mathbb{D}^{22} \mid |\gamma_1 - \varphi_1| + |\gamma_2 - \varphi_2| = r, \gamma^* = \varphi^* \} \end{aligned}$$

dir.

- $r^* > 1$ için

$$\begin{aligned} \bar{K}(\bar{\varphi}, \bar{r}) &= \{ \bar{\gamma} \in \mathbb{D}^{22} \mid |\gamma_1 - \varphi_1| + |\gamma_2 - \varphi_2| < r, \gamma^* \in \mathbb{R}^{22} \} \cup \{ \bar{\gamma} \in \mathbb{D}^{22} \mid |\gamma_1 - \varphi_1| + |\gamma_2 - \varphi_2| = r, \gamma^* \in \mathbb{R}^{22} \} \\ &= \{ \bar{\gamma} \in \mathbb{D}^{22} \mid |\gamma - \varphi| \leq r, \gamma^* \in \mathbb{R}^{22} \} \end{aligned}$$

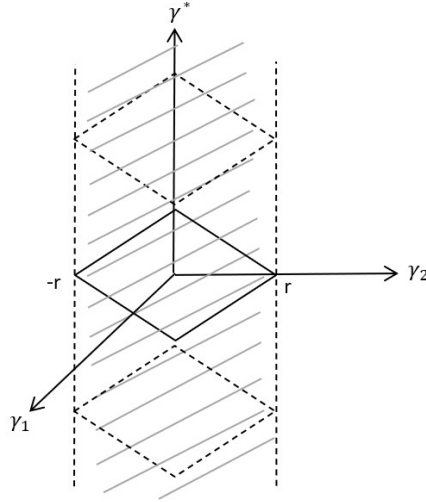
dir.

Orijin merkezli ve $\bar{r}$ yarıçaplı $\bar{K}(\bar{0}, \bar{r})$ nin $\mathbb{R}^3$ deki geometrik modellemesini inceleyelim.

- $0 < r^* \leq 1$ için

$$\bar{K}(\bar{0}, \bar{r}) = \{ \bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid |\gamma_1| + |\gamma_2| < r, \gamma^* \in \mathbb{R}^2 \} \cup \{ \bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid |\gamma_1| + |\gamma_2| = r, \gamma^* = 0 \}$$

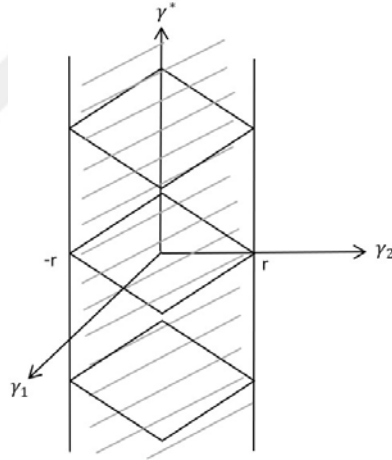
bulunur. $\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2$ olmak üzere $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, $\gamma^* = (\gamma_1^*, 0)$ olduğunu farzedelim. Bu durumda aşağıdaki geometrik modelleme elde edilir.



- $r^* > 1$ için;

$$\bar{K}(Q\bar{r}) = \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid |\gamma_1| + |\gamma_2| \leq r, \gamma^* \in \mathbb{R}^2\}$$

elde edilir. $\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2$ olmak üzere $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, $\gamma^* = (\gamma_1^*, 0)$ olduğunu farzedelim. $\bar{K}(Q\bar{r})$ cümlesinin $\mathbb{R}^3$ deki modellemesi



dir.

Örrrrrrrr 33.11.1111. $\bar{\varphi} = \varphi + \varepsilon\varepsilon\varphi^* \in \mathbb{D}^2$, $r, r^* \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\bar{r} = r + \varepsilon\varepsilon r^*$ olsun. $\mathbb{R}^2$ uzayında, d_1 ayırık, d_2 taksi metrikler olmak üzere,

$$\bar{K}(\varphi\bar{r}) = \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid d_1(\bar{\gamma}, \bar{\varphi}) < \bar{r}\}$$

$$= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid d_1(\gamma, \varphi) + \varepsilon\varepsilon d_2(\gamma^*, \varphi^*) < \bar{r}\}$$

$$= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid d_1(\gamma, \varphi) < r, \gamma^* \in \mathbb{R}^2\} \cup \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid d_1(\gamma, \varphi) = r \text{ ve } d_2(\gamma^*, \varphi^*) < r^*\}$$

cümlesi r ın durumlarına göre aşağıdaki gibi elde edilir.

- $0 < r < 1$ için;

$$\bar{\mathcal{K}}(\varphi\bar{r}) = \{\gamma\bar{\gamma} \in \mathbb{DD}^2 \mid \gamma\gamma = \varphi, \gamma\gamma^* \in \mathbb{R}^2\}$$

dir.

- $r = 1$ için;

$$\bar{\mathcal{K}}(\varphi\bar{r}) = \{\gamma\bar{\gamma} \in \mathbb{DD}^2 \mid \gamma\gamma = \varphi, \gamma\gamma^* \in \mathbb{R}^{22}\} \cup \{\gamma\bar{\gamma} \in \mathbb{DD}^2 \mid \gamma\gamma \neq \varphi, |\varphi^*|_1 + |\varphi^*|_2 \leq r^*\}$$

dir.

- $r > 1$ için;

$$\bar{\mathcal{K}}(\varphi\bar{r}) = \{\gamma\bar{\gamma} \in \mathbb{DD}^{22} \mid \gamma\gamma \in \mathbb{R}^{22}, \gamma\gamma^* \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{DD}^2$$

dir.

3.2. Dual Parçalı Sıralama Bağıntısı Yardımıyla Oluşturulan Bazlar ve Topolojiler

Bu bölümde [23] de verilen sıralama bağıntısının özellikleri incelenmiştir. Daha sonra bu sıralama bağıntısından faydalanılarak $\mathbb{DD}$ ve $\mathbb{DD}^2$ uzayında baz ve topolojiler elde edilmiştir. Bu topolojilerin bazı elemanlarının $\mathbb{R}^{22}$ ve $\mathbb{R}^{33}$ uzayındaki geometrik modelleri gösterilmiştir.

Tamam 3.2.1. $\diamond = w + \varepsilon w^*$ ve $\bar{v} = v + \varepsilon v^*$ iki dual sayı olsun. Bu dual sayılar arasındaki $\diamond <_1 \bar{v}$ ve $\diamond \leq_{11} \bar{v}$ sıralamaları aşağıdaki şekildedir:

- i. $\diamond <_1 \bar{v} \iff w < v \text{ ve } w^* < v^*$
- ii. $\diamond \leq_{11} \bar{v} \iff w \leq v \text{ ve } w^* \leq v^*.$

$<_{11}$ bağıntısına dual yarı sıralama bağıntısı, $\leq_{11}$ dual parçalı sıralama bağıntısı adı verilir.

Teorem 3.2.2. $\diamond = w + \varepsilon w^*$, $\bar{v} = v + \varepsilon v^*$ ve $\bar{\sigma} = \sigma + \varepsilon \sigma^*$ dual sayılar olsun. Bu durumda, $<_1$ ve $\leq_{11}$ bağıntıları aşağıdaki özellikleri sağlar:

- i. $\diamond <_1 \bar{v}$ ise $\diamond \neq \bar{v}$ dir.
- ii. $\diamond <_1 \bar{v}$ ve $\bar{v} <_1 \bar{\sigma}$ ise $\diamond <_1 \bar{\sigma}$ dir.
- iii. $\diamond \leq_{11} \bar{\sigma}$ dir.
- iv. $\diamond \leq_{11} \bar{v}$ ve $\bar{v} \leq_{11} \bar{\sigma}$ ise $\diamond = \bar{v}$ dir.

v. $\Diamond \leq_1 \bar{v}$ ve $\bar{v} \leq_1 \bar{\sigma}$ ise $\Diamond \leq_1 \bar{\sigma}$ dir.

İspat.

- i. Kabul edelim ki $\Diamond <_1 \bar{v}$ olsun. Bu durumda $w < v$ ve $w^* < v^*$ dir. O halde $\Diamond \neq \bar{v}$ dir.
- ii. Kabul edelim ki $\Diamond <_1 \bar{v}$ ve de $\bar{v} <_1 \bar{\sigma}$ olsun. Bu durumda, aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz:

$$\Diamond <_1 \bar{v} \iff w < v \text{ ve } w^* < v^*$$

$$\Diamond <_1 \bar{\sigma} \iff v < \sigma \text{ ve } v^* < \sigma^*.$$

Bu durumda, $w < v$ ve $v < \sigma$ olup $w < \sigma$ dir. Ayrıca, $w^* < v^*$ ve $v^* < \sigma^*$ olduğundan

$w^* < \sigma^*$ dir. Böylece $\Diamond <_1 \bar{\sigma}$ olur.

- iii. $w \leq v$ ve $w^* \leq v^*$ olduğundan $\Diamond \leq_1 \bar{v}$ dir.
- iv. Kabul edelim ki $\Diamond \leq_1 \bar{v}$ ve $\bar{v} \leq_1 \bar{\sigma}$ olsun. Bu durumda, aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz:

$$\Diamond \leq_1 \bar{v} \iff w \leq v \text{ ve } w^* \leq v^*$$

$$\bar{v} \leq_1 \bar{\sigma} \iff v \leq \sigma \text{ ve } v^* \leq \sigma^*.$$

Bu durumda, $w = v$ ve $w^* = v^*$ olup $\Diamond = \bar{v}$ dir.

- v. Kabul edelim ki $\Diamond \leq_1 \bar{v}$ ve $\bar{v} \leq_1 \bar{\sigma}$ olsun. Bu durumda, aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz:

$$\Diamond \leq_1 \bar{v} \iff w \leq v \text{ ve } w^* \leq v^*$$

$$\bar{v} \leq_1 \bar{\sigma} \iff v \leq \sigma \text{ ve } v^* \leq \sigma^*.$$

Bu durumda, $w \leq \sigma$ ve $w^* \leq \sigma^*$ olduğundan $\Diamond \leq_1 \bar{\sigma}$ dir.

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.3. $\diamond \bar{v} \in \mathbb{D}$ ve $\diamond <_1 \bar{v}$ (veya $\diamond \leq_1 \bar{v}$) olduğunu varsayalım. Her $\bar{\sigma} \in \mathbb{D}$ için;

$$\diamond \bar{\sigma} <_1 \bar{v} \bar{\sigma}$$

$$\diamond \bar{\sigma} \leq_1 \bar{v} \bar{\sigma}$$

dual eşitsizlikleri vardır.

İspat. Kabul edelim ki $\diamond <_1 \bar{v}$ olsun. Bu durumda $w < v$ ve $w^* < v^*$ dir. Reel sayılar üzerindeki sıralama bağıntısından aşağıdaki ifadeyi yazmak mümkündür:

$$w \bar{\sigma} < v \bar{\sigma} \text{ ve } w^* \bar{\sigma}^* < v^* \bar{\sigma}^* .$$

Tanım 3.2.1. den

$$\diamond \bar{\sigma} <_1 \bar{v} \bar{\sigma}$$

elde edilir.

Kabul edelim ki $\diamond \leq_1 \bar{v}$ olsun. Bu durumda $w \leq v$ ve $w^* \leq v^*$ dir. Reel sayılar üzerindeki kısmi sıralama bağıntısından aşağıdaki ifadeyi yazmak mümkündür:

$$w \bar{\sigma} \leq v \bar{\sigma} \text{ ve } w^* \bar{\sigma}^* \leq v^* \bar{\sigma}^* .$$

Tanım 3.2.1. den

$$\diamond \bar{\sigma} \leq_1 \bar{v} \bar{\sigma}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.4. $\diamond = w + \varepsilon w^*, \bar{\diamond} = v + \varepsilon v^* \in \mathbb{D}$ olsun. Bu durumda;

- i. Eğer $\diamond <_1 \bar{v}$ ve $\bar{\sigma} = \sigma + \varepsilon \sigma^* \in \mathbb{D}^{+'}$ ise $\diamond \bar{\sigma} <_1 \bar{v} \bar{\sigma}$
- ii. Eğer $\diamond <_1 \bar{v}$ ve $\bar{\sigma} = \sigma + \varepsilon \sigma^* \in \mathbb{D}^{+''}$ ise $\diamond \leq_1 \bar{v}$
- iii. Eğer $\diamond \leq_1 \bar{v}$ ve $\bar{\sigma} = \sigma + \varepsilon \sigma^* \in \mathbb{D}^{+'}$ ise $\diamond \bar{\sigma} \leq_1 \bar{v} \bar{\sigma}$
- iv. Eğer $\diamond \leq_1 \bar{v}$ ve $\bar{\sigma} = \sigma + \varepsilon \sigma^* \in \mathbb{D}^{+''}$ ise $\diamond \leq_1 \bar{v}$

ifadeleri mevcuttur.

İspat.

- i. Eğer $\diamond <_1 \bar{v}$ ve $\bar{\sigma} = \sigma + \varepsilon \sigma^* \in \mathbb{D}^{+'}$ ise $\diamond \bar{\sigma} <_1 \bar{v} \bar{\sigma}$ olduğunu gösterelim.

$\diamond <_1 \bar{v}$ olsun. Bu durumda $w < v$ ve $w^* < v^*$ dir.

$$w \sigma < v \sigma \text{ ve } w \sigma^* + w^* \sigma < v \sigma^* + v^* \sigma$$

ifadeleri mevcuttur. O halde

$$w\sigma + \varepsilon\varepsilon(w\sigma^* + w^*\sigma) <_1 v\sigma + \varepsilon\varepsilon(v\sigma^* + v^*\sigma)$$

dir. $\diamondsuit \sigma <_1 \bar{v} \cdot \sigma$ bulunur.

ii. Eğer $\diamondsuit <_1 \bar{v}$ ve $\bar{\sigma} = \sigma + \varepsilon\varepsilon\sigma^* \in \mathbb{D}^{+''}$ ise $\diamondsuit <_1 \bar{v}$ olduğunu gösterelim.

$\diamondsuit <_1 \bar{v}$ olsun. Bu durumda $w < v$ ve $w^* < v^*$ dir.

$$\begin{aligned} \frac{\diamondsuit w}{\diamondsuit} &= \frac{ww + Sww^*}{\sigma + s\sigma^*} = \frac{(ww + Sww^*)(\sigma - s\sigma^*)}{\sigma^2} \\ &= \frac{ww\sigma + s(ww^*\sigma - ww\sigma^*)}{\sigma^2} \\ &= \frac{ww}{\sigma} + \varepsilon\varepsilon\left(\frac{ww^*}{\sigma} - \frac{ww\sigma^*}{\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{\bar{v}}{\diamondsuit} &= \frac{v + sv^*}{\sigma + s\sigma^*} = \frac{(v + sv^*)(\sigma - s\sigma^*)}{\sigma^2} \\ &= \frac{v\sigma + s(v^*\sigma - v\sigma^*)}{\sigma^2} \\ &= \frac{v}{\sigma} + \varepsilon\varepsilon\left(\frac{v^*}{\sigma} - \frac{v\sigma^*}{\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

olmak üzere $\frac{ww}{\sigma} < \frac{v}{\sigma}$ ve $\frac{ww^*}{\sigma} - \frac{v\sigma^*}{\sigma^2} < \frac{ww^*}{\sigma} - \frac{v\sigma^*}{\sigma^2}$ olduğu açıktır. Bu durumda $\frac{\diamondsuit w}{\diamondsuit} <_1 \frac{\bar{v}}{\diamondsuit}$ dir.

iii. Eğer $\diamondsuit \leq_1 \bar{v}$ ve $\bar{\sigma} = \sigma + \varepsilon\varepsilon\sigma^* \in \mathbb{D}^{+}'$ ise $\diamondsuit \leq_1 \bar{v} \cdot \bar{\sigma}$ olduğunu gösterelim.

$\diamondsuit \leq_1 \bar{v}$ olsun. Bu durumda $w \leq v$ ve $w^* \leq v^*$ dir.

$$w\sigma \leq v\sigma \text{ ve } w\sigma^* + w^*\sigma \leq v\sigma^* + v^*\sigma$$

ifadeleri mevcuttur. $\diamondsuit \bar{\sigma} \leq_1 \bar{v} \cdot \bar{\sigma}$ bulunur.

iv. Eğer $\diamondsuit \leq_1 \bar{v}$ ve $\bar{\sigma} = \sigma + \varepsilon\varepsilon\sigma^* \in \mathbb{D}^{+''}$ ise $\diamondsuit \leq_1 \bar{v}$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \frac{\diamondsuit w}{\diamondsuit} &= \frac{ww + Sww^*}{\sigma + s\sigma^*} = \frac{(ww + Sww^*)(\sigma - s\sigma^*)}{\sigma^2} \\ &= \frac{ww\sigma + s(ww^*\sigma - ww\sigma^*)}{\sigma^2} \\ &= \frac{ww}{\sigma} + \varepsilon\varepsilon\left(\frac{ww^*}{\sigma} - \frac{ww\sigma^*}{\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\frac{\bar{v}}{\diamond} &= \frac{v+s v^*}{\sigma+s \sigma^*} = \frac{(v+s v^*)(\sigma-s \sigma^*)}{\sigma^2} \\ &= \frac{v \sigma+s(v^* \sigma-v \sigma^*)}{\sigma^2} \\ &= \frac{v}{\sigma} + \varepsilon \varepsilon \left(\frac{v^*}{\sigma} - \frac{v \sigma^*}{\sigma^2} \right)\end{aligned}$$

olmak üzere $\frac{w w}{\sigma} \leq \frac{v}{\sigma}$ ve $\frac{w w^*}{\sigma} - \frac{w w \sigma^*}{\sigma^2} \leq \frac{v^*}{\sigma} - \frac{v \sigma^*}{\sigma^2}$ olduğu açıktır. Bu durumda $\frac{w w}{\diamond} \leq \frac{\bar{v}}{1} \frac{\bar{v}}{\diamond}$ dir.

Teorem 3.2.5. $\diamond = w + \varepsilon \varepsilon w^*, \bar{\diamond} = v + \varepsilon \varepsilon v^* \in \mathbb{D}\mathbb{D}$ olsun. Bu durumda;

- i. Eğer $\diamond <_1 \bar{v}$ ve $\bar{\sigma} = \sigma + \varepsilon \varepsilon \sigma^* \in \mathbb{D}\mathbb{D}^{-'}$ ise $\diamond >_1 \bar{v} \cdot \bar{\sigma}$
- ii. Eğer $\diamond <_1 \bar{v}$ ve $\bar{\sigma} = \sigma + \varepsilon \varepsilon \sigma^* \in \mathbb{D}\mathbb{D}^{-ff}$ ise $\diamond >_1 \frac{\bar{v}}{1} \frac{\bar{v}}{\diamond}$
- iii. Eğer $\diamond \leq_1 \bar{v}$ ve $\bar{\sigma} = \sigma + \varepsilon \varepsilon \sigma^* \in \mathbb{D}\mathbb{D}^{-'}$ ise $\diamond \geq_1 \bar{v} \cdot \bar{\sigma}$
- iv. Eğer $\diamond \leq_1 \bar{v}$ ve $\bar{\sigma} = \sigma + \varepsilon \varepsilon \sigma^* \in \mathbb{D}\mathbb{D}^{-ff}$ ise $\diamond \geq_1 \frac{\bar{v}}{1} \frac{\bar{v}}{\diamond}$

ifadeleri mevcuttur.

İspat.

- i. Eğer $\diamond <_{11} \bar{v}$ ve $\bar{\sigma} = \sigma + \varepsilon \varepsilon \sigma^* \in \mathbb{D}\mathbb{D}^{-'}$ ise $\diamond >_1 \bar{v} \cdot \sigma$ olduğunu gösterelim.

$\diamond <_1 \bar{v}$ olsun. Bu durumda $w < v$ ve $w^* < v^*$ dir.

$$w \sigma > v \sigma \text{ ve } w \sigma^* + w^* \sigma > v \sigma^* + v^* \sigma$$

ifadeleri mevcuttur. $\diamond >_{11} \bar{v} \cdot \sigma$ bulunur.

- ii. Eğer $\diamond <_1 \bar{v}$ ve $\bar{\sigma} = \sigma + \varepsilon \varepsilon \sigma^* \in \mathbb{D}\mathbb{D}^{-ff}$ ise $\diamond >_1 \frac{\bar{v}}{1} \frac{\bar{v}}{\diamond}$ olduğunu gösterelim.

$\diamond <_1 \bar{v}$ olsun. Bu durumda $w < v$ ve $w^* < v^*$ dir

$$\begin{aligned}\frac{\diamond w}{\diamond} &= \frac{w w + s w w^*}{\sigma + s \sigma^*} = \frac{(w w + s w w^*)(\sigma - s \sigma^*)}{\sigma^2} \\ &= \frac{w w \sigma + s(w w^* \sigma - w w \sigma^*)}{\sigma^2} \\ &= \frac{w w}{\sigma} + \varepsilon \varepsilon \left(\frac{w w^*}{\sigma} - \frac{w w \sigma^*}{\sigma^2} \right)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{v}}{\diamond} &= \frac{v+sv^*}{\sigma+s\sigma^*} = \frac{(v+sv^*)(\sigma-s\sigma^*)}{\sigma^2} \\
&= \frac{v\sigma+s(v^*\sigma-v\sigma^*)}{\sigma^2} \\
&= \frac{v}{\sigma} + \varepsilon\varepsilon\left(\frac{v^*}{\sigma} - \frac{v\sigma^*}{\sigma^2}\right)
\end{aligned}$$

olmak üzere $\frac{ww^*}{\sigma} - \frac{ww\sigma^*}{\sigma^2} > \frac{v^*}{\sigma} - \frac{v\sigma^*}{\sigma^2}$ olduğu açıktır. Bu durumda $\frac{\diamond}{\diamond} \geq \frac{\bar{v}}{\diamond}$ dir.

iii. Eğer $\diamond \leq_1 \bar{v}$ ve $\sigma = \sigma + \varepsilon\varepsilon\sigma^* \in \mathbb{D}^{-'}$ ise $\diamond \geq_1 \bar{v}$ olduğunu gösterelim.

$\diamond \leq \bar{v}$ olsun. $w \leq v$ ve $w^* \leq v^*$ dir.

$$w\sigma \geq v\sigma \text{ ve } w\sigma^* + w^*\sigma \geq v\sigma^* + v^*\sigma$$

ifadeleri mevcuttur. $\diamond \geq_1 \bar{v}$ bulunur.

iv. Eğer $\diamond \leq_1 \bar{v}$ ve $\sigma = \sigma + \varepsilon\varepsilon\sigma^* \in \mathbb{D}^{-ff}$ ise $\diamond \geq \frac{\bar{v}}{\diamond}$ olduğunu gösterelim.

$\diamond \leq_1 \bar{v}$ olsun. Bu durumda $w \leq v$ ve $w^* \leq v^*$ dir.

$$\begin{aligned}
\frac{\diamond}{\diamond} &= \frac{ww+sww^*}{\sigma+s\sigma^*} = \frac{(ww+sww^*)(\sigma-s\sigma^*)}{\sigma^2} \\
&= \frac{ww\sigma+s(ww^*\sigma-ww\sigma^*)}{\sigma^2} \\
&= \frac{ww}{\sigma} + \varepsilon\varepsilon\left(\frac{ww^*}{\sigma} - \frac{ww\sigma^*}{\sigma^2}\right)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{v}}{\diamond} &= \frac{v+sv^*}{\sigma+s\sigma^*} = \frac{(v+sv^*)(\sigma-s\sigma^*)}{\sigma^2} \\
&= \frac{v\sigma+s(v^*\sigma-v\sigma^*)}{\sigma^2} \\
&= \frac{v}{\sigma} + \varepsilon\varepsilon\left(\frac{v^*}{\sigma} - \frac{v\sigma^*}{\sigma^2}\right)
\end{aligned}$$

olmak üzere $\frac{ww}{\sigma} - \frac{ww\sigma^*}{\sigma^2} \geq \frac{v}{\sigma} - \frac{v\sigma^*}{\sigma^2}$ olduğu açıktır. Bu durumda $\frac{\diamond}{\diamond} \geq \frac{\bar{v}}{\diamond}$ dir.

Teorem 3.2.6. $\diamond = w + \varepsilon\varepsilon w^*, \diamond = v + \varepsilon\varepsilon v^* \in \mathbb{D}$ için $\diamond <_1 \bar{v}$ olduğunu varsayalım.

$1 \leq n \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki dual eşitsizlikler vardır:

i. $\diamond = w + \varepsilon\varepsilon w^*, a^*, \diamond = v + \varepsilon\varepsilon v^* \in \mathbb{D}^{+'}$ için $0 <_1 \diamond^{2n} <_1 \bar{v}^{2n}$

ii. $\diamond = w + \varepsilon\varepsilon w^*, a^*, \diamond = v + \varepsilon\varepsilon v^* \in \mathbb{D}^{+'}$ için $0 <_1 \diamond^{2n+1} <_1 \bar{v}^{2n+1}$

iii. $\diamond = w + \varepsilon w^*, \diamond = v + \varepsilon v^* \in \mathbb{D}^{+''}$ için $\frac{1}{\diamond w} > \frac{1}{\frac{1}{v}} > 0$

İspat.

- i. $\diamond = w + \varepsilon w^*, \diamond = v + \varepsilon v^* \in \mathbb{D}^{+'}$ için $0 <_1 \diamond <_1 \bar{v}$ olsun. Dual sayılar üzerindeki $<_1$ sıralama bağıntısı dikkate alındığında aşağıdaki ifadeler yazılabilir:

$$\diamond^{2n} = w^{2n} + \varepsilon w^* \cdot 2n \cdot w^{2n-1}$$

$$\bar{v}^{2n} = v^{2n} + \varepsilon v^* \cdot 2n \cdot v^{2n-1}.$$

$a < b$ olduğundan $a^{2n} < b^{2n}$ dir. Ayrıca $a^* < b^*$ ve $2n \cdot a^{2n-1} < 2n \cdot b^{2n-1}$ eşitsizliği elde edilir. O halde, $0 <_1 \bar{a}^{2n} <_1 \bar{b}^{2n}$ dual eşitsizliği mevcuttur.

- ii. $\diamond = w + \varepsilon w^*, \diamond = v + \varepsilon v^* \in \mathbb{D}^{+'}$ için $0 <_{\mathbb{D}} \diamond <_{\mathbb{D}} \bar{v}$ olsun.

$$\diamond^{2n+1} = w^{2n+1} + \varepsilon w^* \cdot (2n+1) \cdot w^{2n}$$

$$\bar{v}^{2n+1} = v^{2n+1} + \varepsilon v^* \cdot (2n+1) \cdot v^{2n}$$

olmak üzere $w < v$ olduğundan $w^{2n+1} < v^{2n+1}$ dir. $w^* < v^*$ ve $(2n+1) \cdot w^{2n} < (2n+1) \cdot v^{2n}$ eşitsizliği elde edilir. Dual sayılar için ifade edilen sıralama bağıntısı dikkate alındığında,

$0 <_1 \diamond^{2n+1} <_1 \bar{v}^{2n+1}$ dual eşitsizliği mevcuttur.

- iii. $0 < w < v$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $\frac{1}{ww} > \frac{1}{v} > 0$ eşitsizliği yazılabilir. Yine

$w^* < v^* < 0$ olduğundan $-\frac{ww^*}{ww^2} > -\frac{v^*}{v^2} > 0$ dir. Dual sayılar için ifade edilen sıralama bağıntısı dikkate alındığında, $\frac{1}{\diamond w} > \frac{1}{\frac{1}{v}} > 0$ dual eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.2.7. $\diamond = w + \varepsilon w^*, \diamond = v + \varepsilon v^* \in \mathbb{D}^{-'}$ için $\diamond <_{\mathbb{D}} \bar{v}$ olduğunu varsayalım. $1 \leq n \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki dual eşitsizlikler vardır:

- i. $\diamond = w + \varepsilon w^*, \diamond = v + \varepsilon v^* \in \mathbb{D}^{-'}$ için $\diamond^{2n} >_1 \bar{v}^{2n} >_1 0$
- ii. $\diamond = w + \varepsilon w^*, \diamond = v + \varepsilon v^* \in \mathbb{D}^{-'}$ için $\diamond^{2n+1} <_1 \bar{v}^{2n+1} <_1 0$
- iii. $\diamond = w + \varepsilon w^*, \diamond = v + \varepsilon v^* \in \mathbb{D}^{-''}$ için $0 > \frac{1}{\diamond w} > \frac{1}{\frac{1}{v}}.$

İspat.

- i. $\diamond = w + \varepsilon w^*, \bar{\diamond} = v + \varepsilon v^* \in \mathbb{D}^{-'}$ için $\diamond <_1 \bar{v} <_1 \bar{0}$ olsun. Aşağıdaki ifadeleri yazmak mümkündür:

$$\diamond^{2n} = w^{2n} + \varepsilon w^* \cdot 2n \cdot w^{2n-1}$$

$$\bar{v}^{2n} = v^{2n} + \varepsilon v^* \cdot 2n \cdot v^{2n-1}.$$

$w < v < 0$ olduğundan $w^{2n} > v^{2n} > 0$ dir. $w < v < 0$ ve $w^* < v^* < 0$ olmak üzere $w^* \cdot 2n \cdot w^{2n-1} > v^* \cdot 2n \cdot v^{2n-1} > 0$ dir. Dual sayılar için ifade edilen sıralama bağıntısını dikkate aldığımızda, $\diamond^{2n} >_1 \bar{v}^{2n} >_1 \bar{0}$ dual eşitsizliği elde edilir.

- ii. $\diamond = w + \varepsilon w^*, \bar{\diamond} = v + \varepsilon v^* \in \mathbb{D}^{-'}$ için $\diamond <_1 \bar{v} <_1 \bar{0}$ olsun. Aşağıdaki ifadeleri yazmak mümkündür:

$$\diamond^{2n+1} = w^{2n+1} + \varepsilon w^* \cdot (2n+1) \cdot w^{2n}$$

$$\bar{v}^{2n+1} = v^{2n+1} + \varepsilon v^* \cdot (2n+1) \cdot v^{2n}$$

$w < v < 0$ olduğundan $w^{2n+1} < v^{2n+1} < 0$ dir. $w < v < 0$ ve $w^* < v^* < 0$ olmak üzere $w^* \cdot (2n+1) \cdot w^{2n} < v^* \cdot (2n+1) \cdot v^{2n} < 0$ dir. Böylece $\diamond^{2n+1} <_1 \bar{v}^{2n+1} <_1 \bar{0}$ dual eşitsizliği elde edilir.

- iii. $\diamond = w + \varepsilon w^*, \bar{\diamond} = v + \varepsilon v^* \in \mathbb{D}^{-''}$ için $w < v < 0$ ve $0 < w^* < v^*$ olduğu açıktır. Bu durumda $\frac{1}{v} < \frac{1}{ww} < 0$ ve $0 > -\frac{a^*}{ww^2} > -\frac{b^*}{v^2}$ elde edilir. Böylece $\bar{0} > \frac{1}{\diamond w} > \frac{1}{1-\bar{v}}$ dual eşitsizliği bulunur.

Teorem 3.2.8. $\bar{a} = a + \varepsilon a^*$ bir dual sayı olsun. $\diamond \in \bar{S} = S_1 \cup S_2 \iff \diamond >_1 \bar{\diamond}$ dir. Burada

$$S_1 = \{\diamond = w + \varepsilon w^* \in \mathbb{D} \mid 0 < w < \frac{1}{2} \text{ ve } w^* \in \mathbb{R}^+\}$$

$$S_2 = \{\diamond = w + \varepsilon w^* \in \mathbb{D} \mid \frac{1}{2} < w < 1 \text{ ve } w^* \in \mathbb{R}^-\}$$

dir.

İspat. $\diamond = w + \varepsilon w^*$ bir dual sayı ve $\diamond \in \bar{S}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki iki durum mevcuttur.

- i. Eğer $\diamond \in S_1$ ise $\diamond >_1 \bar{\diamond}$ dir.

ii. Eğer $\alpha \in S_2$ ise $\alpha >_1 \alpha^2$ dir.

Diğer yandan, $\alpha >_1 \alpha^2$ olsun. Dual sıralama bağıntısından açıktır ki $\alpha \in \bar{S}$ dir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.2.1. α ve $\bar{v}$ iki dual sayı olsun. Bu durumda, aşağıdaki önermeleri elde etmek mümkündür:

- i. Eğer, $\alpha \bar{v} \in \mathbb{D}D^+$ ise $\alpha \bar{v} >_1 \bar{0}$ dir.
- ii. Eğer $\alpha \in \mathbb{D}D^+$, $\bar{v} \in \mathbb{D}D^-$ ise $\alpha \bar{v} <_1 \bar{0}$ dir.
- iii. Eğer $\alpha \in \mathbb{D}D^-$, $\bar{v} \in \mathbb{D}D^+$ ise $\alpha \bar{v} <_1 \bar{0}$ dir.
- iv. Eğer, $\alpha \bar{v} \in \mathbb{D}D^-$ ise $\alpha \bar{v} >_1 \bar{0}$ dir.

İspat.

i. $\alpha \bar{v} \in \mathbb{D}D^+$ olmak üzere,

$$\alpha \bar{v} = wv + \varepsilon(wv^* + w^*v)$$

dir. $w, w^* > 0$ ve $v, v^* > 0$ olduğundan $wv > 0$ ve $wv^* > 0$, $w^*v > 0$ olup $wv^* + w^*v > 0$ dir. Böylece $\alpha \bar{v} >_1 \bar{0}$ dir.

ii. $\alpha \in \mathbb{D}D^+$, $\bar{v} \in \mathbb{D}D^-$ olmak üzere,

$$\alpha \bar{v} = wv + \varepsilon(wv^* + w^*v)$$

dir. $w, w^* > 0$ ve $v, v^* < 0$ olduğundan $wv < 0$ ve $wv^* < 0$, $w^*v < 0$ olup $wv^* + w^*v < 0$ dir.

Böylece $\alpha \bar{v} <_1 \bar{0}$ dir.

iii. (ii) maddesine benzer şekilde ispatı yapılabilir.

iv. $\alpha \bar{v} \in \mathbb{D}D^-$ olmak üzere,

$$\alpha \bar{v} = wv + \varepsilon(wv^* + w^*v)$$

dir. $w, w^* < 0$ ve $v, v^* < 0$ olduğundan $wv > 0$ ve $wv^* > 0$, $w^*v > 0$ olup $wv^* + w^*v > 0$ dir. Böylece $\alpha \bar{v} >_1 \bar{0}$ dir.

Tanım 3.2.9. $\diamond = w + \varepsilon w^*$ bir dual sayı olsun. Bu dual sayının mutlak değeri

$$|\diamond|_1 = |w| + \varepsilon |w^*|$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.2.10. Herhangi bir $\diamond = w + \varepsilon w^* \in \mathbb{D}$ ve $\bar{\delta} = \delta + \varepsilon \delta^* \in \mathbb{D}^{+'}$ dual sayıları için,

$$|\diamond|_1 <_1 \bar{\delta} \iff -\bar{\delta} <_1 \diamond <_1 \bar{\delta}$$

dir.

İspat. $\diamond = w + \varepsilon w^* \in \mathbb{D}$ ve $\bar{\delta} = \delta + \varepsilon \delta^* \in \mathbb{D}^{+'}$ ve bir dual sayının mutlak değeri

$$|\diamond|_1 = |w| + \varepsilon |w^*|$$

şeklindedir. Dual eşitsizlik sistemini göz önüne aldığımızda, $-\bar{\delta} <_1 \diamond <_1 \bar{\delta}$ dual eşitsizliğinin çözüm cümlesi

$$\bar{S} = \{ \diamond = w + \varepsilon w^* \in \mathbb{D} \mid -\delta < w < \delta \text{ ve } -\delta^* < w^* < \delta^* \}$$

şeklindedir. Diğer yandan,

$$|\diamond|_{\mathbb{D}} = |w| + \varepsilon |w^*| <_1 \bar{\delta} \iff |w| < \delta \text{ ve } |w^*| < \delta^*$$

$$- \delta < w < \delta \text{ ve } -\delta^* < w^* < \delta^*$$

$$- \bar{\delta} <_1 \bar{a} <_1 \bar{\delta}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.11. (Dual Chebyshev Eşitsizliği) $\{\diamond_1, \diamond_2, \dots, \diamond_n\}$ ve $\{v_1, \bar{v}_2, \dots, v_n\}$ dual sayıların iki cümlesi olsun. Burada, $\diamond_{ii} = w_{ii} + \varepsilon w_{ii}^*$, $\bar{v}_{ii} = v_{ii} + \varepsilon v_{ii}^*$ ve $1 \leq ii \leq n$ dir.

Eğer $\diamond_1 \geq_1 \diamond_2 \geq_1 \dots \geq_1 \diamond_n$ ve $\bar{v}_1 \geq_1 \bar{v}_2 \geq_1 \dots \geq_1 v_n$, veya $\diamond_1 \leq_1 \diamond_2 \leq_1 \dots \leq_1 \diamond_n$ ve $v_1 \leq_1 \bar{v}_2 \leq_1 \dots \leq_1 v_n$ ise bu durumda,

$$\frac{\diamond_1 + \diamond_2 + \dots + \diamond_n}{n} \diamond_{ii} \frac{\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \dots + v_n}{n} \leq_1 \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \diamond_k \bar{v}_k$$

dual eşitsizliği vardır.

İspat. $w_1 \geq 1, w_2 \geq 1, \dots, w_n \geq 1$ ve $\bar{v}_1 \geq 1, \bar{v}_2 \geq 1, \dots, v_n \geq 1$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
 &= \frac{w_1 + w_2 + \dots + w_n}{n} \cdot \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_n}{n} \\
 &= \frac{w_1(v_1 + v_2 + \dots + v_n) + \dots + w_n(v_1 + v_2 + \dots + v_n)}{n^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (w_1 + w_2 + \dots + w_n) \cdot \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_n}{n} \\
 &= w_1 v_1 + \dots + w_1 v_n + \dots + w_n v_1 + \dots + w_n v_n + \frac{w_1 + w_2 + \dots + w_n}{n} (v_1 + v_2 + \dots + v_n) \\
 &= w_1 v_1 + \dots + w_1 v_n + \dots + w_n v_1 + \dots + w_n v_n + \frac{w_1 + w_2 + \dots + w_n}{n} (v_1 + v_2 + \dots + v_n)
 \end{aligned}$$

dir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=1}^n w_k v_k \geq w_1 v_1 + \dots + w_n v_n \\
 &\sum_{k=1}^n w_k v_k \geq w_1 v_2 + \dots + w_n v_1 \\
 &\vdots \\
 &\sum_{k=1}^n w_k v_k \geq w_1 v_n + \dots + w_n v_{n-1}
 \end{aligned}$$

ifadelerini taraf tarafa topladığımızda

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=1}^n w_k v_k \geq w_1(v_1 + \dots + v_n) + \dots + w_n(v_1 + \dots + v_n) \\
 &= (w_1 + \dots + w_n)(v_1 + \dots + v_n) \\
 &= \sum_{k=1}^n w_k \cdot \sum_{k=1}^n v_k
 \end{aligned}$$

elde ederiz.

Benzer işlemleri ifadenin dual kısmı içinde inceleyecek olursak ilk olarak

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n w_k^* v_k &\geq w_1^* v_1 + \cdots + w_n^* v_n \\
\sum_{k=1}^n w_k^* v_k &\geq w_1^* v_2 + \cdots + w_n^* v_1 \\
&\vdots \\
\sum_{k=1}^n w_k^* v_k &\geq w_1^* v_n + \cdots + w_n^* v_{n-1}
\end{aligned}$$

ifadelerini taraf tarafa topladığımızda

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n w_k^* v_k &\geq w_1^* (v_1 + \cdots + v_n) + \cdots + w_n^* (v_1 + \cdots + v_n) \\
&= (w_1^* + \cdots + w_n^*) (v_1 + \cdots + v_n) \\
&= \sum_{k=1}^n w_k^* \cdot \sum_{k=1}^n v_k
\end{aligned}$$

elde ederiz. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n w_k v_k^* &\geq w_1 v_1^* + \cdots + w_n v_n^* \\
\sum_{k=1}^n w_k v_k^* &\geq w_1 v_2^* + \cdots + w_n v_1^* \\
&\vdots \\
\sum_{k=1}^n w_k v_k^* &\geq w_1 v_n^* + \cdots + w_n v_{n-1}^*
\end{aligned}$$

ifadelerini taraf tarafa topladığımızda

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n w_k v_k^* &\geq w_1 (v_1^* + \cdots + v_n^*) + \cdots + w_n (v_1^* + \cdots + v_n^*) \\
&= (w_1 + \cdots + w_n) (v_1^* + \cdots + v_n^*) \\
&= \sum_{k=1}^n w_k \sum_{k=1}^n v_k^*
\end{aligned}$$

ifadelerini elde ederiz. Dual sıralama bağıntısı göz önüne alındığında,

$$\underbrace{\diamond + \diamond + \dots + \diamond}_n \quad \underbrace{\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \dots + v_n}_n \quad \leq 1 \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \bar{v}_k$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.12. $\diamond = w + \varepsilon w^*$, $\bar{v} = v + \varepsilon v^*$ iki dual sayı olsun. Bu durumda, aşağıdaki özellikler sağlanır:

i. $|\diamond \bar{v}|_1 \leq |\diamond|_1 |\bar{v}|_1$

ii. $\frac{\diamond w}{v_1} \geq \frac{|\diamond|_1}{|v|_1}$

İspat. $\diamond = w + \varepsilon w^*$, $\bar{v} = v + \varepsilon v^*$ iki dual sayı olmak üzere aşağıdaki iki eşitsizlik elde edilir.

i. $|\diamond \bar{v}|_1 = |(w + \varepsilon w^*)(v + \varepsilon v^*)|_1$
 $= |wv + \varepsilon(wv^* + w^*v)|_1$
 $= |wv| + \varepsilon |wv^* + w^*v|$
 $\leq |w||v| + \varepsilon |wv^*| + |w^*v|$
 $= |w||v| + \varepsilon (|w||v^*| + |w^*||v|)$
 $= (|w| + \varepsilon |w^*|)(|v| + \varepsilon |v^*|)$
 $= |\diamond|_1 |\bar{v}|_1.$

ii. $\frac{\diamond w}{v_1} = \frac{ww + \varepsilon ww^*}{v + \varepsilon v^*} = \frac{(ww + \varepsilon ww^*)(v - \varepsilon v^*)}{v^2} = \frac{wwv + \varepsilon(ww^*v - wwv^*)}{v^2}$
 $= \frac{wwv}{v^2} + \varepsilon \frac{ww^*v - wwv^*}{v^2}$
 $= \frac{ww}{v} + \varepsilon \frac{ww^*v - wwv^*}{v^2}$
 $= \frac{|ww|}{|v|} + \varepsilon \frac{ww^*v - wwv^*}{v^2}$
 $\geq \frac{|ww|}{|v|} + \varepsilon \frac{ww^*v}{v^2} - \frac{wwv^*}{v^2}$
 $= \frac{|ww|}{|v|} + \varepsilon \frac{|ww^*||v|}{|v|^2} - \frac{|ww||v^*|}{|v|^2}$

$$\begin{aligned}
&\geq_1 \frac{|w|}{|v|} + \varepsilon \left(\frac{|wv^*|}{|v|} - \frac{|wv||v^*|}{|v|^2} \right) \\
&= \frac{|wv| + \varepsilon |wv^*|}{|v| + \varepsilon |v^*|} \\
&= \frac{\|\gamma\bar{\gamma}\|_1}{\|\gamma\|_1}.
\end{aligned}$$

Teorem 3.2.13. $\mathbb{D}^n$, n -boyutlu bir dual uzay ve $\|\cdot\|, \mathbb{R}^n$ üzerinde norm olmak üzere,

$$\|\cdot\|_1 : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}$$

$$\diamond \rightarrow \|\gamma\bar{\gamma}\|_1 = \|\gamma\gamma\| + \varepsilon \|\gamma\gamma^*\|$$

dual fonksiyonu verilsin. Bu durumda aşağıdaki ifadeler mevcuttur:

- i. $\forall \gamma\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^n$ için $\|\gamma\bar{\gamma}\|_1 \geq_1 0$ dir. Ayrıca, $\|\gamma\bar{\gamma}\|_1 = 0 \iff \gamma\bar{\gamma} = \bar{0}$
- ii. $\forall \gamma\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^n$ için ve $\forall \bar{\lambda} \in \mathbb{D}$ için $\|\bar{\lambda}\gamma\bar{\gamma}\|_1 \leq_1 \bar{\lambda} \diamond_1 \cdot \|\gamma\bar{\gamma}\|_1$ dir. Özel olarak, $\lambda^* = 0$ yani; $\bar{\lambda} = \lambda$ olması durumunda $\|\bar{\lambda}\gamma\bar{\gamma}\|_1 = \bar{\lambda} \diamond_1 \cdot \|\gamma\bar{\gamma}\|_1$ dir.
- iii. $\forall \gamma\bar{\gamma}, \bar{P} \in D^n$ için $\|\gamma\bar{\gamma} + \bar{P}\|_1 \leq_1 \|\gamma\bar{\gamma}\|_1 + \|\bar{P}\|_1$ dir.

İspat.

- i. $\forall \gamma\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^n$ için $\|\gamma\bar{\gamma}\|_1 \geq_1 0$ dir. Bunu gösterelim.

$$\|\gamma\bar{\gamma}\|_1 = \|\gamma\gamma\| + \varepsilon \|\gamma\gamma^*\|$$

olmak üzere, Öklid uzayında norm fonksiyonunun birinci özelliğinden $\|\gamma\gamma\| \geq 0$ ve $\|\gamma\gamma^*\| \geq 0$ olduğunu biliyoruz. O halde açıktır ki; dual parçalı sıralama bağıntısı $\leq_1$ den $\|\gamma\bar{\gamma}\|_1 \geq_1 0$ elde edilir.

Ayrıca,

$$\|\gamma\bar{\gamma}\|_1 = \bar{0} \iff \|\gamma\bar{\gamma}\|_1 = \|\gamma\gamma\| + \varepsilon \|\gamma\gamma^*\| = 0 + \varepsilon 0$$

$$- \|\gamma\gamma\| = 0 \text{ ve } \|\gamma\gamma^*\| = 0$$

$$- \gamma\gamma = 0 \text{ ve } \gamma\gamma^* = 0$$

$$- \gamma\bar{\gamma} = \bar{0}$$

dir.

ii. $\forall \bar{\lambda} \in \mathbb{D}$ ve $\forall \gamma \in \mathbb{D}^n$ için

$$\begin{aligned}
\|\bar{\lambda}\gamma\|_1 &= \|(\lambda + \varepsilon\lambda^*)(\gamma + \varepsilon\gamma^*)\|_1 \\
&= \|\lambda\gamma + \varepsilon(\lambda\gamma^* + \lambda^*\gamma)\|_1 \\
&= \|\lambda\gamma\| + \varepsilon\|\lambda\gamma^* + \lambda^*\gamma\| \\
&= |\lambda|\|\gamma\| + \varepsilon\|\lambda\gamma^* + \lambda^*\gamma\| \\
&\leq |\lambda|\|\gamma\| + \varepsilon(\|\lambda\gamma^*\| + \|\lambda^*\gamma\|) \\
&= |\lambda|\|\gamma\| + \varepsilon(|\lambda|\|\gamma^*\| + |\lambda^*|\|\gamma\|) \\
&= (|\lambda| + \varepsilon|\lambda^*|)(\|\gamma\| + \varepsilon\|\gamma^*\|) \\
&= \|\bar{\lambda}\|_1 \|\gamma\|_1
\end{aligned}$$

dir. Ayrıca, $\lambda = \lambda$ olması durumunda

$$\begin{aligned}
\|\bar{\lambda}\gamma\|_1 &= \|(\lambda + \varepsilon 0)(\gamma + \varepsilon\gamma^*)\|_1 \\
&= \|\lambda\gamma + \varepsilon\lambda\gamma^*\|_1 \\
&= \|\lambda\gamma\| + \varepsilon\|\lambda\gamma^*\| \\
&= |\lambda|\|\gamma\| + \varepsilon|\lambda|\|\gamma^*\| \\
&= (|\lambda| + \varepsilon 0)(\|\gamma\| + \varepsilon\|\gamma^*\|) \\
&= \|\bar{\lambda}\|_1 \|\gamma\|_1
\end{aligned}$$

elde edilir.

iii. $\forall \gamma \in \mathbb{D}^n$ için

$$\begin{aligned}
\|\gamma + \bar{P}\|_1 &= \|\gamma + \varepsilon\gamma^* + P + \varepsilon P^*\|_1 \\
&= \|\gamma + P + \varepsilon(\gamma^* + P^*)\|_1 \\
&= \|\gamma + P\| + \varepsilon\|\gamma^* + P^*\| \\
&\leq \|\gamma\| + \|P\| + \varepsilon(\|\gamma^*\| + \|P^*\|) \\
&= \|\gamma\| + \varepsilon\|\gamma^*\| + \|P\| + \varepsilon\|P^*\| \\
&= \|\gamma\|_1 + \|P\|_1
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.14. $d_1, d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ birer metrik olmak üzere, $\bar{d} : \mathbb{D}^n \times \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}$,

$$\bar{d}(\bar{\gamma}, \bar{P}) = d_1(\gamma, P) + \varepsilon d_2(\gamma^*, P^*)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon aşağıdaki özellikleri sağlar:

- i. $\forall \bar{\gamma}, \bar{P} \in \mathbb{D}^n$ için $\bar{d}(\bar{\gamma}, \bar{P}) \geq 0$ dir.
- ii. $\forall \bar{\gamma}, \bar{P} \in \mathbb{D}^n$ için $\bar{d}(\bar{\gamma}, \bar{P}) = 0 \iff \bar{\gamma} = \bar{P}$ dir.
- iii. $\forall \bar{\gamma}, \bar{P} \in \mathbb{D}^n$ için $\bar{d}(\bar{\gamma}, \bar{P}) = \bar{d}(\bar{P}, \bar{\gamma})$ dir.
- iv. $\forall \bar{\gamma}, \bar{P}, \bar{\omega} \in \mathbb{D}^n$ için $\bar{d}(\bar{\gamma}, \bar{\omega}) \leq \bar{d}(\bar{\gamma}, \bar{P}) + \bar{d}(\bar{P}, \bar{\omega})$ dir.

İspat.

- i. $\forall \bar{\gamma}, \bar{P} \in \mathbb{D}^n$ için $\bar{d}(\bar{\gamma}, \bar{P}) \geq 0$ dir. Gerçekten, d_1 ve d_2 $\mathbb{R}^n$ de iki metrik olduklarından

$$\bar{d}(\bar{\gamma}, \bar{P}) = d_1(\gamma, P) + \varepsilon d_2(\gamma^*, P^*) \geq 0$$

dir.

- ii. $\bar{d}(\bar{\gamma}, \bar{P}) = d_1(\gamma, P) + \varepsilon d_2(\gamma^*, P^*) = 0 = 0 + \varepsilon 0$ eşitliğinin sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart $d_1(\gamma, P) = 0$ ve $d_2(\gamma^*, P^*) = 0$ olmasıdır. $d_1(\gamma, P) = 0$ ve $d_2(\gamma^*, P^*) = 0$ eşitliklerinin sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart $\gamma = P$ ve $\gamma^* = P^*$ olmasıdır, yani $\bar{\gamma} = \bar{P}$ dir.

- iii. $\forall \bar{\gamma}, \bar{P} \in \mathbb{D}^n$ için $\bar{d}(\bar{\gamma}, \bar{P}) = \bar{d}(\bar{P}, \bar{\gamma})$ dir. Gerçekten,

$$\bar{d}(\bar{\gamma}, \bar{P}) = d_1(\gamma, P) + \varepsilon d_2(\gamma^*, P^*) = d_1(P, \gamma) + \varepsilon d_2(P^*, \gamma^*) = \bar{d}(\bar{P}, \bar{\gamma})$$

dir.

- iv. $\forall \bar{\gamma}, \bar{P}, \bar{\omega} \in \mathbb{D}^n$ için $\bar{d}(\bar{\gamma}, \bar{\omega}) \leq \bar{d}(\bar{\gamma}, \bar{P}) + \bar{d}(\bar{P}, \bar{\omega})$ dir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} \bar{d}(\bar{\gamma}, \bar{\omega}) &= d_1(\gamma, \omega) + \varepsilon d_2(\gamma^*, \omega^*) \leq d_1(\gamma, P) + d_1(P, \omega) + \varepsilon(d_2(\gamma^*, P^*) + d_2(P^*, \omega^*)) \\ &= d_1(\gamma, P) + \varepsilon d_2(\gamma^*, P^*) + d_1(P, \omega) + \varepsilon d_2(P^*, \omega^*) \\ &= \bar{d}(\bar{\gamma}, \bar{P}) + \bar{d}(\bar{P}, \bar{\omega}) \end{aligned}$$

dir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.15. d_1, d_2 $\mathbb{R}^n$ üzerinde birer metrik $\diamond = w + \varepsilon w^* \in \mathbb{D}^n$ bir dual nokta ve $r, r^* \in \mathbb{R}^+$ için $\bar{r} = r + \varepsilon r^*$ bir dual sabit olsun. Bu durumda bütün

$$\mathfrak{I} = \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^n \mid d_1(\bar{\gamma}, \diamond) < \bar{r}\} \\ = \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^n \mid d_1(\gamma, w) < r \text{ ve } d_2(\gamma^*, w^*) < r^*\}$$

cümlelerinin bir koleksiyonu $\mathbb{D}^n$ üzerinde $\bar{\beta}$ bazını oluşturur.

İspat. Öncelikle $\bigcup_{\bar{\gamma} \in \mathfrak{I}} \bar{B} = \mathbb{D}^n$ olduğu açıktır. Şimdi,

$$\mathfrak{I}_1 = \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^n \mid d_1(\gamma, w_1) < r_1 \text{ ve } d_2(\gamma^*, w_1^*) < r_1^*\} \\ \mathfrak{I}_2 = \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^n \mid d_1(\gamma, w_2) < r_2 \text{ ve } d_2(\gamma^*, w_2^*) < r_2^*\}$$

biçimindeki cümleleri ele alalım.

$\bar{P} = P + \varepsilon P^* \in \mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2$ olsun. $d_1(P, w_1) < r_1$, $d_1(P, w_2) < r_2$, $d_2(P^*, w_1^*) < r_1^*$, $d_2(P^*, w_2^*) < r_2^*$ olur öyle ki

$$\bar{P} \in \bar{B} = \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^n \mid d_1(\gamma, P) < r \text{ ve } d_2(\gamma^*, P^*) < r^*\} \subset \mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2$$

olacak şekilde $\bar{B} \in \bar{\beta}$ vardır. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.2.2. Teorem 3.2.15. de elde edilen $\bar{\beta}$ bazındaki cümlelerin keyfi birleşiminden oluşturulan topoloji $\bar{\mathcal{A}}$ ile gösterilirse,

$$\bar{\mathcal{A}} = \{\bigcup_{i \in I} \bar{A}_i \mid \bar{A}_i \in \bar{\beta}\}$$

biçimindedir.

Teorem 3.2.16. $(\mathbb{D}^n, \bar{\mathcal{A}})$ topolojik uzayı Hausdorff uzaydır.

İspat. $\forall \diamond, \diamond \in \mathbb{D}^n$ için, $\diamond \neq \diamond$ koşulunu sağlayan iki durum vardır.

İlk olarak $w_1 \neq w_2$ olduğunu varsayalım. $\bar{\mathcal{A}}$ topolojik uzayının iki elemanı A ve $\bar{A}_2$ cümlelerini şu şekilde belirleyebiliriz:

$$\diamond \in A = \{\bar{\gamma} = \gamma + \varepsilon \gamma^* \in \mathbb{D}^n \mid d_1(\gamma, w_1) < r_1, d_2(\gamma^*, w_1^*) < r_1^*\} \in \bar{\mathcal{A}}$$

$$\diamond \in \bar{A}_2 = \{\bar{\gamma} = \gamma + \varepsilon \gamma^* \in \mathbb{D}^n \mid d_1(\gamma, w_2) < r_2, d_2(\gamma^*, w_2^*) < r_2^*\} \in \bar{\mathcal{A}}$$

öyle ki $A_1 \cap \bar{A}_2 = \emptyset$ dir. Şimdi $w_1 = w_2$ ve $w_1^* \neq w_2^*$ olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$\diamond \in A = \{\bar{\gamma} = \gamma + \varepsilon \gamma^* \in \mathbb{D}^n \mid d_1(\gamma, w_1) < r_1, d_2(\gamma^*, w_1^*) < r_1^*\} \in \bar{\mathcal{A}}$$

$$\diamond \in \bar{A}_2 = \{\bar{\gamma} = \gamma + \varepsilon \gamma^* \in \mathbb{D}^n \mid d_1(\gamma, w_2) < r_2, d_2(\gamma^*, w_2^*) < r_2^*\} \in \bar{\mathcal{A}}$$

olup $A_1 \cap \bar{A}_2 = \emptyset$ elde edilir. Böylece $(\mathbb{D}^n, \bar{d})$ uzayı bir Hausdorff uzaydır.

Tanım 3.2.17. d_1, d_2 $\mathbb{R}^n$ üzerinde birer metrik $\bar{\varphi} = \varphi + \varepsilon\varphi^* \in \mathbb{D}^n$ ve $\bar{r} = r + \varepsilon r^* \in \mathbb{D}^+$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \bar{K}(\bar{\varphi}, \bar{r}) &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^n \mid d_1(\bar{\gamma}, \bar{\varphi}) < \bar{r}\} \\ &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^n \mid d_1(\gamma, \varphi) < r \text{ ve } d_2(\gamma^*, \varphi^*) < r^*\} \end{aligned}$$

cümlesine $\bar{\varphi} = \varphi + \varepsilon\varphi^*$ merkezli $\bar{r} = r + \varepsilon r^*$ yarıçaplı dual açık yuvar denir. $\bar{K}(\bar{\varphi}, \bar{r}) \in \bar{\mathcal{K}}$ olduğu açıktır.

Şimdi Tanım 3.2.16. da bahsedilen bazı $\bar{K}(\bar{0}, \bar{r})$ cümlesinin Öklid uzayındaki farklı metriklere göre $\mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{R}^3$ uzayındaki bazı geometrik modellemelerini elde edeceğiz.

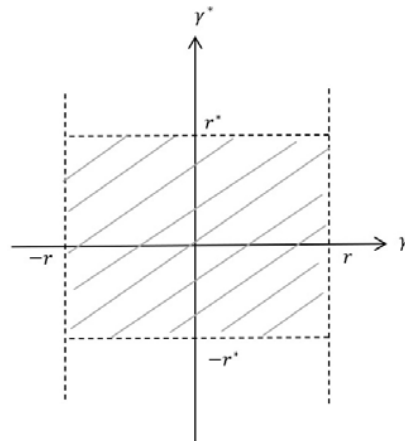
Örnek 3.2.1. $\bar{\varphi} = \varphi + \varepsilon\varphi^* \in \mathbb{D}$, $r, r^* \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\bar{r} = r + \varepsilon r^*$ olsun. d_1, d_2 alışılmış metrikler olmak üzere;

$$\begin{aligned} \bar{K}(\bar{0}, \bar{r}) &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D} \mid d_1(\bar{\gamma}, \bar{0}) < \bar{r}\} \\ &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D} \mid |\gamma - \varphi| + \varepsilon|\gamma^* - \varphi^*| < \bar{r}\} \\ &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D} \mid |\gamma - \varphi| < r \text{ ve } |\gamma^* - \varphi^*| < r^*\} \\ &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D} \mid \varphi - r < \gamma < \varphi + r \text{ ve } \varphi^* - r^* < \gamma^* < \varphi^* + r^*\} \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi de $\mathbb{D}$ uzayındaki orijin merkezli ve $\bar{r} = r + \varepsilon r^*$ yarıçaplı dual açık yuvarına $\mathbb{R}^2$ de karşılık gelen geometrik modellemeyi inceleyelim.

$$\begin{aligned} \bar{K}(\bar{0}, \bar{r}) &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D} \mid |\gamma| < r \text{ ve } |\gamma^*| < r^*\} \\ &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D} \mid -r < \gamma < r \text{ ve } -r^* < \gamma^* < r^*\} \end{aligned}$$

olmak üzere bu cümleinin $\mathbb{R}^2$ deki geometrik modellemesi aşağıdaki gibidir:



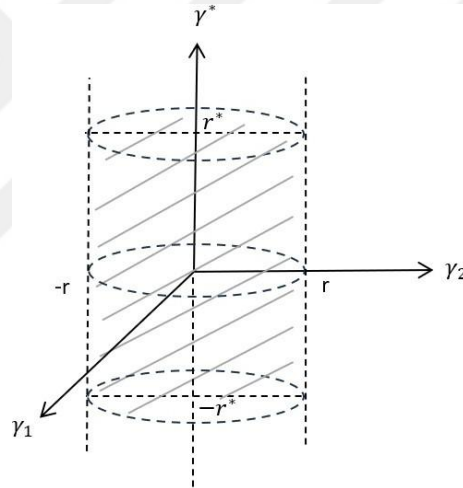
Örnek 3.2.2. $\bar{\varphi} = \varphi + \varepsilon\varphi^* \in \mathbb{DD}^2$, $r, r^* \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\bar{r} = r + \varepsilon r^*$ olsun. d_1, d_2 alışılmış metrikler olmak üzere

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{K}}(\bar{\varphi}, \bar{r}) &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{DD}^2 \mid d_1(\bar{\gamma}, \bar{\varphi}) < \bar{r}\} \\ &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{DD}^2 \mid d_1(\gamma, \varphi) + \varepsilon d_2(\gamma^*, \varphi^*) < \bar{r}\} \\ &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{DD}^2 \mid \|\gamma - \varphi\| + \varepsilon \|\gamma^* - \varphi^*\| < \bar{r}\} \\ &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{DD}^2 \mid \|\gamma - \varphi\| < r, \|\gamma^* - \varphi^*\| < r^*\}\end{aligned}$$

bulunur. Şimdi de $\mathbb{DD}^2$ uzayındaki orijin merkezli ve $\bar{r} = r + \varepsilon r^*$ yarıçaplı dual açık yuvarının $\mathbb{R}^3$ de karşılık gelen geometrik modellemeyi inceleyelim.

$$\bar{\mathcal{K}}(\bar{\varphi}, \bar{r}) = \{\bar{\gamma} \in \mathbb{DD}^2 \mid \|\gamma\| < r, \|\gamma^*\| < r^*\}$$

olmak üzere bu cümleinin $\mathbb{R}^3$ deki geometrik modellemesi aşağıdaki gibidir:



Örnek 3.2.3. $\bar{\varphi} = \varphi + \varepsilon\varphi^* \in \mathbb{DD}$, $r, r^* \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\bar{r} = r + \varepsilon r^*$ olsun. d_1 alışılmış, d_2 ayık metrikler olmak üzere

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{K}}(\bar{\varphi}, \bar{r}) &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{DD} \mid d_1(\bar{\gamma}, \bar{\varphi}) < \bar{r}\} \\ &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{DD} \mid d_1(\gamma, \varphi) < r \text{ ve } d_2(\gamma^*, \varphi^*) < r^*\} \\ &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{DD} \mid \|\gamma - \varphi\| < r \text{ ve } d_2(\gamma^*, \varphi^*) < r^*\}\end{aligned}$$

elde edilir. r^* a göre iki durum söz konusudur:

- $0 < r^* \leq 1$ olmak üzere,

$$\bar{\mathcal{K}}(\bar{\varphi}, \bar{r}) = \{\bar{\gamma} \in \mathbb{DD} \mid \|\gamma - \varphi\| < r, \gamma^* = \varphi^*\}$$

biçiminde elde edilir.

- $r^* > 1$ olmak üzere,

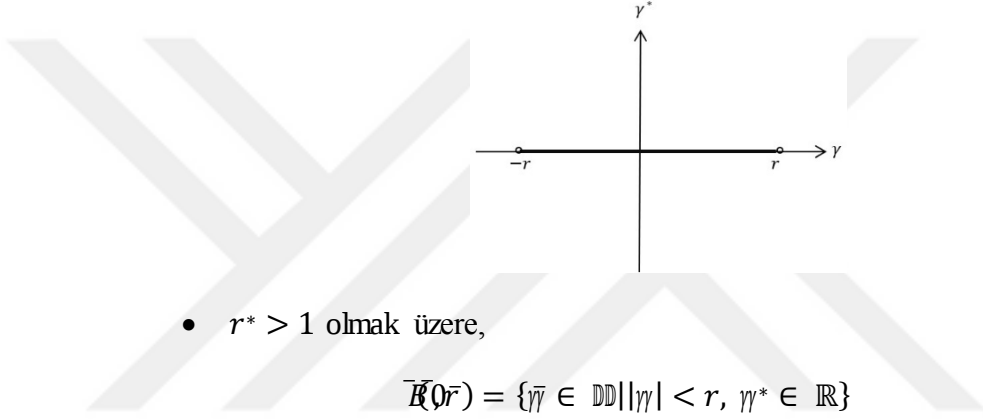
$$\bar{\mathcal{K}}(\varphi\bar{r}) = \{\gamma\bar{\gamma} \in \mathbb{D}\mathbb{D} \mid |\gamma\gamma - \varphi| < r, \gamma\gamma^* \in \mathbb{R}\}$$

dir. Şimdi orijin merkezli ve $\bar{r} = r + \varepsilon r^*$ yarıçaplı $\bar{\mathcal{K}}(\varphi\bar{r})$ cümlesinin $\mathbb{R}^2$ deki geometrik modellemesini inceleyelim.

O halde, iki durum söz konusudur. İlk olarak $0 < r^* \leq 1$ olsun. Böylece

$$\bar{\mathcal{K}}(\varphi\bar{r}) = \{\gamma\bar{\gamma} \in \mathbb{D}\mathbb{D} \mid |\gamma\gamma| < r, \gamma\gamma^* = 0\}$$

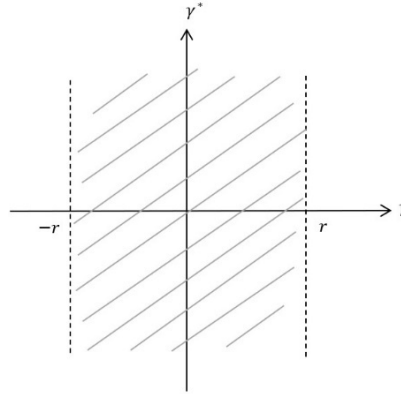
cümlesi elde edilir. Bu cümleye karşılık gelen $\mathbb{R}^2$ deki geometrik modelleme aşağıdaki gibidir:



- $r^* > 1$ olmak üzere,

$$\bar{\mathcal{K}}(\varphi\bar{r}) = \{\gamma\bar{\gamma} \in \mathbb{D}\mathbb{D} \mid |\gamma\gamma| < r, \gamma\gamma^* \in \mathbb{R}\}$$

dir.



Örnek 3.2.4. $\bar{\varphi} = \varphi + \varepsilon\varphi^* \in \mathbb{D}\mathbb{D}^2$, $r, r^* \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\bar{r} = r + \varepsilon r^*$ olsun. $\mathbb{R}^2$ uzayında d_1 alışımlı, d_2 ayrık metrikler olmak üzere

$$\bar{\mathcal{K}}(\varphi\bar{r}) = \{\gamma\bar{\gamma} \in \mathbb{D}\mathbb{D}^2 \mid d_1(\gamma\bar{\gamma}, \bar{\varphi}) < \bar{r}\}$$

$$= \{\gamma\bar{\gamma} \in \mathbb{D}\mathbb{D}^2 \mid d_1(\gamma\gamma, \varphi) < r \text{ ve } d_2(\gamma\gamma^*, \varphi^*) < r^*\}$$

$$= \{\gamma\bar{\gamma} \in \mathbb{D}\mathbb{D}^2 \mid \|\gamma\gamma - \varphi\| < r \text{ ve } d_2(\gamma\gamma^*, \varphi^*) < r^*\}$$

elde edilir. r^* ın durumlarına göre aşağıdaki iki durum mevcuttur:

- $0 < r^* \leq 1$ olmak üzere

$$\bar{K}(\varphi\bar{r}) = \{\gamma\bar{\gamma} \in \mathbb{DD}^2 \mid \|\gamma\gamma - \varphi\| < r, \gamma\gamma^* = \varphi^*\}$$

- $r^* > 1$ olmak üzere

$$\bar{K}(\varphi\bar{r}) = \{\gamma\bar{\gamma} \in \mathbb{DD}^2 \mid \|\gamma\gamma - \varphi\| < r, \gamma\gamma^* \in \mathbb{R}\}$$

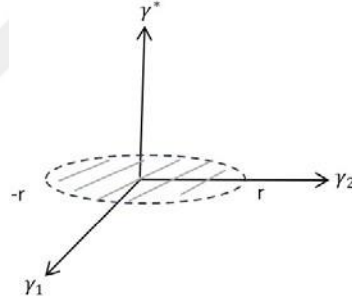
cümleleri elde edilir.

Orijin merkezli $\bar{r}$ yarıçaplı $\bar{K}(\varphi\bar{r})$ cümlesinin $\mathbb{R}^3$ deki modellemesini inceleyelim. $\gamma\bar{\gamma} \in \mathbb{DD}^2$ olmak üzere $\gamma\gamma = (\gamma\gamma_1, \gamma\gamma_2)$, $\gamma\gamma^* = (\gamma\gamma^*, 0)$ olduğunu farzedelim. r^* ın yukarıdaki durumlarına göre aşağıdaki iki geometrik modelleme elde edilir.

- $0 < r^* \leq 1$ olmak üzere

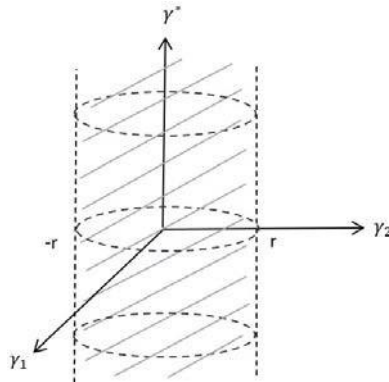
$$\bar{K}(\varphi\bar{r}) = \{\gamma\bar{\gamma} \in \mathbb{DD}^2 \mid \|\gamma\gamma\| < r, \gamma\gamma^* = 0\}$$

olduğu açıktır. Bu durumda aşağıdaki modelleme elde edilir.



- $r^* > 1$ olmak üzere

$$\bar{K}(\varphi\bar{r}) = \{\gamma\bar{\gamma} \in \mathbb{DD}^2 \mid \|\gamma\gamma\| < r, \gamma\gamma^* \in \mathbb{R}\}$$



dir.

Örnek 3.2.5. $\bar{\varphi} = \varphi + \varepsilon\varphi^* \in \mathbb{DD}$, $r, r^* \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\bar{r} = r + \varepsilon r^*$ olsun. d_1, d_2 ayrık metrikler olmak üzere

$$\begin{aligned}\bar{K}(\bar{\varphi}, \bar{r}) &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{DD} \mid d_1(\bar{\gamma}, \bar{\varphi}) < \bar{r}\} \\ &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{DD} \mid d_1(\gamma, \varphi) < r, d_2(\gamma^*, \varphi^*) < r^*\}\end{aligned}$$

elde edilir. r^* in değerlerine göre aşağıdaki dört durum mevcuttur:

- $0 < r \leq 1$ ve $0 < r^* \leq 1$ olmak üzere

$$\bar{K}(\bar{\varphi}, \bar{r}) = \{\bar{\gamma} \in \mathbb{DD} \mid \gamma = \varphi, \gamma^* = \varphi^*\}$$

- $0 < r \leq 1$ ve $r^* > 1$ olmak üzere

$$\bar{K}(\bar{\varphi}, \bar{r}) = \{\bar{\gamma} \in \mathbb{DD} \mid \gamma = \varphi, \gamma^* \in \mathbb{R}\}$$

- $r > 1$ ve $0 < r^* \leq 1$ olmak üzere

$$\bar{K}(\bar{\varphi}, \bar{r}) = \{\bar{\gamma} \in \mathbb{DD} \mid \gamma \in \mathbb{R}, \gamma^* = \varphi^*\}$$

- $r > 1$ ve $r^* > 1$ olmak üzere

$$\bar{K}(\bar{\varphi}, \bar{r}) = \mathbb{DD}$$

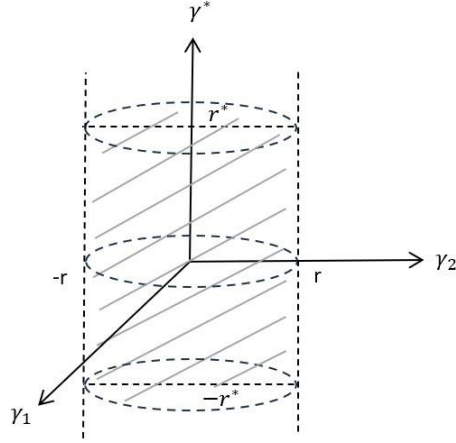
cümleleri elde edilir.

Örnek 3.2.6. $\bar{\varphi} = \varphi + \varepsilon\varphi^* \in \mathbb{DD}^2$, $r, r^* \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\bar{r} = r + \varepsilon r^*$ olsun. $\mathbb{R}^2$ uzayında d_1 alışılmış, d_2 taksi metrikler olmak üzere

$$\begin{aligned}\bar{K}(\bar{\varphi}, \bar{r}) &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{DD}^2 \mid d_1(\bar{\gamma}, \bar{\varphi}) < \bar{r}\} \\ &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{DD}^2 \mid d_1(\gamma, \varphi) < r \text{ ve } d_2(\gamma^*, \varphi^*) < r^*\} \\ &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{DD}^2 \mid \|\gamma - \varphi\| < r \text{ ve } |\gamma_1^* - \varphi_1^*| + |\gamma_2^* - \varphi_2^*| < r^*\}\end{aligned}$$

dır. $\bar{\gamma} \in \mathbb{DD}^2$ olmak üzere $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, $\gamma^* = (\gamma_1^*, 0)$ olduğunu farzedelim.

$\bar{K}(\bar{\varphi}, \bar{r})$ cümlesinin $\mathbb{R}^3$ deki modellemesi;

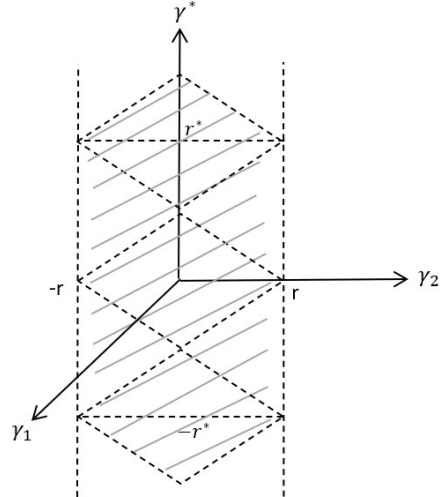


biçiminde elde edilir.

Örnek 3.2.7. $\bar{\varphi} = \varphi + \varepsilon\varphi^* \in \mathbb{D}^2$, $r, r^* \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\bar{r} = r + \varepsilon r^*$ olsun. $\mathbb{R}^2$ uzayında d_1 taksi, d_2 alışılmış metrikler olmak üzere;

$$\begin{aligned} \bar{K}(\bar{r}) &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid d_1(\bar{\gamma}, \bar{\varphi}) < \bar{r}\} \\ &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid d_1(\gamma, \varphi) < r \text{ ve } d_2(\gamma^*, \varphi^*) < r^*\} \\ &= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid |\gamma_1 - \varphi_1| + |\gamma_2 - \varphi_2| < r, \|\gamma^* - \varphi^*\| < r^*\} \end{aligned}$$

dir. . $\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2$ olmak üzere $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, $\gamma^* = (\gamma_1^*, 0)$ olduğunu farzedelim. $\bar{K}(\bar{r})$ cümlesinin $\mathbb{R}^3$ deki modellemesi



bulunur.

Örnek 3.2.8. $\bar{\varphi} = \varphi + \varepsilon\varphi^* \in \mathbb{D}^2$, $r, r^* \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\bar{r} = r + \varepsilon r^*$ olsun. $\mathbb{R}^2$ uzayında d_1 taksi, d_2 ayrık metrikler olmak üzere

$$\bar{K}(\varphi\bar{r}) = \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid d(\bar{\gamma}, \bar{\varphi}) <_{\mathbb{D}} \bar{r}\}$$

$$= \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid d_1(\gamma, \varphi) < r \text{ ve } d_2(\gamma^*, \varphi^*) < r^*\}$$

bulunur. $\bar{K}(\varphi\bar{r})$ cümlesi r^* ın durumlarına göre aşağıdaki gibi elde edilir:

- $0 < r^* \leq 1$ için

$$\bar{K}(\varphi\bar{r}) = \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid |\gamma_1 - \varphi_1| + |\gamma_2 - \varphi_2| < r, \gamma^* = \varphi^*\}$$

dir.

- $r^* > 1$ için

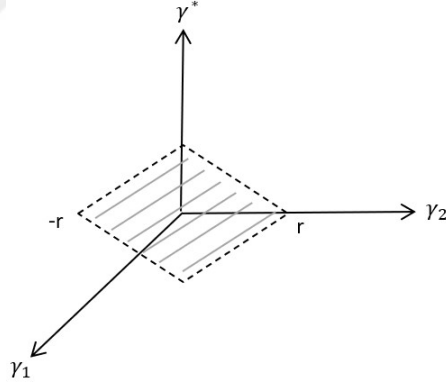
$$\bar{K}(\varphi\bar{r}) = \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid |\gamma_1 - \varphi_1| + |\gamma_2 - \varphi_2| < r, \gamma^* \in \mathbb{R}^2\}$$

dir.

Orijin merkezli ve $\bar{r}$ yarıçaplı $\bar{K}(0\bar{r})$ nin $\mathbb{R}^3$ deki geometrik modellemesini inceleyelim. $\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2$ olmak üzere $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, $\gamma^* = (\gamma_1^*, 0)$ olduğunu farzedelim.

- $0 < r^* \leq 1$ için

$$\bar{K}(0\bar{r}) = \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid |\gamma_1| + |\gamma_2| < r, \gamma^* = 0\}$$

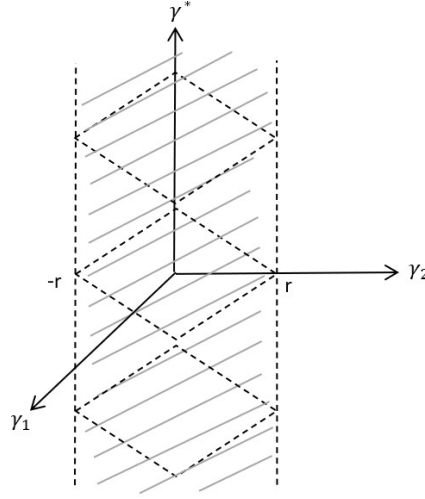


dir.

- $r^* > 1$ için

$$\bar{K}(0\bar{r}) = \{\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid |\gamma_1| + |\gamma_2| < r, \gamma^* \in \mathbb{R}\}$$

cümlesinin $\mathbb{R}^3$ deki modellemesi



dir.

Örnek 3.2.9. $\bar{\varphi} = \varphi + \varepsilon \varphi^* \in \mathbb{D}^2$, $r, r^* \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\bar{r} = r + \varepsilon r^*$ olsun. $\mathbb{R}^2$ uzayında d_1 ayık, d_2 taksi metrikler olmak üzere,

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{K}}(\bar{\varphi}, \bar{r}) &= \{ \bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid d_1(\bar{\gamma}, \bar{\varphi}) < \bar{r} \} \\ &= \{ \bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid d_1(\gamma, \varphi) < r \text{ ve } d_2(\gamma^*, \varphi^*) < r^* \} \end{aligned}$$

bulunur. $\bar{\mathcal{K}}(\bar{\varphi}, \bar{r})$ cümlesi r nin durumlarına göre aşağıdaki gibi elde edilir.

- $0 < r \leq 1$ için

$$\bar{\mathcal{K}}(\bar{\varphi}, \bar{r}) = \{ \bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid \gamma = \varphi, |\gamma_1^* - \varphi_1^*| + |\gamma_2^* - \varphi_1^*| < r^* \}$$

dir.

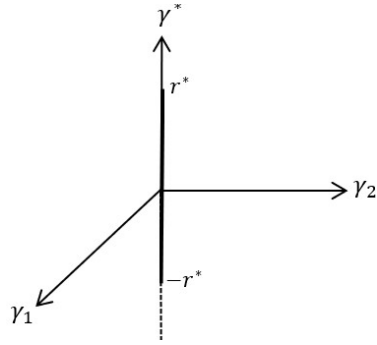
- $r > 1$ için

$$\bar{\mathcal{K}}(\bar{\varphi}, \bar{r}) = \{ \bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid \gamma \in \mathbb{R}^2, |\gamma_1^* - \varphi_1^*| + |\gamma_2^* - \varphi_1^*| < r^* \}$$

dir.

Orijin merkezli ve $\bar{r}$ yarıçaplı $\bar{\mathcal{K}}(\bar{0}, \bar{r})$ nin $\mathbb{R}^3$ deki geometrik modellemesini inceleyelim. $\bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2$ olmak üzere $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, $\gamma^* = (\gamma_1^*, 0)$ olduğunu farzedelim.

- $0 < r \leq 1$ için,



dir.

- $r > 1$ için;

$$\overline{B}(0; r) = \{ \bar{\gamma} \in \mathbb{D}^2 \mid \gamma \in \mathbb{R}^2, |\gamma_1^*| + |\gamma_2^*| < r^* \}$$

dir.

KAYNAKÇA

- [1] Clifford, W.K., Preliminary sketch of biquaternions. Proc. London Math. Soc.4, 381-395, 1873.
- [2] Study, E., Geometrie der dynamen. Druck und Verlag von B.G. Teubner, Leibzing, 1903.
- [3] Katelnikov, A.P., Screw calculus and some of its applications in geometry and mechanics. Annals of the Imperial University, Kazan, 1895.
- [4] McCarthy, J.M., An Introduction to Theoretical Kinematics. The MIT Press Cambridge, London, 1990.
- [5] Peterson, I., Euler's Bridges. Math Trek, 2006.
- [6] James, I.M., History of Topology. Oxford University, UK, 1999.
- [7] Şavk, O., SSCB'de Topoloji (1917-1958), Boğaziçi Üniversitesi, İstanbul, 2021.
- [8] Beckenbach, E.F., Bellman, R., Inequalities. Springer-Verlag, New York, 1961.
- [9] Hardy, G.E., Littlewood, J.E., Polya, G., Inequalities. Cambridge Univ. Press. Cambridge, UK, 1934.
- [10] Mitrinovic, D.S., Analytic Inequalities. Springer-Verlag, New York, 1970.
- [11] Munkres, J.R., Topology. The Second Edition, ISBN 0-13-181629-2, 2000.
- [12] Herman, J., Kucera, R., Simsa, J., Equations and Inequalities: Elementary Problems and Theorems in Algebra and Number Theory, Springer, 2000.
- [13] Hacısalıhoğlu, H.H., Lineer Cebir. Gazi Üniversitesi Basın-Yayın Yüksekokulu Matbaası Müdürlüğü, Ankara, 1985.
- [14] Sabuncuoğlu, A., Lineer Cebir. Nobel Akademik Yayıncılık Eğitim Danışmanlığı Tic. Ltd., Şti., Ankara, 2014.
- [15] Walenza, J.R., Linear algebra. Springer-Verlag, 1993.
- [16] Dimetberg, F.M., The screw calculus and its applications to mechanics. Foreign Technology Division, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1965.
- [17] Durmaz, O., Aktaş, B., Gündoğan, H., New approaches on dual space. Facta Uni-versitatis, Series: Mathematics and Informatics 35 (2): 437-458, 2020.

- [18] Weldkamp, G.R., On the use of dual numbers, vectors and matrices in instantaneous spatial kinematics. Mechanism and Machine Theory 2, 141-156, 1976.
- [19] Koçak, M., Genel Topolojiye Giriş ve Problem Çözümleri. Nisan Kitapevi Yayınları, Eskişehir, 2015.
- [20] Munkres, J.R., Topology, Prentice Hall Inc. Upper Saddle River, NJ 07458, USA, 2000.
- [21] Aktaş, B., Dual Uzayda Yüzeyler ve Üzerindeki Bazı Özel Eğriler, Doktora Tezi, Kırıkkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2020.
- [22] Durmaz, O., Dual Uzayın Temel Yapıları ve Diferensiyel Geometrisi, Doktora Tezi, Kırıkkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2022.
- [23] Akbar, A. Fisher, B., Khan, M., Common Fixed Point Theorems in Complex Valued Metric Spaces, Numerical Functional Analysis and Optimization, 32(3):243–253, 2011.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Nurcan İlayda Kaya

İletişim :

Eğitim

- Lise Mezuniyet: Özel Büyüteç Seviye Temel Lisesi, Haziran 2016
- Lisans Mezuniyet: Ankara Üniversitesi, Matematik Bölümü, Temmuz 2021
- Yüksek Lisans Mezuniyet: Kırıkkale Üniversitesi, FBE, Ekim 2024

Deneyimler

- Onur Okulları- Anadolu Lisesi (2022-2023)

Yayınlar

- Kaya, N.İ., Aktaş, B., Durmaz, O., Gündoğan, H., A Note On Dual Inequalities And Topologies, Kırıkkale Üniversitesi, 2024.