



**T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**RESONANT NONLİNEERLİĞE SAHİP NONLİNEER
SCHRÖDİNGER DENKLEMLERİNİN SOLİTON
ÇÖZÜMLERİ**

ALAATTİN AKHİLAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman: Prof. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU

AĞUSTOS – 2024

YOZGAT

T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİMDALI

RESONANT NONLİNEERLİĞE SAHİP NONLİNEER
SCHRÖDİNGER DENKLEMLERİNİN SOLİTON
ÇÖZÜMLERİ

ALAATTİN AKHİLAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman: Prof. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU

AĞUSTOS – 2024

YOZGAT



YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
LİSANSÜSTÜ TEZ ONAY FORMU

T.C.

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı Tezli Yüksek Lisans Programı öğrencisi Alaattin AKHİLAL'ın hazırladığı “**Resonant Nonlineerliğe Sahip Nonlineer Schrödinger Denklemlerinin Soliton Çözümleri**” başlıklı tezi ile ilgili tez savunma sınavı, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri gereğince 06/08/2024 Salı günü saat 11:00'de yapılmış, tezin onayına oy birliği ile karar verilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Akın Osman ATAGÜN

Jüri Üyesi : Prof. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU

(Danışman)

Jüri Üyesi : Doç. Dr. Mehmet EKİCİ

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun/...../..... tarih ve sayılı Enstitü Yönetim Kurulu Kararı ile onaylanmıştır.

...../...../.....

Prof. Dr. Ümit BUDAK

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan eder, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğini beyan ederim.

Alaattin AKHİLAL

06/08/2024

ÖN SÖZ

Tez çalışmamın planlanmasında, araştırılmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda ilgi ve desteğini esirgemeyen, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım sayın hocam Prof. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU'na, tezi inceleyerek değerli yorumlarıyla teze katkı sağlayan Doç. Dr. Mehmet EKİCİ hocama ve tüm eğitim hayatım boyunca benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen her zaman yanımda olan sevgili aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Alaattin AKHİLAL

06/08/2024

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

RESONANT NONLİNEERLİĞE SAHİP NONLİNEER SCHRÖDİNGER DENKLEMLERİNİN SOLİTON ÇÖZÜMLERİ

ALAATTİN AKHİLAL

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. ABDULLAH SÖNMEZOĞLU

Bu tezde, ilk olarak resonant nonlinear Schrödinger denklemi, genişletilmiş Jacobi fonksiyon açılımı metoduyla, iki farklı nonlinearlik formu ile araştırıldı. Bu denklemin koyu ve singüler soliton çözümleri elde edildi. Daha sonra ise resonant nonlinear Schrödinger denklemi dört farklı nonlinearlik formu ile incelenmiştir. Bu denklem ayrıca zamana bağlı katsayılarla da ele alınmıştır. Ele alınan denklemleri çözmek için en basit denklem yöntemi uygulanmış ve ardından tam 1-soliton çözümler elde edilmiştir. Bu yöntemin matematiksel fizikteki zamana bağlı katsayılarla sahip nonlinear gelişim denklemlerini çözmek için güçlü bir matematiksel teknik olduğu söylenebilir. En basit denklem yaklaşımı ile zamana bağlı katsayılı optik fiberlerde resonant nonlinear Schrödinger denkleminin soliton çözümleri incelenmiştir.

2024, viii + 39 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Solitonlar, Resonant nonlinear, Schrödinger denklemi, Genişletilmiş Jacobi eliptik fonksiyon açılımı, En basit denklem yaklaşımı.

ABSTRACT

MASTER THESIS

SOLUTIONS OF NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATIONS WITH RESONANT NONLINEARITY

ALAATTİN AKHİLAL

**YOZGAT BOZOK UNIVERSITY
SCHOOL OF GRADUATE STUDIES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS**

SUPERVISOR: PROF. DR. ABDULLAH SÖNMEZOĞLU

In this thesis, firstly, the resonant nonlinear Schrödinger equation was investigated using the extended Jacobi function expansion method with two different forms of nonlinearity. The dark and singular soliton solutions of this equation were obtained. Later, the resonant nonlinear Schrödinger equation was examined with four different forms of nonlinearity. This equation was also considered with time-dependent coefficients. The simplest equation method was applied to solve the addressed equations, and then exact 1-soliton solutions were obtained. It can be said that this method is a powerful mathematical technique for solving nonlinear evolution equations with time-dependent coefficients in mathematical physics. The soliton solutions of the resonant nonlinear Schrödinger equation in optical fibers with time-dependent coefficients were examined using the simplest equation approach.

2024, viii + 39 Pages

Keywords: Solitons, Resonant nonlinear Schrödinger equation, Extended Jacobi elliptic function expansion, The simplest equation approach

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TEZ ONAY FORMU	ii
TEZ BEYANI.....	iii
ÖNSÖZ.....	iv
ÖZET	v
ABSTRACT	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. RESONANT NONLİNEER SCHRÖDİNGER DENKLEMİ İLE SOLİTONLARIN ANALİTİK İNCELENMESİ.....	3
2.1. Kerr Yasası	3
2.2. Parabolik Yasa	7
3. EN BASİT DENKLEM YAKLAŞIMI İLE ZAMANA BAĞLI KATSAYILARA SAHİP OPTİK FİBERLERDEKİ RESONANT NONLİNEER SCHRÖDİNGER DENKLEMİNİN SOLİTON ÇÖZÜMLERİ.....	13
3.1.En Basit Denklem Yöntemi	13
3.2. Zamana Bağlı Katsayılarla Sahip Resonant Nonlinear Schrödinger Denklemi	16
3.2.1. Kerr Yasası	16
3.2.2. Kuvvet Yasası	21
3.2.3. Parabolik Yasa	27
3.2.4. Çift-Kuvvet Yasası	32
4. SONUÇLAR.....	35
5. KAYNAKLAR.....	36

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılacak simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
α	Alpha
β	Beta
γ	Gamma
δ	Delta
ε	Epsilon
η	Eta
θ	Theta
κ	Kappa
λ	Lambda
ξ	Ksi
ρ	Rho
σ	Sigma
τ	Tau
ψ	Psi
ω	Omega
ϕ	Phi
$ q $	q nun modülü
q^*	q nun eşleniği

Kısaltmalar	Açıklamalar
sn	Eliptik sinüs fonksiyonu
cn	Eliptik kosinüs fonksiyonu
dn	Üçüncü tip eliptik fonksiyon

1. GİRİŞ

Resonant nonlinear Schrödinger denklemi, çeşitli nonlinear sistemlerde (Eslami vd., 2013; Mirzazadeh vd., 2014; Triki vd 2012; Biswas, 2012) Madelung akışlar ve solitonların dinamikleri olarak tanımlanabilir. Son zamanlarda başlangıç integral metodu, (G'/G) -açılım metodu, en basit denklem yaklaşımı gibi resonant nonlinear Schrödinger denkleminin tam hareketli çözümler çıkarmak için birçok integrasyon şeması kullanıldı. Bu çalışmada, Resonant nonlinear Schrödinger denklemi üzerine genişletilmiş Jacobi eliptik fonksiyon açılımının (Huiqun, 2007) etkinliği ve uygulanabilirliği için araştırma yapıldı.

Resonant nonlinear Schrödinger denkleminin boyutsuz formu sistemlerde (Eslami vd., 2013; Mirzazadeh vd., 2014; Triki vd 2012; Biswas, 2012) de verilen ve bu çalışmada incelenecek olan aşağıdaki denklemdir:

$$i\psi_t + \alpha\psi_{xx} + \beta F(|\psi|^2)\psi + \gamma \left\{ \frac{|\psi|_{xx}}{|\psi|} \right\} \psi = 0 \quad (1.1)$$

Burada α , grup hız dağılımının katsayısı iken β nonlinearlik katsayısıdır ve son olarak γ , resonant nonlinearlik katsayısıdır.

Lineer olmayan gelişim denklemlerinin tam soliton çözümlerinin lineer olmayan dalga fenomenlerinin çalışmasında önemli bir rol oynadığı iyi bilinmektedir. (Lee ve Pashaev, 2007; Rapedius ve Korsch, 2009; Witthaut vd., 2005; Lee vd., 2007; Lee vd., 2013; Li ve Wang, 2007; Tiriki ve Wazwaz, 2009; Wazwaz, 2007; Kudryashov 2005; Kudryashov, 2005; Kudryashov 1990; Kudryashov, 1991; Kudryashov, 2010; Vitanov ve Dimitrova, 2010; Vitanov vd., 2010; Taghizade ve Mirzazadeh, 2012; Yildirim vd., 2012; Wazwaz, 2010; Yu vd., 2010; Zhao vd., 2005; Triki vd., 2012; Ma, 1996; Biswas, 2012; Triki vd., 2012;). Dalga fenomenleri, akışkan dinamiği, plazma, elastik ortamlar, optik lifler gibi alanlarda gözlemlenir. Son yıllarda, ansatz yöntemi (Lee vd., 2007; Rapedius vd., 2009; Witthaut vd., 2005; Lee vd., 2007; Lee vd., 2013) yardımcı basit diferansiyel denklem yöntemi (Li.,vd 2007; Tiriki.,2009), sinüs-kosinüs yöntemi (Wazwaz, 2007), en basit denklemler yöntemi (Kudryashov 2005; Kudryashov, 2005; Kudryashov 1990; Kudryashov, 1991; Kudryashov, 2010; Vitanov ve Dimitrova, 2010; Vitanov ve Dimitrova, 2010; Taghizade ve Mirzazadeh, 2012; Yildirim vd., 2012), Hirota'nın direkt yöntemi (Wazwaz, 2010; Yu vd., 2010), Jacobi eliptik fonksiyonları yöntemi (Zhao vd.,

2005) ve diğerkleri gibi Nonlinear gelişim denklemlerinin tam çözümlerini oluşturmak için birçok güçlü entegrasyon şeması geliştirilmiştir.

Modifiye edilmiş en basit denklemler yöntemi, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerinin (KDD'ler) tam çözümlerini bulmak için çok güçlü bir matematiksel tekniktir (Kudryashov 2005; Kudryashov, 2005; Kudryashov 1990; Kudryashov, 1991; Kudryashov, 2010). Bu faydalı yöntem, Vitanov ve diğerkleri tarafından (Vitanov ve Dimitrova, 2010; Vitanov vd., 2010) ve onların referanslarında başarıyla geliştirilmiştir. Değiştirilmiş en basit denklemler yöntemi (Vitanov ve Dimitrova, 2010; Vitanov vd., 2010; Taghizade ve Mirzazadeh, 2012; Yıldırım vd., 2012) tam çözümlerin $z = z(\xi)$ olarak ifade edilebileceği varsayımlarına dayanmaktadır; burada z , Bernoulli ve Riccati denklemlerini sağlayıp bunlar bilinen nonlinear basit diferansiyel denklemlerdir ve çözümleri temel fonksiyonlar terimleriyle ifade edilebilir.

Lineer olmayan Schrödinger denklemi, uygulamalı bilimler alanında solitonları, nonlinear optik liflerde solitonları, Bose–Einstein yoğunlaşmasının ortalama alan teorisinde solitonları, okyanus bilimlerinde korsan dalgalarını vb. birçok nonlinear fiziksel fenomeni açıklar. Bu çalışmada, nonlinear Schrödinger gelişim denklemleri zamana bağlı katsayılarla rezonanslı nonlinear Schrödinger denklemine genişletilmektedir. (Triki vd., 2012). Zaman bağımlı katsayılara sahip rezonant nonlinear Schrödinger denkleminin tam 1-soliton çözümleri, yalnız dalgacık ansatz yöntemi ve ilk integral yöntemiyle (Triki vd., 2012) elde edildi. Bu çalışmanın amacı, en basit denklemler yöntemini kullanarak zamana bağlı katsayılara sahip rezonant nonlinear Schrödinger denkleminin yeni tam 1-soliton çözümlerini çıkarmaktır. Bu yaklaşım, nonlinear denklemini başarıyla entegre etmek için kullanılan modern entegrasyon mimarilerinden biri olan ilk integral yönteminden oldukça farklıdır.

Bu çalışma şu şekilde düzenlenmiştir. 2. bölümde, ilk olarak rezonant nonlinear Schrödinger denklemi, genişletilmiş Jacobi fonksiyon açılım metoduyla, iki farklı nonlinearlik formu ile 3. bölümde ise rezonant nonlinear Schrödinger denklemi dört farklı nonlinearlik formu ile incelenmiştir.

2. REZONANS NONLINEER SCHRÖDİNGER DENKLEMİ İLE SOLİTONLARIN ANALİTİK İNCELENMESİ

2.1. Kerr Yasası

Kerr yasası nonlineerliği $F(s) = s$ olma durumudur. Bu nonlineerlik türü tipik olarak ışığın refraktif indeksi koyuluğa veya yoğunluğa orantılı olduğunda nonlineer fiber optikler veya su dalgaları bağlamında ortaya çıkar. Böylece (1.1) denklemi bu yasa ile düzenlenerek

$$i\psi_t + \alpha\psi_{xx} + \beta F(|\psi|^2)\psi + \gamma \left\{ \frac{|\psi|_{xx}}{|\psi|} \right\} \psi = 0 \quad (2.1)$$

elde edilir.

Kerr yasası nonlineerliği için kabul edilen genişletilmiş rezonant nonlineer Schrödinger denklemi aşağıdaki gibi verilir. (Ekici vd; 2017)

$$i\psi_t + \alpha\psi_{xx} + \beta|\psi|^2\psi + \gamma \left\{ \frac{|\psi|_{xx}}{|\psi|} \right\} \psi = 0 \quad (2.2)$$

$$\psi(x, t) = U(\xi)e^{i(-\kappa x + \omega t + \theta)}, \quad \xi = x + 2\alpha\kappa t \quad (2.3)$$

Hareketli dalga dönüşümü altında (2.2) denklemi

$$(\alpha + \gamma)U'' - (\omega + \alpha\kappa^2)U + \beta U^3 = 0 \quad (2.4)$$

denklemine dönüşür.

Gerçekten,

$$\psi_t = (2\alpha\kappa U' + i\omega U)e^{i(-\kappa x + \omega t + \theta)}, \quad i\psi_t = (-\omega U + 2\alpha\kappa i U')e^{i(-\kappa x + \omega t + \theta)}$$

$$\psi_x = (U' - i\kappa U)e^{i(-\kappa x + \omega t + \theta)}, \quad \alpha\psi_{xx} = \alpha(U'' - 2i\kappa U' - \kappa^2 U)e^{i(-\kappa x + \omega t + \theta)}$$

$$\beta|\psi|^2\psi = \beta U^3 e^{i(-\kappa x + \omega t + \theta)}, \quad \gamma \left\{ \frac{|\psi|_{xx}}{|\psi|} \right\} \psi = \gamma \left\{ \frac{U''}{U} \right\} U e^{i(-\kappa x + \omega t + \theta)} = \gamma U'' e^{i(-\kappa x + \omega t + \theta)}$$

olduğundan (2.2) denklemi

$$-\omega U + 2\alpha\kappa i U' + \alpha(U'' - 2i\kappa U' - \kappa^2 U) + \beta U^3 + \gamma U'' = 0$$

şeklini alır ve böylece,

$$(\alpha + \gamma)U'' - (\omega + \alpha\kappa^2)U + \beta U^3 = 0$$

denklemini elde edilir.

Genişletilmiş Jacobi eliptik fonksiyon açılım metoduyla soliton çözümler oluşturmak için (2.4) denklemi analiz edilecektir. Homojen balans metoduna göre (2.4) denklemi

$$U(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 sn\xi + \beta_1 sn^{-1}\xi = \alpha_0 + \alpha_1 sn\xi + \beta_1 ns\xi \quad (2.5)$$

formunda bir çözüme sahiptir. Burada α_0 , α_1 ve β_1 daha sonra belirlenecek sabitlerdir.

Gerçekten, genişletilmiş Jacobi eliptik fonksiyon açılım metodu göz önünde tutularak

$$U(\xi) = \sum_{i=0}^N (\alpha_i sn^i \xi + \beta_i sn^{-i} \xi)$$

olduğundan $O(U) = N$ dır. Ayrıca $cn\xi = \sqrt{1 - sn^2\xi}$ ve $dn\xi = \sqrt{1 - k^2 sn^2\xi}$ eşitliklerini kullanarak

$$U'(\xi) = \sum_{i=0}^N (i\alpha_i sn^{i-1}\xi cn\xi dn\xi - i\beta_i sn^{-i-1}\xi cn\xi dn\xi) \text{ denklemi için}$$

$$O(U') = N - 1 + 1 + 1 = N + 1$$

elde edilir.

Benzer düřünceyle $O(U'') = N + 2$ olarak belirlenebilir.

(2.4) denkleminde en yüksek mertebeden türev terimi ile en yüksek dereceden nonlinear terim dengelenerek,

$$O(U^3) = O(U'') \Rightarrow 3N = N + 2 \Rightarrow N = 1$$

elde edilir. O halde istenen zm

$$U(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 sn\xi + \beta_1 sn^{-1}\xi$$

şeklinde oluşur.

(2.5) denklemini (2.4) denkleminde yerine koyarak ve $sn\xi$ 'nin her bir kuvvetini sıfıra eşitleyerek bir nonlinear cebirsel denklem sistemi elde edilir ve bu sistem çözülerek istenen sonuçlar bulunur. Bunu gerçekleştirmek için aşağıdaki ifadeler oluşturulur.

$$U(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 sn\xi + \beta_1 sn^{-1}\xi \Rightarrow U'(\xi) = (\alpha_1 - \beta_1 sn^{-2}\xi)cn\xi dn\xi$$

$$U''(\xi) = 2\beta_1 sn^{-3}\xi cn^2\xi dn^2\xi - (\alpha_1 - \beta_1 sn^{-2}\xi)sn\xi dn^2\xi - k^2(\alpha_1 - \beta_1 sn^{-2}\xi)sn\xi cn^2\xi$$

$$= 2\beta_1 sn^{-3}\xi cn^2\xi dn^2\xi - (\alpha_1 - \beta_1 sn^{-2}\xi)(sn\xi dn^2\xi + k^2 sn\xi cn^2\xi)$$

$$= 2\beta_1 sn^{-3}\xi(1 - sn^2\xi)(1 - k^2 sn^2\xi) - (\alpha_1 - \beta_1 sn^{-2}\xi)[(1 + k^2)sn\xi - 2k^2 sn^3\xi]$$

$$\begin{aligned}
&= 2\beta_1 sn^{-3}\xi[1 - (1 + k^2)sn^2\xi + k^2sn^4\xi] - (\alpha_1 - \beta_1 sn^{-2}\xi)[(1 + k^2)sn\xi - 2k^2sn^3\xi] \\
&= 2\beta_1 sn^{-3}\xi - 2\beta_1(1 + k^2)sn^{-1}\xi + 2\beta_1 k^2 sn\xi - \alpha_1(1 + k^2)sn\xi \\
&\quad + 2\alpha_1 k^2 sn^3\xi + (1 + k^2)\beta_1 sn^{-1}\xi - 2k^2\beta_1 sn\xi \\
&= 2\alpha_1 k^2 sn^3\xi - \alpha_1(1 + k^2)sn\xi - \beta_1(1 + k^2)sn^{-1}\xi + 2\beta_1 sn^{-3}\xi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U^3(\xi) &= (\alpha_0 + \alpha_1 sn\xi + \beta_1 sn^{-1}\xi)^3 \\
&= \alpha_0^3 + 3\alpha_0^2(\alpha_1 sn\xi + \beta_1 sn^{-1}\xi) + 3\alpha_0(\alpha_1 sn\xi + \beta_1 sn^{-1}\xi)^2 + (\alpha_1 sn\xi + \beta_1 sn^{-1}\xi)^3 \\
&= \alpha_0^3 + 6\alpha_0\alpha_1\beta_1 + 3(\alpha_0^2\alpha_1 + \alpha_1^2\beta_1)sn\xi + 3(\alpha_0^2\beta_1 + \alpha_1\beta_1^2)sn^{-1}\xi + 3\alpha_0\beta_1^2 sn^{-2}\xi \\
&\quad + \beta_1^3 sn^{-3}\xi + 3\alpha_0\alpha_1^2 sn^2\xi + \alpha_1^3 sn^3\xi
\end{aligned}$$

Bu ifadeler (2.4) denkleminde yerine yazılarak

$$\begin{aligned}
&(\alpha + \gamma)[2\alpha_1 k^2 sn^3\xi - \alpha_1(1 + k^2)sn\xi - \beta_1(1 + k^2)sn^{-1}\xi + 2\beta_1 sn^{-3}\xi] \\
&- (\omega + \alpha\kappa^2)(\alpha_0 + \alpha_1 sn\xi + \beta_1 sn^{-1}\xi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\beta\alpha_0^3 + 6\alpha_0\alpha_1\beta_1\beta + 3\beta(\alpha_0^2\alpha_1 + \alpha_1^2\beta_1)sn\xi + 3\beta(\alpha_0^2\beta_1 + \alpha_1\beta_1^2)sn^{-1}\xi + 3\alpha_0\beta_1^2\beta sn^{-2}\xi \\
&+ \beta\beta_1^3 sn^{-3}\xi + 3\alpha_0\alpha_1^2\beta sn^2\xi + \alpha_1^3\beta sn^3\xi = 0
\end{aligned}$$

Gerekli düzenlemeyle

$$\begin{aligned}
&(\alpha + \gamma)(2\alpha_1 k^2 + \alpha_1^3\beta)sn^3\xi + 3\alpha_0\alpha_1^2\beta sn^2\xi \\
&+ [-\alpha_1(1 + k^2)(\alpha + \gamma) - \alpha_1(\omega + \alpha\kappa^2) + 3\beta(\alpha_0^2\alpha_1 + \alpha_1^2\beta_1)]sn\xi \\
&+ \beta\alpha_0^3 + 6\alpha_0\alpha_1\beta_1\beta + [-\beta_1(1 + k^2)(\alpha + \gamma) - \beta_1(\omega + \alpha\kappa^2) + 3\beta(\alpha_0^2\beta_1 + \alpha_1\beta_1^2)]sn^{-1}\xi \\
&+ 3\alpha_0\beta_1^2\beta sn^{-2}\xi + [2\beta_1(\alpha + \gamma) + \beta\beta_1^3]sn^{-3}\xi = 0
\end{aligned}$$

olup lineer bağımsız

$$\{sn^0, sn, sn^2, sn^3, sn^{-1}, sn^{-2}, sn^{-3}\}$$

kümesinden sn 'in her bir kuvvetinin katsayısı sıfır olacağından dolayı

$$(\alpha + \gamma)(2\alpha_1 k^2 + \alpha_1^3\beta) = 0$$

$$-\alpha_1(1 + k^2)(\alpha + \gamma) - \alpha_1(\omega + \alpha\kappa^2) + 3\beta(\alpha_0^2\alpha_1 + \alpha_1^2\beta_1) = 0$$

$$-\beta_1(1+k^2)(\alpha+\gamma) - \beta_1(\omega + \alpha\kappa^2) + 3\beta(\alpha_0^2\beta_1 + \alpha_1\beta_1^2) = 0$$

$$2\beta_1(\alpha+\gamma) + \beta\beta_1^3 = 0$$

$$\beta\alpha_0^3 + 6\alpha_0\alpha_1\beta_1\beta = 0$$

$$3\alpha_0\alpha_1^2\beta = 0$$

$$3\alpha_0\beta_1^2\beta = 0$$

elde edilir. Bu nonlinear cebirsel denklem sistemi çözüldüğünde aşağıdaki sonuçlar bulunur:

1.Durum:

$$\alpha_0 = 0, \beta_1 = 0, \alpha_1 = \pm \frac{ik\sqrt{2(\alpha+\gamma)}}{\sqrt{\beta}}, \omega = -\alpha\kappa^2 - (1+k^2)(\alpha+\gamma)$$

2.Durum:

$$\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 0, \beta_1 = \pm \frac{ik\sqrt{-2(\alpha+\gamma)}}{\sqrt{\beta}}, \omega = -\alpha\kappa^2 - (1+k^2)(\alpha+\gamma)$$

3.Durum:

$$\alpha_0 = 0, \alpha_1 = \frac{ik\sqrt{2(\alpha+\gamma)}}{\sqrt{\beta}}, \beta_1 = \pm \frac{ik\sqrt{-2(\alpha+\gamma)}}{\sqrt{\beta}},$$

$$\omega = -\alpha(1+k^2+\kappa^2) - \gamma(1+k^2) \pm 6ik\sqrt{-(\alpha+\gamma)^2}$$

Sonuç olarak Kerr yasası nonlinearliğe sahip rezonant nonlinear Schrödinger denkleminde aşağıdaki çözümler elde edilir:

Çözüm 1:

$$\psi(x, t) = \left\{ \pm \frac{ik\sqrt{2(\alpha+\gamma)}}{\sqrt{\beta}} sn(x + 2\alpha kt) \right\} e^{i(-\kappa x - [\alpha\kappa^2 + (1+k^2)(\alpha+\gamma)]t + \theta)} \quad (2.10)$$

Çözüm 2:

$$\psi(x, t) = \left\{ \pm \frac{\sqrt{-2(\alpha+\gamma)}}{\sqrt{\beta}} ns(x + 2\alpha kt) \right\} e^{i(-\kappa x - [\alpha\kappa^2 + (1+k^2)(\alpha+\gamma)]t + \theta)} \quad (2.11)$$

Çözüm 3:

$$\psi(x, t) = \left\{ \frac{ik\sqrt{2(\alpha+\gamma)}}{\sqrt{\beta}} sn(x + 2\alpha kt) \pm \frac{\sqrt{-2(\alpha+\gamma)}}{\sqrt{\beta}} ns(x + 2\alpha kt) \right\} \times e^{i(-\kappa x - [\alpha(1+k^2+\kappa^2) + \gamma(1+k^2) \pm 6ik\sqrt{-(\alpha+\gamma)^2}]t + \theta)} \quad (2.12)$$

Uyarı 1: (2.10)-(2.12) denklemlerinde k modülü 1 e yaklaştığında Kerr yasası nonlinearliğe sahip resonant nonlinear Schrödinger denkleminde soliter dalga çözümler aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\psi(x, t) = \left\{ \pm \frac{i\sqrt{2(\alpha+\gamma)}}{\sqrt{\beta}} \operatorname{th}(x + 2\alpha kt) \right\} e^{i(-\kappa x - [\alpha\kappa^2 + 2(\alpha+\gamma)]t + \theta)} \quad (2.13)$$

$$\psi(x, t) = \left\{ \pm \frac{\sqrt{-2(\alpha+\gamma)}}{\sqrt{\beta}} \operatorname{coth}(x + 2\alpha kt) \right\} e^{i(-\kappa x - [\alpha\kappa^2 + 2(\alpha+\gamma)]t + \theta)} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \psi(x, t) = & \left\{ \frac{i\sqrt{2(\alpha+\gamma)}}{\sqrt{\beta}} \operatorname{th}(x + 2\alpha kt) \pm \frac{\sqrt{-2(\alpha+\gamma)}}{\sqrt{\beta}} \operatorname{coth}(x + 2\alpha kt) \right\} \\ & \times e^{i(-\kappa x - [\alpha(2+\kappa^2) + 2\gamma \pm 6i\sqrt{-(\alpha+\gamma)^2}]t + \theta)} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Uyarı 2: (2.11)- (2.12) denklemlerinde k modülü 0'a yaklaştığında Kerr yasası nonlinearliğe sahip resonant nonlinear Schrödinger denkleminde trigonometrik fonksiyon çözümü aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\psi(x, t) = \left\{ \pm \frac{\sqrt{-2(\alpha+\gamma)}}{\sqrt{\beta}} \operatorname{csc}(x + 2\alpha kt) \right\} e^{i(-\kappa x - [\alpha + \gamma + \alpha\kappa^2]t + \theta)} \quad (2.16)$$

2.2. Parabolik Yasası

Parabolik yasası nonlinearliği için $F(s) = \beta s + \gamma s^2$ dır. Burada β ve γ genelde sabitlerdir. Böylesi nonlinearlik türü fiber optiklerde görülür. Bu durumda resonant nonlinear Schrödinger denklemi aşağıdaki gibi verilir. (Ekici vd; 2017):

$$i\psi_t + \alpha\psi_{xx} + \{\beta|\psi|^2 + \gamma|\psi|^4\}\psi + d \left\{ \frac{|\psi|_{xx}}{|\psi|} \right\} \psi = 0 \quad (2.17)$$

$$\psi(x, t) = U(\xi) e^{i(-\kappa x + \omega t + \theta)}, \quad \xi = x + 2\alpha kt \quad (2.18)$$

aynı hareketli dalga dönüşümü kullanılsın.

Hareketli dalga dönüşümü altında (2.18) denklemi, (2.17) denkleminde yerine konarak aşağıdaki adi diferansiyel denklem elde edilir:

$$(\alpha + d)U'' - (\omega + \alpha\kappa^2)U + \beta U^3 + \gamma U^5 = 0 \quad (2.19)$$

Gerçekten,

$$i\psi_t = (-\omega U + 2\alpha\kappa i U') e^{i(-\kappa x + \omega t + \theta)}$$

$$\alpha\psi_{xx} = \alpha(U'' - 2i\kappa U' - \kappa^2 U) e^{i(-\kappa x + \omega t + \theta)}$$

$$\beta|\psi|^2\psi = \beta U^3 e^{i(-\kappa x + \omega t + \theta)}, \gamma|\psi|^4\psi = \gamma U^5 e^{i(-\kappa x + \omega t + \theta)},$$

$$\gamma \left\{ \frac{|\psi|_{xx}}{|\psi|} \right\} \psi = \gamma \left\{ \frac{U''}{U} \right\} U e^{i(-\kappa x + \omega t + \theta)} = \gamma U'' e^{i(-\kappa x + \omega t + \theta)},$$

ifadeleri (2.17) denkleminde yerine yazılarak

$$-\omega U + 2\alpha\kappa i U' + \alpha(U'' - 2i\kappa U' - \kappa^2 U) + \beta U^3 + \gamma U^5 + dU'' = 0$$

ve böylece

$$(\alpha + d)U'' - (\omega + \alpha\kappa^2)U + \beta U^3 + \gamma U^5 = 0$$

denklemini elde edilir.

(2.19) denklemi,

$$U = V^{\frac{1}{2}} \tag{2.20}$$

Dönüşümü ile

$$(\alpha + d)(2VV'' + (V')^2) - 4(\omega + \alpha\kappa^2)V^2 + 4\beta V^3 + 4\gamma V^4 = 0 \tag{2.21}$$

denklemine indirgenir.

Gerçekten,

$$U' = \frac{1}{2} V^{-\frac{1}{2}} V', \quad U'' = -\frac{1}{4} V^{-\frac{3}{2}} (V')^2 + \frac{1}{2} V^{-\frac{1}{2}} V''$$

olduğundan (2.21) denklemi

$$(\alpha + d) \left[-\frac{1}{4} V^{-\frac{3}{2}} (V')^2 + \frac{1}{2} V^{-\frac{1}{2}} V'' \right] - 4(\omega + \alpha\kappa^2) V^{\frac{1}{2}} + \beta V^{\frac{3}{2}} + \gamma V^{\frac{5}{2}} = 0$$

şekline dönüşür. Bu denklem $V^{\frac{3}{2}}$ ile çarpılarak

$$(\alpha + d) \left[-\frac{1}{4} (V')^2 + \frac{1}{2} V V'' \right] - (\omega + \alpha\kappa^2) V^2 + \beta V^3 + \gamma V^4 = 0$$

$$(\alpha + d)[2V V'' - (V')^2] - 4(\omega + \alpha\kappa^2) V^2 + 4\beta V^3 + 4\gamma V^4 = 0$$

elde edilir.

Şimdi genişletilmiş Jacobi eliptik fonksiyon açılım metoduyla soliton çözümler oluşturmak için (2.21) denklemini analiz edilecektir. Homojen balans metoduna göre (2.21) denkleminde

V^4 ile $V V''$ veya V^4 ile $(V')^2$ balans edilerek

$$O(V^4) = O(V V'') \Rightarrow 4N = N + N + 2 \Rightarrow N = 1$$

$$O(V^4) = O((V')^2) \Rightarrow 4N = 2(N + 1) \Rightarrow N = 1$$

elde edilir. O halde istenen çözüm

$$V(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 \operatorname{sn} \xi + \beta_1 \operatorname{sn}^{-1} \xi$$

şeklinde oluşur. Burada α_0 , α_1 ve β_1 daha sonra belirlenecek sabitlerdir.

$$V(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 \operatorname{sn} \xi + \beta_1 \operatorname{sn}^{-1} \xi \Rightarrow V'(\xi) = (\alpha_1 - \beta_1 \operatorname{sn}^{-2} \xi) \operatorname{cn} \xi \operatorname{dn} \xi$$

$$(V')^2 = (\alpha_1^2 - 2\alpha_1\beta_1 \operatorname{sn}^{-2} \xi + \beta_1^2 \operatorname{sn}^{-4} \xi) \operatorname{cn}^2 \xi \operatorname{dn}^2 \xi$$

$$= (\alpha_1^2 - 2\alpha_1\beta_1 \operatorname{sn}^{-2} \xi + \beta_1^2 \operatorname{sn}^{-4} \xi) [1 - (k^2 + 1) \operatorname{sn}^2 \xi + k^2 \operatorname{sn}^4 \xi]$$

$$= (\alpha_1^2 - 2\alpha_1\beta_1 \operatorname{sn}^{-2} \xi + \beta_1^2 \operatorname{sn}^{-4} \xi) [1 - (k^2 + 1) \operatorname{sn}^2 \xi + k^2 \operatorname{sn}^4 \xi]$$

$$= \alpha_1^2 + 2\alpha_1\beta_1(k^2 + 1) + \beta_1^2 k^2 - [2\alpha_1\beta_1 + \beta_1^2(k^2 + 1)] \operatorname{sn}^{-2} \xi$$

$$- [\alpha_1^2(k^2 + 1) + 2\alpha_1\beta_1 k^2] \operatorname{sn}^2 \xi + \alpha_1^2 k^2 \operatorname{sn}^4 \xi + \beta_1^2 \operatorname{sn}^{-4} \xi$$

$$V''(\xi) = 2\alpha_1 k^2 \operatorname{sn}^3 \xi - \alpha_1(1 + k^2) \operatorname{sn} \xi - \beta_1(1 + k^2) \operatorname{sn}^{-1} \xi + 2\beta_1 \operatorname{sn}^{-3} \xi$$

$$V^4(\xi) = (\alpha_0 + \alpha_1 \operatorname{sn} \xi + \beta_1 \operatorname{sn}^{-1} \xi)^4$$

$$= \alpha_0^4 + 6\alpha_0^2 \alpha_1 \beta_1 + 3(\alpha_0^3 \alpha_1 + \alpha_0 \alpha_1^2 \beta_1) \operatorname{sn} \xi + 3(\alpha_0^3 \beta_1 + \alpha_0 \alpha_1 \beta_1^2) \operatorname{sn}^{-1} \xi + 3\alpha_0^2 \beta_1^2 \operatorname{sn}^{-2} \xi$$

$$+ \alpha_0 \beta_1^3 \operatorname{sn}^{-3} \xi + 3\alpha_0^2 \alpha_1^2 \operatorname{sn}^2 \xi + \alpha_0 \alpha_1^3 \operatorname{sn}^3 \xi + (\alpha_0^3 \alpha_1 + 6\alpha_0 \alpha_1^2 \beta_1) \operatorname{sn} \xi$$

$$+ 3(\alpha_0^2 \alpha_1^2 + \alpha_1^3 \beta_1) \operatorname{sn}^2 \xi + 3(\alpha_0^2 \alpha_1 \beta_1 + \alpha_1^2 \beta_1^2) + 3\alpha_0 \alpha_1 \beta_1^2 \operatorname{sn}^{-1} \xi + \alpha_1 \beta_1^3 \operatorname{sn}^{-2} \xi$$

$$+ 3\alpha_0 \alpha_1^3 \operatorname{sn}^3 \xi + \alpha_1^4 \operatorname{sn}^4 \xi + (\alpha_0^3 \beta_1 + 6\alpha_0 \alpha_1 \beta_1^2) \operatorname{sn}^{-1} \xi + 3(\alpha_0^2 \alpha_1 \beta_1 + \alpha_1^2 \beta_1^2)$$

$$+ 3(\alpha_0^2 \beta_1^2 + \alpha_1 \beta_1^3) \operatorname{sn}^{-2} \xi + 3\alpha_0 \beta_1^3 \operatorname{sn}^{-3} \xi + \beta_1^4 \operatorname{sn}^{-4} \xi + 3\alpha_0 \alpha_1^2 \beta_1 \operatorname{sn} \xi + \alpha_1^3 \beta_1 \operatorname{sn}^2 \xi,$$

$$V^4(\xi) = \alpha_0^4 + 12\alpha_0^2 \alpha_1 \beta_1 + 6\alpha_1^2 \beta_1^2 + (4\alpha_0^3 \alpha_1 + 12\alpha_0 \alpha_1^2 \beta_1) \operatorname{sn} \xi$$

$$+ (4\alpha_0^3 \beta_1 + 12\alpha_0 \alpha_1 \beta_1^2) \operatorname{sn}^{-1} \xi + (6\alpha_0^2 \beta_1^2 + 4\alpha_1 \beta_1^3) \operatorname{sn}^{-2} \xi + 4\alpha_0 \beta_1^3 \operatorname{sn}^{-3} \xi$$

$$+ (6\alpha_0^2 \alpha_1^2 + 4\alpha_1^3 \beta_1) \operatorname{sn}^2 \xi + 4\alpha_0 \alpha_1^3 \operatorname{sn}^3 \xi + \alpha_1^4 \operatorname{sn}^4 \xi + \beta_1^4 \operatorname{sn}^{-4} \xi$$

Bu ifadeler (2.21) denkleminde yerine yazılarak

$$\begin{aligned}
& 2(\alpha + d)[2\alpha_1 k^2 sn^3 \xi - \alpha_1(1 + k^2)sn\xi - \beta_1(1 + k^2)sn^{-1}\xi + 2\beta_1 sn^{-3}\xi] \\
& (\alpha_0 + \alpha_1 sn\xi + \beta_1 sn^{-1}\xi) \\
& -(\alpha + d)[\alpha_1^2 + 2\alpha_1\beta_1(k^2 + 1) + \beta_1^2 k^2] + (\alpha + d)[2\alpha_1\beta_1 + \beta_1^2(k^2 + 1)]sn^{-2}\xi \\
& +(\alpha + d)[\alpha_1^2(k^2 + 1) + 2\alpha_1\beta_1 k^2]sn^2\xi - (\alpha + d)\alpha_1^2 k^2 sn^4\xi - (\alpha + d)\beta_1^2 sn^{-4}\xi \\
& -4(\omega + \alpha\kappa^2)(\alpha_0^2 + \alpha_1^2 sn^2\xi + \beta_1^2 sn^{-2}\xi + 2\alpha_0\alpha_1 sn\xi + 2\alpha_0\beta_1 sn^{-1}\xi + 2\alpha_1\beta_1) \\
& +4\beta\alpha_0^3 + 24\alpha_0\alpha_1\beta_1\beta + 12\beta(\alpha_0^2\alpha_1 + \alpha_1^2\beta_1)sn\xi + 12\beta(\alpha_0^2\beta_1 + \alpha_1\beta_1^2)sn^{-1}\xi \\
& +12\alpha_0\beta_1^2\beta sn^{-2}\xi + 4\beta\beta_1^3 sn^{-3}\xi + 12\alpha_0\alpha_1^2\beta sn^2\xi + 4\alpha_1^3\beta sn^3\xi \\
& +4\gamma\alpha_0^4 + 48\gamma\alpha_0^2\alpha_1\beta_1 + 24\gamma\alpha_1^2\beta_1^2 + 4\gamma(4\alpha_0^3\alpha_1 + 12\alpha_0\alpha_1^2\beta_1)sn\xi \\
& +4\gamma(4\alpha_0^3\beta_1 + 12\alpha_0\alpha_1\beta_1^2)sn^{-1}\xi + 4\gamma(6\alpha_0^2\beta_1^2 + 4\alpha_1\beta_1^3)sn^{-2}\xi + 16\gamma\alpha_0\beta_1^3 sn^{-3}\xi \\
& +4\gamma(6\alpha_0^2\alpha_1^2 + 4\alpha_1^3\beta_1)sn^2\xi + 16\gamma\alpha_0\alpha_1^3 sn^3\xi + 4\gamma\alpha_1^4 sn^4\xi + 4\gamma\beta_1^4 sn^{-4}\xi = 0
\end{aligned}$$

gerekli düzenlemeyle

$$\begin{aligned}
& [4(\alpha + d)\alpha_1^2 k^2 + 4\gamma\alpha_1^4]sn^4\xi + [4(\alpha + d)\alpha_1\alpha_0 k^2 + 4\alpha_1^3\beta]sn^3\xi \\
& +[-2\alpha_1^2(1 + k^2)(\alpha + d) + 4(\alpha + d)\alpha_1\beta_1 k^2 - 4\alpha_1^2(\omega + \alpha\kappa^2) + 12\alpha_0\alpha_1^2\beta + \\
& +(\alpha + d)[\alpha_1^2(k^2 + 1) + 2\alpha_1\beta_1 k^2] + 4\gamma(6\alpha_0^2\alpha_1^2 + 4\alpha_1^3\beta_1)]sn^2\xi \\
& +[-2\alpha_0\alpha_1(1 + k^2)(\alpha + d) + 12\beta(\alpha_0^2\alpha_1 + \alpha_1^2\beta_1) - 8\alpha_0\alpha_1(\omega + \alpha\kappa^2) + 4\gamma(4\alpha_0^3\alpha_1 + \\
& 12\alpha_0\alpha_1^2\beta_1)]sn\xi + [-2\alpha_1\beta_1(1 + k^2)(\alpha + d) - (\alpha + d)[\alpha_1^2 + 2\alpha_1\beta_1(k^2 + 1) + \beta_1^2 k^2] - \\
& 4(\alpha_0^2 + 2\alpha_1\beta_1)(\omega + \alpha\kappa^2) + 4\beta\alpha_0^3 + 24\alpha_0\alpha_1\beta_1\beta + 4\gamma\alpha_0^4 + 48\gamma\alpha_0^2\alpha_1\beta_1 + 24\gamma\alpha_1^2\beta_1^2] \\
& +[2(\alpha + d)\beta_1 - 2(\alpha + d)\alpha_0\beta_1(1 + k^2) - 8\alpha_0\beta_1(\omega + \alpha\kappa^2) + 12\beta(\alpha_0^2\beta_1 + \alpha_1\beta_1^2) \\
& + 4\gamma(4\alpha_0^3\beta_1 + 12\alpha_0\alpha_1\beta_1^2)]sn^{-1}\xi \\
& +[-4(\alpha + d)\alpha_1\beta_1 - 2(\alpha + d)\beta_1^2(1 + k^2) + (\alpha + d)[2\alpha_1\beta_1 + \beta_1^2(k^2 + 1)] \\
& - 4\beta_1^2(\omega + \alpha\kappa^2) + 12\alpha_0\beta_1^2\beta + 4\gamma(6\alpha_0^2\beta_1^2 + 4\alpha_1\beta_1^3)]sn^{-2}\xi \\
& +[4(\alpha + d)\alpha_0\beta_1 + 4\beta\beta_1^3 + 16\gamma\alpha_0\beta_1^3]sn^{-3}\xi \\
& +[4(\alpha + d)\beta_1^2 - (\alpha + d)\beta_1^2 + 4\gamma\beta_1^4]sn^{-4}\xi
\end{aligned}$$

olup lineer bağımsız

$$\{sn^0, sn, sn^2, sn^3, sn^4, sn^{-1}, sn^{-2}, sn^{-3}, sn^{-4}\}$$

kümesinden sn^i 'in her bir kuvvetinin katsayısı sıfır olacağından dolayı

$$4(\alpha + d)\alpha_1^2 k^2 + 4\gamma\alpha_1^4 = 0$$

$$4(\alpha + d)\alpha_1\alpha_0 k^2 + 4\alpha_1^3\beta = 0$$

$$\begin{aligned} -2\alpha_1^2(1+k^2)(\alpha + d) + 4(\alpha + d)\alpha_1\beta_1 k^2 - 4\alpha_1^2(\omega + \alpha\kappa^2) + 12\alpha_0\alpha_1^2\beta \\ + (\alpha + d)[\alpha_1^2(k^2 + 1) + 2\alpha_1\beta_1 k^2] + 4\gamma(6\alpha_0^2\alpha_1^2 + 4\alpha_1^3\beta_1) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2\alpha_0\alpha_1(1+k^2)(\alpha + d) + 12\beta(\alpha_0^2\alpha_1 + \alpha_1^2\beta_1) - 8\alpha_0\alpha_1(\omega + \alpha\kappa^2) \\ + 4\gamma(4\alpha_0^3\alpha_1 + 12\alpha_0\alpha_1^2\beta_1) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2\alpha_1\beta_1(1+k^2)(\alpha + d) - (\alpha + d)[\alpha_1^2 + 2\alpha_1\beta_1(k^2 + 1) + \beta_1^2 k^2] - 4(\alpha_0^2 \\ + 2\alpha_1\beta_1)(\omega + \alpha\kappa^2) + 4\beta\alpha_0^3 + 24\alpha_0\alpha_1\beta_1\beta + 4\gamma\alpha_0^4 + 48\gamma\alpha_0^2\alpha_1\beta_1 \\ + 24\gamma\alpha_1^2\beta_1^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(\alpha + d)\beta_1 - 2(\alpha + d)\alpha_0\beta_1(1+k^2) - 8\alpha_0\beta_1(\omega + \alpha\kappa^2) + 12\beta(\alpha_0^2\beta_1 + \alpha_1\beta_1^2) \\ + 4\gamma(4\alpha_0^3\beta_1 + 12\alpha_0\alpha_1\beta_1^2) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -4(\alpha + d)\alpha_1\beta_1 - 2(\alpha + d)\beta_1^2(1+k^2) + (\alpha + d)[2\alpha_1\beta_1 + \beta_1^2(k^2 + 1)] \\ - 4\beta_1^2(\omega + \alpha\kappa^2) + 12\alpha_0\beta_1^2\beta + 4\gamma(6\alpha_0^2\beta_1^2 + 4\alpha_1\beta_1^3) = 0 \end{aligned}$$

$$+[4(\alpha + d)\alpha_0\beta_1 + 4\beta\beta_1^3 + 16\gamma\alpha_0\beta_1^3] = 0$$

$$+[4(\alpha + d)\beta_1^2 - (\alpha + d)\beta_1^2 + 4\gamma\beta_1^4] = 0$$

elde edilir. Bu nonlinear cebirsel denklem sistemi çözüldüğünde aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

1.Durum:

$$\alpha_0 = -\frac{3\beta}{8\gamma}, \quad \beta_1 = 0, \quad \alpha_1 = \pm \frac{3k\beta}{8\gamma}, \quad \omega = -\alpha\kappa^2 + \frac{3\beta^2(k^2-5)}{64}, \quad d = -\alpha - \frac{3\beta^2}{16}$$

2.Durum:

$$\alpha_0 = -\frac{3\beta}{8\gamma}, \quad \beta_1 = \pm \frac{3\beta}{8\gamma}, \quad \alpha_1 = 0, \quad \omega = -\alpha\kappa^2 + \frac{3\beta^2(k^2-5)}{64}, \quad d = -\alpha - \frac{3\beta^2}{16}$$

3.Durum:

$$\alpha_0 = -\frac{3\beta}{8\gamma}, \quad \beta_1 = \pm \frac{3\beta}{8\gamma(1+k)}, \quad \alpha_1 = \pm \frac{3k\beta}{8\gamma(1+k)}, \quad \omega = -\alpha\kappa^2 - \frac{3\beta^2(5k^2+6k+5)}{64(k^2+2k+1)},$$

$$d = -\alpha - \frac{3\beta^2}{16\gamma(k^2+2k+1)}$$

Sonuç olarak parabolik yasası nonlinearliğe sahip resonant nonlinear Schrödinger denkleminde aşağıdaki çözümler elde edilir:

Çözüm 1:

$$\psi(x, t) = \left\{ -\frac{3\beta}{8\gamma} \pm \frac{3\beta}{8\gamma} ksn(x + 2\alpha kt) \right\}^{\frac{1}{2}} e^{i\left(-\kappa x + \left[-\alpha\kappa^2 + \frac{3\beta^2(k^2-5)}{64\gamma}\right]t + \theta\right)} \quad (2.26)$$

Çözüm 2:

$$\psi(x, t) = \left\{ -\frac{3\beta}{8\gamma} \pm \frac{3\beta}{8\gamma} ns(x + 2\alpha kt) \right\}^{\frac{1}{2}} e^{i\left(-\kappa x + \left[-\alpha\kappa^2 + \frac{3\beta^2(k^2-5)}{64\gamma}\right]t + \theta\right)} \quad (2.27)$$

Çözüm 3:

$$\begin{aligned} \psi(x, t) = & \left\{ -\frac{3\beta}{8\gamma} \pm \frac{3\beta}{8\gamma(1+k)} ksn(x + 2\alpha kt) \pm \frac{3\beta}{8\gamma(1+k)} ns(x + 2\alpha kt) \right\}^{\frac{1}{2}} \\ & \times e^{i\left(-\kappa x + \left[-\alpha\kappa^2 - \frac{3\beta^2(5k^2+6k+5)}{64(k^2+2k+1)}\right]t + \theta\right)} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Uyarı 3: (2.26)-(2.28) denklemlerinde k modülü 1'e yaklaştığında parabolik yasası nonlinearliğe sahip resonant nonlinear Schrödinger denklemine sırasıyla soliter dalga çözümler aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\psi(x, t) = \left\{ -\frac{3\beta}{8\gamma} \pm \frac{3\beta}{8\gamma} th(x + 2\alpha kt) \right\}^{\frac{1}{2}} e^{i\left(-\kappa x + \left[-\alpha\kappa^2 - \frac{3\beta^2}{16\gamma}\right]t + \theta\right)} \quad (2.29)$$

$$\psi(x, t) = \left\{ -\frac{3\beta}{8\gamma} \pm \frac{3\beta}{8\gamma} coth(x + 2\alpha kt) \right\}^{\frac{1}{2}} e^{i\left(-\kappa x + \left[-\alpha\kappa^2 - \frac{3\beta^2}{16\gamma}\right]t + \theta\right)} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \psi(x, t) = & \left\{ -\frac{3\beta}{8\gamma} \pm \frac{3\beta}{16\gamma} th(x + 2\alpha kt) \pm \frac{3\beta}{16\gamma} coth(x + 2\alpha kt) \right\}^{\frac{1}{2}} \\ & \times e^{i\left(-\kappa x + \left[-\alpha\kappa^2 - \frac{3\beta^2}{16\gamma}\right]t + \theta\right)} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Uyarı 4: (2.27)-(2.28) denklemlerinde k modülü 0'a yaklaştığında parabolik yasası nonlinearliğe sahip resonant nonlinear Schrödinger denklemine trigonometrik fonksiyon çözüm aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\psi(x, t) = \left\{ -\frac{3\beta}{8\gamma} \pm \frac{3\beta}{8\gamma} csc(x + 2\alpha kt) \right\}^{\frac{1}{2}} e^{i\left(-\kappa x + \left[-\alpha\kappa^2 - \frac{15}{64\gamma}\right]t + \theta\right)} \quad (2.32)$$

3. EN BASİT DENKLEM YAKLAŞIMI İLE ZAMANA BAĞLI KATSAYILARA SAHİP OPTİK FİBERLERDEKİ RESONANT NONLINEER SCHRÖDİNGER DENKLEMİNİN SOLİTON ÇÖZÜMLERİ

3.1. En Basit Denklem Yöntemi

Yıldırım ve diğerleri (Yıldırım vd., 2012) en basit denklemler yöntemini kullanmak için temel adımları aşağıdaki şekilde özetlediler:

Adım-1: Zaman bağımlı katsayılara sahip bir nonlinear kısmi diferansiyel denklemi

$$P(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xt}, u_{xx}, \dots) = 0 \quad (3.1)$$

Şeklindeki ifadesi, bir hareket eden dalga değişkeni kullanılarak aşağıdaki adi diferansiyel denklemlere dönüştürülebilir.

$$Q(U, U', U'', U''', \dots) = 0 \quad (3.2)$$

Burada $u(x, t) = U(\xi)$ olarak bir hareket eden dalga değişkeni ve $\xi = x - v(t)t$, $U = U(\xi)$ bilinmeyen bir fonksiyondur. Q , U ve onun türevleri içeren bir polinomdur. Eğer tüm terimler türevler içeriyorsa o zaman (3.2) denklemi entegre edilir ve entegrasyon sabitleri sıfır kabul edilir.

Adım-2: En basit denklem yönteminin temel fikri (Vitanov ve Dimitrova, 2010; Vitanov vd., 2010; Taghizade ve Mirzazadeh, 2012; Yıldırım vd., 2012;) (3.2) denklemin çözümlerini $U(\xi)$ sonlu bir seri içinde genişletmektir.

$$U(\xi) = \sum_{i=0}^N a_i z^i \quad (3.3)$$

Burada, a_i katsayıları ξ ' den bağımsızdır ve $z = z(\xi)$ bazı adi diferansiyel denklemleri sağlayan fonksiyonlardır.

Bu adi diferansiyel denklemler en basit denklemler olarak adlandırılır. En basit denklem, (3.2) denkleminin daha düşük bir mertebeye sahip olduğu ve bu denklemin genel çözümünün bulunduğu (veya genel çözümün nasıl bulunacağını bildiğimiz veya en azından bu denklemin bazı özel çözümlerini bildiğimiz) karakterize edilir. Bu, (3.2) denkleminin

tam çözümlerinin en basit denklemin genel çözümü $z = z(\xi)$ için (3.3) içinde bir sonlu seri ile sunulabileceği anlamına gelir.

Literatürde kullanılan en basit denklemlerden örnekler olarak; Riccati denklemi, Jacobi eliptik fonksiyonu için denklem ve Weierstrass eliptik fonksiyonu için denklemi sayılabilir.

Bu çalışmada, en basit denklem olarak Riccati denklemi kullanılmaktadır.

$$\frac{dz}{d\xi} = k + az(\xi) + bz^2(\xi), \quad (3.4)$$

Burada k, a ve b, ξ 'ye bağlı olmayan bağımsız değişkenlerdir. $k = 0$ ve $a, b \neq 0$ olduğunda, Bernoulli denklemi elde edilir.

$$\frac{dz}{d\xi} = az(\xi) + bz^2(\xi), \quad (3.5)$$

Bernoulli denklemi kullanımının (3.1) denkleminin yeni hareket dalgası ve dalga önü çözümlerine yol açtığı bulunur. (3.5) denklemi, aşağıdaki tam çözümleri kabul eder.

$$Z(\xi) = \frac{a \exp(a(\xi + \xi_0))}{1 - b \exp(a(\xi + \xi_0))} \quad (3.6)$$

$a > 0, b < 0$ durumu için

ve

$$Z(\xi) = \frac{a \exp(a(\xi + \xi_0))}{1 + b \exp(a(\xi + \xi_0))} \quad (3.7)$$

$a < 0, b > 0$ olduğu durumda

ξ_0 bir entegrasyon sabiti olmak üzere $k = B \neq 0$ ve

$a = 0, b = A \neq 0$ olduğunda Riccati denklemi elde edilir,

$$\frac{dz}{d\xi} = B + Az^2(\xi) \quad (3.8)$$

(3.8) denklemi aşağıdaki tam çözümleri kabul etmektedir. (Ma, 1996):

$AB < 0$ olduğunda

$$Z(\xi) = -\frac{(-AB)^{\frac{1}{2}}}{A} \tanh((-AB)^{\frac{1}{2}}(\xi + \xi_0)) \quad (3.9)$$

$$Z(\xi) = -\frac{(-AB)^{\frac{1}{2}}}{A} \coth((-AB)^{\frac{1}{2}}(\xi + \xi_0))$$

$AB > 0$ olduğunda

$$Z(\xi) = \frac{(-AB)^{\frac{1}{2}}}{A} \tan((AB)^{\frac{1}{2}}(\xi + \xi_0)) \quad (3.10)$$

$$Z(\xi) = -\frac{(-AB)^{\frac{1}{2}}}{A} \cot((AB)^{\frac{1}{2}}(\xi + \xi_0))$$

Adım-3: (3.3) denklemini (3.5) denklemi ile (3.2) denkleminde yerine konulduğunda, (3.2) denkleminin sol tarafı $z(\xi)$ içeren bir polinoma dönüşür. Polinomun her katsayısını sıfıra eşitleyerek $a_i, a, b, c(t)$ için bir cebirsel denklem sistemi sağlanır.

Adım-4: Adım 3'te elde edilen cebirsel denklemleri çözerek ve sonuçları (3.3) denkleminde yerine koyarak (3.1) denklemi için tam hareket dalga çözümleri elde edilir.

Not 1: N , genellikle belirlenecek olan pozitif bir tamsayıdır. N parametresini belirlemek için genellikle elde edilen denklemin en yüksek dereceli türev terimlerini, en yüksek dereceli nonlinear terimlerle dengelenir.

Not 2: (3.5) denkleminde $a = A$ ve $b = -1$ olduğunda Bernoulli denklemi elde edilir.

$$\frac{dz}{d\xi} = Az(\xi) + z^2(\xi) \quad (3.11)$$

(3.11) denklemi aşağıdaki tam çözümleri kabul etmektedir.

$A > 0$ olduğunda

$$z(\xi) = \frac{A}{2} \left\{ 1 + \tanh\left(\frac{A}{2}(\xi + \xi_0)\right) \right\} \quad (3.12)$$

ve

$A < 0$ olduğunda

$$z(\xi) = \frac{A}{2} \left\{ 1 - \tanh\left(\frac{A}{2}(\xi + \xi_0)\right) \right\} \quad (3.13)$$

elde edilir.

3.2. Zamana Bağlı Katsayılara Sahip Resonant Nonlinear Schrödinger Denklemi

Bu bölümde zamana bağlı katsayılarla resonant nonlinear Schrödinger denklemini çözmek için en basit denklem yöntemi uygulanır. (Triki vd., 2012;)

$$i\psi_t + \alpha(t)\psi_{xx} + \beta(t)F(|\psi|^2)\psi + \gamma(t)\left\{\frac{|\psi|_{xx}}{|\psi|}\right\}\psi = 0 \quad (3.14)$$

3.2.1. Kerr Yasası

Kerr yasasının nonlinearlik durumu $F(s) = s$ olduğunda ortaya çıkar. Bu tür nonlinearlik durumu tipik olarak su dalgaları veya nonlinear fiber optik bağlamında ışığın kırılma indisinin yoğunlukla orantılı olduğu durumlarda ortaya çıkar. Kerr yasası nonlinearlik durumu için, zamanla değişen katsayılara sahip genelleştirilmiş resonant nonlinear Schrödinger denklemi aşağıdaki gibi verilir.

$$i\psi_t + \alpha(t)\psi_{xx} + \beta(t)F(|\psi|^2)\psi + \gamma(t)\left\{\frac{|\psi|_{xx}}{|\psi|}\right\}\psi = 0 \quad (3.15)$$

Aşağıdaki hareketli dalga dönüşümü altında

$$\psi(x, t) = U(\xi)e^{i(-\kappa x + \omega(t)t)}, \quad \xi = x + 2K \int_0^t \alpha(t) dt \quad (3.16)$$

$$(\alpha(t) + \gamma(t))U'' - \left(t \frac{dw(t)}{dt} + w(t) + K^2 \alpha(t)\right)U + \beta(t)U^3 = 0 \quad (3.17)$$

denklemini elde edilir.

(3.17) denkleminin çözümleri için aşağıdaki dönüşüm yapılır:

$$U(\xi) = \sum_{i=0}^N a_i z^i, \quad a_N \neq 0 \quad (3.18)$$

Burada a_i , t 'nin belirlenen bazı fonksiyonlarıdır. N , ansatzı (3.18) denklemini (3.17)'ye yerleştirildikten sonra en yüksek dereceli türev terimini en yüksek dereceli nonlinear terimle dengeleyerek belirlenebilen pozitif bir tamsayıdır. Burada z , (3.5) denklemini sağlar. (3.17) denkleminde U'' ile U^3 ile dengelenmesi:

$$N + 2 = 3N$$

eşitliğini sağlar. Böylece

$$N = 1 \text{ dir.}$$

Bu, (3.18) denkleminde $U(\xi)$ seçiminin aşağıdaki gibi olduğunu göstermektedir:

$$U(\xi) = a_0 + a_1 z(\xi) \quad (3.19)$$

(3.19) denklemi (3.11) denklemi ile (3.17) denkleminde yerine yazılarak ve sonra z^j ($j = 3, 2, 1, 0$)'ın katsayılarını sıfıra eşitleyerek $a_0, a_1, \kappa, \omega(t), a$ ve b 'leri içeren bir cebirsel denklem seti elde edilir.

z^3 katsayısı:

$$2(\alpha(t) + \gamma(t))a_1 b^2 + \beta(t)a_1^3 = 0$$

z^2 katsayısı:

$$3(\alpha(t) + \gamma(t))aba_1 + 3\beta(t)a_0 a_1^2 = 0$$

z katsayısı:

$$(\alpha(t) + \gamma(t))a^2 a_1 + 3\beta(t)a_0^2 a_1 - \left(t \frac{d\omega(t)}{dt} + \omega(t) + \kappa^2 \alpha(t) \right) a_1 = 0$$

z^0 katsayısı:

$$\beta(t)a_0^3 - \left(t \frac{d\omega(t)}{dt} + \omega(t) + \kappa^2 \alpha(t) \right) a_0 = 0 \quad (3.20)$$

(3.20) denklem sisteminin çözülmesi aşağıdaki sonuçları verir.

$$a_0 = \mp \frac{a}{2} \left(-\frac{2(\alpha(t) + \gamma(t))}{\beta(t)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad b = \mp \frac{a_1}{2} \left(-\frac{2\beta(t)}{\alpha(t) + \gamma(t)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\omega(t) = -\frac{1}{t} \int_0^t \left(\kappa^2 \alpha(t) + \frac{a^2}{2} (\alpha(t) + \gamma(t)) \right) dt \quad (3.21)$$

Burada κ, a ve a_1 keyfi sabitlerdir. Bu nedenle, (3.5) denklemi ve (3.19) denkleminin (3.6) - (3.7) çözümlerini kullanarak (3.17) denkleminin aşağıdaki tam çözümü elde edilir.

$$U(\xi) = \pm \left(\frac{a}{2} \left(-\frac{2(\alpha(t) + \gamma(t))}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{2(\alpha(t) + \gamma(t))^{\frac{1}{2}} a a_1 \exp(a(\xi + \xi_0))}{2((\alpha(t) + \gamma(t))^{\frac{1}{2}} \pm a_1 (-2\beta(t))^{\frac{1}{2}} \exp(a(\xi + \xi_0)))} \right) \quad (3.22)$$

O halde (3.15) denkleminin tam hareketli dalga çözümü aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\psi(x, y) =$$

$$\begin{aligned} & \pm \left(\frac{a}{2} \left(-\frac{2(\alpha(t) + \gamma(t))}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\ & \left. - \frac{2(\alpha(t) + \gamma(t))^{\frac{1}{2}} a a_1 \exp \left(a \left(x + 2K \int_0^t \alpha(t) dt + \xi_0 \right) \right)}{2((\alpha(t) + \gamma(t))^{\frac{1}{2}} \pm a_1(-2\beta(t))^{\frac{1}{2}} \exp(a(x + 2K \int_0^t \alpha(t) dt + \xi_0)))} \right) \\ & \times \exp \left[i \left(-\kappa x - \int_0^t \left\{ K^2 \alpha(t) + \frac{a^2}{2} (\alpha(t) + \gamma(t)) \right\} dt \right) \right] \end{aligned} \quad (3.23)$$

(3.11) denklemi ile birlikte (3.19) denklemini (3.17) denkleminde yerine koyarak ve z'nin kuvvetlerinin tüm katsayılarını sıfır olarak düzenleyerek nonlineer cebirsel denklem sistemi elde edilir ve bunu çözerek aşağıdaki sonuçlar bulunur:

$$\begin{aligned} a_0 &= \mp A \left(-\frac{(\alpha(t) + \gamma(t))}{2\beta(t)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad a_1 = \mp \frac{a_1}{2} \left(-\frac{2(\alpha(t) + \gamma(t))}{\beta(t)} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \omega(t) &= -\frac{1}{t} \int_0^t \left(\kappa^2 \alpha(t) + \frac{A^2}{2} (\alpha(t) + \gamma(t)) \right) dt \end{aligned} \quad (3.24)$$

burada κ ve A keyfi sabitlerdir.

Bu nedenle (3.11) denkleminin (3.13) çözümü ve (3.19) denklemini kullanarak (3.17) denkleminin aşağıdaki tam çözümü bulunur.

$$U(\xi) = \pm A \left(-\frac{(\alpha(t) + \gamma(t))}{2\beta(t)} \right)^{\frac{1}{2}} \tanh \left(\frac{A}{2} (\xi + \xi_0) \right) \quad (3.25)$$

O halde (3.15) denkleminin tam çözümü aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \pm A \left(-\frac{(\alpha(t) + \gamma(t))}{2\beta(t)} \right)^{\frac{1}{2}} \times \tanh \left(\frac{A}{2} \left(x + 2K \int_0^t \alpha(t) dt + \xi_0 \right) \right) \\ &\times \exp \left[i \left(-\kappa x - \int_0^t \left\{ K^2 \alpha(t) + \frac{A^2}{2} (\alpha(t) + \gamma(t)) \right\} dt \right) \right] \end{aligned} \quad (3.26)$$

(3.19) denklemini (3.18) denklemiyle birlikte (3.17) denkleminde yerine koyarak, z 'nin katsayılarını düzenleyip elde edilen sistem çözülerek aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$$a_0 = 0, \quad A = \mp \frac{a_1}{2} \left(-\frac{2\beta(t)}{\alpha(t) + \gamma(t)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\omega(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \left(-\kappa^2 \alpha(t) \pm B a_1 \left(-2\beta(t)(\alpha(t) + \gamma(t)) \right)^{\frac{1}{2}} \right) dt \quad (3.27)$$

Burada, κ , B ve a_1 keyfi sabitlerdir. Böylece, (3.8) denkleminin (3.9)-(3.10) çözümleri (3.19) kullanılarak, (3.17) denkleminin tam çözümleri elde edilir ve ardından Kerr yasası nonlineerliği ile değişken katsayılı resonant nonlineer Schrödinger denkleminin tam çözümleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

(1) Koyu soliton çözümü

$$\psi(x, t) = - \left(\pm \frac{A_0 \left(-2\beta(t)(\alpha(t) + \gamma(t)) \right)^{\frac{1}{2}}}{\beta(t)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times \exp \left[i \left(-\kappa x - \int_0^t \left\{ K^2 \alpha(t) \pm A_0 \left(-2\beta(t)(\alpha(t) + \gamma(t)) \right)^{\frac{1}{2}} \right\} dt \right) \right]$$

$$\times \tanh \left(\left(\pm \frac{A_0 \left(-2\beta(t)(\alpha(t) + \gamma(t)) \right)^{\frac{1}{2}}}{2(\alpha(t) + \gamma(t))} \right)^{1/2} \right)$$

$$\times \left(x + 2\kappa \int_0^t \alpha(t) dt + \xi_0 \right) \quad (3.28)$$

Burada $A_0 = B a_1$ dir.

(2) Tekil soliton çözümü

$$\begin{aligned}
\psi(x, t) = & - \left(\pm \frac{A_0 \left(-2\beta(t)(\alpha(t) + \gamma(t)) \right)^{\frac{1}{2}}}{\beta(t)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \times \exp \left[i \left(-\kappa x - \int_0^t \left\{ K^2 \alpha(t) \pm A_0 \left(-2\beta(t)(\alpha(t) + \gamma(t)) \right)^{\frac{1}{2}} \right\} dt \right) \right] \\
& \times \coth \left(\left(\pm \frac{A_0 \left(-2\beta(t)(\alpha(t) + \gamma(t)) \right)^{\frac{1}{2}}}{2(\alpha(t) + \gamma(t))} \right)^{1/2} \right. \\
& \left. \times \left(x + 2\kappa \int_0^t \alpha(t) dt + \xi_0 \right) \right) \quad (3.29)
\end{aligned}$$

Burada $A_0 = Ba_1$ dir.

(3) Periyodik tekil çözümler

$$\begin{aligned}
\psi(x, t) = & \left(\pm \frac{A_0 \left(-2\beta(t)(\alpha(t) + \gamma(t)) \right)^{\frac{1}{2}}}{\beta(t)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \times \exp \left[i \left(-\kappa x - \int_0^t \left\{ K^2 \alpha(t) \pm A_0 \left(-2\beta(t)(\alpha(t) + \gamma(t)) \right)^{\frac{1}{2}} \right\} dt \right) \right] \\
& \times \tan \left(\left(\pm \frac{A_0 \left(-2\beta(t)(\alpha(t) + \gamma(t)) \right)^{\frac{1}{2}}}{2(\alpha(t) + \gamma(t))} \right)^{1/2} \right. \\
& \left. \times \left(x + 2\kappa \int_0^t \alpha(t) dt + \xi_0 \right) \right) \quad (3.30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi(x, t) = & - \left(\pm \frac{A_0 \left(-2\beta(t)(\alpha(t) + \gamma(t)) \right)^{\frac{1}{2}}}{\beta(t)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \times \exp \left[i \left(-\kappa x - \int_0^t \left\{ K^2 \alpha(t) \pm A_0 \left(-2\beta(t)(\alpha(t) + \gamma(t)) \right)^{\frac{1}{2}} \right\} dt \right) \right] \\
& \times \cot \left(\left(\pm \frac{A_0 \left(-2\beta(t)(\alpha(t) + \gamma(t)) \right)^{\frac{1}{2}}}{2(\alpha(t) + \gamma(t))} \right)^{1/2} \right. \\
& \left. \times \left(x + 2\kappa \int_0^t \alpha(t) dt + \xi_0 \right) \right) \quad (3.31)
\end{aligned}$$

Burada $A_0 = Ba_1$ dir.

(4) Rasyonel çözüm

$$\begin{aligned}
\psi(x, t) &= \mp \frac{a_1}{2} \left(-\frac{2(\alpha(t) + \gamma(t))}{\beta(t)} \right)^{\frac{1}{2}} \times \exp \left[i \left(-\kappa x - K^2 \int_0^t \alpha(t) dt \right) \right] \\
&\times \frac{1}{x + 2\kappa \int_0^t \alpha(t) dt + \xi_0} \quad (3.32)
\end{aligned}$$

Triki ve diğerlerinin sonuçlarıyla (Triki vd., 2012) ve Eslami ve diğerlerinin (Eslami vd., 2014) sonuçları karşılaştırıldığında bazı sonuçların yeni olduğu görülebilir.

3.2.2. Kuvvet Yasası

Kuvvet yasası nonlinearliği, $F(s) = s^m$ olduğunda ortaya çıkar; burada parametre m nonlinearlik parametresi olarak adlandırılır.

Bu tür bir yasa; plazma fiziği, türbülans teorisi ve zaman zaman nonlinearlik fiber optiklerin durumunda ortaya çıkar. Ancak esas odaklanma tekil noktasını ve soliton

çöküşünü önlemek için $0 < m < 2$ olmalıdır. (Triki vd., 2012) Kuvvet yasası nonlinearliği için resonant nonlinear Schrödinger denklemi aşağıdaki gibidir:

$$i\psi_t + \alpha(t)\psi_{xx} + \beta(t)F(|\psi|^2)\psi + \gamma(t)\left\{\frac{|\psi|_{xx}}{|\psi|}\right\}\psi = 0 \quad (3.33)$$

Yukarıdaki model için bir soliton çözümünü ararken aynı dalga dönüşümünü kullanılır.

$$\psi(x, t) = U(\xi)e^{i(-\kappa x + \omega(t)t)}, \quad \xi = x + 2K \int_0^t \alpha(t) dt \quad (3.34)$$

(3.34) denklemini (3.33) denkleminde yerine yazıldığında bir adi diferansiyel denklem elde edilir:

$$(\alpha(t) + \gamma(t))U'' - \left(t \frac{dw(t)}{dt} + w(t) + K^2\alpha(t)\right)U + \beta(t)U^{2m+1} = 0 \quad (3.35)$$

(3.35) denkleminde U'' ile U^{2m+1} arasında denge kurulduğunda, $N = \frac{1}{m}$ olduğu bulunur.

Analitik bir çözüm elde etmek için (3.35)'te $U = V^{1/2m}$ dönüşümünü kullanarak aşağıdaki denklem bulunur.

$$(\alpha(t) + \gamma(t))((1 - 2m)(V')^2 + 2mVV'') - 4\left(t \frac{dw(t)}{dt} + w(t) + K^2\alpha(t)\right)m^2V^2 + 4\beta(t)m^2V^3 = 0 \quad (3.36)$$

(3.36) denkleminin çözümlerinin z 'ye bağlı bir polinom olarak ifade edilebileceği varsayalım

$$U(\xi) = \sum_{i=0}^N a_i z^i \quad (3.37)$$

Burada a_i , t 'nin belirli fonksiyonları olup N , ansatz (3.37) denklemini (3.36) denkleminde yerine koyduktan sonra en yüksek dereceli türev terimini en yüksek dereceli nonlinear terimle dengeleyerek belirlenebilen pozitif bir tam sayıdır. Burada z , (3.5) denklemini sağlar. (3.36) denkleminde VV'' ve V^3 terimlerinin derecelerini dengeleyerek, $N = 2$ olduğu bulunur. Dolayısıyla; (3.37) denklemi aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir:

$$V(\xi) = a_0 + a_1 Z(\xi) + a_2 z^2(\xi) \quad (3.38)$$

a_0, a_1 ve a_2 belirlenecek olan t 'nin belirli fonksiyonlarıdır. (3.38) denklemini ile (3.5) denklemi birlikte (3.36) denkleminde yerine koyarak ve z 'nin katsayılarını düzenleyerek ve bu katsayıları sıfıra eşitleyerek aşağıdaki sonuçlar bulunur.

Z^6 katsayısı

$$4(\alpha(t) + \gamma(t))(1 - 2m)a_2^2b^2 + 12m(\alpha(t) + \gamma(t))a_2^2b^2 \\ + 4\beta(t)m^2a_3^2 = 0$$

Z^5 katsayısı

$$8(\alpha(t) + \gamma(t))(1 - 2m)aba_2^2 \\ + 20m(\alpha(t) + \gamma(t))aba_2^2 \\ + 12\beta(t)m^2a_1a_2^2 \\ + 4(\alpha(t) + \gamma(t))(1 - 2m)b^2a_1a_2 \\ + 16m(\alpha(t) + \gamma(t))(1 - 2m)b^2a_1a_2 = 0,$$

Z^4 katsayısı

$$4(\alpha(t) + \gamma(t))(1 - 2m)a^2a_2^2 + 8m(\alpha(t) + \gamma(t))(1 - 2m)a^2a_2^2 \\ - 4\left(t\frac{dw(t)}{dt} + w(t) + K^2\alpha(t)\right)m^2a_2^2 \\ + 12\beta(t)m^2a_0a_2^2 + 8(\alpha(t) + \gamma(t))(1 - 2m)aba_1a_2 \\ + 26m(\alpha(t) + \gamma(t))aba_1a_2 + 12m(\alpha(t) + \gamma(t))b^2a_0a_2 \\ + 12\beta(t)m^2a_1^2a_2 + (\alpha(t) + \gamma(t))(1 - 2m)b^2a_1^2 \\ + 4m(\alpha(t) + \gamma(t))b^2a_1^2 = 0,$$

Z^3 katsayısı

$$20m(\alpha(t) + \gamma(t))aba_0a_2 + 10m(\alpha(t) + \gamma(t))a^2a_1a_2 \\ - 8\left(t\frac{dw(t)}{dt} + w(t) + K^2\alpha(t)\right)m^2a_1a_2 \\ + 4(\alpha(t) + \gamma(t))(1 - 2m)a^2a_1a_2 + 24\beta(t)m^2a_0a_1a_2 \\ + 4m(\alpha(t) + \gamma(t))b^2a_0a_1 + 6m(\alpha(t) + \gamma(t))aba_1^2 \\ + 4\beta(t)m^2a_1^3 + 2(\alpha(t) + \gamma(t))(1 - 2m)aba_1^2 = 0$$

Z^2 katsayısı

$$\begin{aligned}
& 4(\alpha(t) + \gamma(t))a^2a_0a_2 + 12\beta(t)m^2a_0^2a^2a_2 \\
& -8\left(t\frac{dw(t)}{dt} + w(t) + K^2\alpha(t)\right)m^2a_0a_2 \\
& +6m(\alpha(t) + \gamma(t))aba_0a_1 + 2m(\alpha(t) + \gamma(t))a^2a_1^2 \\
& + (\alpha(t) + \gamma(t))(1 - 2m)a^2a_1^2 + 12\beta(t)m^2a_0a_1^2 \\
& -4\left(t\frac{dw(t)}{dt} + w(t) + K^2\alpha(t)\right)m^2a_1^2 = 0
\end{aligned}$$

Z katsayısı

$$\begin{aligned}
& 2m(\alpha(t) + \gamma(t))a^2a_0a_1 + 12\beta(t)m^2a_0^2a_1 \\
& -8\left(t\frac{dw(t)}{dt} + w(t) + K^2\alpha(t)\right)m^2a_0a_1 = 0
\end{aligned}$$

Z^0 katsayısı

$$4\beta(t)m^2a_0^3 - 4\left(t\frac{dw(t)}{dt} + w(t) + K^2\alpha(t)\right)m^2a_0^2 = 0 \quad (3.39)$$

Maple yardımıyla yukarıdaki sistemin özel çözümü bulunur.

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0, \quad a_1 = -\frac{(1+m)(\alpha(t) + \gamma(t))ab}{m^2\beta(t)}, \quad a_2 = -\frac{(1+m)(\alpha(t) + \gamma(t))b^2}{m^2\beta(t)} \\
\omega(t) &= \frac{1}{t} \int_0^t \left(-\kappa^2\alpha(t) \pm \frac{a^2}{4m} (\alpha(t) + \gamma(t)) \right) dt \quad (3.40)
\end{aligned}$$

burada κ, a ve b rastgele sabitlerdir.

Sonuç olarak (3.35) denklemi için tam çözüm elde edilir ve ardından kuvvet yasası nonlineerliğe sahip değişken katsayılı resonant nonlineer Schrödinger denklemi için yeni tam çözüm aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\psi(x, t) = \left[\frac{(1 + m)(\alpha(t) + \gamma(t))a^2b}{m^2\beta(t)} \times \frac{\exp\left(a\left(x + 2\kappa \int_0^t \alpha(t)dt + \xi_0\right)\right)}{\left(1 \pm b \exp\left(a\left(x + 2\kappa \int_0^t \alpha(t)dt + \xi_0\right)\right)\right)^2} \right]^{\frac{1}{2m}} \times \exp\left[i\left(-\kappa x - K^2 \int_0^t (-\kappa^2 \alpha(t) \pm \frac{a^2}{4m} (\alpha(t) + \gamma(t)) dt\right)\right] \quad (3.41)$$

(3.38) denklemi (3.8) denklemi ile birlikte (3.36) denkleminde yerine koyarak z 'nin katsayıları düzenlenir ve elde edilen sistem çözülerek aşağıdaki sonuçlar bulunur.

$$a_0 = -\frac{AB(\alpha(t) + \gamma(t))(1 + m)}{m^2\beta(t)}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{A^2(\alpha(t) + \gamma(t))(1 + m)}{m^2\beta(t)}$$

$$\omega(t) = -\frac{1}{t} \int_0^t \left(\kappa^2 \alpha(t) + \frac{AB}{m^2} (\alpha(t) + \gamma(t)) \right) dt \quad (3.42)$$

Burada κ, B ve A rastgele sabitlerdir. Böylece, (3.8) denklemi (3.38) denkleminin (3.9)-(3.10) çözümleri kullanılarak (3.35) denkleminin tam çözümleri elde edilir ve ardından kuvvet yasası nonlineerliğe sahip değişken katsayılı resonant nonlineer Schrödinger denklemi için tam çözümler aşağıdaki gibi yazılabilir:

(1) Soliton çözümler

$$\psi(x, t) = \left[-\frac{AB(\alpha(t) + \gamma(t))(1 + m)}{m^2\beta(t)} \times \operatorname{sech}^2\left((-AB)^{\frac{1}{2}}\left(x + 2\kappa \int_0^t \alpha(t)dt + \xi_0\right)\right) \right]^{\frac{1}{2m}} \times \exp\left[i\left(-\kappa x - \int_0^t (-\kappa^2 \alpha(t) \pm \frac{AB}{m^2} (\alpha(t) + \gamma(t)) dt\right)\right] \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned}
\psi(x, t) = & \left[-\frac{AB(\alpha(t) + \gamma(t))(1 + m)}{m^2\beta(t)} \right. \\
& \times \operatorname{csch}^2 \left((-AB)^{\frac{1}{2}} \left(x + 2\kappa \int_0^t \alpha(t) dt + \xi_0 \right) \right) \Bigg]^{\frac{1}{2m}} \\
& \times \exp \left[i \left(-\kappa x - \int_0^t (-\kappa^2 \alpha(t) \pm \frac{AB}{m^2} (\alpha(t) + \gamma(t)) dt \right) \right] \quad (3.44)
\end{aligned}$$

(2) Periyodik tekil çözümler

$$\begin{aligned}
\psi(x, t) = & \left[-\frac{AB(\alpha(t) + \gamma(t))(1 + m)}{m^2\beta(t)} \right. \\
& \times \sec^2 \left((AB)^{\frac{1}{2}} \left(x + 2\kappa \int_0^t \alpha(t) dt + \xi_0 \right) \right) \Bigg]^{\frac{1}{2m}} \\
& \times \exp \left[i \left(-\kappa x - \int_0^t (-\kappa^2 \alpha(t) \pm \frac{AB}{m^2} (\alpha(t) + \gamma(t)) dt \right) \right] \quad (3.45)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi(x, t) = & \left[-\frac{AB(\alpha(t) + \gamma(t))(1 + m)}{m^2\beta(t)} \right. \\
& \times \csc^2 \left((AB)^{\frac{1}{2}} \left(x + 2\kappa \int_0^t \alpha(t) dt + \xi_0 \right) \right) \Bigg]^{\frac{1}{2m}} \\
& \times \exp \left[i \left(-\kappa x - \int_0^t (\kappa^2 \alpha(t) + \frac{AB}{m^2} (\alpha(t) + \gamma(t)) dt \right) \right] \quad (3.46)
\end{aligned}$$

(3) Rasyonel çözüm

$$\psi(x, t) = \left[\pm \left(-\frac{(\alpha(t) + \gamma(t))(1 + m)}{m^2 \beta(t)} \right)^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{\left(x + 2\kappa \int_0^t \alpha(t) dt + \xi_0 \right)} \right]^{\frac{1}{m}} \times \exp \left[i \left(-\kappa x - \kappa^2 \int_0^t \alpha(t) dt \right) \right] \quad (3.47)$$

Triki ve diğerlerinin sonuçları ile kıyaslandığında (Triki vd., 2012) bu çalışmadaki sonuçların yeni olduğu görülebilir.

3.2.3. Parabolik Yasası

Parabolik yasa nonlinearliği için, $F(s) = \beta s + \gamma s^2$, burada β ve γ genelde sabitlerdir. Bu tür nonlinearlik aynı zamanda fiber optiklerde de görünür. Bu durumda, resonant nonlinear Schrödinger denklemi aşağıdaki gibidir:

$$i\psi_t + \alpha(t)\psi_{xx} + \{\beta(t)(|\psi|^2)\psi + \gamma(t)|\psi|^4\}\psi + d(t)\left\{\frac{|\psi|_{xx}}{|\psi|}\right\}\psi = 0 \quad (3.48)$$

Aynı dalga dönüşümü kullanılırsa

$$\psi(x, t) = U(\xi)e^{i(-\kappa x + \omega(t)t)}, \quad \xi = x + 2K \int_0^t \alpha(t) dt \quad (3.49)$$

(3.49) denklemi (3.48) denkleminde yerine konulduğunda bir adi diferansiyel denklem elde edilir:

$$(\alpha(t) + d(t))U'' - \left(t \frac{d\omega(t)}{dt} + \omega(t) + \kappa^2 \alpha(t) \right) U + \beta(t)U^3 + \gamma(t)U^5 = 0 \quad (3.50)$$

$U = V^{\frac{1}{2m}}$ dönüşümünü kullanarak (3.50) denklemi aşağıdaki şekle dönüşür:

$$(\alpha(t) + d(t))(2VV'' - (V')^2) - 4 \left(t \frac{dw(t)}{dt} + w(t) + K^2 \alpha(t) \right) V^2 + 4\beta(t)V^3 + 4\gamma(t)V^4 = 0 \quad (3.51)$$

(3.51) denkleminde VV'' ve V^4 dengelendiğinde $N = 1$ bulunur. Bu,

$$V(\xi) = a_0 + a_1 Z(\xi) \quad (3.52)$$

eşitliğine yol açar.

(3.52) denklemi (3.5) denklemi ile birlikte (3.51) denkleminde yerine konulup ve z 'nin katsayıları düzenlendiğinde aşağıdaki denklemler bulunur.

Z^4 katsayısı

$$3(\alpha(t) + d(t))a_1^2b + 4\gamma(t)a_1^4$$

Z^3 katsayısı

$$4(\alpha(t) + d(t))aba_1^2 + 4\beta(t)a_1^3 + 4(\alpha(t) + d(t))b^2a_0a_1 + 16\gamma(t)a_0a_1^3 = 0$$

Z^2 katsayısı

$$\begin{aligned} & -4\left(t\frac{dw(t)}{dt} + w(t) + K^2\alpha(t)\right)a_1^2 + (\alpha(t) + d(t))a^2a_1^2 + 6(\alpha(t) + d(t))aba_0a_1 \\ & + 24\beta(t)a_0a_1^2 = 0 \end{aligned}$$

Z katsayısı

$$\begin{aligned} & 2(\alpha(t) + d(t))a^2a_0a_1 - 8\left(t\frac{dw(t)}{dt} + w(t) + K^2\alpha(t)\right)a_0a_1 + 16\gamma(t)a_0^3a_1 \\ & + 12\beta(t)a_0^2a_1 = 0 \end{aligned}$$

Z^0 katsayısı

$$4\gamma(t)a_0^4 + 412\beta(t)a_0^3 - 4\left(t\frac{dw(t)}{dt} + w(t) + K^2\alpha(t)\right)a_0^2 = 0 \quad (3.53)$$

Bu sistem çözüldüğünde aşağıdaki çözüm seti elde edilir.

Durum 1

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \mp \frac{3}{2} \frac{b(\alpha(t) + d(t))}{(-3\gamma(t)(\alpha(t) + d(t)))^{1/2}}, \quad a_2 = \mp \frac{3}{2} \frac{\beta(t)}{(-3\gamma(t)(\alpha(t) + d(t)))^{1/2}}$$

$$\omega(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \left(\frac{3\beta^2(t)}{16\gamma(t)} + \kappa^2\alpha(t) \right) dt \quad (3.54)$$

$$\psi(x, t) =$$

$$\left[\mp \frac{3\beta(t)}{4\gamma(t)} \frac{b \exp \left(\mp \frac{3}{2} \frac{\beta(t)}{(-3\gamma(t)(\alpha(t) + d(t)))^{1/2}} \left(x + 2\kappa \int_0^t \alpha(t) dt + \xi_0 \right) \right)}{1 \pm b \exp \left(\mp \frac{3}{2} \frac{\beta(t)}{(-3\gamma(t)(\alpha(t) + d(t)))^{1/2}} \left(x + 2\kappa \int_0^t \alpha(t) dt + \xi_0 \right) \right)} \right]^{\frac{1}{2m}} \\ \times \exp \left[i \left(-\kappa x - \int_0^t \left(\frac{3\beta^2(t)}{16\gamma(t)} + \kappa^2 \alpha(t) \right) dt \right) \right] \quad (3.55)$$

Burada κ ve b keyfi sabitlerdir. Bu da yeni tam çözümü verir.

Durum 2

$$a_0 = \frac{3\beta(t)}{4\gamma(t)}, a = \mp \frac{3}{2} \frac{\beta(t)}{(-3\gamma(t)(\alpha(t) + d(t)))^{1/2}} = \mp \frac{2a_1 (-3\gamma(t)(\alpha(t) + d(t)))^{1/2}}{3\alpha(t) + d(t)} \\ \omega(t) = -\frac{1}{t} \int_0^t \left(\frac{3\beta^2(t)}{16\gamma(t)} + \kappa^2 \alpha(t) \right) dt \quad (3.56)$$

$$\psi(x, t) =$$

$$\left[-\frac{3\beta(t)}{4\gamma(t)} \mp \frac{3\beta(t)}{2\gamma(t)} \right. \\ \times \frac{(-3\gamma(t)(\alpha(t) + d(t)))^{1/2} a_1 \exp \left(\mp \frac{3}{2} \frac{\beta(t)}{(-3\gamma(t)(\alpha(t) + d(t)))^{1/2}} (\xi_0 + \xi_0) \right)}{3(\alpha(t) + d(t)) \pm 2a_1 (-3\gamma(t)(\alpha(t) + d(t)))^{1/2} \exp \left(\mp \frac{3}{2} \frac{\beta(t)}{(-3\gamma(t)(\alpha(t) + d(t)))^{1/2}} (\xi_0 + \xi_0) \right)} \left. \right]^{\frac{1}{2}} \\ \times \exp \left[i \left(-\kappa x - \int_0^t \left(\frac{3\beta^2(t)}{16\gamma(t)} + \kappa^2 \alpha(t) \right) dt \right) \right] \quad (3.57)$$

burada κ ve a_1 keyfi sabitlerdir. Bu da $\xi = x + 2K \int_0^t \alpha(t) dt$ olacak şekilde yeni tam çözümü verir. (3.11) denklemi ile birlikte (3.52) denklemini (3.11) denkleminde yerine

koyarak ve z 'nin tüm kuvvetlerinin katsayılarını sıfıra eşitleyerek ardından bir nonlinear cebirsel denklem sistemi elde edilir ve bunu çözerek aşağıdaki sonuçlar bulunur.

$$a_0 = 0, a_1 = \mp \frac{1}{2} \left(-\frac{3(\alpha(t) + d(t))}{\gamma(t)} \right)^{1/2}, \quad A = \mp \frac{\beta(t)}{2} \left(\frac{3}{\gamma(t)(\alpha(t) + d(t))} \right)^{1/2}$$

$$\omega(t) = -\frac{1}{t} \int_0^t \left(\frac{3\beta^2(t)}{16\gamma(t)} + \kappa^2 \alpha(t) \right) dt \quad (3.58)$$

Burada κ keyfi bir sabittir. Dolayısıyla, (3.11) denkleminin (3.12)-(3.13) çözümlerini ve (3.52) denklemi kullanılarak (3.51) denkleminin tam çözümü elde edilir ve ardından parabolik yasası nonlinearliğe sahip değişken katsayılı resonant nonlinear Schrödinger denklemi için tam çözümler aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\psi(x, t) = \left[\pm \frac{3\beta(t)}{4\gamma(t)} \left\{ 1 \right. \right. \\ \left. \left. \pm \tanh \left(\pm \frac{\beta(t)}{4} \left(-\frac{3}{-3\gamma(t)(\alpha(t) + d(t))} \right)^{1/2} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(x + 2\kappa \int_0^t \alpha(t) dt + \xi_0 \right) \right) \right\} \right]^{1/2} \\ \times \exp \left[i \left(-\kappa x - \int_0^t \left(\frac{3\beta^2(t)}{16\gamma(t)} + \kappa^2 \alpha(t) \right) dt \right) \right] \quad (3.59)$$

(3.52) denklemi (3.8) denklemi ile birlikte (3.51) denkleminde yerine koyarak z 'nin katsayılarını düzenler ve elde edilen sistem çözülerek aşağıdaki sonuçlar bulunur:

$$a_0 = \frac{3\beta(t)}{8\gamma(t)}, a_1 = \mp \frac{A}{2} \left(-\frac{3(\alpha(t) + d(t))}{\gamma(t)} \right)^{1/2}, \quad B = \mp \frac{3}{16A} \left(\frac{3\beta^2(t)}{\gamma(t)(\alpha(t) + d(t))} \right)$$

$$\omega(t) = -\frac{1}{t} \int_0^t \left(\frac{3\beta^2(t)}{16\gamma(t)} + \kappa^2 \alpha(t) \right) dt \quad (3.60)$$

Burada κ ve A rastgele sabitlerdir. Böylece, (3.8) denkleminin çözümleri (3.9)-(3.10), ansatz (3.52) denklemi kullanılarak (3.51) denkleminin tam çözümleri elde edilir ve ardından parabolik yasaı nonlinearliğe sahip değışken katsayılı resonant nonlinear Schrödinger denkleminin tam çözümleri aşığıdaki gibi yazılabilir:

(1) Karanlık soliton çözüm

$$\psi(x, t) = \left[-\frac{3\beta(t)}{8\gamma(t)} \left\{ 1 \pm \tanh \left(\pm \frac{\beta(t)}{4} \left(-\frac{3}{3\gamma(t)(\alpha(t) + d(t))} \right)^{1/2} \times \left(x + 2\kappa \int_0^t \alpha(t) dt + \xi_0 \right) \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \times \exp \left[i \left(-\kappa x - \int_0^t \left(\frac{3\beta^2(t)}{16\gamma(t)} + \kappa^2 \alpha(t) \right) dt \right) \right] \right] \quad (3.61)$$

(2) Tekil soliton çözüm

$$\psi(x, t) = \left[-\frac{3\beta(t)}{8\gamma(t)} \left\{ 1 \pm \coth \left(\pm \frac{\beta(t)}{4} \left(-\frac{3}{3\gamma(t)(\alpha(t) + d(t))} \right)^{1/2} \times \left(x + 2\kappa \int_0^t \alpha(t) dt + \xi_0 \right) \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \times \exp \left[i \left(-\kappa x - \int_0^t \left(\frac{3\beta^2(t)}{16\gamma(t)} + \kappa^2 \alpha(t) \right) dt \right) \right] \right] \quad (3.62)$$

Eslami ve diğerklerinin sonuçlarıyla (Eslami vd.,2014) bu çalışmadaki sonuçlar karşılaştırıldığında, bazı sonuçların yeni olduğu görülebilir.

3.2.4. Çift-Kuvvet Yasası

Çift-kuvvet yasası nonlineerliği, $F(s) = \beta s^n + \gamma s^{2n}$ olarak formüle edilir. Burada β ve γ genelde sabitler olmasına rağmen bu çalışmada zamanla değişkenler olarak alınır. Bu yasa, parabolik yasası nonlineerliğinin bir genelleştirmesidir. Aslında, $n = 1$ olarak alınırsa, çift-kuvvet yasası parabolik yasası nonlineerliğine çöker. Bu durumda, resonant nonlineer Schrödinger denklemi aşağıdaki gibidir:

$$i\psi_t + \alpha(t)\psi_{xx} + \{\beta(t)|\psi|^{2n} + \gamma(t)|\psi|^{4n}\}\psi + d(t)\left\{\frac{|\psi|_{xx}}{|\psi|}\right\}\psi = 0 \quad (3.63)$$

Genelliği korunarak sunulan (3.63) denkleminin çözüm olan $\psi(x, t)$ 'nin aşağıdaki formu alınacağı varsayalım.

$$\psi(x, t) = U(\xi)e^{i(-\kappa x + \omega(t)t)}, \quad \xi = x + 2K \int_0^t \alpha(t) dt \quad (3.64)$$

Bu dalga dönüşümü kullanılarak aşağıdakiler elde edilir:

$$(\alpha(t) + d(t))U'' - \left(t \frac{d\omega(t)}{dt} + \omega(t) + \kappa^2 \alpha(t)\right)U + \beta(t)U^{2n+1} + \gamma(t)U^{4n+1} = 0 \quad (3.65)$$

Analitik bir çözüm elde etmek için $U = V^{\frac{1}{2n}}$ olarak belirtilen bir dönüşüm önerilir.

Daha sonra, (3.65) denklemi aşağıdaki denklemlere dönüştürülür:

$$\begin{aligned} &(\alpha(t) + d(t))(2nVV'' - (1 - 2n)(V')^2) - 4n^2 \left(t \frac{dw(t)}{dt} + w(t) + K^2 \alpha(t) \right) V^2 \\ &+ 4n^2 \beta(t)V^3 + 4n^2 \gamma(t)V^4 = 0 \end{aligned} \quad (3.66)$$

(3.66) denkleminde VV'' ve V^4 dengelendiğinde $N = 1$ bulunur. Bunun anlamı

$$V(\xi) = a_0 + a_1 Z(\xi) \quad (3.67)$$

dır.

(3.67) denkleminin (3.65) denklemi ile birlikte (3.66) denkleminde yerine koyarak ve tüm z 'nin kuvvetlerinin katsayılarını sıfıra eşitlenir, ardından bir nonlineer cebirsel denklem elde edilir ve bunu çözerek aşağıdaki sonuçlar bulunur:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0, \quad a_1 = \mp \frac{1+2n}{2n} \frac{b(\alpha(t) + d(t))}{\left(-(1+2n)\gamma(t)(\alpha(t) + d(t))\right)^{1/2}} \\
a &= \mp \frac{n(1+2n)}{1+n} \frac{\beta(t)}{\left(-(1+2n)\gamma(t)(\alpha(t) + d(t))\right)^{1/2}} \\
\omega(t) &= -\frac{1}{t} \int_0^t \left(\frac{(1+2n)\beta^2(t)}{4(1+n)^2\gamma(t)} + \kappa^2\alpha(t) \right) dt
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Burada κ ve b rastgele sabitlerdir. Bu da yeni tam çözümü verir.

$$\begin{aligned}
\psi(x, t) &= \\
&\left[\pm \frac{(1+2n)\beta(t)}{2(1+n)\gamma(t)} \right. \\
&\times \frac{b \exp\left(\pm \frac{n(1+2n)}{(1+n)}\right) \frac{\beta(t)}{\left(-(1+2n)\gamma(t)(\alpha(t) + d(t))\right)^{1/2}} \left(x + 2\kappa \int_0^t \alpha(t)dt + \xi_0\right)}{1 \pm b \exp\left(\pm \frac{n(1+2n)}{(1+n)}\right) \frac{\beta(t)}{\left(-(1+2n)\gamma(t)(\alpha(t) + d(t))\right)^{1/2}} \left(x + 2\kappa \int_0^t \alpha(t)dt + \xi_0\right)} \Bigg]^{\frac{1}{2n}} \\
&\times \exp \left[i \left(-\kappa x - \int_0^t \left(\frac{(1+2n)\beta^2(t)}{4(1+n)^2\gamma(t)} + \kappa^2\alpha(t) \right) dt \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.69}$$

(3.67) denklemini (3.8) denklemi ile birlikte (3.66) denkleminde yerine koyarak z 'nin kuvvetlerini düzenleyerek ve elde edilen sistemi çözerek aşağıdaki sonuçlar bulunur:

$$\begin{aligned}
a_0 &= -\frac{(1+2n)\beta(t)}{4(1+n)\gamma(t)}, \\
a_1 &= \mp \frac{A}{2n} \left(-\frac{(1+2n)(\alpha(t) + d(t))}{\gamma(t)} \right)^{1/2} = \mp \frac{n^2(1+2n)}{4(1+n)^2A} \frac{\beta^2(t)}{\gamma(t)(\alpha(t) + d(t))} \\
\omega(t) &= -\frac{1}{t} \int_0^t \left(\frac{(1+2n)\beta^2(t)}{4(1+n)^2\gamma(t)} + \kappa^2\alpha(t) \right) dt
\end{aligned} \tag{3.70}$$

Burada κ ve b keyfi sabitlerdir.

Böylece, (3.8) denkleminin çözümleri (3.9)-(3.10), ansatz (3.67) kullanılarak (3.87) denkleminin tam çözümleri elde edilir ve ardından çift-kuvvet yasası nonlineerliğe sahip değişken katsayılı resonant nonlineer Schrödinger denkleminin tam çözümleri aşağıdaki şekilde yazılabilir:

(1) Karanlık soliton çözüm

$$\psi(x, t) = \left[-\frac{(1+2n)\beta(t)}{4(1+n)\gamma(t)} \right]^{1/2} \pm \tanh \left(\pm \frac{n\beta(t)}{2(1+n)} \times \left(-\frac{1+2n}{\gamma(t)(\alpha(t) + d(t))} \right)^{1/2} \times \left(x + 2\kappa \int_0^t \alpha(t) dt + \xi_0 \right) \right) \left. \right]^{1/2} \times \exp \left[i \left(-\kappa x - \int_0^t \left(\frac{(1+2n)\beta(t)}{4(1+n)\gamma(t)} + \kappa^2 \alpha(t) \right) dt \right) \right] \quad (3.71)$$

(2) Tekil soliton çözüm

$$\psi(x, t) = \left[-\frac{(1+2n)\beta(t)}{4(1+n)\gamma(t)} \right]^{1/2} \pm \coth \left(\pm \frac{n\beta(t)}{2(1+n)} \times \left(-\frac{1+2n}{\gamma(t)(\alpha(t) + d(t))} \right)^{1/2} \times \left(x + 2\kappa \int_0^t \alpha(t) dt + \xi_0 \right) \right) \left. \right]^{1/2} \times \exp \left[i \left(-\kappa x - \int_0^t \left(\frac{(1+2n)\beta(t)}{4(1+n)\gamma(t)} + \kappa^2 \alpha(t) \right) dt \right) \right] \quad (3.72)$$

Triki ve diğerlerinin sonuçlarıyla (Triki vd., 2012) bu çalışmadaki sonuçlar karşılaştırıldığında, sonuçların yeni olduğu görülebilir.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada, resonant nonlinear Schrödinger denklemi genişletilmiş Jacobi eliptik fonksiyon açılımıyla incelendi. İki nonlinear yasa ele alındı. Bunlar, Kerr yasası nonlinearliği ve parabolik yasası nonlinearliğidir. Sonuç olarak koyu veya tam ve singüler solitonlar elde edildi.

Ayrıca bu çalışma, en basit denklem yöntemi aracılığıyla zamanla değişen katsayılara sahip resonant nonlinear Schrödinger denkleminin Kerr yasası, Kuvvet yasası, Parabolik yasası ve Çift-Kuvvet yasası nonlinearlikleri gibi dört tür nonlinearlikle yeni tam 1-soliton çözümlerini elde eder. Burada tanımlanan en basit denklem yöntemi, sadece etkili değil aynı zamanda geniş uygulanabilirliğe sahip olma avantajına da sahiptir. Bu çalışma, bu yöntemin zamanla değişen katsayılara sahip nonlinear gelişim denklemleriyle başa çıkma gücünü ortaya koymaktadır.

5. KAYNAKLAR

- Biswas, A. (2012). Soliton solutions of the perturbed resonant nonlinear dispersive Schrödinger's equation with full nonlinearity by semi-inverse variational principle, *Quantum Phys. Lett. 1* (2), 79–84.
- Biswas, A. (2012). Soliton solutions of the perturbed resonant nonlinear Schrodinger's equation with full nonlinearity by semi-inverse variational principle. *Quantum Phys. Lett, 1*(2), 79-89.
- Ekici, M., Zhou, Q., Sonmezoglu, A., Manafian, J. & Mirzazadeh, M..(2017). The analytical study of solitons to the nonlinear Schrödinger's equation with resonant nonlinearity, *Optik 130*, 378–382.
- Ekici, M., Zhou, Sonmezoglu A., Manafian, J., Mirzazadeh , M.(2017) The analytical study of solitons to the nonlinear Schrödinger equation with resonant nonlinearity, *Optik*, Volume 130, Pages 378-382,
- Eslami, M. M., Mirzazadeh, M. & Biswas, A. (2013). Soliton solutions of the resonant nonlinear Schrödinger's equation in optical fibers with time dependent coefficients by simplest equation approach, *J. Mod. Opt. 60* (19), 1627–1636.
- Eslami, M.; Mirzazadeh, M.; Vajargah, B.F.; Biswas, A. (2014). Optical solitons fort he resonant nonlinear Schrödinger's equation with time-dependent coefficients by the first integral method, *Optik*, 125(13), 3107-3116.
- Huiqun, Z. (2007). Extended Jacobi elliptic function expansion method and its applications, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 12*, 627–635.
- Kudryashov, N. A. (1990). Exact solutions of the generalized Kuramoto-Sivashinsky equation. *Physics Letters A, 147*(5-6), 287-291.
- Kudryashov, N. A. (1991). On types of nonlinear nonintegrable equations with exact solutions. *Physics Letters A, 155*(4-5), 269-275.
- Kudryashov, N. A. (2005). Exact solitary waves of the Fisher equation. *Physics Letters A, 342* (1-2), 99-106.

- Kudryashov, N. A. (2005). Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations. *Chaos, Solitons & Fractals*, 24(5), 1217-1231.
- Kudryashov, N. A. (2010). Meromorphic solutions of nonlinear ordinary differential equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 15(10), 2778-2790.
- Lee, J. H., & Pashaev, O. K. (2007). Solitons of the resonant nonlinear Schrödinger equation with nontrivial boundary conditions: Hirota bilinear method. *Theoretical and Mathematical Physics*, 152, 991-1003.
- Lee, J. H., Pashaev, O. K., Rogers, C., & Schief, W. K. (2007). The resonant nonlinear Schrödinger equation in cold plasma physics. Application of Bäcklund–Darboux transformations and superposition principles. *Journal of plasma physics*, 73(2), 257-272.
- Li, M., Xiao, J. H., Yan, T. Z., & Tian, B. (2013). Integrability and soliton interaction of a resonant nonlinear Schrödinger equation via binary Bell polynomials. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 14(3), 1669-1679.
- Li, X., & Wang, M. (2007). A sub-ODE method for finding exact solutions of a generalized KdV–mKdV equation with high-order nonlinear terms. *Physics Letters A*, 361(1-2), 115-118.
- Ma, W. X., & Fuchssteiner, B. (1996). Explicit and exact solutions to a Kolmogorov–Petrovskii–Piskunov equation. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 31(3), 329-338.
- Mirzazadeh, M., Eslami, M. M., Milović, D. & Biswas, A. (2014). Topological solitons of resonant nonlinear Schrödinger's equation with dual-power law nonlinearity using/-expansion technique, *Optik* 125 (19) 5480–5489.
- Rapedius, K., & Korsch, H. J. (2009). Resonance solutions of the nonlinear Schrödinger equation in an open double-well potential. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 42(4), 044005.
- Taghizadeh, N., & Mirzazadeh, M. (2012). The simplest equation method to study perturbed nonlinear Schrödinger's equation with Kerr law

- nonlinearity. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17(4), 1493-1499.
- Triki H., Hayat, T., O.M. Aldossary O.M. & Biswas, A. (2012). Bright and dark solitons for the resonant nonlinear Schrödinger's equation with time-dependent coefficients, *Opt. Laser Technol.* 44, 2223–2231.
- Triki, H., & Wazwaz, A. M. (2009). Sub-ODE method and soliton solutions for the variable-coefficient mKdV equation. *Applied Mathematics and Computation*, 214(2), 370-373.
- Triki, H., Hayat, T., Aldossary, O. M., & Biswas, A. (2012). Bright and dark solitons for the resonant nonlinear Schrödinger's equation with time-dependent coefficients. *Optics & Laser Technology*, 44(7), 2223-2231.
- Triki, H., Yildirim, A., Hayat, T., Aldossary, O. M., & Biswas, A. (2012). 1-Soliton solution of the generalized resonant nonlinear dispersive Schrödinger's equation with time-dependent coefficients. *Advanced Science Letters*, 16(1), 309-312.
- Vitanov, N. K., & Dimitrova, Z. I. (2010). Application of the method of simplest equation for obtaining exact traveling-wave solutions for two classes of model PDEs from ecology and population dynamics. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 15(10), 2836-2845.
- Vitanov, N. K., Dimitrova, Z. I., & Kantz, H. (2010). Modified method of simplest equation and its application to nonlinear PDEs. *Applied Mathematics and Computation*, 216(9), 2587-2595.
- Wazwaz, A. M. (2007). New solitary wave solutions to the modified Kawahara equation. *Physics Letters A*, 360(4-5), 588-592.
- Wazwaz, A. M. (2010). Integrable (2+1)-dimensional and (3+1)-dimensional breaking soliton equations. *Physica Scripta*, 81(3), 035005.
- Witthaut, D., Mossmann, S., & Korsch, H. J. (2005). Bound and resonance states of the nonlinear Schrödinger equation in simple model systems. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 38(8), 1777.

- Yildirim, A., Paghaleh, A. S. S., Mirzazadeh, M., Moosaei, H., & Biswas, A. (2012). New exact traveling wave solutions for DS-I and DS-II equations. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 17(3), 369-378.
- Yu, X., Gao, Y. T., Sun, Z. Y., & Liu, Y. (2010). N-soliton solutions, Bäcklund transformation and Lax pair for a generalized variable-coefficient fifth-order Korteweg–de Vries equation. *Physica Scripta*, 81(4), 045402.
- Zhao, X., Tang, D., & Wang, L. (2005). New soliton-like solutions for KdV equation with variable coefficient. *Physics Letters A*, 346(4), 288-291.



Alaattin AKHILAL

Yüksek Lisans Tezi

YOZGAT 2024



**T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

