

143066

İÇİ AKIŞKANLA DOLU DEĞİŞKEN YARIÇAPLI
ELASTİK TÜPLERDE
NONLİNEER DALGA YAYILIMI

143066

DOKTORA TEZİ
Y. Müh. İlkey BAKIRTAŞ
509982202

İ. T. Ü. FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
DOKTORA TEZİ
Y. Müh. İlkey BAKIRTAŞ
509982202

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 29 Aralık 2002
Tezin Savunulduğu Tarih: 1 Mayıs 2003

Tez Danışmanı:
Diğer Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Hilmi DEMİRAY (İ.Ü.)

Prof. Dr. Attila AŞKAR (K.Ü.)

Prof. Dr. Esin İNAN (İ.Ü.)

Prof. Dr. Hasan ENGİN (İ.T.Ü.)

Prof. Dr. Mevlüt TEYMUR (İ.T.Ü.)

Hilmi Demiray
Attila Askar
Esin Inan
Hasan Engin
Mevlüt Teymur

MAYIS 2003

ÖNSÖZ

Doktora çalışmam ve tüm mekanik eğitimim süresince, her zaman beni yönlendiren, destekleyen, bilimsel çalışma ve araştırmanın ilkelerini kendisinden öğrendiğim ve öğrencisi olmaktan onur duyduğum Prof. Dr. Hilmi Demiray'a, büyük desteği, ilgisi, yapıcı tartışma ve önerileri ile tezime katkıda bulunan, genç araştırmacı kişiliğini örnek aldığım, ikinci danışmanım Yar. Doç. Dr. Nalan Antar'a,

beni bilimsel çalışmaya yönlendiren, eğitim hayatım boyunca maddi ve manevi tüm destekleri ve sevgileri ile yanımda olan annem Türk Dili ve Edebiyatı öğretmeni Meral Bakırtaş ve babam Prof. Dr. İbrahim Bakırtaş'a, kardeşim Canay Bakırtaş'a ve tüm aileme,

sonsuz sabrı ve büyük desteği ile doktora eğitimim boyunca her zaman yanımda olan eşim Yük. Müh. Bülent Akar'a, teşekkürlerimi sunarım.

Aralık 2002

Mat. Yük. Müh. İlkay Bakırtaş

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ	v
ŞEBOL LİSTESİ	vi
ÖZET	vii
SUMMARY	xii
1. GİRİŞ	1
1.1 Giriş ve Kısa Tarihsel Gelişim	1
2. TEMEL DENKLEMLER	9
2.1 Giriş	9
2.2 Yarıçapı Değişken İnce Elastik Tüp Denklemleri	9
2.3 Akışkanın Hareket Denklemleri	16
3. PERTÜRBASYON YÖNTEMLERİ	19
3.1 Giriş	19
3.2 Türev Açılım Yöntemi	19
3.3 İndirgeyici Pertürbasyon Yöntemi	21
3.4. Denklem Sistemlerinin Uzun Dalga Yaklaşımı Altında İncelenmesi	27
4. ZAYIF NONLİNEER DALGALAR	30
4.1 Giriş ve Temel Pertürbasyon Şeması	30
4.2 Viskoz Olmayan Akışkan ile Dolu Tüplerde Nonlinear Dalga Yayılması	31
4.3 Viskoz Akışkan ile Dolu Tüplerde Nonlinear Dalga Yayılması	34
4.4 Evolüsyon Denklemlerinin İlerleyen Dalga Çözümleri	41
5. NONLİNEER DALGA MODÜLASYONU	51
5.1 Giriş	51
5.2 İçerisinde Viskoz Olmayan Akışkan Bulunan Yarıçapı Değişken İnce Elastik Tüplerde Nonlinear Dalga Modülasyonu	51
5.3 İçerisinde Viskoz Olmayan Akışkan Bulunan Yarıçapı Sabit Tüplerde Marjinal Halde Nonlinear Dalga Modülasyonu	67
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	88
KAYNAKLAR	90
EK A	98

EK B
ÖZGEÇMİŞ

106
113



ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil A.1 Genişleyen tüpte zarf dalga hızı v_e 'nin eksenel koordinat ile değişimi	100
Şekil A.2 Genişleyen tüpte $\xi = 1$ değeri için ilerleyen dalga hızı v_p 'nin eksenel koordinat ile değişimi	101
Şekil A.3 Genişleyen tüpte $\xi = 5$ değeri için ilerleyen dalga hızı v_p 'nin eksenel koordinat ile değişimi	102
Şekil A.4 Daralan tüpte zarf dalga hızı v_e 'nin eksenel koordinat ile değişimi	103
Şekil A.5 Daralan tüpte $\xi = 1$ değeri için ilerleyen dalga hızı v_p 'nin eksenel koordinat ile değişimi	104
Şekil A.6 Daralan tüpte $\xi = 5$ değeri için ilerleyen dalga hızı v_p 'nin eksenel koordinat ile değişimi	105

SEMBOL LİSTESİ

- Z : Maddesel noktanın şekil değiştirmeden önceki eksenel koordinatı
 z : Maddesel noktanın statik şekil değiştirmeden sonraki eksenel koordinatı
 Φ : Statik şekil değiştirmeden önce tüp yarıçapındaki lineer genişleme veya daralmayı temsil eden açı
 ϕ : Statik şekil değiştirmeden sonra tüp yarıçapındaki lineer genişleme veya daralmayı temsil eden açı
 H : Statik şekil değiştirmeden önceki tüp kalınlığı
 h : Statik şekil değiştirmeden sonraki tüp kalınlığı
 h' : Tüpün nihai kalınlığı
 λ_z : Eksenel yöndeki germe
 Π : Hidrostatik basınç
 μ : Elastik cismin küçük şekil değiştirme halindeki kayma modülü
 c_{kl}^{-1} : Finger deformasyon tansörü
 $\bar{P}$: Akışkanın hidrostatik basıncı
 μ_v : Akışkanın viskozitesi
 ρ_a : Akışkanın kütle yoğunluğu
 v_r : Akışkanın radyal doğrultudaki hız bileşeni
 v_z : Akışkanın eksenel doğrultudaki hız bileşeni
 v : Akışkanın ortalama anlamda eksenel doğrultudaki hız bileşeni
 ν : Akışkanın kinematik viskozitesi

İÇİ AKIŞKANLA DOLU DEĞİŞKEN YARIÇAPLI ELASTİK TÜPLERDE NONLİNEER DALGA YAYILIMI

ÖZET

Bu çalışmada, içi sıkışmaz bir akışkanla dolu, ön gerilmeli yarıçapı değişken, ince elastik tüplerde nonlinear dalga yayılımı incelenmiştir. Bölüm 1’de konunun tarihsel gelişimi ve literatürde bu konudaki mevcut teorik çalışmalar sunulmuştur. Bölüm 2’de içi sıkışmaz viskoz/viskoz olmayan akışkanla dolu, ön gerilmeli, yarıçapı değişken, ince elastik bir tüpe ait alan denklemleri türetilmiştir. Bölüm 3’te çalışmada kullanılacak olan pertürbasyon yöntemleri hakkında kısa bir özet verilmiştir. Bölüm 4’te, indirgeyici pertürbasyon yöntemleri kullanılarak, içi sıkışmaz bir akışkanla dolu yarıçapı değişken elastik bir tüpte zayıf nonlinear dalgaların yayılımı problemi, viskoz olan ve viskoz olmayan akışkan halleri için ayrı ayrı incelenmiştir. Viskoz olmayan akışkan hali için, evolüsyon denklemi olarak değişken katsayılı Korteweg-de Vries denklemi elde edilmiştir. Viskoz akışkan hali için, iki farklı yaklaşım kullanılarak, pertürbasyon ve viskozite parametrelerinin farklı değerlerine bağlı olarak, evolüsyon denklemi olarak değişken katsayılı Korteweg-de Vries-Burgers denklemi ve pertürbe Korteweg-de Vries denklemi elde edilmiştir. Bu bölümün sonunda, bu evolüsyon denklemlerine ilerleyen dalga çözümleri sunulmuş ve dalga hızlarının, daralan tüpler için orijinden uzaklaştıkça artarken, genişleyen tüpler için orijinden uzaklaştıkça azaldığı gösterilmiştir. Bölüm 5, nonlinear dalga modülasyonuna ayrılmıştır. Bu problem, iki ayrı alt bölümde incelenmiştir. İlk alt bölümde, içi akışkanla dolu yarıçapı değişken elastik bir tüpte nonlinear dalgaların genlik modülasyonu incelenmiştir. Kanı sıkışmaz ve viskoz olmayan bir akışkan olarak kabul ederek ve indirgeyici pertürbasyon yöntemini probleme uygulayarak, evolüsyon denklemi olarak değişken katsayılı nonlinear Schrödinger denklemi elde edilmiştir. Bu evolüsyon denkleminin yalnız dalga tipi bir çözümü kabul ettiği gösterilmiş ve dalga hızı elde edilmiştir. İlgili grafiklerin çizilmesiyle, ilerleyen dalga ve zarf dalganın hızlarının, genişleyen tüplerde orijinden uzaklaştıkça arttığı; daralan tüplerde orijinden uzaklaştıkça azaldığı gözlemlenmiştir. Bölüm 5’in ikinci alt bölümde, içi akışkanla dolu ince elastik tüplerde, marjinal halde nonlinear dalga yayılımı incelenmiştir. Yarıçap değişiminin probleme etkisi işlemleri çok karmaşık hale getirdiği için bu etki ihmal edilmiştir. Yarıçap değişiminin ihmal edilmesinden dolayı, içi viskoz olmayan akışkanla dolu, yarıçapı sabit ince elastik bir tüpün hareketini yöneten alan denklemleri türetilmiştir. İndirgeyici pertürbasyon yönteminin uygulanması ile evolüsyon denklemi olarak genelleştirilmiş nonlinear Schrödinger denklemi elde edilmiştir. Son olarak, bu evolüsyon denkleminin bazı kesin çözümleri sunulmuştur.

Temel Denklemler

Büyük damarlar, değişken yarıçaplı, ince, uzun, dairesel koni, ön gerilmeli, elastik tüp yapısında ve kan da sıkışmaz bir akışkan olarak kabul edilecek olursa, nonlinear hareket denklemleri aşağıdaki gibi verilir.

Yarıçapı değişken elastik tüpün hareket denklemleri :

$$p = \frac{m}{\lambda_z^2} (1 + \Phi^2)^{1/2} \frac{(\lambda_z + \Phi z)}{(\lambda_\theta + \phi z + u)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\nu(\phi + \frac{\partial u}{\partial z})}{(\lambda_\theta + \phi z + u)} v + \frac{(1 + \Phi^2)^{1/2}}{\lambda_z(\lambda_\theta + \phi z + u)} \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_2} - \frac{1}{\lambda_z(\lambda_\theta + \phi z + u)} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{(\phi + \frac{\partial u}{\partial z})(\lambda_z + \Phi z)}{[1 + (\phi + \frac{\partial u}{\partial z})^2]^{1/2}} \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_1} \right\}. \quad (1)$$

Burada λ_z statik şekil değiştirmeden sonraki eksenel germeyi, Φ ve ϕ , sırasıyla statik şekil değiştirmeden önceki ve sonraki yarıçap değişimini karakterize eden açıları, $\mu\Sigma$ tüp malzemesinin şekil değiştirme enerjisi yoğunluğu fonksiyonunu, p akışkan basıncını, λ_1 ve λ_2 asal germeleri göstermektedir.

Akışkan denklemleri :

Viskoz akışkana ilişkin yaklaşık akışkan denklemleri aşağıdaki gibi verilir

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \left(\phi + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{2}(\lambda_\theta + \phi z + u) \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{2\nu}{\lambda_\theta + \phi z + u} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} \right)_{x=\lambda_\theta + \phi z + u}. \quad (3)$$

Burada, v hızın ortalama anlamda eksenel yöndeki bileşenini, v_z akışkanın eksenel yöndeki hız bileşenini, ν akışkanın viskozitesini göstermektedir. Eğer viskozite parametresi ν sıfırlanacak olursa, viskoz olmayan bir akışkana ait alan denklemleri aşağıdaki formda elde edilir

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \left(\phi + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{2}(\lambda_\theta + \phi z + u) \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (5)$$

Zayıf Nonlinear Dalgalar

Bu bölümde, akışkanla dolu yarıçapı değişken elastik tüplerde zayıf nonlinear dalga yayılımı iki farklı hal için incelenmiştir. İlk olarak, indirgeyici pertürbasyon şeması sunulmuştur. Bu tür problemlerde, aşağıda verilen tipte bir koordinat dönüşümü tanımlamak uygundur

$$\xi = \varepsilon^\alpha (z - gt), \quad \tau = \varepsilon^{\alpha+1} z. \quad (6)$$

Burada, ε nonlinearite ve dispersiyonun mertebesini ölçen bir parametre, g bir ölçek parametresi ve α , pertürbasyon parametresi olarak isimlendirilmiş olan pozitif bir sayıdır. Alan değişkenlerinin (ξ, τ) değişkenlerinin ve ε parametresinin bir fonksiyonu olduğu kabul edilecektir. Tüpün yarıçapının değişimini hesaba katmak için, (6) ile ifade edilen koordinat dönüşümü gözönünde bulundurulursa, yarıçap değişimini karakterize eden Φ ve ϕ açılarını $\varepsilon^{\alpha+2}$ mertebesinde kabul etmek gerekmektedir. Ayrıca, alan değişkenlerinin aşağıdaki formda asimptotik seriye açılacağı varsayılacaktır

$$u = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots, \quad v = \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots,$$

$$v_z = \varepsilon v_{z1} + \varepsilon^2 v_{z2} + \dots, \quad p = p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots \quad (7)$$

Burada $u_1, \dots, p_2, (\xi, \tau)$ değişkenlerinin bilinmeyen fonksiyonlarıdır.

Bölüm 4'te ilk olarak, içi viskoz olmayan akışkanla dolu yarıçapı değişken elastik bir tüpte nonlinear dalga yayılımı incelenmiştir. Bu hal için, pertürbasyon parametresi α , $1/2$ olarak seçilmiş ve (6), (7) açılımları, (1), (4), (5) alan denklemlerinde kullanılmıştır. ε 'un benzer kuvvetlerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesi ile bir diferansiyel denklemler seti elde edilmiştir. Bu denklemler ardışık olarak çözülürse aşağıdaki değişken katsayılı Korteweg-de Vries denklemi elde edilir

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \mu_1 U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \mu_2 \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} + \mu_3 a \tau \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0. \quad (8)$$

Bu bölümde ikinci olarak, içi viskoz akışkanla dolu yarıçapı değişken elastik tüplerde zayıf nonlinear dalgaların yayılımı incelenmiştir. (1), (2) ve (3) alan denklemleri u , v , v_z ve p bilinmeyenlerini belirlemek için yeterli olmadığından, bilinmeyenlerden birini (v_z) elimine etmek için iki farklı yaklaşım kullanılacaktır.

1.Yaklaşım: İlk yaklaşım olarak, sistemi kapatmak için, $y = (\lambda_\theta + u + \phi z - x)\varepsilon^2$ dönüşümü kullanılacak ve $\nu = \varepsilon^\beta \bar{\nu}$ olarak alınacaktır. Burada β viskozitenin mertebesini göstermektedir. Bu durumda (3) denklemi aşağıdaki formu alır

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = \varepsilon^\beta \bar{\nu} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - 2\varepsilon^{\beta+2} \frac{\bar{\nu}}{\lambda_\theta + \phi z + u} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} \right)_{y=0}. \quad (9)$$

(6), (7) açılımları (1), (2) ve (9) alan denklemlerinde yerine konur ve ε 'un benzer kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse bir diferansiyel denklemler seti elde edilir. Bu denklemler ardışık olarak çözülürse aşağıdaki evolüsyon denklemleri elde edilir

(i) $\alpha = 1/2$ ve $\beta = 3/2$ için aşağıdaki değişken katsayılı Korteweg-de Vries (KdV) denklemi elde edilir

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \mu_1 U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \mu_2 \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} + \mu_3 a \tau \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0. \quad (10)$$

(ii) $\alpha = 1/2$ ve $\beta = 1/2$ için aşağıdaki değişken katsayılı Korteweg-de Vries Burgers (KdVB) denklemi elde edilir

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \mu_1 U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \mu_2 \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} + \mu_3 a \tau \frac{\partial U}{\partial \xi} + \mu_4 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = 0. \quad (11)$$

2.Yaklaşım: Bu halde sistemi kapatmak için başka bir yaklaşım kullanacağız. Bu yaklaşım aşağıdaki gibi ifade edilebilir

$$\bar{\nu} \frac{2}{\lambda_\theta + \phi z + u} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} \right)_{x=\lambda_\theta + \phi z + u} = -\bar{\nu} \frac{8v}{(\lambda_\theta + \phi z + u)^2}. \quad (12)$$

Bu durumda (3) denklemi aşağıdaki formu alır

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = \varepsilon^\beta \bar{\nu} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{8v}{(\lambda_\theta + \phi z + u)^2} \right). \quad (13)$$

1.Yaklaşım'da açıklanan çözüm yöntemi izlenerek, $\alpha = 1/2$ ve $\beta = 3/2$ için aşağıdaki değişken katsayılı pertürbe-KdV denklemi elde edilir

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \mu_1 U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \mu_2 \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} + \mu_3 a \tau \frac{\partial U}{\partial \xi} + \mu_6 U = 0. \quad (14)$$

Bölüm 4'ün sonunda (10), (11) ve (14) ile verilen evolüsyon denklemlerine ilerleyen dalga çözümleri sunulmuş ve dalga yayılım hızları da verilmiştir.

Nonlinear Dalga Modülasyonu

Bölüm 5'te iki farklı modülasyon problemi incelenmiştir. İlk olarak içi viskoz olmayan akışkan ile dolu yarıçapı değişken elastik tüplerde nonlinear dalgaların genlik modülasyonu incelenmiştir. Dispersiyon bağıntısının incelenmesi ve problemin bir sınır değer problemi olarak kabul edilmesinin bir sonucu olarak aşağıdaki formda bir koordinat dönüşümünü tanımlanmıştır

$$\xi = \epsilon(z - \lambda t), \quad \tau = \epsilon^2 z. \quad (15)$$

Burada, ϵ nonlinearitenin zayıflığını karakterize eden küçük bir parametre, λ ise çözümden belirlenecek olan bir sabittir.

Tüpün yarıçapının değişimini hesaba katmak için, yarıçapın değişimini karakterize eden Φ ve ϕ açılarını ϵ^3 mertebesinde kabul etmek gerekmektedir. Bu durumda, sözkonusu açılar $\Phi = A\epsilon^3$, $\phi = a\epsilon^3$ biçiminde ifade edilebilirler. Burada A ve a sırasıyla şekil değiştirmeden önceki ve sonraki yarıçap değişimini karakterize eden sabitlerdir. Bu çalışmada, doğrultmanların, şekil değiştirmenin öncesi ve sonrasında birbirlerine paralel kaldığını varsayacağız. Bu durumda, a ve A parametreleri arasındaki ilişki $a = \frac{\lambda_0}{\lambda_z} A$ haline gelir. Ayrıca alan değişkenlerinin aşağıdaki formda ϵ cinsinden asimptotik seriye açılabilceği varsayacağız.

$$\begin{aligned} u &= \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \epsilon^3 u_3 + \dots, \\ w &= \epsilon w_1 + \epsilon^2 w_2 + \epsilon^3 w_3 + \dots, \\ p &= p_0 + \epsilon p_1 + \epsilon^2 p_2 + \epsilon^3 p_3 + \dots \end{aligned} \quad (16)$$

Burada $u_1, \dots, p_3$, (z, t) hızlı değişkenleri ve (ξ, τ) yavaş değişkenlerinin birer fonksiyonudurlar. (15) ve (16) açılımları (1), (4), (5) alan denklemlerinde yerine konur ve elde edilen denklemlerde ϵ 'un benzer kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse bir diferansiyel denklemler seti elde edilir. Bu denklemler ardışık olarak çözülürse aşağıdaki değişken katsayılı nonlinear Schrödinger denklemi elde edilir

$$i \frac{\partial U}{\partial \tau} + \mu_1 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \mu_2 |U|^2 U + i \mu_3 \tau \frac{\partial U}{\partial \xi} + \mu_4 \tau^2 U + \mu_5 \xi U = 0. \quad (17)$$

Bu bölümün sonunda (17) ile verilen evolüsyon denklemine ilerleyen dalga tipi çözüm sunulmuş ve ilerleyen dalga ve zarf dalganın hız ifadeleri verilmiştir. Bu hızların bazı parametrelerle değişimi tartışılmıştır.

İkinci bölümde ise, içinde viskoz olmayan akışkan bulunan, ince elastik tüplerde marjinal halde zayıf nonlinear dalgaların genlik modülasyonu problemi incelenmiştir. Yarıçap değişiminin probleme etkisi işlemleri çok karmaşık hale getirdiği için bu etki ihmal edilmiştir. Tanımlanan bu probleme ait boyutsuz

alan denklemleri aşağıdaki gibi verilebilir

$$\begin{aligned} p_0 + p &= \frac{m}{\Lambda_\theta} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{\Lambda_\theta} \frac{\partial \Sigma}{\partial \Lambda_\theta} - \frac{1}{\Lambda_\theta} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\Lambda_z} \frac{\partial \Sigma}{\partial \Lambda_z} \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ 2 \frac{\partial u}{\partial t} + (1 + u) \frac{\partial w}{\partial z} + 2w \frac{\partial u}{\partial z} &= 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Bu modülasyon problemini inceleyebilmek için indirgeyici pertürbasyon yöntemi kullanılarak aşağıdaki koordinat dönüşümü tanımlanmıştır

$$\xi = \epsilon^\alpha (z - \lambda t), \quad \tau = \epsilon^{2\alpha} t. \quad (19)$$

Burada ϵ nonlinearitenin zayıflığını ölçen küçük bir parametre, λ daha sonra grup hızına eşit olduğu gösterilecek olan bir sabit ve α farklı sayısal değerler verilecek pozitif bir sayıdır. Ayrıca alan değişkenlerinin, ϵ parametresinin, hızlı değişkenler (z, t) ve yavaş değişkenler (ξ, τ) 'nin fonksiyonu olduğu varsayılacaktır. Ayrıca alan değişkenlerinin, ϵ parametresinin cinsinden aşağıda verilen biçimde asimptotik seriye açılacağı varsayılacaktır

$$\begin{aligned} u &= \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \epsilon^3 u_3 + \dots, \\ w &= \epsilon w_1 + \epsilon^2 w_2 + \epsilon^3 w_3 + \dots, \\ p &= \epsilon p_1 + \epsilon^2 p_2 + \epsilon^3 p_3 + \dots \end{aligned} \quad (20)$$

(19) ve (20) açılımları, (18) ile verilen alan denklemlerinde kullanılırsa $u_1, \dots, p_5$ alan değişkenlerini içeren bir diferansiyel denklemler kümesi elde edilir. Bu çalışmada, iki ayrı durum incelenmiştir. İlk halde, $\alpha = 1$ kabul edilmiştir. Bu durum keyfi bir dalga sayısı ve başlangıç deformasyonu için genlik modülasyonuna karşı gelir. Elde edilen bu denklemler kümesinde ϵ 'un benzer kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse bir diferansiyel denklemler seti elde edilir. Bu denklemler ardışık olarak çözülecek olursa aşağıdaki nonlinear Schrödinger denklemi elde edilir

$$i \frac{\partial U}{\partial \tau} + \mu_1 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \mu_2 |U|^2 U = 0. \quad (21)$$

$\mu_1 \mu_2$ çarpımının sıfır olduğu durumda “marjinal hal” ortaya çıkar. μ_1 katsayısı, grup hızının dalga sayısına göre türevine eşittir ve sıfır olması söz konusu değildir. Marjinal durumun oluşabilmesi için tek olasılık μ_2 katsayısının sıfır olmasıdır. Bu özel halde, NLS denklemi lineer Schrödinger denklemine dejenere olur. Bu da, nonlinearitenin ölçeklendirilmesi değişmeden, bu başlangıç deformasyonunda ve kritik dalga sayısı civarında, nonlinearitenin band genişliği ile dengelenemeyeceğini gösterir. Bu işlem ikinci halde incelenmiştir. Aslında, bu özel durum band genişliğinin daha dar olduğu veya nonlinearitenin mertebesinin arttırıldığı hale karşı gelir. İlk durumda açıklanan işlem dizgesi uygulanarak, evölüsyon denklemi olarak aşağıdaki genelleştirilmiş nonlinear Schrödinger denklemi (GNLS) elde edilmiştir

$$i \frac{\partial V}{\partial \tau} + \mu_1 \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + i \mu_3 |V|^2 \frac{\partial V}{\partial \xi} + i \mu_4 V \frac{\partial |V|^2}{\partial \xi} + \mu_5 |V|^4 V = 0. \quad (22)$$

Bu bölümün sonunda, (GNLS) denkleminin bazı kesin çözümleri sunulmuştur.

NONLINEAR WAVE PROPAGATION IN FLUID FILLED TAPERED ELASTIC TUBES

SUMMARY

In this work, nonlinear wave propagation in a prestressed tapered thin elastic tube filled with an incompressible fluid is studied. In Chapter 1, the historical evolution of the subject and some theoretical works in the existing literature on this area are presented. In Chapter 2, the basic equations governing the motion of a prestressed tapered thin elastic tube filled with an incompressible viscous/inviscid fluid are derived. In Chapter 3, a brief summary of the perturbation methods that we shall utilize in this work is given. In Chapter 4, by employing the reductive perturbation method, the propagation of weakly nonlinear waves in a tapered elastic tube filled with an incompressible fluid is studied for both inviscid and viscous fluid cases. For inviscid fluid case, variable coefficient Korteweg-de Vries equation is obtained as the evolution equation. For viscous fluid case, by using two different approximations, depending on the perturbation and the viscosity parameters, variable coefficient Korteweg-de Vries-Burgers equation and variable coefficient perturbed Korteweg-de Vries equation are obtained as the evolution equations. At the end of this chapter, the progressive wave solutions to these evolution equations are given and it is shown that the wave speeds increase with distance for narrowing tubes while they decrease for expanding tubes. Chapter 5 is devoted to the nonlinear wave modulation. This problem is investigated in two different subsections. In the first subsection, the amplitude modulation of nonlinear waves in a fluid-filled tapered elastic tube is studied. By considering the blood as an incompressible inviscid fluid and employing the reductive perturbation method, the evolution equation is obtained as nonlinear Schrödinger equation with variable coefficients. It is shown that this evolution equation admits a solitary wave type of solution with variable wave speed. By sketching some graphs, it is observed that the speeds of both the progressive and enveloping waves increase with distance for expanding tubes while they decrease with distance for narrowing tubes. In the second subsection of Chapter 5, nonlinear wave modulation in fluid-filled thin elastic tubes near the marginal state is investigated. Due to difficulties in calculations resulting from the inclusion of tapering, this effect is neglected for this case. The field equation for the case of constant radius are re-derived. By employing the reductive perturbation method, generalized nonlinear Schrödinger equation is obtained as the evolution equation. Finally, some exact solutions of this evolution equation are given.

Basic Equations

Treating the arterial tree as a tapered, thin walled, long and circularly conical prestressed elastic tube and blood as an incompressible fluid, the nonlinear equations of motion are given as follows.

Nonlinear equations of a tapered elastic tube :

$$p = \frac{m}{\lambda_z^2} (1 + \Phi^2)^{1/2} \frac{(\lambda_z + \Phi z)}{(\lambda_\theta + \phi z + u)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\nu(\phi + \frac{\partial u}{\partial z})}{(\lambda_\theta + \phi z + u)} v + \frac{(1 + \Phi^2)^{1/2}}{\lambda_z(\lambda_\theta + \phi z + u)} \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_2} - \frac{1}{\lambda_z(\lambda_\theta + \phi z + u)} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{(\phi + \frac{\partial u}{\partial z})(\lambda_z + \Phi z)}{[1 + (\phi + \frac{\partial u}{\partial z})^2]^{1/2}} \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_1} \right\}, \quad (1)$$

where λ_z is the stretch ratio in the axial direction after the static deformation, Φ is the tapering angle of the tube in undeformed configuration, ϕ is the tapering angle after the static deformation, $\mu\Sigma$ is the strain energy density function of the tube material, p is the fluid pressure and λ_1 and λ_2 are the stretch ratios in the final configuration.

Equations of fluid :

The approximate equations of a viscous fluid may be given as follows

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \left(\phi + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{2}(\lambda_\theta + \phi z + u) \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{2\nu}{\lambda_\theta + \phi z + u} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} \right)_{x=\lambda_\theta + \phi z + u}, \quad (3)$$

where v is the averaged axial fluid velocity, v_z is the velocity component in the axial direction and ν is the viscosity of fluid. If we set the viscosity parameter ν equal zero, we obtain the field equations of an inviscid fluid as

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \left(\phi + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{2}(\lambda_\theta + \phi z + u) \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (5)$$

Weakly Nonlinear Waves

In this part, the propagation of weakly nonlinear waves in a fluid filled tapered elastic tube is investigated in two different cases. As the first step, the reductive perturbation scheme is introduced. For this type of problems, it is convenient to introduce the following type of stretched coordinates

$$\xi = \varepsilon^\alpha (z - gt), \quad \tau = \varepsilon^{\alpha+1} z, \quad (6)$$

where ε is a small parameter measuring the weakness on nonlinearity and dispersion, g is a scale parameter and α is a positive number which will be called the perturbation parameter. Here, the field quantities are assumed to be the functions of the stretched variables (ξ, τ) and the smallness parameter ε . In order to take the effect of the tapering into account, the stretching coordinates given in (6) suggest us that the order of tapering angles Φ and ϕ should be of $\varepsilon^{\alpha+2}$. We further assume that the field quantities can be expressed as some asymptotic series of the form

$$u = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots, \quad v = \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots,$$

$$v_z = \varepsilon v_{z1} + \varepsilon^2 v_{z2} + \dots, \quad p = p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots, \quad (7)$$

where $u_1, \dots, p_2$ are some unknown functions of the stretched coordinates (ξ, τ) .

In the first part of the Chapter 4, the propagation of weakly nonlinear waves in a tapered elastic tube filled with an inviscid fluid is investigated. In this case, the perturbation parameter α is set equal to $1/2$ and the expansions (6), (7) are introduced into the field equations (1), (4), (5). By setting the coefficients of like powers of ε to zero, we obtain a set of differential equations. If these equations are solved simultaneously, we obtain the following variable coefficient Korteweg-de Vries equation

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \mu_1 U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \mu_2 \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} + \mu_3 a \tau \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0. \quad (8)$$

In the second part of this chapter, the propagation of weakly nonlinear waves in a tapered elastic tube filled with a viscous fluid is investigated. Since the field equations (1), (2) and (3) are not enough to determine the unknowns u , v , v_z and p , two different approximations are used to eliminate one of the unknowns (v_z).

Case I: In this first case, we will use the transformation $y = (\lambda_\theta + u + \phi z - x)\varepsilon^2$ and assume that $\nu = \varepsilon^\beta \bar{\nu}$ in order to close the system. Here, β characterizes the order of the fluid viscosity. Then equation (3) becomes

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = \varepsilon^\beta \bar{\nu} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - 2\varepsilon^{\beta+2} \frac{\bar{\nu}}{\lambda_\theta + \phi z + u} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} \right)_{y=0}. \quad (9)$$

By introducing the expansions (6), (7) into the field equations (1), (2) and (9) and setting the coefficients of like powers of ε to zero we obtain a set of differential equations. By solving these differential equations the following evolution equations are obtained

(i) For $\alpha = 1/2$ and $\beta = 3/2$ we obtain the following variable coefficient Korteweg-de Vries (KdV) equation as

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \mu_1 U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \mu_2 \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} + \mu_3 a \tau \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0. \quad (10)$$

(ii) For $\alpha = 1/2$ and $\beta = 1/2$ we obtain the following variable coefficient Korteweg-de Vries Burgers (KdVB) equation as

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \mu_1 U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \mu_2 \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} + \mu_3 a \tau \frac{\partial U}{\partial \xi} + \mu_4 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = 0. \quad (11)$$

Case II: In this case, we will use another approximation in order to close the system. This approximation can be given as follows

$$\bar{\nu} \frac{2}{\lambda_\theta + \phi z + u} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} \right)_{x=\lambda_\theta + \phi z + u} = -\bar{\nu} \frac{8v}{(\lambda_\theta + \phi z + u)^2}. \quad (12)$$

Then equation (3) becomes

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = \varepsilon^\beta \bar{\nu} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{8v}{(\lambda_\theta + \phi z + u)^2} \right). \quad (13)$$

By following the same procedure given in the Case I, for $\alpha = 1/2$ and $\beta = 3/2$ we obtain the variable coefficient perturbed-KdV equation as follows

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \mu_1 U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \mu_2 \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} + \mu_3 a \tau \frac{\partial U}{\partial \xi} + \mu_6 U = 0. \quad (14)$$

At the end of the Chapter 4, the progressive wave solution to the evolution equations (10), (11) and (14) are presented. The propagation speeds are also given.

Nonlinear Wave Modulation

In Chapter 5, two different modulation problems are studied. In the first part, the amplitude modulation of nonlinear waves in a tapered elastic tube filled with an inviscid fluid is investigated. Analyzing the dispersion relations and considering that the problem of concern is the boundary value problem, the following stretched coordinates may be introduced

$$\xi = \epsilon(z - \lambda t), \quad \tau = \epsilon^2 z, \quad (15)$$

where ϵ is a small parameter measuring the weakness of nonlinearity and λ is a scale parameter to be determined from the solution.

In order to take the effect of tapering into account, the order of the tapering angles should be ϵ^3 . Hence, the tapering angles can be expressed as $\Phi = A\epsilon^3$, $\phi = a\epsilon^3$ where A and a are some finite constants describing the tapering angles before and after static deformation. We shall assume that the generators before and after finite static deformation remain parallel to each other. For this case, the relation between a and A becomes $a = \lambda_\theta / \lambda_z A$. We assume that the field variables can be expanded into an asymptotic series of ϵ as follows

$$\begin{aligned} u &= \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \epsilon^3 u_3 + \dots, \\ w &= \epsilon w_1 + \epsilon^2 w_2 + \epsilon^3 w_3 + \dots, \\ p &= p_0 + \epsilon p_1 + \epsilon^2 p_2 + \epsilon^3 p_3 + \dots, \end{aligned} \quad (16)$$

where $u_1, \dots, p_3$ are functions of the fast variables (z, t) and the slow variables (ξ, τ) . Introducing (15) and (16) into the field equations (1), (4), (5) and setting the coefficients of like powers of ϵ to zero, we obtain a set of differential equations. By solving these equations simultaneously, we obtain the following variable coefficient nonlinear Schrödinger equation

$$i \frac{\partial U}{\partial \tau} + \mu_1 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \mu_2 |U|^2 U + i \mu_3 \tau \frac{\partial U}{\partial \xi} + \mu_4 \tau^2 U + \mu_5 \xi U = 0 \quad (17)$$

At the end of this part, a progressive wave type of solution is presented to equation (17) and the speeds of the progressive wave and the enveloping wave are given. The variation of these wave speeds with respect to some parameters are discussed.

In the second part of this chapter, the modulations of nonlinear waves near the marginal state of instability in fluid filled elastic tubes are investigated. Since the tapering effect makes all the calculations very complicated, we consider the constant radius case. The non-dimensionalized field equations of the related problem may be given as follows

$$p_0 + p = \frac{m}{\Lambda_\theta} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{\Lambda_\theta} \frac{\partial \Sigma}{\partial \Lambda_\theta} - \frac{1}{\Lambda_\theta} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\Lambda_z} \frac{\partial \Sigma}{\partial \Lambda_z} \frac{\partial u}{\partial z} \right),$$

$$\begin{aligned}
2\frac{\partial u}{\partial t} + (1+u)\frac{\partial w}{\partial z} + 2w\frac{\partial u}{\partial z} &= 0, \\
\frac{\partial w}{\partial t} + w\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} &= 0.
\end{aligned} \tag{18}$$

In order to investigate the modulation problem, we employ the reductive perturbation method and introduce the following coordinate stretching

$$\xi = \epsilon^\alpha(z - \lambda t), \quad \tau = \epsilon^{2\alpha}t, \tag{19}$$

where ϵ is a small parameter measuring the weakness of nonlinearity, λ is a constant which will be shown to be the group velocity and α is a positive integer which will be specified later. We shall assume that the field quantities are functions of ϵ , the fast variables (z, t) and slow variables (ξ, τ) . We assume that the field quantities can be expanded into an asymptotic series of ϵ as

$$\begin{aligned}
u &= \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \epsilon^3 u_3 + \dots, \\
w &= \epsilon w_1 + \epsilon^2 w_2 + \epsilon^3 w_3 + \dots, \\
p &= \epsilon p_1 + \epsilon^2 p_2 + \epsilon^3 p_3 + \dots
\end{aligned} \tag{20}$$

Introducing the expansions (19) and (20) into the field equations (18) we obtain a set of differential equations governing the functions $u_1, \dots, p_5$. In this work, two cases are studied separately. In the first case we set $\alpha = 1$. This special case corresponds to the amplitude modulation for an arbitrary wave number and initial deformation. By setting the coefficients of like powers of ϵ equal to zero we obtain a set of differential equations. By solving these equations simultaneously we obtain the following nonlinear Schrödinger equation

$$i\frac{\partial U}{\partial \tau} + \mu_1 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \mu_2 |U|^2 U = 0. \tag{21}$$

The marginal state occurs when $\mu_1 \mu_2$ vanishes. The coefficient μ_1 is related to the derivative of group velocity with respect to wave number and does not vanish. The only possibility for such a critical state to occur is vanishing μ_2 . When μ_2 vanishes, the nonlinear Schrödinger equation degenerates into the linear one. This means that near this critical wave number and initial deformation, the nonlinearity cannot be balanced by the band-width unless one rescales the nonlinearity. This is done in the second case by setting $\alpha = 2$. Actually, this special case corresponds to the narrower band-width or to stronger nonlinearity. Applying the same procedure explained in the first case, we obtain the following generalized nonlinear Schrödinger equation (GNLS) as the evolution equation

$$i\frac{\partial V}{\partial \tau} + \mu_1 \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + i\mu_3 |V|^2 \frac{\partial V}{\partial \xi} + i\mu_4 V \frac{\partial |V|^2}{\partial \xi} + \mu_5 |V|^4 V = 0. \tag{22}$$

At the end of this part, some exact solutions to GNLS equation are presented.

1. GİRİŞ

1.1 Giriş ve Kısa Tarihsel Gelişim

İçinde akışkan bulunan öngerilmeli veya öngerilmesiz, elastik veya viskoelastik tüp içerisinde lineer veya nonlinear dalga yayılımı problemi, üzerinde oldukça uzun zamandan beri çalışılmakta olan bir konudur. Bu problemin biyomühendislik açısından önemi kısaca şöyle özetlenebilir: Büyük damarlarda dalga yayılım problemi incelenerek, dalga hızının ve aktarma katsayısının çeşitli parametrelere göre değişimini matematiksel olarak izlemek mümkün olacak, bu değerlerde zamanla görülen farklılaşmalar yorumlanarak, kan veya damar malzemesinin yapısındaki değişimleri gözlemlemek olası hale gelecektir. Bu nedenle, kan ve damar ikilisi modellenirken, hem tüp malzemesinin hem de kanın mekanik özellikleri dikkate alınarak probleme gerçekçi bir yaklaşım kazandırılmalıdır.

Silindirik tüpler içerisinde dalga yayılımı problemi ilk olarak Thomas Young (1773-1829) [1] tarafından ortaya konmuş ve incelenmiştir. Bilindiği kadarıyla Thomas Young, 1808'de insan atardamarlarında (arterilerde) yayılan pals (vuru) dalgalarının hızını hesaplayan ilk bilim adamı olup, bugün bu hız kendi adıyla anılan dalga modu olarak bilinir. Young'ın çalışması, daha sonra bu konulara ilgi duyan pek çok araştırmacıyı tüp içerisinde dalga yayılımı problemi üzerinde çalışmaya yönlendirmiştir. Bu araştırmacılardan bir kısmı Young tarafından bulunan pals dalgalarının hızını tekrar yorumlamış ve formüle etmişlerdir.

Weber kardeşlerin, Young'dan hemen sonra bu konular üzerine çalıştığı görülmektedir. Wilhelm Eduard Weber (1804-1896), fizikçi olup anatomist olan Ernest Heinrich Weber (1795-1878) ile birlikte çalışarak dalgaların arterilerdeki dallanma noktalarındaki yansıma ve dalganın aktarılması konuları üzerindeki bulguları ile biyofiziğin ilk uygulamalarını vermişlerdir. Weberler'in çalışmalarını, Moens'in deneysel ve Korteweg'in teorik çalışmaları izlemiştir. Moens ve Korteweg, içi viskoz olmayan akışkan ile dolu ince elastik tüplerde dalga yayılımı problemini incelemişlerdir. Uzun dalga boyuna karşı gelen faz hızı

günümüz literatüründe Moens-Korteweg hızı, ilgili dalga da Moens-Korteweg modu olarak anılır. Viskozitenin dalga hızına olan etkisini inceleyen ilk bilim adamı ise Witzig [2]'dir. Tüplerde dalga yayılması ile ilgili diğer katkılar Morgan ve Kiely [3] ve Womersley [4] tarafından yapılmıştır. Literatürde 1950 yılına kadar bu konuda yayınlanmış çalışmaların bir dökümünü Lambossy [5]'de bulmak mümkündür.

Buraya kadar anılan çalışmalarda atardamarların maruz kaldığı ön gerilme pek dikkate alınmamıştır. 1966 yılında Atabek ve Lew [6] eksenel ve radyal doğrultuda bir öngerilmeye maruz ince elastik tüp halinde, statik ön gerilme üzerine küçük dinamik yerdeğiştirmeler süperpoze ederek tüpün ve viskoz akışkanın hareket denklemlerini elde etmişler ve bu denklemlere harmonik dalga tipi çözümler arayarak dispersiyon bağıntısını elde etmişlerdir. Öngerilme dışında bu model Womersley modelinden başka birşey değildir. Daha sonra Atabek [7], aynı yaklaşımı kullanarak ortotropik ve viskoelastik bir tüp içerisinde hareket eden viskoz akışkanın içindeki harmonik dalga hareketini ve öngerilmenin dalga karakteristiklerine olan etkilerini incelemiştir. Çalışmada söz ettikleri malzemenin genel bünye bağıntısı bilinmediğinden Atabek ve Lew [6] ve Atabek [7]'in çalışmalarında artımsal gerilmede elastik katsayılar sabit olarak alınmıştır. Aslında bu katsayılar teğetsel malzeme sabitlerine karşı geldiğinden bunlar birer sabit olmayıp ön şekil değiştirmeye bağlı birtakım katsayılardır, dolayısıyla şekil değiştirme ile birlikte değişirler. Mirsky [8], benzer bir çalışmada, büyük ön şekil değiştirmenin dalga hızına olan etkisini sayısal olarak incelemiştir. Bütün bu çalışmalarda tüpün ince olduğu kabul edilmiş ve ilgili membran denklemleri kullanılmıştır.

Cox [9,10], tüp malzemesi için sıkışmaz viskoelastik katı, akışkan için de lineerleştirilmiş Navier-Stokes denklemlerini kullanıp kalın tüp halinde harmonik dalga yayılma problemini incelemiş ve dispersiyon bağıntısını elde etmiştir.

Rubinov ve Keller [11], içerisinde sıkışan Newton akışkanı bulunan ve dış yüzeyinden eksenel doğrultuda harekete engel olunmuş bir viskoelastik kalın tüp içerisindeki eksenel simetrik dalga hareketini incelemişler ve dispersiyon bağıntısını elde etmişlerdir. Bu durumda, genellikle dispersiyon bağıntısının incelenmesi oldukça karmaşık olduğundan viskoz etkilerin ihmal edildiği durum incelenmiş ve sonsuz sayıda dalga modu elde etmişlerdir. Aynı bilim adamları daha sonraki bir çalışmalarında viskozitenin etkisini de dikkate almışlar, dalga sayısının frekans cinsinden asimptotik değerlerini elde etmişlerdir [12].

Atabek ve Lew [6]'nin çalışması dışında atardamarlardaki ön gerilmeyi dikkate

alan pek olmamıştır. Rachev [13] içinde sıkışmaz ve viskoz akışkan bulunan ön gerilmeli ince tüp içerisinde eksenel simetrik dalga yayılması problemini incelemiş ve dispersiyon bağıntısını elde etmiştir. Damarı saran kas aktivitesinin dalga hareketine olan etkisini uygun bir şekilde hesaba katmış ve dalga faz hızının ve aktarma katsayısının iç basınç, eksenel germe ve yaşlılık ile değişimi verilmiştir.

Moodie ve çalışma arkadaşları [14], içerisinde viskoz olmayan bir akışkan bulunan yarı sonsuz viskoelastik bir tüp için sınır değer problemini incelemiş ve basınç dalgalarının nasıl oluştuğunu ve yayıldığını tartışmış ve elastik analiz ile karşılaştırmasını yapmışlardır. Sawatzky ve Moodie [15] aynı problemi viskoz akışkan hali için ele almışlar, dispersiyon bağıntısını uzun dalga boyu ve yüksek frekans halleri için elde edip viskoz olmayan hal ile karşılaştırmışlardır. Bu konuda daha fazla bilgi Rudinger [16], Skalak [17], Attinger [18] tarafından yapılmış derleme makalelerden ve McDonald [19] ve Fung [20] tarafından hazırlanmış kaynak kitaplardan elde edilebilir. Yukarıda sözü edilen çalışmaların büyük bir bölümünde atardamarların ön şekil değiştirmesi pek dikkate alınmamış, ön gerilmeyi dikkate alan birkaç çalışmada da malzemenin nonlinear bünye denklemi bilinmediğinden artımsal elastik katsayıların ön şekil değiştirmeye olan ilişkisi sağlıklı bir şekilde incelenememiştir. Örneğin, ön şekil değiştirmenin özelliğine bakmaksızın artımsal gerilmeler için klasik Hooke yasası kabul edilmiş ve elastik katsayıların sabit olduğu düşünülmüştür. Gerçekte bu katsayılar sabit olmayıp ön şekil değiştirmeye bağlıdır. Bu konu ilk defa etraflı bir şekilde Demiray ve çalışma arkadaşları [21] tarafından, “büyük statik ön deformasyon üzerine küçük yer değiştirmelerin süperpozisyonu teorisi” kullanılarak incelenmiş ve literatürdeki mevcut çalışmalar ile karşılaştırılması yapılmıştır.

Şimdiye kadar kısaca sözü edilen çalışmaların hepsinde, modellenmeye çalışılan dalga hareketinin genliği küçük kabul edilmiş ve birtakım varsayımlar altında tüp ve akışkan denklemleri lineerleştirilmiştir. Oysa dalganın genliği büyük ise, dalganın hareketini yöneten kısmi türevli diferansiyel denklemleri lineerleştirmek mümkün değildir. Ayrıca pals dalgaları ile ilgili yapılan deneysel çalışmalar, nonlinear terimin maksimum katsayısının lineer terime oranının 0.2 mertebesinde olduğunu ve dolayısıyla nonlinear terimlerin ihmal edilmesinin damarlarda pulsatif hareketi tanımlamada önemli bir hataya yol açacağını göstermiştir.

Arterilerdeki pals dalgalarının nonlinear analizi ilk kez 1972 yılında Ling ve Atabek [22] tarafından ele alınmıştır. Kanı sıkışmaz ve Newtonyen bir akışkan kabul ederek, kan için iki boyutlu Navier-Stokes denklemlerini ve

süreklilik denklemini almışlar, elde ettikleri sonuç denklemleri sonlu farklar yöntemini kullanarak çözmüşlerdir. Daha sonra 1980 yılında Lamb [23], damarı elastik halkaların birleşiminden oluşmuş bir tüp biçiminde gözönüne alarak, yönetici denklem olarak Korteweg-de Vries denklemini elde etmiştir. Engelbrecht [24] benzer hareket denklemleri alarak (bir boyutlu ve iki boyutlu durumlarda), içi akışkan ile dolu elastik tüplerde küçük genlikli basınç dalgalarının KdV denklemi ile yönetildiğini göstermiştir. Engelbrecht [25] yaptığı deneylerde damarlarda basınç dalgalarının önünün dikleştiğini ve damar kesit alanı ve basınç cinsinden ifade edilen dalga hızının nonlinear olduğunu gözlemlemiştir. Ayrıca McDonald [19] büyük damarlarda pals dalgalarının yayılırken genişliğinin azaldığını ve maksimum genliğinin arttığını gözlemlemiştir. Bu olay, dalga problemlerinde dikleşme (steeping) ve sivrileşme (peaking) olarak bilinir. Dalga önünün dikleşmesi nonlinearite nedeniyle olur ve bu tür dikleşme aortta ve büyük damarlarda sıkça gözlenir. Normal koşullarda böyle bir dikleşme ortaya çıkmaz [26]. Ancak damarları anormal genişleyen veya büyük pals genliklerinin bulunduğu hastalarda bu dikleşme oldukça önemlidir.

İçerisinde akışkan bulunan elastik veya viskoelastik tüplerde sonlu genlikli dalgaların yayılımı, birçok araştırmacı tarafından karakteristikler metodu kullanılarak incelenmiştir. İlk kez Lambert [27] nonlinear kan akımının hesaplanması için karakteristikler metodunun kullanılmasını önermiştir. Ancak Lambert'in seçtiği sayısal parametrelerle yapılan çalışmalar gerçeğe uygun sonuçlar vermemiştir. Bununla ilgili sonuçlar Skalak [17]'da bulunabilir. Rudinger [16], Anliker [28,29] ve diğer araştırmacılar tarafından geliştirilen bir boyutlu nonlinear yaklaşımda temel denklemler akışkanın hareket denklemi, süreklilik denklemi ve damar duvarının davranışını tanımlayan denklemlerdir. Damar duvarının davranışını tanımlayan denklemlerde kesit alanının, tüp boyunca uzaklığın ve basıncın bilinen bir fonksiyonu olduğu kabul edilmiştir. Rudinger [16]'ın tek boyutlu yaklaşımı içinde incelediği denklemler süreklilik ve momentum denklemleridir. Rudinger [30], içi viskoz olmayan akışkanla dolu, yarı sonsuz, düzgün genişleyen tüplerde sonlu genlikli dalgaların yayılımını incelemiş ve karakteristikler yöntemini kullanarak şok formu için bir ifade elde etmiştir. Daha sonra Hoogstraten ve Smith [31] düzgün olmayan tüplerde sürtünme terimini de ilave ederek Rudinger'in yaptığı çalışmayı genelleştirmiştir. Tait ve Moodie [32] ise içinde viskoz olmayan akışkan bulunan ince elastik (viskoelastik) tüplerde dalga yayılımını karakteristikler yöntemi ile incelemişler ve Mooney-Rivlin malzemesi için şeklini değiştirmeden yayılan dalga formunda basit fakat kesin çözümler elde etmişlerdir.

Dissipatif ve dispersif ortamlarda zayıf nonlinear dalgaların uzak alan davranışı

bazı bilinen nonlinear evolüsyon denklemleri ile tanımlanabilir. Örneğin, dissipatif ortamlarda Burgers denklemi, dispersif ortamlarda ise Korteweg-de Vries (KdV) denklemi bilinen en basit evolüsyon denklemleridir. Dissipasyon, dispersiyon ve nonlinearite arasında bir denge varsa KdV ve Burgers denklemlerinin birleşimi olarak gösterilen Korteweg-de Vries Burgers (KdVB) denklemi elde edilir.

Hashizume [33] ve Yomosa [34] içerisinde viskoz olmayan akışkan bulunan ince nonlinear elastik bir tüpte zayıf nonlinear dalgaların yayılmasının KdV denklemi ile yönetildiğini göstermişler ve büyük damarlarda görülen dikleşme ve sivrileşme olayını tartışmışlardır.

Viskoelastik tüplerde zayıf nonlinear dalga yayılımı ile ilgili önemli incelemeler arasında Ravindran ve Prasad [35], Swaters ve Sawatzky [36]'nin yaptığı çalışmalar sayılabilir.

Zayıf nonlinear dalgaların yayılımı ile ilgili çalışmalarda akışkanın viskozitesi ve tüpün aksenal yöndeki hareketi ihmal edilmiştir. Ancak Johnson [37] içi viskoz akışkanla dolu elastik bir tüpte laminar elastik sıçramayı inceleyerek sıçramaların KdVB denklemi ile yönetildiğini göstermiştir. Cowley [38] ise sınır tabakası yaklaşımını kullanarak, içi viskoz akışkanla dolu elastik bir tüpte laminar elastik sıçramaların viskozite-KdV ile yönetildiğini göstermiştir. Mainardi ve Buggish [39] ise içi akışkanla dolu ince ve elastik tüpte nonlinear dalgaların yayılımı üzerine viskozitenin etkilerini gösterebilmek için bir analiz geliştirmişler ve sınır tabakası yaklaşımını kullanarak, bir boyutlu teoremin denklemlerinin, viskoziteden dolayı Laplace konvolüsyon integralini içeren tek bir nonlinear dalga denklemine eşdeğer olduğunu göstermişlerdir. İçi akışkanla dolu genişleyen tüplerde küçük fakat sonlu genlikli dalgaların yayılımı birçok araştırmacı tarafından çeşitli asimptotik yöntemler kullanılarak incelenmiş ve KdV, Burgers ve KdVB evolüsyon denklemleri elde edilmiştir. Hashizume [40] yine içerisinde viskoz akışkan bulunan ve yarıçapı aksenal koordinat ile değişen elastik tüpte zayıf nonlinear dalgaların yayılımının pertürbe KdV denklemi ile yönetildiğini göstermiştir.

Şimdiye kadar sözü edilen çalışmalarda atardamarların maruz kaldığı ön gerilmeler dikkate alınmamıştır. Oysa yapılan deneysel çalışmalar damarların ön iç basınca ek olarak aksenal yönde 1.5-1.7 mertebesinde bir aksenal germeye maruz kaldığını göstermektedir. Bu nedenle tüpün şekil değiştirme analizinde ön şekil değiştirmelerin de gözönünde bulundurulması gerekir. Demiray [41] bu etkileri de hesaba katarak içerisinde viskoz olmayan akışkan bulunan ince elastik tüplerde zayıf nonlinear dalgaların yayılımının KdV.

denklemleri ile yönetildiğini göstermiştir. Diğer bir çalışmada Demiray [42] akışkanın eksenel hızının radyal hızdan daha büyük olduğu yaklaşımını kabul etmiş (hidrolik yaklaşım) ve Navier-Stokes denklemlerine kesit alanına göre ortalama işlemi uygulayarak akışkanın yaklaşık denklemlerini elde etmiştir. Bu yaklaşık akışkan denklemlerini kullanarak içinde viskoz akışkan bulunan öngerilmeli ince elastik tüpte zayıf nonlinear dalgaların yayılmasını incelemiş ve viskozitenin mertebesine bağlı olarak pertürbe-KdV ve KdV denklemlerini elde etmiştir. Demiray ve Antar [43] öngerilmeli nonlinear ince viskoelastik bir tüpte nonlinear dalga yayılımını incelemişler ve nonlinearite, dissipasyon ve dispersiyon arasındaki dengeye bağlı olarak Burgers, KdV ve KdVB denklemlerini elde etmişlerdir. Bu çalışmada, viskoelastik tüp malzemesi olarak Demiray tarafından önerilen yumuşak biyolojik doku modeli kullanılmıştır [44]. Akgün ve Demiray [45] ise içi viskoz olmayan akışkan ile dolu nonlinear viskoelastik tüpte zayıf nonlinear dalgaların yayılımının Burgers, KdV ve KdVB denklemleri ile verilebileceğini göstermişlerdir.

İçerisi akışkanla dolu elastik veya viskoelastik tüplerde basınç dalgalarının genlik modülasyonu birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Eğer dalga genliği yeterince küçük ise, birçok nonlinear sistem, nonlinear terimlerin ihmal edildiği harmonik dalga çözümüne izin verir ve genlik de zaman içinde sabit kalır. Eğer dalga genliği küçük fakat sonlu ise, nonlinear terimler ihmal edilemez ve genlik, uzay ve zaman parametrelerine göre değişken kalır. Eğer genlik salınım periyodu boyunca yavaş değişiyorsa, koordinat dönüşümü sistemi, salınımla ilgili olan hızlı değişen parça ve genlikle ilgili olan yavaş değişen parça olarak ikiye ayırmaya izin verir. Bu durumda çözüm asimptotik açılım formunda verilebilir ve dalga genlik modülasyonunu tanımlayan bir denklem türetilir. Nonlinear Schrödinger denklemi (NLS) dispersif ortamlarda bir boyutlu monokromatik düzlem dalgaların self modülasyonunu tanımlayan en basit yönetici denklemdir. NLS denklemi, nonlinearite ve dispersiyon arasında bir denge sergiler. Uygun koşullar altında böyle bir denge, modüle olmuş dalgaların genlikleri için, zarf yalnız dalgaları (envelope solitary waves) gibi kararlı bir yapının oluşmasını sağlar.

İçerisi akışkanla dolu tüplerde küçük fakat sonlu genlikli dalgaların nonlinear self modülasyonu problemi Ravindran ve Prasad [46] tarafından incelenmiştir. Söz konusu araştırmacılar lineer elastik tüp modelini göz önüne alarak basınç dalgalarının self modülasyonunun Nonlinear Schrödinger Denklemi (NLS) ile yönetildiğini göstermişlerdir. Erbay ve Erbay [47] ise tüpü nonlinear viskoelastik kabul ederek ve akışkanın yaklaşık denklemlerini kullanarak, basınç dalgalarının nonlinear modülasyonunun dissipatif Nonlinear Schrödinger

Denklemleri ile yönetildiğini göstermişlerdir. Demiray [48] içinde viskoz olmayan akışkan bulunan ince elastik tüplerde nonlinear dalga modülasyonu problemini ele almış, akışkanın yaklaşık denklemlerini kullanarak yönetici denklem olarak NLS denklemini elde etmiştir. Daha sonra Antar ve Demiray [49] içinde viskoz olmayan akışkan bulunan ince nonlinear elastik tüplerde zayıf nonlinear dalgaların genlik modülasyonunun Nonlinear Schrödinger Denklemi ile yönetildiğini göstermişlerdir. Akgün ve Demiray [50] ise içi viskoz olmayan akışkanla dolu, nonlinear viskoelastik tüplerde zayıf nonlinear, dissipatif fakat kuvvetli dispersif ortamlarda dalgaların genlik modülasyonunu incelemiş ve böyle bir ortamda yönetici denklem olarak dissipatif Nonlinear Schrödinger Denklemini elde etmişlerdir.

NLS denkleminin düzlem dalga çözümünün stabilitesi, denklemin katsayılarının çarpımının işaretine bağlıdır. Katsayıların çarpımının işareti negatif ise NLS denkleminin düzlem dalga çözümü stabildir; eğer sözkonusu çarpımın işareti pozitif ise çözüm stabil değildir. NLS denkleminin nonlinear teriminin katsayısı sıfır olduğunda ise, katsayılar çarpımı sıfırlanır ve bu durum “marjinal durum” olarak adlandırılır. Bu özel halde, NLS denklemi lineer Schrödinger denklemine dejenere olur. Bir başka deyişle, modülasyonun analizinde kullanılan asimptotik açılım, bu belirli dalga sayısı civarında geçersiz olur. Dolayısıyla, nonlinearitenin etkisinin, band genişliği ile dengelenecek biçimde arttırılması gerekir. Analizde kullanılacak olan asimptotik açılım, daha yüksek mertebeden nonlinearliği hesaplara dahil edecek biçimde modifiye edilmelidir. Yumuşak biyolojik dokular için Demiray [51] tarafından ortaya atılan kimi elastik ve viskoelastik malzemeler için belirli bir başlangıç şekil değiştirmesi ve belirli bir dalga sayısı için bu tür marjinal bir durumun ortaya çıkabileceği Erbay [52] tarafından incelenerek, böyle bir marjinal durumda, içi viskoz olmayan akışkanla dolu ince elastik tüplerde nonlinear dalgaların genlik modülasyonunu yöneten denklem olarak Genelleştirilmiş NLS (GNLS) denklemi elde edilmiştir. Kakutani ve Michihiro [53] ise gravitasyonel su dalgalarını gözönüne alarak böyle bir marjinal durumda nonlinear dalga modülasyonunu yöneten denklem olarak GNLS denklemini elde etmişlerdir. Parkes [54] genel bir sistem için zayıf nonlinear dispersif dalgaların genlik modülasyonunu yöneten yapıları formel olarak türeterek çözümün stabilitesine ilişkin kriterleri irdelemiş ve marjinal bir durum varsayımı altında, yönetici denklem olarak GNLS denklemini elde etmiştir. Kundu [55] GNLS denkleminin kesin çözümlerini Gauge dönüşümleri kullanarak ifade etmiştir. Clarkson ve Cosgrove [56] ise GNLS ailesine ait denklemlerin integre edilebilirlik koşullarını Painlevé analizi yöntemi ile ortaya koymuşlardır. Pathria ve Morris [57] GNLS denklemini, katsayıları arasında

belirli bir bağ koşulunun varolduğu yeni bir GNLS denklemine dönüştürerek çözüm yapılarını vermişlerdir. GNLS denklemi ailesine ait çeşitli çözüm ve analizler ile ilgili çalışmalar için [58]-[61] kaynaklarına başvurulabilir.

Bu çalışmada, içi akışkanla dolu değişken yarıçaplı elastik tüplerde nonlinear dalga yayılımı problemi incelenmiştir. İlk bölümde konunun tarihsel gelişiminden kısaca söz edilmiş ve şimdiye kadar bu konuda yapılmış çalışmalar özetlenmiştir. İkinci bölümde, çalışmanın temel yapısını oluşturacak olan, yarıçapı değişken ince elastik bir tüpün alan denklemleri elde edilmiştir. Çalışmada hem viskoz hem de viskoz olmayan akışkana ilişkin durumlar iki ayrı problem olarak ele alınacağından, ikinci bölümde ayrıca viskoz olan ve viskoz olmayan akışkanların hareket denklemleri de elde edilmiştir. Üçüncü bölümde çalışmada kullanılacak olan pertürbasyon yöntemleri hakkında teorik bilgi verilmiştir. Dördüncü bölümde ise zayıf nonlinear dalgalar ele alınmış ve ilk olarak viskoz olmayan akışkan hali için uzun dalga yaklaşımı altında, problemin yönetici denklemi olarak değişken katsayılı Korteweg-de Vries denklemi elde edilmiştir. İkinci olarak ise viskoz akışkan hali ele alınmış ve çeşitli katsayıların mertebelerine göre dispersiyon ve nonlinearitenin dengelendiği değişken katsayılı Korteweg-de Vries denklemi, nonlinearite, dispersiyon ve dissipasyonun dengelendiği değişken katsayılı Korteweg-de Vries Burgers denklemi elde edilmiştir. Buna ek olarak, Prandtl ve Tietjens [62]'in yaklaşımına benzer bir hidroluk yaklaşım altında viskoz akışkan denklemlerinin modifiye edilmesiyle, bu kez problemin uzak alan davranışının değişken katsayılı pertürbe Korteweg-de Vries denklemi ile ifade edildiği gösterilmiş ve bu bölümün sonunda elde edilen bu evölüsyon denklemlerinin ilerleyen dalga çözümleri verilmiştir. Beşinci bölümde, ilk olarak, içi sıkışmaz viskoz olmayan akışkan ile dolu yarıçapı değişken ince elastik tüplerde nonlinear dalgaların genlik modülasyonunun değişken katsayılı nonlinear Schrödinger denklemi ile yönetildiği gösterilmiş ve evölüsyon denkleminin ilerleyen dalga çözümleri elde edilerek, ilerleyen dalga ve zarf dalganın hızlarının çeşitli parametrelerle değişimi irdelenmiştir. Bu bölümde ikinci olarak, içi viskoz olmayan akışkan ile dolu ince elastik tüplerde, marjinal halde nonlinear dalgaların genlik modülasyonu ele alınmış ve yönetici denklem olarak genelleştirilmiş nonlinear Schrödinger denklemi elde edilmiştir. Bu problemde yarıçapı değişken kabul etmenin hesaplara getireceği büyük zorluk göz önüne alınarak, tüp yarıçapı sabit kabul edilmiştir. Altıncı ve son bölümde ise çalışmada elde edilen sonuçlar irdelenerek ileriye dönük çalışmalara ilişkin hedefler tartışılmıştır.

2. TEMEL DENKLEMLER

2.1 Giriş

Bu bölümde, içi sıkıştırılamayan viskoz bir akışkanla dolu ön gerilmeli ince elastik tüpte dalga yayılımı probleminin modellenmesinde kullanılacak olan alan denklemleri elde edilecektir.

2.2 Yarıçapı Değişken İnce Elastik Tüp Denklemleri

Çalışmanın bu kısmında, içi sıkıştırılamayan bir akışkanla dolu elastik tüpün hareketini yöneten diferansiyel denklemler türetilecektir. Problemde ele alınacak tüpün ince, uzunluğunun sonsuz ve yarıçapının değişken olduğu varsayılacaktır. Bu amaçla, koordinat merkezindeki yarıçapı R_0 ve yarıçapındaki lineer genişleme veya daralmayı temsil eden açı da Φ olan elastik bir tüp göz önüne alalım. Bu durumda incelenmekte olan noktanın konum vektörü aşağıdaki biçimde ifade edilebilir

$$\mathbf{R} = (R_0 + \Phi Z)\mathbf{e}_r + Z\mathbf{e}_z. \quad (2.1)$$

Burada $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ ve $\mathbf{e}_z$ silindirik koordinatlardaki birim baz vektörlerini, Z ise maddesel noktanın şekil değiştirmeden önceki eksenel koordinatını temsil etmektedir. Şekil değiştirmeden önceki elemanın meridiyen ve yanal doğrultulardaki elemanter yay uzunlukları aşağıdaki biçimde tanımlanmışlardır

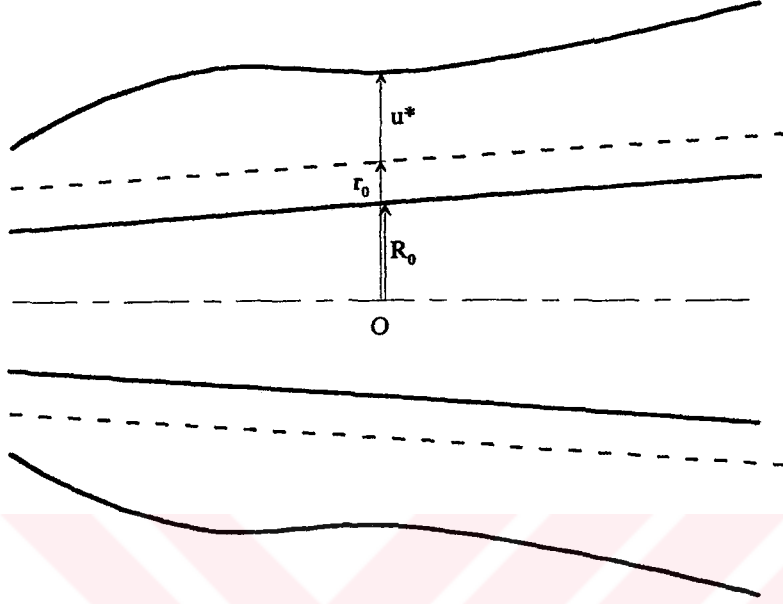
$$dS_Z = (1 + \Phi^2)^{1/2} dZ, \quad dS_\Theta = (R_0 + \Phi Z) d\Theta. \quad (2.2)$$

Çalışmada, yarıçapı değişen tüpün başlangıçta bir $P_0(Z)$ iç basıncına maruz kaldığını kabul edeceğiz. Statik şekil değiştirmeden sonra R_0 'a karşı gelen yarıçap r_0 ile gösterilirse tüp üzerindeki bir noktanın konum vektörü aşağıdaki biçimde verilebilir

$$\mathbf{r}_0 = (r_0 + \phi z^*)\mathbf{e}_r + z^*\mathbf{e}_z, \quad z^* = \lambda_z Z. \quad (2.3)$$

Burada, z^* statik şekil değiştirmeden sonraki eksenel koordinatı, λ_z eksenel

doğrultudaki germeyi ve ϕ de statik şekil değiştirmeden sonraki lineer genişleme (daralma) açısını temsil etmektedir.



ŞEKİL 2.1 Tüpün çeşitli konumlardaki şekil değiştirmesi taslağı

Şekil değiştirmeden sonraki elemanın meridiyen ve yanal doğrultudaki elemanter yay uzunlukları aşağıdaki biçimde tanımlanabilir

$$ds_z^0 = (1 + \phi^2)^{1/2} dz^*, \quad ds_\theta^0 = (r_0 + \phi z^*) d\theta. \quad (2.4)$$

Buna göre yanal ve meridiyen doğrultularındaki germe oranları aşağıdaki biçimde tanımlanabilir

$$\lambda_1^0 = \frac{ds_z^0}{dS_Z} = \lambda_z \frac{(1 + \phi^2)^{1/2}}{(1 + \Phi^2)^{1/2}}, \quad \lambda_2^0 = \frac{ds_\theta^0}{dS_\Theta} = \lambda_z \frac{(r_0 + \phi z^*)}{(\lambda_z R_0 + \Phi z^*)}. \quad (2.5)$$

Şekil değiştirmeden önceki tüp kalınlığının H , şekil değiştirmeden sonraki tüp kalınlığının ise h olduğunu varsayalım. Tüp malzemesinin sıkışmazlık koşulunu göz önünde bulundurursak aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz

$$h = \frac{H(1 + \Phi^2)^{1/2}(R_0 \lambda_z + \Phi z^*)}{(1 + \phi^2)^{1/2}(r_0 + \phi z^*)}. \quad (2.6)$$

(2.6) nolu ifadeden de görüldüğü gibi, kalınlık, eksenel koordinatla değişmektedir. Kalınlığın orijindeki ve sonsuzdaki değerleri sırasıyla aşağıdaki

biçimde verilebilir

$$h_0 = \frac{H(1 + \Phi^2)^{1/2}}{\lambda_\theta \lambda_z (1 + \phi^2)^{1/2}} = \frac{H}{\lambda_\theta \lambda_1^0}$$

$$h_\infty = \frac{H(1 + \Phi^2)^{1/2} \Phi}{\lambda_z^2 (1 + \phi^2)^{1/2} \phi} = \frac{H}{\lambda_1^0 \lambda_2^0(\infty)}. \quad (2.7)$$

Burada $\lambda_2^0(\infty)$, λ_2^0 'nin sonsuzdaki değerini ve $\lambda_\theta = r_0/R_0$ radyal doğrultudaki eksenel germenin orijindeki değerini ifade etmektedir. Eğer statik şekil değiştirme öncesinde ve sonrasında yarıçapın değişimini ifade eden açılar arasında $\phi = \Phi \lambda_\theta / \lambda_z$ biçiminde bir ilişki varsa, yani şekil değiştirmeden önceki ve sonraki doğrultmanları paralel ise, tüp eksenini boyunca kalınlık değişmez, sabit kalır ve $h_0 = H/(\lambda_\theta \lambda_1^0)$ olarak ifade edilebilir.

Normalde sağlıklı bir insanda sistolik kan basıncı (maksimal basınç) 120 mmHg ve diastolik basınç (minimal basınç) ise 80 mmHg civarındadır. Deneysel çalışmalar göstermiştir ki, fizyolojik koşullarda büyük damarlar eksenel yönde 1.6 mertebesinde bir germeye de maruz kalmaktadır. Kalbin periyodik olarak uyguladığı pulsatif basınç, bu statik değerler üzerine dinamik yer değiştirmelerin süperpoze edilmesine yol açmaktadır. Yani büyük damarlar ortalama bir gerilmeye maruz kalmaktadırlar. Bu bilgi ışığında, statik şekil değiştirmenin üzerine, radyal doğrultuda $u^*(z^*, t^*)$ zamana bağlı sonlu dinamik yer değiştirmesinin süperpoze edildiğini varsayalım. Burada t^* zaman parametresini temsil etmektedir. Eksenel yöndeki yataklama kuvvetlerini göz önünde bulundurarak, eksenel yöndeki yer değiştirme ihmal edilecektir. Bu durumda incelenmekte olan noktanın konum vektörü aşağıdaki gibi ifade edilebilir

$$\mathbf{r} = (r_0 + \phi z^* + u^*) \mathbf{e}_r + z^* \mathbf{e}_z. \quad (2.8)$$

Şekil değiştirmiş elemanın kenar uzunlukları ise aşağıdaki biçimde tanımlanmışlardır

$$ds_z = \left[1 + \left(\phi + \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right)^2 \right]^{1/2} dz^*, \quad ds_\theta = (r_0 + \phi z^* + u^*) d\theta. \quad (2.9)$$

Son halde germeler aşağıdaki gibi ifade edilebilir

$$\lambda_1 = \lambda_z \left[1 + \left(\phi + \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right)^2 \right]^{1/2} / (1 + \Phi^2)^{1/2},$$

$$\lambda_2 = \lambda_z(r_0 + \phi z^* + u^*)/(\lambda_z R + \Phi z^*). \quad (2.10)$$

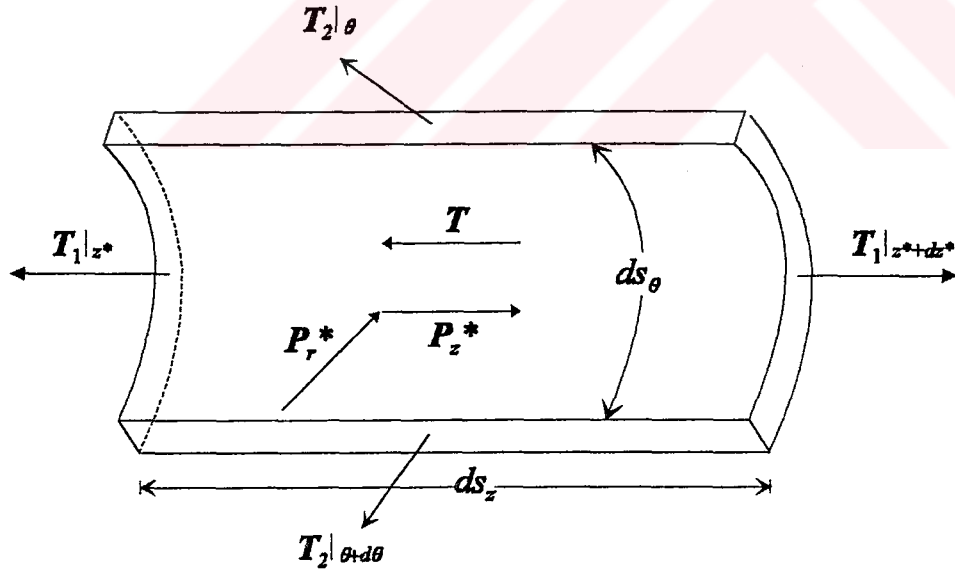
O halde şekil değiştirmiş meridiyene teğet birim $\mathbf{t}$ vektörü ve şekil değiştirmiş membranın birim dış normali $\mathbf{n}$ aşağıdaki gibi verilebilir

$$\mathbf{t} = \frac{\left(\phi + \frac{\partial u^*}{\partial z^*}\right) \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_z}{\left[1 + \left(\phi + \frac{\partial u^*}{\partial z^*}\right)^2\right]^{1/2}}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{e}_r - \left(\phi + \frac{\partial u^*}{\partial z^*}\right) \mathbf{e}_z}{\left[1 + \left(\phi + \frac{\partial u^*}{\partial z^*}\right)^2\right]^{1/2}}. \quad (2.11)$$

Tüp malzemesinin sıkışmazlığı kullanılarak, tüpün son haldeki kalınlığı ise aşağıdaki formda verilebilir

$$h' = \frac{H(1 + \Phi^2)^{1/2}(\lambda_z R_0 + \Phi z^*)}{\lambda_z^2 \left[1 + \left(\phi + \frac{\partial u^*}{\partial z^*}\right)^2\right]^{1/2} (r_0 + \phi z^* + u^*)}. \quad (2.12)$$

T_1 ve T_2 , sırasıyla, meridiyen ve teğetsel yaylar boyunca etkiyen membran kuvvetlerini, T eksenel doğrultudaki yataklama kuvvetini, P_r^* ve P_z^* ise şekil değiştirmiş membranın birim alanına $\mathbf{e}_r$ ve $\mathbf{e}_z$ doğrultularında etkiyen akışkan etkilerini gösterebilir. Bu durumda $z^* = sbt.$, $z^* + dz^* = sbt.$ ve $\theta = sbt.$, $\theta + d\theta = sbt.$ düzlemleri arasında kalan tüp elemanına etkiyen kuvvet vektörü aşağıdaki biçimde verilebilir



ŞEKİL 2.2 Tüp elemanına etkiyen çeşitli iç ve dış kuvvetler

$$\begin{aligned} d\mathbf{F} = & -\mathbf{T}_1 ds_\theta|_{z^*} + \mathbf{T}_1 ds_\theta|_{z^*+dz^*} - \mathbf{T}_2 ds_z|_\theta + \mathbf{T}_2 ds_z|_{\theta+d\theta} \\ & + [(P_z^* - T)\mathbf{e}_z + P_r^*\mathbf{e}_r] ds_\theta ds_z \end{aligned} \quad (2.13)$$

Burada T_1 ve T_2 membran kuvvet vektörleri aşağıdaki şekilde tanımlanmışlardır

$$\mathbf{T}_1 = T_1 \mathbf{t}, \quad \mathbf{T}_2 = T_2 \mathbf{e}_\theta. \quad (2.14)$$

Eksenel yönde yer değiştirme, dolayısıyla ivme sıfır kabul edildiğinden (2.13)'de verilen kuvvet vektörünün $\mathbf{e}_z$ boyunca olan bileşeni sıfır olmalıdır. Buna göre, (2.13)'den aşağıdaki ifade elde edilir

$$\frac{\partial}{\partial z^*} \left[\frac{T_1(r_0 + \phi z^* + u^*)}{[1 + (\phi + \frac{\partial u^*}{\partial z^*})^2]^{1/2}} \right] + (P_z^* - T)[1 + (\phi + \frac{\partial u^*}{\partial z^*})^2]^{1/2}(r_0 + \phi z^* + u^*) = 0. \quad (2.15)$$

Bu denklem T bağ kuvvetinin belirlenmesini mümkün kılar. (2.13)'de verilen $d\mathbf{F}$ kuvvetinin radyal yönlerdeki bileşeni aşağıdaki gibi verilebilir

$$\begin{aligned} (d\mathbf{F})_r = & \left\{ -T_2 \left[1 + \left(\phi + \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right)^2 \right]^{1/2} + \frac{\partial}{\partial z^*} \left\{ \frac{T_1(r_0 + \phi z^* + u^*)(\phi + \frac{\partial u^*}{\partial z^*})}{[1 + (\phi + \frac{\partial u^*}{\partial z^*})^2]^{1/2}} \right\} \right. \\ & \left. + P_r^*(r_0 + \phi z^* + u^*) \left[1 + \left(\phi + \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} dz^* d\theta^*. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Newton hareket yasasına göre bu kuvvetin, elemanter tüpün kütlesi ile radyal doğrultudaki ivmesinin çarpımına eşit olması gerekir. Bu eşitleme yapılırsa radyal doğrultuda aşağıdaki hareket denklemi elde edilir

$$\begin{aligned} & -T_2 \left[1 + \left(\phi + \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right)^2 \right]^{1/2} + \frac{\partial}{\partial z^*} \left\{ \frac{(r_0 + \phi z^* + u^*)(\phi + \frac{\partial u^*}{\partial z^*})}{[1 + (\phi + \frac{\partial u^*}{\partial z^*})^2]^{1/2}} T_1 \right\} \\ & + P_r^* \left[1 + \left(\phi + \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right)^2 \right]^{1/2} (r_0 + \phi z^* + u^*) = \frac{\rho_0 H}{\lambda_z^2} (1 + \Phi^2)^{1/2} (\lambda_z R_0 + \Phi z^*) \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^{*2}}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Burada ρ_0 membranın kütle yoğunluğunu göstermektedir.

Bünye Denklemleri

(2.17) ile ifade edilen tüp hareket denkleminin tamamlanabilmesi için T_1 , T_2 membran kuvvetlerinin yer değiştirmelere olan fonksiyonel bağıntısının, yani bünye denklemlerinin bilinmesi gerekir. Biz bu çalışmada, membran malzemesinin sıkışmaz, elastik ve izotrop olduğunu kabul edeceğiz. Böyle bir malzemeye ait bünye bağıntısı

$$t_{kl} = \Pi \delta_{kl} + \mu (\Phi c_{kl}^{-1} + \Psi B_{kl}) \quad (2.18)$$

şeklinde verilebilir. Burada Π hidrostatik basıncı, μ elastik cismin küçük şekil değiştirme halindeki kayma modülünü, c_{kl}^{-1} ise Finger deformasyon tansörünü göstermekte olup

$$c_{kl}^{-1} = F_{kK} F_{lK} \quad ; \quad F_{kK} \equiv \frac{\partial x_k}{\partial X_K} \quad (2.19)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada $x_k = x_k(X_K, t)$ cismin hareketini temsil etmektedir. (2.18) ifadesinde yer alan diğer büyüklükler ise

$$B_{kl} = I_1 c_{kl}^{-1} - c_{km}^{-1} c_{ml}^{-1} \quad ; \quad \Phi = 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} \quad ; \quad \Psi = 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_2} \quad (2.20)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada I_1 , I_2 ve $I_3 = 1$, c_{kl}^{-1} 'nin temel invariantlarını, $\mu \Sigma = \mu \Sigma(I_1, I_2)$ ise incelenen elastik cisme ait şekil değiştirme enerjisi yoğunluğu fonksiyonunu göstermektedir. λ_1 , λ_2 membran teğet düzlemi içerisindeki asal germeleri, λ_3 de membran teğet düzlemine dik doğrultudaki germeyi gösterebilir. O halde asal eksenlere göre ifade edilmiş c_{kl}^{-1} ve B_{kl} bileşenleri aşağıdaki biçimde verilebilir

$$c_{11}^{-1} = \lambda_1^2 \quad , \quad c_{22}^{-1} = \lambda_2^2 \quad , \quad c_{33}^{-1} = \lambda_3^2 = 1/\lambda_1^2 \lambda_2^2. \quad (2.21)$$

$$B_{11} = \frac{1}{\lambda_2^2} + \lambda_1^2 \lambda_2^2, B_{22} = \frac{1}{\lambda_1^2} + \lambda_1^2 \lambda_2^2, B_{33} = \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2}. \quad (2.22)$$

Burada $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ sıkışmazlık koşulu kullanılmıştır. O halde asal gerilme bileşenleri

$$\begin{aligned} t_{11} &= \Pi + \mu [\Phi \lambda_1^2 + \Psi (\lambda_1^2 \lambda_2^2 + 1/\lambda_2^2)] \\ t_{22} &= \Pi + \mu [\Phi \lambda_2^2 + \Psi (\lambda_1^2 \lambda_2^2 + 1/\lambda_1^2)] \\ t_{33} &= \Pi + \mu [\Phi / (\lambda_1^2 \lambda_2^2) + \Psi (1/\lambda_1^2 + 1/\lambda_2^2)] \end{aligned} \quad (2.23)$$

şeklinde ifade edilebilir. Membranın çok ince kabul edilmesi nedeniyle kalınlığı doğrultusundaki gerilme bileşeni, yaklaşık sıfır kabul edilebilir. Buna göre

$$t_{33} = \Pi + \mu [\Phi / (\lambda_1^2 \lambda_2^2) + \Psi (1/\lambda_1^2 + 1/\lambda_2^2)] \cong 0, \quad (2.24)$$

veya Π hidrostatik basıncı

$$\Pi = -\mu [\Phi / (\lambda_1^2 \lambda_2^2) + \Psi (1/\lambda_1^2 + 1/\lambda_2^2)] \quad (2.25)$$

şeklinde bulunur. O halde (2.25) ifadesi (2.23)'de yerine konursa t_{11} , t_{22} asal gerilme ifadeleri

$$t_{11} = \mu [\Phi (\lambda_1^2 - 1/\lambda_1^2 \lambda_2^2) + \Psi (\lambda_1^2 \lambda_2^2 - 1/\lambda_1^2)], \quad (2.26)$$

$$t_{22} = \mu [\Phi(\lambda_2^2 - 1/\lambda_1^2 \lambda_2^2) + \Psi(\lambda_1^2 \lambda_2^2 + 1/\lambda_2^2)] \quad (2.27)$$

olarak verilir. I_1, I_2 temel invaryantların asal germeler cinsinden ifadeleri hatırlanacak olursa aşağıdaki ilişkiler yazılabilir

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \lambda_1} \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_2} = \frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \lambda_2} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \lambda_2} \quad (2.29)$$

Φ ve Ψ nin tanımları dikkate alınır ve gerekli türetmeler yapılırsa

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_1} = \Phi \left(\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1^3 \lambda_2^2} \right) + \Psi \left(\lambda_1 \lambda_2^2 - \frac{1}{\lambda_1^3} \right) \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_2} = \Phi \left(\lambda_2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^3} \right) + \Psi \left(\lambda_1^2 \lambda_2 - \frac{1}{\lambda_2^3} \right) \quad (2.31)$$

ilişkileri, (2.26),(2.27)-(2.30),(2.31) denklemlerinin karşılaştırılmasından ise

$$t_{11} = \mu \lambda_1 \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_1}, \quad t_{22} = \mu \lambda_2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_2} \quad (2.32)$$

bünye bağıntıları elde edilir. Bilindiği gibi meridiyen ve çevresel eğri boyunca birim uzunluğa etkiyen membran kuvvetleri

$$T_1 = h' t_{11}, \quad T_2 = h' t_{22} \quad (2.33)$$

şeklinde tanımlanmışlardır. Burada h' şekil değiştirmiş kalınlık olup sıkışmazlık koşulu nedeniyle, şekil değiştirmeden önceki H membran kalınlığına

$$h' \lambda_1 \lambda_2 = H \quad (2.34)$$

şeklinde bağlanmıştır. Buna göre T_1, T_2 membran kuvvetleri Σ şekil değiştirme enerjisi cinsinden

$$T_1 = \frac{\mu H}{\lambda_2} \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_1}, \quad T_2 = \frac{\mu H}{\lambda_1} \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_2} \quad (2.35)$$

şeklinde ifade edilebilir. (2.35) ifadesini, (2.17) ile verilen hareket denkleminde kullanırsak, radyal doğrultudaki hareket denklemi aşağıdaki hali alır

$$-\frac{\mu}{\lambda_z} H (1 + \Phi^2)^{1/2} \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_2} + \frac{\mu}{\lambda_z} H \frac{\partial}{\partial z^*} \left\{ \frac{(\lambda_z R_0 + \Phi z^*)(\phi + \partial u^*/\partial z^*)}{[1 + (\phi + \partial u^*/\partial z^*)^2]^{1/2}} \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_1} \right\}$$

$$+P_r^* \left[1 + \left(\phi + \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right)^2 \right]^{1/2} (r_0 + \phi z^* + u^*) = \frac{\rho_0 H}{\lambda_z^2} (1 + \Phi^2)^{1/2} (\lambda_z R_0 + \Phi z^*) \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^{*2}}. \quad (2.36)$$

2.4 Akışkanın Hareket Denklemleri

Kan, plazma adı verilen ve Newtonyen özelliğe sahip bir sıvı ile çeşitli hücrelerin karışımından oluşmuş viskoz bir akışkandır. Bir birim kan örneğindeki hücre hacminin, toplam örnek hacmine oranına hematokrit oranı adı verilir. Kan üzerinde yapılan deneysel çalışmalar, düşük hematokrit oranlarında ve yüksek şekil değiştirme hızlarında kanın Newtonyen, yüksek hematokrit oranı ve düşük şekil değiştirme hızlarında da Newtonyen olmayan bir akışkan gibi davrandığını göstermektedir. Genel olarak kabul edilen gerçek, kanın sıkıştırılamayan ve Newtonyen olmayan bir akışkan olduğudur. Ancak, Poiseuille akımından da bilindiği gibi, damarın çeperine yakın yerlerde şekil değiştirme hızı yüksektir. Ayrıca kan akımı sırasında, alyuvarlar hızın yüksek olduğu merkeze yakın bölgelere kaydığından, damarın çeper kısımlarında hematokrit oranı düşmektedir. Bu nedenle büyük damarlarda kan Newtonyen bir akışkan gibi işleme sokulabilir. Böyle bir akışkana ait gerilme tansörü aşağıdaki gibi verilir

$$\sigma_{kl} = -\bar{P}\delta_{kl} + 2\mu_v d_{kl}. \quad (2.37)$$

Burada $\bar{P}$ akışkanın hidrostatik basıncını, δ_{kl} Kronecker deltasını, μ_v viskoziteyi ve d_{kl} de şekil değiştirme hızı tansörünü temsil etmekte olup

$$d_{kl} = \frac{1}{2}(v_{k,l} + v_{l,k}) \quad (2.38)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Newtonyen bir akışkanın aksenal simetrik hareketini temsil eden Navier-Stokes denklemleri aşağıdaki formda ifade edilir

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r^*}{\partial t^*} + v_r^* \frac{\partial v_r^*}{\partial r} + v_z^* \frac{\partial v_r^*}{\partial z^*} + \frac{1}{\rho_a} \frac{\partial \bar{P}}{\partial r} &= \frac{\mu_v}{\rho_a} \left(\frac{\partial^2 v_r^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r^*}{\partial r} - \frac{v_r^*}{r} + \frac{\partial^2 v_r^*}{\partial z^{*2}} \right), \\ \frac{\partial v_z^*}{\partial t^*} + v_r^* \frac{\partial v_z^*}{\partial r} + v_z^* \frac{\partial v_z^*}{\partial z^*} + \frac{1}{\rho_a} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z^*} &= \frac{\mu_v}{\rho_a} \left(\frac{\partial^2 v_z^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z^*}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z^*}{\partial z^{*2}} \right), \\ \frac{\partial v_r^*}{\partial r} + \frac{v_r^*}{r} + \frac{\partial v_z^*}{\partial z^*} &= 0. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Burada ρ_a akışkanın kütle yoğunluğunu, v_r^* ve v_z^* sırasıyla akışkanın radyal ve aksenal doğrultudaki hız bileşenlerini göstermektedir.

Akışkanın kesin denklemleriyle uğraşmanın zorluklarını göz önünde bulundurarak, bu çalışmada, akışkanın aksel yöndeki hızının radyal yöndeki hızından çok daha büyük olduğu varsayımını kabul edecek ve akışkan denklemleri üzerinde, kesit alanına göre bir ortalama işleminin uygulanabilir olduğunu kabul edeceğiz. Bu durumda viskoz bir akışkana ait kütle korunumu ve lineer momentumun korunumu denklemleri (yaklaşık akışkan denklemleri) aşağıdaki formu alır

$$\frac{\partial A}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial z^*}(Av^*) = 0, \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial z^*} + \frac{1}{\rho_a} \frac{\partial P^*}{\partial z^*} = \nu \frac{\partial^2 v^*}{\partial z^{*2}} + \frac{2\pi\nu}{A} \left(r \frac{\partial v_z^*}{\partial r} \right)_{r=r_0+\phi z^*+u^*}. \quad (2.41)$$

Burada v^* hızın ortalama anlamda aksel doğrultudaki hız bileşenini, v_z^* akışkanın aksel doğrultudaki hız bileşenini, $A(z^*, t^*)$ tüpün dikkesit alanını, ν akışkanın kinematik viskozitesini göstermektedir. Diğer büyüklükler ise aşağıdaki formda verilebilir

$$Av^* = 2\pi \int_0^{(r_0+\phi z^*+u^*)} r v_z^* dr, \quad AP^* = 2\pi \int_0^{(r_0+\phi z^*+u^*)} r \bar{P} dr. \quad (2.42)$$

(2.40)-(2.41) akışkan denklemleri elde edilirken aşağıda verilen yaklaşım uygulanmıştır [62].

$$A(v^*)^2 = 2\pi \int_0^{(r_0+\phi z^*+u^*)} r (v_z^*)^2 dr. \quad (2.43)$$

Tüpün dikkesit alanı ile en son yarıçap fonksiyonu arasındaki ilişkinin $A = \pi(r_0 + \phi z^* + u^*)^2$ şeklinde olduğu göz önünde bulundurulursa, (2.40)-(2.41) denklemleri aşağıdaki formu alır

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + v^* \left(\phi + \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right) + \frac{1}{2}(r_0 + \phi z^* + u^*) \frac{\partial v^*}{\partial z^*} = 0, \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial z^*} + \frac{1}{\rho_a} \frac{\partial P^*}{\partial z^*} = \nu \frac{\partial^2 v^*}{\partial z^{*2}} + \frac{2\nu}{(r_0 + \phi z^* + u^*)} \left(\frac{\partial v_z^*}{\partial r} \right)_{r=r_0+\phi z^*+u^*}. \quad (2.45)$$

Akışkanın tüpe uyguladığı reaksiyon kuvvetinin P_r^* bileşeni aşağıdaki şekilde verilebilir

$$P_r^* = \frac{1}{[1 + (\phi + \frac{\partial u^*}{\partial z^*})^2]^{1/2}} [P^* + 4\mu_v \frac{(\phi + \frac{\partial u^*}{\partial z^*})}{(r_0 + \phi z^* + u^*)} v^*]. \quad (2.46)$$

Bu noktada bazı boyutsuz büyüklükler tanımlamak uygun olacaktır

$$t^* = \frac{R_0}{c_0} t, \quad z^* = R_0 z, \quad u^* = R_0 u, \quad v^* = c_0 v, \quad v_z^* = c_0 v_z,$$

$$m = \frac{\rho_0 H}{\rho_a R_0}, \quad r_0 = \lambda_\theta R_0, \quad P^* = \rho_a c_0^2 p,$$

$$r = R_0 x, \quad c_0^2 = \frac{\mu H}{\rho_a R_0}, \quad \mu_v = \rho_a R_0 c_0 \nu. \quad (2.47)$$

(2.47) ifadeleri, (2.36) ve (2.44)-(2.46) denklemlerinde yerine konursa aşağıdaki boyutsuz alan denklemleri elde edilir

$$p = \frac{m}{\lambda_z^2} (1 + \Phi^2)^{1/2} \frac{(\lambda_z + \Phi z)}{(\lambda_\theta + \phi z + u)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{4\nu(\phi + \frac{\partial u}{\partial z})}{(\lambda_\theta + \phi z + u)} v + \frac{(1 + \Phi^2)^{1/2}}{\lambda_z(\lambda_\theta + \phi z + u)} \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_2} - \frac{1}{\lambda_z(\lambda_\theta + \phi z + u)} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{(\phi + \partial u / \partial z)(\lambda_z + \Phi z)}{[1 + (\phi + \partial u / \partial z)^2]^{1/2}} \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_1} \right\}, \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \left(\phi + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} (\lambda_\theta + \phi z + u) \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{2\nu}{\lambda_\theta + \phi z + u} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} \right)_{x=\lambda_\theta + \phi z + u}. \quad (2.50)$$

(2.48) ve (2.50) denklemlerinin sağ yanında görülen ve viskoziteyi temsil eden ν parametreleri sıfırlanırsa, viskoz olmayan akışkanla dolu, yarıçapı değişken elastik tüp içerisinde dalga yayılımı problemine ilişkin boyutsuz alan denklemleri aşağıdaki gibi elde edilmiş olur

$$p = \frac{m}{\lambda_z^2} (1 + \Phi^2)^{1/2} \frac{(\lambda_z + \Phi z)}{(\lambda_\theta + \phi z + u)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{(1 + \Phi^2)^{1/2}}{\lambda_z(\lambda_\theta + \phi z + u)} \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_2} - \frac{1}{\lambda_z(\lambda_\theta + \phi z + u)} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{(\phi + \partial u / \partial z)(\lambda_z + \Phi z)}{[1 + (\phi + \partial u / \partial z)^2]^{1/2}} \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_1} \right\}, \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \left(\phi + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} (\lambda_\theta + \phi z + u) \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (2.53)$$

3. PERTÜRBASYON YÖNTEMLERİ

3.1 Giriş

Nonlinear dalga yayılımı problemleri ile ilişkili pek çok fiziksel sistem, dispersiyon, dissipasyon ve/veya ortamın homojen olmayan özelliklerinden etkilenir. Bu tür sistemlerin yönetici denklemleri genellikle korunum kanunları kullanılarak elde edilir. Basit hallerde bu yönetici denklemler hiperbolik tiptendir ancak genelde ortamın fiziksel özelliklerinin de probleme etkileri nedeniyle, elde edilen yönetici denklemler bilinen analitik yöntemlerle integre edilemeyecek kadar karmaşık bir yapıda olabilirler. Bu nedenle, sistemin önemli fiziksel özelliklerini yitirmesine neden olmayacak ancak problemi basitleştirecek bir yöntem arayışına girmek zorunluluğu doğar. Bu amaçla, problemin evolüsyon denkleminin türetilmesi için çeşitli asimptotik yöntemler geliştirilmiştir. Bu yöntemlerden biri de pertürbasyon yöntemidir. Son yıllarda bu yöntem, plazma fiziği, katı ve akışkanlarda dalga yayılımı, nonlinear optik gibi pek çok alanda kullanılmış ve sistemin dispersif veya dissipatif olmasına bağlı olarak, uzun dalga yaklaşımı için Korteweg-de Vries, Burgers veya bu denklemlerin modifiye formları, kuvvetli dispersif hallerde ise nonlinear Schrödinger denkleminin evolüsyon denkleminin olarak elde edilmiştir.

Bu bölümde, içi akışkan ile dolu tüplerde nonlinear dalga yayılımı probleminin asimptotik analizi yapılırken kullanılacak olan pertürbasyon yöntemleri ile ilgili özet bilgi sunulacaktır.

3.2 Türev Açılım Yöntemi

Pek çok fiziksel problemde çeşitli mertebelerde ölçeklendirme gereksinimi doğar çünkü çeşitli fiziksel etkiler farklı yer değiştirme ve zaman ölçeklerinde kendilerini gösterirler. Dolayısıyla, çok ölçekli açılım veya türev açılım yöntemi olarak adlandırılan pertürbasyon yönteminin oldukça geniş bir yelpazede kullanımı söz konusu olmaktadır.

Yöntemin kullanımına ilişkin tarihçe incelenecek olursa, türev açılım yöntemi,

ilk kez Sturrock [63] tarafından 1957 yılında elektron plazmada nonlinear etkilerin araştırılmasına ilişkin bir çalışma ile ortaya konmuştur. Daha sonra, Sandri [64], 1963-1967 yıllarında istatistik mekanik alanında yaptığı çalışmalarda bu yöntemi kullanmıştır. Akışkanlar mekaniği ve plazma fiziğinde yapılan uygulamalar arasında ise Stuart [65], Watson [66], Hasimoto ve Ono [67], Frieman [68], Nayfeh [69] ve Kawahara [70]'nın çalışmaları sayılabilir. Bu araştırmacılar, türev açılım yönteminin sistematik olarak uygulanması ile kuvasi-monokromatik dalgaların genlik modülasyonunda yönetici denklem olarak NLS denklemini, uzun dalga yaklaşımında ise KdV denklemini elde etmişlerdir.

Türev açılım yöntemini açıklamak için, lineer L ve nonlinear N olmak üzere iki operatör tanımlayalım

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u(x, t) = N\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) F(u). \quad (3.1)$$

Burada F , u 'ya ve türevlerine bağlı bir fonksiyondur. x ve t bağımsız değişkenlerinin aşağıdaki biçimde daha geniş bir yapıda ölçeklendirildiğini varsayalım

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_M \quad \text{ve} \quad t_0, t_1, t_2, \dots, t_M. \quad (3.2)$$

Burada $x_n = \varepsilon^n x$ ve $t_n = \varepsilon^n t$ ($n = 0, 1, 2, \dots, M$) biçiminde tanımlanmış olup, ε küçük bir parametredir. Dolayısıyla $u(x, t)$ bağlı değişkeni de genişletilmiş bağımsız değişkenlerin bir fonksiyonu olacaktır

$$u(x_0, x_1, x_2, \dots, x_M; t_0, t_1, t_2, \dots, t_M). \quad (3.3)$$

Bu durumda x ve t değişkenlerine göre türev bağıntıları aşağıdaki gibi verilebilir

$$\frac{\partial}{\partial x} \equiv \sum_{n=0}^M \varepsilon^n \frac{\partial}{\partial x_n}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \equiv \sum_{n=0}^M \varepsilon^n \frac{\partial}{\partial t_n}. \quad (3.4)$$

Bu bağıntılar L , N operatörlerinde yerine konursa aşağıdaki yapılar elde edilir

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) \equiv \sum_{n=0}^M \varepsilon^n L_n \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_M}, \frac{\partial}{\partial t_0}, \dots, \frac{\partial}{\partial t_M}\right) + O(\varepsilon^{M+1}),$$

$$N\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) \equiv \sum_{n=0}^M \varepsilon^n N_n \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_M}, \frac{\partial}{\partial t_0}, \dots, \frac{\partial}{\partial t_M}\right) + O(\varepsilon^{M+1}). \quad (3.5)$$

Benzer biçimde, bağımlı değişken u da aşağıdaki asimptotik açılım ile

karakterize edilebilir

$$u(x_0, \dots, x_M, t_0, \dots, t_M; \varepsilon) = \sum_{m=1}^M \varepsilon^m u_m(x_0, \dots, x_M, t_0, \dots, t_M). \quad (3.6)$$

(3.5) ve (3.6) ilişkileri (3.1) diferansiyel denkleminde yerine konur ve ε 'un çeşitli mertebeden kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenecek olursa bağımlı değişkenleri yöneten bir diferansiyel denklem seti elde edilir. Bu denklemlerin ardışık olarak çözülmesiyle kuvvetli dispersiyon içeren halde NLS, uzun dalga yaklaşımında ise KdV tipinde denklemler elde edilir. Burada önemli bir nokta, ortamda dissipasyon varsa elde edilecek olan denklemin dissipatif NLS olacağıdır ki bu da pertürbasyon yönteminin dissipatif sistemlere uygulanacak biçimde modifiye edilmesi gereğini ortaya koyar. Buna ilişkin bir araştırma Asano [71] tarafından, zayıf nonlinear sistemler için, ısıtılan bir sınır tabakasında konvektif dalganın modülasyonu probleminde ele alınmış ve yönetici denklem olarak dissipatif NLS denklemi elde edilmiştir.

3.3 İndirgeyici Pertürbasyon Yöntemi

İndirgeyici pertürbasyon yöntemi ilk kez Taniuti ve çalışma arkadaşları tarafından formüle edilmiştir. Bu konudaki ilk çalışmalara örnek olması için, Taniuti ve Wei [72], Taniuti ve Washimi [73], Taniuti ve Yajima [74], Asano ve Taniuti [75]'ye bakılabilir. Ayrıca dispersif sistemlerin uzak alan davranışlarına ilişkin daha geniş bir araştırma Jeffrey ve Kakutani [76]'de bulunabilir. Nonlinear dispersif dalgaların asimptotik davranışını incelemek için 1960 yılında, Gardner ve Morikawa [77] aşağıdaki formda bir koordinat dönüşümü tanımlamışlardır

$$\xi = \varepsilon^\gamma (x - \lambda t), \quad \tau = \varepsilon^\mu t. \quad (3.7)$$

Burada λ , γ ve μ birer pozitif sabiti göstermektedir. Lineerleştirilmiş alan denklemlerinin uzun dalga yaklaşımının asimptotik davranışını tanımlayabilmek için, tanımlanan bu dönüşüm ile bağlı değişkenlerin ε cinsinden kuvvet serisine açılımını birleştirmişler ve bu kombinasyona indirgeyici pertürbasyon yöntemi adını vermişlerdir. En genel anlamda değerlendirilecek olursa, bu yöntemin nonlinear diferansiyel denklemlerin, uzak alan davranışlarını karakterize eden bir ya da birden fazla nonlinear denkleme indirgenmesi için sistematik bir şema önerdiği söylenebilir.

Taniuti [78] 1974 yılında

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{b}(\mathbf{U}) + \sum_{\beta=1}^s \prod_{\alpha=1}^p (\mathbf{H}_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{K}_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial x}) \mathbf{U} = \mathbf{0}. \quad (3.8)$$

sınıfındaki denklemlerin uzun dalga yaklaşımı altında incelenmesi için bir yöntem geliştirmiştir. Burada $\mathbf{U} (u^1, u^2, u^3, \dots, u^n)$ n bileşenli kolon vektörü, $\mathbf{A}$, $\mathbf{H}_{\alpha}^{\beta}$ $n \times n$ lik matrisleri, $\mathbf{b}$ ise n bileşenli kolon vektörü göstermektedir.

Yöntemi açıklamada basitlik sağlamak amacıyla, (3.8) denkleminin son teriminin sıfırlanması ile oluşan aşağıdaki sistem göz önüne alınacaktır

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{b}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}. \quad (3.9)$$

(3.9) denkleminin $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0$ sabit çözümünün $\mathbf{b}(\mathbf{U}_0) = \mathbf{0}$ uygunluk koşulunu sağlaması gerekir. Kuvasi-monokromatik dalgaların yayılımı ile ilgilendiğimiz için (3.9) denklemine

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \delta \mathbf{U} e^{i(kx - \omega t)} + k.e. \quad (3.10)$$

formunda çözüm arayalım. Burada k dalga sayısını, ω açısal frekansı, $k.e.$ ise üstel ifadenin karmaşık eşleniğini göstermektedir. $\delta \mathbf{U}$ artımsal büyüklüğünün başındaki δ , bu parametrenin küçüklüğünü vurgulamak için eklenmiştir. Bu çözüm önerisi (3.9) denkleminde kullanılır ve gerekli lineerleştirme yapılırsa aşağıdaki dispersiyon bağıntısı elde edilir

$$|i\omega \mathbf{I} - ik\mathbf{A}_0 + \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0| = 0. \quad (3.11)$$

Burada $\nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{U}'$ ya göre gradyan operatörünü, $\mathbf{I}$ birim matrisi göstermektedir. $\mathbf{A}_0$ ve $\mathbf{b}_0$ ise aşağıdaki gibi tanımlanmışlardır

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}|_{\mathbf{U}=\mathbf{U}_0}, \quad \mathbf{b}_0 = \mathbf{b}|_{\mathbf{U}=\mathbf{U}_0}. \quad (3.12)$$

(3.11) denklemi ω ile k arasında $\omega = \omega(k)$ formunda bir bağıntı verir. Bu bağıntı dispersiyon bağıntısı olarak isimlendirilir. Aşağıdaki formda bir $\mathbf{W}_l$ matrisi tanımlayalım

$$\mathbf{W}_l = il(\omega \mathbf{I} - k\mathbf{A}_0) + \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0. \quad (3.13)$$

Burada l bir tamsayıdır. Lineer düzlem dalgaların modülasyonunu tanımlayabilmek için (3.7) ile tanımlanan koordinat dönüşümünde $\gamma = 1$ ve

$\mu = 2$ sayısal değerleri kullanılacak olursa (3.7) dönüşümleri aşağıdaki hali alır

$$\xi = \varepsilon(x - \lambda t), \quad \tau = \varepsilon^2 t. \quad (3.14)$$

$\mathbf{U}$ vektörünün $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0$ civarında aşağıdaki biçimde bir kuvvet serisine açılabileceğini varsayalım

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \mathbf{U}_n. \quad (3.15)$$

(3.15) açılımı $\mathbf{A}(\mathbf{U})$ ve $\mathbf{b}(\mathbf{U})$ büyüklüklerinin açık ifadelerinde yerine konursa aşağıdaki ifadeler elde edilir

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}_0 + \varepsilon \mathbf{U}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 + \varepsilon^2 \left(\mathbf{U}_2 \cdot \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 + \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 : \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1 \right) + \dots \\ \mathbf{b} &= \varepsilon \mathbf{U}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 + \varepsilon^2 \left(\mathbf{U}_2 \cdot \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 + \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 : \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1 \right) \\ &+ \varepsilon^3 \left(\mathbf{U}_3 \cdot \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 + \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 : \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_2 \right. \\ &\left. + \frac{1}{6} \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 : \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1 \right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

(3.16) ifadelerinde görünen bazı yapıların tanımları aşağıdaki gibidir

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 &\equiv \sum_{i=1}^N u_1^i \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u^i} \right)_{\mathbf{U}=\mathbf{U}_0}, \\ \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1 : \nabla \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 &\equiv \sum_{i,j}^N u_1^i u_1^j \left(\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial u^i \partial u^j} \right)_{\mathbf{U}=\mathbf{U}_0}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

(3.14) ile tanımlanan koordinat dönüşümleri kullanılarak türev ifadeleri aşağıdaki gibi oluşturulabilir

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon \lambda \frac{\partial}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau}. \quad (3.18)$$

(3.18) ile verilen türev açılımları ve (3.16) seri açılımları (3.9) diferansiyel denklem sistemlerinde yerlerine konursa ε 'un çeşitli mertebeden kuvvetlerini içeren bir denklem seti elde edilir

$O(\varepsilon)$ mertebe denklemler :

$$\frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial t} + \mathbf{A}_0 \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial x} + \mathbf{U}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 = 0. \quad (3.19)$$

$O(\varepsilon^2)$ merteye denklemler :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial t} - \lambda \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial \xi} + \mathbf{A}_0 \frac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial x} + \mathbf{U}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial x} + \mathbf{A}_0 \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial \xi} \\ & + \mathbf{U}_2 \cdot \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 + \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 : \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1 = 0, \end{aligned} \quad (3.20)$$

$O(\varepsilon^3)$ merteye denklemler :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathbf{U}_3}{\partial t} - \lambda \frac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial \tau} + \mathbf{A}_0 \left(\frac{\partial \mathbf{U}_3}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial \xi} \right) + \mathbf{U}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 \left(\frac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial \xi} \right) \\ & + (\mathbf{U}_2 \cdot \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 + \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 : \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1) \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial x} + \mathbf{U}_3 \cdot \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 \\ & + \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 : \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_2 + \frac{1}{6} \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} : \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1 = 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Alan Denklemlerinin Çözümü

$O(\varepsilon)$ mertebeden denklemlerin yapısı incelenecek olursa aşağıdaki formda bir çözüm önerisinin uygun olacağı görülebilir

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_1^{(1)} \exp[i(\omega t - kx)] + k.e. , \quad (3.22)$$

burada $\mathbf{U}_1^{(1)}$ henüz açık yapısı bilinmeyen bir fonksiyon olup yönetici denklemi daha sonra elde edilecektir. (3.22) ile verilen çözüm önerisi (3.19) denklem setinde kullanıldığında $\mathbf{U}_1^{(1)}$ için (3.11) dispersiyon bağıntısının sağlanması gerekir. $\mathbf{W}_1$ matrisinin sağ özvektörü $\mathbf{R}$ ile gösterilirse $\mathbf{U}_1^{(1)}$ çözümü

$$\mathbf{U}_1^{(1)} = \Phi_1(\xi, \tau) \mathbf{R}, \quad (3.23)$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada $\Phi_1(\xi, \tau)$ bilinmeyen bir fonksiyon, $\mathbf{R}$ ise

$$\mathbf{W}_1 \mathbf{R} = 0, \quad (3.24)$$

denklemini sağlayan ve λ özdeğerine karşı gelen sağ özvektördür. (3.22) çözümü (3.20)'de yerine yerleştirilirse aşağıdaki denklem elde edilir

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial t} + \mathbf{A}_0 \frac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial x} + \mathbf{U}_2 \cdot \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 + (\mathbf{A}_0 - \lambda \mathbf{I}) \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \mathbf{R} \exp[i(\omega t - kz)] \\ & + |\Phi_1|^2 [ik \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 : (\mathbf{R} \mathbf{R}^* - \mathbf{R}^* \mathbf{R}) + \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 : (\mathbf{R} \mathbf{R}^* + \mathbf{R}^* \mathbf{R})] \end{aligned}$$

$$+ \Phi_1^2 [-ik \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 : \mathbf{R} \mathbf{R} + \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 : \mathbf{R} \mathbf{R}] \exp[2i(\omega t - kz)] + k.e. = 0 \quad (3.25)$$

(3.25) denklemini incelenecek olursa $\mathbf{U}_2$ için aşağıdaki formda bir çözüm önermenin uygun olacağı görülür

$$\mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_2^{(0)} + \mathbf{U}_2^{(1)} \exp[i(\omega t - kx)] + \mathbf{U}_2^{(2)} \exp[2i(\omega t - kx)] + k.e. \quad (3.26)$$

Bu ifade (3.25)'de yerine konursa $U_2^{(1)}$ 'i yöneten diferansiyel denklem aşağıdaki formda elde edilir

$$\mathbf{W}_1 \mathbf{U}_2^{(1)} + (\mathbf{A}_0 - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{R} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} = 0. \quad (3.27)$$

Buradan $\det \mathbf{W}_1 = 0$ olması nedeniyle (3.27) denkleminin $U_2^{(1)}$ 'e göre çözülebilmesi için

$$\mathbf{L} (\mathbf{A}_0 - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{R} = 0, \quad (3.28)$$

uygunluk koşulunun sağlanması gerekir. Burada $\mathbf{L}$, $\mathbf{R}$ 'ye karşı gelen sol özvektör olup

$$\mathbf{L} \mathbf{W}_1 = 0, \quad (3.29)$$

denklemini sağlar. (3.24)'ün k 'ya göre türevi alınır

$$i(\mathbf{A}_0 - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{R} + \mathbf{W}_1 \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k} = 0, \quad (3.30)$$

bulunur. Bu ilişki (3.27)'de kullanılacak olursa

$$\mathbf{W}_1 (\mathbf{U}_2^{(1)} + i \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k}) = 0, \quad (3.31)$$

elde edilir. Bu denklemin çözümü

$$\mathbf{U}_2^{(1)} = \Phi_2 \mathbf{R} - i \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k} \quad (3.32)$$

şeklinde verilir. Burada $\Phi_2(\xi, \tau)$ bilinmeyen diğer bir fonksiyon olup yüksek mertebeden açılımlardan elde edilmelidir.

(3.25)'den $\mathbf{U}_2^{(0)}$ ve $\mathbf{U}_2^{(2)}$ çözümleri aşağıdaki gibi verilebilir

$$\mathbf{U}_2^{(0)} = |\Phi_1|^2 \mathbf{R}_2^{(0)}, \quad \mathbf{U}_2^{(2)} = \Phi_1^2 \mathbf{R}_2^{(2)}. \quad (3.33)$$

Burada Φ_1^* , Φ_1 'in kompleks eşleniği olmak üzere $|\Phi_1|^2 = \Phi_1 \Phi_1^*$ şeklindedir ve

$\mathbf{R}_2^{(0)}$ ve $\mathbf{R}_2^{(2)}$ vektörleri de aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_2^{(0)} &= -\mathbf{W}_0^{-1} [ik \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 : (\mathbf{R} \mathbf{R}^* - \mathbf{R}^* \mathbf{R}) + \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 : (\mathbf{R} \mathbf{R}^* + \mathbf{R}^* \mathbf{R})] \\ \mathbf{R}_2^{(2)} &= -\mathbf{W}_2^{-1} [ik \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{R} \mathbf{R} + \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 : \mathbf{R} \mathbf{R}].\end{aligned}\quad (3.34)$$

(3.22) ve (3.26) çözümleri (3.21)'de yerine konacak olursa $\mathbf{U}_3$ 'ün aşağıdaki şekilde bir çözüm kabul edeceği gösterilebilir

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_3 &= \mathbf{U}_3^{(0)} + \mathbf{U}_3^{(1)} \exp[i(\omega t - kx)] + \mathbf{U}_3^{(2)} \exp[2i(\omega t - kx)] \\ &\quad + \mathbf{U}_3^{(3)} \exp[3i(\omega t - kx)] + k.e.\end{aligned}\quad (3.35)$$

Burada $\mathbf{U}_3^{(\alpha)}$ ($\alpha = 0, 1, 2, 3$) yavaş değişkenlerin fonksiyonudur. Burada Φ_1 'i yöneten diferansiyel denklem elde edilmeye çalışıldığından $\mathbf{U}_3^{(1)}$ 'i yöneten diferansiyel denklemi yazmak yeterli olacaktır

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_1 \mathbf{U}_3^{(1)} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau} \mathbf{R} + (\mathbf{A}_0 - \lambda \mathbf{I}) \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} \mathbf{R} - i \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \xi^2} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k} \right) \\ + [-2ik \mathbf{R}^* \cdot \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 \mathbf{R}_2^{(2)} - ik \mathbf{R}_2^{(0)} \cdot \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 \mathbf{R} + ik \mathbf{R}_2^{(2)} \cdot \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 \mathbf{R}^* \\ - ik \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 : \mathbf{R} \mathbf{R}^* \mathbf{R} + \frac{ik}{2} \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 : \mathbf{R} \mathbf{R} \mathbf{R}^* + \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 : \mathbf{R} \mathbf{R}_2^{(0)} \\ + \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 : \mathbf{R}^* \mathbf{R}_2^{(2)} + \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 : \mathbf{R} \mathbf{R} \mathbf{R}^*] |\Phi_1|^2 \Phi_1 = 0.\end{aligned}\quad (3.36)$$

Bu ifade soldan $\mathbf{L}$ ile çarpılır ve (3.30) uygunluk koşulu kullanılırsa aşağıdaki Nonlineer Schrödinger denklemi elde edilir

$$i \frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau} + p \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \xi^2} + q |\Phi_1|^2 \Phi_1 = 0. \quad (3.37)$$

Burada p ve q katsayıları aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır

$$\begin{aligned}p &= i \mathbf{L} \cdot (\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}_0) \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k} / (\mathbf{L} \cdot \mathbf{R}), \\ q &= i \mathbf{L} \cdot \left[-2ik \mathbf{R}^* \cdot \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 \mathbf{R}_2^{(2)} - ik \mathbf{R}_2^{(0)} \cdot \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 \mathbf{R} + ik \mathbf{R}_2^{(2)} \cdot \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 \mathbf{R}^* \right. \\ &\quad \left. - ik \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 : \mathbf{R} \mathbf{R}^* \mathbf{R} + \frac{ik}{2} \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 : \mathbf{R} \mathbf{R} \mathbf{R}^* \right. \\ &\quad \left. + \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 : \mathbf{R} \mathbf{R}_2^{(0)} + \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 : \mathbf{R}^* \mathbf{R}_2^{(2)} \right]\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 : \mathbf{R} \mathbf{R}^* \mathbf{R}] / (\mathbf{L} \cdot \mathbf{R}) . \quad (3.38)$$

p katsayısına farklı bir ifade bulmaya çalışalım. Bunun için (3.30) denklemi k 'ya göre bir defa türetilirse aşağıdaki yapı elde edilir

$$i \frac{\partial \lambda}{\partial k} \mathbf{R} + 2i(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}_0) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k} - \mathbf{W}_1 \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial k^2} = 0. \quad (3.39)$$

Bu ifade soldan $\mathbf{L}$ ile çarpılır ve (3.29) kullanılırsa

$$p = \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial k} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \quad (3.40)$$

bulunur. Bu tip denklemlerin geniş bir incelemesi Teymur ve Şuhubi [79]'de bulunabilir.

3.4 Denklem Sistemlerinin Uzun Dalga Yaklaşımı Altında İncelenmesi

Bu yöntem hem dispersif hem de dissipatif sistemleri karakterize edebilen aşağıdaki denklem sistemleri için uygulanabilir

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \sum_{\beta=1}^s \prod_{\alpha=1}^p (\mathbf{H}_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{K}_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial x}) \mathbf{U} = 0. \quad (3.41)$$

Gardner-Morikawa dönüşümü aşağıdaki yapıda tanımlansın

$$\xi = \epsilon^a (x - \lambda t) \quad , \quad \tau = \epsilon^{a+1} t \quad , \quad a = \frac{1}{p-1}. \quad (3.42)$$

Burada ϵ küçük bir parametre olup, lineer denklemlerin, uzun dalga yaklaşımında, asimptotik analizinden elde edilir. λ ise $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0$ için $\mathbf{A}(\mathbf{U}_0) = \mathbf{A}_0$ matrisinin özdeğeridir. $\mathbf{U}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{H}_{\alpha}^{\beta}$, $\mathbf{K}_{\alpha}^{\beta}$ ifadelerinin $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0$ sabit çözümü civarında aşağıdaki şekilde seriye açıldığı varsayılmıştır

$$\mathbf{U} = \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon^j \mathbf{U}_j, \quad \mathbf{A} = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \mathbf{A}_j, \quad \mathbf{H}_{\alpha}^{\beta} = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \mathbf{H}_{\alpha j}^{\beta}, \quad \mathbf{K}_{\alpha}^{\beta} = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \mathbf{K}_{\alpha j}^{\beta}. \quad (3.43)$$

Bu açılımlar ve (3.42) dönüşümü (3.41)'de yerine yazılır ve ϵ 'un kuvvetlerine göre düzenlenirse aşağıdaki denklem takımı elde edilir

$O(\epsilon^{a+1})$ mertebe denklemler :

$$(\mathbf{A}_0 - \lambda \mathbf{I}) \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial \xi} = 0, \quad (3.44)$$

$O(\epsilon^{a+2})$ mertebe denklemler :

$$\begin{aligned} & (\mathbf{A}_0 - \lambda \mathbf{I}) \frac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial \tau} + \mathbf{U}_1 \cdot (\nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0) \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial \xi} \\ & + \sum_{\beta=1}^s \prod_{\alpha=1}^p (-\lambda \mathbf{H}_{\alpha 0}^{\beta} + \mathbf{K}_{\alpha 0}^{\beta}) \frac{\partial^p \mathbf{U}_1}{\partial \xi^p} = 0. \end{aligned} \quad (3.45)$$

$\mathbf{A}_0$ 'ın λ özdeğerine karşı gelen özvektör $\mathbf{R}$ ile gösterilirse aşağıdaki bağıntı yazılabilir

$$(\mathbf{A}_0 - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{R} = 0. \quad (3.46)$$

O halde (3.44) denkleminin çözümü

$$\mathbf{U}_1 = \Phi_1(\xi, \tau) \mathbf{R} + \mathbf{V}_1(\tau) \quad (3.47)$$

şeklinde verilebilir. Burada $\Phi_1(\xi, \tau)$, $\mathbf{U}_1$ 'in $\mathbf{R}$ boyunca olan bileşeni olup, diğer bileşeni $\mathbf{V}_1(\tau)$, başlangıç koşullarından belirlenecek olan bir fonksiyondur. λ , $\mathbf{A}_0$ 'ın bir özdeğeri olduğundan (3.45)'in $\partial \mathbf{U}_2 / \partial \xi$ cinsinden çözülebilmesi için aşağıdaki uygunluk koşulunun sağlanması gerekir

$$\mathbf{L} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial \tau} + \mathbf{L} \cdot (\mathbf{U}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0) \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial \xi} + \mathbf{L} \cdot \sum_{\beta=1}^s \prod_{\alpha=1}^p (-\lambda \mathbf{H}_{\alpha 0}^{\beta} + \mathbf{K}_{\alpha 0}^{\beta}) \frac{\partial^p \mathbf{U}_1}{\partial \xi^p} = 0. \quad (3.48)$$

$\xi \rightarrow \infty$ için $\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{U}_0$ olduğundan $\xi \rightarrow \infty$ için $\mathbf{U}_1 \rightarrow 0$ geçerlidir. Bu durumda $\mathbf{V}_1(\tau) = 0$ alınabilir ve $\mathbf{U}_1$ çözümü $\mathbf{U}_1 = \Phi_1(\xi, \tau) \mathbf{R}$ şekline dönüşür. Buna göre Φ_1 'i yöneten evölüsyon denklemi

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau} + c_1 \Phi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} + c_2 \frac{\partial^p \Phi_1}{\partial \xi^p} = 0 \quad (3.49)$$

haline gelir. Burada c_1 , c_2 sabitleri

$$c_1 = \mathbf{L} \cdot (\mathbf{R} \cdot \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 \mathbf{R}) / (\mathbf{L} \cdot \mathbf{R}),$$

$$c_2 = \mathbf{L} \cdot \sum_{\beta=1}^s \prod_{\alpha=1}^p (-\lambda \mathbf{H}_{\alpha 0}^{\beta} + \mathbf{K}_{\alpha 0}^{\beta}) \mathbf{R} / (\mathbf{L} \cdot \mathbf{R}). \quad (3.50)$$

şeklinde tanımlanmıştır. (3.49) denklemi $p = 2$ için Burgers ve $p = 3$ için de Korteweg-de Vries denklemi olarak bilinir. Verilen bir nonlineer diferansiyel denklem sistemine uygun Gardner-Morikawa dönüşümü bulunmadığı hallerde denklem sisteminin lineerleştirilmiş haline ait dispersiyon bağıntısına bakılır. a

ve b reel sabitler olmak üzere dispersiyon bağıntısını k 'nın küçük değerleri için

$$\omega = a k + b k^3 + O(k^4)$$

$$\omega = a k + b k^2 + O(k^4) \quad (3.51)$$

şeklinde seriye açılabilirse, sonlu genlikli dalga yayılması incelenmesi durumunda nonlinear diferansiyel denklem sisteminin asimptotik olarak Burgers denklemine, KdV veya onun genelleştirilmiş formlarına indirgeneceği söylenebilir. Burada özet olarak sunulmaya çalışılan yöntemlerden indirgeyici pertürbasyon yöntemi, bundan sonraki bölümlerde incelenecek problemlerde kullanılacak ve ilgili evolüsyon denklemleri elde edilecektir.



4. ZAYIF NONLİNEER DALGALAR

4.1 Giriş ve Temel Pertürbasyon Şeması

Bu bölümde, (2.48)-(2.50) ile verilen boyutsuz denklemler kullanılarak, içi akışkan ile dolu nonlinear, ince ve yarıçapı değişken tüplerde küçük fakat sonlu genlikli dalgaların yayılımı incelenecektir. Pertürbasyon şemasının en genel formu elde edildikten sonra, Bölüm 4.2'de viskoz olmayan akışkan hali için, Bölüm 4.3'de ise viskoz akışkan hali için problem incelenecek ve yönetici denklemler elde edilecektir. Bölüm 4.4'de ise elde edilmiş olan yönetici denklemlere ilerleyen dalga çözümleri sunulacaktır.

İncelenen problemin fiziksel koşulları dolayısıyla, problemi bir sınır değer problemi olarak ele almak uygun düşmektedir. Bu tür problemlerde, verilen frekansa karşılık, dalga sayısı, dispersiyon bağıntısından elde edilir. Uzun dalga yaklaşımını temsil etmek üzere, aşağıda verilen yapıda bir koordinat dönüşümünü kullanmak uygundur

$$\xi = \varepsilon^\alpha(z - gt), \quad \tau = \varepsilon^{\alpha+1}z. \quad (4.1)$$

Burada ε nonlinearitenin ve dispersiyonun mertebesini karakterize eden küçük bir parametre, g ise bir ölçek parametresidir. Burada alan değişkenlerinin (ξ, τ) değişkenlerinin ve ε parametresinin bir fonksiyonu olduğu kabul edilecektir. Tüpün yarıçapının değişimini hesaba katmak için, (4.1) ile ifade edilen koordinat dönüşümü gözönünde bulundurulursa, yarıçap değişimini karakterize eden Φ ve ϕ açılarını $\varepsilon^{\alpha+2}$ mertebesinde kabul etmek gerekmektedir. Bu durumda sözkonusu açılar aşağıdaki biçimde ifade edilebilirler

$$\Phi = A\varepsilon^{\alpha+2} \quad \phi = a\varepsilon^{\alpha+2}. \quad (4.2)$$

Burada A ve a sırasıyla, şekil değiştirmeden önceki ve sonraki yarıçap değişim açılarını karakterize eden parametrelerdir.

Ayrıca, alan değişkenlerinin aşağıdaki formda asimptotik seriye açılabilceği

varsayılacaktır

$$\begin{aligned}
u &= \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots, \\
v &= \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots, \\
v_z &= \varepsilon v_{z1} + \varepsilon^2 v_{z2} + \dots, \\
p &= p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Burada $u_1, \dots, p_2$, (ξ, τ) değişkenlerinin fonksiyonudurlar. Ayrıca, (4.1) ile ifade edilen koordinat dönüşümünün altında, yarıçap değişimini karakterize eden Φz ve ϕz terimlerinin, sırasıyla $(A\tau)\varepsilon$ ve $(a\tau)\varepsilon$ terimlerine dönüşmekte olduğu kolaylıkla görülebilir. Bu durumda aşağıdaki açılımlar geçerlidir

$$\lambda_1 \cong \lambda_z, \tag{4.4}$$

$$\lambda_2 = \lambda_\theta + \left[u_1 + \left(a - \frac{\lambda_\theta}{\lambda_z} A \right) \tau \right] \varepsilon + \left[u_2 - \frac{A\tau}{\lambda_z} u_1 - \frac{A}{\lambda_z} \left(a - \frac{\lambda_\theta}{\lambda_z} A \right) \tau^2 \right] \varepsilon^2, \tag{4.5}$$

$$\frac{1}{\lambda_\theta \lambda_z} \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_1} = \alpha_0 + \alpha_1 \left[u_1 + \left(a - \frac{\lambda_\theta}{\lambda_z} A \right) \tau \right] \varepsilon + \dots \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda_\theta \lambda_z} \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_2} &= \beta_0 + \beta_1 \left[u_1 + \left(a - \frac{\lambda_\theta}{\lambda_z} A \right) \tau \right] \varepsilon + \left\{ \beta_2 \left[u_1 + \left(a - \frac{\lambda_\theta}{\lambda_z} A \right) \tau \right]^2 \right. \\
&\quad \left. + \beta_1 \left[u_2 - \frac{A\tau}{\lambda_z} u_1 - \frac{A}{\lambda_z} \left(a - \frac{\lambda_\theta}{\lambda_z} A \right) \tau^2 \right] \right\} \varepsilon^2.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Burada $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ ve β_2 katsayıları aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{1}{\lambda_\theta \lambda_z} \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_z}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{\lambda_\theta \lambda_z} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \lambda_\theta \partial \lambda_z}, \\
\beta_0 &= \frac{1}{\lambda_\theta \lambda_z} \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_\theta}, \quad \beta_1 = \frac{1}{\lambda_\theta \lambda_z} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \lambda_\theta^2}, \quad \beta_2 = \frac{1}{2\lambda_\theta \lambda_z} \frac{\partial^3 \Sigma}{\partial \lambda_\theta^3}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

4.2 Viskoz Olmayan Akışkan ile Dolu Tüplerde Nonlineer Dalga Yayılması

Problemin bu genel yapılarının ortaya konmasından sonra, bu bölümde ilk olarak viskoz olmayan akışkan ile dolu tüp hali ele alınacaktır. Bu amaçla (2.51)

ile verilen tüp denklemi ve (2.52), (2.53) akışkan denklemleri kullanılacaktır.

Bu bölümde, (4.1) ile verilen koordinat dönüşümünde α parametresi $1/2$ değerinde kabul edilecektir. Buna göre koordinat dönüşümü

$$\xi = \varepsilon^{1/2}(z - gt), \quad \tau = \varepsilon^{3/2}z \quad (4.9)$$

şeklini alır. Bu durumda, yarıçap değişimini karakterize eden Φ ve ϕ açılarını $\varepsilon^{5/2}$ mertebesinde kabul etmek gerekmektedir. Bu durumda sözkonusu açılar aşağıdaki biçimde ifade edilebilirler

$$\Phi = A\varepsilon^{5/2} \quad \phi = a\varepsilon^{5/2}. \quad (4.10)$$

(4.3), (4.9) ve (4.10) açılımları akışkana ait alan denklemlerinde kullanılır ve elde edilen denklem sistemi ε 'un çeşitli mertebelerinden kuvvetlerini içerecek biçimde düzenlenirse aşağıdaki denklem takımları elde edilir.

$O(\varepsilon)$ mertebeden denklemler:

$$-g \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\lambda_\theta}{2} \frac{\partial v_1}{\partial \xi} = 0, \quad (4.11)$$

$$-g \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\partial p_1}{\partial \xi} = 0. \quad (4.12)$$

$O(\varepsilon^2)$ mertebeden denklemler:

$$-g \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \frac{\lambda_\theta}{2} \frac{\partial v_2}{\partial \xi} + \frac{\lambda_\theta}{2} \frac{\partial v_1}{\partial \tau} + \frac{1}{2} u_1 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{1}{2} a \tau \frac{\partial v_1}{\partial \xi} = 0, \quad (4.13)$$

$$-g \frac{\partial v_2}{\partial \xi} + \frac{\partial p_2}{\partial \xi} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\partial p_1}{\partial \tau} = 0. \quad (4.14)$$

Bu denklemlerde p_1 ve p_2 fonksiyonları henüz bilinmemektedir. (4.3)-(4.8), (4.9) ve (4.10) açılımlarını (2.51) ile ifade edilen tüp denkleminde yerine konursa, çeşitli mertebeden basınç terimlerini aşağıdaki biçimde elde edilir

$$p_0 = \beta_0, \quad (4.15)$$

$$p_1 = (\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta})u_1 + \left[(a - \frac{\lambda_\theta}{\lambda_z}A)\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta}a \right] \tau, \quad (4.16)$$

$$p_2 = (\frac{mg^2}{\lambda_\theta \lambda_z} - \alpha_0) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} + (\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta})u_2 + (\beta_2 - \frac{\beta_1}{\lambda_\theta} + \frac{\beta_0}{\lambda_\theta^2})u_1^2$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \left[\left(a - \frac{\lambda_\theta}{\lambda_z} A \right) \beta_2 - \frac{\beta_1}{\lambda_\theta} a + \frac{\beta_0}{\lambda_\theta^2} a \right] \tau u_1 \\
& + \left[\left(a - \frac{\lambda_\theta}{\lambda_z} A \right)^2 \beta_2 - \frac{\beta_1}{\lambda_\theta} \left(a^2 - \frac{\lambda_\theta^2}{\lambda_z^2} A^2 \right) + \frac{\beta_0}{\lambda_\theta^2} a^2 \right] \tau^2.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Alan Denklemlerinin Çözümleri

(4.11), (4.12) denklemlerinin integrasyonundan aşağıdaki ifadeler elde edilir

$$u_1 = U(\xi, \tau), \quad v_1 = \frac{2g}{\lambda_\theta} U(\xi, \tau) + f(\tau), \quad p_1 = \frac{2g^2}{\lambda_\theta} U(\xi, \tau) + h(\tau). \tag{4.18}$$

Burada $U(\xi, \tau)$ yönetici denklemi daha sonra elde edilecek olan bilinmeyen bir fonksiyon, $f(\tau)$ ve $h(\tau)$ ise τ değişkenine bağlı bilinmeyen fonksiyonlardır ve tanım kümesi sonsuz boyutlu ise sıfır alınmalıdırlar. Buna ek olarak, τ 'nın büyük değerleri için alan değişkenlerine sonlu çözümler bulabilmemizin mümkün olabilmesi için, (4.16) ile verilen p_1 eşitliğindeki τ teriminin katsayısı da sıfır olmalıdır.

$$\left(a - \frac{\lambda_\theta}{\lambda_z} A \right) \beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta} a = 0. \tag{4.19}$$

Bu bağıntı, sonlu statik şekil değiştirmeden sonraki yarıçap değişim parametresi a 'yı, başlangıçtaki yarıçap değişim parametresi olan A 'ya bağlı olarak ifade edebilmeyi mümkün kılar

$$a = \frac{\lambda_\theta^2 \beta_1}{\lambda_z (\lambda_\theta \beta_1 - \beta_0)} A. \tag{4.20}$$

(4.16) ve (4.18) ifadelerindeki p_1 yapıları karşılaştırılırsa, $U(\xi, \tau)$ fonksiyonu için sıfırdan farklı bir çözümün bulunabilmesi için aşağıdaki koşulun sağlanması gerektiği görülebilir

$$g^2 = (\lambda_\theta \beta_1 - \beta_0)/2. \tag{4.21}$$

Burada g , ortamda yayılan dalga'nın uzun dalga boyu limitindeki faz hızına karşı gelir. Bu $\lambda_\theta \beta_1 - \beta_0 > 0$ olduğunda geçerlidir. Bu durumda, (4.18) ile verilen çözüm aşağıdaki biçimde ifade edilebilir

$$u_1 = U(\xi, \tau), \quad v_1 = \frac{2g}{\lambda_\theta} U(\xi, \tau), \quad p_1 = \frac{2g^2}{\lambda_\theta} U(\xi, \tau). \tag{4.22}$$

(4.22) çözüm ifadesi. (4.13), (4.14) ve (4.17)'de kullanılırsa aşağıdaki eşitlik elde

edilir

$$-g \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \frac{\lambda_\theta}{2} \frac{\partial v_2}{\partial \xi} + g \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{g}{\lambda_\theta} U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{ga}{\lambda_\theta} \tau \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0, \quad (4.23)$$

$$-g \frac{\partial v_2}{\partial \xi} + \frac{\partial p_2}{\partial \xi} + \frac{2g^2}{\lambda_\theta} \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{4g^2}{\lambda_\theta^2} U \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0, \quad (4.24)$$

$$p_2 = \left(\frac{mg^2}{\lambda_\theta \lambda_z} - \alpha_0 \right) \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \left(\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta} \right) u_2 + \left(\beta_2 - \frac{\beta_1}{\lambda_\theta} + \frac{\beta_0}{\lambda_\theta^2} \right) U^2 \\ + 2 \left(\frac{\beta_0 \beta_2}{\lambda_\theta \beta_1} - \frac{\beta_1}{\lambda_\theta} + \frac{\beta_0}{\lambda_\theta^2} \right) a \tau U + \left(\frac{\beta_0^2}{\lambda_\theta^2 \beta_1^2} \beta_2 + \frac{\beta_0^2}{\lambda_\theta^3 \beta} - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta^2} \right) a^2 \tau^2. \quad (4.25)$$

v_2 , (4.23)-(4.24) denklemlerinden elimine edilirse aşağıdaki yapıya ulaşılır

$$-\frac{2g}{\lambda_\theta} \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \frac{1}{g} \frac{\partial p_2}{\partial \xi} + \frac{4g}{\lambda_\theta} \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{10g}{\lambda_\theta^2} U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \left(\frac{2ga}{\lambda_\theta^2} \right) \tau \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0. \quad (4.26)$$

(4.25) ile verilen p_2 ifadesinin (4.26) ilişkisinde kullanılması ile de aşağıdaki değişken katsayılı Korteweg-de Vries denklemi elde edilir

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \mu_1 U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \mu_2 \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} + \mu_3 a \tau \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0. \quad (4.27)$$

Burada μ_1, μ_2 ve μ_3 katsayıları aşağıdaki gibi tanımlanmışlardır

$$\mu_1 = \frac{5}{2\lambda_\theta} + \frac{1}{2g^2} (\lambda_\theta \beta_2 - \beta_1 + \frac{\beta_0}{\lambda_\theta}), \quad \mu_2 = \frac{1}{4g^2} \left(\frac{mg^2}{\lambda_z} - \lambda_\theta \alpha_0 \right),$$

$$\mu_3 = -\frac{1}{2\lambda_\theta} + \frac{\beta_0 \beta_2}{\beta_1 (\lambda_\theta \beta_1 - \beta_0)}. \quad (4.28)$$

(4.28) ifadelerinden görülebileceği gibi μ_1, μ_2 ve μ_3 katsayılarının değerleri, tüp malzemesinin başlangıç şekil değiştirmesine bağlıdır. Buna ek olarak, eğer yarıçap değişim parametresi olan a sıfıra eşitlenirse, (4.27) denklemi, klasik KdV denkleminde dönüşür. Bir başka deyişle, (4.27) denklemindeki son terim, tüpün yarıçapının değişiminin probleme katkısını ifade etmektedir.

4.3 Viskoz Akışkan ile Dolu Tüplerde Nonlinear Dalga Yayılması

Bu bölümde, içi viskoz akışkan ile dolu, yarıçapı değişken ince elastik tüpte, küçük fakat sonlu genlikli dalgaların yayılımı incelenecektir. Bu amaçla, uzun dalga yaklaşımında, indirgeyici pertürbasyon yöntemi probleme uyarlanacaktır.

Boyutsuz hareket denklemleri (2.48)-(2.50) incelendiğinde, elimizde, p , u , v , v_z bilinmeyenlerine karşılık, bu bilinmeyenleri içeren üç denklem olduğu görülmektedir. Bu durumda sistemi kapatmak için ek bir yaklaşıma ihtiyaç duymaktayız. Bu çalışmada, bilinmeyenlerden birini elimine edebilecek iki farklı yaklaşım kullanılacaktır.

1. Yaklaşım :

(2.49), (2.50) denklemlerinde, $y = (\lambda_\theta + u + \phi z - x)\varepsilon^2$ dönüşümü yapılır ve viskoziteyi temsil etmekte olan ν parametresinin mertebesi de β ($\nu = \varepsilon^\beta \bar{\nu}$) olarak kabul edilirse, bu denklemler aşağıdaki formu alır

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\phi + \frac{\partial u}{\partial z})v + \frac{1}{2}(\lambda_\theta + \phi z + u)\frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = \varepsilon^\beta \bar{\nu} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - 2\varepsilon^{\beta+2} \frac{\bar{\nu}}{\lambda_\theta + \phi z + u} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} \right)_{y=0}. \quad (4.30)$$

(4.1)-(4.3) ile ifade edilen açılımlar yukarıda verilen (4.29)-(4.30) akışkan denklemlerinde kullanılır ve elde edilen denklem sistemi ε 'un çeşitli kuvvetlerine göre düzenlenirse, aşağıdaki denklem setleri elde edilir.

$O(\varepsilon)$ mertebeden denklemler:

$$-g \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \lambda_\theta \frac{\partial v_1}{\partial \xi} = 0, \quad (4.31)$$

$$-g \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\partial p_1}{\partial \xi} = 0. \quad (4.32)$$

$O(\varepsilon^2)$ mertebeden denklemler:

$$-g \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \lambda_\theta \left(\frac{\partial v_2}{\partial \xi} + \frac{\partial v_1}{\partial \tau} \right) + \frac{1}{2} (a\tau + u_1) \frac{\partial v_1}{\partial \xi} = 0, \quad (4.33)$$

$$-g \frac{\partial v_2}{\partial \xi} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\partial p_2}{\partial \xi} + \frac{\partial p_1}{\partial \tau} = \bar{\nu} \varepsilon^{\alpha+\beta-1} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi^2} - \frac{2\bar{\nu}}{\lambda_\theta} \varepsilon^{\beta-\alpha+1} \left(\frac{\partial v_{z1}}{\partial y} \right)_{y=0}. \quad (4.34)$$

Bu denklemlerde p_1 ve p_2 fonksiyonları henüz bilinmemektedir. (4.1)-(4.7) açılımları (2.48) ile ifade edilen tüp denkleminde yerine konursa, çeşitli mertebeden basınç terimleri aşağıdaki biçimde elde edilir

$$p_0 = \beta_0, \quad (4.35)$$

$$p_1 = (\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta})u_1 + \left[(a - \frac{\lambda_\theta}{\lambda_z}A)\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta}a \right] \tau, \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} p_2 = & (\frac{mg^2}{\lambda_\theta \lambda_z} - \alpha_0) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} \varepsilon^{2\alpha-1} + (\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta})u_2 + (\beta_2 - \frac{\beta_1}{\lambda_\theta} + \frac{\beta_0}{\lambda_\theta^2})u_1^2 \\ & + 2 \left[(a - \frac{\lambda_\theta}{\lambda_z}A)\beta_2 - \frac{\beta_1}{\lambda_\theta}a + \frac{\beta_0}{\lambda_\theta^2}a \right] \tau u_1 \\ & + \left[(a - \frac{\lambda_\theta}{\lambda_z}A)^2 \beta_2 - \frac{\beta_1}{\lambda_\theta}(a^2 - \frac{\lambda_\theta^2}{\lambda_z^2}A^2) + \frac{\beta_0}{\lambda_\theta^2}a^2 \right] \tau^2. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Alan Denklemlerinin Çözümleri

(4.31), (4.32) denklemlerinin integrasyonundan aşağıdaki ifadeler elde edilir

$$u_1 = U(\xi, \tau), \quad v_1 = \frac{2g}{\lambda_\theta}U(\xi, \tau) + f(\tau), \quad p_1 = \frac{2g^2}{\lambda_\theta}U(\xi, \tau) + h(\tau). \quad (4.38)$$

Burada $U(\xi, \tau)$ yönetici denklemi daha sonra elde edilecek olan bilinmeyen bir fonksiyon, $f(\tau)$ ve $h(\tau)$ ise τ değişkenine bağlı bilinmeyen fonksiyonlardır ve tanım kümesinin sonsuz boyutlu olması halinde sıfır alınmalıdırlar. Buna ek olarak, τ 'nın büyük değerleri için alan değişkenlerine sonlu çözümler bulunabilmesi için, (4.36) ile verilen p_1 eşitliğindeki τ teriminin katsayısı da sıfır olmalıdır

$$(a - \frac{\lambda_\theta}{\lambda_z}A)\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta}a = 0. \quad (4.39)$$

Bu bağıntı, sonlu statik şekil değiştirmeden sonraki yarıçap değişim parametresi a 'yı, başlangıçtaki yarıçap değişim parametresi olan A 'ya bağlı olarak ifade edebilmeyi sağlar

$$a = \frac{\lambda_\theta^2 \beta_1}{\lambda_z(\lambda_\theta \beta_1 - \beta_0)} A. \quad (4.40)$$

(4.36) ve (4.38) ifadelerindeki p_1 yapılarını karşılaştırsak, $U(\xi, \tau)$ fonksiyonu için sıfırdan farklı bir çözümün bulunabilmesi için aşağıdaki koşulun sağlanması gerektiği görülebilir

$$g^2 = (\lambda_\theta \beta_1 - \beta_0)/2. \quad (4.41)$$

Burada g , ortamda yayılan dalganın uzun dalga limitindeki faz hızına karşı gelir. Gerçek dalga hızının oluşabilmesi için $\lambda_\theta \beta_1 - \beta_0 > 0$ koşulu sağlanmalıdır. Bu

durumda, (4.38) ile verilen çözüm aşağıdaki biçimde ifade edilebilir

$$u_1 = U(\xi, \tau), \quad v_1 = \frac{2g}{\lambda_\theta} U(\xi, \tau), \quad p_1 = \frac{2g^2}{\lambda_\theta} U(\xi, \tau). \quad (4.42)$$

(4.42) ile verilen çözüm, (4.33) ve (4.34)'de kullanılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir

$$-g \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \frac{\lambda_\theta}{2} \frac{\partial v_2}{\partial \xi} + g \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{3g}{\lambda_\theta} U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{ga}{\lambda_\theta} \tau \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0, \quad (4.43)$$

$$-g \frac{\partial v_2}{\partial \xi} + \frac{\partial p_2}{\partial \xi} + \frac{2g^2}{\lambda_\theta} \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{4g^2}{\lambda_\theta^2} U \frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{2\bar{\nu}g}{\lambda_\theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \varepsilon^{\alpha+\beta-1} - \frac{2\bar{\nu}}{\lambda_\theta} \left(\frac{\partial v_{z1}}{\partial y} \right)_{y=0} \varepsilon^{\beta-\alpha+1}. \quad (4.44)$$

$\partial v_2 / \partial \xi$ ifadesi (4.43), (4.44) denklemleri arasından elimine edilirse, aşağıdaki eşitlik elde edilir

$$\begin{aligned} & -\frac{2g}{\lambda_\theta} \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \frac{1}{g} \frac{\partial p_2}{\partial \xi} + \frac{4g}{\lambda_\theta} \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{10g}{\lambda_\theta^2} U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \left(\frac{2ga}{\lambda_\theta^2} \right) \tau \frac{\partial U}{\partial \xi} \\ & = \frac{2\bar{\nu}}{\lambda_\theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \varepsilon^{\alpha+\beta-1} - \frac{2\bar{\nu}}{\lambda_\theta g} \left(\frac{\partial v_{z1}}{\partial y} \right)_{y=0} \varepsilon^{\beta-\alpha+1}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

(4.37) ile verilen p_2 ifadesi (4.45) de kullanılırsa aşağıdaki master denklem elde edilir

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U}{\partial \tau} + \mu_1 U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \mu_2 \varepsilon^{2\alpha-1} \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} + \mu_3 a \tau \frac{\partial U}{\partial \xi} \\ & + \mu_4 \varepsilon^{\alpha+\beta-1} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \mu_5 \varepsilon^{\beta-\alpha+1} \left(\frac{\partial v_{z1}}{\partial y} \right)_{y=0} = 0. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Burada $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ ve μ_5 katsayıları şu şekilde tanımlanmışlardır

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{5}{2\lambda_\theta} + \frac{1}{2g^2} (\lambda_\theta \beta_2 - \beta_1 + \frac{\beta_0}{\lambda_\theta}), \quad \mu_2 = \frac{1}{4g^2} \left(\frac{mg^2}{\lambda_z} - \lambda_\theta \alpha_0 \right) \\ \mu_3 &= -\frac{1}{2\lambda_\theta} + \frac{\beta_0 \beta_2}{\beta_1 (\lambda_\theta \beta_1 - \beta_0)}, \quad \mu_4 = -\frac{\bar{\nu}}{2g}, \quad \mu_5 = \frac{\bar{\nu}}{\lambda_\theta g}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Elde edilen bu master denklemden, pertürbasyon parametresi olarak adlandırabileceğimiz α ve viskozitenin mertebesini temsil eden β terimlerinin çeşitli sayısal değerlerine göre problemi temsil eden çeşitli evölüsyon denklemlerine ulaşılabilir.

(i) $\alpha = 1/2$ ve viskozitenin mertebesini temsil eden $\beta = 1/2$ değerleri

için, master denklemdaki son terim düşer ve değişken Katsayılı Korteweg-de Vries-Burgers (KdVB) denklemi elde edilir

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \mu_1 U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \mu_2 \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} + \mu_3 a \tau \frac{\partial U}{\partial \xi} + \mu_4 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = 0. \quad (4.48)$$

(ii) $\alpha = 1/2$ ve viskozitenin mertebesini temsil eden $\beta = 3/2$ değerleri için (4.47) master denkleminin son iki terimi düşer ve evolüsyon denklemi olarak değişken katsayılı Korteweg-de Vries (KdV) denklemi elde edilir

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \mu_1 U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \mu_2 \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} + \mu_3 a \tau \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0. \quad (4.49)$$

2. Yaklaşım:

Bu alt bölümde, viskoz akışkan ile dolu yarıçapı genişleyen tüplerde nonlineer dalga yayılması problemi, aşağıdaki yaklaşım altında incelenecektir.

$$\nu \frac{2}{\lambda_\theta + \phi z + u} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} \right)_{x=\lambda_\theta + \phi z + u} = -\nu \frac{8v}{(\lambda_\theta + \phi z + u)^2}. \quad (4.50)$$

Bu durumda, (2.50) denklemi aşağıdaki formu alır

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{8v}{(\lambda_\theta + \phi z + u)^2} \right). \quad (4.51)$$

Viskoziteyi temsil etmekte olan ν parametresinin mertebesi de β ($\nu = \varepsilon^\beta \bar{\nu}$) olarak kabul edilir ve uzun dalga yaklaşımın temsilen, (4.1)-(4.8) açılımları (2.48), (2.49) ve (4.51) ile ifade edilen alan denklemlerinde kullanılırsa, ε 'un çeşitli mertebelerini içeren bir denklem sistemi elde edilir. Elde edilen denklem sistemi ε 'un çeşitli kuvvetlerine göre düzenlenirse, aşağıdaki denklem setine ulaşılır.

$O(\varepsilon)$ mertebeden denklemler:

$$-g \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \lambda_\theta \frac{\partial v_1}{\partial \xi} = 0, \quad (4.52)$$

$$-g \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\partial p_1}{\partial \xi} = 0. \quad (4.53)$$

$O(\varepsilon^2)$ mertebeden denklemler:

$$-g \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \lambda_\theta \left(\frac{\partial v_2}{\partial \xi} + \frac{\partial v_1}{\partial \tau} \right) + \frac{1}{2} (a\tau + u_1) \frac{\partial v_1}{\partial \xi} = 0, \quad (4.54)$$

$$-g \frac{\partial v_2}{\partial \xi} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\partial p_2}{\partial \xi} + \frac{\partial p_1}{\partial \tau} = -\frac{8\bar{v}}{\lambda_\theta^2} v_1 \varepsilon^{-(1+\alpha-\beta)}. \quad (4.55)$$

Çeşitli mertebeden basınç ifadeleri ise aşağıdaki formdadır

$$p_0 = \beta_0, \quad (4.56)$$

$$p_1 = (\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta}) u_1 + \left[(a - \frac{\lambda_\theta}{\lambda_z} A) \beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta} a \right] \tau, \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} p_2 = & \left(\frac{mg^2}{\lambda_\theta \lambda_z} - \alpha_0 \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} \varepsilon^{2\alpha-1} + (\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta}) u_2 + (\beta_2 - \frac{\beta_1}{\lambda_\theta} + \frac{\beta_0}{\lambda_\theta^2}) u_1^2 \\ & + 2 \left[(a - \frac{\lambda_\theta}{\lambda_z} A) \beta_2 - \frac{\beta_1}{\lambda_\theta} a + \frac{\beta_0}{\lambda_\theta^2} a \right] \tau u_1 \\ & + \left[(a - \frac{\lambda_\theta}{\lambda_z} A)^2 \beta_2 - \frac{\beta_1}{\lambda_\theta} (a^2 - \frac{\lambda_\theta^2}{\lambda_z^2} A^2) + \frac{\beta_0}{\lambda_\theta^2} a^2 \right] \tau^2. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Alan Denklemlerinin Çözümleri

(4.52), (4.53) ile verilen denklemler integre edilirse, 1.Yaklaşım olarak adlandırdığımız bölümde (4.39)-(4.41) ile verilen ilişkiler geçerli olmak üzere, aşağıdaki ifadelere ulaşılır

$$u_1 = U(\xi, \tau), \quad v_1 = \frac{2g}{\lambda_\theta} U(\xi, \tau), \quad p_1 = \frac{2g^2}{\lambda_\theta} U(\xi, \tau). \quad (4.59)$$

(4.59) ifadeleri (4.54), (4.55) ve (4.58) denklemlerinde kullanılırsa aşağıdaki denklemler elde edilir

$$-g \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \frac{\lambda_\theta}{2} \frac{\partial v_2}{\partial \xi} + g \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{3g}{\lambda_\theta} U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{ga}{\lambda_\theta} \tau \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0. \quad (4.60)$$

$$-g \frac{\partial v_2}{\partial \xi} + \frac{\partial p_2}{\partial \xi} + \frac{2g^2}{\lambda_\theta} \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{4g^2}{\lambda_\theta^2} U \frac{\partial U}{\partial \xi} = -\frac{16g\bar{v}}{\lambda_\theta^3} U \varepsilon^{-(1+\alpha-\beta)}. \quad (4.61)$$

$$\begin{aligned} p_2 = & \left(\frac{mg^2}{\lambda_\theta \lambda_z} - \alpha_0 \right) \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + (\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta}) u_2 + (\beta_2 - \frac{\beta_1}{\lambda_\theta} + \frac{\beta_0}{\lambda_\theta^2}) U^2 \\ & + 2 \left(\frac{\beta_0 \beta_2}{\lambda_\theta \beta_1} - \frac{\beta_1}{\lambda_\theta} + \frac{\beta_0}{\lambda_\theta^2} \right) a \tau U + \left(\frac{\beta_0^2}{\lambda_\theta^2 \beta_1^2} \beta_2 + \frac{\beta_0^2}{\lambda_\theta^3 \beta} - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta^2} \right) a^2 \tau^2. \end{aligned} \quad (4.62)$$

$\partial v_2 / \partial \xi$ terimi yukarıdaki denklemler arasından elimine edilecek olursa aşağıdaki

master denkleme ulaşılır

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \mu_1 U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \mu_2 \varepsilon^{2\alpha-1} \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} + \mu_3 a \tau \frac{\partial U}{\partial \xi} + \mu_6 \varepsilon^{-(1+\alpha-\beta)} U = 0. \quad (4.63)$$

Burada μ_1, μ_2, μ_3 ve μ_6 katsayıları aşağıdaki gibi tanımlanmıştır

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{5}{2\lambda_\theta} + \frac{1}{2g^2}(\lambda_\theta \beta_2 - \beta_1 + \frac{\beta_0}{\lambda_\theta}), \quad \mu_2 = \frac{1}{4g^2}(\frac{mg^2}{\lambda_z} - \lambda_\theta \alpha_0), \\ \mu_3 &= -\frac{1}{2\lambda_\theta} + \frac{\beta_0 \beta_2}{\beta_1(\lambda_\theta \beta_1 - \beta_0)}, \quad \mu_6 = \frac{4\bar{\nu}}{\lambda_\theta^2 g}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Elde edilen bu master denklemden, pertürbasyon parametresi olarak adlandırabileceğimiz α ve viskoziteyi temsil eden β terimlerinin çeşitli sayısal değerlerine göre problemi temsil eden çeşitli evolüsyon denklemlerine ulaşılabilir.

(i) $\alpha = 1/2$ ve $\beta = 3/2$ değerleri için değişken katsayılı pertürbe KdV denklemini elde edilir

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \mu_1 U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \mu_2 \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} + \mu_3 a \tau \frac{\partial U}{\partial \xi} + \mu_6 U = 0. \quad (4.65)$$

(ii) $\alpha = 1/2$ ve $\beta = 2$ değerleri için değişken katsayılı KdV denklemini elde edilir

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \mu_1 U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \mu_2 \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} + \mu_3 a \tau \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0. \quad (4.66)$$

Literatürde, değişken katsayılı evolüsyon denklemlerinin, sınırların düzgün olmadığı ve/veya homojen olmayan ortamlarda dalga yayılımı problemlerinin incelenmesi sırasında ortaya çıktığı görülmektedir. Buna örnek olarak Johnson [80], Grimshaw [81], Horn ve arkadaşları [82]'nin çalışmaları verilebilir. Grimshaw [81] ve Johnson [80]'ın çalışmalarında değişken derinlikli ortamlarda, su yüzeyinde yalnız dalgaların yayılımının değişken katsayılı KdV denklemini ile yönetildiği verilmiş ve denklemin katsayılarının bazı özel bağ koşullarını sağlaması halinde, evolüsyon denklemine kesin çözümler sunulabileceği gösterilmiştir. Horn ve arkadaşları [81] ise değişen derinlikli ortamda oluşan gravitasyonel su dalgalarının yayılımının incelenmesinden elde ettikleri evolüsyon denklemini, genişletilmiş (extended) KdV denklemini olarak adlandırmışlardır. Benzer tipte evolüsyon denklemlerinin elde edildiği diğer çalışmalar ve bu tip denklemlerin çözümü için önerilen yöntemler için [83]-[94] kaynaklarından yararlanılabilir.

4.4 Evolüsyon Denklemlerinin İlerleyen Dalga Çözümleri

Bu bölümde, (4.27), (4.48) ve (4.65) denklemleri ile ifade edilen evolüsyon denklemlerinin ilerleyen dalga çözümleri verilecektir. Ancak öncelikle, elde edilen bu evolüsyon denklemlerinin çözümlerinin temelini oluşturan KdV denkleminin çözümü açıklanacaktır.

4.4.1 Korteweg-de Vries Denkleminin İlerleyen Dalga Çözümleri

Korteweg-de Vries (KdV) denklemi aşağıdaki formda ifade edilebilir

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (4.67)$$

Burada α ve β keyfi sabitlerdir. (4.67) denklemine

$$u = (\beta^{1/3}/\alpha)U, \quad x = \beta^{1/3}X, \quad t = T \quad (4.68)$$

şeklinde bir değişken dönüşümü uygulanırsa, KdV denklemi aşağıdaki forma dönüşür

$$\frac{\partial U}{\partial T} + U \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial^3 U}{\partial X^3} = 0. \quad (4.69)$$

(4.69) denkleminin aşağıda verilen yapıda çözümlerini arayalım

$$U = U(\zeta), \quad \zeta = X - cT, \quad c = \text{sabit}. \quad (4.70)$$

(4.70) çözümü (4.69) denkleminde kullanılırsa

$$U''' + U U' - c U' = 0 \quad (4.71)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Burada üs ('), ilgili büyüklüğün ζ değişkenine göre adi türevini ifade etmektedir. (4.71) denklemi ζ 'ya göre integre edilirse aşağıdaki diferansiyel denklem elde edilir

$$U'' + \frac{U^2}{2} - cU = A. \quad (4.72)$$

Burada A bir integrasyon sabitidir. (4.72) denklemi $dU/d\zeta$ ile çarpılarak ζ 'ya göre tekrar integre edilecek olursa

$$3 (U')^2 = -U^3 + 3c U^2 + 6AU + 6B \equiv F(U). \quad (4.73)$$

bulunur. Burada B ikinci bir integrasyon sabitini göstermektedir.

(4.73) denkleminin gerçel çözüme sahip olabilmesi ancak $F(U) \geq 0$ koşulunun sağlanması durumunda mümkündür. Eğer $F(U) = 0$ denkleminin bir tane gerçel kökü varsa bu durumda sınırlı çözüm bulmak mümkün değildir. Bu nedenle, $F(U)$ fonksiyonunun üç tane ayırık gerçel kökünün olduğu varsayılacaktır. Bu kabul altında $c_1 < c_2 < c_3$ olmak üzere, $F(U)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir

$$F(U) = (U - c_1)(U - c_2)(c_3 - U). \quad (4.74)$$

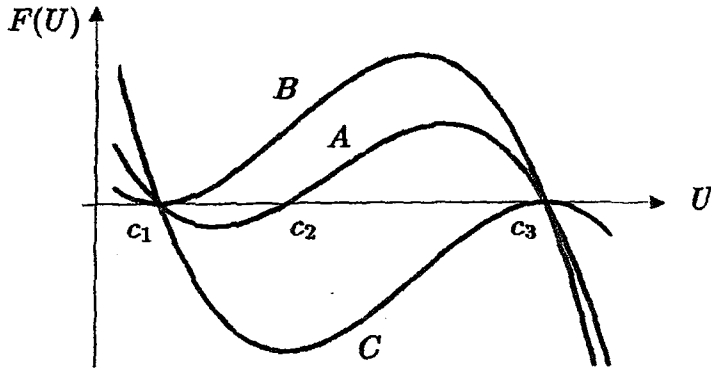
Gerekli hesaplamalar yapılacak olursa

$$c = \frac{1}{3}(c_1 + c_2 + c_3), \quad A = -\frac{1}{6}(c_1 c_2 + c_2 c_3 + c_3 c_1), \quad B = \frac{1}{6} c_1 c_2 c_3 \quad (4.75)$$

bulunur. c_1 , c_2 ve c_3 köklerinin ayırık ve gerçel olması için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanmalıdır

$$c^2 + 2A > 0, \quad F(c + \sqrt{c^2 + 2A}) \geq 0, \quad F(c - \sqrt{c^2 + 2A}) \leq 0. \quad (4.76)$$

Burada üç kök, iki tane de ekstremum noktası olduğundan, ekstremum noktalarından birisi maksimum diğeri de minimum noktası olacaktır. $F(U)$ fonksiyonunun genel davranışı ŞEKİL 4.1'de A eğrisi ile verilmiştir. (4.73) denkleminin gerçel çözümü c_2 ve c_3 arasında nonlinear bir salınımı göstermektedir. Eğer $c_2 \rightarrow c_1$ ise bu çözüm yalnız dalgaya karşı gelir ve şekilde B eğrisi ile gösterilmiştir. Eğer $c_2 \rightarrow c_3$ ise bu sabit çözüme karşı gelen lineer sinüzoidal dalgaları gösterir ve şekilde C eğrisi ile gösterilmiştir. Eğer üç kök de çakışıksa yine sabit çözüm oluşur ve bu çözüm ilerleyen dalga formunda değildir.



ŞEKİL 4.1 $F(U)$ fonksiyonunun davranışı A : Knoidal dalga, B : Yalnız dalga, C : Sabit çözüm

(4.73) denkleminin Jakobiye eliptik fonksiyonlar cinsinden çözümünü bulabilmek için aşağıdaki formda bir fonksiyon tanımlayalım

$$y^2(\zeta) = c_3 - U(\zeta). \quad (4.77)$$

Bu yeni fonksiyon (4.73) denkleminde kullanılırsa

$$(y')^2 = \frac{1}{12}(y^2 + c_1 - c_3)(y^2 + c_2 - c_3), \quad (4.78)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemde

$$w = \frac{y}{\sqrt{c_3 - c_2}}, \quad k^2 = \frac{c_3 - c_2}{c_3 - c_1} \quad (4.79)$$

değişken dönüşümü yapılırsa (4.78) diferansiyel denklemi aşağıdaki formu alır

$$\frac{dw}{\sqrt{(1 - k^2 w^2)(1 - w^2)}} = \sqrt{\frac{c_3 - c_1}{12}} d\zeta. \quad (4.80)$$

$w = \sin\theta$ dönüşümü kullanılacak olursa, (4.80) denklemini aşağıdaki forma dönüştür

$$\int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = \sqrt{\frac{c_3 - c_1}{12}} (\zeta - d). \quad (4.81)$$

Burada d bir integrasyon sabitini göstermektedir. (4.81) eşitliğinin sol yanındaki integral ise eliptik integraldir. Bu integralin üst sınırı ϕ , eliptik integralin genliği ve bu genliğin sinüsü ise Jakobiye eliptik fonksiyon olarak bilinir ve

$$w = \operatorname{sn} \left[\sqrt{\frac{c_3 - c_1}{12}} (\zeta - d), k \right] \quad (4.82)$$

şeklinde yazılabilir. (4.82) ifadesi (4.79)'da yerine konursa

$$y = \sqrt{c_3 - c_2} \operatorname{sn} \left[\sqrt{\frac{c_3 - c_1}{12}} (\zeta - d), k \right] \quad (4.83)$$

bulunur. Bu çözüm (4.77)'de yerine konursa $U(\zeta)$ çözümü Jakobiye eliptik fonksiyonlar cinsinden aşağıdaki şekilde elde edilir

$$\begin{aligned} U(\zeta) &= c_3 - (c_3 - c_2) \operatorname{sn}^2 \left[\sqrt{\frac{c_3 - c_1}{12}} (\zeta - d), k \right] \\ U(\zeta) &= c_2 + (c_3 - c_2) \operatorname{cn}^2 \left[\sqrt{\frac{c_3 - c_1}{12}} (\zeta - d), k \right]. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Yukarıdaki denklemdeki k sayısı ($0 \ll k \ll 1$) eliptik integralin modülü

olarak adlandırılır ve (4.79)₂ ile tanımlanmıştır. (4.84) denklemindeki cn fonksiyonundan dolayı KdV denkleminin bu tür çözümleri “knoidal dalga” olarak bilinir ve periyodu K birinci tür tam eliptik integral olmak üzere

$$T_p = 4K \sqrt{\frac{3}{c_3 - c_1}} \quad (4.85)$$

şeklinde. Özel olarak $c_2 \rightarrow c_1$ ise $k \rightarrow 1$ olur ve cn eliptik fonksiyonu, $sech$ fonksiyonuna dönüşür ve T_p de sonsuza gider. Bu halde de çözüm

$$U = c_1 + (c_3 - c_1) \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{c_3 - c_1}{12}} \left(X - \frac{1}{3}(2c_1 + c_3)T \right) \right], \quad (4.86)$$

formunda verilebilir. Eğer $c_1 = U_\infty$, $c_3 - c_1 = \bar{a}$ olarak tanımlanırsa KdV denkleminin çözümü

$$U = U_\infty + \bar{a} \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{\bar{a}}{12}} \left\{ X - \left(U_\infty + \frac{1}{3}\bar{a} \right) T \right\} \right], \quad (4.87)$$

formunda verilir. Burada U_∞ , U 'nun sonsuzdaki durumunu, $\bar{a}$ ise dalganın genliğini göstermektedir. (4.87)'deki çözüm *yalnız dalga*'yı ifade etmektedir. Bir yalnız dalganın yayılma hızı, $\bar{a}$ genliği ile birlikte artar. Dolayısı ile aynı yönde ilerleyen ve aralarındaki uzaklık yeterli derecede büyük olan iki yalnız dalgadan geridekinin genliği daha büyükse, öndekine yetişecek ve aralarında karmaşık bir etkileşim oluşacaktır. Sayısal hesaplamalar bir süre sonra bu etkileşimin pratik olarak sona erdiğini ve iki dalganın yeniden birbirinden ayrılarak yollarına devam ettiğini göstermiştir. Ancak çarpışmadan sonra genliği büyük olan dalganın öne geçtiği gözlenir. Çarpışmaları sonunda karakterleri değişmeyen bu tür dalgalara “soliton” ya da “yalnız dalga” adı verilir.

4.4.2 Değişken Katsayılı Korteweg-de Vries Denkleminin İlerleyen Dalga Çözümleri

Bu alt bölümde (4.27) denklemi ile ifade edilen değişken katsayılı KdV denkleminin ilerleyen dalga çözümleri sunulacaktır. Bu amaçla, (4.27) denkleminin aşağıdaki formda ilerleyen dalga çözümü önerelim

$$U = F(\zeta), \quad \zeta = \lambda(\xi - \beta\tau - \frac{\mu_3}{2}a\tau^2). \quad (4.88)$$

Burada λ ve β denklemin çözümünden belirlenecek olan iki sabittir. (4.88) ifadesi (4.27)'de kullanılırsa aşağıdaki diferansiyel denklemi elde edilir

$$-\beta F' + \mu_1 F F' + \lambda^2 \mu_2 F''' = 0. \quad (4.89)$$

Burada üs ($'$), ζ 'ya göre türevi ifade etmektedir. Bu çalışmada, lokalize olmuş ilerleyen dalga çözümü ile ilgileneceğiz yani F ve çeşitli mertebeden türevlerinin $\zeta \rightarrow \mp\infty$ olurken sıfırlandığı varsayılacaktır. (4.89) denklemi $-\infty$ dan ∞ 'a kadar ζ ' ya göre integre edilir ve lokalize olma koşulu kullanılırsa aşağıdaki diferansiyel denklem elde edilir

$$-\beta F + \frac{\mu_1}{2} F^2 + \mu_2 \lambda^2 F'' = 0. \quad (4.90)$$

Bu tip diferansiyel denklemlerin çözümünde, hiperbolik tanjant metodunu kullanmak uygun olacaktır (Malfliet and Wieers [95]). Bu doğrultuda, yeni bir η değişkenini aşağıdaki gibi tanımlayalım

$$\eta = \tanh \zeta. \quad (4.91)$$

Bu durumda, (4.90) denklemi için önerilecek çözüm aşağıdaki formu alır

$$F = c + d\eta^2. \quad (4.92)$$

Burada c ve d çözümden belirlenecek olan sabitlerdir. Çalışmada lokalize olmuş çözüm göz önüne alındığı için, $\eta \rightarrow \mp 1$ için F sıfır olmaktadır. Bu koşul $d = -c$ bağıntısını üretir. $d/d\zeta = (1 - \eta^2)d/d\eta$ türev bağıntısı göz önünde bulundurularak (4.92) ifadesi (4.90)'da yerine konur ve η 'nın çeşitli kuvvetleri sıfıra eşitlenirse aşağıdaki sonuçlar elde edilir

$$\lambda = \left(\frac{\mu_1 c}{12\mu_2}\right)^{1/2}, \quad \beta = \frac{\mu_1 c}{3}. \quad (4.93)$$

Bu durumda aşağıdaki formdaki çözüm ve dalga hızı ifadelerine ulaşılır

$$U = c \sec h^2 \zeta, \quad \zeta = \left(\frac{\mu_1 c}{12\mu_2}\right)^{1/2} \left(\xi - \frac{\mu_3}{2} a \tau^2 - \frac{\mu_1 c}{3} \tau\right). \quad (4.94)$$

Burada c yalnız dalganın genliğine karşı gelmektedir. Yalnız dalganın hızının değişken olduğu görülmektedir. Elde edilen bu çözüm, aynı formdaki değişken katsayılı KdV denkleminin çözümlerini Ters Saçılma yöntemini kullanarak elde eden Wadati [96]'nin sunduğu çözümlerle tamamen aynıdır. Dalganın yayılma hızı ise aşağıdaki gibi verilir

$$v_p = \frac{1}{\beta + \mu_3 a \tau}. \quad (4.95)$$

4.4.3 Değişken Katsayılı Korteweg-de Vries Burgers Denklemine İlerleyen Dalga Çözümleri

Bu alt bölümde, (4.48) ile verilen değişken katsayılı KdVB denkleminin ilerleyen dalga çözümlerini elde edeceğiz. Bunun için sözkonusu denkleme aşağıdaki formda bir çözüm önerelim

$$U = F(\zeta), \quad \zeta = \lambda(\xi - \beta\tau - \frac{\mu_3}{2}a\tau^2). \quad (4.96)$$

Burada λ ve β denklemin çözümünden elde edilecek sabitlerdir. (4.96) dönüşümü (4.48) denkleminde kullanılırsa aşağıdaki denklem elde edilir

$$-\beta F' + \mu_1 F F' + \lambda^2 \mu_2 F''' + \lambda \mu_4 F'' = 0. \quad (4.97)$$

Burada ζ ($'$), ζ 'ya göre türevi ifade etmektedir. (4.97) denklemini ζ 'ya göre integre edilirse

$$-\beta F + \frac{\mu_1}{2} F^2 + \mu_2 \lambda^2 F'' + \mu_4 \lambda F' = D \quad (4.98)$$

denklemini bulunur. Burada D bir integral sabiti olup dalganın $\pm\infty$ 'daki değerine bağlıdır. F 'nin $+\infty$ 'daki değeri F_∞^+ ve $-\infty$ 'daki değeri F_∞^- ile gösterilecek olursa (4.98)'den

$$-\beta F_\infty^+ + \frac{\mu_1}{2} (F_\infty^+)^2 + \beta F_\infty^- - \frac{\mu_1}{2} (F_\infty^-)^2 = 0 \quad (4.99)$$

bulunur. Buradan β değerinin aşağıdaki biçimde olması gerektiği ortaya çıkar

$$\beta = \frac{\mu_1}{2} (F_\infty^+ + F_\infty^-) \quad (4.100)$$

Bu tip adi türevli nonlinear diferansiyel denklemlerin çözümünde hiperbolik tanjant yöntemini kullanmak uygundur. Bunun için aşağıdaki formda yeni bir η değişkeni tanımlanacaktır

$$\eta = \tanh \zeta. \quad (4.101)$$

(4.98) denkleminde aşağıdaki formda bir çözüm önereceğiz

$$F = c + d\eta + e\eta^2. \quad (4.102)$$

Burada c , d ve e çözümden elde edilecek sabitlerdir. (4.102) ifadesinin $\eta = \pm 1$ 'deki değeri hesaplanırsa β ve D sabitleri aşağıdaki şekilde bulunur

$$\beta = \mu_1(c + e), \quad D = -\mu_1 ec + \frac{\mu_1}{2} d^2 - \frac{\mu_1}{2} (e^2 + c^2). \quad (4.103)$$

(4.102) ifadesi (4.98) denkleminde yerine konur ve η 'nın çeşitli kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse, aşağıdaki cebirsel denklem takımı elde edilir

$$\begin{aligned}\frac{\mu_1}{2}(e^2 - d^2) + 2\lambda^2\mu_2e + \lambda\mu_4d &= 0, \\ -\mu_1ed - 2\lambda^2\mu_2d + 2\lambda\mu_4e &= 0, \\ -\mu_1e^2 + \frac{\mu_1}{2}d^2 - 8\lambda^2\mu_2e - \lambda\mu_4d &= 0, \\ \mu_1de + 2\lambda^2\mu_2d - 2\lambda\mu_4e &= 0, \\ \frac{\mu_1}{2}e^2 + 6\lambda^2\mu_2e &= 0.\end{aligned}\quad (4.104)$$

Bu denklemler ardışık olarak çözülürse aşağıdaki ilişkiler elde edilir

$$e = -\frac{3}{25}\frac{\mu_4^2}{\mu_1\mu_2}, \quad d = \pm\frac{6}{25}\frac{\mu_4^2}{\mu_1\mu_2}, \quad \lambda = \pm\frac{\mu_4}{10\mu_2}, \quad \beta = \mu_1(c + e). \quad (4.105)$$

Elde edilen bu sabitler (4.88)'de yerine konur ve elde edilen veriler düzenlenirse, değişken katsayılı KdVB denkleminin ilerleyen dalga çözümü aşağıdaki formda verilebilir

$$U = \frac{\beta}{\mu_1} + \frac{3\mu_4^2}{25\mu_1\mu_2}(\sec h^2\xi + 2\tanh\xi), \quad \zeta = \frac{\mu_4}{10\mu_2}(\xi - \beta\tau - \frac{\mu_3}{2}a\tau^2). \quad (4.106)$$

Burada, dalga genliği $(\beta/\mu_1 + 3\mu_4^2/25\mu_1\mu_2)$ olup β 'ya bağlıdır. Dalganın yayılma hızı ise aşağıdaki gibi verilir

$$v_p = \frac{1}{\beta + \mu_3a\tau}. \quad (4.107)$$

4.4.4 Değişken Katsayılı Pertürbe Korteweg-de Vries Denkleminin İlerleyen Dalga Çözümleri

Bu alt bölümde, (4.65) ile verilen değişken katsayılı pertürbe Korteweg-de Vries denkleminin ilerleyen dalga çözümleri sunulacaktır. Bu amaçla, (4.65) denkleminde aşağıdaki formda bir çözüm önerelim

$$U = \kappa(\tau)V(\zeta), \quad \zeta = \alpha(\tau)(\xi - \varphi(\tau) - \frac{\mu_3}{2}a\tau^2). \quad (4.108)$$

Burada $\kappa(\tau)$, $\alpha(\tau)$ ve $\varphi(\tau)$ argümanlarının bilinmeyen birer fonksiyonudurlar. $V(\zeta)$ ise ζ 'nin bilinmeyen bir fonksiyonudur ve çözümden elde edilecektir. (4.108) çözüm önerisi (4.65) denkleminde kullanılırsa aşağıdaki diferansiyel denklem elde edilir

$$\left[\frac{\kappa'(\tau)}{\kappa(\tau)} + \mu_6 \right] V + \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)} \zeta V'$$

$$+ [-\alpha(\tau)\varphi'(\tau)V' + \mu_1\alpha(\tau)\kappa(\tau)VV' + \mu_2\alpha^3(\tau)V'''] = 0. \quad (4.109)$$

Burada üs ('), fonksiyonların argümanlarına göre türevlerini ifade etmektedir. Bu aşamada, (4.109) denkleminin son parantez içindeki parçasının sıfır olduğunu varsayalım, bu durumda aşağıdaki ilişkiler geçerlidir

$$\left[\frac{\kappa'(\tau)}{\kappa(\tau)} + \mu_6 \right] V + \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)} \zeta V' = 0. \quad (4.110)$$

$$-\varphi'(\tau)V' + \mu_1\kappa(\tau)VV' + \mu_2\alpha^2(\tau)V''' = 0. \quad (4.111)$$

(4.111) denklemi ζ 'ya göre integre edilirse aşağıdaki eşitlik elde edilir

$$-\varphi'(\tau)V + \mu_1\kappa(\tau)\frac{V^2}{2} + \mu_2\alpha^2(\tau)V'' = 0. \quad (4.112)$$

Şimdi burada (4.112) denkleminin klasik KdV denkleminin bir çözüm olması için gerekli koşulları araştıralım. Bu amaçla (4.112) denkleminin

$$V = 1 - \eta^2. \quad (4.113)$$

formunda bir çözüm arayalım. $d/d\zeta = (1 - \eta^2)d/d\eta$ türev ilişkisini göz önünde bulundurulursa, (4.113) ifadesinin (4.112) denkleminin bir çözümü olabilmesi için aşağıdaki koşulların sağlanması gerekir.

$$\kappa(\tau) = 12\frac{\mu_2}{\mu_1}\alpha^2(\tau), \quad \varphi'(\tau) = \mu_1\kappa(\tau) - 8\mu_2\alpha^2(\tau). \quad (4.114)$$

Bu fonksiyonların belirlenebilmesi için ek bir ilişkiye ihtiyaç vardır. Bu ilişki de (4.110) denkleminin elde edilecektir. Ancak, önerilen (4.113) çözümü, (4.110) denklemini noktasal olarak sağlamaz. Bu nedenle, V fonksiyonu karesi integre edilebilir olduğundan (4.110) denklemini ortalama anlamda sağlanmaya çalışılacaktır. Bu amaçla, (4.110) denklemini V ile çarpılır ve ζ üzerinde ve $(-\infty, +\infty)$ aralığında integre edilirse aşağıdaki denklem elde edilir

$$\left(\frac{\kappa'(\tau)}{\kappa(\tau)} - \frac{\alpha'(\tau)}{2\alpha(\tau)} + \mu_6 \right) \langle V^2 \rangle = 0, \quad \langle V^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} V^2 d\zeta. \quad (4.115)$$

Bu ifadenin bütün τ değerlerinde sağlanabilmesi için

$$\frac{\kappa'(\tau)}{\kappa(\tau)} - \frac{\alpha'(\tau)}{2\alpha(\tau)} + \mu_6 = 0, \quad (4.116)$$

olmalıdır. Diğer yandan (4.114)₁ denkleminin $\alpha'(\tau)/\alpha(\tau) = \kappa'(\tau)/2\kappa(\tau)$

olduğu görülerek, bu ilişki (4.116)'da yerine konursa aşağıdaki denklem bulunur

$$\frac{\kappa'(\tau)}{\kappa(\tau)} + \frac{4}{3}\mu_6 = 0. \quad (4.117)$$

Bu denklemin çözümünden

$$\kappa(\tau) = a_0 \exp\left(-\frac{4}{3}\mu_6\tau\right) \quad (4.118)$$

elde edilir. Burada a_0 , $\tau = 0$ daki dalga genliğini karakterize eden bir sabittir. (4.118) çözümü (4.114) denklemlerinde yerine konur ve gerekli integral işlemleri yapılırsa aşağıdaki çözümler bulunur

$$\begin{aligned} \alpha(\tau) &= \left(\frac{\mu_1 a_0}{12\mu_2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{2}{3}\mu_6\tau\right), \\ \varphi(\tau) &= \frac{\mu_1 a_0}{4\mu_6} [1 - \exp\left(-\frac{4}{3}\mu_6\tau\right)]. \end{aligned} \quad (4.119)$$

Bu durumda toplam çözüm aşağıdaki şekilde verilebilir

$$\begin{aligned} U &= \kappa(\tau) \sec h^2 \zeta, \\ \zeta &= \left(\frac{\mu_1 a_0}{12\mu_2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{2}{3}\mu_6\tau\right) \left\{ \xi - \frac{\mu_1 a_0}{12\mu_2} [1 - \exp\left(-\frac{4}{3}\mu_6\tau\right)] - \frac{\mu_3}{2} a \tau^2 \right\}. \end{aligned} \quad (4.120)$$

Dalganın yayılma hızı ise aşağıdaki gibi verilir

$$v_p = \frac{1}{(\mu_1/3)\kappa(\tau) + \mu_3 a \tau}. \quad (4.121)$$

Burada, (4.120) çözümünün (4.65) denklemini ortalama anlamda sağladığını ifade etmek gerekmektedir [97].

4.4.5 Yarıçap Değişiminin Dalga Hızlarına Etkisi

Bu kısımda, yarıçap değişiminin (4.95), (4.107), (4.121) ile verilen dalga hızlarına olan etkisi incelenecektir. Bu hız ifadeleri incelenecek olursa, her üç ifadede de yarıçap değişimini karakterize eden a parametresinin μ_3 katsayısı ile çarpım halinde olduğu görülebilir. Dolayısıyla, μ_3 katsayısının işaretini belirlemek gereklidir. Bunun için, tüp malzemesinin bünye denklemlerinin bilinmesi zorunludur. Bu çalışmada, Demiray [98] tarafından yumuşak biyolojik dokular için önerilen bünye denklemi kullanılacaktır. Bu modele ait şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu

$$\Sigma = \frac{1}{2\alpha} \{ \exp [\alpha(I_1 - 3)] - 1 \}, \quad (4.122)$$

şeklinde verilir. Burada α maddesel bir sabit ve I_1 ise Finger deformasyon tansörünün birinci invariantı olup $I_1 = \lambda_z^2 + \lambda_\theta^2 + 1/\lambda_z^2 \lambda_\theta^2$ biçiminde ifade edilir. (4.122) bağıntısı (4.8) bağıntılarında kullanılırsa, $\alpha_0, \beta_0, \beta_1$ ve β_2 sabitleri aşağıdaki biçimde elde edilir

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \left(\frac{1}{\lambda_\theta} - \frac{1}{\lambda_\theta^3 \lambda_z^4} \right) F(\lambda_\theta, \lambda_z), \quad \beta_0 = \left(\frac{1}{\lambda_z} - \frac{1}{\lambda_\theta^4 \lambda_z^3} \right) F(\lambda_\theta, \lambda_z), \\ \beta_1 &= \left[\left(\frac{1}{\lambda_\theta \lambda_z} + \frac{3}{\lambda_\theta^5 \lambda_z^3} \right) + 2 \frac{\alpha}{\lambda_\theta \lambda_z} \left(\lambda_\theta - \frac{1}{\lambda_\theta^3 \lambda_z^2} \right)^2 \right] F(\lambda_\theta, \lambda_z), \\ \beta_2 &= \left[-\frac{6}{\lambda_\theta^6 \lambda_z^3} + 3 \frac{\alpha}{\lambda_\theta \lambda_z} \left(1 + \frac{3}{\lambda_\theta^4 \lambda_z^2} \right) \left(\lambda_\theta - \frac{1}{\lambda_\theta^3 \lambda_z^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\alpha^2}{\lambda_\theta \lambda_z} \left(\lambda_\theta - \frac{1}{\lambda_\theta^3 \lambda_z^2} \right)^3 \right] F(\lambda_\theta, \lambda_z).\end{aligned}\tag{4.123}$$

Burada $F(\lambda_\theta, \lambda_z)$ fonksiyonu

$$F(\lambda_\theta, \lambda_z) = \exp \left[\alpha \left(\lambda_\theta^2 + \lambda_z^2 + \frac{1}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2} - 3 \right) \right].\tag{4.124}$$

olarak tanımlanmıştır. μ_3 katsayısının başlangıç şekil değiştirmesi ile değişimini incelemek için α maddesel sabitinin sayısal değerine gereksinim vardır. Bu çalışmada kullanılan mekanik modelde, Simon ve arkadaşları [99] tarafından köpek aortu üzerinde yapılan deneysel çalışma sonuçları, Demiray [100] tarafından elde edilen analitik sonuç ile, $R_i = 0.31\text{cm}$, $R_0 = 0.38\text{cm}$ ve $\lambda_z = 1.53$ değerleri için karşılaştırılarak α maddesel sabitinin sayısal değeri $\alpha = 1.948$ olarak bulunmuştur. α 'nın bu sayısal değeri kullanılarak, μ_3 katsayısının değişimi, λ_θ ve λ_z 'nin bir fonksiyonu olarak analiz edilebilir. Örneğin, $\lambda_\theta = \lambda_z = 1.6$ değeri için $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ ve μ_6 'nın sayısal değerleri

$$\mu_1 = 4.91, \quad \mu_2 = 0.079, \quad \mu_3 = 0.06, \quad \mu_4 = -0.00032, \quad \mu_6 = 0.02.\tag{4.125}$$

olarak bulunur. Elde edilen bu sayısal değerler (4.95), (4.107), (4.121) hız ifadelerinde kullanılacak olursa, her üç hal için de, yarıçapı daralan tüplerde, dalga hızının orijinden uzaklaştıkça giderek arttığı; yarıçapı genişleyen tüplerde ise, dalga hızının orijinden uzaklaştıkça giderek azaldığı çıkarımına varılabilir ki bu da beklenen sonuçtur.

5. NONLINEER DALGA MODÜLASYONU

5.1 Giriş

Bu bölümde, iki ayrı modülasyon problemi incelenecektir. İlk olarak, içi viskoz olmayan akışkan ile dolu değişken yarıçaplı ince elastik tüplerde zayıf nonlinear dalgaların genlik modülasyonu problemi ele alınacaktır. Bölüm 2’de elde edilmiş olan yarıçapı değişken elastik tüp ve viskoz olmayan akışkan denklemleri ve modülasyonu tanımlayan pertürbasyon şemaları verilerek, yönetici denklem olarak değişken katsayılı nonlinear Schrödinger denklemi elde edilecektir. Bu alt bölümün sonunda, önce standart NLS denklemine, daha sonra da değişken katsayılı NLS denklemine ilerleyen dalga çözümleri sunulacak ve NLS denkleminin çözümlerinin stabilitesi incelenecektir. Son olarak, değişken katsayılı NLS denkleminin çözümleri kullanılarak, dalga hızının tüp yarıçapının artması veya azalması ile değişimine ilişkin yorum getirilmeye çalışılacaktır.

İkinci kısımda ise, içinde viskoz olmayan akışkan bulunan, yarıçapı sabit ince elastik tüplerde marjinal halde zayıf nonlinear dalgaların genlik modülasyonu problemi incelenecektir. Bu problemde kullanılacak olan yarıçapı sabit, ince elastik tüpe ilişkin alan denklemlerinin, çalışmanın bütününde kullanılan alan denklemlerinden farklı olması nedeniyle, sözkonusu tüp denklemleri Bölüm 5.3’ün başında türetilcektir. Alan denklemleri elde edildikten sonra, problemi tanımlayan pertürbasyon şeması ortaya konacak ve bu şemanın iki farklı versiyonu için, yönetici denklem olarak sırasıyla standart nonlinear Schrödinger (NLS) ve genelleştirilmiş nonlinear Schrödinger (GNLS) denklemleri elde edilecek ve bu evölüsyon denklemine dalga çözümleri sunulacaktır.

5.2 İçerisinde Viskoz Olmayan Akışkan Bulunan Yarıçapı Değişken İnce Elastik Tüplerde Nonlinear Dalga Modülasyonu

Bu bölümde, boyutsuz alan denklemleri (2.51)-(2.53) ile verilen, viskoz olmayan akışkan ile dolu, yarıçapı değişken ince elastik tüplerde zayıf nonlinear dalgaların genlik modülasyonu, indirgeyici pertürbasyon yöntemi kullanılarak

incelenecektir. Bu çalışmada, tüp kalınlığının tüp eksenine boyunca değişmez kaldığı hal ele alınacak ve şekil değiştirme öncesi ve sonrasında yarıçap değişimini karakterize eden açılar arasında $\phi = \Phi \lambda_\theta / \lambda_z$ biçiminde bir ilişki olduğu kabul edilecektir. Bu durumda, doğrultmanlar, şekil değiştirmenin öncesi ve sonrasında birbirlerine paralel kalmaktadırlar.

Dispersiyon bağıntısının incelenmesi ve fiziksel koşullar dolayısıyla problemin bir sınır değer problemi olarak kabul edilmesinin bir sonucu olarak aşağıdaki formda bir koordinat dönüşümünü tanımlamak uygun olacaktır

$$\xi = \epsilon(z - \lambda t), \quad \tau = \epsilon^2 z. \quad (5.1)$$

Burada ϵ nonlinearitenin zayıflığını karakterize eden küçük bir parametre, λ ise çözümden belirlenecek olan bir sabittir.

Tüp yarıçapının değişimini hesaba katmak için, (5.1) ile verilen koordinat dönüşümü göz önüne alındığında, yarıçapın değişimini karakterize eden Φ ve ϕ açılarını ϵ^3 mertebesinde kabul etmek gerekmektedir. Bu durumda, sözkonusu açılar aşağıdaki biçimde ifade edilebilirler

$$\Phi = A\epsilon^3, \quad \phi = a\epsilon^3. \quad (5.2)$$

Hatırlanacağı gibi, burada A ve a sırasıyla şekil değiştirmeden önceki ve sonraki yarıçap değişimini karakterize eden parametrelerdir ve daha önce açıklanan kabulün bir sonucu olarak, bu iki parametre arasında aşağıda verilen ilişki hesaplara yansıtılacaktır

$$a = \frac{\lambda_\theta}{\lambda_z} A. \quad (5.3)$$

(5.1) ile verilen koordinat dönüşümünün kullanılmasıyla, türev ifadeleri aşağıdaki formda ifade edilir

$$\frac{\partial}{\partial z} \rightarrow \frac{\partial}{\partial z} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \xi} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} - \epsilon \lambda \frac{\partial}{\partial \xi}. \quad (5.4)$$

Ayrıca alan değişkenlerinin aşağıdaki formda ϵ cinsinden asimptotik seriye açılabilceği varsayılacaktır

$$\begin{aligned} u &= \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \epsilon^3 u_3 + \dots, \\ w &= \epsilon w_1 + \epsilon^2 w_2 + \epsilon^3 w_3 + \dots, \\ p &= p_0 + \epsilon p_1 + \epsilon^2 p_2 + \epsilon^3 p_3 + \dots \end{aligned} \quad (5.5)$$

Burada $u_1, \dots, p_3$, (z, t) hızlı değişkenleri ve (ξ, τ) yavaş değişkenlerinin birer fonksiyonudurlar. (5.1)-(5.5) ilişkileri, (2.52), (2.53) ile verilmiş olan akışkana

ait boyutsuz alan denklemlerinde kullanılır ve elde edilen eşitliklerde ϵ 'un benzer kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse, aşağıdaki denklem takımları elde edilir.

$O(\epsilon)$ mertebeden denklemler:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\lambda_\theta}{2} \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial z} = 0. \quad (5.6)$$

$O(\epsilon^2)$ mertebeden denklemler:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\lambda_\theta}{2} \frac{\partial w_2}{\partial z} - \lambda \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\lambda_\theta}{2} \frac{\partial w_1}{\partial \xi} + w_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{1}{2} u_1 \frac{\partial w_1}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\lambda_\theta}{\lambda_z} A\tau \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial w_2}{\partial t} + \frac{\partial p_2}{\partial z} - \lambda \frac{\partial w_1}{\partial \xi} + \frac{\partial p_1}{\partial \xi} + w_1 \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

$O(\epsilon^3)$ mertebeden denklemler:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_3}{\partial t} + \frac{\lambda_\theta}{2} \frac{\partial w_3}{\partial z} - \lambda \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \frac{\lambda_\theta}{2} \frac{\partial w_2}{\partial \xi} + \frac{\lambda_\theta}{2} \frac{\partial w_1}{\partial \tau} \\ + \frac{\partial u_1}{\partial z} w_2 + w_1 \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{2} u_1 \left(\frac{\partial w_2}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{2} u_2 \frac{\partial w_1}{\partial z} \\ + \frac{\lambda_\theta}{2\lambda_z} A\tau \frac{\partial w_2}{\partial z} + \frac{\lambda_\theta}{2\lambda_z} A\tau \frac{\partial w_1}{\partial \xi} = 0, \\ \frac{\partial w_3}{\partial t} + \frac{\partial p_3}{\partial z} - \lambda \frac{\partial w_2}{\partial \xi} + \frac{\partial p_2}{\partial \xi} + \frac{\partial p_1}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial z} (w_1 w_2) + w_1 \frac{\partial w_1}{\partial \xi} = 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Yukarıda verilen yapıları tamamlayabilmek için p_1, p_2 ve p_3 basınç terimlerine ihtiyaç duymaktayız.

Bu aşamada, (5.1) koordinat dönüşümleri altında yarıçap değişimini karakterize eden Φz ve ϕz çarpımlarının bu yaklaşım altında sırasıyla $(A\tau)\epsilon$ ve $(a\tau)\epsilon$ çarpımlarına dönüştüğüne dikkat çekmek gerekir. Buna göre aşağıdaki ilişkiler geçerlidir

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_z + \frac{\lambda_z}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} \right)^2 \epsilon^2 + \lambda_z \frac{\partial u_1}{\partial z} \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial \xi} \right) \epsilon^3 + \dots \\ \lambda_2 &= \lambda_\theta + u_1 \epsilon + \left(u_2 - \frac{A\tau}{\lambda_z} u_1 \right) \epsilon^2 + \left(u_3 - \frac{A\tau}{\lambda_z} u_2 + \frac{A^2 \tau^2}{\lambda_z^2} u_1 \right) \epsilon^3 + \dots \\ \frac{1}{\lambda_\theta \lambda_z} \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_1} &= \alpha_0 + 2\alpha_1 u_1 \epsilon + [\alpha_2 u_1^2 + 2\alpha_1 \left(u_2 - \frac{A\tau}{\lambda_z} u_1 \right) + \gamma_1 \lambda_z \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} \right)^2] \epsilon^2 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda_\theta \lambda_z} \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_z} &= \beta_0 + \beta_1 u_1 \epsilon + [\beta_2 u_1^2 + \beta_1 (u_2 - \frac{A\tau}{\lambda_z} u_1) \\
&+ \alpha_1 \lambda_z (\frac{\partial u_1}{\partial z})^2] \epsilon^2 + [\beta_3 u_1^3 + 2\beta_2 u_1 u_2 - 2\beta_2 \frac{A\tau}{\lambda_z} u_1^2 \\
&+ \beta_1 (u_3 - \frac{A\tau}{\lambda_z} u_2 + \frac{A^2 \tau^2}{\lambda_z^2} u_1) \\
&+ 2\alpha_1 \lambda_z \frac{\partial u_1}{\partial z} (\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_1}{\partial \xi}) + \alpha_2 \lambda_z u_1 (\frac{\partial u_1}{\partial z})^2] \epsilon^3 + \dots
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Burada α_0 , α_1 , α_2 , β_0 , β_1 , β_2 , β_3 ve γ_1 katsayıları aşağıdaki şekilde tanımlanmışlardır

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{1}{\lambda_\theta \lambda_z} \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_z}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2\lambda_\theta \lambda_z} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \lambda_\theta \lambda_z}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2\lambda_\theta \lambda_z} \frac{\partial^3 \Sigma}{\partial \lambda_\theta^2 \partial \lambda_z}, \quad \beta_0 = \frac{1}{\lambda_\theta \lambda_z} \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_z}, \\
\beta_1 &= \frac{1}{\lambda_\theta \lambda_z} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \lambda_\theta^2}, \quad \beta_2 = \frac{1}{2\lambda_\theta \lambda_z} \frac{\partial^3 \Sigma}{\partial \lambda_\theta^3}, \quad \beta_3 = \frac{1}{6\lambda_\theta \lambda_z} \frac{\partial^4 \Sigma}{\partial \lambda_\theta^4}, \quad \gamma_1 = \frac{1}{2\lambda_\theta \lambda_z} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \lambda_z^2}.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

(5.1)-(5.5), (5.9) ilişkileri (2.51) tüp denkleminde kullanılırsa, p_1 , p_2 ve p_3 basınç ifadeleri aşağıdaki formda elde edilir

$$p_1 = \frac{m}{\lambda_\theta \lambda_z} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \alpha_0 \lambda_z \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + (\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta}) u_1 - \frac{\beta_0 A}{\lambda_z} \tau. \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned}
p_2 &= \frac{m}{\lambda_\theta \lambda_z} (\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - 2\lambda \frac{\partial^2 u_1}{\partial t \partial \xi} - \frac{u_1}{\lambda_\theta} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}) \\
&+ (\beta_2 - \frac{\beta_1}{\lambda_\theta} + \frac{\beta_0}{\lambda_\theta^2}) u_1^2 + (\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta}) u_2 - \alpha_0 \lambda_z \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} \\
&- \alpha_1 \lambda_z (\frac{\partial u_1}{\partial z})^2 - 2\alpha_0 \lambda_z \frac{\partial^2 u_1}{\partial z \partial \xi} + \lambda_z (\frac{\alpha_0}{\lambda_\theta} - 2\alpha_1) u_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \\
&- \frac{2A}{\lambda_z} (\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta}) \tau u_1 + \frac{\beta_0 A^2}{\lambda_z^2} \tau^2.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

$$\begin{aligned}
p_3 &= \frac{m}{\lambda_\theta \lambda_z} [\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - 2\lambda \frac{\partial^2 u_2}{\partial t \partial \xi} + \lambda^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\lambda_\theta} (u_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + u_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}) \\
&+ \frac{2\lambda}{\lambda_\theta} u_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t \partial \xi} + \frac{u_1^2}{\lambda_\theta^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}] + (\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta}) u_3 \\
&+ 2(\beta_2 - \frac{\beta_1}{\lambda_\theta} + \frac{\beta_0}{\lambda_\theta^2}) u_1 u_2 + (\beta_3 - \frac{\beta_2}{\lambda_\theta} + \frac{\beta_1}{\lambda_\theta^2} - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta^3}) u_1^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2\alpha_1\lambda_z\left(\frac{\partial u_1}{\partial z}\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_1}{\partial z}\frac{\partial u_1}{\partial \xi}\right) - \lambda_z\left(\alpha_2 - \frac{\alpha_1}{\lambda_\theta}\right)u_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial z}\right)^2 \\
& - \alpha_0\lambda_z\frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} - 2\alpha_0\lambda_z\frac{\partial^2 u_2}{\partial z\partial \xi} - 2\alpha_0\lambda_z\frac{\partial^2 u_1}{\partial z\partial \tau} \\
& + \lambda_z\left(\frac{3}{2}\alpha_0 - 3\gamma_1\lambda_z\right)\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial z}\right)^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \\
& + \lambda_z\left(\frac{\alpha_0}{\lambda_\theta} - 2\alpha_1\right)\left(u_1\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + u_2\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}\right) \\
& + 2\lambda_z\left(\frac{\alpha_0}{\lambda_\theta} - 2\alpha_1\right)u_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial z\partial \xi} + \lambda_z\left(-\frac{\alpha_0}{\lambda_\theta^2} + \frac{2\alpha_1}{\lambda_\theta} - \alpha_2\right)u_1^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \\
& - \alpha_0\lambda_z\frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} + \left[\frac{m}{\lambda_\theta^2\lambda_z^2}u_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - 3\left(\beta_2 - \frac{\beta_1}{\lambda_\theta} + \frac{\beta_0}{\lambda_\theta^2}\right)\frac{u_1^2}{\lambda_z}\right. \\
& \left. - 2\left(\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta}\right)\frac{u_2}{\lambda_z} + \alpha_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial z}\right)^2 + \left(2\alpha_1 - \frac{\alpha_0}{\lambda_\theta}\right)u_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}\right]A\tau \\
& + \left[3\left(\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta}\right)\frac{u_1}{\lambda_z^2}\right]A^2\tau^2 - \frac{A^3\tau^3}{\lambda_z^3}.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Alan Denklemlerinin Çözümleri

Bu kısımda, (5.6)-(5.8) ve (5.11)-(5.13) ile verilen alan denklemlerine çözüm aranacaktır.

O (ε) mertebeden denklemlerin çözümü:

(5.6), (5.11) denklemlerinin formu incelenecek olursa, bu denklemlere aşağıdaki formda bir çözüm önermenin uygun olduğu görülür

$$\begin{aligned}
u_1 &= U_0(\xi, \tau) + \{U(\xi, \tau) \exp[i(\omega t - kz)] + k.e.\}, \\
w_1 &= W_0(\xi, \tau) + \{W_1^{(1)}(\xi, \tau) \exp[i(\omega t - kz)] + k.e.\}, \\
p_1 &= P_0(\xi, \tau) + \{P_1^{(1)}(\xi, \tau) \exp[i(\omega t - kz)] + k.e.\}.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Burada ω açısal frekansı, k dalga sayısını, $U_0, \dots, P_1$ henüz bilinmeyen fonksiyonları göstermekte olup, denklemlerin çözümü sonucunda elde edileceklerdir. İfadelerde yer alan *k.e.* sembolü ise ilgili ifadenin karmaşık eşleniğini göstermek için kullanılmıştır. (5.14) çözüm önerisi, (5.11) basınç

teriminde kullanılırsa aşağıdaki ifadelere ulaşılır

$$P_0 = (\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta})U_0 - \frac{\beta_0 A}{\lambda_z}\tau,$$

$$P_1^{(1)} = [-\frac{m\omega^2}{\lambda_\theta\lambda_z} + \alpha_0\lambda_z k^2 + (\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta})]U. \quad (5.15)$$

(5.14) çözüm önerisi (5.6)'da yerine konursa

$$(2 + \frac{mk^2}{\lambda_z})\omega^2 - (\lambda_\theta\beta_1 - \beta_0)k^2 - \alpha_0\lambda_z\lambda_\theta k^4 = 0, \quad (5.16)$$

dispersiyon bağıntısı sağlanmak koşuluyla aşağıdaki eşitlikler elde edilir

$$W_1^{(1)} = \frac{2}{\lambda_\theta} \frac{\omega}{k} U, \quad P_1^{(1)} = \frac{2}{\lambda_\theta} \frac{\omega^2}{k^2} U. \quad (5.17)$$

O (ε²) mertebeden denklemlerin çözümü:

Bu mertebeden denklemlerin çözümü için aşağıdaki formda bir çözüm önerelim

$$\begin{aligned} u_2 &= U_2^{(0)} + \left\{ \sum_{\ell=1}^2 U_2^{(\ell)} \exp[i\ell(\omega t - kz)] + k.e. \right\}, \\ w_2 &= W_2^{(0)} + \left\{ \sum_{\ell=1}^2 W_2^{(\ell)} \exp[i\ell(\omega t - kz)] + k.e. \right\}, \\ p_2 &= P_2^{(0)} + \left\{ \sum_{\ell=1}^2 P_2^{(\ell)} \exp[i\ell(\omega t - kz)] + k.e. \right\}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Burada $U_2^{(0)}, \dots, P_2^{(l)}$, (ξ, τ) yavaş değişkenlerinin bilinmeyen fonksiyonlarıdır.

(5.18) çözüm önerisi, (5.12)'de kullanılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir

$$\begin{aligned} P_2^{(0)} &= (\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta})U_2^{(0)} + (-4\frac{\omega^2}{\lambda_\theta^2 k^2} + 2\beta_2 + 2\alpha_1\lambda_z k^2)|U|^2 \\ &+ (\beta_2 - \frac{\beta_1}{\lambda_\theta} + \frac{\beta_0}{\lambda_\theta^2})U_0^2 - \frac{2A}{\lambda_z}(\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta})\tau U_0 + \frac{\beta_0 A^2 \tau^2}{\lambda_z^2}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} P_2^{(1)} &= \frac{2\omega^2}{\lambda_\theta k^2} U_2^{(1)} + 2i(\alpha_0\lambda_z k - \frac{m\omega\lambda}{\lambda_\theta\lambda_z}) \frac{\partial U}{\partial \xi} \\ &+ [2\beta_2 - \frac{\beta_1}{\lambda_\theta} + \frac{\beta_0}{\lambda_\theta^2} - \frac{2\omega^2}{\lambda_\theta^2 k^2} + 2\alpha_1\lambda_z k^2] U_0 U - \frac{2A}{\lambda_z}(\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta})\tau U. \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$P_2^{(2)} = [8 \frac{\omega^2}{\lambda_\theta k^2} - 3(\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta})]U_2^{(2)} + (-\frac{2\omega^2}{\lambda_\theta^2 k^2} + \beta_2 + 3\alpha_1 \lambda_z k^2)U^2. \quad (5.21)$$

(5.14) ve (5.18) bağıntıları (5.7) denklemlerinde yerine konursa aşağıdaki denklem takımı elde edilir

$$-\lambda \frac{\partial U_0}{\partial \xi} + \frac{\lambda_\theta}{2} \frac{\partial W_0}{\partial \xi} = 0, \quad -\lambda \frac{\partial W_0}{\partial \xi} + \frac{\partial P_0}{\partial \xi} = 0. \quad (5.22)$$

$$\omega U_2^{(1)} - \frac{\lambda_\theta k}{2} W_2^{(1)} - i(\frac{\omega}{k} - \lambda) \frac{\partial U}{\partial \xi} - (kW_0 + \frac{\omega}{\lambda_\theta} U_0 + \frac{\omega A \tau}{\lambda_z})U = 0,$$

$$\omega W_2^{(1)} - kP_2^{(1)} - i \frac{2}{\lambda_\theta} \frac{\omega}{k} (\frac{\omega}{k} - \lambda) \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{2\omega}{\lambda_\theta} W_0 U = 0. \quad (5.23)$$

$$2\omega U_2^{(2)} - \lambda_\theta k W_2^{(2)} - 3 \frac{\omega}{\lambda_\theta} U^2 = 0,$$

$$\omega W_2^{(2)} - kP_2^{(2)} - \frac{2}{\lambda_\theta^2} \frac{\omega^2}{k} U^2 = 0. \quad (5.24)$$

(5.22) denklemlerinin (5.15)₁ ile birlikte çözümünden aşağıdaki eşitlikler elde edilir

$$W_0 = 2 \frac{\lambda}{\lambda_\theta} U_0 + C(\tau), \quad [-2\lambda^2 + (\lambda_\theta \beta_1 - \beta_0)] \frac{\partial U_0}{\partial \xi} = 0. \quad (5.25)$$

Burada $C(\tau)$, τ değişkeninin bir fonksiyonudur. $\partial U_0 / \partial \xi$ büyüklüğünün sıfırdan farklı çözümünün var olabilmesi için aşağıdaki koşul sağlanmalıdır

$$\lambda^2 - (\lambda_\theta \beta_1 - \beta_0)/2 = 0. \quad (5.26)$$

Buradan da görülebileceği gibi $(\lambda_\theta \beta_1 - \beta_0)/2$ büyüklüğü, uzun dalga yaklaşımında elde edilmiş olan faz hızının karesinden başka birşey değildir. Bu da, uzun dalga limiti için faz hızının, λ sabitine eşit olduğunu göstermektedir.

Bu aşamada, öncelikle $\partial U_0 / \partial \xi$ büyüklüğünün sıfırdan farklı olduğu durumu inceleyelim. Bu durumda $\lambda^2 - (\lambda_\theta \beta_1 - \beta_0)/2 = 0$ geçerlidir ve $U = 0$ olmalıdır. Bunun bir sonucu olarak aşağıdaki ifadeler elde edilir

$$W_2^{(1)} = \frac{2}{\lambda_\theta} \frac{\omega}{k} U_2^{(1)}, \quad P_2^{(1)} = \frac{2}{\lambda_\theta} \frac{\omega^2}{k^2} U_2^{(1)}, \quad U_2^{(2)} = W_2^{(2)} = P_2^{(2)} = 0. \quad (5.27)$$

$O(\epsilon^3)$ mertebeden denklemler ise aşağıdaki hali alır

$$-\lambda \frac{\partial U_2^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\lambda_\theta}{2} \frac{\partial W_2^{(0)}}{\partial \xi} + \lambda \frac{\partial U_0}{\partial \tau} + \frac{\lambda_\theta}{2} \frac{dC(\tau)}{d\tau} = 0,$$

$$\frac{\partial P_2^{(0)}}{\partial \xi} - \lambda \frac{\partial W_2^{(0)}}{\partial \xi} + (\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta}) \frac{\partial U_0}{\partial \tau} - \frac{\beta_0 A}{\lambda_z} = 0,$$

$$P_2^{(0)} = (\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta}) U_2^{(0)} + (\beta_2 - \frac{\beta_1}{\lambda_\theta} + \frac{\beta_0}{\lambda_\theta^2}) U_0^2 - 2 \frac{A}{\lambda_z} (\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta}) \tau U_0 + \frac{\beta_0 A^2}{\lambda_z^2} \tau^2. \quad (5.28)$$

Bu denklemler arasından $W_2^{(0)}$ elimine edilirse aşağıdaki evolüsyon denklemi elde edilir

$$\frac{\partial U_0}{\partial \tau} + (\frac{\lambda_\theta \beta_2}{2\lambda^2} - \frac{2}{\lambda_\theta}) U_0 \frac{\partial U_0}{\partial \xi} - \frac{A}{\lambda_z} \tau \frac{\partial U_0}{\partial \xi} = 0. \quad (5.29)$$

Evolüsyon denklemindeki sabit terimi yok edebilmek için, burada $C(\tau)$ fonksiyonu $C(\tau) = (\beta_0 A \tau / \lambda \lambda_\theta)$ biçiminde seçilmiştir. Elde edilen bu denklem değişken katsayılı KdV denkleminin dejenere bir formu olarak değerlendirilebilir.

Ele alınacak diğer bir olasılık da, $\lambda^2 - (\lambda_\theta \beta_1 - \beta_0)/2 \neq 0$ halidir. Bu durumda, U_0 , τ 'nın keyfi bir fonksiyonudur. Bu durumda, $C(\tau)$ keyfi fonksiyonu sıfır alınabilir ve çözüm aşağıdaki yapıda elde edilir

$$W_0 = 2 \frac{\lambda}{\lambda_\theta} U_0(\tau), \quad P_0 = (\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta}) U_0(\tau) - \frac{\beta_0 A}{\lambda_z} \tau. \quad (5.30)$$

$P_2^{(1)}$ büyüklüğünün (5.20) denkleminde verilen ifadesi (5.23) denkleminde kullanılır ve $W_2^{(1)}$ bu denklemler arasında elimine edilirse

$$i[2\omega(\frac{\omega}{k} - \lambda) + \lambda_\theta k^2(\alpha_0 \lambda_z k - \frac{m\omega\lambda}{\lambda_\theta \lambda_z})] \frac{\partial U}{\partial \xi} + \{[\frac{4}{\lambda_\theta} \lambda \omega k + (\lambda_\theta \beta_2 - \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_0}{2\lambda_\theta}) k^2 + \alpha_1 \lambda_\theta \lambda_z k^4] U_0 + [\omega^2 - (\lambda_\theta \beta_1 - \beta_0) k^2] \frac{A\tau}{\lambda_z}\} U = 0. \quad (5.31)$$

denklemi elde edilir. Bu denklemden de görüleceği gibi $\partial U / \partial \xi$ 'nin katsayısı imajiner, U 'nunki de reeldir. Bu durumda, sıfırdan farklı çözümün varolabilmesi için bu katsayıların sıfırlanması gerekir. Bunlar sıfırlanırsa aşağıdaki denklemler elde edilir

$$2\omega(\frac{\omega}{k} - \lambda) + \lambda_\theta k^2(\alpha_0 \lambda_z k - \frac{m\omega\lambda}{\lambda_\theta \lambda_z}) = 0. \quad (5.32)$$

$$\left[\frac{4}{\lambda_\theta}\lambda\omega k + (\lambda_\theta\beta_2 - \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_0}{2\lambda_\theta})k^2 + \alpha_1\lambda_\theta\lambda_z k^4\right]U_0 + [\omega^2 - (\lambda_\theta\beta_1 - \beta_0)k^2]\frac{A\tau}{\lambda_z} = 0. \quad (5.33)$$

(5.32) denkleminin çözümünden, λ parametresi grup hızına eşit ve aşağıdaki formda elde edilir

$$\lambda = \frac{2\omega^2 + \alpha_0\lambda_\theta\lambda_z k^4}{\omega k(2 + mk^2/\lambda_z)}. \quad (5.34)$$

(5.33) denkleminin çözümünden

$$U_0 = \Phi_0 \frac{A}{\lambda_z} \tau, \quad \Phi_0 = \frac{[-\omega^2 + (\lambda_\theta\beta_1 - \beta_0)k^2]}{[\frac{4}{\lambda_\theta}\lambda\omega k + (\lambda_\theta\beta_2 - \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_0}{2\lambda_\theta})k^2 + \alpha_1\lambda_\theta\lambda_z k^4]}. \quad (5.35)$$

eşitliklerine ulaşılır. Bu durumda (5.23) denkleminin çözümünden

$$W_2^{(1)} = \frac{2}{\lambda_\theta} \frac{\omega}{k} U_2^{(1)} - \frac{2i}{\lambda_\theta k} \left(\frac{\omega}{k} - \lambda\right) \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{2}{\lambda_\theta} \left[\frac{1}{\lambda_\theta} \left(2\lambda + \frac{\omega}{k}\right) \Phi_0 + \frac{\omega}{k}\right] \frac{A}{\lambda_z} \tau U, \\ P_2^{(1)} = \frac{2}{\lambda_\theta} \frac{\omega^2}{k^2} U_2^{(1)} - \frac{4i\omega}{\lambda_\theta k^2} \left(\frac{\omega}{k} - \lambda\right) \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{2}{\lambda_\theta} \frac{\omega}{k} \left[\frac{1}{\lambda_\theta} \left(4\lambda + \frac{\omega}{k}\right) \Phi_0 + \frac{\omega}{k}\right] \frac{A}{\lambda_z} \tau U. \quad (5.36)$$

bulunur. (5.21) ve (5.24) denklemlerinin çözümünden ise aşağıdaki ilişkiler elde edilir

$$U_2^{(2)} = \frac{[3\omega^2/\lambda_\theta + \lambda_\theta\beta_2 k^2 + 3\alpha_1\lambda_\theta\lambda_z k^4]U^2}{3[(\lambda_\theta\beta_1 - \beta_0)k^2 - 2\omega^2]}, \quad W_2^{(2)} = \frac{2}{\lambda_\theta} \frac{\omega}{k} U_2^{(2)} - \frac{3}{\lambda_\theta^2} \frac{\omega}{k} U^2. \quad (5.37)$$

$O(\epsilon^3)$ mertebeden denklemlerin çözümü:

Bu mertebeden denklemlerin yapısı incelenecek olursa, bu diferansiyel denklem grubuna aşağıdaki formda bir çözüm önermenin uygun olduğu görülür

$$u_3 = U_3^{(0)} + \left\{ \sum_{\ell=1}^3 U_3^{(\ell)} \exp[i\ell(\omega t - kz)] + k.e. \right\}, \\ w_3 = W_3^{(0)} + \left\{ \sum_{\ell=1}^3 W_3^{(\ell)} \exp[i\ell(\omega t - kz)] + k.e. \right\}, \\ p_3 = P_3^{(0)} + \left\{ \sum_{\ell=1}^3 P_3^{(\ell)} \exp[i\ell(\omega t - kz)] + k.e. \right\}. \quad (5.38)$$

Bilinmeyen fonksiyonları belirleyebilmek için, sıfıncı ve birinci moddan denklemler yeterlidir. (5.38) çözüm önerisi $O(\epsilon^3)$ mertebe denklemlerde yerine konur ve elde edilen diğer eşitlikler de kullanılırsa aşağıdaki denklem setine ulaşılır

$$-\lambda \frac{\partial U_2^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\lambda_\theta}{2} \frac{\partial W_2^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{1}{\lambda_\theta} (4\frac{\omega}{k} - \lambda) \frac{\partial}{\partial \xi} |U|^2 + \lambda \Phi_0 \frac{A}{\lambda_z} = 0,$$

$$\frac{\partial P_2^{(0)}}{\partial \xi} - \lambda \frac{\partial W_2^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{4}{\lambda_\theta^2} \frac{\omega^2}{k^2} \frac{\partial}{\partial \xi} |U|^2 + [(\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_z}) \Phi_0 - \beta_0] \frac{A}{\lambda_z} = 0,$$

$$\begin{aligned} P_2^{(0)} &= (\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta}) U_2^{(0)} + (2\beta_2 - \frac{4\omega^2}{\lambda_\theta^2 k^2} + 2\alpha_1 \lambda_z k^2) |U|^2 \\ &+ [(\beta_2 - \frac{\beta_1}{\lambda_\theta} + \frac{\beta_0}{\lambda_\theta^2}) \Phi_0^2 - 2(\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta}) \Phi_0 + \beta_0] \frac{A^2}{\lambda_z^2} \tau^2. \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned} i\omega U_3^{(1)} - \frac{ik\lambda_\theta}{2} W_3^{(1)} + \frac{\omega}{k} \frac{\partial U}{\partial \tau} + (\frac{\omega}{k} - \lambda) \frac{\partial U_2^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{i}{k} (\frac{\omega}{k} - \lambda) \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \\ - 3i \frac{\omega}{\lambda_\theta} U_2^{(2)} U^* - ik W_2^{(0)} U - i \frac{\omega}{\lambda_\theta} U_2^{(0)} U - i [(\frac{2\lambda k}{\lambda_\theta} + \frac{\omega}{\lambda_\theta}) \Phi_0 + \omega] \frac{A}{\lambda_z} \tau U_2^{(1)} \\ - (1 + \frac{\Phi_0}{\lambda_\theta}) (\frac{\omega}{k} - \lambda) \frac{A}{\lambda_z} \tau \frac{\partial U}{\partial \xi} + i (1 + \frac{\Phi_0}{\lambda_\theta}) [(\frac{2\lambda k}{\lambda_\theta} + \frac{\omega}{\lambda_\theta}) \Phi_0 + \omega] \frac{A^2}{\lambda_z^2} \tau^2 U = 0, \\ i\omega W_3^{(1)} - ik P_3^{(1)} + \frac{2}{\lambda_\theta} \frac{\omega}{k} (\frac{\omega}{k} - \lambda) \frac{\partial U_2^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{2}{\lambda_\theta} \frac{\omega^2}{k^2} \frac{\partial U}{\partial \tau} \\ - \frac{2i}{\lambda_\theta k} (\frac{\omega}{k} - \lambda) (\frac{2\omega}{k} - \lambda) \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - i \frac{2\omega}{\lambda_\theta} W_2^{(0)} U - i \frac{4}{\lambda_\theta^2} \frac{\omega^2}{k} U_2^{(2)} U^* + i \frac{6}{\lambda_\theta^3} \frac{\omega^2}{k} |U|^2 U \\ - i \frac{4\omega\lambda}{\lambda_\theta^2} \Phi_0 \frac{A}{\lambda_z} \tau U_2^{(1)} - \frac{2}{\lambda_\theta} (\frac{\omega}{k} - \lambda) [(\frac{4\lambda}{\lambda_\theta} + \frac{\omega}{\lambda_\theta k}) \Phi_0 + \frac{\omega}{k}] \frac{A}{\lambda_z} \tau \frac{\partial U}{\partial \xi} \\ + i \frac{4\lambda}{\lambda_\theta^2} \Phi_0 [(\frac{2\lambda k}{\lambda_\theta} + \frac{\omega}{\lambda_\theta}) \Phi_0 + \omega] \frac{A^2}{\lambda_z^2} \tau^2 U = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_3^{(1)} &= \frac{2}{\lambda_\theta} \frac{\omega^2}{k^2} U_3^{(1)} + 2i\alpha_0 \lambda_z k \frac{\partial U}{\partial \tau} \\ &+ 2i(\alpha_0 \lambda_z k - \frac{m\omega\lambda}{\lambda_\theta \lambda_z}) \frac{\partial U_2^{(1)}}{\partial \xi} + (\frac{m\lambda^2}{\lambda_\theta \lambda_z} - \alpha_0 \lambda_z) \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \\ &+ [-\frac{10\omega^2}{\lambda_\theta^2 k^2} + 2\beta_2 + 3(\frac{\beta_1}{\lambda_\theta} - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta^2}) + 6\alpha_1 \lambda_z k^2] U_2^{(2)} U^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[-\frac{2\omega^2}{\lambda_\theta^2 k^2} + 2\beta_2 - \frac{\beta_1}{\lambda_\theta} + \frac{\beta_0}{\lambda_\theta^2} + 2\alpha_1 \lambda_z k^2 \right] U_2^{(0)} U \\
& + \left[\frac{6\omega^2}{\lambda_\theta^3 k^2} + 3(\beta_3 - \frac{\beta_2}{\lambda_\theta}) - \lambda_z \left(\frac{3}{2} \alpha_0 - 3\gamma_1 \lambda_z \right) k^4 + \lambda_z k^2 \left(2\alpha_2 - \frac{5\alpha_1}{\lambda_\theta} \right) \right] |U|^2 U \\
& + \left[\left(-2\frac{\omega^2}{\lambda_\theta^2 k^2} + 2\beta_2 - \frac{\beta_1}{\lambda_\theta} + \frac{\beta_0}{\lambda_\theta^2} + 2\alpha_1 \lambda_z k^2 \right) \Phi_0 - 2\left(\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta} \right) \right] \frac{A\tau}{\lambda_z} U_2^{(1)} \\
& + 2i \left[\frac{\lambda m \omega}{\lambda_\theta^2 \lambda_z} - \lambda_z k \left(\frac{\alpha_0}{\lambda_\theta} - 2\alpha_1 \right) \right] \Phi_0 \frac{A}{\lambda_z} \tau \frac{\partial U}{\partial \xi} \\
& + \left\{ \left[\frac{2\omega^2}{\lambda_\theta^3 k^2} + 3(\beta_3 - \frac{\beta_2}{\lambda_\theta}) + 2\left(\frac{\beta_1}{\lambda_\theta^2} - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta^3} \right) - \lambda_z k^2 \left(\frac{2\alpha_1}{\lambda_\theta} - \alpha_2 \right) \right] \Phi_0^2 \right. \\
& \left. + \left(\frac{2\omega^2}{\lambda_\theta^2 k^2} - 6\beta_2 + 5\frac{\beta_1}{\lambda_\theta} - 5\frac{\beta_0}{\lambda_\theta^2} - 2\alpha_1 \lambda_z k^2 \right) \Phi_0 + 3\left(\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta} \right) \right\} \frac{A^2}{\lambda_z^2} \tau^2 U. \quad (5.40)
\end{aligned}$$

(5.39) ile verilen denklem setinin çözümünden aşağıdaki ifadelerle ulaşılır

$$\begin{aligned}
U_2^{(0)} &= \frac{\frac{1}{\lambda_\theta} [-\lambda^2 + 4\lambda \frac{\omega}{k} + \lambda_\theta^2 \beta_2 + \alpha_1 \lambda_\theta^2 \lambda_z k^2] |U|^2}{[\lambda^2 - (\lambda_\theta \beta_1 - \beta_0)/2]} \\
&+ \frac{[(\lambda_\theta \beta_2 - \beta_1 + \frac{\beta_0}{\lambda_\theta}) \Phi_0^2 - 2(\lambda_\theta \beta_1 - \beta_0) \Phi_0 + \lambda_\theta \beta_0] \frac{A^2}{\lambda_z^2} \tau^2}{2[\lambda^2 - (\lambda_\theta \beta_1 - \beta_0)/2]} \\
&+ \frac{[(\lambda^2 + \lambda_\theta \frac{\beta_1}{2} - \frac{\beta_0}{2}) \Phi_0 - \lambda_\theta \frac{\beta_0}{2}] \frac{A}{\lambda_z} \xi}{[\lambda^2 - (\lambda_\theta \beta_1 - \beta_0)/2]}, \\
W_2^{(0)} &= \frac{2\lambda}{\lambda_\theta} U_2^{(0)} - \frac{2}{\lambda_\theta^2} \left(\frac{4\omega}{k} - \lambda \right) |U|^2 - 2 \frac{\lambda}{\lambda_\theta} \Phi_0 \frac{A}{\lambda_z} \xi. \quad (5.41)
\end{aligned}$$

(5.41) ile verilen $U_2^{(0)}$ ve $W_2^{(0)}$ fonksiyonlarının açık ifadeleri de kullanılarak (5.40) denklemleri arasından $U_3^{(1)}$, $W_3^{(1)}$ ve $P_3^{(1)}$ büyüklüklerinin elimine edilmesi ile aşağıdaki değişken katsayılı nonlinear Schrödinger denklemi elde edilir

$$i \frac{\partial U}{\partial \tau} + \mu_1 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \mu_2 |U|^2 U + i \mu_3 \tau \frac{\partial U}{\partial \xi} + \mu_4 \tau^2 U + \mu_5 \xi U = 0. \quad (5.42)$$

$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_5$ katsayılarının açık ifadeleri EK A'da verilmiştir. Bu katsayıların açık yapısı incelenecek olursa, μ_3 , μ_4 ve μ_5 katsayılarının, yarıçap değişimini temsil eden A parametresinin birer fonksiyonu oldukları görülür. Bu parametre sıfırlanacak olursa, evölüsyon denklemi standart NLS denklemine indirgenir

$$i \frac{\partial U}{\partial \tau} + \mu_1 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \mu_2 |U|^2 U = 0. \quad (5.43)$$

5.2.1 Evolüsyon Denklemlerinin İlerleyen Dalga Çözümleri

Bu alt bölümde, öncelikle standart NLS denkleminin daha sonra ise değişken katsayılı NLS denkleminin ilerleyen dalga çözümleri verilecek ve NLS denkleminin çözümlerinin kararlılığı tartışılacaktır.

Nonlinear Schrödinger Denkleminin İlerleyen Dalga Çözümleri

NLS denklemi dispersif ortamlarda bir boyutlu monokromatik düzlem dalgaların self modülasyonunu karakterize eden bir denklemdir. NLS denkleminin kararlı çözümleri genellikle Jakobiye eliptik fonksiyonlar cinsinden ifade edilir ve farklı durumlar için karanlık ve parlak zarf solitonları, faz sıçraması ve sabit genlikli düzlem dalga çözümlerini içerir. $\mu_1\mu_2 > 0$ veya $\mu_1\mu_2 < 0$ olması, verilmiş bir başlangıç dasetasının NLS denklemi tarafından yönetilen asimptotik alanda uzun bir zaman sonunda nasıl yol alacağını belirlenmesi açısından önemlidir.

(5.43) ile verilen nonlinear Schrödinger denklemine aşağıdaki formda ilerleyen dalga çözümlerini önerelim

$$U(\xi, \tau) = V(\eta) \exp[i(K\xi - \Omega\tau)], \quad \eta = \xi - c\tau, \quad c = \text{sabit.} \quad (5.44)$$

Burada K ve Ω sabit sayılar olup $V(\eta)$ reel bir fonksiyondur. (5.44) çözümü NLS denkleminde yerine konursa aşağıdaki adi türevli diferansiyel denkleme ulaşılır

$$\mu_1 \frac{d^2 V}{d\eta^2} + i(2K\mu_1 - c) \frac{dV}{d\eta} + (\Omega - K^2\mu_1)V + \mu_2 V^3 = 0. \quad (5.45)$$

Bu denklemin reel ve imajiner kısımlarının ayrı ayrı sıfıra eşit olması için $c = 2\mu_1 K$ ve

$$\mu_1 \frac{d^2 V}{d\eta^2} + (\Omega - \mu_1 K^2)V + \mu_2 V^3 = 0 \quad (5.46)$$

olmalıdır. Bu denklemin her iki tarafı $dV/d\eta$ ile çarpılıp η değişkenine göre integre edilirse

$$\left(\frac{dV}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{\Omega}{\mu_1} - K^2\right)V + \frac{\mu_2}{2\mu_1}V^4 = C \quad (5.47)$$

bulunur. Burada C bir sabit olup V fonksiyonunun sonsuzdaki değeri ile ilgilidir. Bu çalışmada iki ayrı durum incelenecektir.

(i) İncelenen dalgaın lokalize olması hali: Bu durumda $|\eta| \rightarrow \infty$ olurken V

ve $dV/d\eta \rightarrow \infty$ olduğundan C sabiti sıfır olarak bulunur. Buna göre (5.47) denklemi

$$\left(\frac{dV}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{\Omega}{\mu_1} - K^2\right)V^2 + \frac{\mu_2}{2\mu_1}V^4 = 0 \quad (5.48)$$

halini alır.

Şimdi bu denkleme $V = A \operatorname{sech} \beta \eta$ şeklinde bir çözüm arayalım. Bu ifade η 'ya göre türetilip (5.48) denkleminde yerine konursa

$$\beta = \left(\frac{\mu_2}{2\mu_1}\right)^{1/2} A, \quad \Omega = \mu_1 K^2 - \mu_2 \frac{A^2}{2} \quad (5.49)$$

bulunur. Bu çözümün geçerli olabilmesi için $\mu_1 \mu_2 > 0$ olmalıdır.

(ii) Eğer $|\eta| \rightarrow \infty$ olurken $|V| \rightarrow V_0$ ve $dV/d\eta \rightarrow 0$ ise, bu durumda C sabiti $(\Omega/\mu_1 - K^2)V_0^2 + (\mu_2/2\mu_1)V_0^4$ şeklini alır.

Şimdi de (5.47) denkleminde $V = A \tanh \beta \eta$ şeklinde bir çözüm arayalım. Gerekli türetmeler yapıp (5.47)'de yerine konursa

$$A = V_0, \quad \Omega = \mu_1 K^2 - \mu_2 V_0^2, \quad \beta = \left(\frac{-\mu_2}{2\mu_1}\right)^{1/2} V_0 \quad (5.50)$$

bulunur. Bu çözümün geçerli olabilmesi için $\mu_1 \mu_2 < 0$ sağlanmalıdır. Yukarıda sunulan çözümler, sırasıyla, zarf yalnız (solitary) dalgalar ve faz sıçramasına karşı gelir.

(iii) Eğer $|U|$ sonsuzda U_0 sabitine yaklaşırsa Nonlinear Schrödinger denkleminin çözümü aşağıdaki şekilde verilir

$$U(\xi, \tau) = U_0 \exp[i(K\xi - \Omega\tau)]. \quad (5.51)$$

NLS Denkleminin Düzlem Dalga Çözümlerinin Kararlılığı

Bu alt bölümde, nonlinear Schrödinger denkleminin düzlem dalga çözümünün küçük pertürbasyonlar altında kararlılığı incelenecektir. NLS denkleminin çözümü aşağıdaki formda verilebilir

$$U(\xi, \tau) = \rho(\xi, \tau) \exp[i\theta(\xi, \tau)]. \quad (5.52)$$

Burada $\rho(\xi, \tau)$ genliği ve $\theta(\xi, \tau)$ faz açısını göstermektedir. Bu çözüm NLS

denkleminde yerine yazılırsa aşağıdaki diferansiyel denklemler elde edilir

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \mu_1 \left[\rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right] = 0 \quad (5.53)$$

$$\rho \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \mu_1 \left[\frac{\partial^2 \rho}{\partial \xi^2} - \rho \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) \right] - \frac{\mu_2}{4} \rho^3 = 0. \quad (5.54)$$

ρ ve θ fonksiyonları $\rho = \rho_0$ ve $\theta = \theta_0$ denge konumu civarında aşağıdaki şekilde seriye açılabilir

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \varepsilon \rho_1 + \varepsilon^2 \rho_2 + \dots \\ \theta &= \theta_0 + \varepsilon \theta_1 + \varepsilon^2 \theta_2 + \dots \end{aligned} \quad (5.55)$$

(5.55) açılımları (5.53) ve (5.54) denklemlerinde yerine konur ve gerekli lineerleştirme yapılırsa ρ_1 ve θ_1 için aşağıdaki denklem sistemine ulaşılır

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial \tau} + \mu_1 \rho_0 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \xi^2} = 0, \quad (5.56)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} - \mu_1 \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial \xi^2} - \frac{3\mu_2}{4} \rho_0^2 \rho_1 = 0. \quad (5.57)$$

(5.56) ve (5.57) denklem sisteminin çözümleri aşağıdaki şekilde düzlem dalga çözümleri cinsinden aranacaktır

$$(\rho_1, \theta_1) = (A, B) \exp [i(K\xi - \Omega\tau)]. \quad (5.58)$$

Bu çözümler (5.56) ve (5.57) denklem sisteminde yerine konur ve sıfırdan farklı olma koşulu kullanılırsa aşağıdaki dispersiyon bağıntısı elde edilir

$$\Omega^2 = \mu_1^2 K^4 - \frac{3}{4} \mu_1 \mu_2 \rho_0^2 K^2. \quad (5.59)$$

(5.59) ifadesi yeniden düzenlenecek olursa

$$\Omega = (-\mu_1 \mu_2)^{1/2} \left(\frac{3}{4\rho_0^2} \right)^{1/2} K \left(1 - \frac{4\mu_1 K^2}{3\mu_2 \rho_0^2} \right)^{1/2} \quad (5.60)$$

bulunur. (5.60) dispersiyon bağıntısından görüldüğü gibi verilen bir K için eğer $\mu_1 \mu_2 < 0$ ise Ω reel olacak ve ρ_1 ve θ_1 sınırlı kalacaklardır. $\mu_1 \mu_2 > 0$ ise $K < (3\mu_1/\mu_2)^{1/2} \rho_0/2$ eşitsizliğini sağlayan değerleri için Ω kompleks olacak ve dolayısı ile ρ_1 ve θ_1 sınırsız olarak büyüyecektir. Bu nedenle $\mu_1 \mu_2 < 0$ ise Nonlinear Schrödinger denkleminin düzlem dalga çözümleri küçük pertürbasyonlar altında kararlı olduğu, $\mu_1 \mu_2 > 0$ ise kararlı olmadığı

söylenbilir. $\mu_1\mu_2$ çarpımının sıfır olduğu hale ise marjinal hal adı verilir. μ_1 katsayısı grup hızının dalga sayısına göre türevine eşittir ve sıfır olması söz konusu değildir. Marjinal durumun oluşabilmesi için tek olasılık μ_2 katsayısının sıfır olmasıdır (μ_2 katsayısının biyolojik malzemelerde hangi özel hallerde sıfır olabildiğine dair ayrıntılı bilgi Erbay [52]'da bulunabilir). Bu katsayı sıfırlandığında NLS denklemi lineer hale dejenere olur. Bu da belirli bir başlangıç deformasyonu ve kritik bir dalga sayısı civarında, nonlineeritenin band genişliği ile dengelenemediğini gösterir. Bu durumda nonlineeritenin ölçeklendirilmesinin değiştirilmesi, güçlendirilmesi gerekir. Bu işlem Bölüm 5.3 (ii) $\alpha = 2$ Hali olarak adlandırılan alt bölümde gerçekleştirilecektir.

Değişken Katsayılı NLS Denkleminin İlerleyen Dalga Çözümleri

Çalışmanın bu bölümünde (5.42) ile verilen evolüsyon denkleminin ilerleyen dalga çözümleri sunulacaktır. Bu amaçla, (5.42) denkleminin aşağıdaki formda bir çözüm önerelim

$$U = V(\zeta)\exp\{i[(b_0\tau + K)\xi - \varphi(\tau)]\},$$

$$\zeta = \xi - b_1\tau^2 - b_2\tau, \quad \varphi(\tau) = c_0\tau^3 + c_1\tau^2 + \Omega\tau. \quad (5.61)$$

Burada $b_0, \dots, b_2, c_0, c_1, K$ ve Ω çözümünden belirlenecek bazı sabitler ve $V(\zeta)$ ise argümanın reel bir fonksiyonudur. (5.61) ile verilen çözüm önerisi (5.42) denkleminde kullanılırsa aşağıdaki diferansiyel denklemi elde edilir

$$\begin{aligned} \mu_1 V'' + (\mu_5 - b_0)\xi V + [-\mu_1(b_0\tau + K)^2 - \mu_3(b_0\tau^2 + K\tau) + 3c_0\tau^2 + 2c_1\tau + \Omega]V \\ + i[2\mu_1 b_0\tau + 2\mu_1 K + \mu_3\tau - 2b_1\tau - b_2]V' + \mu_2 V^3 = 0. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Bu denklemi sabit katsayılı standart NLS denkleminin ilerleyen dalga çözümüne formel olarak indirgeyebilmek için, katsayıların aşağıdaki bağıntıları sağlaması gerekir

$$b_0 = \mu_5, \quad b_1 = \mu_1\mu_5 + \frac{1}{2}\mu_3, \quad b_2 = 2\mu_1 K,$$

$$c_0 = \frac{1}{3}(\mu_1\mu_5^2 + \mu_3\mu_5), \quad c_1 = (\mu_1\mu_5 + \frac{1}{2}\mu_3)K. \quad (5.63)$$

Bu bağıntılar sağlandığında (5.62) denkleminin aşağıdaki diferansiyel denkleme

indirgenir

$$\mu_1 V'' + (\Omega - \mu_1 K^2)V + \mu_2 V^3 = 0. \quad (5.64)$$

Standart NLS denkleminin ilerleyen dalga çözümlerinden yararlanılarak (5.64) diferansiyel denkleminin çözümleri aşağıdaki gibi verilir.

(i) $\mu_1 \mu_2 > 0$ ise

$$V(\zeta) = C \operatorname{sech}\left[\left(\frac{\mu_2}{2\mu_1}\right)^{1/2} C \zeta\right]. \quad (5.65)$$

Burada, standart NLS denklemi çözümünde belirtildiği gibi $\Omega = \mu_1 K^2 - \mu_2 C^2/2$ olarak verilir.

(ii) $\mu_1 \mu_2 < 0$ ise

$$V(\zeta) = C \tanh\left[\left(-\frac{\mu_2}{2\mu_1}\right)^{1/2} C \zeta\right]. \quad (5.66)$$

Burada $\Omega = \mu_1 K^2 - \mu_2 C^2$ olarak verilmiştir. Her iki halde de C yalnız dalganın genliğini ifade etmektedir.

Zarf dalganın hızı v_e ve ilerleyen dalganın hızı v_p ise sırasıyla aşağıdaki yapıda elde edilir

$$\begin{aligned} v_e &= \frac{1}{2\mu_1 K + (\mu_1 \mu_5 + \frac{1}{2}\mu_3)\tau}, \\ v_p &= \frac{K + \mu_5 \tau}{\mu_5(\mu_1 \mu_5 + \mu_3)\tau^2 + (2\mu_1 \mu_5 + \mu_3)K\tau - \mu_5 \xi + \Omega}. \end{aligned} \quad (5.67)$$

Hız ifadelerine dikkat edilecek olursa, bunların ξ ve τ değişkenlerinin fonksiyonları oldukları görülür.

5.2.2 Yarıçap Değişiminin Dalga Hızlarına Etkisi

Yarıçap değişiminin dalga hızlarına olan etkisini inceleyebilmek için μ_n , ($n = 1, \dots, 5$) katsayılarının sayısal değerlerinin bilinmesi gerekir. Bu katsayıların sayısal değerlerini hesaplayabilmek için Bölüm 4'de ayrıntılı olarak açıklanan yaklaşım kullanılacaktır. Bunun için, (4.125) ile verilen katsayılar ek olarak α_1 , α_2 , β_3 ve γ_1 katsayıları aşağıdaki formda verilebilir

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \left[\frac{1}{\lambda_\theta^4 \lambda_z^4} + \alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda_\theta^4 \lambda_z^2} \right) \left(1 - \frac{1}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^4} \right) \right] F(\lambda_\theta, \lambda_z), \\ \alpha_2 &= \left[-\frac{3}{\lambda_\theta^5 \lambda_z^4} + \frac{4\alpha}{\lambda_\theta^4 \lambda_z^4} \left(\lambda_\theta - \frac{1}{\lambda_\theta^3 \lambda_z^2} \right) + 2\alpha^2 \left(\frac{1}{\lambda_\theta} - \frac{1}{\lambda_\theta^3 \lambda_z^4} \left(\lambda_\theta - \frac{1}{\lambda_\theta^3 \lambda_z^2} \right)^2 \right) \right] F(\lambda_\theta, \lambda_z), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_3 = & \left\{ \frac{10}{\lambda_\theta^7 \lambda_z^3} + \alpha \left[\frac{1}{\lambda_\theta \lambda_z} \left(1 + \frac{3}{\lambda_\theta^4 \lambda_z^2} \right)^2 - \frac{8}{\lambda_\theta^6 \lambda_z^3} \left(\lambda_\theta - \frac{1}{\lambda_\theta^3 \lambda_z^2} \right) \right] \right. \\
& \left. + \frac{4\alpha^2}{\lambda_\theta \lambda_z} \left(1 + \frac{3}{\lambda_\theta^4 \lambda_z^2} \right) \left(\lambda_\theta - \frac{1}{\lambda_\theta^3 \lambda_z^2} \right)^2 + \frac{4\alpha^3}{3\lambda_\theta \lambda_z} \left(\lambda_\theta - \frac{1}{\lambda_\theta^3 \lambda_z^2} \right)^4 \right\} F(\lambda_\theta, \lambda_z), \\
\gamma_1 = & \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda_\theta \lambda_z} + \frac{3}{\lambda_\theta^3 \lambda_z^5} \right) + \frac{\alpha}{\lambda_\theta \lambda_z} \left(\lambda_z - \frac{1}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^3} \right)^2 \right] F(\lambda_\theta, \lambda_z). \quad (5.68)
\end{aligned}$$

$\alpha = 1.948$ ve $\lambda_\theta = \lambda_z = 1.6$ değerleri için, (5.68) ile verilen katsayıların sayısal değerleri, μ_n , ($n = 1, \dots, 5$) katsayılarında kullanılarak (5.67) ile verilen hız ifadelerinin genişleyen ve daralan tüp halleri için, τ ve ξ koordinatlarıyla değişimi EK A'da, Şekil A.1, Şekil A.2, Şekil A.3, Şekil A.4, Şekil A.5 ve Şekil A.6 ile verilmiştir. Bu grafikler incelenecek olursa, yarıçapı genişleyen tüplerde, ilerleyen dalganın ve zarf dalganın hızının orijinden uzaklaştıkça arttığı; yarıçapı daralan tüplerde ise, ilerleyen dalganın ve zarf dalganın hızının orijinden uzaklaştıkça azaldığı görülebilir. Ayrıca, elde edilen bir başka sonuç da ξ koordinatının farklı değerleri için, ilerleyen dalganın hızının değişiminin karakterini koruduğudur.

5.3 İçerisinde Viskoz Olmayan Akışkan Bulunan Yarıçapı Sabit Tüplerde Marjinal Halde Nonlinear Dalga Modülasyonu

Bu alt bölümde içinde viskoz olmayan akışkan bulunan, sıkışmaz izotrop ve ince elastik tüplerde zayıf nonlinear dalgaların genlik modülasyonu, marjinal halde, indirgeyici pertürbasyon yöntemi kullanılarak incelenecektir. Denklemler türetilirken, tüpün radyal yöndeki nonlinear hareket denklemleri ve akışkanın yaklaşık denklemleri kullanılacaktır. İşlemleri son derece karmaşık hale getirdiği için tüpün yarıçapının değişimi gözönüne alınmayacaktır. Bu durum çalışmanın bütününden farklılık gösterdiği için, problemin alan denklemleri bu bölümde verilecektir.

5.3.1 Tüp Denklemleri

Bu bölümde sıkışmaz ve viskoz olmayan akışkanla dolu, yarıçapı sabit, öngerilmeli ince elastik bir tüpün hareket denklemleri elde edilecektir. Bu amaçla, yarıçapı R_0 olan ve P_0 üniform iç basıncına ve λ_z eksenel germesine maruz dairesel silindirik bir tüpü göz önüne alalım. Sonlu statik şekil değiştirmeden sonraki yarıçap ise r_0 olsun. Bu statik şekil değiştirmenin üzerine radyal yönde $u^*(z^*, t^*)$ sonlu ve zamana bağlı yerdeğiştirmesinin süperpoze

edildiğini varsayalım. Eksenel yöndeki yataklama kuvvetini göz önüne alarak eksenel yöndeki yerdeğiştirmeler ihmal edilmiştir. Bu durumda incelenmekte olan noktanın konum vektörü aşağıdaki biçimde gösterilir

$$\mathbf{r} = (r_0 + u^*)\mathbf{e}_r + z^*\mathbf{e}_z, \quad z^* = \lambda_z Z. \quad (5.69)$$

Burada $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ ve $\mathbf{e}_z$ silindirik koordinatlardaki birim baz vektörlerini göstermektedir. Dikkat edilecek olursa, (5.69) ile verilen konum vektörü ifadesi, Bölüm 2’de yarıçapı değişken tüp için elde edilmiş olan (2.8) konum vektörü ifadesinde φ parametresi sıfırlanarak da elde edilebilir.

şekil değiştirmiş meridiyene teğet birim $\mathbf{t}$ vektörü ve şekil değiştirmiş membranın birim dış normali $\mathbf{n}$ ve Λ_z aşağıdaki gibi verilebilir

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\Lambda_z} \left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*} \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_z \right), \quad \mathbf{n} = \frac{1}{\Lambda_z} \left(\mathbf{e}_r - \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \mathbf{e}_z \right), \quad \Lambda_z = [1 + \left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right)^2]^{1/2}. \quad (5.70)$$

Meridiyen boyunca ve çevresel doğrultulardaki germeler ise aşağıdaki biçimde ifade edilebilir

$$\lambda_1 = \lambda_z \Lambda_z, \quad \lambda_2 = \lambda_\theta \Lambda_\theta, \quad \Lambda_\theta = 1 + u^*/r_0. \quad (5.71)$$

Burada $\lambda_\theta = r_0/R_0$ ön şekil değiştirmeden sonra çevresel doğrultuda oluşan germeyi göstermektedir. Bu durumda tüpün radyal doğrultudaki hareket denklemi aşağıdaki biçimde ifade edilir

$$\frac{\partial}{\partial z^*} \left(\frac{\mu}{\Lambda_z} \frac{\partial \Sigma}{\partial \Lambda_z} \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right) - \frac{\mu}{r_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial \Lambda_\theta} + P^* \frac{\Lambda_\theta}{h} = \rho_0 \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^{*2}}. \quad (5.72)$$

Burada $\mu \Sigma$ şekil değiştirme enerjisi fonksiyonunu, μ tüp malzemesinin kayma modülünü, P^* akışkan basıncını, h tüp kalınlığını ve ρ_0 tüp malzemesinin kütle yoğunluğunu göstermektedir.

5.3.2 Akışkan denklemleri

Alan denklemlerini tamamlayabilmek için P^* akışkan basıncının bilinmesi gerekmektedir. Bu amaçla, bu alt bölümde sıkışmaz ve viskoz olmayan bir akışkana ait kütle korunumu denklemleri verilecektir. Bölüm 2’de ayrıntılı olarak türetilen akışkan denklemleri kullanılarak, tüp yarıçapındaki değişmeyi temsil eden φ açısının sıfırlanması dolayısıyla dikkesit alanının $A = \pi(r_0 + u^*)^2$ olduğu da gözönünde bulundurulursa, akışkanın kütle korunumu denklemi olan (2.44) denklemi aşağıdaki şekli alır

$$2 \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + r_0 \left(1 + \frac{u^*}{r_0} \right) \frac{\partial w^*}{\partial z^*} + 2w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = 0. \quad (5.73)$$

Çalışmanın bu bölümünde viskoz olmayan akışkan hali ele alındığından, (2.44) ve (2.45) ile verilmiş olan akışkan denklemlerinde viskoziteyi temsil eden ν parametresinin de sıfırlandığını hatırlatmak uygundur. Eksenel doğrultudaki lineer momentumun korunumu denklemi aşağıdaki formdadır

$$\frac{\partial w^*}{\partial t^*} + w^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} + \frac{1}{\rho_a} \frac{\partial P^*}{\partial z^*} = 0. \quad (5.74)$$

Burada ρ_a akışkanın kütle yoğunluğunu göstermektedir. Bu aşamada, aşağıdaki boyutsuz büyüklükleri tanımlamak uygun olacaktır

$$t^* = \left(\frac{r_0}{c_0}\right)t, \quad z^* = r_0 z, \quad u^* = r_0 u, \quad m = \frac{\rho_0 h}{\rho_a r_0} \\ w^* = c_0 w, \quad P^* = \rho_a c_0^2 (p_0 + p), \quad c_0^2 = \mu h / \rho_a r_0. \quad (5.75)$$

(5.75) ile verilen ilişkiler (5.72), (5.73) ve (5.74) denklemlerinde kullanılırsa aşağıdaki boyutsuz alan denklemleri elde edilir

$$p_0 + p = \frac{m}{\Lambda_\theta} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{\Lambda_\theta} \frac{\partial \Sigma}{\partial \Lambda_\theta} - \frac{1}{\Lambda_\theta} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\Lambda_z} \frac{\partial \Sigma}{\partial \Lambda_z} \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ 2 \frac{\partial u}{\partial t} + (1 + u) \frac{\partial w}{\partial z} + 2w \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (5.76)$$

(5.76) denklemleri, u , w ve p bilinmeyenlerini belirleyebilmek için yeterlidir.

Daha sonra gerekli olacağı için Σ fonksiyonunu u ve u 'nun z değişkenine göre türevleri cinsinden kuvvet serisine açalım. $1/\Lambda_\theta$, Λ_z ve $1/\Lambda_z$ büyüklüklerinin seri açılımlarının aşağıdaki formda olduğu göz önünde bulundurulursa

$$1/\Lambda_\theta = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 - u^5 \dots, \quad \Lambda_z = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^4 \dots,$$

$$1/\Lambda_z = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^4 - \dots, \quad (5.77)$$

p basıncı aşağıdaki gibi gösterilebilir

$$p = L_1(u) + L_2(u) + L_3(u) + L_4(u) + L_5(u). \quad (5.78)$$

$L_1(u), \dots, L_5(u)$ fonksiyonlarının açık ifadeleri EK B(B.1)'de verilmiştir.

5.3.3 Nonlinear Dalga Modülasyonu

Bu bölümde, boyutsuz alan denklemleri (5.76), (5.78) ifadeleri ile verilen, içi viskoz olmayan akışkan ile dolu, yarıçapı sabit ince elastik tüplerde zayıf nonlinear dalgaların genlik modülasyonu iki ayrı alt bölümde incelenecektir. Öncelikle, nonlinear dalga modülasyonunu ifade eden koordinat dönüşümü tanımlanacak, daha sonra, ilk kısımda, bu koordinat dönüşümünün belirli bir formu için problem incelenerek yönetici denklem olarak nonlinear Schrödinger denklemi (NLS) denklemi elde edilecektir. İkinci kısımda ise, marjinal duruma karşı gelecek biçimde, koordinat dönüşümü modifiye edilerek problem tekrar incelenecek ve bu kez yönetici denklem olarak genelleştirilmiş nonlinear Schrödinger denklemi (GNLS) elde edilecektir.

Bu amaçla, aşağıdaki formda bir koordinat dönüşümü tanımlayalım

$$\xi = \epsilon^\alpha(z - \lambda t), \quad \tau = \epsilon^{2\alpha}t. \quad (5.79)$$

Burada ϵ nonlinearitenin zayıflığını ölçen küçük bir parametre, λ daha sonra grup hızına eşit olduğu gösterilecek olan bir sabit ve α farklı sayısal değerler verilecek pozitif bir sayıdır. Ayrıca, alan değişkenlerinin, ϵ parametresinin, hızlı değişkenler (z, t) ve yavaş değişkenler (ξ, τ) 'nin fonksiyonu olduğu varsayılacaktır. (5.79) koordinat dönüşümünden faydalanılarak, türev ifadeleri aşağıdaki formda oluşturulabilir

$$\frac{\partial}{\partial z} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi} + \epsilon^\alpha \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \tau} - \epsilon^\alpha \lambda \frac{\partial}{\partial \xi} + \epsilon^{2\alpha} \frac{\partial}{\partial \tau}. \quad (5.80)$$

Ayrıca alan değişkenlerinin, ϵ parametresinin cinsinden aşağıda verilen biçimde asimptotik seriye açılabilirini varsayılacaktır

$$\begin{aligned} u &= \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \epsilon^3 u_3 + \dots, \\ w &= \epsilon w_1 + \epsilon^2 w_2 + \epsilon^3 w_3 + \dots, \\ p &= \epsilon p_1 + \epsilon^2 p_2 + \epsilon^3 p_3 + \dots \end{aligned} \quad (5.81)$$

Bu açılımlar (5.76), (5.78) alan denklemlerinde yerine yerleştirilirse, $u_1, \dots, p_5$ alan değişkenlerini içeren bir diferansiyel denklem takımı elde edilir.

(i) $\alpha = 1$ Hali: Bu çalışmanın ilk bölümü olarak, $\alpha = 1$ hali ele alınacaktır. Bu özel hal, keyfi bir dalga sayısı ve başlangıç deformasyonuna karşı gelir. (5.79) ve (5.80) ifadelerinde $\alpha = 1$ değeri kullanılır ve (5.81) seri açılımları alan denklemlerinde yerine konur ise ϵ 'un çeşitli mertebeden kuvvetlerini içeren bir diferansiyel denklem grubu elde edilir. ϵ 'un benzer kuvvetlerinin katsayıları

sıfıra eşitlenirse aşağıdaki denklem takımları bulunur.

$O(\epsilon)$ mertebeden denklemler:

$$2\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial z} = 0,$$

$$p_1 = \beta_1 u_1 + m \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \alpha_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}. \quad (5.82)$$

$O(\epsilon^2)$ mertebeden denklemler:

$$2\frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial w_2}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial \xi} - 2\lambda \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + u_1 \frac{\partial w_1}{\partial z} + 2w_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} + \frac{\partial p_2}{\partial z} + \frac{\partial p_1}{\partial \xi} - \lambda \frac{\partial w_1}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z}(w_1^2) = 0,$$

$$\begin{aligned} p_2 = & \beta_1 u_2 + m \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - \alpha_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} - 2\lambda m \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi \partial t} - 2\alpha_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi \partial z} \\ & + \beta_2 u_1^2 - m u_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + (\alpha_0 - 8\alpha_1) u_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - 4\alpha_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} \right)^2. \end{aligned} \quad (5.83)$$

$O(\epsilon^3)$ mertebeden denklemler:

$$2\frac{\partial u_3}{\partial t} + \frac{\partial w_3}{\partial z} - 2\lambda \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \frac{\partial w_2}{\partial \xi} + 2\frac{\partial u_1}{\partial \tau} + u_1 \frac{\partial w_1}{\partial \xi} + 2w_1 \frac{\partial u_1}{\partial \xi}$$

$$+ u_2 \frac{\partial w_1}{\partial z} + u_1 \frac{\partial w_2}{\partial z} + 2(w_1 \frac{\partial u_2}{\partial z} + w_2 \frac{\partial u_1}{\partial z}) = 0,$$

$$\frac{\partial w_3}{\partial t} + \frac{\partial p_3}{\partial z} - \lambda \frac{\partial w_2}{\partial \xi} + \frac{\partial p_2}{\partial \xi} + \frac{\partial w_1}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial z}(w_1 w_2) = 0,$$

$$\begin{aligned} p_3 = & \beta_1 u_3 + m \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - \alpha_0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} + m(\lambda^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t \partial \tau} - 2\lambda \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi \partial t}) \\ & - \alpha_0 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi \partial z} \right) + 2\beta_2 u_1 u_2 - m \left(u_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + u_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - 2\lambda u_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi \partial t} \right) \\ & + (\alpha_0 - 8\alpha_1) \left(u_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + u_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + 2u_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z \partial \xi} \right) - 8\alpha_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) \\ & + \beta_3 u_1^3 + m u_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + (8\alpha_1 - 4\alpha_3 - \alpha_0) u_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + 4(\alpha_1 - \alpha_3) u_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} \right)^2 \end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{3}{2}\alpha_0 - 12\gamma_1\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial z}\right)^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}. \quad (5.84)$$

Burada $u_1, u_2, \dots, p_2$ ve p_3 hem yavaş hem de hızlı değişkenlerin fonksiyonudur.

Alan denklemlerinin çözümleri

$O(\epsilon)$ mertebeden denklemlerin çözümü:

$O(\epsilon)$ mertebeden denklemlerin yapısı incelenecek olursa, bu denklemlere aşağıda verilen tipte harmonik dalga çözümü önermenin mümkün olduğu görülür

$$\begin{aligned} u_1 &= U_1^{(1)} \exp[i(\omega t - kz)] + k.e. \\ w_1 &= W_1^{(1)} \exp[i(\omega t - kz)] + k.e. \\ p_1 &= P_1^{(1)} \exp[i(\omega t - kz)] + k.e.. \end{aligned} \quad (5.85)$$

Burada $U_1^{(1)}$, $W_1^{(1)}$ ve $P_1^{(1)}$ yavaş değişkenlere bağlı karmaşık genlik fonksiyonlarını, $k.e.$ ise ilgili büyüklüğün karmaşık eşleniğini göstermektedir. (5.85) ile verilen çözüm önerisi (5.82) denklemlerinde yerine konursa aşağıdaki çözüm kümesi elde edilir

$$U_1^{(1)} = U(\xi, \tau), \quad W_1^{(1)} = \frac{2\omega}{k} U(\xi, \tau), \quad P_1^{(1)} = \frac{2\omega^2}{k^2} U(\xi, \tau). \quad (5.86)$$

(5.86) ile verilen çözüm seti, (5.82) alan denklemlerinde kullanılacak olursa aşağıdaki dispersiyon bağıntısı elde edilir

$$(2 + mk^2)\omega^2 - (\beta_1 + \alpha_0 k^2)k^2 = 0. \quad (5.87)$$

Burada $U(\xi, \tau)$ yönetici denklemi daha sonra belirlenecek olan bir fonksiyondur.

$O(\epsilon^2)$ mertebeden denklemlerin çözümü:

(5.86) ile verilen çözüm kümesi (5.83) denklemlerine yerleştirilirse aşağıdaki denklemler hiyerarşisi elde edilir

$$2\frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial w_2}{\partial z} + 2\left(\frac{\omega}{k} - \lambda\right)\frac{\partial U}{\partial \xi} e^{i\varphi} - 6i\omega U^2 e^{2i\varphi} + k.e. = 0,$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} + \frac{\partial p_2}{\partial z} + \frac{2\omega}{k}\left(\frac{\omega}{k} - \lambda\right)\frac{\partial U}{\partial \xi} e^{i\varphi} - \frac{4i\omega^2}{k} U^2 e^{2i\varphi} + k.e. = 0,$$

$$p_2 = \beta_1 u_2 + m \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - \alpha_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + 2\left[-2\frac{\omega^2}{k^2} + (\beta_1 + \beta_2) + 4\alpha_1 k^2\right]|U|^2$$

$$+ 2i(\alpha_0 k - m\lambda\omega) \frac{\partial u}{\partial \xi} e^{i\varphi} + [-2\frac{\omega^2}{k^2} + (\beta_1 + \beta_2) + 12\alpha_1 k^2] U^2 e^{2i\varphi} + k. \quad (5.88)$$

Burada $|U|^2 = UU^*$ ve U^* , U 'nın karmaşık eşleniğini göstermektedir. φ faz fonksiyonu da $\varphi = \omega t - kz$ olarak tanımlanmıştır. (5.88) denklemlerinin yapısı incelenecek olursa, aşağıdaki yapıda bir harmonik dalga çözümü önermenin mümkün olduğu görülür

$$\begin{aligned} u_2 &= U_2^{(0)} + (\sum_{l=1}^2 U_2^{(l)} e^{il\varphi} + k.e.), \\ w_2 &= W_2^{(0)} + (\sum_{l=1}^2 W_2^{(l)} e^{il\varphi} + k.e.), \\ p_2 &= P_2^{(0)} + (\sum_{l=1}^2 P_2^{(l)} e^{il\varphi} + k.e.). \end{aligned} \quad (5.89)$$

(5.89) ile verilen çözüm önerisi (5.88) denklemlerinde kullanılırsa aşağıdaki denklem seti elde edilir

$$P_2^{(0)} = 2[-2\frac{\omega^2}{k^2} + (\beta_1 + \beta_2) + 4\alpha_1 k^2] |U|^2. \quad (5.90)$$

$$2i\omega U_2^{(1)} - ikW_2^{(1)} + 2(\frac{\omega}{k} - \lambda) \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0, \quad i\omega W_2^{(1)} - ikP_2^{(1)} + \frac{2\omega}{k}(\frac{\omega}{k} - \lambda) \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0,$$

$$P_2^{(1)} = 2\frac{\omega^2}{k^2} U_2^{(1)} + 2i(\alpha_0 k - m\lambda\omega) \frac{\partial U}{\partial \xi}. \quad (5.91)$$

$$2\omega U_2^{(2)} - kW_2^{(2)} - 3\omega U^2 = 0, \quad \omega W_2^{(2)} - kP_2^{(2)} - \frac{2\omega^2}{k} U^2 = 0,$$

$$P_2^{(2)} = (8\frac{\omega^2}{k^2} - 3\beta_1) U_2^{(2)} + [-2\frac{\omega^2}{k^2} + (\beta_1 + \beta_2) + 12\alpha_1 k^2] U^2. \quad (5.92)$$

(5.91) ile ifade edilen denklem sisteminin çözümü aşağıdaki gibi ifade edilebilir

$$W_2^{(1)} = \frac{2\omega}{k} U_2^{(1)} - \frac{2i}{k}(\frac{\omega}{k} - \lambda) \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad P_2^{(1)} = \frac{2\omega^2}{k^2} U_2^{(1)} - \frac{4i\omega}{k^2}(\frac{\omega}{k} - \lambda) \frac{\partial U}{\partial \xi}. \quad (5.93)$$

Burada λ , v_g grup hızına eşit olarak aşağıdaki gibi bulunur

$$\lambda = v_g = \frac{2\omega^2 + \alpha_0 k^4}{\omega k(2 + mk^2)}. \quad (5.94)$$

Burada, $U_2^{(1)}$ yönetici denklemi daha yüksek mertebe çözümlerden elde edilecek olan, bilinmeyen bir fonksiyondur. (5.92) ile ifade edilen denklemlerin çözümü aşağıdaki gibi verilebilir

$$U_2^{(2)} = \Phi_0 U^2, \quad W_2^{(2)} = \frac{\omega}{k}(2\Phi_0 - 3)U^2, \quad P_2^{(2)} = \frac{\omega^2}{k^2}(2\Phi_0 - 5)U^2. \quad (5.95)$$

Burada Φ_0 bir katsayı olup, açık ifadesi EK B(B.2)'de verilmiştir.

$O(\epsilon^3)$ mertebeden denklemlerin çözümü:

İlk iki mertebeden denklemlere ilişkin elde edilen çözüm ifadeleri $O(\epsilon^3)$ mertebeden denklemlerde yerine konur ve elde edilen ifadeler incelenecek olursa, bu denklemlere aşağıdaki formda harmonik dalga çözümlerinin önermenin mümkün olduğu görülür

$$\begin{aligned} u_3 &= U_3^{(0)} + \left(\sum_{\ell=1}^3 U_3^{(\ell)} \exp(i\ell\varphi) + k.e. \right), \\ w_3 &= W_3^{(0)} + \left(\sum_{\ell=1}^3 W_3^{(\ell)} \exp(i\ell\varphi) + k.e. \right), \\ p_3 &= P_3^{(0)} + \left(\sum_{\ell=1}^3 P_3^{(\ell)} \exp(i\ell\varphi) + k.e. \right). \end{aligned} \quad (5.96)$$

(5.96) ile verilen çözüm önerisi (5.84) denklemlerine yerleştirilirse, problemin çözümü için faz fonksiyonunun sıfır ve birinci modlarını almak yeterli olacaktır. Bu ifadeler aşağıdaki gibi verilebilir

$$\begin{aligned} -2\lambda \frac{\partial U_2^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial W_2^{(0)}}{\partial \xi} + 2\left(\frac{4\omega}{k} - \lambda\right) \frac{\partial}{\partial \xi} |U|^2 &= 0, \\ -\lambda \frac{\partial W_2^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial P_2^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{4\omega^2}{k^2} \frac{\partial}{\partial \xi} |U|^2 &= 0, \\ P_2^{(0)} - \beta_1 U_2^{(0)} - 2\left[-2\frac{\omega^2}{k^2} + (\beta_1 + \beta_2) + 4\alpha_1 k^2\right] |U|^2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.97)$$

$$2i\omega U_3^{(1)} - ikW_3^{(1)} - 2\lambda \frac{\partial U_2^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial W_2^{(1)}}{\partial \xi} + 2\frac{\partial U}{\partial \tau}$$

$$-2i(kW_2^{(0)} + \omega U_2^{(0)})U - 6i\omega U^* U_2^{(2)} = 0,$$

$$i\omega W_3^{(1)} - ikP_3^{(1)} - \lambda \frac{\partial W_2^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{2\omega}{k} \frac{\partial U}{\partial \tau} - 2i\omega(UW_2^{(0)} + U^*W_2^{(2)}) = 0,$$

$$P_3^{(1)} = \frac{2\omega^2}{k^2} U_3^{(1)} - 2i(\lambda m\omega - \alpha_0 k) \frac{\partial U_2^{(1)}}{\partial \xi} + 2im\omega \frac{\partial U}{\partial \tau} + (m\lambda^2 - \alpha_0) \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\Gamma_1}{k^2} |U|^2 U. \quad (5.98)$$

Burada Γ_1 bir katsayı olup EK B(B.3)'de verilmiştir. Buradan (5.97) denklemlerini çözümleri aşağıdaki gibi elde edilir

$$U_2^{(0)} = \Phi_1 |U|^2, \quad W_2^{(0)} = 2[\lambda(1 + \Phi_1) - 4\frac{\omega}{k}] |U|^2. \quad (5.99)$$

Φ_1 katsayısının açık hali EK B(B.2)'de verilmiştir. (5.98) denklemleri arasından $U_3^{(1)}$, $W_3^{(1)}$ ve $P_3^{(1)}$ elimine edilir ve (5.95) ve (5.99) ile verilen ilişkiler de kullanılacak olursa aşağıdaki nonlinear Schrödinger denklemi elde edilir

$$i \frac{\partial U}{\partial \tau} + \mu_1 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \mu_2 |U|^2 U = 0. \quad (5.100)$$

μ_1 ve μ_2 katsayılarının açık ifadeleri EK B(B.4)'de verilmiştir.

(ii) $\alpha = 2$ **Hali:** NLS denkleminin düzlem dalga çözümünün stabilitesi, denklemin katsayılarının çarpımının işaretine bağlıdır. Katsayıların çarpımının işareti negatif ise NLS denkleminin düzlem dalga çözümü stabildir; eğer sözkonusu çarpımın işareti pozitif ise çözüm stabil değildir. Bu katsayılarının çarpımının sıfır olduğu durum ise “marjinal hal” olarak isimlendirilir. μ_1 katsayısı, grup hızının dalga sayısına göre türevine eşittir ve sıfır olması söz konusu değildir. Marjinal durumun oluşabilmesi için tek olasılık μ_2 katsayısının sıfır olmasıdır. Bu özel halde, NLS denklemi lineer Schrödinger denklemine dejenere olur. Bir başka deyişle, modülasyonun analizinde kullanılan asimptotik açılım, bu belirli dalga sayısı civarında geçersiz olur. Dolayısıyla, nonlinearitenin etkisinin, band genişliği ile dengelenecek biçimde arttırılması gerekir. Analizde kullanılacak olan asimptotik açılım, daha yüksek mertebeden nonlinearliği hesaplara dahil edecek biçimde modifiye edilmelidir. Yumuşak biyolojik dokular için belirli bir başlangıç şekil değiştirmesi ve belirli bir dalga sayısı için bu tür bir marjinal halin ortaya çıkabileceği bilinmektedir ([52]).

Bu alt bölümde, böyle bir marjinal halin oluşması durumu göz önünde bulundurulacak ve (5.79) ile verilen koordinat dönüşümlerinde $\alpha = 2$ alınarak nonlinearitenin mertebesi arttırılacaktır. Bu durumda (5.79) koordinat dönüşümleri aşağıdaki hali alır

$$\xi = \epsilon^2(z - \lambda t), \quad \tau = \epsilon^4 t. \quad (5.101)$$

(5.101) koordinat dönüşümleri ve (5.81) açılımları (5.76), (5.78) alan denklemlerinde kullanılırsa ϵ 'un çeşitli mertebeden kuvvetlerini içeren bir diferansiyel denklemler kümesi elde edilir. ϵ 'un benzer kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenecek olursa aşağıdaki denklemler seti oluşturulur.

$O(\epsilon)$ mertebeden denklemler:

$$2\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial z} = 0, \quad p_1 = \beta_1 u_1 + m \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \alpha_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}. \quad (5.102)$$

$O(\epsilon^2)$ mertebeden denklemler:

$$2\frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial w_2}{\partial z} + u_1 \frac{\partial w_1}{\partial z} + 2w_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial w_2}{\partial t} + \frac{\partial p_2}{\partial z} + w_1 \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0,$$

$$p_2 = \beta_1 u_2 + m \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - \alpha_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + \beta_2 u_1^2 - m u_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + (\alpha_0 - 8\alpha_1) u_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - 4\alpha_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} \right)^2. \quad (5.103)$$

$O(\epsilon^3)$ mertebeden denklemler:

$$2\frac{\partial u_3}{\partial t} + \frac{\partial w_3}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial \xi} - 2\lambda \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + u_2 \frac{\partial w_1}{\partial z} + u_1 \frac{\partial w_2}{\partial z} + 2w_1 \frac{\partial u_2}{\partial z} + 2w_2 \frac{\partial u_1}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial w_3}{\partial t} + \frac{\partial p_3}{\partial z} + \left(\frac{\partial p_1}{\partial \xi} - \lambda \frac{\partial w_1}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} (w_1 w_2) = 0. \quad (5.104)$$

p_3 basınç ifadesinin açık hali EK B(B.5)'de verilmiştir.

$O(\epsilon^4)$ mertebeden denklemler:

$$2\frac{\partial u_4}{\partial t} + \frac{\partial w_4}{\partial z} + \frac{\partial w_2}{\partial \xi} - 2\lambda \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + u_1 \frac{\partial w_3}{\partial z} + u_2 \frac{\partial w_2}{\partial z} + u_3 \frac{\partial w_1}{\partial z}$$

$$+ u_1 \frac{\partial w_1}{\partial \xi} + 2w_1 \frac{\partial u_3}{\partial z} + 2w_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} + 2w_3 \frac{\partial u_1}{\partial z} + 2w_1 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} = 0,$$

$$\frac{\partial w_4}{\partial t} + \frac{\partial p_4}{\partial z} + \frac{\partial p_2}{\partial \xi} - \lambda \frac{\partial w_2}{\partial \xi} + w_1 \frac{\partial w_3}{\partial z} + w_2 \frac{\partial w_2}{\partial z} + w_3 \frac{\partial w_1}{\partial z} + w_1 \frac{\partial w_1}{\partial \xi} = 0. \quad (5.105)$$

p_4 basınç ifadesinin açık hali EK B(B.5)'de verilmiştir.

$O(\epsilon^5)$ mertebeden denklemler:

$$2\frac{\partial u_5}{\partial t} + \frac{\partial w_5}{\partial z} + \frac{\partial w_3}{\partial \xi} - 2\lambda \frac{\partial u_3}{\partial \xi} + 2\frac{\partial u_1}{\partial \tau} + u_1 \frac{\partial w_4}{\partial z} + u_2 \frac{\partial w_3}{\partial z}$$

$$+ u_3 \frac{\partial w_2}{\partial z} + u_4 \frac{\partial w_1}{\partial z} + 2w_1 \frac{\partial u_4}{\partial z} + 2w_2 \frac{\partial u_3}{\partial z} + 2w_3 \frac{\partial u_2}{\partial z} + 2w_4 \frac{\partial u_1}{\partial z} + u_2 \frac{\partial w_1}{\partial \xi}$$

$$+ u_1 \frac{\partial w_2}{\partial \xi} + 2w_1 \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + 2w_2 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} = 0,$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial w_5}{\partial t} + \frac{\partial p_5}{\partial z} + \frac{\partial p_3}{\partial \xi} - \lambda \frac{\partial w_3}{\partial \xi} + w_1 \frac{\partial w_4}{\partial z} + w_2 \frac{\partial w_3}{\partial z} + w_3 \frac{\partial w_2}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial \tau} \\ & + w_4 \frac{\partial w_1}{\partial z} + w_1 \frac{\partial w_2}{\partial \xi} + w_2 \frac{\partial w_1}{\partial \xi} = 0. \end{aligned} \quad (5.106)$$

p_5 basınç ifadesinin açık hali EK B(B.5)'de verilmiştir.

$O(\epsilon^6)$ mertebeden denklemler:

$$\begin{aligned} & 2 \frac{\partial u_6}{\partial t} + \frac{\partial w_6}{\partial z} + \frac{\partial w_4}{\partial \xi} - 2\lambda \frac{\partial u_4}{\partial \xi} + 2 \frac{\partial u_2}{\partial \tau} + u_1 \left(\frac{\partial w_5}{\partial z} + \frac{\partial w_3}{\partial \xi} \right) + u_2 \left(\frac{\partial w_4}{\partial z} + \frac{\partial w_2}{\partial \xi} \right) \\ & + u_3 \left(\frac{\partial w_3}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial \xi} \right) + u_4 \frac{\partial w_2}{\partial z} + u_5 \frac{\partial w_1}{\partial z} + 2w_1 \left(\frac{\partial u_5}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial \xi} \right) + 2w_2 \left(\frac{\partial u_4}{\partial z} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi} \right) \\ & + 2w_3 \left(\frac{\partial u_3}{\partial z} + \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \right) + 2w_4 \frac{\partial u_2}{\partial z} + 2w_5 \frac{\partial u_1}{\partial z} = 0, \\ & \frac{\partial w_6}{\partial t} + \frac{\partial p_6}{\partial z} + \frac{\partial p_4}{\partial \xi} - \lambda \frac{\partial w_4}{\partial \xi} + \frac{\partial w_2}{\partial \tau} + w_1 \left(\frac{\partial w_5}{\partial z} + \frac{\partial w_3}{\partial \xi} \right) \\ & + w_2 \left(\frac{\partial w_4}{\partial z} + \frac{\partial w_2}{\partial \xi} \right) + w_3 \left(\frac{\partial w_3}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial \xi} \right) + w_4 \frac{\partial w_2}{\partial z} + w_5 \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (5.107)$$

Alan denklemlerinin çözümleri

$O(\epsilon)$ mertebeden denklemlerin çözümü:

$O(\epsilon)$ mertebeden denklemlere aşağıdaki formda çözüm önerelim

$$\begin{aligned} u_1 &= U_1^{(1)} \exp[i(\omega t - kz)] + k.e., \\ w_1 &= W_1^{(1)} \exp[i(\omega t - kz)] + k.e., \\ p_1 &= P_1^{(1)} \exp[i(\omega t - kz)] + k.e.. \end{aligned} \quad (5.108)$$

(5.108) çözüm önerisi (5.102) denklemlerinde yerine konur ve elde edilen diferansiyel denklemler çözülürse aşağıdaki ilişkiler bulunur

$$U_1^{(1)} = V(\xi, \tau), \quad W_1^{(1)} = 2 \frac{\omega}{k} V(\xi, \tau), \quad P_1^{(1)} = \frac{2\omega^2}{k^2} V(\xi, \tau). \quad (5.109)$$

Burada $V(\xi, \tau)$ yönetici denklemi henüz bilinmeyen bir fonksiyondur.

$O(\epsilon^2)$ mertebeden denklemlerin çözümü:

(5.109) ile verilen çözümler (5.103) denklemlerinde kullanılırsa aşağıdaki denklem takımı elde edilir

$$2\frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial w_2}{\partial z} - (6i\omega V^2 e^{2i\varphi} + k.e.) = 0, \quad \frac{\partial w_2}{\partial t} + \frac{\partial p_2}{\partial z} - \left(\frac{4i\omega^2}{k} V^2 e^{2i\varphi} + k.e.\right) = 0,$$

$$p_2 = \beta_1 u_2 + m \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - \alpha_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + 2\left[-2\frac{\omega^2}{k^2} + (\beta_1 + \beta_2) + 4\alpha_1 k^2\right]|V|^2 \\ + \left[-2\frac{\omega^2}{k^2} + (\beta_1 + \beta_2) + 12\alpha_1 k^2\right]V^2 e^{2i\varphi} + k.e.. \quad (5.110)$$

Burada $|V|^2 = VV^*$ ve V^* , V 'nin karmaşık eşleniğini göstermektedir. φ ise $\varphi = \omega t - kz$ olarak tanımlanmıştır. (5.110) denkleminde aşağıdaki formda çözüm önerelim.

$$u_2 = U_2^{(0)} + \left(\sum_{l=1}^2 U_2^{(l)} e^{il\varphi} + k.e.\right), \quad (5.111)$$

w_2 ve p_2 için de benzer formlar geçerli olmak üzere, (5.110) çözüm önerisi (5.110) denklemlerinde yerine konursa aşağıdaki ilişkiler elde edilir.

$$P_2^{(0)} = \beta_1 U_2^{(0)} + 2\left[-2\frac{\omega^2}{k^2} + (\beta_1 + \beta_2) + 4\alpha_1 k^2\right]|V|^2. \quad (5.112)$$

$$W_2^{(1)} = \frac{2\omega}{k} U_2^{(1)}, \quad P_2^{(1)} = \frac{2\omega^2}{k^2} U_2^{(1)}. \quad (5.113)$$

$$U_2^{(2)} = \Phi_0 V^2, \quad W_2^{(2)} = \frac{\omega}{k}(2\Phi_0 - 3)V^2, \quad P_2^{(2)} = \frac{\omega^2}{k^2}(2\Phi_0 - 5)V^2. \quad (5.114)$$

Burada $U_2^{(1)}$ keyfi bir fonksiyondur ve problemin genelliği bozulmaksızın sıfır alınabilir. Buradan $U_2^{(1)} = W_2^{(1)} = P_2^{(1)} = 0$ sonuçları elde edilir.

$O(\epsilon^3)$ mertebeden denklemlerin çözümü:

$O(\epsilon^3)$ mertebeden denklemlerin çözümlerini elde edebilmek için, (5.109), (5.112)-(5.114) çözüm ifadeleri (5.104)'de kullanılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir

$$2\frac{\partial u_3}{\partial t} + \frac{\partial w_3}{\partial z} + \left[2\left(\frac{\omega}{k} - \lambda\right)\frac{\partial V}{\partial \xi} - 2i\omega(\Phi_1 + 3\Phi_0)|V|^2 V - 2ikW_2^{(0)}V\right]e^{i\varphi}$$

$$+ 6i\omega(2 - 3\Phi_0)V^3 e^{3i\varphi} = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_3}{\partial t} + \frac{\partial p_3}{\partial z} + \left[\frac{2\omega}{k} \left(\frac{\omega}{k} - \lambda \right) \frac{\partial U}{\partial \xi} - 2i\omega W_2^{(0)}V + i\frac{\omega^2}{k}(6 - 4\Phi_0)|V|^2V \right] e^{i\varphi} \\ + i\frac{\omega^2}{k}(18 - 12\Phi_0)V^3 e^{3i\varphi} = 0, \end{aligned}$$

$$p_3 = \beta_1 u_3 + m \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - \alpha_0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} + \left[\frac{\Gamma_1}{k^2} |V|^2 V + 2i(\alpha_0 k - \lambda m \omega) \frac{\partial V}{\partial \xi} \right] e^{i\varphi} + \frac{\Gamma_2}{k^2} V^3 e^{3i\varphi}. \quad (5.115)$$

Burada $U_2^{(0)} = \Phi_1 |U|^2$ olarak tanımlanmıştır. Γ_2 'nin açık ifadesi EK B(B.3)'de verilmiştir.

(5.115) ile verilen diferansiyel denklemlere aşağıdaki formda çözüm önerilebilir

$$u_3 = U_3^{(0)} + \left(\sum_{\ell=1}^3 U_3^{(\ell)} \exp(i\ell\varphi) + k.e. \right). \quad (5.116)$$

w_3 ve p_3 için de benzer formda çözüm önerilir ve (5.115) eşitliklerinde kullanılırsa aşağıdaki yapılara ulaşılır

$$P_3^{(0)} = \beta_1 U_3^{(0)}. \quad (5.117)$$

$$2i\omega U_3^{(1)} - ikW_3^{(1)} + 2\left(\frac{\omega}{k} - \lambda\right) \frac{\partial V}{\partial \xi} - 2i\omega(\Phi_1 + 3\Phi_0)|V|^2V - 2ikW_2^{(0)}V = 0,$$

$$i\omega W_3^{(1)} - ikP_3^{(1)} + 2\frac{\omega}{k}\left(\frac{\omega}{k} - \lambda\right) \frac{\partial V}{\partial \xi} + i\frac{\omega^2}{k}(6 - 4\Phi_0)|V|^2V - 2i\omega W_2^{(0)}V = 0,$$

$$P_3^{(1)} = 2\frac{\omega^2}{k^2} U_3^{(1)} + 2i(\alpha_0 k - \lambda m \omega) \frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{\Gamma_1}{k^2} |V|^2 V. \quad (5.118)$$

$$2\omega U_3^{(2)} - kW_3^{(2)} = 0, \quad \omega W_3^{(2)} - kP_3^{(2)} = 0, \quad P_3^{(2)} = \left(8\frac{\omega^2}{k^2} - 3\beta_1\right) U_3^{(2)}. \quad (5.119)$$

$$2\omega U_3^{(3)} - kW_3^{(3)} + 2\omega(2 - 3\Phi_0)V^3 = 0, \quad \omega W_3^{(3)} - kP_3^{(3)} + \frac{2\omega^2}{k}(3 - 2\Phi_0)V^3 = 0,$$

$$P_3^{(3)} = \left(18\frac{\omega^2}{k^2} - 8\beta_1\right) U_3^{(3)} + \frac{\Gamma_2}{k^2} V^3. \quad (5.120)$$

(5.118) denklemlerinden $U_3^{(1)}$, $W_3^{(1)}$ ve $P_3^{(1)}$ elimine edilirse aşağıdaki denkleme

ulaşılır

$$i[4\omega(\frac{\omega}{k} - \lambda) + 2k^2(\alpha_0 k - \lambda m\omega)] \frac{\partial V}{\partial \xi} + [2\omega^2(\Phi_1 + 5\Phi_0 - 3) + \Gamma_1]|V|^2 V + 4\omega k W_2^{(0)} V = 0. \quad (5.121)$$

$W_2^{(0)}$ reel olduğundan (5.121) denkleminin sağlanabilmesi için aşağıdaki bağıntıların geçerli olması gerekir

$$4\omega(\frac{\omega}{k} - \lambda) + 2k^2(\alpha_0 k - \lambda m\omega) = 0. \quad (5.122)$$

$$W_2^{(0)} = \frac{-[2\omega^2(\Phi_1 + 5\Phi_0 - 3) + \Gamma_1]|V|^2}{4\omega k}. \quad (5.123)$$

Bunlardan (5.122) ifadesi, λ 'nın grup hızına eşit olması gerektiğini gösterir.

Burada, yine, $U_3^{(1)}$ keyfi bir fonksiyondur ve sıfır alınabilir. Bu durumda (5.118) denklemlerinin çözümünden aşağıdaki sonuçlar elde edilebilir

$$W_3^{(1)} = i\frac{2}{k}(\lambda - \frac{\omega}{k}) \frac{\partial V}{\partial \xi} - 2\frac{\omega}{k}(\Phi_1 + 3\Phi_0)|V|^2 V - 2W_2^{(0)} V, \\ P_3^{(1)} = 4\frac{i\omega}{k^2}(\lambda - \frac{\omega}{k}) \frac{\partial V}{\partial \xi} - 2\frac{\omega^2}{k^2}(\Phi_1 + 5\Phi_0 - 3)|V|^2 V - 4\frac{\omega}{k} W_2^{(0)} V. \quad (5.124)$$

Burada $W_2^{(0)}$ 'ın (5.123) ile verildiğini hatırlatalım. (5.119) denkleminin çözümünden $U_3^{(2)} = W_3^{(2)} = P_3^{(2)} = 0$ elde edilir. (5.120) denkleminin çözümünden aşağıdaki yapılara ulaşılabilir

$$U_3^{(3)} = \Phi_2 V^3, \quad W_3^{(3)} = \frac{2\omega}{k}[\Phi_2 + 2 - 3\Phi_0]V^3, \quad P_3^{(3)} = \frac{2\omega^2}{k^2}[\Phi_2 + 5(1 - \Phi_0)]V^3. \quad (5.125)$$

Φ_2 katsayısının açık ifadesi EK B(B.2)'de verilmiştir.

$O(\epsilon^4)$ mertebeden denklemlerin çözümü:

(5.109), (5.112)-(5.114), (5.124) ve (5.125) ile verilen çözüm ifadeleri (5.105) denkleminde kullanılırsa aşağıdaki denklemler elde edilir

$$2\frac{\partial u_4}{\partial t} + \frac{\partial w_4}{\partial z} + \frac{\partial W_2^{(0)}}{\partial \xi} - 2[\lambda(1 + \Phi_1) - 4\frac{\omega}{k}] \frac{\partial |V|^2}{\partial \xi} - 2i(\omega U_3^{(0)} + k W_3^{(0)}) V e^{i\varphi} \\ + \{[(6 - 4\Phi_0)(\lambda - \frac{\omega}{k}) V \frac{\partial V}{\partial \xi} + i\omega(-52 + 24\Phi_0 + 12\Phi_1 - 4\Phi_0\Phi_1 - 12\Phi_2) \\ + 12\lambda k(1 + \Phi_1)]|V|^2 V^2 - 4ik\Phi_0 W_2^{(0)} V^2\} e^{2i\varphi}$$

$$+ 4i\omega(-5 + 12\Phi_0 - 6\Phi_2 - 3\Phi_0^2)V^4 e^{4i\varphi} = 0,$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial w_4}{\partial t} + \frac{\partial p_4}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \xi}(P_2^{(0)} - \lambda W_2^{(0)} + 4\frac{\omega^2}{k^2}|V|^2) - 2i\omega W_3^{(0)} U e^{i\varphi} \\ & + [\frac{\omega}{k}(\lambda - \frac{\omega}{k})(14 - 4\Phi_0)V \frac{\partial V}{\partial \xi} + i\frac{\omega^2}{k}(-80 + 48\Phi_0 + 8\Phi_1 - 8\Phi_2) + 16\lambda\omega(1 + \Phi_1)]|V|^2 V^2 \\ & - 2\omega[(2\Phi_0 - 3)W_2^{(0)}V^2]e^{2i\varphi} - i\frac{\omega^2}{k}(50 - 60\Phi_0 + 16\Phi_2 + 8\Phi_0^2)V^4 e^{4i\varphi} = 0, \\ & p_4 = \beta_1 u_4 + m \frac{\partial^2 u_4}{\partial t^2} - \alpha_0 \frac{\partial^2 u_4}{\partial z^2} + [2i(\lambda m\omega - \alpha_0 k + 4\alpha_1 k)(V^* \frac{\partial V}{\partial \xi} - V \frac{\partial V^*}{\partial \xi}) + \Gamma_3 |V|^4] \\ & + [-2\frac{\omega^2}{k^2} + (\beta_1 + 2\beta_2) + 8\alpha_1 k^2]U_3^{(0)} V e^{i\varphi} \\ & + \{2i[(\lambda m\omega + 12\alpha_1 k - \alpha_0 k) + 4\Phi_0(\alpha_0 k - \lambda m\omega)]V \frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{\Gamma_4}{k^2}|V|^2 V^2\}e^{2i\varphi} + \frac{\Gamma_5}{k^2}V^4 e^{4i\varphi}. \end{aligned} \quad (5.126)$$

Γ_3 , Γ_4 ve Γ_5 'in açık ifadeleri EK B(B.3)'de verilmiştir.

(5.126) denkleminin yapısı aşağıdaki formda bir çözüm önermeyi mümkün kılar

$$u_4 = U_4^{(0)} + \left(\sum_{\ell=1}^4 U_4^{(\ell)} \exp(i\ell\varphi) + k.e. \right). \quad (5.127)$$

w_4 ve p_4 için de benzer formlar geçerli olmak üzere bu çözüm önerisi (5.126)'da yerine konursa faz açısının çeşitli kuvvetlerine göre düzenlenmiş aşağıdaki denklem setleri elde edilir

$$\frac{\partial W_2^{(0)}}{\partial \xi} - 2[\lambda(1 + \Phi_1) - 4\frac{\omega}{k}] \frac{\partial}{\partial \xi}|V|^2 = 0, \quad \frac{\partial P_2^{(0)}}{\partial \xi} - \lambda \frac{\partial W_2^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{4\omega^2}{k^2} \frac{\partial}{\partial \xi}|V|^2 = 0,$$

$$P_2^{(0)} = \beta_1 U_2^{(0)} + 2[-2\frac{\omega^2}{k^2} + (\beta_1 + \beta_2) + 4\alpha_1 k^2]|V|^2. \quad (5.128)$$

$$P_4^{(0)} = \beta_1 U_4^{(0)} + \Gamma_3 |V|^4 + 2i(\lambda m\omega - \alpha_0 k + 4\alpha_1 k)(V^* \frac{\partial V}{\partial \xi} - V \frac{\partial V^*}{\partial \xi}). \quad (5.129)$$

$$2i\omega U_4^{(1)} - ikW_4^{(1)} - 2i(\omega U_3^{(0)} + kW_3^{(0)})V = 0, \quad i\omega W_4^{(1)} - ikP_4^{(1)} - 2i\omega W_3^{(0)}V = 0,$$

$$P_4^{(1)} = 2\frac{\omega^2}{k^2}U_4^{(1)} + [-2\frac{\omega^2}{k^2} + (\beta_1 + 2\beta_2) + 8\alpha_1 k^2]U_3^{(0)}V. \quad (5.130)$$

$$4i\omega U_4^{(2)} - 2ikW_4^{(2)} + (6 - 4\Phi_0)(\lambda - \frac{\omega}{k})V\frac{\partial V}{\partial \xi} - 4ik\Phi_0 W_2^{(0)}V^2$$

$$+ i[\omega(-52 + 24\Phi_0 + 12\Phi_1 - 4\Phi_0\Phi_1 - 12\Phi_2) + 12\lambda k(1 + \Phi_1)]|V|^2V^2 = 0,$$

$$2i\omega W_4^{(2)} - 2ikP_4^{(2)} + \frac{\omega}{k}(\lambda - \frac{\omega}{k})(14 - 4\Phi_0)V\frac{\partial V}{\partial \xi}$$

$$+ i[\frac{\omega^2}{k}(-80 + 48\Phi_0 + 8\Phi_1 - 8\Phi_2) + 16\lambda\omega(1 + \Phi_1)]|V|^2V^2 - 2i\omega(2\Phi_0 - 3)W_2^{(0)}V^2 = 0,$$

$$P_4^{(2)} = (8\frac{\omega^2}{k^2} - 3\beta_1)U_4^{(2)} + 2i[(\lambda m\omega + 12\alpha_1 k - \alpha_0 k) + 4\Phi_0(\alpha_0 k - \lambda m\omega)]V\frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{\Gamma_4}{k^2}|V|^2V^2. \quad (5.131)$$

$$2\omega U_4^{(3)} - kW_4^{(3)} = 0, \quad \omega W_4^{(3)} - kP_4^{(3)} = 0, \quad P_4^{(3)} = (18\frac{\omega^2}{k^2} - 8\beta_1)U_4^{(3)}. \quad (5.132)$$

$$8\omega U_4^{(4)} - 4kW_4^{(4)} + 4\omega(-5 + 12\Phi_0 - 6\Phi_2 - 3\Phi_0^2)V^4 = 0,$$

$$4\omega W_4^{(4)} - 4kP_4^{(4)} - \frac{\omega^2}{k}(50 - 60\Phi_0 + 16\Phi_2 + 8\Phi_0^2)V^4 = 0,$$

$$P_4^{(4)} = (32\frac{\omega^2}{k^2} - 15\beta_1)U_4^{(4)} + \frac{\Gamma_5}{k^2}V^4. \quad (5.133)$$

(5.128) ifadelerinin çözümlerinden $U_2^{(0)}$ ve $W_2^{(0)}$ ifadelerinin (5.99)'daki gibi olduğu gösterilebilir. Buradan elde edilen $W_2^{(0)}$ çözümünün (5.123)'teki ile karşılaştırılmasından

$$2\omega(2 + mk^2)\mu_2|V|^2 = 0 \quad (5.134)$$

bulunur. μ_2 katsayısının sıfır olması nedeniyle, bu denklem kendiliğinden sağlanır. (5.128) denklem setinin çözümünden, $U_4^{(1)}$ fonksiyonunun keyfi olduğu

ve dolayısıyla sıfır alınabildiği görülür. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler elde edilir

$$W_4^{(1)} = -\left(\frac{2\omega}{k}U_3^{(0)} + 2W_3^{(0)}\right)U, \quad P_4^{(1)} = -2\left(\frac{\omega^2}{k^2}U_3^{(0)} + 2\frac{\omega}{k}W_3^{(0)}\right)V, \\ [-2\omega^2 + (\beta_1 + 2\beta_2)k^2 + 8\alpha_1k^4]U_3^{(0)} + 4\omega kW_3^{(0)} = 0. \quad (5.135)$$

Benzer şekilde (5.131), (5.132) ve (5.133) denklem setlerinin çözümünden aşağıdaki sonuçlar elde edilir

$$U_4^{(2)} = \Phi_3|V|^2V^2 + id_0V\frac{\partial V}{\partial \xi}, \quad W_4^{(2)} = a_0|V|^2V^2 + id_1V\frac{\partial V}{\partial \xi}, \quad (5.136)$$

$$U_4^{(3)} = W_4^{(3)} = P_4^{(3)} = 0. \quad (5.137)$$

$$U_4^{(4)} = \Phi_4V^4, \quad W_4^{(4)} = a_1V^4, \quad (5.138)$$

$\Phi_3, \Phi_4; a_0, a_1;$ ve d_0, d_1 katsayılarının açık ifadeleri sırasıyla EK B(B.2), EK B(B.6), EK B(B.9)'da verilmiştir.

O (ϵ^5) mertebeden denklemlerin çözümü:

Önceki çözüm aşamalarına benzer biçimde, elde edilen tüm çözüm ifadeleri (5.106) denklemlerinde kullanılır ve elde edilen diferansiyel denklemlerin yapısı göz önünde bulundurulursa $O(\epsilon^5)$ mertebe denklemlerin çözümü için aşağıdaki formda çözüm önermenin mümkün olduğu görülür

$$u_5 = U_5^{(0)} + \sum_{\ell=1}^5 U_5^{(\ell)} \exp(i\ell\varphi) + k.e.). \quad (5.139)$$

w_5 ve p_5 için de benzer formlar geçerli olmak üzere bu çözüm önerisi (5.106) denklemlerinde yerine konursa aşağıdaki denklem seti elde edilir

$$\frac{\partial W_3^{(0)}}{\partial \xi} - 2\lambda \frac{\partial U_3^{(0)}}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial P_3^{(0)}}{\partial \xi} - \lambda \frac{\partial W_3^{(0)}}{\partial \xi} = 0, \quad P_3^{(0)} = \beta_1 U_3^{(0)}. \quad (5.140) \\ -2\omega U_5^{(1)} + kW_5^{(1)} + 2i\frac{\partial V}{\partial \tau} - \frac{2}{k}\left(\lambda - \frac{\omega}{k}\right)\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + ic_1|V|^2\frac{\partial V}{\partial \xi} \\ + ic_2V\frac{\partial |V|^2}{\partial \xi} + c_3|V|^4V + 2\omega U_4^{(0)}V + 2kW_4^{(0)}V = 0,$$

$$\begin{aligned}
& -\omega W_5^{(1)} + kP_5^{(1)} + 2i\frac{\omega}{k}\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{2}{k}(\lambda - \frac{\omega}{k})(\lambda - 2\frac{\omega}{k})\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + ic_4|V|^2\frac{\partial V}{\partial \xi} \\
& + ic_5V\frac{\partial |V|^2}{\partial \xi} + c_6|V|^4V + 2\omega W_4^{(0)}V = 0, \\
& P_5^{(1)} = 2im\omega\frac{\partial V}{\partial \tau} + (m\lambda^2 - \alpha_0)\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + i\frac{c_7}{k^2}|V|^2\frac{\partial V}{\partial \xi} + i\frac{c_8}{k^2}V\frac{\partial |V|^2}{\partial \xi} \\
& + \frac{\Gamma_6}{k^2}|V|^4V + 2\beta_2U_4^{(0)}V, \tag{5.141}
\end{aligned}$$

Γ_6 ve $c_1 - c_8$ katsayılarının açık ifadeleri sırasıyla EK B(B.3) ve EK B(B.8)'de verilmiştir. (5.140) denklem setinin çözümünden $U_3^{(0)} = W_3^{(0)} = P_3^{(0)} = 0$ bulunur. $U_5^{(1)}, W_5^{(1)}$ ve $P_5^{(1)}$ fonksiyonlarının (5.141) denklemleri arasından elimine edilmesiyle aşağıdaki denklem elde edilir

$$\begin{aligned}
& 2i\omega(2 + mk^2)\frac{\partial V}{\partial \tau} + [(m\lambda^2 - \alpha_0)k^2 + 2(\lambda - \frac{\omega}{k})(\lambda - 3\frac{\omega}{k})]\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} \\
& + i(\omega c_1 + kc_4 + c_7)|V|^2\frac{\partial V}{\partial \xi} + i(\omega c_2 + kc_5 + c_8)V\frac{\partial |V|^2}{\partial \xi} \\
& + (\omega c_3 + kc_6 + \Gamma_6)|V|^4V + 2(\beta_2k^2 + \omega^2)U_4^{(0)}V + 4\omega k W_4^{(0)}V = 0 \tag{5.142}
\end{aligned}$$

(5.142) denklemi kullanılarak aşağıdaki özdeşlik elde edilebilir

$$\begin{aligned}
& 2\omega(2 + mk^2)[\frac{\partial |V|^2}{\partial \tau} - i\mu_1\frac{\partial}{\partial \xi}(V^*\frac{\partial V}{\partial \xi} - V\frac{\partial V^*}{\partial \xi})] \\
& + \frac{1}{2}[\omega(c_1 + 2c_2) + k(c_4 + 2c_5) + (c_7 + 2c_8)]\frac{\partial}{\partial \xi}|V|^4 = 0, \tag{5.143}
\end{aligned}$$

Çözümün tamamlanabilmesi için $U_4^{(0)}$ ve $W_4^{(0)}$ fonksiyonlarını belirlemek gerekmektedir; bunun için $O(\epsilon^6)$ merteye denklemlere başvurmak zorunluluğu vardır. Bu fonksiyonları sıfırıncı moddan elde etmek mümkündür. Daha önce elde edilmiş olan tüm çözüm ifadeleri (5.107)'de yerine konursa aşağıdaki eşitliklere ulaşılır

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial W_4^{(0)}}{\partial \xi} - 2\lambda\frac{\partial U_4^{(0)}}{\partial \xi} + ib_0\frac{\partial}{\partial \xi}(V^*\frac{\partial V}{\partial \xi} - V\frac{\partial V^*}{\partial \xi}) + b_1\frac{\partial}{\partial \xi}|V|^4 = 0, \\
& \frac{\partial P_4^{(0)}}{\partial \xi} - \lambda\frac{\partial W_4^{(0)}}{\partial \xi} + ib_2\frac{\partial}{\partial \xi}(V^*\frac{\partial V}{\partial \xi} - V\frac{\partial V^*}{\partial \xi}) + b_3\frac{\partial}{\partial \xi}|V|^4 = 0,
\end{aligned}$$

$$P_4^{(0)} = \beta_1 U_4^{(0)} + \Gamma_3 |V|^4 + ib_4 (V^* \frac{\partial V}{\partial \xi} - V \frac{\partial V^*}{\partial \xi}). \quad (5.144)$$

$b_0 - b_4$ katsayılarının açık ifadeleri EK B(B.7)'de verilmiştir. (5.144)
denklemlerinin çözümünden aşağıdaki sonuçlara ulaşılır

$$U_4^{(0)} = i \left(\frac{\lambda b_0 + b_2 + b_4}{2\lambda^2 - \beta_1} \right) (V^* \frac{\partial V}{\partial \xi} - V \frac{\partial V^*}{\partial \xi}) + \left(\frac{\lambda b_1 + b_3 + \Gamma_3}{2\lambda^2 - \beta_1} \right) |V|^4,$$

$$W_4^{(0)} = 2\lambda U_4^{(0)} - ib_0 (V^* \frac{\partial V}{\partial \xi} - V \frac{\partial V^*}{\partial \xi}) - b_1 |V|^4. \quad (5.145)$$

(5.145) ile verilen çözüm ifadeleri (5.141) denklemlerinde kullanılır ve elde edilen denklemler arasından $U_5^{(1)}$, $W_5^{(1)}$ ve $P_5^{(1)}$ elimine edilirse, aşağıda verilen genelleştirilmiş nonlinear Schrödinger denkleminde (GNLS) ulaşılır

$$i \frac{\partial V}{\partial \tau} + \mu_1 \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + i\mu_3 |V|^2 \frac{\partial V}{\partial \xi} + i\mu_4 V \frac{\partial |V|^2}{\partial \xi} + \mu_5 |V|^4 V = 0. \quad (5.146)$$

μ_3 , μ_4 ve μ_5 katsayılarının açık ifadeleri EK B(B.4)'de verilmiştir.

Genelleştirilmiş nonlinear Schrödinger denklemi, marjinal halde, dispersif ortamlarda yayılan monokromatik düzlem dalgaların self modülasyonunu tanımlayan denklem olarak pek çok araştırma alanında ortaya çıkar. GNLS denklemi gravitasyonel su dalgaları için Kakutani ve Michihiro [53] tarafından elde edilmiştir.

Bazı özel durumlarda GNLS denkleminde bilinen bazı evölüsyon denklemlerine ulaşmak mümkündür. Örneğin, (5.146) denkleminde $\mu_3 = \mu_4$ ve $\mu_5 = 0$ alındığında aşağıdaki denklem elde edilir.

$$i \frac{\partial V}{\partial \tau} + \mu_1 \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + i\mu_3 \frac{\partial}{\partial \xi} (|V|^2 V) = 0. \quad (5.147)$$

Bu denklem, plazmada Alfven dalgalarının yayılımını yöneten türev (derivative) nonlinear Schrödinger denklemi olarak bilinir.

$\mu_4 = \mu_5 = 0$, olduğunda ise aşağıda verilen Benjamin-Ono denkleminde ulaşılır

$$i \frac{\partial V}{\partial \tau} + \mu_1 \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + i\mu_3 |V|^2 \frac{\partial V}{\partial \xi} = 0. \quad (5.148)$$

GNLS denkleminin integre edilebilirliği, Painlevé analizi kullanılarak Clarkson ve Cosgrove [56] tarafından incelenmiş ve denklemin Painlevé özelliğine sahip olduğu gösterilmiştir.

5.3.4 GNLS Denkleminin Bazı Kesin Çözümleri

Pathria ve Morris [57]'deki yapıya benzer biçimde (5.146) denkleminde yalnız dalga çözümü arayalım. Eğer zamana ilişkin değişken olan τ , $T = \mu_1 \tau$ olarak tekrar tanımlanacak olursa, (5.146) denklemi aşağıdaki denkleme dönüşür

$$i \frac{\partial V}{\partial T} + \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + i q_1 |V|^2 \frac{\partial V}{\partial \xi} + i q_2 V \frac{\partial |V|^2}{\partial \xi} + q_3 |V|^4 V = 0. \quad (5.149)$$

Burada $q_n (n = 1, 2, 3) = \mu_{n+2}/\mu_1$ formundadır. Şimdi de (5.149) denkleminde aşağıdaki formda çözüm önerilsin

$$V(\xi, T) = f(\zeta) \exp\{i[g(\xi, T) + h(\xi, T)]\}. \quad (5.150)$$

$\zeta = \xi - cT$ ve $g(\xi, T)$ ile $h(\xi, T)$ ise aşağıdaki gibi tanımlanmış bazı reel fonksiyonlardır

$$g(\xi, T) = c(\xi - bT)/2 + d, \quad h(\xi, T) = 2\delta \int f^2(\zeta) d\zeta. \quad (5.151)$$

Burada b, c ve d bazı keyfi sabitlerdir ve δ ise $\delta = -(q_1 + 2q_2)/8$ olarak tanımlanmıştır. f fonksiyonu aşağıdaki denklemi sağlar

$$\psi'^2 = -\frac{4}{3} \bar{q}_3 \psi^4 + c \bar{q}_1 \psi^3 - (2bc - c^2) \psi^2. \quad (5.152)$$

Burada üs (') argümana göre türevi göstermektedir. ψ fonksiyonu ve $\bar{q}_1$ ve $\bar{q}_3$ katsayıları ise aşağıdaki gibi tanımlanmışlardır

$$\psi = f^2, \quad \bar{q}_1 = q_1, \quad \bar{q}_3 = q_3 + 4\delta^2 + 2\delta q_2 - \delta q_1. \quad (5.153)$$

(5.152) denkleminin sol yanı sıfırlanarak elde edilen polinomun köklerinin reel olması için aşağıdaki şart sağlanmalıdır

$$1 + \frac{16\bar{q}_3}{3\bar{q}_1^2} \left(1 - \frac{2b}{c}\right) > 0. \quad (5.154)$$

$\bar{q}_1$ ve $\bar{q}_3$ katsayıları $\mu\Sigma$ şekil değiştirme enerjisi yoğunluğu fonksiyonuna ve k dalga sayısına bağlıdır. Demiray [51] tarafından önerilen biyolojik malzeme modeli için $\bar{q}_3$ 'nin hem pozitif hem de negatif değerler alabildiği gözlenmiştir ancak $\bar{q}_1$ 'nin değeri her zaman negatiftir. b ve c keyfi sabitler olduğuna göre, (5.154) koşulu her zaman sağlanır.

(i) Eğer $\bar{q}_3 < 0$ ise, (5.152) denkleminin çözümünden, (5.146) ile verilen GNLS denkleminin yalnız dalga çözümü aşağıdaki formda elde edilir

$$f(\xi, T) = \left[\frac{\psi_1 \psi_2}{\psi_1 + (\psi_1 - \psi_2) \sinh^2 \chi} \right]^{1/2},$$

$$h(\xi, T) = 2\delta\left(\frac{-3}{\bar{q}_3}\right)^{1/2} \operatorname{arctanh}\left[\left(\frac{\psi_2}{\psi_1}\right)^{1/2} \tanh \chi\right], \quad \chi = \left(\frac{-\psi_1\psi_2\bar{q}_3}{3}\right)^{1/2}(\xi - cT) + e \quad (5.155)$$

Burada ψ_1 ve ψ_2 , (5.152) denkleminin sol yanının sıfıra eşitlenmesiyle elde edilen dördüncü derece polinomun pozitif köklerini ifade etmektedir ve e keyfi bir sabittir.

(ii) Eğer $\bar{q}_3 > 0$ ise ve ψ_1, ψ_2 (5.152) ile verilen denklemin pozitif kökleri ise aşağıdaki yalnız dalga çözümü elde edilir

$$f(\xi, T) = \left[\frac{\psi_1\psi_2}{\psi_1 + (\psi_2 - \psi_1)\cos^2 \chi}\right]^{1/2}$$

$$h(\xi, T) = 2\delta\left(\frac{3}{\bar{q}_3}\right)^{1/2} \arctan\left[\left(\frac{\psi_1}{\psi_2}\right)^{1/2} \tan \chi\right], \quad \chi = \left(\frac{\psi_1\psi_2\bar{q}_3}{3}\right)(\xi - cT) + e. \quad (5.156)$$

(iii) Eğer $\bar{q}_3 > 0$ ise ve ψ_1 pozitif bir kök, ψ_2 ise negatif bir kök ise yalnız dalga çözümü aşağıdaki formda verilebilir

$$f(\xi, T) = \left[\frac{\psi_1\psi_2}{\psi_2 + (\psi_2 - \psi_1)\sin^2 \chi}\right]^{1/2},$$

$$h(\xi, T) = 2\delta\left(\frac{3}{\bar{q}_3}\right)^{1/2} \operatorname{arctan}\left[\left(\frac{-\psi_1}{\psi_2}\right)^{1/2} \tanh \chi\right],$$

$$\chi = \left(\frac{-\psi_1\psi_2\bar{q}_3}{3}\right)^{1/2}(\xi - cT) + e. \quad (5.157)$$

Burada $\bar{q}_3$ 'nin hem negatif hem de pozitif değerleri için GNLS denkleminin yalnız dalga çözümlerinin bulunduğuna dikkat çekmek uygundur. GNLS denkleminin farklı çözüm formları için [58] ve [59] numaralı kaynaklara başvurulabilir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, içi sıkışmaz bir akışkan ile dolu değişken yarıçaplı, ince elastik tüplerde nonlinear dalga yayılımı problemi incelenmiştir.

Öncelikle konu ile ilgili geçmişte yapılan çalışmalardan kısaca söz edilmiş ve bu çalışmalarda tüp yarıçapının değişmez olarak kabul edildiği oysa fiziksel koşullar incelendiğinde, büyük damarların yarıçapının değişken olduğu gerçeğinin göz ardı edildiği ortaya konmuştur. Problemin incelenmesinde kullanılacak olan pertürbasyon yöntemlerinin kısaca özetlenmesinden sonra, içerisinde sıkışmaz bir akışkan ile dolu, yarıçapı değişken, ince elastik bir tüpte nonlinear dalga yayılımı probleminde kullanılacak olan alan denklemleri elde edilmiştir. İndirgeyici pertürbasyon yöntemi kullanılarak problem, uzun dalga yaklaşımı altında, viskoz veya viskoz olmayan akışkan halleri için ayrı ayrı incelenmiş, pertürbasyon ve viskozite parametrelerinin çeşitli mertebelerine göre, yönetici denklem olarak değişken katsayılı Korteweg-de Vries, değişken katsayılı Korteweg-de Vries-Burgers ve değişken katsayılı pertürbe Korteweg-de Vries denklemleri elde edilmiştir. Elde edilen bu evolüsyon denklemlerine ilerleyen dalga çözümleri sunulmuş ve her bir durum için dalga hızlarının ifadeleri elde edilmiştir. Elde edilen bu hız ifadelerinin incelenmesi ile aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır:

- (i) Yarıçapı genişleyen tüplerde, ilerleyen dalğanın hızının, orijinden uzaklaştıkça azaldığı görülmüştür.
- (ii) Yarıçapı daralan tüplerde, ilerleyen dalğanın hızının orijinden uzaklaştıkça arttığı görülmüştür.

Çalışmanın son bölümünde, ilk olarak, içi viskoz olmayan akışkanla dolu, yarıçapı değişken ince elastik tüplerde nonlinear dalga modülasyonu problemi incelenmiş ve yönetici denklem olarak değişken katsayılı nonlinear Schrödinger denklemi elde edilmiştir. Daha sonra bu değişken katsayılı denkleme ilerleyen dalga çözümleri sunulmuş ve ilerleyen dalga ile zarf dalğanın hız ifadeleri elde edilmiştir. Bu hız ifadelerinin çeşitli parametrelere göre grafiklerinin çizilmesi sonucu aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

- (i) Yarıçapı genişleyen tüplerde, ilerleyen dalğanın ve zarf dalğanın hızının

orijinden uzaklaştıkça arttığı görülmüştür.

(ii) Yarıçapı daralan tüplerde ise, ilerleyen dalganın ve zarf dalganın hızının orijinden uzaklaştıkça azaldığı görülmüştür.

(iii) ξ koordinatının farklı değerleri için, ilerleyen dalganın hızının değişimi karakterini korumaktadır.

Bu bölümde ikinci olarak, içi viskoz olmayan akışkanla dolu ince elastik tüplerde, marjinal halde nonlinear dalga modülasyonu problemi incelenmiş ve yönetici denklem olarak, pertürbasyon parametresinin iki farklı değeri için sırasıyla nonlinear Schrödinger ve genelleştirilmiş nonlinear Schrödinger denklemi elde edilmiştir. Çalışmanın bu kısmında, işlemleri çok karmaşık hale getireceğinden dolayı tüp yarıçapının sabit kabul edildiği hal ele alınmıştır. Daha sonra elde edilen genelleştirilmiş nonlinear Schrödinger denkleminin bazı kesin çözümleri verilmiştir.

Bu çalışmada incelenen problemlerde damar bir mambran gibi işleme sokulmuştur ancak mambran denklemleri kalınlığın ortalama yarıçapa oranının $1/20$ 'den daha küçük olduğu durumlarda geçerlidir. Biyolojik uygulamalar göz önüne alındığında, bu oranın $1/6$ ve $1/4$ arasında olduğu gerçeği, incelenen problemde mambran denklemlerinin geçerli olmadığını ortaya koyar. Gerçekçi bir yaklaşım, damarın kalın tüp olarak kabul edilmesini ve işlemlerin buna göre düzenlenmesini gerektirir. Ayrıca, deneysel çalışmalar, damarların viskoelastik ve anizotrop yapıda olduğunu göstermektedir. Daha gerçekçi bir modelleme için, bu verilerin de göz önünde bulundurulması gerekir. Bunlara ek olarak, çeşitli fizyolojik koşullar nedeniyle, damarlarda oluşabilecek madde birikimlerinin (lipid vb.) de hesaplara dahil edilmesi, geleceğe yönelik bir araştırma konusu olarak ortaya çıkmaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] **Young, T.**, 1809. On the function of the heart and arteries, The Croonian Lecture, *Phil.Trans.Roy.*, **99**, 1-31
- [2] **Witzig, K.**, 1914. Über erzwungene wellenbewegungen zaher inkompressibler Flüssigkeiten in elastischen rohren, Inaugural Dissertation, University of Bern.
- [3] **Morgan, G.W. and Kiely, J. P.**, 1958. Wave propagation in viscous fluid contained in a flexible tube, *J.Acoust.Soc.Am.* , **26**, 326-338.
- [4] **Womersley, J.R.**, 1955. Oscilatory motion of a viscous liquid in a thin walled elastic tube-I : The linear approximation for long waves, *Phil. Mag.*, **46** , 199-219.
- [5] **Lambossy, P.**, 1951. Aperçu historique sur le problem de la propagation des ondes dans un liquide compressible enferme dans un tube élastique, *Helv. Pyhsical Acta* **9**, 145-161.
- [6] **Atabek, H.B. and Lew, H.S.**, 1966. Wave propagation through a viscous incompressible fluid contained in an initially stressed elastic tube, *J.Biophys.*, **6** , 481-503.
- [7] **Atabek, H.B.**, 1968. Wave propagation through a viscous fluid contained in an initially stressed elastic tube, *Biophys. J.*, **8**, 626-649.
- [8] **Mirsky, I.**, 1967. Wave propagation in a viscous fluid contained in an orthotropic elastic tube, *Biophys. J.*, **7**, 165-186.
- [9] **Cox, R.H.** , 1968. Wave propagation through a Newtonian fluid contained within a thin walled viscoelastic tube, *J.Biomech.*,**8**, 691-709.
- [10] **Cox, R.H.** , 1969. Wave propagation through a Newtonian fluid contained within a thin walled viscoelastic tube : The influence of wall compressibility, *J.Biomech.*, 270-291.
- [11] **Rubinov, S.I. and Keller, J.B.**, 1971. Wave propagation in a fluid filled tube, *J. Acoust. Soc. Am.*, **50**, 198-223.

- [12] **Rubinov, S.I. and Keller, J.B.**, 1978. Wave propagation in a viscoelastic tube containing a viscous fluid, *J. Fluid. Mech.*, **88**, 181-203.
- [13] **Rachev, A.I.**, 1980. Effects of transmural pressure and muscular activity on pulse waves in arteries, *J. Biomech. Engng.*, ASME, **102**, 119-123.
- [14] **Moodie, T.B., Barclay, D.W. and Tait, R.J.**, 1983. A boundary problem for fluid filled viscoelastic tube, *Math. Modelling*, **4**, 145-207.
- [15] **Sawatzky, R.P. and Moodie, T.B.**, 1988. On the propagation of pressure pulses through a viscous fluid contained in a viscoelastic tube, *Q. J. Mech. Appl. Math.*, **41**, 33-50.
- [16] **Rudinger, G.**, 1966. Review of current mathematical methods for the analysis of blood flow , *Biomedical Fluid Mechanics Symposium* , ASME, New York, 1-33.
- [17] **Skalak, R.**, 1966. Wave propagation in blood flow. In : *Biomechanics Symposium* (Edited by Y. C. Fung), 20-46, ASME.
- [18] **Attinger E. O.**, 1968. Analysis of pulsatile blood flow, *In Advances in Biomedical Engineering and Medical Physics*, (Edited by S. N. Levine) 1-59, Interscience, New York.
- [19] **McDonald, D. A.**, 1960. *Blood Flow in Arteries*, The Williams and Wilkins Co., Baltimore Md.
- [20] **Fung, Y. C.**, 1984. *Biodynamics : Circulation*, Springer Verlag, New York.
- [21] **Demiray, H., Erbay, H. A. and Erbay, S.**, 1987. Effects of prestress on pulse waves in arteries, *ZAMM*, **67**, 473-485.
- [22] **Ling, S.C. and Atabek H.B.**, 1972. A nonlinear analysis of pulsatile flow in arteries. *J. Fluid Mech.*, **55**, 493-511.
- [23] **Lamb, G.L.**, 1980. *Elements of Soliton Theory*. Wiley, New York.
- [24] **Engelbrecht, J.**, 1987. On KdV soliton splitting. *Wave Motion*, **9**, 127-132.
- [25] **Engelbrecht, J.**, 1994. Waves in blood vessels and the KdV approximation, Research Report (Mech 107/94), Estonian Academy of Sciences, Tallinn.
- [26] **Caro, C.G., Pedley, T.J., Schroter, R.C. and Seed, W.A.**, 1978. *The Mechanics of the Circulation*, Oxford, Oxford University Press.

- [27] **Lambert J.W.**, 1958. On the nonlinearities of fluid flow in nonrigid tubes, *J. Franklin Inst.*, **266**, 83.
- [28] **Anliker, M., Histand, M.B. and Ogden, E.**, 1968. Dispersion and attenuation of small artificial pressure waves in the canine aorta, *Circ. Res.*, **23**, 539-551.
- [29] **Anliker, M., Rockwell, R.L. and Ogden, E.**, 1971. Nonlinear analysis of flow pulses and shock waves in arteries. Part I : Derivation and properties of mathematical model, *ZAMP*, **22**, 217-246.
- [30] **Rudinger, G.**, 1970. Shock waves in mathematical models of the aorta, *J. Appl. Mech.*, **37**, 34-37.
- [31] **Hoogstraten, H.W. and Smith, C.H.**, 1978. A mathematical theory of shock-wave formation in arterial blood flow, *Acta Mechanica*, **30**, 145-155.
- [32] **Tait, R.J. and Moodie, T.B.**, 1984. Waves in nonlinear fluid filled tubes, *Wave Motion*, **6**, 197-203.
- [33] **Hashizume Y.**, 1985. Nonlinear pressure waves in a fluid-filled elastic tube, *J. Phys. Soc. Japan*, **54**, 3305-3312.
- [34] **Yomosa, S.**, 1987. Solitary waves in large blood vessels, *J. Phys.Soc. Japan*, **56**, 506-520.
- [35] **Ravindran, R. and Prasad, P.**, 1979. A mathematical analysis of nonlinear waves in a fluid-filled visco-elastic tube, *Acta Mechanica*, **31**, 253-280.
- [36] **Swaters, G. and Sawatzky, R.P.**, 1989. Viscoelastic modulation of solitary pressure pulses in nonlinear fluid-filled distensible tubes, *Q. J. Mech. Appl. Math.*, **42**, 213-228.
- [37] **Johnson, R.S.**, 1970. A nonlinear equation incorporating damping and dispersion, *J. Fluid Mechanics* , **42**, 49-60.
- [38] **Cowley, S.J.**, 1983. On the wave trains associated with elastic jumps on fluid-filled elastic tube, *Q. J. Mech. Appl. Math.*, **36**, 289-312.
- [39] **Mainardi, F. and Buggish, H.**, 1982. On nonlinear waves in liquid filled elastic tubes, *Nonlinear Deformation Waves* , IUTAM Symposium Tallinn.
- [40] **Hashizume, Y.**, 1988. Nonlinear pressure wave propagation in arteries, *J. Phys. Soc. Japan*, **57**, 4160-4168.
- [41] **Demiray, H.**, 1996. Solitary waves in prestressed elastic tubes, *Bull. Math. Biology* , **58** , 939-955.
- [42] **Demiray, H.**, 1998. Slowly varying solitary waves in an elastic tube filled

with a viscous fluid, *ARI*, **51**, 98-102.

- [43] **Demiray, H. and Antar, N.**, 1997. Nonlinear waves in an inviscid fluid contained in a prestressed viscoelastic thin tube, *ZAMP*, **48**, 325-340.
- [44] **Demiray, H.**, 1996. A quasi-linear viscoelastic constitutive relation for arterial wall materials, *J. Biomechanics*, **29**, 1011-1014.
- [45] **Akgün, G. and Demiray, H.**, 1999. Nonlinear wave modulation in a prestressed viscoelastic thin tube filled with an inviscid fluid, *Int. J. Non-linear Mechanics*, **34**, 571-588.
- [46] **Ravindran, R. and Prasad, P.**, 1979. A mathematical analysis of nonlinear waves in a fluid-filled visco-elastic tube, *Acta Mechanica*, **31**, 253-280.
- [47] **Erbay, H., Erbay, S. and Dost, S.**, 1992. Wave propagation in fluid filled nonlinear viscoelastic tubes, *Acta Mechanica*, **95**, 87-102.
- [48] **Demiray, H.**, 1997., Nonlinear wave modulation in a prestressed thin elastic tube filled with an inviscid fluid, *J. Appl. Math.*, **59**, 165-181.
- [49] **Antar, N. and Demiray, H.**, 1999. Nonlinear wave modulation in a prestressed thin elastic tube, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, **34**, 123-138.
- [50] **Akgün, G. and Demiray, H.**, 2000. Modulation of nonlinear axial and transverse waves in a fluid-filled thin elastic tube, *Int.J. Non-Linear Mechanics*, **35**, 347-353.
- [51] **Demiray, H.**, 1976. Stresses in ventricular wall, *J. Applied Mechanics, ASME*, **98**, 194-197.
- [52] **Erbay, S.**, 1995. Modulation of waves near the marginal state of instability in fluid-filled distensible tubes, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **28**, 2905-2919.
- [53] **Kakutani, T. and Michihiro, K.**, 1983. Marginal state of modulational instability -Note on Benjamin-Feir instability-, *J. Phys. Soc. Japan*, **52**, 4129-4137.
- [54] **Parkes, E.J.**, 1987. The modulation of weakly non-linear waves near the marginal state of instability, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **20**, 2025-2036.
- [55] **Kundu, A.**, 1987. Exact solutions to higher- order nonlinear equations through gauge transformation, *Physica D*, **25**, 399-406.
- [56] **Clarkson, P.A. and Cosgrove, C.M.**, 1987. Painlevé analysis of the

non-linear Schrödinger family of equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **20**, 2003-2024.

- [57] **Pathria, D. and Morris, J.L.**, 1989. Exact solutions for a generalized nonlinear Schrödinger equation, *Physica Scripta*, **39**, 673-679.
- [58] **Florjańczyk, M. and Gagnon, L.**, 1987. Exact solutions to higher-order nonlinear equations through gauge transformation, *Physica D*, **25**, 399-406.
- [59] **Clarkson, P.A.**, 1992. Dimensional reductions and exact solutions of a generalized nonlinear Schrödinger equation, *Nonlinearity*, **5**, 453-472.
- [60] **Kalosakas, G., Maniadis, P. and Tsironis, G.P.**, 1997. Self-trapping and stationary properties of a generalized nonlinear Schrödinger equation dimer, *Physica Scripta*, **55**, 523-527.
- [61] **Christiansen, P.L., Maniadis, P. and Tsironis, G.P.**, 1997. Exact solutions of a generalized nonlinear Schrödinger equation dimer, *Physica Scripta*, **57**, 192-194.
- [62] **Prandtl, L. and Tietjens O.G.**, 1957. Applied Hydro and Aero-mechanics. New York : Dover.
- [63] **Sturrock, P.A.**, 1957. Nonlinear effects in electron plasma, *Proc. R. Soc. London*, **A242**, 277-299 .
- [64] **Sandri, G.**, 1963. The foundations of nonequilibrium statistical mechanics I, II, *Ann. Phys.*, **24**, 332-379, 380-418.
- [65] **Stuart, J.T.**, 1960. On the nonlinear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows, Part 1. The basic behavior in plane Poiseuille flow, *J. Fluid Mech.*, **9**, 353-370.
- [66] **Watson, J.**, 1960. On the nonlinear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows, Part 2. The development of a solution for plane Poiseuille flow and Couette flow, *J. Fluid Mech.*, **9**, 371-389.
- [67] **Hasimoto, H. and Ono, H.** 1972. Nonlinear modulation of gravity waves, *J. Phys. Soc. Japan*, **33**, 805-811.
- [68] **Frieman, E.A.**, 1963. On a new method in the theory of irreversible processes, *J. Math. Phys.*, **4**, 410-418.
- [69] **Nayfeh, A.**, 1965. A perturbation method for treating nonlinear oscillation problems, *J. Math. Phys.*, **44**, 368-374.
- [70] **Kawahara, T.**, 1973. The derivative-expansion method and nonlinear dispersive waves, *J. Phys. Soc. Japan*, **38**, 265-270.

- [71] **Asano, N.**, 1974. Modulation for nonlinear wave in dissipative or unstable media, *J.Phys. Soc. Japan* , **36**, 861-868.
- [72] **Taniuti, T. and Wei, C.C.** , 1968. Reductive perturbation method in nonlinear wave propagation I, *J.Phys. Soc. Japan*, **24**, 941-946 .
- [73] **Taniuti, T. and Washimi, H.**, 1968. Self-trapping and instability of hydromagnetic waves along the magnetic field in a cold plasma, *Phys. Rev. Letters*, **21**, 209-212.
- [74] **Taniuti, T. and Yajima, N.**, 1969. Perturbation method for a nonlinear wave modulation I, *J. Math. Phys.*, **10**,1369-1372.
- [75] **Asano, N. and Taniuti, T.**, 1969. Reductive perturbation method for nonlinear wave propagation in inhomogeneous media I, *J.Phys. Soc. Japan*, **27**, 1059-1062.
- [76] **Jeffrey, A. and Kakutani, T.**, 1972. Weak nonlinear dispersive waves : a discussion centered around the Korteweg-de Vries, *SIAM, Rev.*, **14**, 582-643.
- [77] **Gardner, C.S. and Morikawa, G.K.**, 1960. Similarity in the asymptotic behaviour of collision-free hydromagnetic waves and water waves, *Courant Inst. Math. Sci. Rep.*, NYO-9082, 1-30.
- [78] **Taniuti, T.**, 1974. Reductive perturbation method and far fields of wave equations, *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, **55**, 1-35.
- [79] **Teymur, M. and Şuhubi, E.**, 1978. Wave propagation in dissipative or dispersive non-linear media, *J. Inst. Maths. Applics.*, **21**, 25-40.
- [80] **Johnson, R.S.**, 1972. Some numerical solutions of a variable-coefficient Korteweg-de Vries equation (with applications to solitary wave development on a shelf), *J. Fluid Mech.*, **54**, 81-91.
- [81] **Grimshaw, R.**, 1979. Slowly varying solitary waves. I. Korteweg-de Vries equation, *Proc. Roy. Soc. Lond.*, **A368**, 359-375.
- [82] **Horn, D.A., Redekopp, L.G., Imberger, J. and Ivey, G.N.**, 2000. Internal wave evolution in a space-time varying field, *J. Fluid Mech.*, **424**, 279-301.
- [83] **Dai, H.**, 1999. Exact solutions of a variable coefficient KdV equation arising in a shallow water, *J. Phys. Soc. Japan*, **68**, 1854-1858.
- [84] **Grimshaw, R. and Pudjaprasetya, S.R.**, 1999. Hamiltonian formulation for solitary waves propagating on a variable background, *J. Engn. Math.*, **36**, 89-98.
- [85] **Nirmala, N., Vedan, M.J. and Baby, B.V.**, 1986. Auto-Bäcklund transformation, Lax pairs and Painlevé property of a variable

- coefficient Korteweg-de Vries equation. I., *J. Math. Phys.*, **27**, 2640-2643.
- [86] **Nirmala, N., Vedan, M.J. and Baby, B.V.**, 1986. A variable coefficient Korteweg-de Vries equation: Similarity analysis and exact solution. II., *J. Math. Phys.*, **27**, 2644-2646.
 - [87] **Zhu, Z.**, 1995. On the KdV-type equation with variable coefficients, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **28**, 5673-5684.
 - [88] **Kudryashov, N.A. and Nikitin, V.A.**, 1994. Painlevé analysis, rational and special solutions of a variable coefficient Korteweg-de Vries equation, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **27**, L101-L106.
 - [89] **Olivieri, F.**, 1982. On the similarity solutions of the KdV equation with variable coefficients, *Int. J. Non-Linear Mech.*, **22**, 467-475.
 - [90] **Winternitz, P. and Gazeau, J.P.**, 1992. Allowed transformations and symmetry classes of variable coefficient Korteweg-de Vries equation, *Phys. Letters A*, **167**, 246-250.
 - [91] **Gazeau, J.P. and Winternitz, P.**, 1992. Symmetries of variable coefficient Korteweg-de Vries equations, *J. Math. Phys.*, **33**, 4087-4102.
 - [92] **Dai, H. and Jeffrey, A.**, 1989. The inverse scattering transforms for certain types of variable coefficient KdV equations, *Pyhs. Letters A*, **139**, no:8, 369-372.
 - [93] **Joshi, N.**, 1987. Painlevé property of general variable-coefficient versions of the Korteweg-de Vries and non-linear Schrödinger equations, *Pyhs. Letters A*, **125**, no:9, 456-460.
 - [94] **Chan, W.L. and Zheng Y.**, 1987. Solutions of a nonisospectral and variable coefficient Korteweg-de Vries equation, *Lett. Math. Phys.*, **14**, 293-301.
 - [95] **Malfliet, M. and Wieers, E.**, 1996. Theory of ion-acoustic waves revisited, *J. Plasma Phys.*, **56**, 441-450.
 - [96] **Wadati, M.**, 1983. Stochastic Korteweg-de Vries equation, *J. Phys. Soc. Japan*, **52**, no:8, 2642-2648.
 - [97] **Demiray, H.**, 2002. A note on the solution of perturbed-KdV equation, *Appl. Math. Comp.*, **132**, 643-647.
 - [98] **Demiray, H.**, 1972. On the elasticity of soft biological tissues, *J. Biomechanics*, **5**, 309-311.
 - [99] **Simon, B.R., Kobayashi, A.S., Stradness, D.E. and Wiederhielm, C.A.**, 1972. Re-evaluation of arterial constitutive laws,

Circulation Research, **30**, 491-500.

- [100] **Demiray, H.**, 1976. Large deformation analysis of some basic problems in biophysics, *Bull. Math. Biology*, **38**, 701-711.
- [101] **Karpman, V.I.**, 1975. Non-linear Waves in Dispersive Media, New York, Pergamon Press.
- [102] **Infeld, E. and Rowlands, G.**, 1992. Nonlinear Waves, Solitons and Chaos, Cambridge University Press, Cambridge.
- [103] **Ablowitz, M.J. and Clarkson, P.A.**, 1992. Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering, Cambridge University Press, Cambridge.
- [104] **Jeffrey, A. and Engelbrecht, J.**, 1994. Nonlinear Waves in Solids, Springer Verlag, New York.
- [105] **Engelbrecht, J.**, 1997. Nonlinear Wave Dynamics, Complexity and Simplicity, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [106] **Eringen, C.A.**, 1962. Nonlinear Theory of Continuous Media, McGraw-Hill, New-York.
- [107] **Jeffrey, A. and Kawahara, T.**, 1981. Asymptotic Methods in Nonlinear Wave Theory, Boston: Pitman.
- [108] **Şuhubi, E.**, 1993. Akışkanlar Mekaniği, Fen-Edebiyat Fakültesi, İstanbul.
- [109] **Bona, J.L. and Schonbek, M.E.**, 1985. Travelling wave solutions to Korteweg-de Vries Burgers equation, *Proc. Roy. Soc. Edinburg*, **101A**, 207-226.
- [110] **Jeffrey, A. and Xu, S.**, 1989. Exact solutions to the Korteweg-de Vries Burgers equation, *Wave Motion*, **11**, 559-564.
- [111] **Johnson, R.S.**, 1997. A modern introduction to the mathematical theory of water waves, Cambridge University Press, Cambridge.
- [112] **Debnath, L.**, 1997. Nonlinear partial differential equations, Birkhäuser, Boston.
- [113] **Whitham, G.B.**, 1974. Linear and Nonlinear waves, John Wiley-Sons, New York.
- [114] **Drazin, P.G. and Johnson, R.S.**, 1989. Solitons: an introduction, Cambridge University Press, Cambridge.

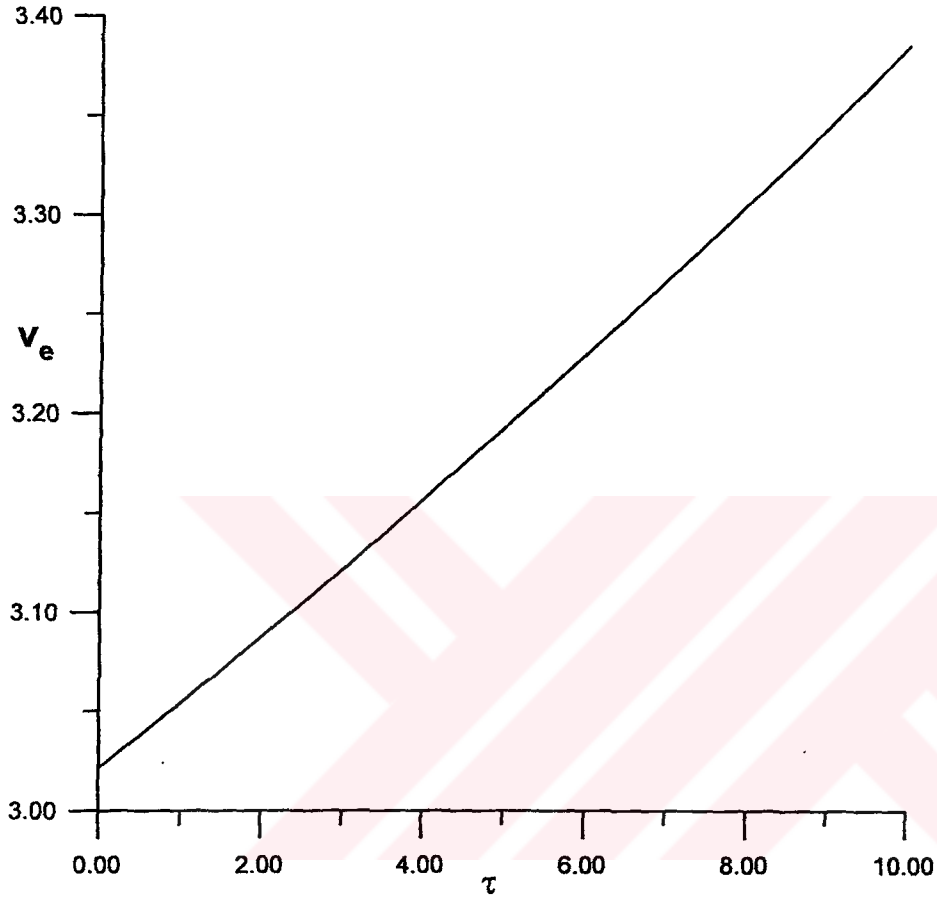
EK A

BÖLÜM 5.2'YE AİT KATSAYILAR

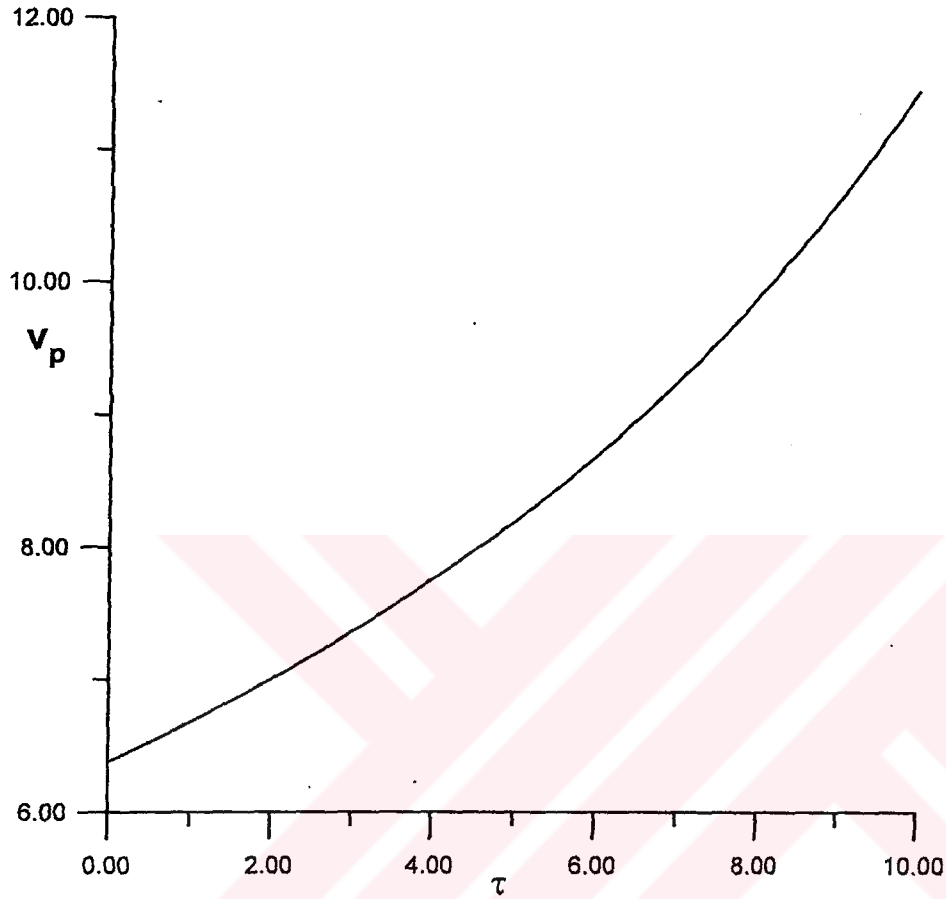
Bu kısımda, (5.42) ile verilen değişken katsayılı NLS denkleminin katsayıları ve (5.67) ile verilen hız ifadelerinin, sırasıyla genişleyen ve daralan tüp için ξ ve τ değişkenlerine göre değişimini ifade eden grafikler verilmiştir.

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \frac{(\frac{\omega}{k} - \lambda)(3\frac{\omega}{k} - \lambda) + \frac{1}{2}(\frac{m}{\lambda_z}k^2\lambda^2 - \alpha_0\lambda_\theta\lambda_zk^2)}{[\alpha_0\lambda_\theta\lambda_zk^3 + 2\omega^2/k]}, \\
\mu_2 &= [\alpha_0\lambda_\theta\lambda_zk^3 + 2\omega^2/k]^{-1} \left\{ -16\frac{\omega^2}{\lambda_\theta^2} + \frac{4\lambda\omega k}{\lambda_\theta^2} + \frac{3}{2}(\lambda_\theta\beta_3 - \beta_2)k^2 \right. \\
&\quad + \lambda_\theta\lambda_z(\alpha_2 - \frac{5}{2}\frac{\alpha_1}{\lambda_\theta})k^4 - \lambda_\theta\lambda_z(\frac{3}{4}\alpha_0 - \frac{3}{2}\gamma_1\lambda_z)k^6 \\
&\quad + [\beta_2\lambda_\theta k^2 + \frac{3}{2}(\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta})k^2 + 3\alpha_1\lambda_\theta\lambda_zk^4] \\
&\quad \times \frac{[3\omega^2/\lambda_\theta + \lambda_\theta\beta_2k^2 + 3\alpha_1\lambda_\theta\lambda_zk^4]}{3[(\lambda_\theta\beta_1 - \beta_0)k^2 - 2\omega^2]} \\
&\quad + [(\lambda_\theta\beta_2 - \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_0}{2\lambda_\theta})k^2 + \alpha_1\lambda_\theta\lambda_zk^4 + \frac{4\lambda\omega k}{\lambda_\theta}] \\
&\quad \times \frac{[-\lambda^2 + \frac{4\lambda\omega}{k} + \lambda_\theta^2\beta_2 + \alpha_1\lambda_\theta^2\lambda_zk^2]}{\lambda_\theta[\lambda^2 - (\lambda_\theta\beta_1 - \beta_0)/2]} \Big\}, \\
\mu_3 &= \left\{ \frac{2(\lambda - \frac{\omega}{k})[\omega + (\omega + 2\lambda k)\Phi_0/\lambda_\theta] + (m\omega\lambda/\lambda_\theta\lambda_z - \alpha_0\lambda_zk + 2\alpha_1\lambda_\theta\lambda_zk)\Phi_0k^2}{[\alpha_0\lambda_\theta\lambda_zk^3 + 2\omega^2/k]} \right\} \frac{A}{\lambda_z}, \\
\mu_4 &= [\alpha_0\lambda_\theta\lambda_zk^3 + 2\omega^2/k]^{-1} \left\{ [\frac{\omega^2}{\lambda_\theta^2} + \frac{3}{2}(\lambda_\theta\beta_3 - \beta_2)k^2 \right. \\
&\quad + (\frac{\beta_1}{\lambda_\theta} - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta^2})k^2 - \lambda_z(\alpha_1 - \frac{\lambda_\theta\alpha_2}{2})k^4] \Phi_0^2 \\
&\quad + [\frac{\omega^2}{\lambda_\theta} - 3\lambda_\theta\beta_2k^2 + \frac{5}{2}(\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta})k^2 - \alpha_1\lambda_\theta\lambda_zk^4] \Phi_0
\end{aligned}$$

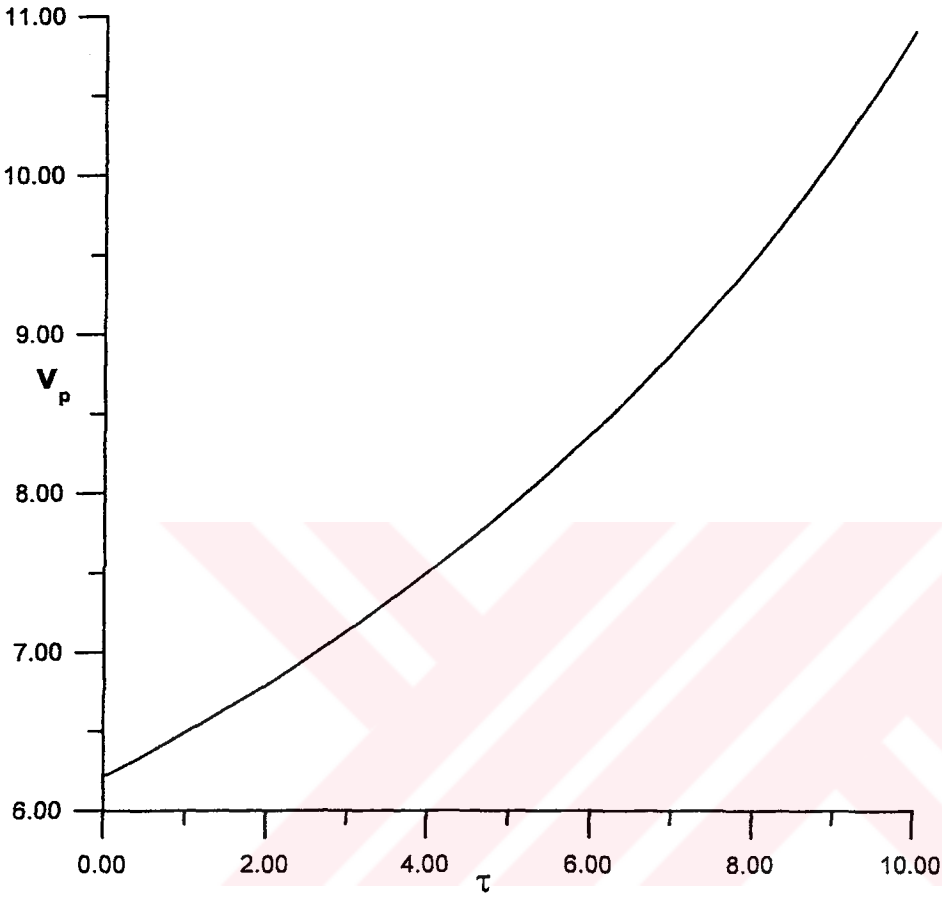
$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{2}(\lambda_\theta \beta_1 - \beta_0)k^2 - [\omega + (\omega + 2\lambda k)\Phi_0/\lambda_\theta]^2 \\
& + [(\lambda_\theta \beta_2 - \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_0}{2\lambda_\theta})k^2 + \alpha_1 \lambda_\theta \lambda_z k^4 + \frac{4\lambda \omega k}{\lambda_\theta}] \\
& \times \frac{[(\lambda_\theta \beta_2 - \beta_1 + \frac{\beta_0}{\lambda_\theta})\Phi_0^2 - 2(\lambda_\theta \beta_1 - \beta_0)\Phi_0 + \lambda_\theta \beta_0]}{\lambda^2 - (\lambda_\theta \beta_1 - \beta_0)/2} \} \frac{A^2}{\lambda_z^2} \\
\mu_5 & = [\alpha_0 \lambda_\theta \lambda_z k^3 + 2\omega^2/k]^{-1} \{ -\frac{4\lambda \omega k}{\lambda_\theta} \Phi_0 \\
& + \frac{[(\lambda_\theta \beta_2 - \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_0}{2\lambda_\theta})k^2 + \alpha_1 \lambda_\theta \lambda_z k^4 + 4\omega \lambda k/\lambda_\theta]}{\lambda^2 - (\lambda_\theta \beta_1 - \beta_0)/2} \times \\
& [(\lambda^2 + \lambda_\theta \frac{\beta_1}{2} - \frac{\beta_0}{2})\Phi_0 - \frac{\beta_0 \lambda_\theta}{2}] \} \frac{A}{\lambda_z}. \tag{A.1}
\end{aligned}$$



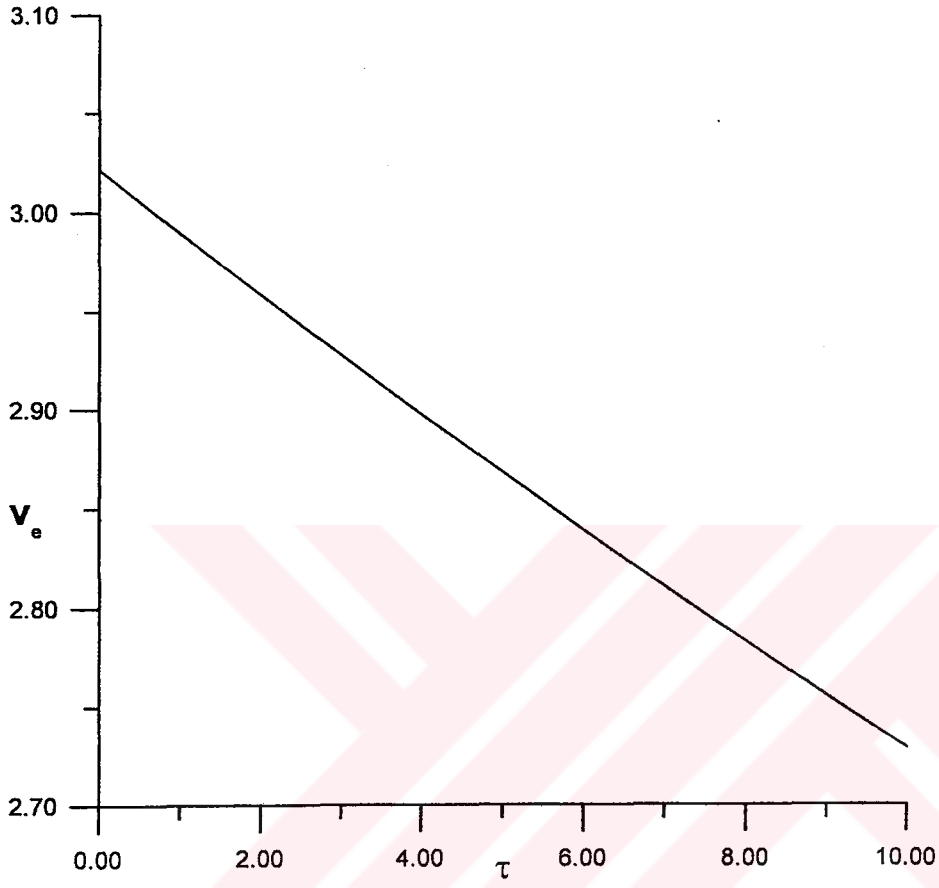
Şekil A.1 Genişleyen tüpte zarf dalga hızı v_e 'nin eksenel koordinat ile değişimi



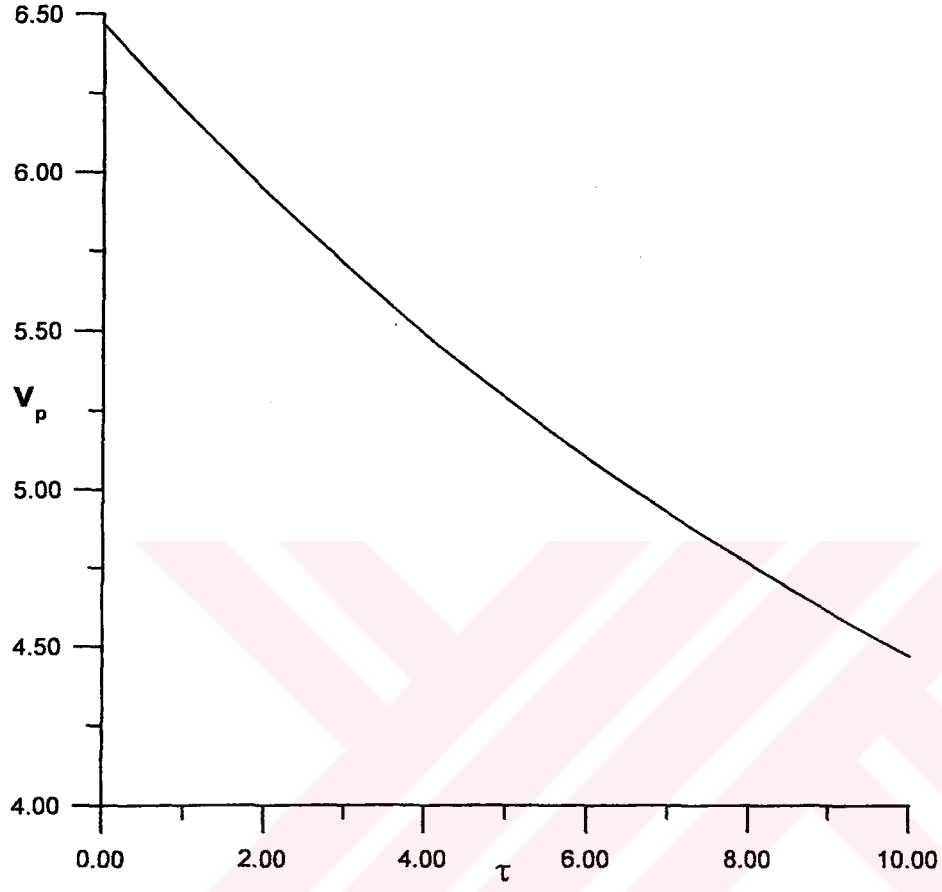
Şekil A.2 Genişleyen tüpte $\xi = 1$ değeri için ilerleyen dalga hızı v_p 'nin aksenal koordinat ile değişimi



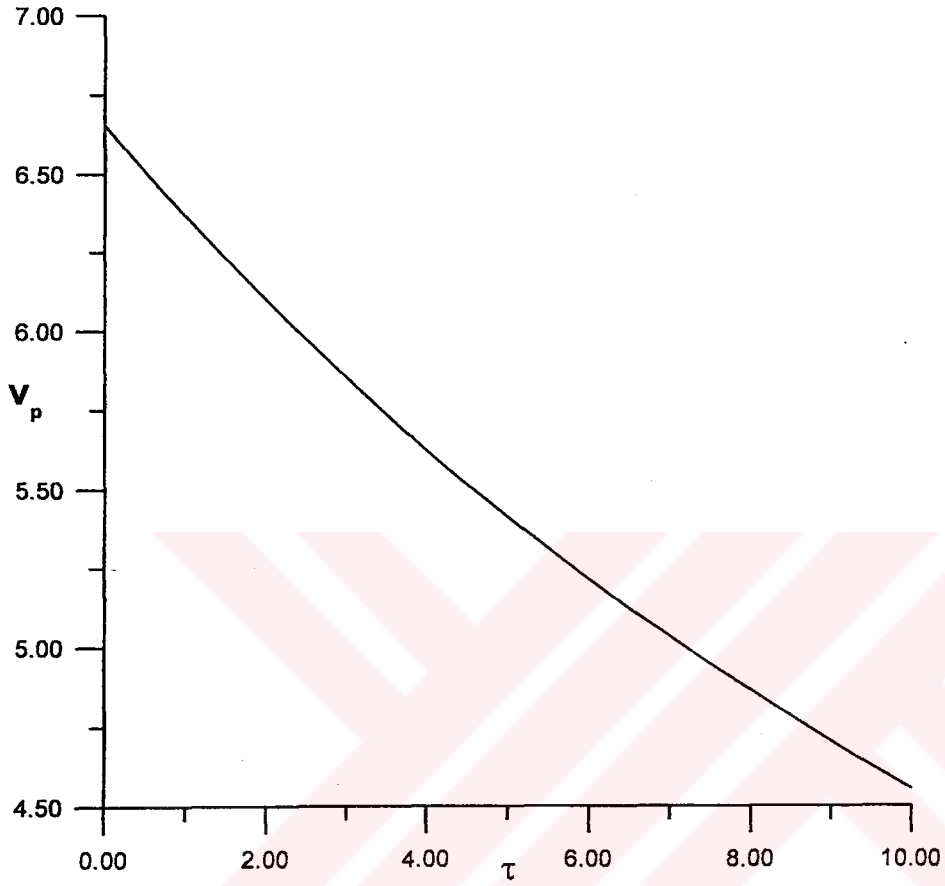
Şekil A.3 Genişleyen tüpte $\xi = 5$ değeri için ilerleyen dalga hızı v_p 'nin aksenal koordinat ile değişimi



Şekil A.4 Daralan tüpte zarf dalga hızı v_e 'nin eksenel koordinat ile değişimi



Şekil A.5 Daralan tüpte $\xi = 1$ değeri için ilerleyen dalga hızı v_p 'nin aksenal koordinat ile değişimi



Şekil A.6 Daralan tüpte $\xi = 5$ değeri için ilerleyen dalga hızı v_p 'nin eksenel koordinat ile değişimi

EK B

BÖLÜM 5.3'E AİT KATSAYILAR

$$L_1(u) = \beta_1 u + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha_0 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$L_2(u) = \beta_2 u^2 - m u \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (\alpha_0 - 8\alpha_1) u \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 4\alpha_1 \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2,$$

$$L_3(u) = \beta_3 u^3 + m u^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (8\alpha_1 - 4\alpha_3 - \alpha_0) u^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$+ 4(\alpha_1 - \alpha_3) u \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\alpha_0 - 12\gamma_1\right) \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$L_4(u) = \beta_4 u^4 - m u^3 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 3(\alpha_1 - \alpha_2) \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^4 + (4\alpha_3 - 4\alpha_1 - 12\alpha_5) u^2 \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

$$+ (4\alpha_3 - 8\alpha_5 - 8\alpha_1 + \alpha_0) u^3 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (12\gamma_1 + 12\alpha_1 - 12\alpha_2 - \frac{3}{2}\alpha_0) u \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$L_5(u) = \beta_5 u^5 + m u^4 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (-\alpha_0 + 8\alpha_1 - 4\alpha_3 + 8\alpha_5 - \alpha_6) u^4 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$+ (4\alpha_1 - 4\alpha_3 + 12\alpha_5 - 2\alpha_6) u^3 \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

$$+ \left(\frac{3}{2}\alpha_0 - 12\alpha_1 + 12\alpha_2 + 6\alpha_3 - 6\alpha_4 - 12\gamma_1\right) u^2 \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$+ 3(-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4) u \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^4 + \left(-\frac{15}{8}\alpha_0 - 5\gamma_2 + 15\gamma_1\right) \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^4 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Burada α_i , β_i ve γ_i katsayıları aşağıdaki gibi tanımlanmıştır

$$\alpha_0 = \frac{\partial \Sigma}{\partial \Lambda_z} \Big|_{u=0}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{8} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \Lambda_\theta \partial \Lambda_z} \Big|_{u=0}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{8} \frac{\partial^3 \Sigma}{\partial \Lambda_\theta \partial \Lambda_z^2} \Big|_{u=0},$$

$$\begin{aligned}
\alpha_3 &= \frac{1}{8} \frac{\partial^3 \Sigma}{\partial \Lambda_\theta^2 \partial \Lambda_z} \Big|_{u=0}, \quad \alpha_4 = \frac{1}{8} \frac{\partial^4 \Sigma}{\partial \Lambda_\theta^2 \partial \Lambda_z^2}, \quad \alpha_5 = \frac{1}{48} \frac{\partial^4 \Sigma}{\partial \Lambda_\theta^3 \partial \Lambda_z} \Big|_{u=0}, \\
\beta_1 &= \left(\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \Lambda_\theta^2} - \frac{\partial \Sigma}{\partial \Lambda_\theta} \right) \Big|_{u=0}, \quad \beta_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \Sigma}{\partial \Lambda_\theta^3} \Big|_{u=0} - \beta_1, \\
\beta_3 &= \frac{1}{6} \frac{\partial^4 \Sigma}{\partial \Lambda_\theta^4} \Big|_{u=0} - \beta_2, \quad \beta_4 = \frac{1}{24} \frac{\partial^5 \Sigma}{\partial \Lambda_\theta^5} \Big|_{u=0} - \beta_3, \quad \gamma_1 = \frac{1}{8} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \Lambda_z^2} \Big|_{u=0}. \quad (B.1)
\end{aligned}$$

$$\Phi_0 = [3\omega^2 + (\beta_1 + \beta_2)k^2 + 12\alpha_1 k^4] / [3(\beta_1 k^2 - 2\omega^2)],$$

$$\Phi_1 = [\lambda(4\omega/k - \lambda) + \beta_1 + \beta_2 + 4\alpha_1 k^2] / (\lambda^2 - \beta_1/2),$$

$$\Phi_2 = \frac{\Gamma_2 + 10\omega^2(\Phi_0 - 1)}{8(\beta_1 k^2 - 2\omega^2)},$$

$$\begin{aligned}
\Phi_3 &= [3(\beta_1 k^2 - 2\omega^2)]^{-1} [\Gamma_4 + \omega^2(90 - 68\Phi_0 - 10\Phi_1 + 10\Phi_2 + 2\Phi_0\Phi_1) \\
&\quad + 4\lambda\omega k(1 + \Phi_1)(2\Phi_0 - 5)],
\end{aligned}$$

$$\Phi_4 = [15(\beta_1 k^2 - 2\omega^2)]^{-1} [\Gamma_5 + \omega^2(\frac{35}{2} - 27\Phi_0 + 10\Phi_2 + 5\Phi_0^2)]. \quad (B.2)$$

$$\Gamma_1 = [-2\omega^2 + (\beta_1 + 2\beta_2)k^2 + 8\alpha_1 k^4]\Phi_1 + [-10\omega^2 + (5\beta_1 + 2\beta_2)k^2 + 24\alpha_1 k^4]\Phi_0$$

$$+ [6\omega^2 + 3(\beta_3 - \beta_1)k^2 + (-20\alpha_1 + 8\alpha_3)k^4 + (-\frac{3}{2}\alpha_0 + 12\gamma_1)k^6],$$

$$\Gamma_2 = [-10\omega^2 + (5\beta_1 + 2\beta_2)k^2 + 56\alpha_1 k^4]\Phi_0$$

$$+ 2\omega^2 + (\beta_3 - \beta_1)k^2 + (-12\alpha_1 + 8\alpha_3)k^4 + (\frac{3}{2}\alpha_0 - 12\gamma_1)k^6,$$

$$\Gamma_3 = \beta_2 \Phi_1^2 + [-16\frac{\omega^2}{k^2} + 2(\beta_2 + 4\beta_1) + 32\alpha_1 k^2]\Phi_0^2$$

$$2[12\frac{\omega^2}{k^2} + (3\beta_3 - 6\beta_1) - 36\alpha_1 k^2 + 12\alpha_3 k^2]\Phi_0$$

$$\begin{aligned}
& + [8\frac{\omega^2}{k^2} + (6\beta_3 - 4\beta_1) - 24\alpha_1k^2 + 8\alpha_3k^2]\Phi_1 \\
& + [-12\frac{\omega^2}{k^2} + 6(\beta_1 + \beta_4) + 40\alpha_1k^2 - 16\alpha_3k^2 + 24\alpha_5k^2 \\
& + 3(\alpha_0 - 2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 8\gamma_1)k^4],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_4 = & [-20\omega^2 + 2(5\beta_1 + \beta_2)k^2 + 56\alpha_1k^4]\Phi_2 + [-8\omega^2 + 2(2\beta_1 + \beta_2)k^2 + 32\alpha_1k^4]\Phi_0\Phi_1 \\
& + [4\omega^2 + (3\beta_3 - 2\beta_1)k^2 + (-20\alpha_1 + 12\alpha_3)k^4]\Phi_1 \\
& + [24\omega^2 + 6(\beta_3 - 2\beta_1)k^2 + (-88\alpha_1 + 40\alpha_3)k^4 + (-12\alpha_0 + 96\gamma_1)k^6]\Phi_0 \\
& + [-8\omega^2 + 4(\beta_1 + \beta_4)k^2 + (32\alpha_1 - 16\alpha_3 + 32\alpha_5)k^4 + (-12\alpha_1 + 12\alpha_2)k^6],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_5 = & [-8\omega^2 + (4\beta_1 + \beta_2)k^2 + 48\alpha_1k^4]\Phi_0^2 + [-20\omega^2 + 2(5\beta_1 + \beta_2)k^2 + 104\alpha_1k^4]\Phi_2 \\
& + [12\omega^2 + 3(\beta_3 - 2\beta_1)k^2 + (-68\alpha_1 + 44\alpha_3)k^4 + (12\alpha_0 - 96\gamma_1)k^6]\Phi_0 \\
& + [-2\omega^2 + (\beta_1 + \beta_4)k^2 + (12\alpha_1 - 8\alpha_3 + 20\alpha_5)k^4 + (-\frac{3}{2}\alpha_0 + 15\alpha_1 - 15\alpha_2 + 12\gamma_1)k^6],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_6 = & [-10\omega^2 + (2\beta_2 + 5\beta_1)k^2 + 24\alpha_1k^4]\Phi_3 + [-26\omega^2 + (2\beta_2 + 13\beta_1)k^2 + 56\alpha_1k^4]\Phi_0\Phi_2 \\
& + [2\omega^2 + (3\beta_3 - \beta_1)k^2 - 8\alpha_1k^4 + 4\alpha_3k^4]\Phi_1^2 + [36\omega^2 + 6(\beta_3 - 3\beta_1)k^2 - 112\alpha_1k^4 \\
& + 40\alpha_3k^4 - 12\alpha_0k^6 + 96\gamma_1k^6]\Phi_0^2 + [20\omega^2 + (6\beta_3 - 10\beta_1)k^2 - 64\alpha_1k^4 + 16\alpha_3k^4]\Phi_0\Phi_1 \\
& + [22\omega^2 + (3\beta_3 - 11\beta_1)k^2 - 68\alpha_1k^4 + 24\alpha_3k^4 + (\frac{9}{2}\alpha_0 - 36\gamma_1)k^6]\Phi_2 \\
& + [-56\omega^2 + (16\beta_4 + 28\beta_1)k^2 + (192\alpha_1 - 80\alpha_3 + 128\alpha_5)k^4 + (12\alpha_0 - 48\alpha_1 + 96\alpha_2 \\
& - 48\alpha_4 - 96\gamma_1)k^6]\Phi_0 + [-18\omega^2 + (12\beta_4 + 9\beta_1)k^2 + 64\alpha_1k^4 - 28\alpha_3k^4 + 48\alpha_5k^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{3}{2} \alpha_0 - 12\alpha_1 + 12\alpha_2 - 12\gamma_1 \right) k^6 \Phi_1 + [20\omega^2 + 10(\beta_5 - \beta_1)k^2 + (-72\alpha_1 + 32\alpha_3 \\
& - 56\alpha_5 + 6\alpha_6)k^4 + (-3\alpha_0 + 18\alpha_1 - 18\alpha_2 - 6\alpha_3 + 6\alpha_4 + 24\gamma_1)k^6 \\
& + \left(\frac{15}{4} \alpha_0 + 10\gamma_2 - 30\gamma_1 \right) k^8].
\end{aligned} \tag{B.3}$$

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \frac{[(m\lambda^2 - \alpha_0)k^2 + 2(\lambda - \frac{\omega}{k})(\lambda - 3\frac{\omega}{k})]}{2\omega(2 + mk^2)}, \\
\mu_2 &= \frac{[2\omega^2(-19 + 5\Phi_0 + \Phi_1) + 8\lambda\omega k(1 + \Phi_1) + \Gamma_1]}{2\omega(2 + mk^2)}, \\
\mu_3 &= \frac{1}{2\omega(2 + mk^2)} \left\{ \omega c_1 + kc_4 + c_7 - 8\omega kb_0 \right. \\
& \quad \left. + \frac{(\lambda b_0 + b_2 + b_4)}{(2\lambda^2 - \beta_1)} [4(\beta_2 k^2 + \omega^2) + 16\lambda\omega k] \right\}, \\
\mu_4 &= \frac{1}{2\omega(2 + mk^2)} \left\{ \omega c_2 + kc_5 + c_8 + 4\omega kb_0 \right. \\
& \quad \left. - \frac{(\lambda b_0 + b_2 + b_4)}{(2\lambda^2 - \beta_1)} [2(\beta_2 k^2 + \omega^2) + 8\lambda\omega k] \right\}, \\
\mu_5 &= \frac{1}{2\omega(2 + mk^2)} \left\{ \omega c_3 + kc_6 + c_9 - 4\omega kb_1 \right. \\
& \quad \left. + \frac{(\lambda b_1 + b_3 + \Gamma_3)}{(2\lambda^2 - \beta_1)} [2(\beta_2 k^2 + \omega^2) + 8\lambda\omega k] \right\}.
\end{aligned} \tag{B.4}$$

$$\begin{aligned}
p_3 &= \beta_1 u_3 + m \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - \alpha_0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} - 2\lambda m \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi \partial t} - 2\alpha_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi \partial z} + 2\beta_2 u_1 u_2 - m(u_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + u_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}) \\
& + (\alpha_0 - 8\alpha_1)(u_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + u_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - 8\alpha_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{\partial u_2}{\partial z} + \beta_3 u_1^3 + m u_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \\
& + (8\alpha_1 - 4\alpha_3 - \alpha_0) u_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + 4(\alpha_1 - \alpha_3) u_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{3}{2} \alpha_0 - 12\gamma_1 \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_4 = & \beta_1 u_4 + m \frac{\partial^2 u_4}{\partial t^2} - \alpha_0 \frac{\partial^2 u_4}{\partial z^2} - 2\lambda m \frac{\partial^2 u_2}{\partial t \partial \xi} - 2\alpha_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial z \partial \xi} + \beta_2 (u_2^2 + 2u_1 u_3) \\
& - m(u_1 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + u_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + u_3 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}) + (\alpha_0 - 8\alpha_1)(u_1 \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} + u_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + u_3 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}) \\
& + 2\lambda m u_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi \partial t} + 2(\alpha_0 - 8\alpha_1) u_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z \partial \xi} - 4\alpha_1 [(\frac{\partial u_2}{\partial z})^2 + 2\frac{\partial u_1}{\partial z}(\frac{\partial u_3}{\partial z} + \frac{\partial u_1}{\partial \xi})] \\
& + 3\beta_3 u_1^2 u_2 + m(u_1^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + 2u_1 u_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}) + (8\alpha_1 - 4\alpha_3 - \alpha_0)(u_1^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + 2u_1 u_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}) \\
& + 4(\alpha_1 - \alpha_3)[u_2(\frac{\partial u_1}{\partial z})^2 + 2u_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{\partial u_2}{\partial z}] + (\frac{3}{2}\alpha_0 - 12\gamma_1)[\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}(\frac{\partial u_1}{\partial z})^2 + 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{\partial u_2}{\partial z}] \\
& + \beta_4 u_1^4 - m u_1^3 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + 3(\alpha_1 - \alpha_2)(\frac{\partial u_1}{\partial z})^4 + (4\alpha_3 - 4\alpha_1 - 12\alpha_5) u_1^2 (\frac{\partial u_1}{\partial z})^2 \\
& + (4\alpha_3 - 8\alpha_5 - 8\alpha_1 + \alpha_0) u_1^3 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + (12\gamma_1 + 12\alpha_1 - 12\alpha_2 - \frac{3}{2}\alpha_0) u_1 (\frac{\partial u_1}{\partial z})^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_5 = & \beta_1 u_5 + m \frac{\partial^2 u_5}{\partial t^2} - \alpha_0 \frac{\partial^2 u_5}{\partial z^2} - 2\lambda m \frac{\partial^2 u_3}{\partial t \partial \xi} + m(\lambda^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial t \partial \tau}) - 2\alpha_0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial z \partial \xi} \\
& - \alpha_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} + 2\beta_2 (u_1 u_4 + u_2 u_3) - m(u_1 \frac{\partial^2 u_4}{\partial t^2} + u_2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + u_3 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + u_4 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}) \\
& + 2\lambda m(u_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi \partial t} + u_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi \partial t}) + (\alpha_0 - 8\alpha_1)(u_1 \frac{\partial^2 u_4}{\partial z^2} + u_2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} + u_3 \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + u_4 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}) \\
& + 2(\alpha_0 - 8\alpha_1)(u_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi \partial z} + u_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi \partial z}) - 8\alpha_1 [\frac{\partial u_1}{\partial z}(\frac{\partial u_4}{\partial z} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi}) + \frac{\partial u_2}{\partial z}(\frac{\partial u_3}{\partial z} + \frac{\partial u_1}{\partial \xi})] \\
& + 3\beta_3 (u_1 u_2^2 + u_1^2 u_3) + m[(u_2^2 + 2u_1 u_3) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + 2u_1 u_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + u_1^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - 2\lambda u_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi \partial t}] \\
& + (8\alpha_1 - 4\alpha_3 - \alpha_0)[(u_2^2 + 2u_1 u_3) \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + 2u_1 u_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + u_1^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} + 2u_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi \partial z}] \\
& + 4(\alpha_1 - \alpha_3)[2u_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{\partial u_3}{\partial z} + 2u_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + u_1 (\frac{\partial u_2}{\partial z})^2 + 2u_2 \frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{\partial u_2}{\partial z} + u_3 (\frac{\partial u_1}{\partial z})^2] \\
& + (\frac{3}{2}\alpha_0 - 12\gamma_1)[(\frac{\partial u_1}{\partial z})^2(\frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial z \partial \xi}) + 2\frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{\partial u_2}{\partial z} \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}(\frac{\partial u_2}{\partial z})^2 \\
& + 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{\partial u_3}{\partial z} + 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{\partial u_1}{\partial \xi}] + 4\beta_4 u_1^3 u_2 - m(u_1^3 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + 3u_1^2 u_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (4\alpha_1 - 4\alpha_3 + 12\alpha_5 - 2\alpha_6)u_1^3\left(\frac{\partial u_1}{\partial z}\right)^2 + (4\alpha_3 - 8\alpha_5 - 8\alpha_1 + \alpha_0)\left(u_1^3\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}\right. \\
& + 3u_1^2u_2\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}) + 12(\alpha_1 - \alpha_4)\left(\frac{\partial u_1}{\partial z}\right)^3\frac{\partial u_2}{\partial z} + 2(4\alpha_3 - 4\alpha_1 - 12\alpha_5)\left[u_1^2\frac{\partial u_1}{\partial z}\frac{\partial u_2}{\partial z}\right. \\
& + u_1u_2\left(\frac{\partial u_1}{\partial z}\right)^2] + (12\gamma_1 + 12\alpha_1 - 12\alpha_2 - \frac{3}{2}\alpha_0)\left[2u_1\frac{\partial u_1}{\partial z}\frac{\partial u_2}{\partial z}\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial z}\right)^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}u_2\right. \\
& + u_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial z}\right)^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}] + \beta_5u_1^5 + mu_1^4\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + (-\alpha_0 + 8\alpha_1 - 4\alpha_3 + 8\alpha_5 - \alpha_6)u_1^4\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \\
& + \left(\frac{3}{2}\alpha_0 - 12\alpha_1 + 12\alpha_2 + 6\alpha_3 - 6\alpha_4 - 12\gamma_1\right)u_1^2\left(\frac{\partial u_1}{\partial z}\right)^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \\
& + 3(-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4)u_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial z}\right)^4 + \left(-\frac{15}{8}\alpha_0 - 5\gamma_2 + 15\gamma_1\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial z}\right)^4\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \quad (B.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_0 &= 2\frac{\omega}{k}\Phi_3 + \frac{\omega}{k}(-10 + 12\Phi_0 + 6\Phi_1 - 2\Phi_0\Phi_1 - 6\Phi_2) + 2\lambda(1 + \Phi_1), \\
a_1 &= \frac{\omega}{k}(-5 + 12\Phi_0 - 6\Phi_2 - 3\Phi_0^2 + 2\Phi_4). \quad (B.6)
\end{aligned}$$

$$b_0 = \frac{4}{k}\left(\lambda - \frac{\omega}{k}\right) + 2\mu_1(1 + \Phi_1),$$

$$b_1 = \frac{\omega}{k}(42 - 24\Phi_0 - 16\Phi_1 + 8\Phi_0^2) + \lambda(-12 - 8\Phi_1 - 2\Phi_0^2 + 3\Phi_1^2)$$

$$- \frac{(1 + \Phi_1)}{2\omega(2 + mk^2)}[\omega(c_1 + 2c_2) + k(c_4 + 2c_5) + (c_7 + 2c_8)]$$

$$b_2 = \frac{4\omega}{k^2}\left(\lambda - \frac{\omega}{k}\right) + 2\left[\lambda(1 + \Phi_1) - \frac{4\omega}{k}\right]\mu_1,$$

$$b_3 = \left\{2\left[\lambda(1 + \Phi_1) - \frac{4\omega}{k}\right]^2 + \frac{\omega^2}{k^2}(73 - 36\Phi_0 - 8\Phi_1 + 4\Phi_0^2)\right.$$

$$\left. - 16\frac{\omega}{k}\lambda(1 + \Phi_1)\right\}$$

$$- \frac{[\lambda(1 + \Phi_1) - \frac{4\omega}{k}][\omega(c_1 + 2c_2) + k(c_4 + 2c_5) + (c_7 + 2c_8)]}{2\omega(2 + mk^2)},$$

$$b_4 = 2(\lambda m\omega - \alpha_0 k + 4\alpha_1 k). \quad (B.7)$$

$$c_1 = 2[(3\Phi_0 + \Phi_1)(\lambda - \frac{\omega}{k}) + 3\omega d_0], \quad c_2 = -2(1 + 3\Phi_0 + \Phi_1)(\lambda - \frac{\omega}{k}),$$

$$c_3 = 2[\omega(22\Phi_0 + 8\Phi_1 - 6\Phi_2 - 6\Phi_0^2 - 6\Phi_0\Phi_1 - \Phi_1^2 + 3\Phi_0\Phi_2 + 3\Phi_3)$$

$$- 4\lambda k(1 + \Phi_1)(\Phi_1 + 3\Phi_0)],$$

$$c_4 = 2[\frac{\omega^2}{k^2}(19 - 5\Phi_0 - \Phi_1) + \omega d_1 + \lambda \frac{\omega}{k}(-23 + 5\Phi_0 - 3\Phi_1) + 4\lambda^2(1 + \Phi_1)],$$

$$c_5 = 2[\frac{\omega^2}{k^2}(5 - \Phi_0 - \Phi_1) + \lambda \frac{\omega}{k}(-3 + \Phi_0 + 3\Phi_1) + 2\lambda^2(1 + \Phi_1)],$$

$$c_6 = [2\frac{\omega}{k}\Phi_0 - 11\frac{\omega}{k} + 2\lambda(1 + \Phi_1)][\omega(16 - 6\Phi_0 - 2\Phi_1) - 4\lambda k]$$

$$+ 2\frac{\omega^2}{k}(2 - 3\phi_0 + \Phi_2)(2\Phi_0 - 3) + 2\omega a_0,$$

$$c_7 = [-10\omega^2 + (5\beta_1 + 2\beta_2)k^2 + 24\alpha_1 k^4]d_1$$

$$+ 2(\lambda m\omega - \alpha_0 k)(3\Phi_0 + \Phi_1)k^2$$

$$+ 16\alpha_1(\Phi_0 + \Phi_1)k^3 + 8(\alpha_1 - \alpha_3)k^3 - 6(\alpha_0 - 8\gamma_1)k^5,$$

$$c_8 = 8\alpha_1\Phi_1 k^3 + 2(\lambda m\omega - \alpha_0 k + 16\alpha_1 k)\Phi_0 k^2 - 8(\alpha_1 - \alpha_3)k^3. \quad (B.8)$$

$$d_0 = [3(\beta_1 k^2 - 2\omega^2)]^{-1}[(\lambda m\omega + 12\alpha_1 k - \alpha_0 k)k^2$$

$$+ 4\Phi_0(\alpha_0 k - \lambda m\omega)k^2 + \omega(5 - 2\Phi_0)(\lambda - \frac{\omega}{k})],$$

$$d_1 = 2\frac{\omega}{k}d_0 - \frac{1}{k}(3 - 2\Phi_0)(\lambda - \frac{\omega}{k}). \quad (B.9)$$

ÖZGEÇMİŞ

İlkay Bakırtaş 1972 yılında İzmit'te doğdu. 1989 yılında İstanbul Özel Şişli Terakki Lisesinden ve 1994 yılında İTÜ Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Mühendisliği programından mezun oldu. 1994-1997 yılları arasında, İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Mühendislik Bilimleri Bölümünde yüksek lisans yaptı. 1998 yılında aynı bölümde doktora eğitimine başladı. 1997 yılından bu yana İTÜ Fen Edebiyat Fakültesi, Mühendislik Bilimleri Bölümünde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.

