

**T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
GEOMETRİ BİLİM DALI**

**3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA YÜZEY ÜZERİNDEKİ D_o -DARBOUX SLANT
HELİSLER, D_r - DARBOUX SLANT HELİSLER ve D_n -DARBOUX SLANT
HELİSLER**

Akın ALKAN

Danışman: Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT



MANİSA-2024

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını, tamamen kendi çalışmam olduğunu, her alıntıya kaynak gösterdiğimi, tezin yazımında akademik ve etik kurallara aykırı herhangi bir yapay zeka ve program kullanmadığımı beyan ederim.

Akın ALKAN

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER	I
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	III
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	IV
TEŞEKKÜR.....	VI
ÖZET.....	VII
ABSTRACT.....	IX
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	3
2.1. Eğriler İçin Temel Kavramlar	3
2.2. Yüzeyler İçin Temel Kavramlar.....	6
3. YÜZEY ÜZERİNDE D_o -DARBOUX SLANT HELİSLER	13
3.1. Yüzey Eğrileri İçin Oskülatör Darboux Çatısı	13
3.2. D_o -Darboux Slant Helisin Eksen ve Karakterizasyonları	21
3.3. D_o -Darboux Slant Helislerin OD-Çatısına Göre Diferansiyel Denklem Karakterizasyonları	26
3.4. Yüzey Üzerinde D_o -Darboux Slant Helisin Elde Edilmesi	34
3.4.1. Parametrik Formda Verilen Yüzey Üzerinde D_o -Darboux Slant Helisin Elde Edilmesi	34
3.4.2. Kapalı Formda Verilen Yüzey Üzerinde D_o -Darboux Slant Helisin Elde Edilmesi	45
3.5. D_o -Darboux Slant Helis Örnekleri	51
4. YÜZEY ÜZERİNDE D_r -DARBOUX SLANT HELİSLER	59
4.1. Yüzey Eğrileri İçin Rektifiyan Darboux Çatısı.....	59
4.2. D_r -Darboux Slant Helisin Eksen ve Karakterizasyonları	67
4.3. D_r -Darboux Slant Helislerin RD-Çatısına Göre Diferansiyel Denklem Karakterizasyonları	73
4.4. Yüzey Üzerinde D_r -Darboux Slant Helisin Elde Edilmesi	80
4.4.1. Parametrik Formda Verilen Yüzey Üzerinde D_r -Darboux Slant Helisin Elde Edilmesi	80
4.4.2. Kapalı Formda Verilen Yüzey Üzerinde D_r -Darboux Slant Helisin Elde Edilmesi	86
4.5. D_r -Darboux Slant Helis Örnekleri	90
5. YÜZEY ÜZERİNDE D_n -DARBOUX SLANT HELİSLER	97
5.1. Yüzey Eğrileri İçin Normal Darboux Çatısı.....	97
5.2. D_n -Darboux Slant Helisin Eksen ve Karakterizasyonları	105
5.3. D_n -Darboux Slant Helislerin ND-Çatısına Göre Diferansiyel Denklem Karakterizasyonları	110
5.4. Yüzey Üzerinde D_n -Darboux Slant Helisin Elde Edilmesi	117
5.4.1. Parametrik Formda Verilen Yüzey Üzerinde D_n -Darboux Slant Helisin Elde Edilmesi	117

5.4.2. Kapalı Formda Verilen Yüzey Üzerinde D_n -Darboux Slant Helisin	
Elde Edilmesi	125
5.5. D_n -Darboux Slant Helis Örnekleri	131
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	139
KAYNAKLAR	140



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\{\vec{T}, \vec{V}, \vec{U}\}$	Eğri-yüzey ikilisinin Darboux çatısı
τ_g	Eğri-yüzey ikilisinin geodezik burulması
k_g	Eğri-yüzey ikilisinin geodezik eğriliği
k_n	Eğri-yüzey ikilisinin normal eğriliği
$\vec{D}_n$	Normal Darboux birim vektörü
δ_n	Normal Darboux çatısının birinci eğriliği
μ_n	Normal Darboux çatısının ikinci eğriliği
$\vec{D}_o$	Oskülatör Darboux birim vektörü
δ_o	Oskülatör Darboux çatısının birinci eğriliği
μ_o	Oskülatör Darboux çatısının ikinci eğriliği
IR	Reel sayılar kümesi
$\vec{D}_r$	Rektifiyan Darboux birim vektörü
δ_r	Rektifiyan Darboux çatısının birinci eğriliği
μ_r	Rektifiyan Darboux çatısının ikinci eğriliği
E^3	3-Boyutlu Öklid uzayı
$\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$	3-Boyutlu Öklid uzayında eğrinin Frenet çatısı
$\langle , \rangle$	3-Boyutlu Öklid uzayında iç çarpım
$\ , \ $	3-Boyutlu Öklid uzayında norm
$\times$	3-Boyutlu Öklid uzayında vektörel çarpım
S	3-Boyutlu Öklid uzayında yüzey
$\{\vec{D}_n, \vec{T}, \vec{Y}_n\}$	Yüzey üzerinde normal Darboux çatısı
$\{\vec{D}_o, \vec{U}, \vec{Y}_o\}$	Yüzey üzerinde oskülatör Darboux çatısı
$\{\vec{D}_r, \vec{V}, \vec{Y}_r\}$	Yüzey üzerinde rektifiyan Darboux çatısı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 3.5.1. $X(u, v) = (u, u \sin v, u \cos v)$ yüzeyi üzerinde

$\alpha(s) = \left(\frac{s}{2}, \frac{s}{2} \sin \left(\sqrt{2} \ln \frac{s}{2} \right), \frac{s}{2} \cos \left(\sqrt{2} \ln \frac{s}{2} \right) \right)$ denklemli D_o -Darboux slant helis..... 54

Şekil 3.5.2. $X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$ yüzeyi üzerinde

normal eğriliği $k_n = \frac{1}{\sqrt{2}s}$, geodezik burulması $\tau_g = \frac{1}{\sqrt{2}s}$ olan

ve $d_o = (0, 0, 1)$ doğrultusu ile $\theta = \frac{\pi}{4}$ açısı yapan

D_o -Darboux slant helis..... 56

Şekil 3.5.3. $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ yüzeyi üzerinde normal eğriliği

$k_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ve geodezik burulması $\tau_g = \frac{1}{2}$ olan ve $d_o = (0, 0, 1)$

doğrultusu ile $\theta = \frac{\pi}{3}$ açısı yapan D_o -Darboux slant helis..... 58

Şekil 4.5.1. $X(u, v) = (v, \sin u, \cos u)$ yüzeyi üzerinde

$\gamma(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \cos \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$ denklemli D_r -Darboux slant helis..... 92

Şekil 4.5.2. $X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$ yüzeyi üzerinde

geodezik eğriliği $k_g = \frac{1}{\sqrt{2}s}$, geodezik burulması $\tau_g = \frac{1}{\sqrt{3}s}$ olan

ve $d_r = (0, 0, 1)$ doğrultusu ile $\cos \omega = \frac{5}{\sqrt{30}}$ olacak şekilde

ω açısı yapan D_r -Darboux slant helis..... 94

Şekil 4.5.3. $f(x, y, z) = y^2 + z^2 - 1 = 0$ yüzeyi üzerinde

geodezik eğriliği $k_g = 0$, geodezik burulması $\tau_g = -\frac{1}{2}$ olan ve

$d_r = (0, 0, 1)$ doğrultusu ile $\omega = \frac{\pi}{4}$ açısı yapan

D_r -Darboux slant helis..... 96

Şekil 5.5.1. $X(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{u}{3\sqrt{2}} \cos(\sqrt{2} \ln u) + \frac{u}{3} \sin(\sqrt{2} \ln u) + \frac{v}{\sqrt{2}} \cos(\sqrt{2} \ln u), \\ \frac{u}{3\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2} \ln u) - \frac{u}{3} \cos(\sqrt{2} \ln u) + \frac{v}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2} \ln u), \\ \frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

yüzeyi üzerinde $\beta(s) = \begin{pmatrix} \frac{s}{3\sqrt{2}} \cos(\sqrt{2} \ln s) + \frac{s}{3} \sin(\sqrt{2} \ln s), \\ \frac{s}{3\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2} \ln s) - \frac{s}{3} \cos(\sqrt{2} \ln s), \frac{s}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

denklemleri D_n -Darboux slant helis..... 133

Şekil 5.5.2. $X(s, t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s + \cos t, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s + \sin t, \frac{s}{\sqrt{2}} + 1 \right)$

yüzeyi üzerindeki $\beta(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s + 1, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, \frac{s}{\sqrt{2}} + 1 \right)$

denklemleri D_n -Darboux slant helis..... 135

Şekil 5.5.3. $X(u, v) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos u, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin u, \frac{u}{\sqrt{2}} - 2v \right)$ yüzeyi üzerinde

normal eğriliği $k_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$, geodezik eğriliği $k_g = 0$ olan ve

$d_n = (0, 0, 1)$ doğrultusu ile $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ açısı yapan

D_n -Darboux slant helis..... 137

Şekil 5.5.4. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0$ yüzeyi üzerinde

normal eğriliği $k_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$, geodezik eğriliği $k_g = 0$ olan

ve $d_n = (0, 0, 1)$ doğrultusu ile $\vartheta = \frac{\pi}{3}$ açısı yapan

D_n -Darboux slant helis..... 138

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım sırasında desteğini esirgemeyen, tecrübelerinden faydalandığım, akademik her konuda beni yönlendiren, danışman hocam Doç. Dr. Hüseyin KOCA YİĞİT'e teşekkürlerimi sunarım.

Akademik desteği ile bana yardımcı olan, her daim bilgisinden ve tecrübesinden yararlandığım, sayın hocam Doç. Dr. Tuba AĞIRMAN AYDIN'a teşekkürü bir borç bilirim.

Bu çalışma sırasında değerli fikirlerini benimle paylaşan, her sorumda beni geri çevirmeyip yardımcı olan, sayın hocam Doç. Dr. Burak ŞAHİNER'e teşekkür ederim.

Matlab kullanımı konusunda yardımlarını esirgemeyen Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL hocama teşekkür ederim.

Eğitim hayatım boyunca hiçbir fedakârlıktan kaçınmayan ailem ile anlayışını, ilgisini esirgemeyip her zaman bana destek olup güç veren eşime ve sabırları için çocuklarıma sonsuz teşekkürler.

Akın ALKAN
Manisa, 2024

ÖZET

Doktora Tezi

Akın ALKAN

Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT

Bu tez çalışması, altı bölümden oluşmuştur.

Birinci bölüm tezin giriş bölümüdür. Bu bölümde, özel eğriler ve yüzey üzerindeki özel eğriler ile ilgili literatür bilgisi ve bu tezde yapılanlar hakkında kısaca bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde, 3-boyutlu Öklid uzayında eğriler ve yüzeyler teorisine ait temel kavramlar verilmiştir.

Tezin orjinal kısımlarından biri olan üçüncü bölümde, yüzey üzerindeki D_o - Darboux slant helisler incelenmiştir. Oskülatör Darboux çatısı tanımlanmış ve türev formülleri bulunmuştur. Bu çatı kullanılarak bir eğrinin D_o -Darboux slant helis olma şartı verilmiştir. Oskülatör Darboux çatısına göre D_o -Darboux slant helislerin diferansiyel denklem karakterizasyonları verilmiştir. Ayrıca parametrik ve kapalı formda verilen bir yüzey üzerinde D_o -Darboux slant helis elde etmek için birer yöntem bulunmuş ve örnekler verilmiştir.

Tezin orjinal kısımlarından olan dördüncü bölümde, yüzey üzerinde D_r - Darboux slant helisler incelenmiştir. Rektifiyan Darboux çatısı tanımlanmış ve türev formülleri bulunmuştur. Bu çatı kullanılarak bir eğrinin D_r -Darboux slant helis olma şartı verilmiştir. Rektifiyan Darboux çatısına göre D_r -Darboux slant helislerin diferansiyel denklem karakterizasyonları bulunmuştur. Daha sonra parametrik ve kapalı formda verilen bir yüzey üzerinde D_r -Darboux slant helis elde etmek için birer yöntem bulunmuş ve örnekler verilmiştir.

Tezin bir diğer orijinal kısmı olan beşinci bölümde, yüzey üzerinde D_n - Darboux slant helisler incelenmiştir. Normal Darboux çatısı tanımlanmış ve türev formülleri bulunmuştur. Bu çatı kullanılarak bir eğrinin D_n -Darboux slant helis olma şartı verilmiştir. Normal Darboux çatısına göre D_n -Darboux slant helislerin diferansiyel denklem karakterizasyonları bulunmuştur. Son olarak, parametrik ve kapalı formda verilen bir yüzey üzerinde D_n -Darboux slant helis elde etmek için birer yöntem bulunmuş ve örnekler verilmiştir.

Altıncı bölümde, sonuç ve öneriler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Darboux çatısı, oskulator Darboux çatısı, rektifiyan Darboux çatısı, normal Darboux çatısı, D_o -Darboux slant helis, D_r -Darboux slant helis, D_n -Darboux slant helis.

2024, 141 sayfa



ABSTRACT

PhD Thesis

Akın ALKAN

**Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Education
Department of Mathematics**

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT

This thesis consists of six chapters.

First chapter is introduction. In this chapter, literature review about special curves and special curves on surface and some information about this thesis is given.

In chapter two, basic concepts of the theory of curves and surfaces in 3-dimensional Euclidian space are given.

In chapter three, which is one of the original parts of the thesis, the D_o - Darboux slant helices on the surface are examined. The osculator Darboux frame is defined and derivative formulas are found. Using this frame, the condition for a curve to be a D_o -Darboux slant helix is given. Differential equation characterizations of D_o -Darboux slant helices according to the osculator Darboux frame are given. Additionally, a method to obtain a D_o -Darboux slant helix on a given surface in parametric and implicit form is found and examples are given.

In chapter four, which is one of the original parts of the thesis, the D_r -Darboux slant helices on the surface are examined. The rectifying Darboux frame is defined and derivative formulas are found. Using this frame, the condition for a curve to be a D_r -Darboux slant helix is given. Differential equation characterizations of D_r -Darboux slant helices according to the rectifying Darboux frame are given. Later, a method to obtain a D_r -Darboux slant helix on a given surface in parametric and implicit form is found and examples are given.

In chapter five, which is another original parts of the thesis, the D_n -Darboux slant helices on the surface are examined. The normal Darboux frame is defined and derivative formulas are found. Using this frame, the condition for a curve to be a D_n -Darboux slant helix is given. Differential equation characterizations of D_n -Darboux slant helices according to the normal Darboux frame are given. Finally, a method to obtain a D_n -Darboux slant helix on a given surface in parametric and implicit form is found and examples are given.

In chapter six, results and recommendations are given.

Keywords: Darboux frame, osculator Darboux frame, rectifying Darboux frame, normal Darboux frame, D_o -Darboux slant helix, D_r -Darboux slant helix, D_n -Darboux slant helix.

2024, 141 pages



1.GİRİŞ

Eğriler teorisi, birçok alanda yaygın bir şekilde kullanılmasından dolayı diferansiyel geometride hala ilginç konulardan biridir ve birçok matematikçi tarafından çalışılmaktadır. Eğriler teorisinde en çok ilgi çeken konulardan biri ise bazı özel eğriler olup bu eğrilerden en meşhur ve en kullanışlı olanları helisler ve slant helislerdir. Helisler ve slant helisler, doğada ve bilimde sıklıkla karşılaştığımız, bilgisayar destekli geometrik tasarımdan fraktal geometriye, kinematikten DNA çiftlerine, geniş bir kullanım alanına sahip olan eğrilerdir. Helis eğrileri, teğetleri sabit bir doğrultuyla sabit açı yapan eğriler olarak tanımlanmıştır [1]. Izumiya ve Takeuchi helislere benzer şekilde asal normal vektörleri sabit bir doğrultuyla sabit açı yapan eğriler olarak slant helisleri tanımlamışlar ve karakterizasyonlarını vermişlerdir [2]. Yakın zamanlarda E. Zıplar, A. Şenol ve Y. Yaylı, Frenet çatısının Darboux ani dönme vektörü sabit bir doğrultu ile sabit açı yapan özel eğriyi Darboux helis olarak tanımlamış ve bu eğri için karakterizasyonları vermişlerdir [3]. Daha sonra bu üç helis çeşidi üzerine matematikçiler birçok çalışmalar yaptılar ve bu çalışmalar sadece Öklid uzaylarında değil aynı zamanda Minkowski uzaylarında da yapıldı [4-10].

Diferansiyel geometrinin en önemli çalışma alanlarından biri de yüzeyler üzerindeki özel eğrilerdir. Yüzey üzerinde kalan özel eğrilerin belirlenmesi çok önemli problemlerden biridir ve bu eğriler de bilimin farklı alanlarında kullanım alanlarına sahiplerdir. Bu önemine binaen yüzey üzerindeki farklı özel eğrilerin incelenmesi hem geometri hem de geometri ile çok yakından ilişkili olan fizik, astronomi, mühendislik gibi bilimler açısından çok önemlidir. Bazı özel uzay eğrilerinin karakterizasyonları yüzeyler üzerinde de incelenbildiği gibi bu eğrilerden farklı olarak yüzey üzerinde kalan başka özel eğriler de eğri-yüzey ikilisinin çatısı olarak bilinen Darboux çatısı ile tanımlanmış ve incelenmiştir. Yüzey üzerindeki helisler J. Puig-Pey ve ark. tarafından incelenmiş ve konum vektörleri verilmiştir [11]. Bu eğrilerden bir diğeri, fizikte optik konusunda önemli bir yere sahip olan isophote eğrileridir. Bu eğrilerin geometrik tanımı F. Doğan ve Y. Yaylı tarafından yapılmış ve karakterizasyonlarına ilişkin incelemeler de hem Öklid hem de Lorentz uzaylarında ayrıntılı olarak incelenmiştir [12-14]. Benzer düşünceyle son yıllarda N.

Macit ve M. Düldül, yüzey üzerinde bir diğer özel eğriyi relatively normal-slant helis ismi ile tanımlamış ve bu eğrilerin geometrisini incelemişlerdir [15]. Yadav, A., & Pal, B. relatively normal-slant helisleri, konum vektörlerinin bulunduğu düzleme göre incelemiş ayrıca isophote eğrilerinin konum vektörlerini vermişlerdir [16]. E. Nesovica ve ark. Minkowski 3-uzayında null olmayan relatively normal-slant helisleri incelemişlerdir [17]. A. Yadav ve ark. Minkowski 3-uzayında relatively normal-slant helislerin karakterizasyonlarını inceleyip slant helislerle ilişkilerini vermişlerdir [18].

Bununla birlikte S. Hananoi, N. Ito ve S. Izumiya, yüzey eğrileri üzerinde üç yeni vektör alanı tanımladılar [19]. M. Önder, bu üç yeni vektörü dikkate alarak yüzey üzerinde üç yeni özel eğri tanımladı; $i \in \{o, n, r\}$ ve o, n, r indisleri sırasıyla yüzey üzerindeki eğrinin oskülatör, normal ve rektifyan düzlemlerini temsil etmek üzere bu eğrileri D_i -Darboux slant helisler olarak isimlendirdi ve bağlantılı helis olarak tanımladığı yeni bazı helis türleri ile bu yüzey eğrilerinin ilişkisini ortaya koydu [20].

Bu tezin amacı, M. Önder tarafından tanımlanan D_i -Darboux slant helislerin karakterizasyonlarını detaylı incelemek ve geometrik özelliklerini ortaya koymaktır. Öncelikle bu eğrileri daha kolay incelemek için üç yeni ortogonal çatı tanımlanacak ve bu çatılara ait türev formülleri bulunacaktır. Ardından bu çatılar yardımıyla D_i -Darboux slant helisleri karakterize eden denklemler bulunacaktır. Sonra, D_i -Darboux slant helisleri karakterize eden denklemler, tanımlanan bu çatıların eğrilikleri ile Darboux çatısının eğrilikleri arasındaki ilişkilerden yararlanılarak eğri-yüzey ikilisinin eğrilikleri cinsinden verilecektir. Daha sonra, bu yeni çatılar yardımıyla yüzey üzerinde yatan eğrileri karakterize eden diferansiyel denklemler bulunup bu denklemlerden yararlanılarak D_i -Darboux slant helisleri karakterize eden diferansiyel denklemler bulunacaktır. Son olarak, kapalı ve parametrik formda verilen bir yüzey üzerinde bulunan D_i -Darboux slant helisleri elde etmek için metotlar verilip sonrasında örnekler verilecektir.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde Öklid uzayında eğriler ve yüzeyler teorisi ile ilgili temel kavramlar verilecektir.

2.1. Eğriler İçin Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1: E^n uzayında iki vektör $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)$ ve $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3, \dots, q_n)$ olmak üzere

$$\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle = p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 + \dots + p_n q_n$$

eşitliği ile tanımlanan fonksiyona *Öklid iç çarpımı* denir [21].

Tanım 2.1.2: E^n uzayında bir vektör $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)$ olmak üzere

$$\|\vec{p}\| = \sqrt{\langle \vec{p}, \vec{p} \rangle}$$

eşitliği ile tanımlanan fonksiyona E^n uzayında *norm* denir [21].

Tanım 2.1.3: E^3 uzayında iki vektör $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ ve $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$ olmak üzere $\vec{p}$ ve $\vec{q}$ vektörlerinin vektörel çarpımı

$$\vec{p} \times \vec{q} = (p_2 q_3 - p_3 q_2, p_3 q_1 - p_1 q_3, p_1 q_2 - p_2 q_1)$$

şeklinde tanımlıdır [22,23].

Tanım 2.1.4: E^n nin her bir p noktasında $f: E^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun her basamaktan kısmi türevleri varsa f fonksiyonu C^∞ sınıfındandır veya *düzgün fonksiyondur* denir [21].

Tanım 2.1.5: I , $\mathbb{R}$ nin bir açık aralığı olmak üzere $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$ biçiminde düzgün bir α dönüşümüne E^n uzayında bir *eğri* denir [21].

Tanım 2.1.6: $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ eğrisi için her $t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ ise α eğrisine *regüler eğri* denir [21,23].

Tanım 2.1.7: $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ eğrisi için her $s \in I$ için $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise α eğrisine *birim hızlı eğri* denir. Bu durumda $s \in I$ parametresine α eğrisinin *yay parametresi* adı verilir [22,23].

Tanım 2.1.8: E^3 uzayında birim hızlı $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ eğrisi için $\vec{T}(s) = \alpha'(s)$ eşitliği ile belirli $\vec{T}(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki *birim teğet vektörü* denir [21].

Tanım 2.1.9: E^3 uzayında birim hızlı $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ eğrisi için $\kappa(s) = \|\vec{T}'(s)\|$ ile tanımlı $\kappa: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna α eğrisinin *eğrilik fonksiyonu* denir. $\kappa(s)$ değerine eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki *eğriliği* veya *birinci eğriliği* denir [21].

Tanım 2.1.10: E^3 uzayında birim hızlı $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ eğrisi için $\vec{N}(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \vec{T}'(s)$ eşitliği ile belirli $\vec{N}(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki *asli normal vektörü* denir [21].

Tanım 2.1.11: E^3 uzayında birim hızlı $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ eğrisi için $\vec{B}(s) = \vec{T}(s) \times \vec{N}(s)$ eşitliği ile belirli $\vec{B}(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki *binormal vektörü* denir [21].

Tanım 2.1.12: $\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)$ vektörlerine $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki *Frenet vektörleri* denir. $\{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)\}$ kümesine α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki *Frenet çatısı* denir. $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ vektör alanlarına α eğrisi üzerinde *Frenet vektör alanları* denir [21].

Tanım 2.1.13: Birim hızlı $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ olmak üzere

$$\tau: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tau(s) = -\langle \vec{B}'(s), \vec{N}(s) \rangle$$

fonksiyonuna α eğrisinin *burulma fonksiyonu* denir. $\tau(s)$ değerine de eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki *burulması* veya *ikinci eğriliği* denir [21].

Teorem 2.1.14: Birim hızlı $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ ise

$$\begin{aligned}\vec{T}' &= \kappa \vec{N} \\ \vec{N}' &= -\kappa \vec{T} + \tau \vec{B} \\ \vec{B}' &= -\tau \vec{N}\end{aligned}$$

dır. Bu eşitliklere birim hızlı α eğrisinin *Frenet formülleri* denir [21,23,24].

Tanım 2.1.15: E^3 uzayında birim hızlı $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ olsun. $\{\vec{T}(s), \vec{N}(s)\}$ kümesinin gerdiği düzleme *oskulator düzlem*, $\{\vec{T}(s), \vec{B}(s)\}$ kümesinin gerdiği düzleme *rektifiyan düzlem*, $\{\vec{N}(s), \vec{B}(s)\}$ kümesinin gerdiği düzleme *normal düzlem* denir [21].

Tanım 2.1.16: E^3 uzayında birim hızlı $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ olsun. $\vec{W} = \tau \vec{T} + \kappa \vec{B}$ ile tanımlı vektöre *Darboux vektörü* denir [22].

Tanım 2.1.17: $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ eğrisinin her $s \in I$ için $\vec{\alpha}'(s) = \vec{T}(s)$ teğet vektörü, sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyorsa α eğrisine *helis* veya *eğilim çizgisi* denir [1,22,24].

Teorem 2.1.18: $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ eğrisinin helis olması için gerek ve yeter şart her $s \in I$ için $\frac{\tau(s)}{\kappa(s)}$ fonksiyonunun sabit olmasıdır [1,22,24].

Tanım 2.1.19: $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ eğrisinin her $s \in I$ için $\vec{N}(s)$ asli normal vektörü, sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyorsa α eğrisine *slant helis* denir [2].

Teorem 2.1.20: $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter şart her $s \in I$ için

$$\sigma(s) = \left(\frac{\kappa^2}{\left(\kappa^2 + \tau^2\right)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \right) (s)$$

fonksiyonunun sabit olmasıdır [2].

Tanım 2.1.21: $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ eğrisinin her $s \in I$ için $\vec{W}(s)$ Darboux ani dönme vektörü, sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyorsa α eğrisine *Darboux helis* denir [3].

Teorem 2.1.22: (i) $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ eğrisinin Darboux helis olması için gerek ve yeter şart her $s \in I$ için

$$\sigma_d(s) = \left(\frac{\left(\kappa^2 + \tau^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\kappa^2} \frac{1}{\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'} \right) (s)$$

fonksiyonunun sabit olmasıdır[3].

(ii) $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ eğrisinin bir Darboux helis olması için gerek ve yeter şart α nın bir slant helis olmasıdır [3].

2.2. Yüzeyler İçin Temel Kavramlar

Tanım 2.2.1: A , E^2 nin bir açık alt cümlesi olsun. $X: A \subset E^2 \rightarrow E^3$, $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa X dönüşümüne *basit yüzey* veya *yüzey yaması* denir [21].

- 1) X diferansiyellenebilirdir.
- 2) X homeomorfizmdir.
- 3) X regülerdir.

Tanım 2.2.2: S , E^3 uzayının bir alt cümlesi olsun. S nin her bir p noktası için $p \in X(A)$ ve $X(A) \subset S$ olacak şekilde bir $X: A \subset E^2 \rightarrow E^3$ basit yüzeyi varsa S ye E^3 de bir *yüzey* denir [21].

Tanım 2.2.3: Bir $X : A \subset E^2 \rightarrow E^3$ basit yüzeyi için $\vec{X}_u \times \vec{X}_v$ sıfırdan farklı olacak biçimde $(u, v) \in A$ noktasında *birim normal vektör alanı* veya *yüzeyin normali*;

$$\vec{U}(u, v) = \frac{\vec{X}_u \times \vec{X}_v}{\|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\|}$$

ile tanımlıdır. Burada $\vec{X}_u$ ve $\vec{X}_v$ sırasıyla X in u ve v ye göre kısmi türevleridir [21].

Tanım 2.2.4: E^3 de S yüzeyinin her bir p noktasına

$$I_p : T_p(S) \times T_p(S) \rightarrow IR, \quad I_p(\vec{v}_p, \vec{w}_p) = \langle \vec{v}_p, \vec{w}_p \rangle$$

fonksiyonunu karşılık getiren I_p fonksiyonuna, S yüzeyi üstünde *birinci temel form* denir. Burada $T_p(S)$, p noktasında S yüzeyine teğet vektörlerin kümesidir. Birinci temel form, $E = \langle \vec{X}_u, \vec{X}_u \rangle$, $F = \langle \vec{X}_u, \vec{X}_v \rangle$ ve $G = \langle \vec{X}_v, \vec{X}_v \rangle$ olmak üzere

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

ile tanımlıdır. Buradaki E, F, G fonksiyonlarına yüzeyin *birinci temel form katsayıları* denir [21,24].

Tanım 2.2.5: E^3 de bir S yüzeyi $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ parametrizasyonu ile verilirse S yüzeyi üzerindeki birim hızlı bir eğri için $\alpha(s) = X(u(s), v(s))$ yazılabilir. Böylece α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki teğet vektörü

$$\frac{d\alpha}{ds} = \vec{X}_u \frac{du}{ds} + \vec{X}_v \frac{dv}{ds}$$

olur. α birim hızlı olduğundan

$$E\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2F\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + G\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 1$$

bulunur [15].

Tanım 2.2.6: E^3 de bir S yüzeyi $f(x, y, z) = 0$ kapalı formu ile verilsin. Bu taktirde S yüzeyi içinde yatan birim hızlı $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$ eğrisi için

$$f_x \frac{dx}{ds} + f_y \frac{dy}{ds} + f_z \frac{dz}{ds} = 0$$

ve

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$$

eşitlikleri sağlanır [15].

Tanım 2.2.7: E^3 de bir S yüzeyi üzerinde birim hızlı bir $\alpha: I \rightarrow S$ eğrisi verilsin. Yüzeyin dik birim normal vektör alanı $\vec{U}$ olsun. α eğrisinin birim teğet vektör alanı $\vec{T}$ olmak üzere $\vec{V} = \vec{U} \times \vec{T}$ eşitliği ile tanımlı vektör alanını göz önüne alalım. Vektörel çarpımın özelliklerinden $\{\vec{T}(s), \vec{V}(s), \vec{U}(s)\}$ kümesi $\alpha(s)$ noktasındaki $T_{\alpha(s)}E^3$ teğet uzayının bir ortonormal tabanı olur. Bu tabana (α, S) eğri-yüzey ikilisinin çatısı veya Darboux çatısı denir [21].

Tanım 2.2.8: $\alpha: I \rightarrow S$ birim hızlı bir eğri ve Darboux çatısının vektör alanları $\vec{T}, \vec{V}, \vec{U}$ olsun.

$$k_n(s) = \langle \alpha''(s), \vec{U}(s) \rangle$$

eşitliği ile belirli $k_n(s)$ fonksiyonuna, (α, S) eğri-yüzey ikilisinin $\alpha(s)$ noktasındaki normal eğriliği denir [21].

Tanım 2.2.9: $\alpha: I \rightarrow S$ birim hızlı bir eğri ve Darboux çatısının vektör alanları $\vec{T}, \vec{V}, \vec{U}$ olsun.

$$k_g(s) = \langle \alpha''(s), \vec{V}(s) \rangle$$

eşitliği ile belirli $k_g(s)$ fonksiyonuna, (α, S) eğri-yüzey ikilisinin $\alpha(s)$ noktasındaki geodezik eğriliği denir [21].

Tanım 2.2.10: $\alpha: I \rightarrow S$ birim hızlı bir eğri ve Darboux çatısının vektör alanları $\vec{T}, \vec{V}, \vec{U}$ olsun.

$$\tau_g(s) = -\langle \vec{U}'(s), \vec{V}(s) \rangle$$

eşitliği ile belirli $\tau_g(s)$ fonksiyonuna, (α, S) eğri-yüzey ikilisinin $\alpha(s)$ noktasındaki *geodezik burulması* denir [21].

Tanım 2.2.11: $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ birim hızlı bir eğri olmak üzere k_n, k_g ve τ_g fonksiyonlarına (α, S) ikilisinin *eğri-yüzey ikilisinin eğrilikleri* denir [21].

Tanım 2.2.12: $\vec{U}$, S yüzeyi üzerinde birim dik vektör alanı olmak üzere S nin bir p noktasında

$$S_p(\vec{v}_p) = -D_{\vec{v}_p} \vec{U}$$

eşitliği ile tanımlı $S_p: T_p(S) \rightarrow T_p(S)$ fonksiyonuna, S yüzeyinin p noktasında, $\vec{U}$ birim dik vektör alanına bağlı *şekil operatörü* denir. Burada $D_{\vec{v}_p} \vec{U}$, $\vec{U}$ vektörünün $\vec{v}_p$ vektörü yönündeki kovaryant türevidir [21].

Tanım 2.2.13: i) S yüzeyinin bir p noktasında, $S_p: T_p(S) \rightarrow T_p(S)$ lineer dönüşümünün öz değerlerine, p noktasındaki *asli eğrilikler* denir.

ii) $S_p: T_p(S) \rightarrow T_p(S)$ lineer dönüşümünün sıfırdan farklı öz vektörlerine p noktasındaki *asli vektörler* veya *eğrilik vektörleri* denir.

iii) $\vec{v}_p \neq 0$ ve $\langle S(\vec{v}_p), \vec{v}_p \rangle = 0$ ise $\vec{v}_p$ vektörüne, p noktasında bir *asimptotik vektör* denir [21].

Tanım 2.2.14: S , E^3 de bir yüzey ve $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ bu yüzey üzerinde kalan bir eğri olsun.

i) Her $t \in I$ için $\alpha'(t)$ hız vektörü, $\alpha(t)$ noktasında S yüzeyinin bir eğrilik vektörü ise α eğrisine, S yüzeyi üzerinde bir *eğrilik çizgisi* denir.

- ii) Her $t \in I$ için $\alpha'(t)$ hız vektörü, $\alpha(t)$ noktasında S yüzeyinin bir asimptotik vektörü ise α eğrisine, S yüzeyi üzerinde bir *asimptotik eğri* denir.
- iii) S yüzeyinin α eğrisi boyunca birim dik birim normal vektör alanı $\vec{U}_\alpha$ olmak üzere α'' vektör alanı, $\vec{U}_\alpha$ vektör alanının lineer bileşimi ise α eğrisine, S yüzeyi üzerinde bir *geodezik eğri* denir [21].

Teorem 2.2.15: S, E^3 de bir yüzey ve $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı bir eğri olsun.

- i) α eğrisinin asimptotik eğri olması için gerek ve yeter şart $k_n = 0$ olmasıdır.
- ii) α eğrisinin geodezik eğri olması için gerek ve yeter şart $k_g = 0$ olmasıdır.
- iii) α eğrisinin eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart $\tau_g = 0$ olmasıdır [21,23].

Tanım 2.2.16: $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ eğrisinin birinci eğriliği κ , ikinci eğriliği τ ve eğri-yüzey ikilisinin eğrilikleri k_n, k_g ve τ_g arasında

$$\kappa^2 = k_g^2 + k_n^2, \quad k_g = \kappa \cos \phi, \quad k_n = \kappa \sin \phi, \quad \tau_g = \tau - \phi' \quad (2.1)$$

bağıntıları vardır. Burada ϕ , Frenet çatısının $\vec{B}$ binormal vektörü ile $\vec{U}$ yüzey normali arasındaki açıdır [14].

Tanım 2.2.17: $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$, S yüzeyi üzerinde birim hızlı bir eğri ve Darboux çatısının vektör alanları $\vec{T}, \vec{V}, \vec{U}$ ve eğri-yüzey ikilisinin eğrilikleri k_n, k_g ve τ_g olsun. Darboux çatısının türev formülleri

$$\begin{aligned} \vec{T}' &= k_g \vec{V} + k_n \vec{U} \\ \vec{V}' &= -k_g \vec{T} + \tau_g \vec{U} \\ \vec{U}' &= -k_n \vec{T} - \tau_g \vec{V} \end{aligned} \quad (2.2)$$

şeklindedir [14,15,23].

Tanım 2.2.18: $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$, S yüzeyi üzerinde birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin Darboux çatısı ile Frenet çatısı arasındaki ilişkiler

$$\begin{aligned}\vec{T} &= \vec{T} \\ \vec{N} &= \cos \phi \vec{V} + \sin \phi \vec{U} \\ \vec{B} &= -\sin \phi \vec{V} + \cos \phi \vec{U}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\vec{T} &= \vec{T} \\ \vec{V} &= \cos \phi \vec{N} - \sin \phi \vec{B} \\ \vec{U} &= \sin \phi \vec{N} + \cos \phi \vec{B}\end{aligned}$$

şeklindedir. Burada ϕ , $\vec{B}$ binormal vektörü ile $\vec{U}$ yüzey normali arasındaki açıdır [14].

Tanım 2.2.19: E^3 de bir S yüzeyi üzerinde birim hızlı bir $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ eğrisi verilsin. α nın Darboux çatısı $\{\vec{T}, \vec{V}, \vec{U}\}$ olsun. α eğrisi boyunca yüzeyin $\vec{U}$ birim normali, sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyorsa α eğrisine S yüzeyi üzerinde *isophote eğrisi* denir [14].

Teorem 2.2.20: $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$, S yüzeyi üzerinde birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin Darboux çatısı $\{\vec{T}, \vec{V}, \vec{U}\}$ ve eğri-yüzey ikilisinin eğrilikleri k_n , k_g ve τ_g olsun. α eğrisinin isophote eğrisi olması için gerek ve yeter şart her $s \in I$ için

$$\sigma_i(s) = \pm \left(\frac{k_n^2}{(k_n^2 + \tau_g^2)^{3/2}} \left(\frac{\tau_g}{k_n} \right)' + \frac{k_g}{(k_n^2 + \tau_g^2)^{1/2}} \right) (s)$$

fonksiyonunun sabit olmasıdır. Burada $k_n \neq 0$ dır [14].

Tanım 2.2.21: E^3 de bir S yüzeyi üzerinde birim hızlı bir $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ eğrisi verilsin. α nın Darboux çatısı $\{\vec{T}, \vec{V}, \vec{U}\}$ olsun. α nın $\vec{V}$ vektör alanı sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyorsa α eğrisi, S yüzeyi üzerinde *relatively normal-slant helis* olarak adlandırılır [15].

Teorem 2.2.22: $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$, S yüzeyi üzerinde birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin Darboux çatısı $\{\vec{T}, \vec{V}, \vec{U}\}$ ve eğri-yüzey ikilisinin eğrilikleri k_n , k_g ve τ_g

olsun. α eğrisinin relatively normal-slant helis olması için gerek ve yeter şart her $s \in I$ için

$$\sigma_v(s) = \left(\frac{1}{(k_g^2 + \tau_g^2)^{3/2}} (\tau_g' k_g - k_g' \tau_g - k_n (k_g^2 + \tau_g^2)) \right) (s)$$

fonksiyonunun sabit olmasıdır. Burada $(\tau_g, k_g) \neq (0, 0)$ dır [15].

Tanım 2.2.23: $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$, S yüzeyi üzerinde birim hızlı bir eğri ve Darboux çatısının vektör alanları $\vec{T}, \vec{V}, \vec{U}$ ve eğri-yüzey ikilisinin eğrilikleri k_n , k_g ve τ_g olsun. α eğrisi boyunca

$$\begin{aligned} \tilde{D}_o(s) &= \tau_g(s) \vec{T}(s) - k_n(s) \vec{V}(s), \\ \tilde{D}_n(s) &= -k_n(s) \vec{V}(s) + k_g(s) \vec{U}(s), \\ \tilde{D}_r(s) &= \tau_g(s) \vec{T}(s) + k_g(s) \vec{U}(s) \end{aligned} \quad (2.3)$$

ile tanımlı vektör alanlarına sırasıyla *oskulator Darboux vektör alanı*, *normal Darboux vektör alanı*, *rektifiyan Darboux vektör alanı* denir [19].

Tanım 2.2.24: $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$, S yüzeyi üzerinde $\tilde{D}_o(s)$, $\tilde{D}_n(s)$ ve $\tilde{D}_r(s)$ Darboux vektörlerine sahip birim hızlı bir eğri olsun. $i \in \{o, n, r\}$ olmak üzere, $\tilde{D}_i$ Darboux vektör alanı birim ve sabit $\vec{d}_i$ doğrultusu ile sabit θ_i açısı yapıyorsa yani $\langle \tilde{D}_i, \vec{d}_i \rangle = \cos \theta_i$ ise α eğrisine $\tilde{D}_i$ -Darboux slant helis denir [20].

3. YÜZEY ÜZERİNDE D_o -DARBOUX SLANT HELİSLER

Bu bölümde, E^3 uzayında bir S yüzeyi üzerinde kalan ve yeni bir özel yüzey eğrisi olan D_o -Darboux slant helis incelenecektir. Bu özel eğriyi daha kolay incelemek için ilk olarak oskülatör Darboux çatısı ve türev formülleri verilecektir. Daha sonra bu yeni çatı yardımıyla D_o -Darboux slant helisler için karakterizasyonlar verilecektir. Son olarak, parametrik ve kapalı formda verilen bir S yüzeyi üzerinde D_o -Darboux slant helis elde edebilmek için birer yöntem verilip ardından örnekler verilecektir.

3.1. Yüzey Eğrileri İçin Oskülatör Darboux Çatısı

S bir yüzey olsun. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı, $\{\vec{T}, \vec{V}, \vec{U}\}$ Darboux çatısına, k_g, k_n, τ_g eğriliklerine ve $\tilde{D}_o(s) = \tau_g(s)\vec{T}(s) - k_n(s)\vec{V}(s)$ oskülatör Darboux vektörüne sahip bir eğri olsun. Bu taktirde,

$$\tilde{D}_o(s) = \tau_g(s)\vec{T}(s) - k_n(s)\vec{V}(s)$$

vektörü normlanırsa

$$\vec{D}_o(s) = \frac{\tilde{D}_o(s)}{\|\tilde{D}_o(s)\|} = \frac{\tau_g(s)}{\sqrt{\tau_g^2(s) + k_n^2(s)}}\vec{T}(s) - \frac{k_n(s)}{\sqrt{\tau_g^2(s) + k_n^2(s)}}\vec{V}(s)$$

elde edilir. $\vec{D}_o$ vektörü $\vec{T}$ ve $\vec{V}$ nin gerdiği düzlemde olduğundan $\vec{U}$ vektörüne diktir. Dolayısıyla $\vec{Y}_o = \vec{D}_o \times \vec{U}$ birim vektörünün tanımlanması ile yüzey üzerindeki α eğrisi boyunca yeni bir ortonormal çatı olan $\{\vec{D}_o, \vec{U}, \vec{Y}_o\}$ çatısını elde edilir.

Tanım 3.1.1: Yukarıdaki şekilde tanımlanan $\{\vec{D}_o, \vec{U}, \vec{Y}_o\}$ çatısına S yüzeyi üzerinde α eğrisinin *oskülatör Darboux çatısı* veya kısaca *OD-çatısı* denir.

Şimdi bu çatı için türev formüllerini verelim.

Teorem 3.1.2: S bir yüzey ve $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ bu yüzey üzerinde yay parametresi s olan ve OD-çatısına sahip birim hızlı bir eğri olsun. OD-çatısının vektör alanları $\vec{D}_o, \vec{U}, \vec{Y}_o$ ve eğrilikleri δ_o, μ_o olmak üzere, OD-çatısının türev formülleri

$$\begin{aligned}\vec{D}'_o &= -\delta_o \vec{Y}_o \\ \vec{U}' &= \mu_o \vec{Y}_o \\ \vec{Y}'_o &= \delta_o \vec{D}_o - \mu_o \vec{U}\end{aligned}\tag{3.1}$$

şeklindedir. Burada $\delta_o = \left(\frac{k_n^2}{k_n^2 + \tau_g^2} \right) \left(\frac{\tau_g}{k_n} \right)' + k_g$ ve $\mu_o = \sqrt{k_n^2 + \tau_g^2}$ dir.

İspat: $\vec{D}'_o, \{\vec{D}_o, \vec{U}, \vec{Y}_o\}$ çatısının elemanlarının lineer birleşimi olarak yazılabilir.

Yani

$$\vec{D}'_o = a_1 \vec{D}_o + a_2 \vec{U} + a_3 \vec{Y}_o\tag{3.2}$$

yazılır. Burada $a_i = a_i(s)$, $i = (1, 2, 3)$, s in diferansiyellenebilir fonksiyonlarıdır.

(3.2) ifadesinin her iki yanı $\vec{D}_o$ vektörü ile iç çarpılırsa

$$\langle \vec{D}'_o, \vec{D}_o \rangle = a_1 \langle \vec{D}_o, \vec{D}_o \rangle + a_2 \langle \vec{D}_o, \vec{U} \rangle + a_3 \langle \vec{D}_o, \vec{Y}_o \rangle$$

bulunur. $\langle \vec{D}_o, \vec{D}_o \rangle = 1$ ve $\langle \vec{D}_o, \vec{U} \rangle = \langle \vec{D}_o, \vec{Y}_o \rangle = 0$ olduğundan $\langle \vec{D}'_o, \vec{D}_o \rangle = a_1$ dir. Diğer taraftan $\langle \vec{D}_o, \vec{D}_o \rangle = 1$ eşitliğinin türevi alınırsa $\langle \vec{D}'_o, \vec{D}_o \rangle = 0 = a_1$ bulunur. (3.2)

ifadesininin iki yanı $\vec{U}$ vektörü ile iç çarpılırsa

$$\langle \vec{D}'_o, \vec{U} \rangle = a_1 \langle \vec{D}_o, \vec{U} \rangle + a_2 \langle \vec{U}, \vec{U} \rangle + a_3 \langle \vec{Y}_o, \vec{U} \rangle$$

bulunur. $\langle \vec{D}_o, \vec{U} \rangle = \langle \vec{Y}_o, \vec{U} \rangle = 0$ ve $\langle \vec{U}, \vec{U} \rangle = 1$ olduğundan $\langle \vec{D}'_o, \vec{U} \rangle = a_2$ olur. Öte

yandan $\langle \vec{D}_o, -\vec{V} \rangle = \cos \phi$ olmak üzere, $\vec{D}_o$ vektöründe $\frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} = \sin \phi$ ve

$\frac{k_n}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} = \cos \phi$ olarak tanımlanırsa

$$\vec{D}_o = \sin \phi \vec{T} - \cos \phi \vec{V} \quad (3.3)$$

bulunur. (3.3) ifadesinin türevi alınır ve Darboux çatısının türev formülleri kullanılırsa

$$\vec{D}_o' = (\phi' + k_g) \cos \phi \vec{T} + (\phi' + k_g) \sin \phi \vec{V} + (k_n \sin \phi - \tau_g \cos \phi) \vec{U}$$

elde edilir. Burada $\frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} = \sin \phi$ ve $\frac{k_n}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} = \cos \phi$ olduğu göz önüne alınır

$\vec{U}$ vektörünün katsayısı sıfır olur. Dolayısıyla

$$\vec{D}_o' = (\phi' + k_g) \cos \phi \vec{T} + (\phi' + k_g) \sin \phi \vec{V} \quad (3.4)$$

bulunur. Bulunan $\vec{D}_o'$ vektörü, $\vec{U}$ vektörü ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} a_2 = \langle \vec{D}_o', \vec{U} \rangle &= \langle (\phi' + k_g) \cos \phi \vec{T} + (\phi' + k_g) \sin \phi \vec{V}, \vec{U} \rangle \\ &= (\phi' + k_g) \cos \phi \langle \vec{T}, \vec{U} \rangle + (\phi' + k_g) \sin \phi \langle \vec{V}, \vec{U} \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi de (3.2) ifadesi $\vec{Y}_o$ vektörü ile iç çarpılırsa

$$\langle \vec{D}_o', \vec{Y}_o \rangle = a_1 \langle \vec{D}_o, \vec{Y}_o \rangle + a_2 \langle \vec{U}, \vec{Y}_o \rangle + a_3 \langle \vec{V}, \vec{Y}_o \rangle$$

bulunur. $\langle \vec{D}_o, \vec{Y}_o \rangle = \langle \vec{U}, \vec{Y}_o \rangle = 0$ ve $\langle \vec{V}, \vec{Y}_o \rangle = 1$ olduğundan $a_3 = \langle \vec{D}_o', \vec{Y}_o \rangle$ elde edilir.

Böylece

$$\begin{aligned} \vec{Y}_o &= \vec{D}_o \times \vec{U} = \left(\frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \vec{T} - \frac{k_n}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \vec{V} \right) \times \vec{U} \\ &= \frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} (\vec{T} \times \vec{U}) - \frac{k_n}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} (\vec{V} \times \vec{U}) \\ &= -\frac{k_n}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \vec{T} - \frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \vec{V} \end{aligned}$$

elde edilir. $\frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} = \sin \phi$ ve $\frac{k_n}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} = \cos \phi$ olduğu kullanılırsa

$$\vec{Y}_o = -\cos \phi \vec{T} - \sin \phi \vec{V} \quad (3.5)$$

elde edilir. (3.4) de bulunan $\vec{D}'_o$ vektörü ile (3.5) de bulunan $\vec{Y}_o$ vektörü iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} a_3 = \langle \vec{D}'_o, \vec{Y}_o \rangle &= \langle (\phi' + k_g) \cos \phi \vec{T} + (\phi' + k_g) \sin \phi \vec{V}, -\cos \phi \vec{T} - \sin \phi \vec{V} \rangle \\ &= -(\phi' + k_g) \cos^2 \phi \langle \vec{T}, \vec{T} \rangle - (\phi' + k_g) \sin^2 \phi \langle \vec{V}, \vec{V} \rangle \\ &= -(\phi' + k_g)(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) \\ &= -(\phi' + k_g) \end{aligned} \quad (3.6)$$

bulunur. Burada ϕ' nü bulmak için, $\frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} = \sin \phi$ ve $\frac{k_n}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} = \cos \phi$ olduğu

göz önüne alınırsa $\tan \phi = \frac{\tau_g}{k_n}$ bulunur. Bu ifadenin türevi alınırsa

$$\phi' (1 + \tan^2 \phi) = \left(\frac{\tau_g}{k_n} \right)'$$

elde edilir. Bu ifadede $\tan \phi = \frac{\tau_g}{k_n}$ eşitliği yerine yazılırsa

$$\phi' \left(1 + \frac{\tau_g^2}{k_n^2} \right) = \left(\frac{\tau_g}{k_n} \right)'$$

ve bu denklem düzenlenirse

$$\phi' = \left(\frac{\tau_g}{k_n} \right)' \left(\frac{k_n^2}{k_n^2 + \tau_g^2} \right) \quad (3.7)$$

bulunur. (3.7) eşitliği , (3.6) da yazılırsa

$$a_3 = - \left[\left(\frac{\tau_g}{k_n} \right)' \left(\frac{k_n^2}{k_n^2 + \tau_g^2} \right) + k_g \right]$$

elde edilir. Bulunan a_1, a_2 ve a_3 değerleri (3.2) denkleminde yazılırsa

$$\vec{D}'_o = - \left[\left(\frac{\tau_g}{k_n} \right)' \left(\frac{k_n^2}{k_n^2 + \tau_g^2} \right) + k_g \right] \vec{Y}_o \quad (3.8)$$

bulunur.

Şimdi $\vec{U}$ vektörünün türevini hesaplayalım. $\vec{U}'$, $\{\vec{D}_o, \vec{U}, \vec{Y}_o\}$ çatısının elemanlarının lineer birleşimi olarak yazılabilir. Yani

$$\vec{U}' = b_1 \vec{D}_o + b_2 \vec{U} + b_3 \vec{Y}_o \quad (3.9)$$

yazılır. Burada $b_i = b_i(s)$, $i = (1, 2, 3)$, s in diferansiyellenebilir fonksiyonlarıdır. (3.9)

eşitliğinin her iki yanını $\vec{D}_o$ vektörü ile iç çarpılırsa

$$\langle \vec{U}', \vec{D}_o \rangle = b_1 \langle \vec{D}_o, \vec{D}_o \rangle + b_2 \langle \vec{D}_o, \vec{U} \rangle + b_3 \langle \vec{D}_o, \vec{Y}_o \rangle$$

bulunur. $\langle \vec{D}_o, \vec{D}_o \rangle = 1$ ve $\langle \vec{D}_o, \vec{U} \rangle = \langle \vec{D}_o, \vec{Y}_o \rangle = 0$ olduğundan $\langle \vec{U}', \vec{D}_o \rangle = b_1$ olur.

Darboux çatısının türev formüllerinden $\vec{U}' = -k_n \vec{T} - \tau_g \vec{V}$ dır. $\vec{U}'$ ve

$\vec{D}_o = \frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \vec{T} - \frac{k_n}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \vec{V}$ vektörleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} b_1 = \langle \vec{U}', \vec{D}_o \rangle &= \left\langle -k_n \vec{T} - \tau_g \vec{V}, \frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \vec{T} - \frac{k_n}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \vec{V} \right\rangle \\ &= \frac{-k_n \tau_g}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \langle \vec{T}, \vec{T} \rangle + \frac{\tau_g k_n}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \langle \vec{V}, \vec{V} \rangle \\ &= \frac{-k_n \tau_g}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} + \frac{\tau_g k_n}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. (3.9) eşitliğinin her iki yanını $\vec{U}$ vektörü ile iç çarpılırsa

$$\langle \vec{U}', \vec{U} \rangle = b_1 \langle \vec{D}_o, \vec{U} \rangle + b_2 \langle \vec{U}, \vec{U} \rangle + b_3 \langle \vec{Y}_o, \vec{U} \rangle$$

bulunur. $\langle \vec{D}_o, \vec{U} \rangle = \langle \vec{Y}_o, \vec{U} \rangle = 0$ ve $\langle \vec{U}, \vec{U} \rangle = 1$ olduğundan $b_2 = \langle \vec{U}', \vec{U} \rangle$ olur. Öte yandan $\langle \vec{U}, \vec{U} \rangle = 1$ ifadesinin türevi alınırsa $\langle \vec{U}', \vec{U} \rangle = 0 = b_2$ elde edilir. (3.9) ifadesi $\vec{Y}_o$ vektörü ile iç çarpılırsa

$$\langle \vec{U}', \vec{Y}_o \rangle = b_1 \langle \vec{D}_o, \vec{Y}_o \rangle + b_2 \langle \vec{U}, \vec{Y}_o \rangle + b_3 \langle \vec{Y}_o, \vec{Y}_o \rangle$$

bulunur. $\langle \vec{D}_o, \vec{Y}_o \rangle = \langle \vec{U}, \vec{Y}_o \rangle = 0$ ve $\langle \vec{Y}_o, \vec{Y}_o \rangle = 1$ olduğundan $b_3 = \langle \vec{U}', \vec{Y}_o \rangle$ elde edilir.

Darboux türev formüllerinden $\vec{U}' = -k_n \vec{T} - \tau_g \vec{V}$ dır. Ayrıca

$$\begin{aligned} \vec{Y}_o &= \vec{D}_o \times \vec{U} = \left(\frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \vec{T} - \frac{k_n}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \vec{V} \right) \times \vec{U} \\ &= \frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} (\vec{T} \times \vec{U}) - \frac{k_n}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} (\vec{V} \times \vec{U}) \\ &= -\frac{k_n}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \vec{T} - \frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \vec{V} \end{aligned}$$

dır. Bu vektörler yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} b_3 &= \langle \vec{U}', \vec{Y}_o \rangle = \left\langle -k_n \vec{T} - \tau_g \vec{V}, -\frac{k_n}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \vec{T} - \frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \vec{V} \right\rangle \\ &= \frac{k_n^2}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \langle \vec{T}, \vec{T} \rangle + \frac{\tau_g^2}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \langle \vec{V}, \vec{V} \rangle \\ &= \frac{\tau_g^2 + k_n^2}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \\ &= \sqrt{\tau_g^2 + k_n^2} \end{aligned}$$

bulunur. Bulunan b_1 , b_2 ve b_3 değerleri (3.9) da yazılırsa

$$\vec{U}' = \sqrt{\tau_g^2 + k_n^2} \vec{Y}_o \quad (3.10)$$

elde edilir.

Şimdi $\vec{Y}_o$ vektörünün türevini hesaplayalım. $\vec{Y}_o, \{\vec{D}_o, \vec{U}, \vec{Y}_o\}$ çatısının elemanlarının lineer birleşimi olarak yazılabilir. Yani

$$\vec{Y}_o' = c_1 \vec{D}_o + c_2 \vec{U} + c_3 \vec{Y}_o \quad (3.11)$$

yazılır. Burada $c_i = c_i(s)$, $i = (1, 2, 3)$, s in diferansiyellenebilir fonksiyonlarıdır. (3.11) ifadesinin her iki yanı $\vec{D}_o$ vektörü ile iç çarpılırsa

$$\langle \vec{Y}_o', \vec{D}_o \rangle = c_1 \langle \vec{D}_o, \vec{D}_o \rangle + c_2 \langle \vec{D}_o, \vec{U} \rangle + c_3 \langle \vec{D}_o, \vec{Y}_o \rangle$$

bulunur. $\langle \vec{D}_o, \vec{D}_o \rangle = 1$ ve $\langle \vec{D}_o, \vec{U} \rangle = \langle \vec{D}_o, \vec{Y}_o \rangle = 0$ olduğundan $\langle \vec{Y}_o', \vec{D}_o \rangle = c_1$ dir. (3.5)

eşitliğinin türevi alınır ve Darboux çatısının türev formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \vec{Y}_o' &= \phi' \sin \phi \vec{T} - \cos \phi \vec{T}' - \phi' \cos \phi \vec{V} - \sin \phi \vec{V}' \\ &= \phi' \sin \phi \vec{T} - \cos \phi (k_g \vec{V} + k_n \vec{U}) - \phi' \cos \phi \vec{V} - \sin \phi (-k_g \vec{T} + \tau_g \vec{U}) \\ &= (\phi' \sin \phi + k_g \sin \phi) \vec{T} + (-\phi' \cos \phi - k_g \cos \phi) \vec{V} \\ &\quad - (k_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi) \vec{U} \\ &= (\phi' + k_g) \sin \phi \vec{T} - (\phi' + k_g) \cos \phi \vec{V} - (k_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi) \vec{U} \end{aligned} \quad (3.12)$$

bulunur. (3.12) de bulunan $\vec{Y}_o'$ vektörü ile $\vec{D}_o = \sin \phi \vec{T} - \cos \phi \vec{V}$ vektörü iç çarpılırsa

$$c_1 = \langle \vec{Y}_o', \vec{D}_o \rangle = \phi' + k_g$$

elde edilir. (3.7) ifadesi yerine yazılırsa

$$c_1 = \left(\frac{\tau_g}{k_n} \right)' \left(\frac{k_n^2}{k_n^2 + \tau_g^2} \right) + k_g$$

bulunur. (3.11) ifadesinin her iki yanı $\vec{U}$ vektörü ile iç çarpılırsa

$$\langle \vec{Y}_o', \vec{U} \rangle = c_1 \langle \vec{D}_o, \vec{U} \rangle + c_2 \langle \vec{U}, \vec{U} \rangle + c_3 \langle \vec{Y}_o, \vec{U} \rangle$$

elde edilir. $\langle \vec{D}_o, \vec{U} \rangle = \langle \vec{Y}_o, \vec{U} \rangle = 0$ ve $\langle \vec{U}, \vec{U} \rangle = 1$ olduğundan $c_2 = \langle \vec{Y}_o', \vec{U} \rangle$ dir. (3.12)

eşitliği kullanılırsa

$$c_2 = \langle \vec{Y}'_o, \vec{U} \rangle = \langle (\phi' + k_g) \sin \phi \vec{T} - (\phi' + k_g) \cos \phi \vec{V} - (k_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi) \vec{U}, \vec{U} \rangle$$

$$= -(k_n \cos \phi + \tau_g \sin \phi)$$

bulunur. Ayrıca $\frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} = \sin \phi$ ve $\frac{k_n}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} = \cos \phi$ ifadeleri yerine yazılırsa

$$c_2 = - \left(k_n \frac{k_n}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} + \tau_g \frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \right)$$

$$= - \left(\frac{k_n^2}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} + \frac{\tau_g^2}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \right)$$

$$= -\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}$$

elde edilir. Son olarak (3.11) ifadesi $\vec{Y}_o$ vektörü ile iç çarpılırsa

$$\langle \vec{Y}'_o, \vec{Y}_o \rangle = c_1 \langle \vec{D}_o, \vec{Y}_o \rangle + c_2 \langle \vec{U}, \vec{Y}_o \rangle + c_3 \langle \vec{Y}_o, \vec{Y}_o \rangle$$

bulunur. $\langle \vec{D}_o, \vec{Y}_o \rangle = \langle \vec{U}, \vec{Y}_o \rangle = 0$ ve $\langle \vec{Y}_o, \vec{Y}_o \rangle = 1$ olduğundan $c_3 = \langle \vec{Y}'_o, \vec{Y}_o \rangle$ dir.

$\langle \vec{Y}_o, \vec{Y}_o \rangle = 1$ ifadesinin türevini alırsak $\langle \vec{Y}'_o, \vec{Y}_o \rangle = c_3 = 0$ elde edilir. Bulunan c_1, c_2 ve c_3 ifadeleri (3.11) ifadesinde yazılırsa

$$\vec{Y}'_o = \left[\left(\frac{\tau_g}{k_n} \right)' \left(\frac{k_n^2}{k_n^2 + \tau_g^2} \right) + k_g \right] \vec{D}_o - \sqrt{\tau_g^2 + k_n^2} \vec{U} \quad (3.13)$$

elde edilir. (3.8), (3.10) ve (3.13) denklemleri dikkate alınarak $\vec{D}'_o, \vec{U}'$ ve $\vec{Y}'_o$ vektörleri matris formunda yazılırsa

$$\begin{pmatrix} \vec{D}'_o \\ \vec{U}' \\ \vec{Y}'_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\left(\frac{k_n^2}{k_n^2 + \tau_g^2} \right) \left(\frac{\tau_g}{k_n} \right)' + k_g \\ 0 & 0 & \sqrt{k_n^2 + \tau_g^2} \\ \left(\frac{k_n^2}{k_n^2 + \tau_g^2} \right) \left(\frac{\tau_g}{k_n} \right)' + k_g & (-\sqrt{k_n^2 + \tau_g^2}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{D}_o \\ \vec{U} \\ \vec{Y}_o \end{pmatrix}$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned}\delta_o &= \left(\frac{k_n^2}{k_n^2 + \tau_g^2} \right) \left(\frac{\tau_g}{k_n} \right)' + k_g \\ \mu_o &= \sqrt{k_n^2 + \tau_g^2}\end{aligned}\tag{3.14}$$

denilirse OD-çatısının türev formülleri

$$\begin{pmatrix} \vec{D}_o' \\ \vec{U}' \\ \vec{Y}_o' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\delta_o \\ 0 & 0 & \mu_o \\ \delta_o & -\mu_o & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{D}_o \\ \vec{U} \\ \vec{Y}_o \end{pmatrix}$$

şeklinde olur. □

3.2. D_o -Darboux Slant Helisin Eksen ve Karakterizasyonları

S bir yüzey ve $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin Darboux çatısı $\{\vec{T}, \vec{V}, \vec{U}\}$ ve eğrilikleri k_g, k_n ve τ_g olsun. Bu eğrinin oskülatör Darboux vektörü $\tilde{D}_o(s) = \tau_g(s)\vec{T}(s) - k_n(s)\vec{V}(s)$ olmak üzere, yüzey üzerinde D_o -Darboux slant helis kavramı aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 3.2.1: S bir yüzey ve $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin $\tilde{D}_o$ vektörü alanı (veya denk olarak $\vec{D}_o = \frac{\tilde{D}_o}{\|\tilde{D}_o\|}$ birim vektör alanı) sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyorsa α eğrisi S yüzeyi üzerinde D_o -Darboux slant helis olarak adlandırılır [20].

Şimdi bu tanımı dikkate alarak literatürde daha önce verilmemiş olan aşağıdaki karakterizasyonları verebiliriz.

Teorem 3.2.2: S, E^3 de bir yüzey ve $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ bu yüzey üzerinde OD-çatısı $\{\vec{D}_o, \vec{U}, \vec{Y}_o\}$ olan birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin bir D_o -Darboux Slant helis olması için gerek ve yeter şart her $s \in I$ için

$$\sigma_o(s) = \frac{\mu_o}{\delta_o}(s) \quad (3.15)$$

fonksiyonunun sabit olmasıdır. Burada $\mu_o \neq 0$ ve $\delta_o \neq 0$ dır.

İspat: α , OD-çatısı $\{\vec{D}_o, \vec{U}, \vec{Y}_o\}$ olan bir D_o -Darboux Slant helis olsun. D_o -Darboux slant helis tanımından α nın $\vec{D}_o$ birim vektörü, sabit doğrultulu, $\vec{d}_o$ vektörü ile sabit θ açısı yapar. Yani $\langle \vec{D}_o, \vec{d}_o \rangle = \cos \theta$ dır. Bu ifadenin türevi alınırsa $\langle \vec{D}_o', \vec{d}_o \rangle = 0$ bulunur. (3.1) deki OD-çatısının türev formülleri kullanılırsa

$$-\delta_o \langle \vec{Y}_o, \vec{d}_o \rangle = 0$$

elde edilir. $\delta_o \neq 0$ olduğundan $\langle \vec{Y}_o, \vec{d}_o \rangle = 0$ dır. Yani $\vec{d}_o$ vektörü $\vec{Y}_o$ vektörüne diktir. Dolayısıyla $\vec{d}_o, \vec{D}_o$ ve $\vec{U}$ vektörünün gerdiği düzlemde bulunur. O halde

$$\vec{d}_o = \cos \theta \vec{D}_o + \sin \theta \vec{U}$$

yazılabilir. Bu ifadenin türevi alınırsa, $\vec{d}_o$ vektörü sabit olduğundan

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \cos \theta \vec{D}_o' + \sin \theta \vec{U}' \\ &= \cos \theta (-\delta_o \vec{Y}_o) + \sin \theta (\mu_o \vec{Y}_o) \\ &= \vec{Y}_o (\mu_o \sin \theta - \delta_o \cos \theta) \end{aligned}$$

bulunur. $\vec{Y}_o$ vektörü sıfırdan farklı olduğundan $\mu_o \sin \theta - \delta_o \cos \theta = 0$ dır. Dolayısıyla buradan

$$\frac{\mu_o}{\delta_o} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta = sbt$$

elde edilir.

Tersine olarak $\frac{\mu_o}{\delta_o} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta = s b t$ olsun. Buradan $\mu_o \sin \theta = \delta_o \cos \theta$

yazılabilir.

$$\vec{d}_o = \cos \theta \vec{D}_o + \sin \theta \vec{U}$$

alalım. $\vec{d}_o$ vektörünün sabit olduğunu gösterelim. $\vec{d}_o = \cos \theta \vec{D}_o + \sin \theta \vec{U}$ ifadesinin türevini alıp (3.1) deki türev formülleri ve ardından $\mu_o \sin \theta = \delta_o \cos \theta$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} \vec{d}_o' &= \cos \theta \vec{D}_o' + \sin \theta \vec{U}' \\ &= \cos \theta (-\delta_o \vec{Y}_o) + \sin \theta (\mu_o \vec{Y}_o) \\ &= \vec{Y}_o (\mu_o \sin \theta - \delta_o \cos \theta) \\ &= \vec{Y}_o (\delta_o \cos \theta - \delta_o \cos \theta) \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla $\vec{d}_o$ sabit vektördür. Ayrıca $\langle \vec{D}_o, \vec{d}_o \rangle = \cos \theta$ olduğundan $\vec{d}_o$ sabit vektörü, $\vec{D}_o$ vektörü ile sabit açı yapar. α bir D_o -Darboux slant helistir. $\square$

Teorem 3.2.2 den aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 3.2.3: α , E^3 de S yüzeyi üzerinde kalan birim hızlı bir eğri ve Darboux çatısının eğrilikleri k_g, k_n ve τ_g olsun. α eğrisinin D_o -Darboux Slant helis olması için gerek ve yeter şart her $s \in I$ için

$$\sigma_o(s) = \left(\frac{\sqrt{k_n^2 + \tau_g^2}}{\frac{k_n^2}{k_n^2 + \tau_g^2} \left(\frac{\tau_g}{k_n} \right)' + k_g} \right) (s) \quad (3.16)$$

veya denk olarak

$$\sigma_o(s) = \left(\begin{array}{c} \frac{\sqrt{k_n^2 + \tau_g^2}}{-\frac{\tau_g^2}{k_n^2 + \tau_g^2} \left(\frac{k_n}{\tau_g} \right)' + k_g} \end{array} \right) (s)$$

fonksiyonunun sabit olmasıdır.

İspat: (3.14) eşitlikleri (3.15) te yazılırsa hemen görülür. $\square$

Sonuç 3.2.4: Oskülatör Darboux çatısına göre D_o -Darboux slant helisin eksenini

$$\vec{d}_o = \cos \theta \vec{D}_o + \sin \theta \vec{U} \quad (3.17)$$

şeklindedir.

Sonuç 3.2.5: D_o -Darboux slant helisin eksenini, Darboux çatısının vektörleri cinsinden

$$\vec{d}_o = \cos \theta \frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \vec{T} - \cos \theta \frac{k_n}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \vec{V} + \sin \theta \vec{U}$$

şeklindedir.

Sonuç 3.2.6: α eğrisinin D_o -Darboux slant helis olması için gerek ve yeter şart α eğrisinin isophote eğrisi olmasıdır.

İspat: α eğrisinin bir D_o -Darboux slant helis olduğunu kabul edelim. (3.17) eşitliğinin her iki tarafı $\vec{U}$ vektörü ile iç çarpılırsa

$$\langle \vec{d}_o, \vec{U} \rangle = \sin \theta = \text{sabit}$$

elde edilir. Bu da α eğrisinin isophote eğrisi olduğunu gösterir. $\square$

Sonuç 3.2.7: α , S yüzeyi üzerinde birim hızlı bir D_o -Darboux slant helis olsun. Bu durumda;

i) α nın S yüzeyi üzerinde $k_n \neq 0$ olan bir geodezik eğri olması için gerek ve yeter şart α nın

$$\vec{d}_o = \cos \theta \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 + \kappa^2}} \vec{T} + \sin \theta \vec{N} \mp \cos \theta \frac{\kappa}{\sqrt{\tau^2 + \kappa^2}} \vec{B}$$

eksenli bir Darboux helis (slant helis) olmasıdır.

ii) α nın S yüzeyi üzerinde $k_g \neq 0$ olan asimptotik bir eğri olması için gerek ve yeter şart α nın $\vec{d}_o = \cos \theta \vec{T} \mp \sin \theta \vec{B}$ eksenli bir helis olmasıdır.

iii) α , S yüzeyi üzerinde bir eğrilik çizgisi ise bu taktirde α düzlemsel bir eğridir.

İspat: i) α geodezik eğri ise $k_g = 0$ dır. Bu durumda (2.1) eşitlikleri kullanılarak $k_n = \mp \kappa$ ve $\tau_g = \tau$ elde edilir. α , D_o -Darboux Slant helis olduğundan bulunan değerler (3.16) da yazılırsa

$$\sigma_o = \frac{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{\frac{\kappa^2}{\kappa^2 + \tau^2} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'} = \frac{1}{\frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'} = \text{sabit}$$

bulunur. Teorem 2.1.22 (i) gereğince α bir Darboux helistir. Ayrıca Teorem 2.1.22 (ii) gereğince α bir slant helistir. Ayrıca Tanım 2.2.18 de verilen Darboux çatısı ile Frenet çatısı arasındaki ilişkiler, Sonuç 3.2.5 de yazılıp (2.1) eşitlikleri kullanılırsa, D_o -Darboux slant helisin Frenet çatısının vektörleri cinsinden ekseni

$$\vec{d}_o = \cos \theta \frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \vec{T} + \left(-\cos \theta \frac{k_n k_g}{\kappa \sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} + \sin \theta \frac{k_n}{\kappa} \right) \vec{N} + \left(\cos \theta \frac{k_n^2}{\kappa \sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} + \sin \theta \frac{k_g}{\kappa} \right) \vec{B}$$

şeklinde olur. $k_g = 0$, $k_n = \mp \kappa$ ve $\tau_g = \tau$ eşitlikleri burada yazılırsa α Darboux helisinin ekseni

$$\vec{d}_o = \cos \theta \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 + \kappa^2}} \vec{T} \mp \sin \theta \vec{N} + \cos \theta \frac{\kappa}{\sqrt{\tau^2 + \kappa^2}} \vec{B}$$

olarak bulunur.

Tersine olarak α , $\vec{d}_o = \cos \theta \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 + \kappa^2}} \vec{T} \mp \sin \theta \vec{N} + \cos \theta \frac{\kappa}{\sqrt{\tau^2 + \kappa^2}} \vec{B}$ eksenli bir

Darboux helis olsun. Darboux helisin ekseni ile yukarıda D_o -Darboux slant helisin

Frenet çatısına göre verilen eksen dikkate alınır $k_g = 0$ bulunur. α , S yüzeyi üzerinde geodezik bir eğridir.

ii) α asimptotik eğri ise $k_n = 0$ dır. (2.1) eşitlikleri kullanılarak $k_g = \mp \kappa$ ve $\tau_g = \tau$ elde edilir. α , D_o -Darboux slant helis olduğundan bulunan değerler (3.16) da yazılırsa

$$\sigma_o = \mp \frac{\tau}{\kappa} = \text{sabit}$$

bulunur. Teorem 2.1.18 gereğince α bir helistir. Ayrıca $k_g = \mp \kappa$, $\tau_g = \tau$ ve α nın asimptotik eğri olduğu, yukarıda D_o -Darboux slant helisin Frenet çatısına göre verilen ekseninde kullanılırsa α nın eksen $\vec{d}_o = \cos \theta \vec{T} \mp \sin \theta \vec{B}$ olarak bulunur.

Tersine olarak α , $\vec{d}_o = \cos \theta \vec{T} \mp \sin \theta \vec{B}$ eksenli bir helis olsun. Helisin eksen ile D_o -Darboux slant helisin Frenet çatısına göre eksen dikkate alınır $k_n = 0$ bulunur. α , S yüzeyi üzerinde asimptotik eğridir.

iii) α eğrilik çizgisi ise $\tau_g = 0$ dır. α , D_o -Darboux slant helis olduğundan (3.16) dan $\sigma_o = \frac{k_n}{k_g} = \text{sabit}$ elde edilir. ξ , Frenet çatısının $\vec{B}$ binormal vektörü ile $\vec{U}$ yüzey normali arasındaki açı olmak üzere (2.1) eşitlikleri kullanılırsa

$$\frac{k_n}{k_g} = \frac{\kappa \sin \xi}{\kappa \cos \xi} = \tan \xi = \text{sabit},$$

dolayısıyla $\xi = \text{sabit}$ bulunur. $\tau_g = \tau - \xi' = 0$ olduğundan $\tau = 0$ elde edilir. Yani α düzlemseldir.

3.3. D_o -Darboux Slant Helislerin OD-Çatısına Göre Diferansiyel Denklem Karakterizasyonları

Bu kısımda, ilk olarak E^3 de bir S yüzeyi üzerinde bulunan eğrilerin diferansiyel denklem karakterizasyonları, OD-çatısının elemanları olan $\vec{D}_o$, $\vec{U}$ ve $\vec{Y}_o$ vektörler alanlarına bağlı olarak verilecektir. Ardından D_o -Darboux slant helisler

için diferansiyel denklem karakterizasyonları, OD-çatısının elemanları olan $\vec{D}_o$, $\vec{U}$ ve $\vec{Y}_o$ vektörler alanlarına bağlı olarak verilecektir.

Teorem 3.3.1: S , E^3 de bir yüzey ve $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisini OD-çatısının $\vec{D}_o$ vektör alanına göre karakterize eden vektörel diferansiyel denklem $\mu_o \neq 0$ ve $\delta_o \neq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \vec{D}_o''' + \left[\mu_o \delta_o \left(\frac{1}{\mu_o \delta_o} \right)' + \delta_o \left(\frac{1}{\delta_o} \right)' \right] \vec{D}_o'' + \left\{ \mu_o \delta_o \left[\frac{1}{\mu_o} \left(\frac{1}{\delta_o} \right)' \right]' + \mu_o^2 + \delta_o^2 \right\} \vec{D}_o' \\ + \mu_o \delta_o \left(\frac{\delta_o}{\mu_o} \right)' \vec{D}_o = 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

şeklindedir.

İspat: (3.1) sisteminin üçüncü denklemden $\vec{U}$ vektörü yalnız bırakılırsa

$$\vec{U} = \frac{\delta_o}{\mu_o} \vec{D}_o - \frac{1}{\mu_o} \vec{Y}_o' \quad (3.19)$$

bulunur. (3.1) sisteminin ilk denklemden $\vec{Y}_o$ vektörü yalnız bırakılırsa $\vec{Y}_o = -\frac{1}{\delta_o} \vec{D}_o'$,

bulunan $\vec{Y}_o$ vektörü (3.1) in ikinci denkleminde yazılırsa

$$\vec{U}' = -\frac{\mu_o}{\delta_o} \vec{D}_o' \quad (3.20)$$

elde edilir. Bulunan $\vec{Y}_o$ ifadesinin iki yanının türevi alınır

$$\vec{Y}_o' = -\left(\frac{1}{\delta_o} \right)' \vec{D}_o' - \frac{1}{\delta_o} \vec{D}_o'', \text{ bulunan bu ifade (3.19) de yazılırsa}$$

$$\begin{aligned} \vec{U} &= \frac{\delta_o}{\mu_o} \vec{D}_o - \frac{1}{\mu_o} \left(-\left(\frac{1}{\delta_o} \right)' \vec{D}_o' - \frac{1}{\delta_o} \vec{D}_o'' \right) \\ &= \frac{1}{\mu_o \delta_o} \vec{D}_o'' + \frac{1}{\mu_o} \left(\frac{1}{\delta_o} \right)' \vec{D}_o' + \frac{\delta_o}{\mu_o} \vec{D}_o \end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen $\vec{U}$ vektörünün türevini alınırsa

$$\vec{U}' = \left(\frac{1}{\mu_o \delta_o} \right)' \vec{D}_o'' + \frac{1}{\mu_o \delta_o} \vec{D}_o''' + \left[\frac{1}{\mu_o} \left(\frac{1}{\delta_o} \right)' \right]' \vec{D}_o' + \frac{1}{\mu_o} \left(\frac{1}{\delta_o} \right)' \vec{D}_o'' + \left(\frac{\delta_o}{\mu_o} \right)' \vec{D}_o + \frac{\delta_o}{\mu_o} \vec{D}_o'$$

olur. Bu denklem düzenlenirse

$$\vec{U}' = \frac{1}{\mu_o \delta_o} \vec{D}_o''' + \left[\left(\frac{1}{\mu_o \delta_o} \right)' + \frac{1}{\mu_o} \left(\frac{1}{\delta_o} \right)' \right] \vec{D}_o'' + \left\{ \left[\frac{1}{\mu_o} \left(\frac{1}{\delta_o} \right)' \right]' + \frac{\delta_o}{\mu_o} \right\} \vec{D}_o' + \left(\frac{\delta_o}{\mu_o} \right)' \vec{D}_o \quad (3.21)$$

bulunur. (3.21), (3.20) de yerine yazılırsa

$$\frac{1}{\mu_o \delta_o} \vec{D}_o''' + \left[\left(\frac{1}{\mu_o \delta_o} \right)' + \frac{1}{\mu_o} \left(\frac{1}{\delta_o} \right)' \right] \vec{D}_o'' + \left\{ \left[\frac{1}{\mu_o} \left(\frac{1}{\delta_o} \right)' \right]' + \frac{\delta_o^2 + \mu_o^2}{\mu_o \delta_o} \right\} \vec{D}_o' + \left(\frac{\delta_o}{\mu_o} \right)' \vec{D}_o = 0$$

elde edilir. Elde edilen bu denklemin her iki tarafı $\mu_o \delta_o$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} & \vec{D}_o''' + \left[\mu_o \delta_o \left(\frac{1}{\mu_o \delta_o} \right)' + \delta_o \left(\frac{1}{\delta_o} \right)' \right] \vec{D}_o'' + \left\{ \mu_o \delta_o \left[\frac{1}{\mu_o} \left(\frac{1}{\delta_o} \right)' \right]' + \delta_o^2 + \mu_o^2 \right\} \vec{D}_o' \\ & + \mu_o \delta_o \left(\frac{\delta_o}{\mu_o} \right)' \vec{D}_o = 0 \end{aligned}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. □

Sonuç 3.3.2: S , E^3 de bir yüzey ve $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı bir D_o -Darboux slant helis olsun. α eğrisini $\vec{D}_o$ vektör alanına göre karakterize eden vektörel diferansiyel denklem, $\mu_o \neq 0$ ve $\delta_o \neq 0$ olmak üzere

$$\vec{D}_o''' + \left[\mu_o \delta_o \left(\frac{1}{\mu_o \delta_o} \right)' + \delta_o \left(\frac{1}{\delta_o} \right)' \right] \vec{D}_o'' + \left\{ \mu_o \delta_o \left[\frac{1}{\mu_o} \left(\frac{1}{\delta_o} \right)' \right]' + \delta_o^2 + \mu_o^2 \right\} \vec{D}_o' = 0$$

şeklindedir.

İspat: Teorem 3.3.1 de, E^3 de eğrileri OD-çatısının $\vec{D}_o$ elemanına göre karakterize eden genel diferansiyel denklemin (3.18) şeklinde olduğu gösterildi. Şimdi α eğrisi D_o -Darboux slant helis olduğunu kabul edelim. D_o -Darboux slant helis olma şartından $\frac{\mu_o}{\delta_o}$ ifadesi sabit olduğundan $\frac{\delta_o}{\mu_o}$ ifadesi de sabittir. Dolayısıyla $\left(\frac{\delta_o}{\mu_o}\right)' = 0$ ifadesi (3.18) denkleminde yazılırsa

$$\vec{D}_o''' + \left[\mu_o \delta_o \left(\frac{1}{\mu_o \delta_o} \right)' + \delta_o \left(\frac{1}{\delta_o} \right)' \right] \vec{D}_o'' + \left\{ \mu_o \delta_o \left[\frac{1}{\mu_o} \left(\frac{1}{\delta_o} \right)' \right] + \delta_o^2 + \mu_o^2 \right\} \vec{D}_o' = 0$$

denklemini elde edilir. □

Teorem 3.3.3: S , E^3 de bir yüzey ve $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisini OD-çatısının $\vec{U}$ vektör alanına göre karakterize eden vektörel diferansiyel denklem, $\mu_o \neq 0$ ve $\delta_o \neq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \vec{U}''' + \left[\mu_o \delta_o \left(\frac{1}{\mu_o \delta_o} \right)' + \mu_o \left(\frac{1}{\mu_o} \right)' \right] \vec{U}'' + \left\{ \mu_o \delta_o \left[\frac{1}{\delta_o} \left(\frac{1}{\mu_o} \right)' \right] + \mu_o^2 + \delta_o^2 \right\} \vec{U}' \\ + \mu_o \delta_o \left(\frac{\mu_o}{\delta_o} \right)' \vec{U} = 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

şeklindedir.

İspat: (3.1) sisteminin ikinci denkleminde $\vec{Y}_o = \frac{1}{\mu_o} \vec{U}'$ yazılabilir. Bu ifadenin türevi alınır

$$\vec{Y}_o' = \left(\frac{1}{\mu_o} \right)' \vec{U}' + \frac{1}{\mu_o} \vec{U}''$$

bulunur. Bu değer (3.1) in üçüncü denkleminde yazılıp $\vec{D}_o$ yalnız bırakılırsa

$$\vec{D}_o = \frac{1}{\mu_o \delta_o} \vec{U}'' + \frac{1}{\delta_o} \left(\frac{1}{\mu_o} \right)' \vec{U}' + \frac{\mu_o}{\delta_o} \vec{U}$$

elde edilir. Bulunan $\vec{D}_o$ vektörünün türevi alınırsa

$$\vec{D}_o' = \left(\frac{1}{\mu_o \delta_o} \right)' \vec{U}'' + \frac{1}{\mu_o \delta_o} \vec{U}''' + \left[\frac{1}{\delta_o} \left(\frac{1}{\mu_o} \right)' \right]' \vec{U}' + \frac{1}{\delta_o} \left(\frac{1}{\mu_o} \right)' \vec{U}'' + \left(\frac{\mu_o}{\delta_o} \right)' \vec{U} + \frac{\mu_o}{\delta_o} \vec{U}'$$

bulunur. Bu denklem düzenlenirse

$$\vec{D}_o' = \frac{1}{\mu_o \delta_o} \vec{U}''' + \left[\left(\frac{1}{\mu_o \delta_o} \right)' + \frac{1}{\delta_o} \left(\frac{1}{\mu_o} \right)' \right] \vec{U}'' + \left\{ \left[\frac{1}{\delta_o} \left(\frac{1}{\mu_o} \right)' \right]' + \frac{\mu_o}{\delta_o} \right\} \vec{U}' + \left(\frac{\mu_o}{\delta_o} \right)' \vec{U}$$

bulunur. (3.1) sisteminin ikinci denkleminde $\vec{Y}_o$ çekilip (3.1) in birinci denkleminde

yazılırsa $\vec{D}_o' = -\frac{\delta_o}{\mu_o} \vec{U}'$ olur. Bulunan $\vec{D}_o'$ vektörünün eşiti son denklemde yerine yazılırsa

$$-\frac{\delta_o}{\mu_o} \vec{U}' = \frac{1}{\mu_o \delta_o} \vec{U}''' + \left[\left(\frac{1}{\mu_o \delta_o} \right)' + \frac{1}{\delta_o} \left(\frac{1}{\mu_o} \right)' \right] \vec{U}'' + \left\{ \left[\frac{1}{\delta_o} \left(\frac{1}{\mu_o} \right)' \right]' + \frac{\mu_o}{\delta_o} \right\} \vec{U}' + \left(\frac{\mu_o}{\delta_o} \right)' \vec{U}$$

bulunur. Bu denklem düzenlenirse

$$\frac{1}{\mu_o \delta_o} \vec{U}''' + \left[\left(\frac{1}{\mu_o \delta_o} \right)' + \frac{1}{\delta_o} \left(\frac{1}{\mu_o} \right)' \right] \vec{U}'' + \left\{ \left[\frac{1}{\delta_o} \left(\frac{1}{\mu_o} \right)' \right]' + \frac{\mu_o}{\delta_o} + \frac{\delta_o}{\mu_o} \right\} \vec{U}' + \left(\frac{\mu_o}{\delta_o} \right)' \vec{U} = 0$$

elde edilir. Bulunan son denklem $\mu_o \delta_o$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} \vec{U}''' + \left[\mu_o \delta_o \left(\frac{1}{\mu_o \delta_o} \right)' + \mu_o \left(\frac{1}{\mu_o} \right)' \right] \vec{U}'' + \left\{ \mu_o \delta_o \left[\frac{1}{\delta_o} \left(\frac{1}{\mu_o} \right)' \right]' + \mu_o^2 + \delta_o^2 \right\} \vec{U}' \\ + \mu_o \delta_o \left(\frac{\mu_o}{\delta_o} \right)' \vec{U} = 0 \end{aligned}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. $\square$

Sonuç 3.3.4: S, E^3 de bir yüzey ve $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı bir D_o -Darboux slant helis olsun. α eğrisini $\vec{U}$ vektör alanına göre karakterize eden vektörel diferansiyel denklem

$$\vec{U}''' + \left[\mu_o \delta_o \left(\frac{1}{\mu_o \delta_o} \right)' + \mu_o \left(\frac{1}{\mu_o} \right)' \right] \vec{U}'' + \left\{ \mu_o \delta_o \left[\frac{1}{\delta_o} \left(\frac{1}{\mu_o} \right)' \right]' + \mu_o^2 + \delta_o^2 \right\} \vec{U}' = 0$$

şeklindedir. Burada $\mu_o \neq 0$ ve $\delta_o \neq 0$ dır.

İspat: Teorem 3.3.3 de, E^3 de eğrileri OD-çatısının $\vec{U}$ vektör alanına göre karakterize eden genel diferansiyel denklemin (3.22) şeklinde olduğu gösterildi. Şimdi α eğrisi D_o -Darboux slant helis olduğunu kabul edelim. D_o -Darboux slant

helis olma şartından $\frac{\mu_o}{\delta_o}$ ifadesi sabittir. Dolayısıyla $\left(\frac{\mu_o}{\delta_o} \right)' = 0$ ifadesi (3.22)

denkleminde yazılırsa

$$\vec{U}''' + \left[\mu_o \delta_o \left(\frac{1}{\mu_o \delta_o} \right)' + \mu_o \left(\frac{1}{\mu_o} \right)' \right] \vec{U}'' + \left\{ \mu_o \delta_o \left[\frac{1}{\delta_o} \left(\frac{1}{\mu_o} \right)' \right]' + \mu_o^2 + \delta_o^2 \right\} \vec{U}' = 0$$

denklemini elde edilir. $\square$

Teorem 3.3.5: S, E^3 de bir yüzey ve $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisini OD-çatısının $\vec{Y}_o$ vektör alanına göre karakterize eden vektörel diferansiyel denklem $n_1 \neq 0$ olmak üzere

$$\vec{Y}_o''' + \frac{1}{n_1}(n_1' - n_2)\vec{Y}_o'' + \frac{1}{n_1}(-n_2' + n_3)\vec{Y}_o' + \frac{1}{n_1}(-\delta_o + n_3')\vec{Y}_o = 0 \quad (3.23)$$

şeklindedir. Burada $n_1 = \frac{\mu_o}{\mu_o'\delta_o - \mu_o\delta_o'}$, $n_2 = \frac{1}{\delta_o}(1 + \delta_o'n_1)$ ve $n_3 = n_1(\mu_o^2 + \delta_o^2)$ dır.

İspat: (3.1) sisteminin üçüncü denkleminde

$$\vec{D}_o = \frac{1}{\delta_o}\vec{Y}_o' + \frac{\mu_o}{\delta_o}\vec{U} \quad (3.24)$$

yazılabilir. Bulunan ifadenin türevi alınıp ve OD-çatısının türev formülleri kullanılırsa

$$\frac{1}{\delta_o}\vec{Y}_o'' + \left(\frac{1}{\delta_o}\right)' \vec{Y}_o' + \frac{\mu_o^2 + \delta_o^2}{\delta_o}\vec{Y}_o + \left(\frac{\mu_o}{\delta_o}\right)' \vec{U} = 0$$

bulunur. Son denklemde $\vec{U}$ vektörü yalnız bırakılırsa

$$\vec{U} = -\frac{\delta_o}{\mu_o'\delta_o - \mu_o\delta_o'}\vec{Y}_o'' + \frac{\delta_o'}{\mu_o'\delta_o - \mu_o\delta_o'}\vec{Y}_o' - \frac{\delta_o(\mu_o^2 + \delta_o^2)}{\mu_o'\delta_o - \mu_o\delta_o'}\vec{Y}_o,$$

bulunan bu ifade (3.24) de yazılırsa, $n_1 = \frac{\mu_o}{\mu_o'\delta_o - \mu_o\delta_o'}$, $n_2 = \frac{1}{\delta_o}(1 + \delta_o'n_1)$ ve

$n_3 = n_1(\mu_o^2 + \delta_o^2)$ olmak üzere

$$\vec{D}_o = -n_1\vec{Y}_o'' + n_2\vec{Y}_o' - n_3\vec{Y}_o,$$

elde edilir. Son bulunan eşitliğin her iki yanının türevi alınıp OD-çatısının türev formülleri kullanılırsa

$$\vec{Y}_o''' + \frac{1}{n_1}(n_1' - n_2)\vec{Y}_o'' + \frac{1}{n_1}(-n_2' + n_3)\vec{Y}_o' + \frac{1}{n_1}(-\delta_o + n_3')\vec{Y}_o = 0$$

denklemini elde edilir. □

Teorem 3.3.6: S , E^3 de bir yüzey ve $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı bir D_o -Darboux slant helis olsun. α eğrisini $\vec{Y}_o$ vektör alanına göre karakterize eden vektörel diferansiyel denklem

$$\vec{Y}_o'' + \delta_o \left(\frac{1}{\delta_o} \right)' \vec{Y}_o' + (\mu_o^2 + \delta_o^2) \vec{Y}_o = 0$$

şeklindedir. Burada $\delta_o \neq 0$ dır.

İspat: (3.1) deki türev formüllerinin üçüncüsünden $\vec{D}_o$ vektörü yalnız bırakılırsa

$$\vec{D}_o = \frac{1}{\delta_o} \vec{Y}_o' + \frac{\mu_o}{\delta_o} \vec{U}$$

bulunur. Bu ifadenin türevi alınır

$$\vec{D}_o' = \left(\frac{1}{\delta_o} \right)' \vec{Y}_o' + \frac{1}{\delta_o} \vec{Y}_o'' + \left(\frac{\mu_o}{\delta_o} \right)' \vec{U} + \left(\frac{\mu_o}{\delta_o} \right) \vec{U}'$$

elde edilir. Burada $\vec{U}'$ yerine türev formüllerindeki eşiti yazılırsa

$$\vec{D}_o' = \left(\frac{1}{\delta_o} \right)' \vec{Y}_o' + \frac{1}{\delta_o} \vec{Y}_o'' + \left(\frac{\mu_o}{\delta_o} \right)' \vec{U} + \left(\frac{\mu_o^2}{\delta_o} \right) \vec{Y}_o$$

bulunur. Bulunan bu ifade (3.1) sisteminin birinci ifadesinde yerine yazılıp denklem düzenlenirse

$$\left(\frac{1}{\delta_o} \right)' \vec{Y}_o' + \frac{1}{\delta_o} \vec{Y}_o'' + \left(\frac{\mu_o}{\delta_o} \right)' \vec{U} + \left(\frac{\mu_o^2}{\delta_o} \right) \vec{Y}_o = -\delta_o \vec{Y}_o$$

$$\left(\frac{1}{\delta_o} \right)' \vec{Y}_o' + \frac{1}{\delta_o} \vec{Y}_o'' + \left(\frac{\mu_o}{\delta_o} \right)' \vec{U} + \left(\frac{\mu_o^2}{\delta_o} + \delta_o \right) \vec{Y}_o = 0$$

$$\frac{1}{\delta_o} \vec{Y}_o'' + \left(\frac{1}{\delta_o} \right)' \vec{Y}_o' + \left(\frac{\mu_o}{\delta_o} \right)' \vec{U} + \left(\frac{\mu_o^2 + \delta_o^2}{\delta_o} \right) \vec{Y}_o = 0$$

elde edilir. α eğrisi D_o -Darboux slant helis olduğundan $\left(\frac{\mu_o}{\delta_o} \right)' = 0$ dır. Dolayısıyla

denklem

$$\frac{1}{\delta_o} \vec{Y}_o'' + \left(\frac{1}{\delta_o} \right)' \vec{Y}_o' + \left(\frac{\mu_o^2 + \delta_o^2}{\delta_o} \right) \vec{Y}_o = 0$$

halini alır. Son olarak bu denklem δ_o ile çarpılırsa

$$\vec{Y}_o'' + \delta_o \left(\frac{1}{\delta_o} \right)' \vec{Y}_o' + (\mu_o^2 + \delta_o^2) \vec{Y}_o = 0$$

elde edilir. □

3.4. Yüzey Üzerinde D_o -Darboux Slant Helisin Elde Edilmesi

Bu kısımda, parametrik ve kapalı formda verilen bir yüzey üzerinde D_o -Darboux slant helis elde edilebilmek için yöntemler verilecektir.

3.4.1. Parametrik Formda Verilen Yüzey Üzerinde D_o -Darboux Slant Helisin Elde Edilmesi

S , E^3 uzayında $X = X(u, v)$ parametrizasyonu ile verilen bir yüzey olsun. $\alpha(s) = X(u(s), v(s))$, S yüzeyi üzerinde, sabit ve birim $\vec{d}_o$ doğrultusu ile sabit θ açısı yapan, Darboux çatısı $\{\vec{T}, \vec{V}, \vec{U}\}$ olan birim hızlı bir D_o -Darboux slant helis olsun. α eğrisini elde etmek için $u(s)$ ve $v(s)$ değerlerinin bulunması gerekir. İlk olarak $u(s)$ değerini bulalım.

$$\vec{\alpha}' = \vec{T} = \vec{X}_u \frac{du}{ds} + \vec{X}_v \frac{dv}{ds}, \quad \vec{U} = \frac{\vec{X}_u \times \vec{X}_v}{\|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\|}, \quad \vec{V} = \vec{U} \times \vec{T}$$

dir. $\vec{T}$ vektörünün ve $\vec{U}$ vektörünün eşiti $\vec{V}$ vektöründe yazılırsa

$$\vec{V} = \frac{1}{\|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\|} \left[(E\vec{X}_v - F\vec{X}_u) \frac{du}{ds} + (F\vec{X}_v - G\vec{X}_u) \frac{dv}{ds} \right]$$

bulunur [15]. Burada E, F, G birinci temel formun katsayılarıdır. α , D_o -Darboux slant helis olduğundan $\langle \vec{D}_o, \vec{d}_o \rangle = \cos \theta$ dır. Bu ifadede $\vec{D}_o$ vektörü yerine yazılırsa

$$\left\langle \frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \vec{T} - \frac{k_n}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \vec{V}, \vec{d}_o \right\rangle = \cos \theta \quad (3.25)$$

elde edilir. Yukarıda bulunan $\vec{T}$ ve $\vec{V}$ vektörleri (3.25) de yazılırsa

$$\left\langle \frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \left(\vec{X}_u \frac{du}{ds} + \vec{X}_v \frac{dv}{ds} \right) - \frac{k_n}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \left(\frac{1}{\|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\|} \left[(E\vec{X}_v - F\vec{X}_u) \frac{du}{ds} + (F\vec{X}_v - G\vec{X}_u) \frac{dv}{ds} \right] \right), \vec{d}_o \right\rangle = \cos \theta$$

bulunur. Bu ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned} & \frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \langle \vec{X}_u, \vec{d}_o \rangle \frac{du}{ds} + \frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \langle \vec{X}_v, \vec{d}_o \rangle \frac{dv}{ds} - \frac{k_n}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \frac{1}{\|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\|} E \langle \vec{X}_v, \vec{d}_o \rangle \frac{du}{ds} \\ & + \frac{k_n}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \frac{1}{\|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\|} F \langle \vec{X}_u, \vec{d}_o \rangle \frac{du}{ds} - \frac{k_n}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \frac{1}{\|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\|} F \langle \vec{X}_v, \vec{d}_o \rangle \frac{dv}{ds} \\ & + \frac{k_n}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} \frac{1}{\|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\|} G \langle \vec{X}_u, \vec{d}_o \rangle \frac{dv}{ds} = \cos \theta \end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan son denklemde işlem kolaylığı açısından

$$\frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} = \Gamma, \quad \frac{k_n}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}} = K, \quad \|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\| = \sqrt{EG - F^2} = N,$$

$$\langle \vec{X}_u, \vec{d}_o \rangle = L_o, \quad \langle \vec{X}_v, \vec{d}_o \rangle = M_o$$

kısaltmaları kullanılırsa, son ifade

$$\begin{aligned} & \Gamma L_o \frac{du}{ds} + \Gamma M_o \frac{dv}{ds} - K \frac{1}{N} E M_o \frac{du}{ds} + K \frac{1}{N} F L_o \frac{du}{ds} \\ & - K \frac{1}{N} F M_o \frac{dv}{ds} + K \frac{1}{N} G L_o \frac{dv}{ds} = \cos \theta \end{aligned}$$

olur. Bu ifadenin her iki yanı N ile çarpılırsa

$$\Gamma L_o N \frac{du}{ds} + \Gamma M_o N \frac{dv}{ds} - K E M_o \frac{du}{ds} + K F L_o \frac{du}{ds} - K F M_o \frac{dv}{ds} + K G L_o \frac{dv}{ds} = N \cos \theta$$

elde edilir. $\frac{du}{ds}$ ve $\frac{dv}{ds}$ parantezine alınır

$$((\Gamma N + K F) L_o - K E M_o) \frac{du}{ds} + ((\Gamma N - K F) M_o + K G L_o) \frac{dv}{ds} = N \cos \theta \quad (3.26)$$

bulunur. Bu ifadede $\frac{dv}{ds}$ yalnız bırakılırsa

$$\frac{dv}{ds} = \frac{N \cos \theta}{(\Gamma N - K F) M_o + K G L_o} - \frac{(\Gamma N + K F) L_o - K E M_o}{(\Gamma N - K F) M_o + K G L_o} \frac{du}{ds} \quad (3.27)$$

elde edilir. Ayrıca α eğrisi birim hızlı olduğundan

$$E \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2 F \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + G \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 = 1 \quad (3.28)$$

bulunur [15]. (3.27) ifadesi (3.28) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} E \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2 F \frac{du}{ds} \left(\frac{N \cos \theta}{(\Gamma N - K F) M_o + K G L_o} - \frac{(\Gamma N + K F) L_o - K E M_o}{(\Gamma N - K F) M_o + K G L_o} \frac{du}{ds} \right) \\ + G \left(\frac{N \cos \theta}{(\Gamma N - K F) M_o + K G L_o} - \frac{(\Gamma N + K F) L_o - K E M_o}{(\Gamma N - K F) M_o + K G L_o} \frac{du}{ds} \right)^2 = 1 \end{aligned}$$

denklemini elde edilir. Bu denklemde parantezler açılırsa

$$\begin{aligned} E \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2 F \frac{N \cos \theta}{(\Gamma N - K F) M_o + K G L_o} \frac{du}{ds} - 2 F \frac{(\Gamma N + K F) L_o - K E M_o}{(\Gamma N - K F) M_o + K G L_o} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 \\ + G \frac{N^2 \cos^2 \theta}{((\Gamma N - K F) M_o + K G L_o)^2} - 2 G N \cos \theta \frac{(\Gamma N + K F) L_o - K E M_o}{((\Gamma N - K F) M_o + K G L_o)^2} \frac{du}{ds} \\ + G \frac{((\Gamma N + K F) L_o - K E M_o)^2}{((\Gamma N - K F) M_o + K G L_o)^2} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 = 1 \end{aligned}$$

bulunur. Elde edilen son denklemde paydalar eşitlenirse

$$\begin{aligned}
& E \frac{((\Gamma N - KF)M_o + KGL_o)^2}{((\Gamma N - KF)M_o + KGL_o)^2} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2F \frac{N \cos \theta ((\Gamma N - KF)M_o + KGL_o)}{((\Gamma N - KF)M_o + KGL_o)^2} \frac{du}{ds} \\
& - 2F \frac{((\Gamma N + KF)L_o - KEM_o)((\Gamma N - KF)M_o + KGL_o)}{((\Gamma N - KF)M_o + KGL_o)^2} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 \\
& + G \frac{N^2 \cos^2 \theta}{((\Gamma N - KF)M_o + KGL_o)^2} - 2GN \cos \theta \frac{((\Gamma N + KF)L_o - KEM_o)}{((\Gamma N - KF)M_o + KGL_o)^2} \frac{du}{ds} \\
& + G \frac{((\Gamma N + KF)L_o - KEM_o)^2}{((\Gamma N - KF)M_o + KGL_o)^2} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 = 1
\end{aligned}$$

olur. Bu denklemin her iki tarafı $((\Gamma N - KF)M_o + KGL_o)^2$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
& E((\Gamma N - KF)M_o + KGL_o)^2 \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2FN \cos \theta ((\Gamma N - KF)M_o + KGL_o) \frac{du}{ds} \\
& - 2F((\Gamma N + KF)L_o - KEM_o)((\Gamma N - KF)M_o + KGL_o) \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + GN^2 \cos^2 \theta \\
& - 2GN \cos \theta ((\Gamma N + KF)L_o - KEM_o) \frac{du}{ds} + G((\Gamma N + KF)L_o - KEM_o)^2 \left(\frac{du}{ds} \right)^2 \\
& = ((\Gamma N - KF)M_o + KGL_o)^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\left(\frac{du}{ds} \right)^2$ ve $\frac{du}{ds}$ parantezine alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left[E((\Gamma N - KF)M_o + KGL_o)^2 - 2F((\Gamma N + KF)L_o - KEM_o)((\Gamma N - KF)M_o + KGL_o) \right] \left(\frac{du}{ds} \right)^2 \\
& + G((\Gamma N + KF)L_o - KEM_o)^2 \\
& + \left[\frac{2FN \cos \theta ((\Gamma N - KF)M_o + KGL_o)}{ds} - 2GN \cos \theta ((\Gamma N + KF)L_o - KEM_o) \right] \frac{du}{ds} + GN^2 \cos^2 \theta = ((\Gamma N - KF)M_o + KGL_o)^2
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilmiş olur. $\left(\frac{du}{ds} \right)^2$ ve $\frac{du}{ds}$ katsayılarındaki parantezler açılırsa

$$\begin{aligned}
& \left[E(\Gamma N - KF)^2 M_o^2 + 2E(\Gamma N - KF)KGL_o M_o + EK^2 G^2 L_o^2 \right. \\
& \quad - 2F(\Gamma N + KF)(\Gamma N - KF)L_o M_o - 2F(\Gamma N + KF)KGL_o^2 + \left. \left(\frac{du}{ds} \right)^2 \right. \\
& \quad 2F(\Gamma N - KF)KEM_o^2 + 2FK^2 EGL_o M_o + G(\Gamma N + KF)^2 L_o^2 \\
& \quad \left. - 2G(\Gamma N + KF)KEL_o M_o + GK^2 E^2 M_o^2 \right] \\
& + 2N \cos \theta \left[F\Gamma N M_o - KF^2 M_o + FKGL_o - G\Gamma N L_o - FKGL_o + GKEM_o \right] \frac{du}{ds} \\
& + GN^2 \cos^2 \theta = ((\Gamma N - KF)M_o + KGL_o)^2
\end{aligned}$$

bulunur. $\left(\frac{du}{ds}\right)^2$ ifadesinin katsayısı EM_o^2 , GL_o^2 ve $2L_oM_o$ parantezine, $\frac{du}{ds}$

ifadesinin katsayısı KM_o ve ΓN parantezine alınırsa

$$\left[\begin{array}{l} EM_o^2 \left((\Gamma N - KF)^2 + 2FK(\Gamma N - KF) + GK^2E \right) + \\ GL_o^2 \left((\Gamma N + KF)^2 - 2FK(\Gamma N + KF) + EK^2G \right) + \\ 2L_oM_o \left[\begin{array}{l} (\Gamma N - KF)EKG - F(\Gamma N + KF)(\Gamma N - KF) \\ -G(\Gamma N + KF)KE + FK^2EG \end{array} \right] \end{array} \right] \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + \\ 2N \cos \theta \left[KM_o(EG - F^2) + \Gamma N(FM_o - GL_o) \right] \frac{du}{ds} + GN^2 \cos^2 \theta = ((\Gamma N - KF)M_o + KGL_o)^2$$

elde edilir. $\left(\frac{du}{ds}\right)^2$ in katsayısındaki parantezler açılırsa

$$\left[\begin{array}{l} EM_o^2 \left[(\Gamma N)^2 - 2KF\Gamma N + (KF)^2 + 2KF\Gamma N - 2(KF)^2 + EK^2G \right] \\ + GL_o^2 \left[(\Gamma N)^2 + 2KF\Gamma N + (KF)^2 - 2KF\Gamma N - 2(KF)^2 + EK^2G \right] \\ + 2L_oM_o \left[\begin{array}{l} \Gamma NEKG - K^2EFG - F(\Gamma N)^2 + F^2\Gamma NK - F^2\Gamma NK \\ + F(KF)^2 - G\Gamma NKE - GK^2EF + FK^2EG \end{array} \right] \end{array} \right] \left(\frac{du}{ds} \right)^2 \\ + 2N \cos \theta \left[KM_o(EG - F^2) + \Gamma N(FM_o - GL_o) \right] \frac{du}{ds} + GN^2 \cos^2 \theta = ((\Gamma N - KF)M_o + KGL_o)^2$$

bulunur. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\left[\begin{array}{l} EM_o^2 \left[(\Gamma N)^2 - (KF)^2 + EK^2G \right] + GL_o^2 \left[(\Gamma N)^2 - (KF)^2 + EK^2G \right] \\ - 2FL_oM_o \left[(\Gamma N)^2 - (KF)^2 + EK^2G \right] \end{array} \right] \left(\frac{du}{ds} \right)^2 \\ + 2N \cos \theta \left[KM_o(EG - F^2) + \Gamma N(FM_o - GL_o) \right] \frac{du}{ds} \\ + GN^2 \cos^2 \theta = ((\Gamma N - KF)M_o + KGL_o)^2$$

elde edilir. Burada $(\Gamma N)^2 - (KF)^2 + EK^2G$ parantezine alınarak

$$\left[((\Gamma N)^2 - (KF)^2 + EK^2G) (EM_o^2 + GL_o^2 - 2FL_oM_o) \right] \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + \\ 2N \cos \theta \left[KM_o(EG - F^2) + \Gamma N(FM_o - GL_o) \right] \frac{du}{ds} \\ + GN^2 \cos^2 \theta = ((\Gamma N - KF)M_o + KGL_o)^2$$

bulunur. İşlem kolaylığı açısından $EM_o^2 + GL_o^2 - 2FL_oM_o = A_o$ kısaltması kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \left[\left((\Gamma N)^2 + K^2(EG - F^2) \right) A_o \right] \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2N \cos \theta \left[KM_o(EG - F^2) + \Gamma N(FM_o - GL_o) \right] \frac{du}{ds} \\ & + GN^2 \cos^2 \theta - \left((\Gamma N - KF)M_o + KGL_o \right)^2 = 0 \end{aligned}$$

ikinci dereceden denklemi elde edilir. Bu denklemin kökleri bize $\frac{du}{ds}$ ifadesini verir.

Bu denklemin diskriminantı

$$\begin{aligned} \Delta_o &= 4N^2 \cos^2 \theta \left[KM_o(EG - F^2) + \Gamma N(FM_o - GL_o) \right]^2 \\ & - 4A_o \left[\left((\Gamma N)^2 + K^2(EG - F^2) \right) \right] \left[GN^2 \cos^2 \theta - \left((\Gamma N - KF)M_o + KGL_o \right)^2 \right] \\ &= 4N^2 \cos^2 \theta \left[KM_o(EG - F^2) + \Gamma N(FM_o - GL_o) \right]^2 \\ & - 4A_o GN^2 \cos^2 \theta \left[\left((\Gamma N)^2 + K^2(EG - F^2) \right) \right] \\ & + 4A_o \left[\left((\Gamma N)^2 + K^2(EG - F^2) \right) \right] \left[\left((\Gamma N - KF)M_o + KGL_o \right)^2 \right] \end{aligned}$$

bulunur. Bu ifade düzenlenerek

$$\begin{aligned} \Delta_o &= 4N^2 \cos^2 \theta \left\{ \left[KM_o(EG - F^2) + \Gamma N(FM_o - GL_o) \right]^2 \right. \\ & \left. - A_o G \left[\left((\Gamma N)^2 + K^2(EG - F^2) \right) \right] \right. \\ & \left. + 4A_o \left[\left((\Gamma N)^2 + K^2(EG - F^2) \right) \right] \left[\left((\Gamma N - KF)M_o + KGL_o \right)^2 \right] \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Daha önce yapılan kısaltmalar bulunan diskriminantda yerine yazılırsa,
 $EG - F^2 = N^2$ ve $\Gamma^2 + K^2 = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} \Delta_o &= 4 \left\| \vec{X}_u \times \vec{X}_v \right\|^2 \cos^2 \theta \left\{ \left[\begin{aligned} & K(EG - F^2) \langle \vec{X}_v, \vec{d}_o \rangle \\ & + \Gamma \left\| \vec{X}_u \times \vec{X}_v \right\| (F \langle \vec{X}_v, \vec{d}_o \rangle - G \langle \vec{X}_u, \vec{d}_o \rangle) \end{aligned} \right]^2 \right. \\ & \left. - A_o G (EG - F^2) \right. \\ & \left. + 4A_o (EG - F^2) \left[\begin{aligned} & \left(\Gamma \left\| \vec{X}_u \times \vec{X}_v \right\| - KF \right) \langle \vec{X}_v, \vec{d}_o \rangle \right]^2 \right. \\ & \left. + KG \langle \vec{X}_u, \vec{d}_o \rangle \right] \right\} \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla aranan $\frac{du}{ds}$ ifadesi

$$\frac{du}{ds} = \frac{-2N \cos \theta \left[KM_o(EG - F^2) + \Gamma N(FM_o - GL_o) \right] \pm \sqrt{\Delta_o}}{2(EG - F^2)A_o}$$

şeklindedir. Yukarıdaki denklemde, yapılan kısaltmalar yerine yazılırsa

$$\frac{du}{ds} = \frac{-2 \left\| \vec{X}_u \times \vec{X}_v \right\| \cos \theta \left[K(EG - F^2) \left\langle \vec{X}_v, \vec{d}_o \right\rangle + \Gamma \left\| \vec{X}_u \times \vec{X}_v \right\| \left(F \left\langle \vec{X}_v, \vec{d}_o \right\rangle - G \left\langle \vec{X}_u, \vec{d}_o \right\rangle \right) \right] \pm \sqrt{\Delta_o}}{2(EG - F^2)A_o} \quad (3.29)$$

bulunur. Burada $\Gamma = \frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}}$, $K = \frac{k_n}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}}$ ve $EM_o^2 + GL_o^2 - 2FL_oM_o = A_o$ dır.

Şimdi benzer yolla $\frac{dv}{ds}$ ifadesini bulalım. (3.26) da $\frac{du}{ds}$ yalnız bırakılırsa

$$\frac{du}{ds} = \frac{N \cos \theta}{((\Gamma N + KF)L_o - KEM_o)} - \frac{((\Gamma N - KF)M_o + KGL_o)}{((\Gamma N + KF)L_o - KEM_o)} \frac{dv}{ds}$$

elde edilir. Bulunan $\frac{du}{ds}$ in eşiti (3.28) de yazılırsa

$$\begin{aligned} & E \left(\frac{N \cos \theta}{((\Gamma N + KF)L_o - KEM_o)} - \frac{((\Gamma N - KF)M_o + KGL_o)}{((\Gamma N + KF)L_o - KEM_o)} \frac{dv}{ds} \right)^2 \\ & + 2F \left(\frac{N \cos \theta}{((\Gamma N + KF)L_o - KEM_o)} - \frac{((\Gamma N - KF)M_o + KGL_o)}{((\Gamma N + KF)L_o - KEM_o)} \frac{dv}{ds} \right) \frac{dv}{ds} + G \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 = 1 \end{aligned}$$

bulunur. Parantezler açılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{EN^2 \cos^2 \theta}{((\Gamma N + KF)L_o - KEM_o)^2} - 2EN \cos \theta \frac{((\Gamma N - KF)M_o + KGL_o)}{((\Gamma N + KF)L_o - KEM_o)^2} \frac{dv}{ds} \\ & + E \frac{((\Gamma N - KF)M_o + KGL_o)^2}{((\Gamma N + KF)L_o - KEM_o)^2} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + \frac{2FN \cos \theta}{(\Gamma N + KF)L_o - KEM_o} \frac{dv}{ds} \\ & - \frac{2F((\Gamma N - KF)M_o + KGL_o)}{((\Gamma N + KF)L_o - KEM_o)} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + G \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 = 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Paydalar eşitlenirse

$$\begin{aligned}
& \frac{EN^2 \cos^2 \theta}{((\Gamma N + KF)L_o - KEM_o)^2} - 2EN \cos \theta \frac{((\Gamma N - KF)M_o + KGL_o)}{((\Gamma N + KF)L_o - KEM_o)^2} \frac{dv}{ds} \\
& + E \frac{((\Gamma N - KF)M_o + KGL_o)^2}{((\Gamma N + KF)L_o - KEM_o)^2} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + \frac{2FN \cos \theta ((\Gamma N + KF)L_o - KEM_o)}{((\Gamma N + KF)L_o - KEM_o)^2} \frac{dv}{ds} \\
& - \frac{2F ((\Gamma N - KF)M_o + KGL_o)((\Gamma N + KF)L_o - KEM_o)}{((\Gamma N + KF)L_o - KEM_o)^2} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \\
& + G \frac{((\Gamma N + KF)L_o - KEM_o)^2}{((\Gamma N + KF)L_o - KEM_o)^2} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 = 1
\end{aligned}$$

bulunur. Denklemin iki tarafı $((\Gamma N + KF)L_o - KEM_o)^2$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
& EN^2 \cos^2 \theta - 2EN \cos \theta ((\Gamma N - KF)M_o + KGL_o) \frac{dv}{ds} \\
& + E ((\Gamma N - KF)M_o + KGL_o)^2 \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + 2FN \cos \theta ((\Gamma N + KF)L_o - KEM_o) \frac{dv}{ds} \\
& - 2F ((\Gamma N - KF)M_o + KGL_o)((\Gamma N + KF)L_o - KEM_o) \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \\
& + G ((\Gamma N + KF)L_o - KEM_o)^2 \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 = ((\Gamma N + KF)L_o - KEM_o)^2
\end{aligned}$$

elde edilir. $\left(\frac{dv}{ds} \right)^2$ ve $\left(\frac{dv}{ds} \right)$ parantezine alınır

$$\begin{aligned}
& \left[E ((\Gamma N - KF)M_o + KGL_o)^2 + G ((\Gamma N + KF)L_o - KEM_o)^2 \right] \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \\
& + \left[2FN \cos \theta ((\Gamma N + KF)L_o - KEM_o) - 2EN \cos \theta ((\Gamma N - KF)M_o + KGL_o) \right] \frac{dv}{ds} \\
& + EN^2 \cos^2 \theta = ((\Gamma N + KF)L_o - KEM_o)^2
\end{aligned}$$

bulunur. $\left(\frac{dv}{ds} \right)^2$ ve $\left(\frac{dv}{ds} \right)$ katsayılarındaki parantezler açılırsa

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{aligned} & E(\Gamma N - KF)^2 M_o^2 + 2E(\Gamma N - KF)KGL_o M_o + EK^2 G^2 L_o^2 \\ & - 2F(\Gamma N - KF)(\Gamma N + KF)L_o M_o + 2F(\Gamma N - KF)KEM_o^2 \\ & - 2F(\Gamma N + KF)KGL_o^2 + 2FK^2 EGL_o M_o + G(\Gamma N + KF)^2 L_o^2 \\ & - 2G(\Gamma N + KF)KEL_o M_o + GK^2 E^2 M_o^2 \end{aligned} \right] \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \\
& + \left[2N \cos \theta (F\Gamma N L_o + F^2 K L_o - FKEM_o - E\Gamma N M_o + FEKM_o - EKGL_o) \right] \left(\frac{dv}{ds} \right) \\
& + EN^2 \cos^2 \theta = ((\Gamma N + KF)L_o - KEM_o)^2
\end{aligned}$$

elde edilir. $\left(\frac{dv}{ds} \right)^2$ katsayısı EM_o^2 , GL_o^2 ve $2L_o M_o$ parantezine, $\left(\frac{dv}{ds} \right)$ katsayısı

$-KL$ ve ΓN parantezine alınır

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{aligned} & EM_o^2 ((\Gamma N - KF)^2 + 2F(\Gamma N - KF)K + GK^2 E) + \\ & GL_o^2 ((\Gamma N + KF)^2 - 2F(\Gamma N + KF)K + EK^2 G) + \\ & 2L_o M_o \left(\begin{aligned} & E(\Gamma N - KF)KG - F(\Gamma N - KF)(\Gamma N + KF) \\ & + FK^2 EG - G(\Gamma N + KF)KE \end{aligned} \right) \end{aligned} \right] \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \\
& + \left[2N \cos \theta (-KL_o(EG - F^2) + \Gamma N(FL_o - EM_o)) \right] \left(\frac{dv}{ds} \right) + EN^2 \cos^2 \theta \\
& = ((\Gamma N + KF)L_o - KEM_o)^2
\end{aligned}$$

elde edilir. $\left(\frac{dv}{ds} \right)^2$ katsayısını tekrar düzenleyerek

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{aligned} & EM_o^2 ((\Gamma N)^2 - 2KF\Gamma N + (KF)^2 + 2F\Gamma NK - 2F^2 K^2 + GK^2 E) + \\ & GL_o^2 ((\Gamma N)^2 + 2\Gamma NKF + (KF)^2 - 2F\Gamma NK - 2F^2 K^2 + EK^2 G) + \\ & 2L_o M_o \left(\begin{aligned} & \Gamma NEKG - K^2 EFG - F(\Gamma N)^2 + F(KF)^2 + FK^2 EG \\ & - G\Gamma NKE - K^2 EFG \end{aligned} \right) \end{aligned} \right] \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \\
& + \left[2N \cos \theta (-KL_o(EG - F^2) + \Gamma N(FL_o - EM_o)) \right] \left(\frac{dv}{ds} \right) + EN^2 \cos^2 \theta \\
& = ((\Gamma N + KF)L_o - KEM_o)^2
\end{aligned}$$

bulunur. Burada gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
& \left[EM_o^2 \left((\Gamma N)^2 + (KF)^2 - 2F^2 K^2 + GK^2 E \right) + \right. \\
& GL_o^2 \left((\Gamma N)^2 + (KF)^2 - 2F^2 K^2 + EK^2 G \right) + \left. \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \right. \\
& \left. 2L_o M_o \left(-K^2 EFG - F(\Gamma N)^2 + F(KF)^2 \right) \right] \\
& + \left[2N \cos \theta \left(-KL_o(EG - F^2) + \Gamma N(FL_o - EM_o) \right) \right] \left(\frac{dv}{ds} \right) + EN^2 \cos^2 \theta \\
& = \left((\Gamma N + KF)L_o - KEM_o \right)^2
\end{aligned}$$

elde edilir. $\left(\frac{dv}{ds} \right)^2$ katsayısı tekrar düzenlenirse

$$\begin{aligned}
& \left[EM_o^2 \left((\Gamma N)^2 + K^2(EG - F^2) \right) + \right. \\
& GL_o^2 \left((\Gamma N)^2 + K^2(EG - F^2) \right) - \left. \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \right. \\
& \left. 2FL_o M_o \left((\Gamma N)^2 + K^2(EG - F^2) \right) \right] \\
& + \left[2N \cos \theta \left(-KL_o(EG - F^2) + \Gamma N(FL_o - EM_o) \right) \right] \left(\frac{dv}{ds} \right) + EN^2 \cos^2 \theta \\
& = \left((\Gamma N + KF)L_o - KEM_o \right)^2
\end{aligned}$$

bulunur. $\left(\frac{dv}{ds} \right)^2$ in katsayısı $(\Gamma N)^2 + K^2(EG - F^2)$ parantezine alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left[\left(EM_o^2 - 2FL_o M_o + GL_o^2 \right) \left((\Gamma N)^2 + K^2(EG - F^2) \right) \right] \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \\
& + \left[2N \cos \theta \left(-KL_o(EG - F^2) + \Gamma N(FL_o - EM_o) \right) \right] \left(\frac{dv}{ds} \right) \\
& + EN^2 \cos^2 \theta - \left((\Gamma N + KF)L_o - KEM_o \right)^2 = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Daha önce kullanılan $EM_o^2 - 2FL_o M_o + GL_o^2 = A_o$ kısaltması tekrar kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \left[A_o \left((\Gamma N)^2 + K^2(EG - F^2) \right) \right] \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \\
& + \left[2N \cos \theta \left(-KL_o(EG - F^2) + \Gamma N(FL_o - EM_o) \right) \right] \left(\frac{dv}{ds} \right) \\
& + EN^2 \cos^2 \theta - \left((\Gamma N + KF)L_o - KEM_o \right)^2 = 0
\end{aligned}$$

ikinci dereceden denklemi elde edilir. Bu denklemin kökleri bize $\frac{dv}{ds}$ i verir.

Denklemin diskriminantı hesaplanırsa

$$\Delta_o^* = 4N^2 \cos^2 \theta \left[\left(\Gamma N (FL_o - EM_o) - KL_o (EG - F^2) \right)^2 - AE \left((\Gamma N)^2 + K^2 (EG - F^2) \right) \right] + 4A_o \left((\Gamma N)^2 + K^2 (EG - F^2) \right) (\Gamma N + KF) L_o - KEM_o)^2$$

bulunur. Yapılan kısaltmalar bulunan Δ^* da yerine yazılırsa, $EG - F^2 = N^2$ ve $\Gamma^2 + K^2 = 1$ olduğundan

$$\Delta_o^* = 4 \left\| \vec{X}_u \times \vec{X}_v \right\|^2 \cos^2 \theta \left[\left(\Gamma \left\| \vec{X}_u \times \vec{X}_v \right\| \left(F \langle \vec{X}_u, \vec{d}_o \rangle - E \langle \vec{X}_v, \vec{d}_o \rangle \right) - K \langle \vec{X}_u, \vec{d}_o \rangle (EG - F^2) \right)^2 - A_o E (EG - F^2) \right] + 4A_o (EG - F^2) \left(\left(\Gamma \left\| \vec{X}_u \times \vec{X}_v \right\| + KF \right) \langle \vec{X}_u, \vec{d}_o \rangle \right)^2 - KE \langle \vec{X}_v, \vec{d}_o \rangle$$

elde edilir. Dolayısıyla denklemin kökleri

$$\frac{dv}{ds} = \frac{-2N \cos \theta \left(-KL_o (EG - F^2) + \Gamma N (FL_o - EM_o) \right) \pm \sqrt{\Delta_o^*}}{2(EG - F^2)A_o}$$

ile bulunur. Daha önce yaptığımız kısaltmalar yerine yazılırsa

$$\frac{dv}{ds} = \frac{-2 \left\| \vec{X}_u \times \vec{X}_v \right\| \cos \theta \left[-K(EG - F^2) \langle \vec{X}_u, \vec{d}_o \rangle + \Gamma \left\| \vec{X}_u \times \vec{X}_v \right\| (F \langle \vec{X}_u, \vec{d}_o \rangle - E \langle \vec{X}_v, \vec{d}_o \rangle) \right] \pm \sqrt{\Delta_o^*}}{2(EG - F^2)A_o} \quad (3.30)$$

elde edilir. Burada $\Gamma = \frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}}$, $K = \frac{k_n}{\sqrt{\tau_g^2 + k_n^2}}$ ve $EM_o^2 + GL_o^2 - 2FL_oM_o = A_o$ dır.

Dolayısıyla (3.29) ve (3.30) dan

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{du}{ds} &= \frac{-2 \left\| \vec{X}_u \times \vec{X}_v \right\| \cos \theta \left[K(EG - F^2) \langle \vec{X}_v, \vec{d}_o \rangle + \Gamma \left\| \vec{X}_u \times \vec{X}_v \right\| (F \langle \vec{X}_v, \vec{d}_o \rangle - G \langle \vec{X}_u, \vec{d}_o \rangle) \right] \pm \sqrt{\Delta}}{2(EG - F^2)A_o} \\ \frac{dv}{ds} &= \frac{-2 \left\| \vec{X}_u \times \vec{X}_v \right\| \cos \theta \left[-K(EG - F^2) \langle \vec{X}_u, \vec{d}_o \rangle + \Gamma \left\| \vec{X}_u \times \vec{X}_v \right\| (F \langle \vec{X}_u, \vec{d}_o \rangle - E \langle \vec{X}_v, \vec{d}_o \rangle) \right] \pm \sqrt{\Delta_o^*}}{2(EG - F^2)A_o} \end{aligned} \right. \quad (3.31)$$

diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Bu diferansiyel denklem sistemi

$$u(s_0) = u_0$$

$$v(s_0) = v_0$$

başlangıç noktası ile birlikte çözülüp bulunan değerler $X(u, v)$ de yazılırsa S yüzeyi üzerinde istenen D_o -Darboux slant helis elde edilir.

3.4.2. Kapalı Formda Verilen Yüzey Üzerinde D_o -Darboux Slant Helisin Elde Edilmesi

S , E^3 uzayında $f(x, y, z) = 0$ kapalı formu ile verilen bir yüzey olsun. $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$, S yüzeyi üzerinde, sabit ve birim $\vec{d}_o = (a, b, c)$ doğrultusu ile sabit θ açısı yapan, Darboux çatısı $\{\vec{T}, \vec{V}, \vec{U}\}$ olan birim hızlı bir D_o -Darboux slant helis olsun. α eğrisini elde etmek için $x(s), y(s)$ ve $z(s)$ değerlerinin bulunması gerekir. $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ ve $\vec{e}_3$, E^3 uzayının standart baz vektörleri olmak üzere Darboux çatısının elemanları;

$$\vec{T} = \vec{\alpha}' = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right),$$

$$\vec{U} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \frac{1}{\|\nabla f\|} (f_x, f_y, f_z)$$

$$\vec{V} = \vec{U} \times \vec{T} = \frac{1}{\|\nabla f\|} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ f_x & f_y & f_z \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \end{vmatrix} = \frac{1}{\|\nabla f\|} \left(f_y \frac{dz}{ds} - f_z \frac{dy}{ds}, f_z \frac{dx}{ds} - f_x \frac{dz}{ds}, f_x \frac{dy}{ds} - f_y \frac{dx}{ds} \right)$$

şeklindedir [15]. Bulunan $\vec{T}$ ve $\vec{V}$ vektörleri, $\vec{D}_o$ vektörünün normlanmış hali olan

$$\vec{D}_o(s) = \frac{\tau_g(s)}{\sqrt{\tau_g^2(s) + k_n^2(s)}} \vec{T}(s) - \frac{k_n(s)}{\sqrt{\tau_g^2(s) + k_n^2(s)}} \vec{V}(s) \text{ vektöründe yerine yazılırsa}$$

$$\vec{D}_o(s) = \frac{\tau_g(s)}{\sqrt{\tau_g^2(s) + k_n^2(s)}} \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right) - \frac{k_n(s)}{\sqrt{\tau_g^2(s) + k_n^2(s)}} \frac{1}{\|\nabla f\|} \left(f_y \frac{dz}{ds} - f_z \frac{dy}{ds}, f_z \frac{dx}{ds} - f_x \frac{dz}{ds}, f_x \frac{dy}{ds} - f_y \frac{dx}{ds} \right)$$

elde edilir. α , D_o -Darboux slant helis olduğundan $\langle \vec{D}_o, \vec{d}_o \rangle = \cos \theta$ dır. $\vec{d}_o$ vektörü ve yukarıda bulunan $\vec{D}_o$ vektörü yerine yazılırsa

$$\left\langle \frac{\tau_g(s)}{\sqrt{\tau_g^2(s) + k_n^2(s)}} \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right) - \frac{k_n(s)}{\sqrt{\tau_g^2(s) + k_n^2(s)}} \frac{1}{\|\nabla \vec{f}\|} \left(f_y \frac{dz}{ds} - f_z \frac{dy}{ds}, f_z \frac{dx}{ds} - f_x \frac{dz}{ds}, f_x \frac{dy}{ds} - f_y \frac{dx}{ds} \right), (a, b, c) \right\rangle = \cos \theta$$

bulunur. Burada işlem kolaylığı için $\frac{\tau_g(s)}{\sqrt{\tau_g^2(s) + k_n^2(s)}} = \Gamma$ ve $\frac{k_n(s)}{\sqrt{\tau_g^2(s) + k_n^2(s)}} = K$

alınıp ifade düzenlenirse

$$\Gamma \left\langle \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right), (a, b, c) \right\rangle - \frac{K}{\|\nabla \vec{f}\|} \left\langle \left(f_y \frac{dz}{ds} - f_z \frac{dy}{ds}, f_z \frac{dx}{ds} - f_x \frac{dz}{ds}, f_x \frac{dy}{ds} - f_y \frac{dx}{ds} \right), (a, b, c) \right\rangle = \cos \theta$$

elde edilir. Buradaki iç çarpım işlemleri yapılırsa

$$\Gamma a \frac{dx}{ds} + \Gamma b \frac{dy}{ds} + \Gamma c \frac{dz}{ds} - \frac{K}{\|\nabla \vec{f}\|} a f_y \frac{dz}{ds} + \frac{K}{\|\nabla \vec{f}\|} a f_z \frac{dy}{ds} - \frac{K}{\|\nabla \vec{f}\|} b f_z \frac{dx}{ds} + \frac{K}{\|\nabla \vec{f}\|} b f_x \frac{dz}{ds} - \frac{K}{\|\nabla \vec{f}\|} c f_x \frac{dy}{ds} + \frac{K}{\|\nabla \vec{f}\|} c f_y \frac{dx}{ds} = \cos \theta$$

bulunur. $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ ve $\frac{dz}{ds}$ parantezine alınırsa

$$\left(\Gamma a - \frac{K}{\|\nabla \vec{f}\|} b f_z + \frac{K}{\|\nabla \vec{f}\|} c f_y \right) \frac{dx}{ds} + \left(\Gamma b + \frac{K}{\|\nabla \vec{f}\|} a f_z - \frac{K}{\|\nabla \vec{f}\|} c f_x \right) \frac{dy}{ds} + \left(\Gamma c - \frac{K}{\|\nabla \vec{f}\|} a f_y + \frac{K}{\|\nabla \vec{f}\|} b f_x \right) \frac{dz}{ds} = \cos \theta$$

elde edilir. Her iki taraf $\|\nabla \vec{f}\|$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} & \left(\Gamma a \|\nabla \vec{f}\| - K(bf_z - cf_y) \right) \frac{dx}{ds} + \left(\Gamma b \|\nabla \vec{f}\| - K(cf_x - af_z) \right) \frac{dy}{ds} \\ & + \left(\Gamma c \|\nabla \vec{f}\| - K(af_y - bf_x) \right) \frac{dz}{ds} = \|\nabla \vec{f}\| \cos \theta \end{aligned} \quad (3.32)$$

bulunur. Ayrıca $\langle T, U \rangle = 0$ olduğundan

$$f_x \frac{dx}{ds} + f_y \frac{dy}{ds} + f_z \frac{dz}{ds} = 0 \quad (3.33)$$

dır [15]. Burada $\frac{dy}{ds}$ yalnız bırakılırsa

$$\frac{dy}{ds} = -\frac{f_x}{f_y} \frac{dx}{ds} - \frac{f_z}{f_y} \frac{dz}{ds}$$

bulunur. Bu ifade (3.32) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \left(a\Gamma \|\nabla \vec{f}\| - K(bf_z - cf_y) \right) \frac{dx}{ds} + \left(-\frac{f_x}{f_y} \frac{dx}{ds} - \frac{f_z}{f_y} \frac{dz}{ds} \right) \left(b\Gamma \|\nabla \vec{f}\| - K(cf_x - af_z) \right) \\ & + \left(c\Gamma \|\nabla \vec{f}\| - K(af_y - bf_x) \right) \frac{dz}{ds} = \|\nabla \vec{f}\| \cos \theta \end{aligned}$$

elde edilir. Parantezler açılırsa

$$\begin{aligned} & \left(a\Gamma \|\nabla \vec{f}\| - K(bf_z - cf_y) \right) \frac{dx}{ds} + \left(-\frac{f_x}{f_y} \right) \left(b\Gamma \|\nabla \vec{f}\| - K(cf_x - af_z) \right) \frac{dx}{ds} \\ & + \left(-\frac{f_z}{f_y} \right) \left(b\Gamma \|\nabla \vec{f}\| - K(cf_x - af_z) \right) \frac{dz}{ds} + \left(c\Gamma \|\nabla \vec{f}\| - K(af_y - bf_x) \right) \frac{dz}{ds} = \|\nabla \vec{f}\| \cos \theta \end{aligned}$$

bulunur. Denklemin iki tarafı f_y ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} & \left(a\Gamma \|\nabla \vec{f}\| f_y - Kf_y(bf_z - cf_y) \right) \frac{dx}{ds} + (-f_x) \left(b\Gamma \|\nabla \vec{f}\| - K(cf_x - af_z) \right) \frac{dx}{ds} \\ & + (-f_z) \left(b\Gamma \|\nabla \vec{f}\| - K(cf_x - af_z) \right) \frac{dz}{ds} + \left(c\Gamma \|\nabla \vec{f}\| f_y - Kf_y(af_y - bf_x) \right) \frac{dz}{ds} = \|\nabla \vec{f}\| f_y \cos \theta \end{aligned}$$

elde edilir. $-f_x$ ve $-f_z$ ifadeleri paranteze dağıtılırsa

$$\begin{aligned}
& \left(a\Gamma \|\nabla \vec{f}\| f_y - K f_y (b f_z - c f_y) \right) \frac{dx}{ds} + \left(-b\Gamma \|\nabla \vec{f}\| f_x + K f_x (c f_x - a f_z) \right) \frac{dx}{ds} \\
& + \left(-b\Gamma \|\nabla \vec{f}\| f_z + K f_z (c f_x - a f_z) \right) \frac{dz}{ds} + \left(c\Gamma \|\nabla \vec{f}\| f_y - K f_y (a f_y - b f_x) \right) \frac{dz}{ds} \\
& = \|\nabla \vec{f}\| f_y \cos \theta
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $\frac{dx}{ds}$ ve $\frac{dz}{ds}$ parantezine alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left(\Gamma \|\nabla \vec{f}\| (a f_y - b f_x) - K [f_y (b f_z - c f_y) - f_x (c f_x - a f_z)] \right) \frac{dx}{ds} \\
& + \left(\Gamma \|\nabla \vec{f}\| (c f_y - b f_z) - K [f_y (a f_y - b f_x) - f_z (c f_x - a f_z)] \right) \frac{dz}{ds} = \|\nabla \vec{f}\| f_y \cos \theta
\end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan denklemde

$$\Gamma \|\nabla \vec{f}\| (a f_y - b f_x) - K [f_y (b f_z - c f_y) - f_x (c f_x - a f_z)] = \Omega_o \neq 0$$

denilerek $\frac{dx}{ds}$ yalnız bırakılırsa

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\Omega_o} \left\{ \|\nabla \vec{f}\| f_y \cos \theta - \left(\Gamma \|\nabla \vec{f}\| (c f_y - b f_z) - K [f_y (a f_y - b f_x) - f_z (c f_x - a f_z)] \right) \frac{dz}{ds} \right\} \quad (3.34)$$

bulunur. Benzer yolla $\frac{dy}{ds}$ i bulalım. (3.33) denkleminde $\frac{dx}{ds}$ yalnız bırakılırsa

$$\frac{dx}{ds} = -\frac{f_y}{f_x} \frac{dy}{ds} - \frac{f_z}{f_x} \frac{dz}{ds}$$

bulunur. Bu ifade (3.32) de yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \left(-\frac{f_y}{f_x} \frac{dy}{ds} - \frac{f_z}{f_x} \frac{dz}{ds} \right) \left(a\Gamma \|\nabla \vec{f}\| - K (b f_z - c f_y) \right) + \left(b\Gamma \|\nabla \vec{f}\| - K (c f_x - a f_z) \right) \frac{dy}{ds} \\
& + \left(c\Gamma \|\nabla \vec{f}\| - K (a f_y - b f_x) \right) \frac{dz}{ds} = \|\nabla \vec{f}\| \cos \theta
\end{aligned}$$

elde edilir. $\left(-\frac{f_y}{f_x} \frac{dy}{ds} - \frac{f_z}{f_x} \frac{dz}{ds} \right)$ ifadesi paranteze dağıtılırsa

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{f_y}{f_x}\right)\left(a\Gamma\|\nabla\vec{f}\|-K(bf_z-cf_y)\right)\frac{dy}{ds}+\left(-\frac{f_z}{f_x}\right)\left(a\Gamma\|\nabla\vec{f}\|-K(bf_z-cf_y)\right)\frac{dz}{ds} \\ & +\left(b\Gamma\|\nabla\vec{f}\|-K(cf_x-af_z)\right)\frac{dy}{ds}+\left(c\Gamma\|\nabla\vec{f}\|-K(af_y-bf_x)\right)\frac{dz}{ds}=\|\nabla\vec{f}\|\cos\theta \end{aligned}$$

bulunur. Bulunan bu ifadenin iki tarafı f_x ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} & (-f_y)\left(a\Gamma\|\nabla\vec{f}\|-K(bf_z-cf_y)\right)\frac{dy}{ds}+(-f_z)\left(a\Gamma\|\nabla\vec{f}\|-K(bf_z-cf_y)\right)\frac{dz}{ds} \\ & +\left(b\Gamma\|\nabla\vec{f}\|-K(cf_x-af_z)\right)\frac{dy}{ds}+\left(c\Gamma\|\nabla\vec{f}\|-K(af_y-bf_x)\right)\frac{dz}{ds}=\|\nabla\vec{f}\|f_x\cos\theta \end{aligned}$$

elde edilir. f_x , $-f_y$ ve $-f_z$ ifadeleri parantezlere dağıtılırsa

$$\begin{aligned} & \left(-a\Gamma\|\nabla\vec{f}\|f_y+Kf_y(bf_z-cf_y)\right)\frac{dy}{ds}+\left(-a\Gamma\|\nabla\vec{f}\|f_z+Kf_z(bf_z-cf_y)\right)\frac{dz}{ds} \\ & +\left(b\Gamma\|\nabla\vec{f}\|f_x-Kf_x(cf_x-af_z)\right)\frac{dy}{ds}+\left(c\Gamma\|\nabla\vec{f}\|f_x-Kf_x(af_y-bf_x)\right)\frac{dz}{ds}=\|\nabla\vec{f}\|f_x\cos\theta \end{aligned}$$

bulunur. $\frac{dy}{ds}$ ve $\frac{dz}{ds}$ parantezine alınırsa

$$\begin{aligned} & \left(\Gamma\|\nabla\vec{f}\|(bf_x-af_y)-K\left[f_x(cf_x-af_z)-f_y(bf_z-cf_y)\right]\right)\frac{dy}{ds} \\ & +\left(\Gamma\|\nabla\vec{f}\|(cf_x-af_z)-K\left[f_x(af_y-bf_x)-f_z(bf_z-cf_y)\right]\right)\frac{dz}{ds}=\|\nabla\vec{f}\|f_x\cos\theta \end{aligned}$$

elde edilir. $\Gamma\|\nabla\vec{f}\|(af_y-bf_x)-K\left[f_y(bf_z-cf_y)-f_x(cf_x-af_z)\right]=\Omega_o \neq 0$ denilerek $\frac{dy}{ds}$ yalnız bırakılırsa

$$\frac{dy}{ds}=\frac{1}{\Omega_o}\left\{\left(\Gamma\|\nabla\vec{f}\|(cf_x-af_z)-K\left[f_x(af_y-bf_x)-f_z(bf_z-cf_y)\right]\right)\frac{dz}{ds}-\|\nabla\vec{f}\|f_x\cos\theta\right\} \quad (3.35)$$

bulunur. α eğrisi birim hızlı olduğundan

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1 \quad (3.36)$$

elde edilir [15]. (3.34) ve (3.35) eşitlikleri (3.36) da yerine yazılarak

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{\Omega_o} \left\{ \|\nabla \vec{f}\| f_y \cos \theta - \left(\Gamma \|\nabla \vec{f}\| (cf_y - bf_z) - K [f_y (af_y - bf_x) - f_z (cf_x - af_z)] \right) \frac{dz}{ds} \right\} \right)^2 \\
& + \left(\frac{1}{\Omega_o} \left\{ \left(\Gamma \|\nabla \vec{f}\| (cf_x - af_z) - K [f_x (af_y - bf_x) - f_z (bf_z - cf_y)] \right) \frac{dz}{ds} - \|\nabla \vec{f}\| f_x \cos \theta \right\} \right)^2 \\
& + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 = 1
\end{aligned}$$

bulunur. Burada kareler alınıp bulunan ifade de benzer olan ifadeler ortak çarpan parantezine alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{1}{\Omega_o^2} \left[\begin{aligned} & K^2 \left((af_y - bf_x)^2 (f_x^2 + f_y^2 + 2f_z^2) + \right. \\ & \left. f_z^2 ((cf_x - af_z)^2 + (bf_z - cf_y)^2) \right) \\ & - 2\Gamma \|\nabla \vec{f}\| K \left((b^2 - a^2) f_x f_y f_z + c(f_x^2 + f_y^2)(af_y - bf_x) \right) \\ & + abf_z (f_x^2 - f_y^2) \\ & + \left(\Gamma \|\nabla \vec{f}\| \right)^2 (c^2 (f_x^2 + f_y^2) + (a^2 + b^2) f_z^2 - 2cf_z (af_x + bf_y)) \end{aligned} \right] + 1 \right\} \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 \\
& - \left\{ 2\|\nabla \vec{f}\| \cos \theta \frac{1}{\Omega_o^2} \left[\begin{aligned} & \Gamma \|\nabla \vec{f}\| [c(f_x^2 + f_y^2) - f_z (af_x + bf_y)] \\ & - K [(af_y - bf_x)(f_x^2 + f_y^2 + f_z^2)] \end{aligned} \right] \right\} \frac{dz}{ds} \\
& + \frac{1}{\Omega_o^2} \|\nabla \vec{f}\|^2 \cos^2 \theta (f_x^2 + f_y^2) - 1 = 0
\end{aligned}$$

ikinci derece denklemi elde edilir. Bu denklemin kökleri

$$\begin{aligned}
q_1 &= \frac{1}{\Omega_o^2} \left[\begin{aligned} & K^2 \left((af_y - bf_x)^2 (f_x^2 + f_y^2 + 2f_z^2) + \right. \\ & \left. f_z^2 ((cf_x - af_z)^2 + (bf_z - cf_y)^2) \right) \\ & - 2\Gamma \|\nabla \vec{f}\| K \left((b^2 - a^2) f_x f_y f_z + c(f_x^2 + f_y^2)(af_y - bf_x) \right) \\ & + abf_z (f_x^2 - f_y^2) \\ & + \left(\Gamma \|\nabla \vec{f}\| \right)^2 (c^2 (f_x^2 + f_y^2) + (a^2 + b^2) f_z^2 - 2cf_z (af_x + bf_y)) \end{aligned} \right] + 1 \\
q_2 &= -2\|\nabla \vec{f}\| \cos \theta \frac{1}{\Omega_o^2} \left[\begin{aligned} & \Gamma \|\nabla \vec{f}\| [c(f_x^2 + f_y^2) - f_z (af_x + bf_y)] \\ & - K [(af_y - bf_x)(f_x^2 + f_y^2 + f_z^2)] \end{aligned} \right] \\
q_3 &= \frac{1}{\Omega_o^2} \|\nabla \vec{f}\|^2 \cos^2 \theta (f_x^2 + f_y^2) - 1
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\frac{dz}{ds} = \frac{-q_2 \pm \sqrt{q_2^2 - 4q_1q_3}}{2q_1} \quad (3.37)$$

ile bulunur. Bulunan bu ifade (3.34) ve (3.35) de yerine yazılırsa

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\Omega_o} \left\{ \begin{array}{l} \|\nabla \vec{f}\| f_y \cos \theta \\ \left(\Gamma \|\nabla \vec{f}\| (cf_y - bf_z) - K [f_y (af_y - bf_x) - f_z (cf_x - af_z)] \right) \left(\frac{-q_2 \pm \sqrt{q_2^2 - 4q_1q_3}}{2q_1} \right) \end{array} \right\} \\ \frac{dy}{ds} = \frac{1}{\Omega_o} \left\{ \begin{array}{l} \left(\Gamma \|\nabla \vec{f}\| (cf_x - af_z) - K [f_x (af_y - bf_x) - f_z (bf_z - cf_y)] \right) \left(\frac{-q_2 \pm \sqrt{q_2^2 - 4q_1q_3}}{2q_1} \right) \\ -\|\nabla \vec{f}\| f_x \cos \theta \end{array} \right\} \\ \frac{dz}{ds} = \frac{-q_2 \pm \sqrt{q_2^2 - 4q_1q_3}}{2q_1} \end{array} \right. \quad (3.38)$$

diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Böylece

$$x(s_0) = x_0$$

$$y(s_0) = y_0$$

$$z(s_0) = z_0$$

başlangıç noktası ile birlikte bir başlangıç değer problemi elde ederiz. Bu problemin çözümü bize S üzerinde aradığımız D_o -Darboux slant helisi verir.

3.5. D_o -Darboux Slant Helis Örnekleri

Bu kısımda, D_o -Darboux slant helislere ait örnekler verilecektir. Örnek 3.5.1 de yüzey üzerinde verilen bir eğrinin D_o -Darboux slant helis olup olmadığı Sonuç 3.2.3 yardımıyla kontrol edilecektir. Örnek 3.5.2 de parametrik formda verilen bir yüzey üzerinde D_o -Darboux slant helis elde edebilmek için 3.4.1 bölümünde verilen

yöntem uygulanmıştır. Örnek 3.5.3 de kapalı formda verilen bir yüzey üzerinde D_o - Darboux slant helis elde edebilmek için 3.4.2 bölümünde verilen yöntem uygulanmıştır.

Örnek 3.5.1: $X(u, v) = (u, u \sin v, u \cos v)$ parametrizasyonu ile koni yüzeyi verilsin.

$u = \frac{s}{2}$ ve $v = \sqrt{2} \ln \frac{s}{2}$ ($s > 0$) alınarak bu yüzey üzerinde

$$\alpha(s) = \left(\frac{s}{2}, \frac{s}{2} \sin \left(\sqrt{2} \ln \frac{s}{2} \right), \frac{s}{2} \cos \left(\sqrt{2} \ln \frac{s}{2} \right) \right)$$

eğrisi elde edilir.

$$\vec{\alpha}' = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \sin \left(\sqrt{2} \ln \frac{s}{2} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \left(\sqrt{2} \ln \frac{s}{2} \right), \frac{1}{2} \cos \left(\sqrt{2} \ln \frac{s}{2} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \left(\sqrt{2} \ln \frac{s}{2} \right) \right),$$

$\|\vec{\alpha}'\| = 1$ olduğundan α eğrisi birim hızlı bir eğridir. Bu eğrinin Darboux çatısının elemanları bulunursa

$$\vec{T} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \sin \left(\sqrt{2} \ln \frac{s}{2} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \left(\sqrt{2} \ln \frac{s}{2} \right), \frac{1}{2} \cos \left(\sqrt{2} \ln \frac{s}{2} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \left(\sqrt{2} \ln \frac{s}{2} \right) \right),$$

$$\vec{X}_u = (1, \sin v, \cos v), \quad \vec{X}_v = (0, u \cos v, -u \sin v),$$

$$\vec{X}_u \times \vec{X}_v = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \sin v & \cos v \\ 0 & u \cos v & -u \sin v \end{vmatrix} = (-u, u \sin v, u \cos v), \quad \|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\| = u\sqrt{2}$$

olduğundan

$$\vec{U} = \frac{\vec{X}_u \times \vec{X}_v}{\|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1, \sin v, \cos v),$$

$$\vec{U}_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-1, \sin \left(\sqrt{2} \ln \frac{s}{2} \right), \cos \left(\sqrt{2} \ln \frac{s}{2} \right) \right),$$

$$\vec{V} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \left(\sqrt{2} \ln \frac{s}{2} \right) - \frac{1}{2} \sin \left(\sqrt{2} \ln \frac{s}{2} \right), -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \left(\sqrt{2} \ln \frac{s}{2} \right) - \frac{1}{2} \cos \left(\sqrt{2} \ln \frac{s}{2} \right) \right)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\alpha'' = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}s} \cos\left(\sqrt{2} \ln \frac{s}{2}\right) - \frac{1}{s} \sin\left(\sqrt{2} \ln \frac{s}{2}\right), -\frac{1}{\sqrt{2}s} \sin\left(\sqrt{2} \ln \frac{s}{2}\right) - \frac{1}{s} \cos\left(\sqrt{2} \ln \frac{s}{2}\right) \right)$$

$$\vec{U}'_\alpha = \left(0, \frac{1}{s} \cos\left(\sqrt{2} \ln \frac{s}{2}\right), -\frac{1}{s} \sin\left(\sqrt{2} \ln \frac{s}{2}\right) \right)$$

olduğundan

$$k_n = \langle \alpha'', \vec{U}_\alpha \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}s}$$

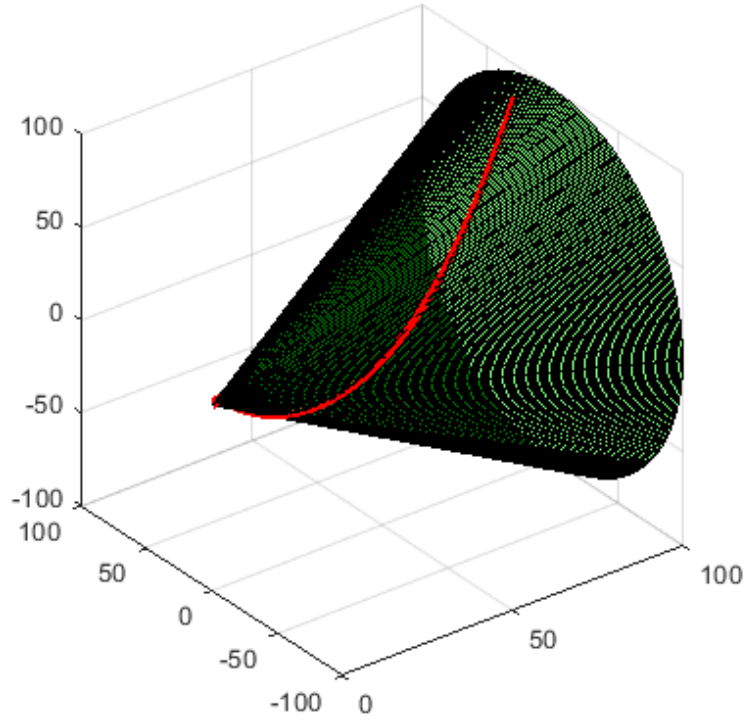
$$k_g = \langle \alpha'', \vec{V} \rangle = \frac{1}{s}$$

$$\tau_g = -\langle \vec{U}'_\alpha, \vec{V} \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}s}$$

bulunur. Bu değerler (3.16) denkleminde yazılırsa

$$\sigma_o = 1 = \text{sabit}$$

olduğundan α eğrisi S yüzeyi üzerinde bir D_o -Darboux slant helistir. Sonuç 3.2.6 gereğince α eğrisi isophote eğrisidir. Koni yüzeyi ve seçilen α eğrisi Şekil 3.5.1 de gösterilmiştir. Bu örnek [25] nolu referanstan türetilmiştir.



Şekil 3.5.1: $X(u, v) = (u, u \sin v, u \cos v)$ yüzeyi üzerinde

$$\alpha(s) = \left(\frac{s}{2}, \frac{s}{2} \sin \left(\sqrt{2} \ln \frac{s}{2} \right), \frac{s}{2} \cos \left(\sqrt{2} \ln \frac{s}{2} \right) \right) \text{ denklemlili } D_o\text{-Darboux slant helis}$$

Örnek 3.5.2: $X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$ ile verilen S yüzeyi üzerinde normal eğriliği $k_n = \frac{1}{\sqrt{2}s}$, geodezik burulması $\tau_g = \frac{1}{\sqrt{2}s}$ olan ve $d_o = (0, 0, 1)$ doğrultusu ile

$\theta = \frac{\pi}{4}$ açısı yapan D_o -Darboux slant helisi 3.4.1 bölümünde verilen yöntemle bulalım. Gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad K = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\vec{X}_u = (\cos v, \sin v, 1), \quad \vec{X}_v = (-u \sin v, u \cos v, 0),$$

$$\vec{X}_u \times \vec{X}_v = (-u \cos v, -u \sin v, u), \quad N = \|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\| = u\sqrt{2},$$

$$L_o = \langle \vec{X}_u, \vec{d}_o \rangle = 1, M_o = \langle \vec{X}_v, \vec{d}_o \rangle = 0,$$

$$E = \langle \vec{X}_u, \vec{X}_u \rangle = 2, F = \langle \vec{X}_u, \vec{X}_v \rangle = 0, G = \langle \vec{X}_v, \vec{X}_v \rangle = u^2,$$

$$EG - F^2 = 2u^2, \sqrt{EG - F^2} = u\sqrt{2},$$

$$\Delta_o = 0, \Delta_o^* = 0$$

bulunur. Bulunan bu değerler (3.31) de yerine yazılırsa

$$\begin{cases} \frac{du}{ds} = \frac{1}{2} \\ \frac{dv}{ds} = \frac{1}{u\sqrt{2}} \end{cases}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemin çözümünden c_1 ve c_2 integrasyon sabitleri olmak üzere

$$\begin{aligned} u &= \frac{s}{2} + c_1 \\ v &= \sqrt{2} \ln\left(\frac{s}{2} + c_1\right) + c_2 \end{aligned}$$

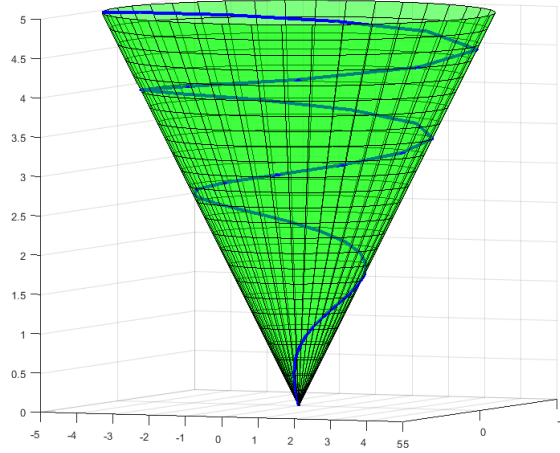
bulunur. Özel olarak $c_1 = c_2 = 0$ olarak alınırsa $s > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} u &= \frac{s}{2} \\ v &= \sqrt{2} \ln\left(\frac{s}{2}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan u ve v değerleri $X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$ de yerine yazılırsa, bu yüzey üzerinde

$$\alpha(s) = X(u(s), v(s)) = \left(\frac{s}{2} \cos(\sqrt{2} \ln \frac{s}{2}), \frac{s}{2} \sin(\sqrt{2} \ln \frac{s}{2}), \frac{s}{2} \right)$$

D_o -Darboux slant helisi elde edilir. Koni yüzeyi ve bulunan α eğrisi Şekil 3.5.2 de gösterilmiştir. Bu örnek [25] nolu referanstan türetilmiştir.



Şekil 3.5.2 : $X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$ yüzeyi üzerinde normal eğriliği $k_n = \frac{1}{\sqrt{2}s}$,

geodezik burulması $\tau_g = \frac{1}{\sqrt{2}s}$ olan ve $d_o = (0,0,1)$ doğrultusu ile $\theta = \frac{\pi}{4}$ açısı yapan

D_o -Darboux slant helis

Örnek 3.5.3: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ kapalı formu ile verilen küre yüzeyi üzerinde normal eğriliği $k_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ve geodezik burulması $\tau_g = \frac{1}{2}$ olan ve

$d_o = (0,0,1)$ doğrultusu ile $\theta = \frac{\pi}{3}$ açısı yapan D_o -Darboux slant helisi 3.4.2

bölümünde verilen yöntemle bulalım. Gerekli hesaplamalar yapılrısa

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad K = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$f_x = 2x, \quad f_y = 2y, \quad f_z = 2z, \quad \|\nabla f\| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\Gamma \|\nabla f\| = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \Omega_o = \frac{4\sqrt{6}}{3} (x^2 + y^2),$$

$$q_1 = \frac{3}{2} \left(1 + \frac{z^2}{x^2 + y^2} \right),$$

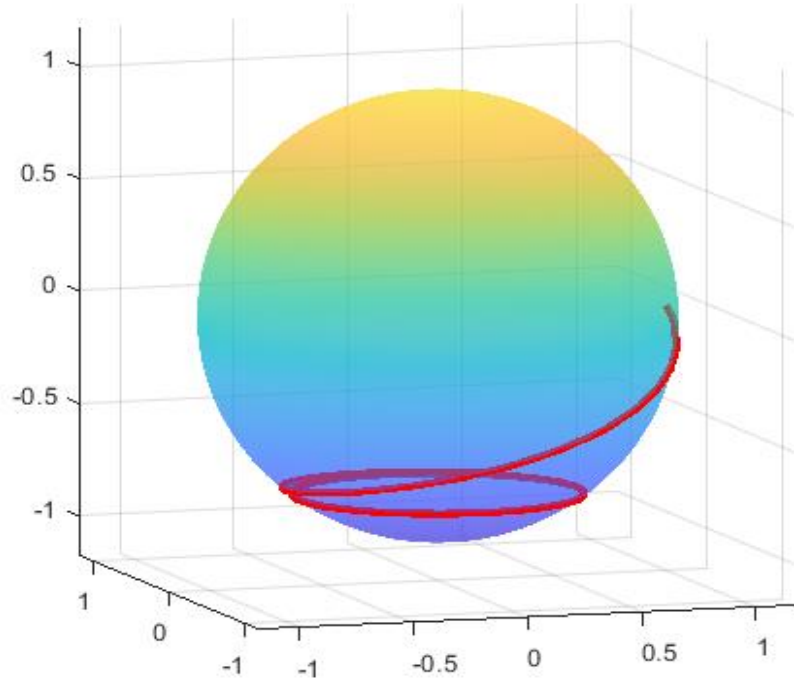
$$q_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 + \frac{z^2}{x^2 + y^2} \right),$$

$$q_3 = \frac{3}{8} \left(1 + \frac{z^2}{x^2 + y^2} \right) - 1$$

bulunur. Bulunan değerler (3.38) de yerine yazılırsa

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = \frac{1}{x^2 + y^2} \left[\frac{\sqrt{6}}{4} y \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} y \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + xz \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{6}}{3} \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{1}{4}} \right) \right] \\ \frac{dy}{ds} = \frac{1}{x^2 + y^2} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} x \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - yz \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{6}}{3} \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{1}{4}} \right) - \frac{\sqrt{6}}{4} x \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right] \\ \frac{dz}{ds} = \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{6}}{3} \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{1}{4}} \end{cases}$$

diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Bu diferansiyel denklem sistemi karmaşık olduğundan eğrinin parametrik denklemi elde edilememiş olsa da bu sistem için $P=(1,0,0)$ başlangıç noktası ile Matlab programında ‘ode45’ komutu kullanılırsa aranan eğrinin grafiği Şekil 3.5.3 deki gibi elde edilir.



Şekil 3.5.3: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ yüzeyi üzerinde normal eğriliği $k_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$, geodezik burulması $\tau_g = \frac{1}{2}$ olan ve $d_o = (0, 0, 1)$ doğrultusu ile $\theta = \frac{\pi}{3}$ açısı yapan D_o - Darboux slant helis

4. YÜZEY ÜZERİNDE D_r -DARBOUX SLANT HELİSLER

Bu bölümde, E^3 uzayında bir S yüzeyi üzerinde kalan ve yeni bir özel yüzey eğrisi olan D_r -Darboux slant helis inceleneyecektir. Bu özel eğriyi daha kolay incelemek için ilk olarak rektifiyan Darboux çatısı ve bu çatının türev formülleri verilecektir. Daha sonra bu yeni çatı yardımıyla D_r -Darboux slant helisler için karakterizasyonlar verilecektir. Son olarak, parametrik ve kapalı formda verilen bir S yüzeyi üzerinde D_r -Darboux slant helis elde edebilmek için birer yöntem verilip ardından örnekler verilecektir.

4.1. Yüzey Eğrileri İçin Rektifiyan Darboux Çatısı

S bir yüzey olsun. $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı, $\{\vec{T}, \vec{V}, \vec{U}\}$ Darboux çatılı, k_g, k_n, τ_g eğriliklerine ve $\tilde{D}_r(s) = \tau_g(s)\vec{T}(s) + k_g(s)\vec{U}(s)$ rektifiyan Darboux vektörüne sahip bir eğri olsun. Bu taktirde,

$$\tilde{D}_r(s) = \tau_g(s)\vec{T}(s) + k_g(s)\vec{U}(s)$$

vektörü normlanırsa

$$\vec{D}_r(s) = \frac{\tilde{D}_r(s)}{\|\tilde{D}_r(s)\|} = \frac{\tau_g(s)}{\sqrt{k_g^2(s) + \tau_g^2(s)}}\vec{T}(s) + \frac{k_g(s)}{\sqrt{k_g^2(s) + \tau_g^2(s)}}\vec{U}(s)$$

elde edilir. $\vec{D}_r$ vektörü, $\vec{T}$ ve $\vec{U}$ vektörünün gerdiği düzlemde bulunduğundan $\vec{V}$ vektörüne diktir. Dolayısıyla $\vec{Y}_r = \vec{D}_r \times \vec{V}$ birim vektörünün tanımlanması ile yüzey üzerindeki γ eğrisi boyunca yeni bir ortonormal çatı olan $\{\vec{D}_r, \vec{V}, \vec{Y}_r\}$ çatısı elde edilir.

Tanım 4.1.1: Yukarıdaki şekilde tanımlanan $\{\vec{D}_r, \vec{V}, \vec{Y}_r\}$ çatısına S yüzeyi üzerinde γ eğrisinin *rektifiyan Darboux çatısı* veya kısaca *RD-çatısı* denir.

Şimdi bu çatı için türev formüllerini verelim.

Teorem 4.1.2: S bir yüzey olsun. $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ bu yüzey üzerinde yay parametresi s olan ve RD-çatısına sahip birim hızlı bir eğri olsun. RD-çatısının vektör alanları $\vec{D}_r, \vec{V}, \vec{Y}_r$ ve eğrilikleri δ_r, μ_r olmak üzere, RD-çatısının türev formülleri

$$\begin{aligned}\vec{D}_r' &= -\delta_r \vec{Y}_r \\ \vec{V}' &= \mu_r \vec{Y}_r \\ \vec{Y}_r' &= \delta_r \vec{D}_r - \mu_r \vec{V}\end{aligned}\tag{4.1}$$

şeklindedir. Burada $\delta_r = \left(\frac{\tau_g}{k_g} \right)' \left(\frac{k_g^2}{k_g^2 + \tau_g^2} \right) - k_n$ ve $\mu_r = \sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}$ dır.

İspat: $\vec{D}_r', \{\vec{D}_r, \vec{V}, \vec{Y}_r\}$ çatısının elemanlarının lineer birleşimi olarak yazılabilir.

Yani

$$\vec{D}_r' = a_1 \vec{D}_r + a_2 \vec{V} + a_3 \vec{Y}_r\tag{4.2}$$

formundadır. Burada $a_i = a_i(s)$, $i = (1, 2, 3)$, s in diferansiyellenebilir fonksiyonlarıdır. (4.2) eşitliğinin her iki yanını $\vec{D}_r$ vektörü ile iç çarpılırsa

$$\langle \vec{D}_r', \vec{D}_r \rangle = a_1 \langle \vec{D}_r, \vec{D}_r \rangle + a_2 \langle \vec{D}_r, \vec{V} \rangle + a_3 \langle \vec{D}_r, \vec{Y}_r \rangle$$

bulunur. $\langle \vec{D}_r, \vec{D}_r \rangle = 1$ ve $\langle \vec{D}_r, \vec{V} \rangle = \langle \vec{D}_r, \vec{Y}_r \rangle = 0$ olduğundan

$$\langle \vec{D}_r', \vec{D}_r \rangle = a_1$$

dır. Diğer taraftan $\|\vec{D}_r\| = 1$ olduğundan $\langle \vec{D}_r, \vec{D}_r \rangle = 1$ dır. Bu eşitliğin türevi alınırsa

$\langle \vec{D}_r', \vec{D}_r \rangle = a_1 = 0$ dir. (4.2) ifadesinin her iki yanını $\vec{V}$ vektörü ile iç çarpılırsa

$$\langle \vec{D}_r', \vec{V} \rangle = a_1 \langle \vec{D}_r, \vec{V} \rangle + a_2 \langle \vec{V}, \vec{V} \rangle + a_3 \langle \vec{Y}_r, \vec{V} \rangle$$

bulunur. $\langle \vec{D}_r, \vec{V} \rangle = \langle \vec{Y}_r, \vec{V} \rangle = 0$ ve $\langle \vec{V}, \vec{V} \rangle = 1$ olduğundan $\langle \vec{D}'_r, \vec{V} \rangle = a_2$ dir. Öte yandan $\vec{D}_r$ vektörü ile $\vec{U}$ vektörü arasındaki açı ψ olmak üzere $\vec{D}_r$ vektöründe

$$\frac{\tau_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} = \sin \psi \text{ ve } \frac{k_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} = \cos \psi \text{ olarak tanımlanırsa}$$

$$\vec{D}_r = \sin \psi \vec{T} + \cos \psi \vec{U} \quad (4.3)$$

bulunur. (4.3) ün türevi alınıp ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\vec{D}'_r = (\psi' - k_n) \cos \psi \vec{T} + (k_g \sin \psi - \tau_g \cos \psi) \vec{V} - (\psi' - k_n) \sin \psi \vec{U}$$

elde edilir. $\frac{\tau_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} = \sin \psi$ ve $\frac{k_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} = \cos \psi$ olduğu göz önüne alınırsa $\vec{V}$ nin katsayısı sıfır olur. Dolayısıyla

$$\vec{D}'_r = (\psi' - k_n) \cos \psi \vec{T} - (\psi' - k_n) \sin \psi \vec{U} \quad (4.4)$$

bulunur. Bulunan $\vec{D}'_r$ vektörü, $\vec{V}$ vektörü ile iç çarpılırsa

$$a_2 = \langle \vec{D}'_r, \vec{V} \rangle = 0$$

elde edilir. Şimdi de (4.2) ifadesi $\vec{Y}_r$ vektörü ile iç çarpılırsa

$$\langle \vec{D}'_r, \vec{Y}_r \rangle = a_1 \langle \vec{D}_r, \vec{Y}_r \rangle + a_2 \langle \vec{V}, \vec{Y}_r \rangle + a_3 \langle \vec{Y}_r, \vec{Y}_r \rangle$$

bulunur. $\langle \vec{D}_r, \vec{Y}_r \rangle = \langle \vec{V}, \vec{Y}_r \rangle = 0$ ve $\langle \vec{Y}_r, \vec{Y}_r \rangle = 1$ olduğundan $a_3 = \langle \vec{D}'_r, \vec{Y}_r \rangle$ elde edilir.

Ayrıca

$$\begin{aligned} \vec{Y}_r &= \vec{D}_r \times \vec{V} = \left(\frac{\tau_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} \vec{T} + \frac{k_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} \vec{U} \right) \times \vec{V} \\ &= \frac{\tau_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} (\vec{T} \times \vec{V}) + \frac{k_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} (\vec{U} \times \vec{V}) \\ &= -\frac{k_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} \vec{T} + \frac{\tau_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} \vec{U} \end{aligned}$$

elde edilir. $\frac{\tau_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} = \sin \psi$ ve $\frac{k_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} = \cos \psi$ olduğu dikkate alınır

$$\vec{Y}_r = -\cos \psi \vec{T} + \sin \psi \vec{U} \quad (4.5)$$

elde edilir. (4.4) de bulunan $\vec{D}'_r$ ve (4.5) de bulunan $\vec{Y}_r$ vektörleri iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} a_3 = \langle \vec{D}'_r, \vec{Y}_r \rangle &= \langle (\psi' - k_n) \cos \psi \vec{T} - (\psi' - k_n) \sin \psi \vec{U}, -\cos \psi \vec{T} + \sin \psi \vec{U} \rangle \\ &= -(\psi' - k_n) (\cos^2 \psi + \sin^2 \psi) \\ &= -(\psi' - k_n) \end{aligned} \quad (4.6)$$

bulunur. $\tan \psi = \left(\frac{\tau_g}{k_g} \right)$ ifadesinin türevinden

$$\psi' = \left(\frac{\tau_g}{k_g} \right)' \left(\frac{k_g^2}{k_g^2 + \tau_g^2} \right)$$

elde edilir. Bu ifade (4.6) ifadesinde yazılırsa

$$a_3 = - \left[\left(\frac{\tau_g}{k_g} \right)' \left(\frac{k_g^2}{k_g^2 + \tau_g^2} \right) - k_n \right]$$

elde edilir. Bulunan a_1, a_2 ve a_3 değerleri (4.2) denkleminde yazılırsa

$$\vec{D}'_r = - \left[\left(\frac{\tau_g}{k_g} \right)' \left(\frac{k_g^2}{k_g^2 + \tau_g^2} \right) - k_n \right] \vec{Y}_r \quad (4.7)$$

bulunur.

Şimdi $\vec{V}$ vektörünün türevini hesaplayalım. $\vec{V}', \{ \vec{D}_r, \vec{V}, \vec{Y}_r \}$ çatısının elemanlarının lineer birleşimi olarak yazılabilir. Yani

$$\vec{V}' = b_1 \vec{D}_r + b_2 \vec{V} + b_3 \vec{Y}_r \quad (4.8)$$

yazılır. Burada $b_i = b_i(s)$, $i = (1, 2, 3)$, s in diferansiyellenebilir fonksiyonlarıdır.

(4.8) ifadesinin her iki yanını $\vec{D}_r$ vektörü ile iç çarpılırsa

$$\langle \vec{V}', \vec{D}_r \rangle = b_1 \langle \vec{D}_r, \vec{D}_r \rangle + b_2 \langle \vec{D}_r, \vec{V} \rangle + b_3 \langle \vec{D}_r, \vec{Y}_r \rangle$$

bulunur. $\langle \vec{D}_r, \vec{D}_r \rangle = 1$ ve $\langle \vec{D}_r, \vec{V} \rangle = \langle \vec{D}_r, \vec{Y}_r \rangle = 0$ olduğundan

$$\langle \vec{V}', \vec{D}_r \rangle = b_1$$

dır. Darboux türev formüllerinden $\vec{V}' = -k_g \vec{T} + \tau_g \vec{U}$ dır. $\vec{V}'$ ve

$\vec{D}_r = \frac{\tau_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} \vec{T} + \frac{k_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} \vec{U}$ vektörleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} b_1 = \langle \vec{V}', \vec{D}_r \rangle &= \left\langle -k_g \vec{T} + \tau_g \vec{U}, \frac{\tau_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} \vec{T} + \frac{k_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} \vec{U} \right\rangle \\ &= -\frac{k_g \tau_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} \langle \vec{T}, \vec{T} \rangle + \frac{k_g \tau_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} \langle \vec{U}, \vec{U} \rangle \\ &= -\frac{k_g \tau_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} + \frac{k_g \tau_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. (4.8) eşitliğinin her iki yanını $\vec{V}$ vektörü ile iç çarpılırsa

$$\langle \vec{V}', \vec{V} \rangle = b_1 \langle \vec{D}_r, \vec{V} \rangle + b_2 \langle \vec{V}, \vec{V} \rangle + b_3 \langle \vec{Y}_r, \vec{V} \rangle$$

bulunur. $\langle \vec{D}_r, \vec{V} \rangle = \langle \vec{Y}_r, \vec{V} \rangle = 0$ ve $\langle \vec{V}, \vec{V} \rangle = 1$ olduğundan

$$b_2 = \langle \vec{V}', \vec{V} \rangle$$

dur. Öte yandan $\langle \vec{V}, \vec{V} \rangle = 1$ ifadesinin türevi alınırsa $\langle \vec{V}', \vec{V} \rangle = 0 = b_2$ elde edilir. (4.8)

ifadesi $\vec{Y}_r$ vektörü ile iç çarpılırsa

$$\langle \vec{V}', \vec{Y}_r \rangle = b_1 \langle \vec{D}_r, \vec{Y}_r \rangle + b_2 \langle \vec{V}, \vec{Y}_r \rangle + b_3 \langle \vec{Y}_r, \vec{Y}_r \rangle$$

bulunur. $\langle \vec{D}_r, \vec{Y}_r \rangle = \langle \vec{V}, \vec{Y}_r \rangle = 0$ ve $\langle \vec{Y}_r, \vec{Y}_r \rangle = 1$ olduğundan

$$b_3 = \langle \vec{V}', \vec{Y}_r \rangle$$

elde edilir. Darboux türev formüllerinden $\vec{V}' = -k_g \vec{T} + \tau_g \vec{U}$ dır. Ayrıca

$$\vec{Y}_r = \vec{D}_r \times \vec{V} = -\frac{k_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} \vec{T} + \frac{\tau_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} \vec{U}$$

dır. Bu vektörler yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} b_3 = \langle \vec{V}', \vec{Y}_r \rangle &= \left\langle -k_g \vec{T} + \tau_g \vec{U}, -\frac{k_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} \vec{T} + \frac{\tau_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} \vec{U} \right\rangle \\ &= \frac{k_g^2}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} \langle \vec{T}, \vec{T} \rangle + \frac{\tau_g^2}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} \langle \vec{U}, \vec{U} \rangle \\ &= \frac{k_g^2 + \tau_g^2}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} \\ &= \sqrt{k_g^2 + \tau_g^2} \end{aligned}$$

bulunur. Bulunan b_1 , b_2 ve b_3 değerleri (4.8) de yazılırsa

$$\vec{V}' = \sqrt{k_g^2 + \tau_g^2} \vec{Y}_r \quad (4.9)$$

elde edilir.

Şimdi $\vec{Y}_r$ vektörünün türevini hesaplayalım. $\vec{Y}_r', \{\vec{D}_r, \vec{V}, \vec{Y}_r\}$ çatısının elemanlarının lineer birleşimi olarak yazılabilir. Yani

$$\vec{Y}_r' = c_1 \vec{D}_r + c_2 \vec{V} + c_3 \vec{Y}_r \quad (4.10)$$

yazılır. Burada $c_i = c_i(s)$, $i = (1, 2, 3)$, s in diferansiyellenebilir fonksiyonlarıdır.

(4.10) ifadesinin her iki yanı $\vec{D}_r$ vektörü ile iç çarpılırsa

$$\langle \vec{Y}_r', \vec{D}_r \rangle = c_1 \langle \vec{D}_r, \vec{D}_r \rangle + c_2 \langle \vec{D}_r, \vec{V} \rangle + c_3 \langle \vec{D}_r, \vec{Y}_r \rangle$$

bulunur. $\langle \vec{D}_r, \vec{D}_r \rangle = 1$ ve $\langle \vec{D}_r, \vec{V} \rangle = \langle \vec{D}_r, \vec{Y}_r \rangle = 0$ olduğundan

$$\langle \vec{Y}_r', \vec{D}_r \rangle = c_1$$

dır. (4.5) eşitliğinin her iki yanının türevi alınır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$Y_r' = (\psi' - k_n) \sin \psi T - (k_g \cos \psi + \tau_g \sin \psi) V + (\psi' - k_n) \cos \psi U \quad (4.11)$$

bulunur. $\frac{\tau_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} = \sin \psi$ ve $\frac{k_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} = \cos \psi$ olduğundan $\vec{D}_r = \sin \psi \vec{T} + \cos \psi \vec{U}$

olur. Dolayısıyla

$$c_1 = \langle \vec{Y}_r', \vec{D}_r \rangle = (\psi' - k_n)$$

elde edilir. $\tan \psi = \left(\frac{\tau_g}{k_g} \right)$ ifadesinin türevinden bulunan

$$\psi' = \left(\frac{\tau_g}{k_g} \right)' \left(\frac{k_g^2}{k_g^2 + \tau_g^2} \right)$$

ifadesi yerine yazılırsa

$$c_1 = \left(\frac{\tau_g}{k_g} \right)' \left(\frac{k_g^2}{k_g^2 + \tau_g^2} \right) - k_n$$

bulunur. (4.10) ifadesinin her iki yanı $\vec{V}$ vektörü ile iç çarpılırsa

$$\langle \vec{Y}_r', \vec{V} \rangle = c_1 \langle \vec{D}_r, \vec{V} \rangle + c_2 \langle \vec{V}, \vec{V} \rangle + c_3 \langle \vec{Y}_r, \vec{V} \rangle$$

elde edilir. $\langle \vec{D}_r, \vec{V} \rangle = \langle \vec{Y}_r, \vec{V} \rangle = 0$ ve $\langle \vec{V}, \vec{V} \rangle = 1$ olduğundan

$$c_2 = \langle \vec{Y}_r', \vec{V} \rangle$$

dir. (4.11) kullanılarak

$$c_2 = \langle \vec{Y}_r', \vec{V} \rangle = \langle (\psi' - k_n) \sin \psi \vec{T} - (k_g \cos \psi + \tau_g \sin \psi) \vec{V} + (\psi' - k_n) \cos \psi \vec{U}, \vec{V} \rangle$$

$$= -(k_g \cos \psi + \tau_g \sin \psi)$$

bulunur. Ayrıca $\frac{\tau_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} = \sin \psi$ ve $\frac{k_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} = \cos \psi$ ifadeleri yerine yazılırsa

$$c_2 = - \left(k_g \frac{k_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} + \tau_g \frac{\tau_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} \right)$$

$$= - \left(\frac{k_g^2}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} + \frac{\tau_g^2}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} \right)$$

$$= -\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}$$

elde edilir. Son olarak (4.10) ifadesi $\vec{Y}_r$ vektörü ile iç çarpılırsa

$$\langle \vec{Y}_r', \vec{Y}_r \rangle = c_1 \langle \vec{D}_r, \vec{Y}_r \rangle + c_2 \langle \vec{V}, \vec{Y}_r \rangle + c_3 \langle \vec{Y}_r, \vec{Y}_r \rangle$$

bulunur. $\langle \vec{D}_r, \vec{Y}_r \rangle = \langle \vec{V}, \vec{Y}_r \rangle = 0$ ve $\langle \vec{Y}_r, \vec{Y}_r \rangle = 1$ olduğundan

$$c_3 = \langle \vec{Y}_r', \vec{Y}_r \rangle$$

dir. $\langle \vec{Y}_r, \vec{Y}_r \rangle = 1$ ifadesinin türevi alınır $\langle \vec{Y}_r', \vec{Y}_r \rangle = c_3 = 0$ elde edilir. Bulunan c_1, c_2 ve c_3 ifadeleri (4.10) ifadesinde yazılırsa

$$Y_r' = \left[\left(\frac{\tau_g}{k_g} \right)' \left(\frac{k_g^2}{k_g^2 + \tau_g^2} \right) - k_n \right] \vec{D}_r - \sqrt{k_g^2 + \tau_g^2} \vec{V} \quad (4.12)$$

elde edilir. (4.7), (4.9) ve (4.12) denklemleri dikkate alınarak $\vec{D}_r'$, $\vec{V}'$ ve $\vec{Y}_r'$ ifadeleri matris formunda yazılırsa

$$\begin{pmatrix} \vec{D}_r' \\ \vec{V}' \\ \vec{Y}_r' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\left[\left(\frac{\tau_g}{k_g}\right)' \left(\frac{k_g^2}{k_g^2 + \tau_g^2}\right) - k_n \right] \\ 0 & 0 & \sqrt{k_g^2 + \tau_g^2} \\ \left(\frac{\tau_g}{k_g}\right)' \left(\frac{k_g^2}{k_g^2 + \tau_g^2}\right) - k_n & \left(-\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}\right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{D}_r \\ \vec{V} \\ \vec{Y}_r \end{pmatrix}$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned} \delta_r &= \left(\frac{\tau_g}{k_g}\right)' \left(\frac{k_g^2}{k_g^2 + \tau_g^2}\right) - k_n \\ \mu_r &= \sqrt{k_g^2 + \tau_g^2} \end{aligned} \quad (4.13)$$

olarak tanımlanırsa RD-çatısının türev formülleri

$$\begin{pmatrix} \vec{D}_r' \\ \vec{V}' \\ \vec{Y}_r' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\delta_r \\ 0 & 0 & \mu_r \\ \delta_r & -\mu_r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{D}_r \\ \vec{V} \\ \vec{Y}_r \end{pmatrix}$$

şeklinde olur. $\square$

4.2. D_r -Darboux Slant Helisin Eksen ve Karakterizasyonları

S bir yüzey ve $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı bir eğri olsun. γ eğrisinin Darboux çatısı $\{\vec{T}, \vec{V}, \vec{U}\}$ ve eğrilikleri k_g, k_n ve τ_g olsun. Bu eğrinin rektifiyan Darboux vektörü $\tilde{D}_r(s) = \tau_g(s)\vec{T}(s) + k_g(s)\vec{U}(s)$ olmak üzere, yüzey üzerinde D_r -Darboux slant helis kavramı aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 4.2.1: $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ eğrisinin $\tilde{D}_r$ vektör alanı (veya denk olarak $\vec{D}_r = \frac{\tilde{D}_r}{\|\tilde{D}_r\|}$

birim vektör alanı) sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyorsa γ eğrisi S yüzeyi üzerinde D_r -Darboux slant helis olarak adlandırılır [20].

Şimdi bu tanımı dikkate alarak D_r -Darboux slant helislerin karakterizasyonlarını verebiliriz.

Teorem 4.2.2: S, E^3 de bir yüzey ve $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ bu yüzey üzerinde $\{\vec{D}_r, \vec{V}, \vec{Y}_r\}$ RD-çatısına sahip birim hızlı bir eğri olsun. γ eğrisinin D_r -Darboux slant helis olması için gerek ve yeter şart her $s \in I$ için

$$\sigma_r(s) = \frac{\mu_r}{\delta_r}(s) \quad (4.14)$$

fonksiyonunun sabit olmasıdır. Burada $\mu_r \neq 0$ ve $\delta_r \neq 0$ dır.

İspat: γ , RD-çatısı $\{\vec{D}_r, \vec{V}, \vec{Y}_r\}$ olan bir D_r -Darboux slant helis olsun. D_r -Darboux slant helis tanımından γ nın $\vec{D}_r$ birim vektörü, sabit doğrultulu $\vec{d}_r$ vektörü ile sabit ω açısı yapar. Yani $\langle \vec{D}_r, \vec{d}_r \rangle = \cos \omega$ dır. Bu ifadenin türevi alınırsa $\langle \vec{D}_r', \vec{d}_r \rangle = 0$ bulunur. (4.1) deki RD-çatısının türev formülleri kullanılırsa

$$-\delta_r \langle \vec{Y}_r, \vec{d}_r \rangle = 0$$

elde edilir. $\delta_r \neq 0$ olduğundan $\langle \vec{Y}_r, \vec{d}_r \rangle = 0$ dır. Yani $\vec{d}_r$ vektörü $\vec{Y}_r$ vektörüne diktir. Dolayısıyla $\vec{d}_r$ vektörü, $\vec{D}_r$ ve $\vec{V}$ vektörlerinin gerdiği düzlemde bulunur. O halde

$$\vec{d}_r = \cos \omega \vec{D}_r + \sin \omega \vec{V}$$

yazılabilir. Bu ifadenin türevi alınırsa, $\vec{d}_r$ sabit vektör olduğundan

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \cos \omega \vec{D}_r' + \sin \omega \vec{V}' \\ &= \cos \omega (-\delta_r \vec{Y}_r) + \sin \omega (\mu_r \vec{Y}_r) \\ &= \vec{Y}_r (\mu_r \sin \omega - \delta_r \cos \omega) \end{aligned}$$

bulunur. $\vec{Y}_r$ sıfırdan farklı bir vektör olduğundan $\mu_r \sin \omega - \delta_r \cos \omega = 0$ dır. Dolayısıyla buradan

$$\frac{\mu_r}{\delta_r} = \frac{\cos \omega}{\sin \omega} = \cot \omega = \text{sabit}$$

elde edilir.

Tersine olarak, ω bir sabit olmak üzere, $\frac{\mu_r}{\delta_r} = \frac{\cos \omega}{\sin \omega} = \cot \omega = \text{sabit}$ olarak tanımlansın. Buradan $\mu_r \sin \omega = \delta_r \cos \omega$ yazılabilir.

$$\vec{d}_r = \cos \omega \vec{D}_r + \sin \omega \vec{V}$$

alalım. $\vec{d}_r$ nin sabit olduğunu gösterelim. $\vec{d}_r = \cos \omega \vec{D}_r + \sin \omega \vec{V}$ ifadesinin türevi alınıp ardından (4.1) deki türev formülleri ve $\mu_r \sin \omega = \delta_r \cos \omega$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} \vec{d}_r' &= \cos \omega \vec{D}_r' + \sin \omega \vec{V}' \\ &= \cos \omega (-\delta_r \vec{Y}_r) + \sin \omega (\mu_r \vec{Y}_r) \\ &= \vec{Y}_r (\mu_r \sin \omega - \delta_r \cos \omega) \\ &= \vec{Y}_r (\delta_r \cos \omega - \delta_r \cos \omega) \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla $\vec{d}_r$ sabit vektördür. Ayrıca $\langle \vec{D}_r, \vec{d}_r \rangle = \cos \omega$ olduğundan $\vec{d}_r$ sabit vektörü, $\vec{D}_r$ vektörü ile sabit açı yapar. Yani γ bir D_r -Darboux slant helistir. $\square$

Teorem 4.2.2 den aşağıdaki sonuçlar elde edilebilir.

Sonuç 4.2.3: γ , E^3 de S yüzeyi üzerinde kalan birim hızlı bir eğri ve bu eğrinin Darboux çatısının eğrilikleri k_g, k_n ve τ_g olsun. γ eğrisinin D_r -Darboux Slant helis olması için gerek ve yeter şart her $s \in I$ için

$$\sigma_r(s) = \left(\frac{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}}{\frac{k_g^2}{k_g^2 + \tau_g^2} \left(\frac{\tau_g}{k_g} \right)' - k_n} \right) (s) \quad (4.15)$$

veya denk olarak

$$\sigma_r(s) = \left(\frac{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}}{-\frac{\tau_g^2}{k_g^2 + \tau_g^2} \left(\frac{k_g}{\tau_g} \right)' - k_n} \right) (s)$$

fonksiyonunun sabit olmasıdır.

İspat: (4.13) eşitlikleri (4.14) de yazılarak (4.15) eşitliğine kolayca ulaşılır. $\square$

Sonuç 4.2.4: Rektifiyan Darboux çatısına göre D_r -Darboux slant helisin eksen

$$\vec{d}_r = \cos \omega \vec{D}_r + \sin \omega \vec{V} \quad (4.16)$$

şeklindedir.

Sonuç 4.2.5: D_r -Darboux slant helisin eksen, Darboux çatısının vektörleri cinsinden

$$\vec{d}_r = \cos \omega \frac{\tau_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} \vec{T} + \sin \omega \vec{V} + \cos \omega \frac{k_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} \vec{U}$$

şeklindedir.

Sonuç 4.2.6: S yüzeyi üzerinde birim hızlı bir γ eğrisinin D_r -Darboux slant helis olması için gerek ve yeter şart γ nın relatively normal-slant helis olmasıdır.

İspat: (4.16) eşitliğinin iki tarafı $\vec{V}$ vektörü ile iç çarpılırsa

$$\langle \vec{d}_r, \vec{V} \rangle = \sin \omega = \text{sabit}$$

bulunur. Bu da γ eğrisinin relatively normal-slant helis olduğunu gösterir. $\square$

Sonuç 4.2.7: γ , S yüzeyi üzerinde birim hızlı bir D_r -Darboux slant helis olsun. Bu durumda,

i) γ nın S yüzeyi üzerinde $k_n \neq 0$ olan bir geodezik eğri olması için gerek ve yeter şart γ nın $\vec{d}_r = \cos \omega \vec{T} \pm \sin \omega \vec{B}$ eksenli bir helis olmasıdır.

ii) γ nın S yüzeyi üzerinde $k_g \neq 0$ olan asimptotik bir eğri olması için gerek ve yeter şart γ nın

$$\vec{d}_r = \cos \omega \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 + \kappa^2}} \vec{T} \mp \sin \omega \vec{N} + \cos \omega \frac{\kappa}{\sqrt{\tau^2 + \kappa^2}} \vec{B}$$

eksenli bir Darboux helis (slant helis) olmasıdır.

iii) γ , S yüzeyi üzerinde bir eğrilik çizgisi ise γ düzlemsel bir eğridir.

İspat: i) γ geodezik eğri ise $k_g = 0$ dır. (2.1) eşitlikleri kullanılarak $k_n = \mp \kappa$ ve $\tau_g = \tau$ elde edilir. Bulunan değerler (4.15) de yazılırsa

$$\sigma_r = \pm \frac{\tau}{\kappa} = \text{sabit}$$

olduğundan Teorem 2.1.18 gereğince γ bir helistir. Ayrıca Tanım 2.2.18 de verilen Darboux çatısı ile Frenet çatısı arasındaki ilişkiler, Sonuç 4.2.5 de yazılıp (2.1) eşitlikleri kullanılırsa, D_r -Darboux slant helisin Frenet çatısının vektörleri cinsinden eksenli

$$\begin{aligned} d_r = \cos \omega \frac{\tau_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} \vec{T} + \left(\sin \omega \frac{k_g}{\kappa} + \cos \omega \frac{k_n k_g}{\kappa \sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} \right) \vec{N} \\ + \left(-\sin \omega \frac{k_n}{\kappa} + \cos \omega \frac{k_g^2}{\kappa \sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} \right) \vec{B} \end{aligned}$$

şeklinde olur. $k_g = 0$, $k_n = \mp \kappa$ ve $\tau_g = \tau$ olduğu kullanılırsa, γ helisinin eksenli $\vec{d}_r = \cos \omega \vec{T} \pm \sin \omega \vec{B}$ bulunur.

Tersine olarak, γ , $\vec{d}_r = \cos \omega \vec{T} \pm \sin \omega \vec{B}$ eksenli bir helis olsun. Helisin ekseni ile D_r -Darboux slant helisin Frenet çatısının vektörleri cinsinden ekseni dikkate alınır $k_g = 0$ bulunur. γ geodezik bir eğridir.

ii) γ asimptotik eğri ise $k_n = 0$ dır. (2.1) eşitlikleri kullanılarak $k_g = \mp \kappa$ ve $\tau_g = \tau$ elde edilir. Bulunan değerler (4.15) de yazılırsa

$$\sigma_r = \frac{1}{\frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'} = \text{sabit}$$

olduğundan Teorem 2.1.22 (i) gereğince γ Darboux helistir. Ayrıca Teorem 2.1.22 (ii) gereğince γ bir slant helistir. Ayrıca $k_n = 0$, $k_g = \mp \kappa$ ve $\tau_g = \tau$ olduğu, yukarıda D_r -Darboux slant helisin Frenet çatısının vektörleri cinsinden verilen ekseninde yazılırsa, γ nın ekseni $\vec{d}_r = \cos \omega \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 + \kappa^2}} \vec{T} \mp \sin \omega \vec{N} + \cos \omega \frac{\kappa}{\sqrt{\tau^2 + \kappa^2}} \vec{B}$ olarak bulunur.

Tersine olarak, γ , $\vec{d}_r = \cos \omega \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 + \kappa^2}} \vec{T} \mp \sin \omega \vec{N} + \cos \omega \frac{\kappa}{\sqrt{\tau^2 + \kappa^2}} \vec{B}$ eksenli bir Darboux helis olsun. Darboux helisin ekseni ile D_r -Darboux slant helisin Frenet çatısının vektörleri cinsinden ekseni dikkate alınır $k_n = 0$ bulunur. γ asimptotik bir eğridir.

iii) γ eğrilik çizgisi ise $\tau_g = 0$ dır. Bu taktirde $\sigma_r = -\frac{k_g}{k_n} = \text{sabit}$ elde edilir. (2.1)

eşitlikleri kullanılırsa, ξ , γ eğrisinin Frenet çatısının $\vec{B}$ binormal vektörü ile $\vec{U}$ yüzey normali arasındaki açı olmak üzere

$$-\frac{k_g}{k_n} = -\frac{\kappa \cos \xi}{\kappa \sin \xi} = -\cot \xi = \text{sabit},$$

dolayısıyla $\xi = \text{sabit}$ bulunur. $\tau_g = \tau - \xi' = 0$ olduğundan $\tau = 0$ elde edilir. Yani γ düzlemseldir. $\square$

4.3. D_r -Darboux Slant Helislerin RD-Çatısına Göre Diferansiyel Denklem Karakterizasyonları

Bu kısımda, önce E^3 de bir S yüzeyi üzerinde bulunan eğrilerin diferansiyel denklem karakterizasyonları RD-çatısının elemanları olan $\vec{D}_r, \vec{V}$ ve $\vec{Y}_r$ vektör alanlarına bağlı olarak verilecektir. Daha sonra D_r -Darboux slant helisleri karakterize eden diferansiyel denklem karakterizasyonları RD-çatısının elemanları olan $\vec{D}_r, \vec{V}$ ve $\vec{Y}_r$ vektör alanlarına bağlı olarak verilecektir.

Teorem 4.3.1: S, E^3 de bir yüzey ve $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisini RD-çatısının $\vec{D}_r$ vektör alanına göre karakterize eden vektörel diferansiyel denklem, $\mu_r \neq 0$ ve $\delta_r \neq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \vec{D}_r''' + \left[\mu_r \delta_r \left(\frac{1}{\mu_r \delta_r} \right)' + \delta_r \left(\frac{1}{\delta_r} \right)' \right] \vec{D}_r'' + \left\{ \mu_r \delta_r \left[\frac{1}{\mu_r} \left(\frac{1}{\delta_r} \right)' \right]' + \mu_r^2 + \delta_r^2 \right\} \vec{D}_r' \\ + \mu_r \delta_r \left(\frac{\delta_r}{\mu_r} \right)' \vec{D}_r = 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

şeklindedir.

İspat: (4.1) sisteminin birinci denkleminde $\vec{Y}_r$ vektörü yalnız bırakılırsa

$$\vec{Y}_r = -\frac{1}{\delta_r} \vec{D}_r' \quad (4.18)$$

olur. Bu ifadenin türevi alınırsa

$$\vec{Y}_r' = -\left(\frac{1}{\delta_r} \right)' \vec{D}_r' - \frac{1}{\delta_r} \vec{D}_r'' \quad (4.19)$$

bulunur. (4.1) sisteminin üçüncü denkleminde $\vec{V}$ vektörü yalnız bırakılırsa

$$\vec{V} = \frac{\delta_r}{\mu_r} \vec{D}_r - \frac{1}{\mu_r} \vec{Y}_r' \quad (4.20)$$

olur. (4.19), (4.20) de yerine yazılırsa

$$\vec{V} = \frac{\delta_r}{\mu_r} \vec{D}_r + \frac{1}{\mu_r} \left(\frac{1}{\delta_r} \right)' \vec{D}_r' + \frac{1}{\mu_r \delta_r} \vec{D}_r''$$

elde edilir. Bu ifadenin türevi alınır

$$\vec{V}' = \frac{1}{\mu_r \delta_r} \vec{D}_r''' + \left[\left(\frac{1}{\mu_r \delta_r} \right)' + \frac{1}{\mu_r} \left(\frac{1}{\delta_r} \right)' \right] \vec{D}_r'' + \left[\frac{\delta_r}{\mu_r} + \left[\frac{1}{\mu_r} \left(\frac{1}{\delta_r} \right)' \right] \right] \vec{D}_r' + \left(\frac{\delta_r}{\mu_r} \right)' \vec{D}_r \quad (4.21)$$

sonucuna ulaşılır. (4.18) ve (4.21) eşitlikleri (4.1) in ikinci denkleminde yazılırsa

$$\frac{1}{\mu_r \delta_r} \vec{D}_r''' + \left[\left(\frac{1}{\mu_r \delta_r} \right)' + \frac{1}{\mu_r} \left(\frac{1}{\delta_r} \right)' \right] \vec{D}_r'' + \left[\frac{\delta_r}{\mu_r} + \left[\frac{1}{\mu_r} \left(\frac{1}{\delta_r} \right)' \right] \right] \vec{D}_r' + \left(\frac{\delta_r}{\mu_r} \right)' \vec{D}_r = -\frac{\mu_r}{\delta_r} \vec{D}_r'$$

bulunur. Bulunan denklem düzenlenirse

$$\frac{1}{\mu_r \delta_r} \vec{D}_r''' + \left[\left(\frac{1}{\mu_r \delta_r} \right)' + \frac{1}{\mu_r} \left(\frac{1}{\delta_r} \right)' \right] \vec{D}_r'' + \left[\frac{\mu_r^2 + \delta_r^2}{\mu_r \delta_r} + \left[\frac{1}{\mu_r} \left(\frac{1}{\delta_r} \right)' \right] \right] \vec{D}_r' + \left(\frac{\delta_r}{\mu_r} \right)' \vec{D}_r = 0$$

elde edilir. Son denklemin her iki tarafı $\mu_r \delta_r$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} & \vec{D}_r''' + \left[\mu_r \delta_r \left(\frac{1}{\mu_r \delta_r} \right)' + \delta_r \left(\frac{1}{\delta_r} \right)' \right] \vec{D}_r'' + \left[\mu_r^2 + \delta_r^2 + \mu_r \delta_r \left[\frac{1}{\mu_r} \left(\frac{1}{\delta_r} \right)' \right] \right] \vec{D}_r' \\ & + \mu_r \delta_r \left(\frac{\delta_r}{\mu_r} \right)' \vec{D}_r = 0 \end{aligned}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. □

Sonuç 4.3.2: S , E^3 de bir yüzey ve $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı bir D_r -Darboux slant helis olsun. γ eğrisini $\vec{D}_r$ vektör alanına göre karakterize eden vektörel diferansiyel denklem

$$\bar{D}_r''' + \left[\mu_r \delta_r \left(\frac{1}{\mu_r \delta_r} \right)' + \delta_r \left(\frac{1}{\delta_r} \right)' \right] \bar{D}_r'' + \left[\mu_r^2 + \delta_r^2 + \mu_r \delta_r \left[\frac{1}{\mu_r} \left(\frac{1}{\delta_r} \right)' \right]' \right] \bar{D}_r' = 0$$

şeklindedir. Burada $\mu_r \neq 0$ ve $\delta_r \neq 0$ dır.

İspat: Teorem 4.3.1 de, E^3 de eğrileri RD-çatısının $\bar{D}_r$ elemanına göre karakterize eden genel diferansiyel denklemin (4.17) şeklinde olduğu gösterildi. Şimdi γ eğrisi D_r -Darboux slant helis olduğunu kabul edelim. D_r -Darboux slant helis olma

şartından $\frac{\mu_r}{\delta_r}$ ifadesi sabit olduğundan $\frac{\delta_r}{\mu_r}$ ifadesi de sabittir. Dolayısıyla $\left(\frac{\delta_r}{\mu_r} \right)' = 0$

ifadesi (4.17) denkleminde yazılırsa

$$\bar{D}_r''' + \left[\mu_r \delta_r \left(\frac{1}{\mu_r \delta_r} \right)' + \delta_r \left(\frac{1}{\delta_r} \right)' \right] \bar{D}_r'' + \left[\mu_r^2 + \delta_r^2 + \mu_r \delta_r \left[\frac{1}{\mu_r} \left(\frac{1}{\delta_r} \right)' \right]' \right] \bar{D}_r' = 0$$

denklemini elde edilir. □

Teorem 4.3.3: S , E^3 de bir yüzey ve $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı bir eğri olsun. γ eğrisini RD-çatısının $\vec{V}$ vektör alanına göre karakterize eden vektörel diferansiyel denklem, $\mu_r \neq 0$ ve $\delta_r \neq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \vec{V}''' + \left[\mu_r \delta_r \left(\frac{1}{\mu_r \delta_r} \right)' + \mu_r \left(\frac{1}{\mu_r} \right)' \right] \vec{V}'' + \left\{ \mu_r \delta_r \left[\frac{1}{\delta_r} \left(\frac{1}{\mu_r} \right)' \right]' + \mu_r^2 + \delta_r^2 \right\} \vec{V}' \\ + \mu_r \delta_r \left(\frac{\mu_r}{\delta_r} \right)' \vec{V} = 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

şeklindedir.

İspat: (4.1) sisteminin 2. denkleminde

$$\vec{Y}_r = \frac{1}{\mu_r} \vec{V}' \quad (4.23)$$

yazılabilir. Bu ifadenin türevi alınırsa

$$\vec{Y}'_r = \left(\frac{1}{\mu_r} \right)' \vec{V}' + \frac{1}{\mu_r} \vec{V}''$$

bulunur. Bu eşitlik, (4.1) in üçüncü denkleminde yazılıp $\vec{D}_r$ yalnız bırakılırsa

$$\vec{D}_r = \frac{1}{\mu_r \delta_r} \vec{V}'' + \frac{1}{\delta_r} \left(\frac{1}{\mu_r} \right)' \vec{V}' + \frac{\mu_r}{\delta_r} \vec{V}$$

elde edilir. Bulunan $\vec{D}_r$ ifadesinin türevi alınıp denklem düzenlenirse

$$\vec{D}'_r = \frac{1}{\mu_r \delta_r} \vec{V}''' + \left[\left(\frac{1}{\mu_r \delta_r} \right)' + \frac{1}{\delta_r} \left(\frac{1}{\mu_r} \right)' \right] \vec{V}'' + \left\{ \left[\frac{1}{\delta_r} \left(\frac{1}{\mu_r} \right)' \right]' + \frac{\mu_r}{\delta_r} \right\} \vec{V}' + \left(\frac{\mu_r}{\delta_r} \right)' \vec{V}$$

bulunur. Bulunan $\vec{D}'_r$ değeri ve (4.23) ifadesi (4.1) sisteminin birinci denkleminde yazılırsa

$$\frac{1}{\mu_r \delta_r} \vec{V}''' + \left[\left(\frac{1}{\mu_r \delta_r} \right)' + \frac{1}{\delta_r} \left(\frac{1}{\mu_r} \right)' \right] \vec{V}'' + \left\{ \left[\frac{1}{\delta_r} \left(\frac{1}{\mu_r} \right)' \right]' + \frac{\mu_r}{\delta_r} \right\} \vec{V}' + \left(\frac{\mu_r}{\delta_r} \right)' \vec{V} = -\frac{\delta_r}{\mu_r} \vec{V}'$$

elde edilir. Son denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned} & \vec{V}''' + \left[\mu_r \delta_r \left(\frac{1}{\mu_r \delta_r} \right)' + \mu_r \left(\frac{1}{\mu_r} \right)' \right] \vec{V}'' + \left\{ \mu_r \delta_r \left[\frac{1}{\delta_r} \left(\frac{1}{\mu_r} \right)' \right]' + \mu_r^2 + \delta_r^2 \right\} \vec{V}' \\ & + \mu_r \delta_r \left(\frac{\mu_r}{\delta_r} \right)' \vec{V} = 0 \end{aligned}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. □

Sonuç 4.3.4: S , E^3 de bir yüzey ve $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı bir D_r -Darboux slant helis olsun. γ eğrisini $\vec{V}$ vektör alanına göre karakterize eden vektörel diferansiyel denklem

$$\vec{V}''' + \left[\mu_r \delta_r \left(\frac{1}{\mu_r \delta_r} \right)' + \mu_r \left(\frac{1}{\mu_r} \right)' \right] \vec{V}'' + \left\{ \mu_r \delta_r \left[\frac{1}{\delta_r} \left(\frac{1}{\mu_r} \right)' \right] + \mu_r^2 + \delta_r^2 \right\} \vec{V}' = 0$$

şeklindedir. Burada $\mu_r \neq 0$ ve $\delta_r \neq 0$ dır.

İspat: Teorem 4.3.3 de, E^3 de eğrileri RD-çatısının $\vec{V}$ elemanına göre karakterize eden genel diferansiyel denklemin (4.22) şeklinde olduğu gösterildi. Şimdi γ eğrisinin D_r -Darboux slant helis olduğunu kabul edelim. D_r -Darboux slant helis

olma şartından $\frac{\mu_r}{\delta_r}$ ifadesi sabittir. Dolayısıyla $\left(\frac{\mu_r}{\delta_r} \right)' = 0$ ifadesi (4.22)

denkleminde yazılırsa

$$\vec{V}''' + \left[\mu_r \delta_r \left(\frac{1}{\mu_r \delta_r} \right)' + \mu_r \left(\frac{1}{\mu_r} \right)' \right] \vec{V}'' + \left\{ \mu_r \delta_r \left[\frac{1}{\delta_r} \left(\frac{1}{\mu_r} \right)' \right] + \mu_r^2 + \delta_r^2 \right\} \vec{V}' = 0$$

denklemini elde edilir. □

Teorem 4.3.5: S , E^3 de bir yüzey ve $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı bir eğri olsun. γ eğrisini RD-çatısının $\vec{Y}_r$ vektör alanına göre karakterize eden vektörel diferansiyel denklem, $\lambda_1 \neq 0$ olmak üzere

$$\vec{Y}_r''' + \frac{1}{\lambda_1} (\lambda_1' - \lambda_2) \vec{Y}_r'' + \frac{1}{\lambda_1} (-\lambda_2' + \lambda_3) \vec{Y}_r' + \frac{1}{\lambda_1} (-\delta_r + \lambda_3') \vec{Y}_r = 0$$

şeklindedir. Burada $\lambda_1 = \frac{\mu_r}{\mu_r' \delta_r - \mu_r \delta_r'}$, $\lambda_2 = \frac{1}{\delta_r} (1 + \delta_r' \lambda_1)$ ve $\lambda_3 = \lambda_1 (\mu_r^2 + \delta_r^2)$

şeklindedir.

İspat: (4.1) in üçüncü denkleminde

$$\vec{D}_r = \frac{1}{\delta_r} \vec{Y}_r' + \frac{\mu_r}{\delta_r} \vec{V} \quad (4.24)$$

yazılabilir. Bulunan ifadenin türevi alınır ve RD-çatısının türev formülleri kullanılırsa

$$\frac{1}{\delta_r} \bar{Y}_r'' + \left(\frac{1}{\delta_r} \right)' \bar{Y}_r' + \frac{\mu_r^2 + \delta_r^2}{\delta_r} \bar{Y}_r + \left(\frac{\mu_r}{\delta_r} \right)' \bar{V} = 0$$

bulunur. Son denklemde $\bar{V}$ vektörü yalnız bırakılırsa

$$\bar{V} = -\frac{\delta_r}{\mu_r' \delta_r - \mu_r \delta_r'} \bar{Y}_r'' + \frac{\delta_r'}{\mu_r' \delta_r - \mu_r \delta_r'} \bar{Y}_r' - \frac{\delta_r (\mu_r^2 + \delta_r^2)}{\mu_r' \delta_r - \mu_r \delta_r'} \bar{Y}_r$$

bulunan bu ifade (4.24) de yazılırsa $\lambda_1 = \frac{\mu_r}{\mu_r' \delta_r - \mu_r \delta_r'}$, $\lambda_2 = \frac{1}{\delta_r} (1 + \delta_r' \lambda_1)$ ve

$\lambda_3 = \lambda_1 (\mu_r^2 + \delta_r^2)$ olmak üzere

$$\bar{D}_r = -\lambda_1 \bar{Y}_r'' + \lambda_2 \bar{Y}_r' - \lambda_3 \bar{Y}_r$$

elde edilir. Son bulunan eşitliğin her iki yanının türevi alınıp RD-çatısının türev formülleri kullanılırsa

$$\bar{Y}_r''' + \frac{1}{\lambda_1} (\lambda_1' - \lambda_2) \bar{Y}_r'' + \frac{1}{\lambda_1} (-\lambda_2' + \lambda_3) \bar{Y}_r' + \frac{1}{\lambda_1} (-\delta_r + \lambda_3') \bar{Y}_r = 0$$

denklemini elde edilir. □

Teorem 4.3.6: S , E^3 de bir yüzey ve $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı bir D_r -Darboux slant helis olsun. γ eğrisini RD-çatısının $\bar{Y}_r$ vektör alanına göre karakterize eden vektörel diferansiyel denklem

$$\bar{Y}_r'' + \delta_r \left(\frac{1}{\delta_r} \right)' \bar{Y}_r' + (\mu_r^2 + \delta_r^2) \bar{Y}_r = 0$$

şeklinde dir. Burada $\delta_r \neq 0$ dır.

İspat: (4.1) deki türev formüllerinin üçüncüsünden $\bar{D}_r$ vektörü yalnız bırakılırsa

$$\vec{D}_r = \frac{1}{\delta_r} \vec{Y}_r' + \frac{\mu_r}{\delta_r} \vec{T}$$

bulunur. Bu eşitliğin türevi alınırsa

$$\vec{D}_r' = \frac{1}{\delta_r} \vec{Y}_r'' + \left(\frac{1}{\delta_r} \right)' \vec{Y}_r' + \frac{\mu_r}{\delta_r} \vec{V}' + \left(\frac{\mu_r}{\delta_r} \right)' \vec{V}$$

elde edilir. γ eğrisi D_r -Darboux slant helis olduğundan $\left(\frac{\mu_r}{\delta_r} \right)' = 0$ olur. Dolayısıyla

$$\vec{D}_r' = \frac{1}{\delta_r} \vec{Y}_r'' + \left(\frac{1}{\delta_r} \right)' \vec{Y}_r' + \frac{\mu_r}{\delta_r} \vec{V}'$$

dır. Burada $\vec{V}'$ yerine türev formüllerindeki eşiti yazılırsa

$$\vec{D}_r' = \frac{1}{\delta_r} \vec{Y}_r'' + \left(\frac{1}{\delta_r} \right)' \vec{Y}_r' + \frac{\mu_r^2}{\delta_r} \vec{Y}_r$$

bulunur. Bulunan bu eşitlik, (4.1) in birinci denkleminde yerine yazılıp denklem düzenlenirse

$$\frac{1}{\delta_r} \vec{Y}_r'' + \left(\frac{1}{\delta_r} \right)' \vec{Y}_r' + \frac{\mu_r^2}{\delta_r} \vec{Y}_r = -\delta_r \vec{Y}_r$$

$$\frac{1}{\delta_r} \vec{Y}_r'' + \left(\frac{1}{\delta_r} \right)' \vec{Y}_r' + \left(\frac{\mu_r^2}{\delta_r} + \delta_r \right) \vec{Y}_r = 0$$

$$\frac{1}{\delta_r} \vec{Y}_r'' + \left(\frac{1}{\delta_r} \right)' \vec{Y}_r' + \left(\frac{\mu_r^2 + \delta_r^2}{\delta_r} \right) \vec{Y}_r = 0$$

elde edilir. Son olarak bu denklem δ_r ile çarpılarak

$$\vec{Y}_r'' + \delta_r \left(\frac{1}{\delta_r} \right)' \vec{Y}_r' + (\mu_r^2 + \delta_r^2) \vec{Y}_r = 0$$

elde edilir. □

4.4. Yüzey Üzerinde D_r -Darboux Slant Helisin Elde Edilmesi

Bu kısımda, parametrik ve kapalı formda verilen bir yüzey üzerinde D_r -Darboux slant helis elde edilebilmek için yöntemler verilecektir.

4.4.1. Parametrik Formda Verilen Yüzey Üzerinde D_r -Darboux Slant Helisin Elde Edilmesi

S , E^3 uzayında $X = X(u, v)$ parametrizasyonu ile verilen bir yüzey olsun. $\gamma(s) = X(u(s), v(s))$, S yüzeyi üzerinde, sabit ve birim $\vec{d}_r$ doğrultusu ile sabit ω açısı yapan, Darboux çatısı $\{\vec{T}, \vec{V}, \vec{U}\}$ olan birim hızlı bir D_r -Darboux slant helis olsun. γ eğrisini elde etmek için $u(s)$ ve $v(s)$ değerlerinin bulunması gerekir. İlk olarak $u(s)$ değerini bulalım.

$$\gamma' = \vec{T} = \vec{X}_u \frac{du}{ds} + \vec{X}_v \frac{dv}{ds}, \quad \vec{U} = \frac{\vec{X}_u \times \vec{X}_v}{\|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\|}, \quad \vec{V} = \vec{U} \times \vec{T}$$

dir. $\vec{T}$ vektörünün ve $\vec{U}$ vektörünün eşiti $\vec{V}$ vektöründe yazılırsa

$$V = \frac{1}{\|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\|} \left[(E\vec{X}_v - F\vec{X}_u) \frac{du}{ds} + (F\vec{X}_v - G\vec{X}_u) \frac{dv}{ds} \right]$$

bulunur [15]. Burada E, F, G birinci temel formun katsayılarıdır. γ , D_r -Darboux slant helis olduğundan $\langle \vec{D}_r, \vec{d}_r \rangle = \cos \omega$ dir. Bu ifadede $\vec{D}_r$ vektörü yerine yazılırsa

$$\left\langle \frac{\tau_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} \vec{T} + \frac{k_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} \vec{U}, \vec{d}_r \right\rangle = \cos \omega \quad (4.25)$$

elde edilir. Yukarıda bulunan $\vec{T}$ ve $\vec{U}$ vektörlerinin eşitleri (4.25) de yazılırsa

$$\left\langle \frac{\tau_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} \left(\vec{X}_u \frac{du}{ds} + \vec{X}_v \frac{dv}{ds} \right) + \frac{k_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} \left(\frac{\vec{X}_u \times \vec{X}_v}{\|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\|} \right), \vec{d}_r \right\rangle = \cos \omega$$

bulunur. Bu ifade düzenlenirse

$$\frac{\tau_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} \langle \vec{X}_u, \vec{d}_r \rangle \frac{du}{ds} + \frac{\tau_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} \langle \vec{X}_v, \vec{d}_r \rangle \frac{dv}{ds} + \frac{k_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} \frac{1}{\|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\|} \langle \vec{X}_u \times \vec{X}_v, \vec{d}_r \rangle = \cos \omega$$

elde edilir. Bulunan son denklemde işlem kolaylığı açısından

$$\frac{\tau_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} = S, \quad \frac{k_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} = R, \quad \|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\| = \sqrt{EG - F^2} = N,$$

$$\langle \vec{X}_u, \vec{d}_r \rangle = L_r, \quad \langle \vec{X}_v, \vec{d}_r \rangle = M_r, \quad \langle \vec{X}_u \times \vec{X}_v, \vec{d}_r \rangle = B_r$$

kısaltmaları kullanılırsa, son ifade

$$SL_r \frac{du}{ds} + SM_r \frac{dv}{ds} + R \frac{1}{N} B_r = \cos \omega$$

olur. Bu eşitliğin her iki yanı N ile çarpılırsa

$$SL_r N \frac{du}{ds} + SM_r N \frac{dv}{ds} + RB_r = N \cos \omega \quad (4.26)$$

elde edilir. Bu ifadede $\frac{dv}{ds}$ yalnız bırakılırsa

$$\frac{dv}{ds} = \frac{N \cos \omega - RB_r}{SM_r N} - \frac{SL_r N}{SM_r N} \frac{du}{ds} \quad (4.27)$$

elde edilir. Ayrıca γ eğrisi birim hızlı olduğundan

$$E \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2F \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + G \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 = 1 \quad (4.28)$$

bulunur [15]. (4.27) ifadesi, (4.28) de yerine yazılırsa

$$E \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2F \frac{du}{ds} \left(\frac{N \cos \omega - RB_r}{SM_r N} - \frac{SL_r N}{SM_r N} \frac{du}{ds} \right) + G \left(\frac{N \cos \omega - RB_r}{SM_r N} - \frac{SL_r N}{SM_r N} \frac{du}{ds} \right)^2 = 1$$

denklemini elde edilir. Bu denklemde parantezler açılırsa

$$E\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2F\frac{du}{ds}\frac{N\cos\omega - RB_r}{SM_rN} - 2F\frac{du}{ds}\frac{SL_rN}{SM_rN}\frac{du}{ds} + G\left(\frac{N\cos\omega - RB_r}{SM_rN}\right)^2 - 2G\left(\frac{N\cos\omega - RB_r}{SM_rN}\right)\left(\frac{SL_rN}{SM_rN}\frac{du}{ds}\right) + g\left(\frac{SL_rN}{SM_rN}\frac{du}{ds}\right)^2 = 1$$

bulunur. Elde edilen son denklemde paydalar eşitlenirse

$$ES^2M_r^2N^2\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2FSM_rN(N\cos\omega - RB_r)\frac{du}{ds} - 2FS^2N^2L_rM_r\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + G(N\cos\omega - RB_r)^2 - 2G(N\cos\omega - RB_r)SL_rN\frac{du}{ds} + GS^2L_r^2N^2\left(\frac{du}{ds}\right)^2 = S^2M_r^2N^2$$

bulunur. Burada $\left(\frac{du}{ds}\right)^2$ ve $\frac{du}{ds}$ parantezine alarak

$$S^2N^2[EM_r^2 - 2FL_rM_r + GL_r^2]\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2SN(N\cos\omega - RB_r)[FM_r - GL_r]\frac{du}{ds} + G(N\cos\omega - RB_r)^2 - S^2M_r^2N^2 = 0$$

ifadesi elde edilmiş olur. İşlem kolaylığı açısından $EM_r^2 + GL_r^2 - 2FL_rM_r = A_r$ denilirse

$$S^2N^2A_r\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2SN(N\cos\omega - RB_r)[FM_r - GL_r]\frac{du}{ds} + G(N\cos\omega - RB_r)^2 - S^2M_r^2N^2 = 0$$

ikinci dereceden denklemi elde edilir. Bu denklemin kökleri bize $\frac{du}{ds}$ ifadesini verir.

Bu denklemin diskriminantı

$$\Delta_r = 4S^2N^2(N\cos\omega - RB_r)^2[FM_r - GL_r]^2 - 4S^2N^2A_r[G(N\cos\omega - RB_r)^2 - S^2M_r^2N^2]$$

bulunur. Bu ifade düzenlenirse

$$\Delta_r = 4S^2N^2(N\cos\omega - RB_r)^2[(FM_r - GL_r)^2 - A_rG] + 4S^4N^4M_r^2A_r$$

elde edilir. Daha önce yapılan kısaltmalar, bulunan diskriminantda yerine yazılırsa

$$\Delta_r = 4 \left(\frac{\tau_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} \right)^2 \left\| \vec{X}_u \times \vec{X}_v \right\|^2 \left(\begin{array}{c} \left\| \vec{X}_u \times \vec{X}_v \right\| \cos \omega \\ - \left(\frac{k_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} \right) \left\langle \vec{X}_u \times \vec{X}_v, \vec{d}_r \right\rangle \end{array} \right)^2 \left[\begin{array}{c} \left(F \left\langle \vec{X}_v, \vec{d}_r \right\rangle - G \left\langle \vec{X}_u, \vec{d}_r \right\rangle \right)^2 \\ - A_r G \end{array} \right] \\ + 4 \left(\frac{\tau_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} \right)^4 \left\| \vec{X}_u \times \vec{X}_v \right\|^4 \left\langle \vec{X}_v, \vec{d}_r \right\rangle^2 A_r$$

bulunur. Dolayısıyla aradığımız $\frac{du}{ds}$ ifadesi

$$\frac{du}{ds} = \frac{-2SN(N \cos \omega - RB_r)[FM_r - GL_r] \pm \sqrt{\Delta_r}}{2S^2 N^2 A_r}$$

şeklindedir. Yukarıdaki denklemde, daha önce yapılan kısaltmalar yerine yazılırsa

$$\frac{du}{ds} = \frac{-2S \left\| \vec{X}_u \times \vec{X}_v \right\| \left(\begin{array}{c} \left\| \vec{X}_u \times \vec{X}_v \right\| \cos \omega \\ - R \left\langle \vec{X}_u \times \vec{X}_v, \vec{d}_r \right\rangle \end{array} \right) \left[F \left\langle \vec{X}_v, \vec{d}_r \right\rangle - G \left\langle \vec{X}_u, \vec{d}_r \right\rangle \right] \pm \sqrt{\Delta_r}}{2S^2 \left\| \vec{X}_u \times \vec{X}_v \right\|^2 A_r} \quad (4.29)$$

bulunur. Burada $S = \frac{\tau_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}}$, $R = \frac{k_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}}$ ve $A_r = EM_r^2 + GL_r^2 - 2FL_r M_r$ dır.

Şimdi benzer yolla $\frac{dv}{ds}$ ifadesini bulalım. (4.26) da $\frac{du}{ds}$ yalnız bırakılırsa

$$\frac{du}{ds} = \frac{N \cos \omega - RB_r}{SL_r N} - \frac{SM_r N}{SL_r N} \frac{dv}{ds}$$

elde edilir. Bulunan $\frac{du}{ds}$ in eşiti (4.28) de yerine yazılırsa

$$E \left(\frac{N \cos \omega - RB_r}{SL_r N} - \frac{SM_r N}{SL_r N} \frac{dv}{ds} \right)^2 + 2F \left(\frac{N \cos \omega - RB_r}{SL_r N} - \frac{SM_r N}{SL_r N} \frac{dv}{ds} \right) \frac{dv}{ds} + G \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 = 1$$

bulunur. Parantezler açılıp payda eşitlenirse

$$E(N \cos \omega - RB_r)^2 - 2E(N \cos \omega - RB_r)SM_r N \frac{dv}{ds} + ES^2 M_r^2 N^2 \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 \\ + 2F(N \cos \omega - RB_r)SL_r N \frac{dv}{ds} - 2FS^2 N^2 L_r M_r \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + GS^2 N^2 L_r^2 \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = S^2 N^2 L_r^2$$

elde edilir. $\left(\frac{dv}{ds}\right)^2$ ve $\left(\frac{dv}{ds}\right)$ parantezine alınır

$$S^2 N^2 (EM_r^2 - 2FL_r M_r + GL_r^2) \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + 2SN(N \cos \omega - RB_r)(FL_r - EM_r) \frac{dv}{ds} \\ + E(N \cos \omega - RB_r)^2 - S^2 N^2 L_r^2 = 0$$

bulunur. Daha önce kullanılan $EM_r^2 - 2FL_r M_r + GL_r^2 = A_r$ kısaltmasını tekrar kullanarak

$$S^2 N^2 A_r \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + 2SN(N \cos \omega - RB_r)(FL_r - EM_r) \frac{dv}{ds} \\ + E(N \cos \omega - RB_r)^2 - S^2 N^2 L_r^2 = 0$$

ikinci dereceden denklemi elde edilir. Bu denklemin kökleri bize $\frac{dv}{ds}$ i verir.

Denklemin diskriminantı hesaplanırsa

$$\Delta_r^* = 4S^2 N^2 (N \cos \omega - RB_r)^2 (FL_r - EM_r)^2 \\ - 4S^2 N^2 A_r [E(N \cos \omega - RB_r)^2 - S^2 N^2 L_r^2]$$

bulunur. Δ_r^* düzenlenirse

$$\Delta_r^* = 4S^2 N^2 (N \cos \omega - RB_r)^2 [(FL_r - EM_r)^2 - A_r E] + 4S^4 N^4 A_r L_r^2$$

elde edilir. Yapılan kısaltmalar bulunan Δ_r^* da yerine yazılırsa

$$\Delta_r^* = 4S^2 \|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\|^2 \left[\left(\|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\| \cos \omega \right)^2 - R \langle \vec{X}_u \times \vec{X}_v, \vec{d}_r \rangle \right] \left[\left(F \langle \vec{X}_u, \vec{d}_r \rangle - E \langle \vec{X}_v, \vec{d}_r \rangle \right)^2 - A_r E \right] \\ + 4S^4 \|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\|^4 A_r \langle \vec{X}_u, \vec{d}_r \rangle^2$$

elde edilir. Dolayısıyla denklemin kökleri

$$\frac{dv}{ds} = \frac{-2SN(N \cos \omega - RB_r)(FL_r - EM_r) \pm \sqrt{\Delta_r^*}}{2S^2 N^2 A_r}$$

ile bulunur. Daha önce yapılan kısaltmalar yerine yazılırsa

$$\frac{dv}{ds} = \frac{-2S \|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\| \left(\begin{array}{c} \|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\| \cos \omega \\ -R \langle \vec{X}_u \times \vec{X}_v, d_r \rangle \end{array} \right) (F \langle \vec{X}_u, d_r \rangle - E \langle \vec{X}_v, d_r \rangle) \pm \sqrt{\Delta_r^*}}{2S^2 \|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\|^2 A_r} \quad (4.30)$$

elde edilir. Burada $S = \frac{\tau_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}}$, $R = \frac{k_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}}$ ve $A_r = EM_r^2 - 2FL_r M_r + GL_r^2$ dır.

(4.29) ve (4.30) dan

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{ds} = \frac{-2S \|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\| \left(\begin{array}{c} \|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\| \cos \omega \\ -R \langle \vec{X}_u \times \vec{X}_v, \vec{d}_r \rangle \end{array} \right) [F \langle \vec{X}_v, \vec{d}_r \rangle - G \langle \vec{X}_u, \vec{d}_r \rangle] \pm \sqrt{\Delta_r}}{2S^2 \|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\|^2 A_r} \\ \frac{dv}{ds} = \frac{-2S \|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\| \left(\begin{array}{c} \|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\| \cos \omega \\ -R \langle \vec{X}_u \times \vec{X}_v, d_r \rangle \end{array} \right) (F \langle \vec{X}_u, d_r \rangle - E \langle \vec{X}_v, d_r \rangle) \pm \sqrt{\Delta_r^*}}{2S^2 \|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\|^2 A_r} \end{array} \right. \quad (4.31)$$

diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi

$$u(s_0) = u_0$$

$$v(s_0) = v_0$$

başlangıç noktası ile birlikte çözülüp bulunan değerler $X(u, v)$ de yazılırsa S yüzeyi üzerinde istenen D_r -Darboux slant helis elde edilir.

4.4.2.Kapalı Formda Verilen Yüzey Üzerinde Bulunan D_r -Darboux Slant Helisin Elde Edilmesi

S , E^3 uzayında $f(x,y,z)=0$ kapalı formu ile verilen bir yüzey olsun. $\gamma(s)=(x(s),y(s),z(s))$, S yüzeyi üzerinde, sabit ve birim $\vec{d}_r=(a,b,c)$ doğrultusu ile sabit ω açısı yapan, Darboux çatısı $\{\vec{T},\vec{V},\vec{U}\}$ olan birim hızlı bir D_r -Darboux slant helis olsun. γ eğrisini elde etmek için $x(s),y(s)$ ve $z(s)$ değerlerinin bulunması gerekir. $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ ve $\vec{e}_3$, E^3 uzayının standart baz vektörleri olmak üzere Darboux çatısının elemanları;

$$\begin{aligned}\vec{T} &= \gamma' = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right), \\ \vec{U} &= \frac{\nabla \vec{f}}{\|\nabla \vec{f}\|} = \frac{1}{\|\nabla \vec{f}\|} (f_x, f_y, f_z), \\ \vec{V} &= \vec{U} \times \vec{T} = \frac{1}{\|\nabla \vec{f}\|} \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ f_x & f_y & f_z \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\|\nabla \vec{f}\|} \left(f_y \frac{dz}{ds} - f_z \frac{dy}{ds}, f_z \frac{dx}{ds} - f_x \frac{dz}{ds}, f_x \frac{dy}{ds} - f_y \frac{dx}{ds} \right)\end{aligned}$$

şeklindedir [15]. Bulunan $\vec{T}$ ve $\vec{U}$ vektörleri, $\vec{D}_r$ vektöründe yerine yazılırsa

$$\vec{D}_r = \frac{\tau_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right) + \frac{k_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} \frac{1}{\|\nabla \vec{f}\|} (f_x, f_y, f_z)$$

elde edilir. γ , D_r -Darboux slant helis olduğundan $\langle \vec{D}_r, \vec{d}_r \rangle = \cos \omega$ dir. $\vec{d}_r$ vektörü ve yukarıda bulunan $\vec{D}_r$ vektörü yerine yazılırsa

$$\left\langle \frac{\tau_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right) + \frac{k_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} \frac{1}{\|\nabla \vec{f}\|} (f_x, f_y, f_z), (a,b,c) \right\rangle = \cos \omega$$

bulunur. Burada işlem kolaylığı için $\frac{\tau_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} = S$ ve $\frac{k_g}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}} = R$ denilip ifade

düzenlenirse

$$\left\langle S \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right) + R \frac{1}{\|\nabla \vec{f}\|} (f_x, f_y, f_z), (a, b, c) \right\rangle = \cos \omega$$

elde edilir. Buradaki iç çarpım işlemi yapılırsa

$$S a \frac{dx}{ds} + S b \frac{dy}{ds} + S c \frac{dz}{ds} + R \frac{1}{\|\nabla \vec{f}\|} a f_x + R \frac{1}{\|\nabla \vec{f}\|} b f_y + R \frac{1}{\|\nabla \vec{f}\|} c f_z = \cos \omega$$

bulunur. Her iki taraf $\|\nabla \vec{f}\|$ ile çarpılırsa

$$S \|\nabla \vec{f}\| a \frac{dx}{ds} + S \|\nabla \vec{f}\| b \frac{dy}{ds} + S \|\nabla \vec{f}\| c \frac{dz}{ds} = \|\nabla \vec{f}\| \cos \omega - R (a f_x + b f_y + c f_z) \quad (4.32)$$

elde edilir. Ayrıca $\langle \vec{T}, \vec{U} \rangle = 0$ olduğundan

$$f_x \frac{dx}{ds} + f_y \frac{dy}{ds} + f_z \frac{dz}{ds} = 0 \quad (4.33)$$

dır [15]. Burada $\frac{dy}{ds}$ ifadesi yalnız bırakılırsa

$$\frac{dy}{ds} = -\frac{f_x}{f_y} \frac{dx}{ds} - \frac{f_z}{f_y} \frac{dz}{ds}$$

bulunur. Bu ifade (4.32) de yerine yazılırsa ve işlem kolaylığı için

$\|\nabla \vec{f}\| \cos \omega - R (a f_x + b f_y + c f_z) = H$ kısaltması kullanılırsa

$$S \|\nabla \vec{f}\| a \frac{dx}{ds} + S \|\nabla \vec{f}\| b \left(-\frac{f_x}{f_y} \frac{dx}{ds} - \frac{f_z}{f_y} \frac{dz}{ds} \right) + S \|\nabla \vec{f}\| c \frac{dz}{ds} = H$$

elde edilir. Parantezler açılırsa

$$S \|\nabla \vec{f}\| a \frac{dx}{ds} - S \|\nabla \vec{f}\| b \frac{f_x}{f_y} \frac{dx}{ds} - S \|\nabla \vec{f}\| b \frac{f_z}{f_y} \frac{dz}{ds} + S \|\nabla \vec{f}\| c \frac{dz}{ds} = H$$

bulunur. Denklemin iki tarafı f_y ile çarpılırsa

$$S\|\nabla\vec{f}\|af_y\frac{dx}{ds}-S\|\nabla\vec{f}\|bf_x\frac{dx}{ds}-S\|\nabla\vec{f}\|bf_z\frac{dz}{ds}+S\|\nabla\vec{f}\|cf_y\frac{dz}{ds}=Hf_y$$

elde edilir. Her iki taraf $S\|\nabla\vec{f}\|$ ye bölünürse

$$af_y\frac{dx}{ds}-bf_x\frac{dx}{ds}-bf_z\frac{dz}{ds}+cf_y\frac{dz}{ds}=\frac{1}{S\|\nabla\vec{f}\|}Hf_y$$

bulunur. Bulunan denklemde $\frac{dx}{ds}$ ve $\frac{dz}{ds}$ parantezine alınır

$$(af_y-bf_x)\frac{dx}{ds}+(cf_y-bf_z)\frac{dz}{ds}=\frac{1}{S\|\nabla\vec{f}\|}Hf_y,$$

$\frac{dx}{ds}$ yalnız bırakılırsa

$$\frac{dx}{ds}=\frac{1}{af_y-bf_x}\left[\frac{1}{S\|\nabla\vec{f}\|}Hf_y+(bf_z-cf_y)\frac{dz}{ds}\right] \quad (4.34)$$

elde edilir. Benzer yolla $\frac{dy}{ds}$ i bulalım. (4.33) denklemde $\frac{dx}{ds}$ yalnız bırakılırsa

$$\frac{dx}{ds}=-\frac{f_y}{f_x}\frac{dy}{ds}-\frac{f_z}{f_x}\frac{dz}{ds}$$

bulunur. Bu ifade (4.32) de yazılırsa

$$S\|\nabla\vec{f}\|a\left(-\frac{f_y}{f_x}\frac{dy}{ds}-\frac{f_z}{f_x}\frac{dz}{ds}\right)+S\|\nabla\vec{f}\|b\frac{dy}{ds}+S\|\nabla\vec{f}\|c\frac{dz}{ds}=\|\nabla\vec{f}\|\cos\omega-R(af_x+bf_y+cf_z)$$

elde edilir. Parantez açılıp her iki taraf $S\|\nabla\vec{f}\|$ ye bölünürse

$$-a\frac{f_y}{f_x}\frac{dy}{ds}-a\frac{f_z}{f_x}\frac{dz}{ds}+b\frac{dy}{ds}+c\frac{dz}{ds}=\frac{1}{S\|\nabla\vec{f}\|}H$$

olur. Bulunan bu ifadenin iki tarafı f_x ile çarpılıp sonra da $\frac{dy}{ds}$ ve $\frac{dz}{ds}$ parantezine alınır

$$(bf_x - af_y) \frac{dy}{ds} + (cf_x - af_z) \frac{dz}{ds} = \frac{1}{S \|\nabla f\|} f_x H$$

elde edilir. $\frac{dy}{ds}$ yalnız bırakılırsa

$$\frac{dy}{ds} = \frac{1}{(af_y - bf_x)} \left[(cf_x - af_z) \frac{dz}{ds} - \frac{1}{S \|\nabla f\|} f_x H \right] \quad (4.35)$$

bulunur. γ birim hızlı olduğundan

$$\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 = 1 \quad (4.36)$$

elde edilir [15]. $(af_y - bf_x) = \Omega_r \neq 0$ denilerek (4.34) ve (4.35) ifadeleri (4.36) da yerine yazılırsa

$$\left(\frac{1}{\Omega_r} \left[\frac{1}{S \|\nabla f\|} H f_y + (bf_z - cf_y) \frac{dz}{ds} \right] \right)^2 + \left(\frac{1}{\Omega_r} \left[(cf_x - af_z) \frac{dz}{ds} - \frac{1}{S \|\nabla f\|} f_x H \right] \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 = 1$$

bulunur. Burada kareler alınıp, bulunan ifade de benzer olan ifadeler ortak çarpan parantezine alınır

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{\Omega_r^2} \left[(a^2 + b^2) f_z^2 + c^2 (f_x^2 + f_y^2) - 2cf_z (af_x + bf_y) \right] + 1 \right\} \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 \\ & + \left\{ 2 \frac{1}{S \|\nabla f\|} H \frac{1}{\Omega_r^2} \left[f_z (af_x + bf_y) - c (f_x^2 + f_y^2) \right] \right\} \frac{dz}{ds} \\ & + \frac{1}{\Omega_r^2} \left(\frac{1}{S \|\nabla f\|} H \right)^2 (f_x^2 + f_y^2) - 1 = 0 \end{aligned}$$

ikinci derece denklemi elde edilir. Bu denklemin kökleri

$$q_1 = \frac{1}{\Omega_r^2} \left[(a^2 + b^2) f_z^2 + c^2 (f_x^2 + f_y^2) - 2cf_z (af_x + bf_y) \right] + 1$$

$$q_2 = 2 \frac{1}{S \|\nabla f\|} H \frac{1}{\Omega_r^2} \left[f_z (af_x + bf_y) - c (f_x^2 + f_y^2) \right]$$

$$q_3 = \frac{1}{\Omega_r^2} \left(\frac{1}{S \|\nabla f\|} H \right)^2 (f_x^2 + f_y^2) - 1$$

olmak üzere

$$\frac{dz}{ds} = \frac{-q_2 \pm \sqrt{q_2^2 - 4q_1q_3}}{2q_1} \quad (4.37)$$

ile bulunur. (4.37) ifadesi (4.34) ve (4.35) de yerine yazılırsa, $(af_y - bf_x) = \Omega_r \neq 0$

olmak üzere

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\Omega_r} \left[\frac{1}{S \|\nabla f\|} H f_y + (bf_z - cf_y) \left(\frac{-q_2 \pm \sqrt{q_2^2 - 4q_1q_3}}{2q_1} \right) \right] \\ \frac{dy}{ds} = \frac{1}{\Omega_r} \left[(cf_x - af_z) \left(\frac{-q_2 \pm \sqrt{q_2^2 - 4q_1q_3}}{2q_1} \right) - \frac{1}{S \|\nabla f\|} f_x H \right] \\ \frac{dz}{ds} = \frac{-q_2 \pm \sqrt{q_2^2 - 4q_1q_3}}{2q_1} \end{cases} \quad (4.38)$$

diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Böylece

$$x(s_0) = x_0$$

$$y(s_0) = y_0$$

$$z(s_0) = z_0$$

başlangıç noktası ile birlikte bir başlangıç değer problemi elde ederiz. Bu problemin çözümü bize S yüzeyi üzerinde aradığımız D_r -Darboux slant helisi verir.

4.5. D_r -Darboux Slant Helis Örnekleri

Bu kısımda, D_r -Darboux slant helislere ait örnekler verilecektir. Örnek 4.5.1 de yüzey üzerinde verilen bir eğrinin D_r -Darboux slant helis olup olmadığı Sonuç

4.2.3 yardımıyla kontrol edilecektir. Örnek 4.5.2 de parametrik formda verilen bir yüzey üzerinde D_r -Darboux slant helis elde edebilmek için 4.4.1 bölümünde verilen yöntem uygulanmıştır. Örnek 4.5.3 de kapalı formda verilen bir yüzey üzerinde D_r -Darboux slant helis elde edebilmek için 4.4.2 bölümünde verilen yöntem uygulanmıştır.

Örnek 4.5.1: $X(u, v) = (v, \sin u, \cos u)$ parametrizasyonu ile verilen silindir yüzeyini

ele alalım. $u = \frac{s}{\sqrt{2}}$ ve $v = \frac{s}{\sqrt{2}}$ alınarak bu yüzey üzerinde

$$\gamma(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \cos \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$$

eğrisi elde edilir.

$$\gamma'(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1, \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{2}} \right),$$

olup $\|\gamma'(s)\| = 1$ olduğundan γ birim hızlıdır. γ eğrisinin Darboux çatı elemanları

$$\vec{T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1, \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\vec{V} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1, -\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\vec{U}_\gamma = \left(0, -\sin \frac{s}{\sqrt{2}}, -\cos \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$$

olarak bulunur. Ayrıca

$$\gamma'' = \frac{1}{2} \left(0, -\sin \frac{s}{\sqrt{2}}, -\cos \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\vec{U}'_\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(0, -\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$$

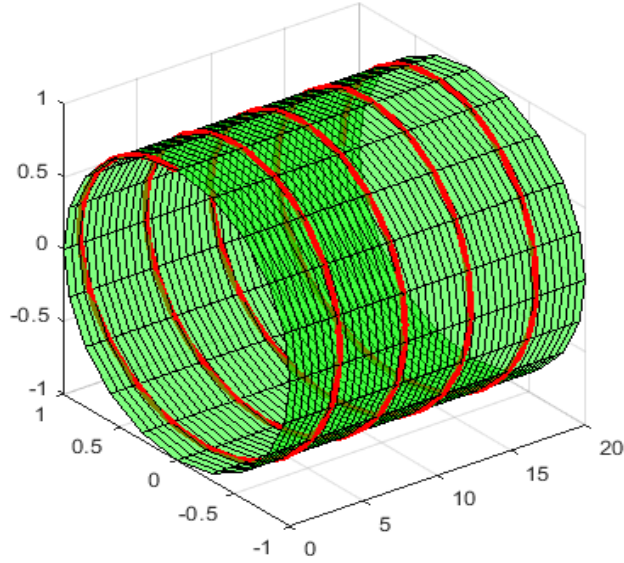
olduğundan

$$\begin{aligned}
k_n &= \langle \gamma'', U_\gamma \rangle = \frac{1}{2} \\
k_g &= \langle \gamma'', V \rangle = 0 \\
\tau_g &= -\langle U'_\gamma, V \rangle = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan değerler (4.15) in denk ifadesinde yerine yazılırsa

$$\sigma_r = \frac{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}}{-\frac{\tau_g^2}{k_g^2 + \tau_g^2} \left(\frac{k_g}{\tau_g} \right)' - k_n} = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{2} \right)^2}}{-\frac{1}{2}} = -1$$

olduğundan γ eğrisi S yüzeyi üzerinde bir D_r -Darboux slant helistir. Ayrıca Sonuç 4.2.6 gereğince γ eğrisi bir relatively normal-slant helistir. Silindir yüzeyi ve seçilen γ eğrisi Şekil 4.5.1 de gösterilmiştir.



Şekil 4.5.1: $X(u, v) = (v, \sin u, \cos u)$ yüzeyi üzerinde $\gamma(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \cos \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$

denklemlili D_r -Darboux slant helis

Örnek 4.5.2: $X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$ ile verilen koni yüzeyi üzerinde geodezik burulması $k_g = \frac{1}{\sqrt{2}s}$, geodezik burulması $\tau_g = \frac{1}{\sqrt{3}s}$ olan ve $\vec{D}_r$ vektörü, $d_r = (0, 0, 1)$

doğrultusu ile $\cos \omega = \frac{5}{\sqrt{30}}$ olacak şekilde ω açısı yapan D_r -Darboux slant helisi

4.4.1 bölümünde verilen yöntemle bulalım. Gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$S = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, R = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}},$$

$$\vec{X}_u = (\cos v, \sin v, 1), \vec{X}_v = (-u \sin v, u \cos v, 0),$$

$$\vec{X}_u \times \vec{X}_v = (-u \cos v, -u \sin v, u), N = \|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\| = u\sqrt{2},$$

$$L_r = \langle \vec{X}_u, \vec{d}_r \rangle = 1, M_r = \langle \vec{X}_v, \vec{d}_r \rangle = 0,$$

$$E = \langle \vec{X}_u, \vec{X}_u \rangle = 2, F = \langle \vec{X}_u, \vec{X}_v \rangle = 0, G = \langle \vec{X}_v, \vec{X}_v \rangle = u^2,$$

$$EG - F^2 = 2u^2, \sqrt{EG - F^2} = u\sqrt{2},$$

$$\Delta_r = 0, \Delta_r^* = \frac{64}{75}u^6$$

bulunur. Bulunan bu değerler (4.31) de yerine yazılırsa

$$\begin{cases} \frac{du}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{dv}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}u} \end{cases}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemin çözümünden c_1 ve c_2 integrasyon sabitleri olmak üzere

$$u = \frac{s}{\sqrt{3}} + c_1$$

$$v = \ln(s + \sqrt{3}c_1) + c_2$$

bulunur. Özel olarak $c_1 = c_2 = 0$ olarak alınırsa $s > 0$ olmak üzere

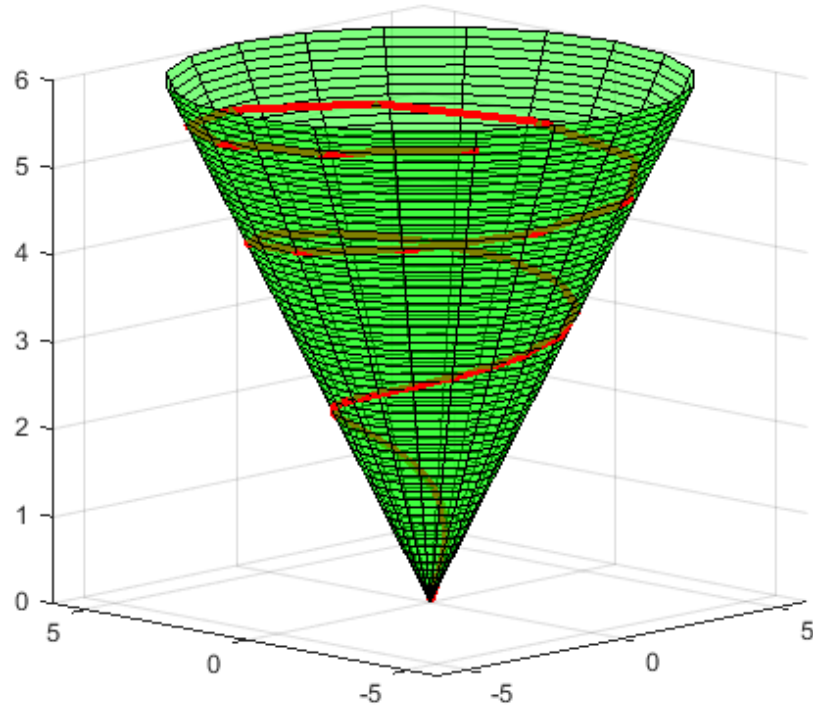
$$u = \frac{s}{\sqrt{3}}$$

$$v = \ln s$$

elde edilir. Bulunan u ve v değerleri $X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$ de yerine yazılırsa, bu yüzey üzerinde

$$\gamma(s) = X(u(s), v(s)) = \left(\frac{s}{\sqrt{3}} \cos(\ln s), \frac{s}{\sqrt{3}} \sin(\ln s), \frac{s}{\sqrt{3}} \right)$$

D_r -Darboux slant helisi elde edilir. Koni yüzeyi ve bulunan γ eğrisi Şekil 4.5.2 de gösterilmiştir.



Şekil 4.5.2 : $X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$ yüzeyi üzerindeki geodezik eğriliği $k_g = \frac{1}{\sqrt{2}s}$,

geodezik burulması $\tau_g = \frac{1}{\sqrt{3}s}$ olan $d_r = (0, 0, 1)$ doğrultusu ile $\cos \omega = \frac{5}{\sqrt{30}}$ olacak şekilde

ω açısı yapan D_r -Darboux slant helis

Örnek 4.5.3: $f(x, y, z) = y^2 + z^2 - 1 = 0$ kapalı formu ile silindir yüzeyi verilsin. Bu yüzey üzerinde eğrilikleri $k_g = 0$, $\tau_g = -\frac{1}{2}$ olan ve $\vec{D}_r$ vektörü, sabit $d_r = (1, 0, 0)$ doğrultusu ile $\omega = \frac{\pi}{4}$ açısı yapan D_r -Darboux slant helisi 4.4.2 bölümünde verilen metotla bulalım. Gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$f_x = 0, f_y = 2y, f_z = 2z,$$

$$\nabla \vec{f} = (0, 2y, 2z), \|\nabla \vec{f}\| = 2\sqrt{y^2 + z^2},$$

$$S = \frac{\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2 + k_g^2}} = -1, R = \frac{k_g}{\sqrt{\tau_g^2 + k_g^2}} = 0$$

$$H = \|\nabla \vec{f}\| \cos \omega - R(af_x + bf_y + cf_z) = \sqrt{2(y^2 + z^2)},$$

$$\Omega_r = af_y - bf_x = 2y$$

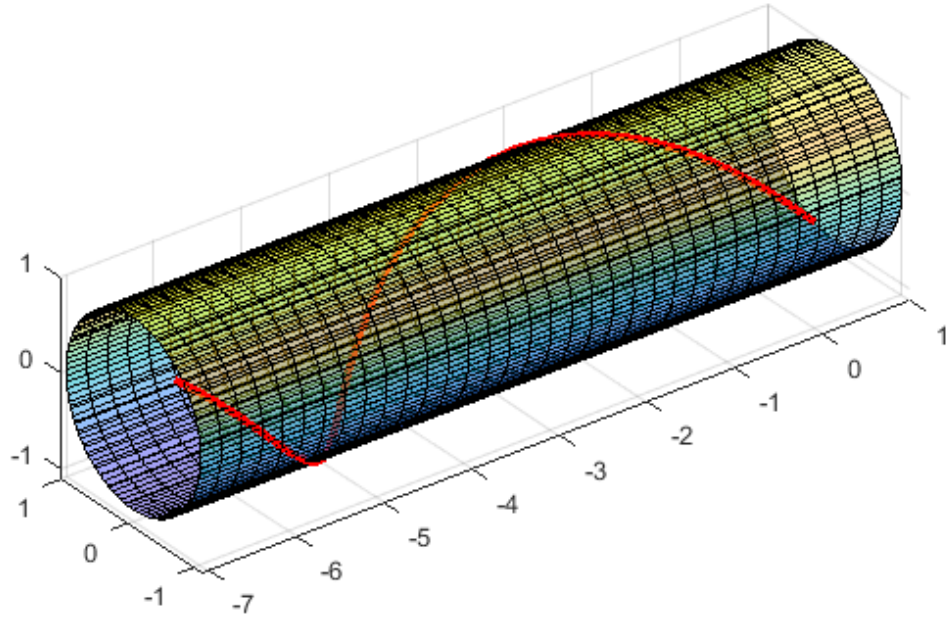
bulunur. Dolayısıyla

$$q_1 = \frac{y^2 + z^2}{y^2}, q_2 = 0, q_3 = -\frac{1}{2}$$

olduğundan

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{dy}{ds} = \pm \frac{z}{\sqrt{2(y^2 + z^2)}} \\ \frac{dz}{ds} = \mp \frac{y}{\sqrt{2(y^2 + z^2)}} \end{cases}$$

elde edilir. Bu diferansiyel denklem sistemi karmaşık olduğundan eğrinin parametrik denklemini elde edilememiş olsa da bu sistem için Matlab programında $P(0, -1, 0)$ başlangıç noktası ile 'ode45' komutu kullanılırsa aranan eğrinin grafiği Şekil 4.5.3 deki gibi elde edilir.



Şekil 4.5.3: $f(x, y, z) = y^2 + z^2 - 1 = 0$ yüzeyi üzerinde geodezik eğriliği $k_g = 0$,
geodezik burulması $\tau_g = -\frac{1}{2}$ olan ve sabit $d_r = (1, 0, 0)$ doğrultusu ile $\omega = \frac{\pi}{4}$ açısı yapan
 D_r -Darboux slant helis

5. YÜZEY ÜZERİNDE D_n -DARBOUX SLANT HELİSLER

Bu bölümde, E^3 uzayında bir S yüzeyi üzerinde kalan ve yeni bir özel yüzey eğrisi olan D_n -Darboux slant helisler incelenecektir. Bu özel eğriyi daha kolay incelemek için ilk olarak normal Darboux çatısı ve türev formülleri verilecektir. Daha sonra bu yeni çatı yardımıyla D_n -Darboux slant helisler için karakterizasyonlar verilecektir. Son olarak, kapalı ve parametrik formda verilen bir S yüzeyi üzerinde D_n -Darboux slant helis elde edebilmek için birer yöntem verilip ardından örnekler verilecektir.

5.1. Yüzey Eğrileri İçin Normal Darboux Çatısı

S bir yüzey olsun. $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı, $\{\vec{T}, \vec{V}, \vec{U}\}$ Darboux çatılı, k_g, k_n, τ_g eğriliklerine ve $\tilde{D}_n(s) = -k_n(s)\vec{V}(s) + k_g(s)\vec{U}(s)$ normal Darboux vektörüne sahip bir eğri olsun. Bu taktirde,

$$\tilde{D}_n(s) = -k_n(s)\vec{V}(s) + k_g(s)\vec{U}(s)$$

vektörü normlanırsa

$$\vec{D}_n(s) = \frac{\tilde{D}_n(s)}{\|\tilde{D}_n(s)\|} = -\frac{k_n(s)}{\sqrt{k_n^2(s) + k_g^2(s)}}\vec{V}(s) + \frac{k_g(s)}{\sqrt{k_n^2(s) + k_g^2(s)}}\vec{U}(s)$$

elde edilir. $\vec{D}_n$ vektörü, $\vec{V}$ ve $\vec{U}$ vektörlerinin gerdiği düzlemde bulunduğundan $\vec{T}$ vektörüne diktir. Dolayısıyla $\vec{Y}_n = \vec{D}_n \times \vec{T}$ birim vektörünün tanımlanması ile yüzey üzerindeki β eğrisi boyunca yeni bir ortonormal çatı olan $\{\vec{D}_n, \vec{T}, \vec{Y}_n\}$ çatısı elde edilir.

Tanım 5.1.1: Yukarıdaki şekilde tanımlanan $\{\vec{D}_n, \vec{T}, \vec{Y}_n\}$ çatısına, S yüzeyi üzerinde β eğrisinin *normal Darboux çatısı* veya kısaca *ND-çatısı* denir.

Şimdi bu çatı için türev formüllerini verelim.

Teorem 5.1.2: S bir yüzey olsun. $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ bu yüzey üzerinde yay parametresi s olan ve ND-çatısına sahip birim hızlı bir eğri olsun. ND-çatısının vektör alanları $\vec{D}_n, \vec{T}, \vec{Y}_n$ ve eğrilikleri δ_n, μ_n olmak üzere, ND-çatısının türev formülleri

$$\begin{aligned}\vec{D}'_n &= -\delta_n \vec{Y}_n \\ T' &= \mu_n \vec{Y}_n \\ Y'_n &= \delta_n \vec{D}_n - \mu_n \vec{T}\end{aligned}\tag{5.1}$$

şeklindedir. Burada $\delta_n = \left(\frac{k_n}{k_g}\right)' \left(\frac{k_g^2}{k_n^2 + k_g^2}\right) + \tau_g$ ve $\mu_n = \sqrt{k_n^2 + k_g^2}$ dir

İspat: $\vec{D}'_n, \{\vec{D}_n, \vec{T}, \vec{Y}_n\}$ çatısının elemanlarının lineer birleşimi olarak yazılabilir. Yani

$$\vec{D}'_n = a_1 \vec{D}_n + a_2 \vec{T} + a_3 \vec{Y}_n\tag{5.2}$$

yazılır. Burada $a_i = a_i(s)$, $i = (1, 2, 3)$, s in diferansiyellenebilir fonksiyonlarıdır.

(5.2) ifadesinin her iki yanı $\vec{D}_n$ vektörü ile iç çarpılırsa

$$\langle \vec{D}'_n, \vec{D}_n \rangle = a_1 \langle \vec{D}_n, \vec{D}_n \rangle + a_2 \langle \vec{D}_n, \vec{T} \rangle + a_3 \langle \vec{D}_n, \vec{Y}_n \rangle$$

bulunur. $\langle \vec{D}_n, \vec{D}_n \rangle = 1$ ve $\langle \vec{D}_n, \vec{T} \rangle = \langle \vec{D}_n, \vec{Y}_n \rangle = 0$ olduğundan

$$\langle \vec{D}'_n, \vec{D}_n \rangle = a_1$$

dir. $\langle \vec{D}_n, \vec{D}_n \rangle = 1$ eitliğinin türevi alınırsa $\langle \vec{D}'_n, \vec{D}_n \rangle = 0 = a_1$ dir. (5.2) ifadesininin iki

yanı $\vec{T}$ vektörü ile iç çarpılırsa

$$\langle \vec{D}'_n, \vec{T} \rangle = a_1 \langle \vec{D}_n, \vec{T} \rangle + a_2 \langle \vec{T}, \vec{T} \rangle + a_3 \langle \vec{Y}_n, \vec{T} \rangle$$

bulunur. $\langle \vec{D}_n, \vec{T} \rangle = \langle \vec{Y}_n, \vec{T} \rangle = 0$ ve $\langle \vec{T}, \vec{T} \rangle = 1$ olduğundan $\langle \vec{D}'_n, \vec{T} \rangle = a_2$ dır. Öte yandan $\vec{D}_n$ vektörü ile $\vec{U}$ vektörü arasındaki açı η olmak üzere $\frac{k_n}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} = \sin \eta$ ve

$$\frac{k_g}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} = \cos \eta \text{ olarak tanımlanırsa}$$

$$\vec{D}_n = -\sin \eta \vec{V} + \cos \eta \vec{U} \quad (5.3)$$

bulunur. (5.3) ifadesinin türevi alınır ve Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\vec{D}'_n = (k_g \sin \eta - k_n \cos \eta) \vec{T} - (\eta' + \tau_g) \cos \eta \vec{V} - (\eta' + \tau_g) \sin \eta \vec{U}$$

elde edilir. $\frac{k_n}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} = \sin \eta$ ve $\frac{k_g}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} = \cos \eta$ olduğu göz önüne alınırsa $\vec{T}$ nin katsayısı sıfır olur. Dolayısıyla

$$\vec{D}'_n = -(\eta' + \tau_g) \cos \eta \vec{V} - (\eta' + \tau_g) \sin \eta \vec{U} \quad (5.4)$$

bulunur. (5.4) ifadesinin her iki yanı $\vec{T}$ vektörü ile iç çarpılırsa

$$a_2 = \langle \vec{D}'_n, \vec{T} \rangle = 0$$

elde edilir. Şimdi de (5.2) ifadesi $\vec{Y}_n$ vektörü ile iç çarpılırsa

$$\langle \vec{D}'_n, \vec{Y}_n \rangle = a_1 \langle \vec{D}_n, \vec{Y}_n \rangle + a_2 \langle \vec{T}, \vec{Y}_n \rangle + a_3 \langle \vec{Y}_n, \vec{Y}_n \rangle$$

bulunur. $\langle \vec{D}_n, \vec{Y}_n \rangle = \langle \vec{T}, \vec{Y}_n \rangle = 0$ ve $\langle \vec{Y}_n, \vec{Y}_n \rangle = 1$ olduğundan $a_3 = \langle \vec{D}'_n, \vec{Y}_n \rangle$ elde edilir.

$$\begin{aligned} \vec{Y}_n = \vec{D}_n \times \vec{T} &= \left(-\frac{k_n}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} \vec{V} + \frac{k_g}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} \vec{U} \right) \times \vec{T} \\ &= -\frac{k_n}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} (\vec{V} \times \vec{T}) + \frac{k_g}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} (\vec{U} \times \vec{T}) \\ &= -\frac{k_n}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} (-\vec{U}) + \frac{k_g}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} \vec{V} \end{aligned}$$

elde edilir. $\frac{k_n}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} = \sin \eta$ ve $\frac{k_g}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} = \cos \eta$ olduğu dikkate alınır

$$\vec{Y}_n = \cos \eta \vec{V} + \sin \eta \vec{U} \quad (5.5)$$

elde edilir. (5.4) te bulunan $\vec{D}'_n$ ve (5.5) de bulunan $\vec{Y}_n$ vektörleri iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} a_3 = \langle \vec{D}'_n, \vec{Y}_n \rangle &= \langle -(\eta' + \tau_g) \cos \eta \vec{V} - (\eta' + \tau_g) \sin \eta \vec{U}, \cos \eta \vec{V} + \sin \eta \vec{U} \rangle \\ &= -(\eta' + \tau_g)(\cos^2 \eta + \sin^2 \eta) \\ &= -(\eta' + \tau_g) \end{aligned} \quad (5.6)$$

bulunur. $\tan \eta = \left(\frac{k_n}{k_g} \right)$ ifadesinin türevinden

$$\eta' = \left(\frac{k_n}{k_g} \right)' \left(\frac{k_g^2}{k_n^2 + k_g^2} \right)$$

elde edilir. Bu eşitlik, (5.6) ifadesinde yerine yazılırsa

$$a_3 = - \left[\left(\frac{k_n}{k_g} \right)' \left(\frac{k_g^2}{k_n^2 + k_g^2} \right) + \tau_g \right]$$

elde edilir. Bulunan a_1, a_2 ve a_3 değerleri (5.2) denkleminde yazılırsa

$$\vec{D}'_n = - \left[\left(\frac{k_n}{k_g} \right)' \left(\frac{k_g^2}{k_n^2 + k_g^2} \right) + \tau_g \right] \vec{Y}_n \quad (5.7)$$

bulunur.

Şimdi $\vec{T}$ vektörünün türevini hesaplayalım. $\vec{T}', \{ \vec{D}_n, \vec{T}, \vec{Y}_n \}$ çatısının elemanlarının lineer birleşimi olarak yazılabilir. Yani

$$\vec{T}' = b_1 \vec{D}_n + b_2 \vec{T} + b_3 \vec{Y}_n \quad (5.8)$$

yazılır. Burada $b_i = b_i(s)$, $i = (1, 2, 3)$, s in diferansiyellenebilir fonksiyonlarıdır. (5.8)

ifadesinin her iki yanını $\vec{D}_n$ vektörü ile iç çarpılırsa

$$\langle \vec{T}', \vec{D}_n \rangle = b_1 \langle \vec{D}_n, \vec{D}_n \rangle + b_2 \langle \vec{D}_n, \vec{T} \rangle + b_3 \langle \vec{D}_n, \vec{Y}_n \rangle$$

bulunur. $\langle \vec{D}_n, \vec{D}_n \rangle = 1$ ve $\langle \vec{D}_n, \vec{T} \rangle = \langle \vec{D}_n, \vec{Y}_n \rangle = 0$ olduğundan

$$\langle \vec{T}', \vec{D}_n \rangle = b_1$$

dır. Darboux türev formüllerinden $\vec{T}' = k_g \vec{V} + k_n \vec{U}$ dır. $\vec{T}'$ ve

$\vec{D}_n = -\frac{k_n}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} \vec{V} + \frac{k_g}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} \vec{U}$ vektörleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} b_1 = \langle \vec{T}', \vec{D}_n \rangle &= \left\langle k_g \vec{V} + k_n \vec{U}, -\frac{k_n}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} \vec{V} + \frac{k_g}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} \vec{U} \right\rangle \\ &= \frac{-k_g k_n}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} \langle \vec{V}, \vec{V} \rangle + \frac{k_g k_n}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} \langle \vec{U}, \vec{U} \rangle \\ &= \frac{-k_g k_n}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} + \frac{k_g k_n}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. (5.8) eşitliğinin her iki yanını $\vec{T}$ vektörü ile iç çarpılırsa

$$\langle \vec{T}', \vec{T} \rangle = b_1 \langle \vec{D}_n, \vec{T} \rangle + b_2 \langle \vec{T}, \vec{T} \rangle + b_3 \langle \vec{Y}_n, \vec{T} \rangle$$

bulunur. $\langle \vec{D}_n, \vec{T} \rangle = \langle \vec{Y}_n, \vec{T} \rangle = 0$ ve $\langle \vec{T}, \vec{T} \rangle = 1$ olduğundan

$$b_2 = \langle \vec{T}', \vec{T} \rangle$$

dir. Öte yandan $\langle \vec{T}, \vec{T} \rangle = 1$ ifadesinin türevi alınır $\langle \vec{T}', \vec{T} \rangle = 0 = b_2$ elde edilir. (5.8)

eşitliğinin her iki yanını $\vec{Y}_n$ vektörü ile iç çarpılırsa

$$\langle \vec{T}', \vec{Y}_n \rangle = b_1 \langle \vec{D}_n, \vec{Y}_n \rangle + b_2 \langle \vec{T}, \vec{Y}_n \rangle + b_3 \langle \vec{Y}_n, \vec{Y}_n \rangle$$

bulunur. $\langle \vec{D}_n, \vec{Y}_n \rangle = \langle \vec{T}, \vec{Y}_n \rangle = 0$ ve $\langle \vec{Y}_n, \vec{Y}_n \rangle = 1$ olduğundan

$$b_3 = \langle \vec{T}', \vec{Y}_n \rangle$$

elde edilir. Darboux türev formüllerinden $\vec{T}' = k_g \vec{V} + k_n \vec{U}$ dır. Ayrıca

$$\vec{Y}_n = \vec{D}_n \times \vec{T} = \frac{k_n}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} \vec{U} + \frac{k_g}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} \vec{V}$$

dır. Bu vektörler yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} b_3 = \langle \vec{U}', \vec{Y}_n \rangle &= \left\langle k_g \vec{V} + k_n \vec{U}, \frac{k_n}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} \vec{U} + \frac{k_g}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} \vec{V} \right\rangle \\ &= \frac{k_n^2}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} \langle \vec{U}, \vec{U} \rangle + \frac{k_g^2}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} \langle \vec{V}, \vec{V} \rangle \\ &= \frac{k_n^2 + k_g^2}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} \\ &= \sqrt{k_n^2 + k_g^2} \end{aligned}$$

bulunur. Bulunan b_1 , b_2 ve b_3 değerleri (5.8) de yazılırsa

$$\vec{T}' = \sqrt{k_n^2 + k_g^2} \vec{Y}_n \quad (5.9)$$

elde edilir.

Şimdi $\vec{Y}_n$ vektörünün türevini hesaplayalım. $\vec{Y}_n', \{\vec{D}_n, \vec{T}, \vec{Y}_n\}$ çatısının elemanlarının lineer birleşimi olarak yazılabilir. Yani

$$\vec{Y}_n' = c_1 \vec{D}_n + c_2 \vec{T} + c_3 \vec{Y}_n \quad (5.10)$$

yazılır. Burada $c_i = c_i(s)$, $i = (1, 2, 3)$, s in diferansiyellenebilir fonksiyonlarıdır.

(5.10) ifadesinin her iki yanı $\vec{D}_n$ vektörü ile iç çarpılırsa

$$\langle \vec{Y}_n', \vec{D}_n \rangle = c_1 \langle \vec{D}_n, \vec{D}_n \rangle + c_2 \langle \vec{D}_n, \vec{T} \rangle + c_3 \langle \vec{D}_n, \vec{Y}_n \rangle$$

bulunur. $\langle \vec{D}_n, \vec{D}_n \rangle = 1$ ve $\langle \vec{D}_n, \vec{T} \rangle = \langle \vec{D}_n, \vec{Y}_n \rangle = 0$ olduğundan

$$\langle \vec{Y}_n', \vec{D}_n \rangle = c_1$$

dır. (5.5) eşitliğinin türevi alınıp, Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \vec{Y}_n' &= -\eta' \sin \eta \vec{V} + \cos \eta (-k_g \vec{T} + \tau_g \vec{U}) + \eta' \cos \eta \vec{U} + \sin \eta (-k_n \vec{T} - \tau_g \vec{V}) \\ &= (-k_g \cos \eta - k_n \sin \eta) \vec{T} + (-\eta' \sin \eta - \tau_g \sin \eta) \vec{V} + (\eta' \cos \eta + \tau_g \cos \eta) \vec{U} \quad (5.11) \\ &= (-k_g \cos \eta - k_n \sin \eta) \vec{T} - (\eta' + \tau_g) \sin \eta \vec{V} + (\eta' + \tau_g) \cos \eta \vec{U} \end{aligned}$$

bulunur. $\frac{k_n}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} = \sin \eta$ ve $\frac{k_g}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} = \cos \eta$ olduğundan $\vec{D}_n = -\sin \eta \vec{V} + \cos \eta \vec{U}$

olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} c_1 &= \langle \vec{Y}_n', \vec{D}_n \rangle \\ &= \langle (-k_g \cos \eta - k_n \sin \eta) \vec{T} - (\eta' + \tau_g) \sin \eta \vec{V} + (\eta' + \tau_g) \cos \eta \vec{U}, -\sin \eta \vec{V} + \cos \eta \vec{U} \rangle \\ &= (\eta' + \tau_g) \sin^2 \eta + (\eta' + \tau_g) \cos^2 \eta \\ &= (\eta' + \tau_g) (\sin^2 \eta + \cos^2 \eta) \\ &= \eta' + \tau_g \end{aligned}$$

elde edilir. $\tan \eta = \left(\frac{k_n}{k_g} \right)$ ifadesinin türevinden bulunan

$$\eta' = \left(\frac{k_n}{k_g} \right)' \left(\frac{k_g^2}{k_n^2 + k_g^2} \right)$$

ifadesi yerine yazılırsa

$$c_1 = \left(\frac{k_n}{k_g} \right)' \left(\frac{k_g^2}{k_n^2 + k_g^2} \right) + \tau_g$$

bulunur. (5.10) eşitliğinin her iki tarafı $\vec{T}$ vektörü ile iç çarpılırsa

$$\langle \vec{Y}'_n, \vec{T} \rangle = c_1 \langle \vec{D}_n, \vec{T} \rangle + c_2 \langle \vec{T}, \vec{T} \rangle + c_3 \langle \vec{Y}_n, \vec{T} \rangle$$

elde edilir. $\langle \vec{D}_n, \vec{T} \rangle = \langle \vec{Y}_n, \vec{T} \rangle = 0$ ve $\langle \vec{T}, \vec{T} \rangle = 1$ olduğundan

$$c_2 = \langle \vec{Y}'_n, \vec{T} \rangle$$

dir. (5.11) eşitliğini kullanarak

$$\begin{aligned} c_2 &= \langle \vec{Y}'_n, \vec{T} \rangle \\ &= \langle (-k_g \cos \eta - k_n \sin \eta) \vec{T} - (\eta' + \tau_g) \sin \eta \vec{V} + (\eta' + \tau_g) \cos \eta \vec{U}, \vec{T} \rangle \\ &= (-k_g \cos \eta - k_n \sin \eta) \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca $\frac{k_n}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} = \sin \eta$ ve $\frac{k_g}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} = \cos \eta$ eşitlikleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} c_2 &= \left(-k_n \frac{k_n}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} - k_g \frac{k_g}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} \right) \\ &= - \left(\frac{k_n^2}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} + \frac{\tau_g^2}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} \right) \\ &= -\sqrt{k_n^2 + k_g^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak (5.10) ifadesi $\vec{Y}_n$ vektörü ile iç çarpılırsa

$$\langle \vec{Y}'_n, \vec{Y}_n \rangle = c_1 \langle \vec{D}_n, \vec{Y}_n \rangle + c_2 \langle \vec{T}, \vec{Y}_n \rangle + c_3 \langle \vec{Y}_n, \vec{Y}_n \rangle$$

bulunur. $\langle \vec{D}_n, \vec{Y}_n \rangle = \langle \vec{T}, \vec{Y}_n \rangle = 0$ ve $\langle \vec{Y}_n, \vec{Y}_n \rangle = 1$ olduğundan

$$c_3 = \langle \vec{Y}'_n, \vec{Y}_n \rangle$$

dir. $\langle \vec{Y}_n, \vec{Y}_n \rangle = 1$ ifadesinin türevi alınırsa $\langle \vec{Y}'_n, \vec{Y}_n \rangle = c_3 = 0$ elde edilir. Bulunan c_1, c_2

ve c_3 ifadeleri (5.10) ifadesinde yazılırsa

$$\vec{Y}'_n = \left[\left(\frac{k_n}{k_g} \right)' \left(\frac{k_g^2}{k_n^2 + k_g^2} \right) + \tau_g \right] \vec{D}_n - \sqrt{k_n^2 + k_g^2} \vec{T} \quad (5.12)$$

elde edilir. (5.7), (5.9) ve (5.12) denklemleri dikkate alınarak $\vec{D}'_n, \vec{U}'$ ve $\vec{Y}'_o$ vektörleri matris formunda yazılırsa

$$\begin{pmatrix} \vec{D}'_n \\ \vec{T}' \\ \vec{Y}'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\left[\left(\frac{k_n}{k_g} \right)' \left(\frac{k_g^2}{k_n^2 + k_g^2} \right) + \tau_g \right] \\ 0 & 0 & \sqrt{k_n^2 + k_g^2} \\ \left(\frac{k_n}{k_g} \right)' \left(\frac{k_g^2}{k_n^2 + k_g^2} \right) + \tau_g & -\sqrt{k_n^2 + k_g^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{D}_n \\ \vec{T} \\ \vec{Y}_n \end{pmatrix}$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned} \delta_n &= \left(\frac{k_n}{k_g} \right)' \left(\frac{k_g^2}{k_n^2 + k_g^2} \right) + \tau_g \\ \mu_n &= \sqrt{k_n^2 + k_g^2} \end{aligned} \quad (5.13)$$

olarak tanımlanırsa ND-çatısının türev formülleri

$$\begin{pmatrix} \vec{D}'_n \\ \vec{T}' \\ \vec{Y}'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\delta_n \\ 0 & 0 & \mu_n \\ \delta_n & -\mu_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{D}_n \\ \vec{T} \\ \vec{Y}_n \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

şeklinde olur. $\square$

5.2. D_n -Darboux Slant Helisin Eksen ve Karakterizasyonları

S bir yüzey ve $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı bir eğri olsun. β eğrisinin Darboux çatısı $\{\vec{T}, \vec{V}, \vec{U}\}$ ve eğrilikleri k_g, k_n ve τ_g olsun. Bu eğrinin normal Darboux vektörü $\tilde{D}_n(s) = -k_n(s)\vec{V}(s) + k_g(s)\vec{U}(s)$ olmak üzere, yüzey üzerinde D_n -Darboux slant helis kavramı aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 5.2.1: $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ eğrisinin $\tilde{D}_n$ vektörü alanı (veya denk olarak $\tilde{D}_n = \frac{\tilde{D}_n}{\|\tilde{D}_n\|}$

birim vektör alanı) sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyorsa β eğrisi S yüzeyi üzerinde D_n -Darboux slant helis olarak adlandırılır [20].

Şimdi bu tanımı dikkate alarak D_n -Darboux slant helislerin karakterizasyonlarını verebiliriz.

Teorem 5.2.2: S, E^3 uzayında bir yüzey ve β , bu yüzey üzerinde ND-çatısına sahip birim hızlı bir eğri olsun. β eğrisinin D_n -Darboux slant helis olması için gerek ve yeter şart her $s \in I$ için

$$\sigma_n(s) = \frac{\mu_n}{\delta_n}(s) \quad (5.15)$$

fonksiyonunun sabit olmasıdır. Burada $\mu_n \neq 0$ ve $\delta_n \neq 0$ dır.

İspat: β , ND-çatısı $\{\vec{D}_n, \vec{T}, \vec{Y}_n\}$ olan bir D_n -Darboux slant helis olsun. D_n -Darboux slant helis tanımından β nın $\vec{D}_n$ birim teğet vektörü, sabit doğrultulu sabit $\vec{d}_n$ vektörü ile sabit ϑ açısı yapar. Yani $\langle \vec{D}_n, \vec{d}_n \rangle = \cos \vartheta$ dır. Bu ifadenin türevi alınarak $\langle \vec{D}_n', \vec{d}_n \rangle = 0$ bulunur. (5.1) deki ND-çatısının türev formülleri kullanılırsa

$$-\delta_n \langle \vec{Y}_n, \vec{d}_n \rangle = 0$$

elde edilir. $\delta_n \neq 0$ olduğundan $\langle \vec{Y}_n, \vec{d}_n \rangle = 0$ dır. Yani $\vec{d}_n$ vektörü $\vec{Y}_n$ vektörüne diktir.

Dolayısıyla $\vec{d}_n$ vektörü $\vec{D}_n$ ve $\vec{T}$ vektörlerinin gerdiği düzlemde bulunur. O halde

$$\vec{d}_n = \cos \vartheta \vec{D}_n + \sin \vartheta \vec{T}$$

yazılabilir. Bu ifadenin türevi alınırsa $\vec{d}_n$ vektörü sabit olduğundan

$$\begin{aligned}
\vec{0} &= \cos \vartheta \vec{D}'_n + \sin \vartheta \vec{T}' \\
&= \cos \vartheta (-\delta_n \vec{Y}_n) + \sin \vartheta (\mu_n \vec{Y}_n) \\
&= \vec{Y}_n (\mu_n \sin \vartheta - \delta_n \cos \vartheta)
\end{aligned}$$

bulunur. $\vec{Y}_n$ sıfırdan farklı bir vektör olduğundan $\mu_n \sin \vartheta - \delta_n \cos \vartheta = 0$ dır. Buradan

$$\frac{\mu_n}{\delta_n} = \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} = \cot \vartheta = \text{sabit}$$

elde edilir.

Tersine olarak, ϑ sabit olmak üzere, $\frac{\mu_n}{\delta_n} = \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} = \cot \vartheta = \text{sabit}$ olsun.

Buradan $\mu_n \sin \vartheta = \delta_n \cos \vartheta$ yazılabilir.

$$\vec{d}_n = \cos \vartheta \vec{D}_n + \sin \vartheta \vec{T}$$

alalım. $\vec{d}_n$ nin sabit olduğunu gösterelim. $\vec{d}_n = \cos \vartheta \vec{D}_n + \sin \vartheta \vec{T}$ ifadesinin türevi alınıp ardından (5.1) deki türev formülleri ve $\mu_n \sin \vartheta = \delta_n \cos \vartheta$ olduğunu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\vec{d}'_n &= \cos \vartheta \vec{D}'_n + \sin \vartheta \vec{T}' \\
&= \cos \vartheta (-\delta_n \vec{Y}_n) + \sin \vartheta (\mu_n \vec{Y}_n) \\
&= \vec{Y}_n (\mu_n \sin \vartheta - \delta_n \cos \vartheta) \\
&= \vec{Y}_n (\delta_n \cos \vartheta - \delta_n \cos \vartheta) \\
&= \vec{0}
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla $\vec{d}_n$ sabit vektördür. $\vec{d}_n$ vektörünün $\vec{D}_n$ vektörü ile sabit açı yaptığını gösterelim.

$$\begin{aligned}
\langle \vec{d}_n, \vec{D}_n \rangle &= \langle \cos \vartheta \vec{D}_n + \sin \vartheta \vec{T}, \vec{D}_n \rangle \\
&= \cos \vartheta \langle \vec{D}_n, \vec{D}_n \rangle + \sin \vartheta \langle \vec{T}, \vec{D}_n \rangle \\
&= \cos \vartheta
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\vec{d}_n$ sabit vektörü, $\vec{D}_n$ vektörü ile sabit açı yapar. β bir D_n -Darboux slant helistir. $\square$

Teorem 5.2.2 den aşağıdaki sonuçlar elde edilebilir.

Sonuç 5.2.3: β , E^3 de S yüzeyi üzerinde kalan birim hızlı bir eğri ve Darboux çatısının eğrilikleri k_g, k_n ve τ_g olsun. β eğrisinin D_n -Darboux slant helis olması için gerek ve yeter şart her $s \in I$ için

$$\sigma_n(s) = \left(\frac{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}}{\frac{k_g^2}{k_n^2 + k_g^2} \left(\frac{k_n}{k_g} \right)' + \tau_g} \right) (s) \quad (5.16)$$

veya denk olarak

$$\sigma_n(s) = \left(\frac{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}}{-\frac{k_n^2}{k_n^2 + k_g^2} \left(\frac{k_g}{k_n} \right)' + \tau_g} \right) (s)$$

fonksiyonunun sabit olmasıdır.

İspat: (5.13) eşitlikleri (5.15) te yazılırsa (5.16) elde edilir. $\square$

Sonuç 5.2.4: Normal Darboux çatısına göre D_n -Darboux slant helisin eksen

$$\vec{d}_n = \cos \vartheta \vec{D}_n + \sin \vartheta \vec{T} \quad (5.17)$$

şeklindedir.

Sonuç 5.2.5: D_n -Darboux slant helisin eksen, Darboux çatısının vektörleri cinsinden

$$\vec{d}_n = \sin \vartheta \vec{T} - \frac{k_n}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} \cos \vartheta \vec{V} + \frac{k_g}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} \cos \vartheta \vec{U}$$

şeklindedir.

Sonuç 5.2.6: β eğrisinin D_n -Darboux slant helis olması için gerek ve yeter şart β nın bir helis olmasıdır.

İspat: (5.17) eşitliğinin iki yanı $\vec{T}$ vektörü ile iç çarpılırsa $\langle \vec{T}, \vec{d}_n \rangle = \sin \vartheta = \text{sabit}$ bulunur. Bu da β eğrisinin bir helis olduğunu gösterir. $\square$

Sonuç 5.2.7: β , S yüzeyi üzerinde birim hızlı bir D_n -Darboux slant helis olsun. Bu durumda,

i) β nın S yüzeyi üzerinde $k_n \neq 0$ olan bir geodezik eğri olması için gerek ve yeter şart β nın $\vec{d}_n = \sin \vartheta \vec{T} + \cos \vartheta \vec{B}$ eksenli bir helis olmasıdır.

ii) β nın S yüzeyi üzerinde $k_g \neq 0$ olan bir asimptotik eğri olması için gerek ve yeter şart β nın $\vec{d}_n = \sin \vartheta \vec{T} + \cos \vartheta \vec{B}$ eksenli bir helis olmasıdır.

iii) β , S yüzeyi üzerinde bir eğrilik çizgisi ise $\frac{k_g^2}{(k_n^2 + k_g^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{k_n}{k_g} \right)'$ ifadesi sıfırdan farklı bir sabittir.

İspat: i) β geodezik eğri ise $k_g = 0$ dır. Bu durumda (2.1) eşitlikleri kullanılarak $k_n = \mp \kappa$ ve $\tau_g = \tau$ elde edilir. β , D_n -Darboux slant helis olduğundan bulunan değerler (5.16) da yazılırsa $\sigma_n = \frac{\kappa}{\tau} = \text{sabit}$ bulunur. Teorem 2.1.18 gereğince β bir helistir. Ayrıca Tanım 2.2.18 de verilen Darboux çatısı ile Frenet çatısı arasındaki ilişkiler, Sonuç 5.2.5 de yazılıp (2.1) eşitlikleri kullanılırsa, D_n -Darboux slant helisin Frenet çatısının vektörleri cinsinden eksen

$$\vec{d}_n = \sin \vartheta \vec{T} + \cos \vartheta \frac{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}}{\kappa} \vec{B}$$

şeklinde olur. $k_g = 0$ ve yukarıda bulunan $k_n = \mp \kappa$ ve $\tau_g = \tau$ eşitlikleri burada yazılırsa β helisinin eksen $\vec{d}_n = \sin \vartheta \vec{T} + \cos \vartheta \vec{B}$ olarak bulunur.

Tersine olarak β , $\vec{d}_n = \sin \mathcal{G}\vec{T} + \cos \mathcal{G}\vec{B}$ eksenli bir helis olsun. Helisin ekseni ile yukarıda D_n -Darboux slant helisin Frenet çatısına göre verilen ekseni dikkate alınırsa $k_g = 0$ bulunur. β , S yüzeyi üzerinde geodezik bir eğridir.

ii) i) nin ispatına benzer olarak yapılır.

iii) β eğrilik çizgisi ise $\tau_g = 0$ dır. β , D_n -Darboux slant helis olduğundan (5.16) dan

$$\frac{k_g^2}{(k_n^2 + k_g^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{k_n}{k_g} \right)' \neq 0 \text{ bir sabit olduğu anlaşılr.} \quad \square$$

5.3. D_n -Darboux Slant Helislerin ND-çatısına Göre Diferansiyel Denklem Karakterizasyonları

Bu kısımda, ilk olarak E^3 de bir S yüzeyi üzerinde bulunan eğrileri karakterize eden diferansiyel denklem karakterizasyonları ND-çatısının elemanları olan $\vec{D}_n$, $\vec{T}$ ve $\vec{Y}_n$ vektör alanlarına bağlı olarak verilecektir. Daha sonra, ND-çatısının elemanları olan $\vec{D}_n$, $\vec{T}$ ve $\vec{Y}_n$ vektör alanlarına bağlı olarak D_n -Darboux slant helisleri karakterize eden diferansiyel denklemler verilecektir.

Teorem 5.3.1: S , E^3 bir yüzey ve $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı bir eğri olsun. β eğrisini ND-çatısının $\vec{D}_n$ vektör alanına göre karakterize eden vektörel diferansiyel denklem, $\mu_n \neq 0$ ve $\delta_n \neq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \vec{D}_n''' + \left[\mu_n \delta_n \left(\frac{1}{\mu_n \delta_n} \right)' + \delta_n \left(\frac{1}{\delta_n} \right)' \right] \vec{D}_n'' + \left\{ \mu_n \delta_n \left[\frac{1}{\mu_n} \left(\frac{1}{\delta_n} \right)' \right]' + \mu_n^2 + \delta_n^2 \right\} \vec{D}_n' \\ + \mu_n \delta_n \left(\frac{\delta_n}{\mu_n} \right)' \vec{D}_n = 0 \end{aligned} \quad (5.18)$$

şeklindedir.

İspat: (5.1) sisteminin birinci denkleminde

$$\vec{Y}_n = -\frac{1}{\delta_n} \vec{D}'_n \quad (5.19)$$

yazılabilir. Bu ifadenin türevi alınırsa

$$\vec{Y}'_n = -\left(\frac{1}{\delta_n}\right)' \vec{D}'_n - \frac{1}{\delta_n} \vec{D}''_n \quad (5.20)$$

bulunur. (5.1) sisteminin üçüncü denkleminde

$$\vec{T} = \frac{\delta_n}{\mu_n} \vec{D}_n - \frac{1}{\mu_n} \vec{Y}'_n \quad (5.21)$$

elde edilir. (5.20), (5.21) de yerine yazılırsa

$$\vec{T} = \frac{\delta_n}{\mu_n} \vec{D}_n + \frac{1}{\mu_n} \left(\frac{1}{\delta_n}\right)' \vec{D}'_n + \frac{1}{\mu_n \delta_n} \vec{D}''_n$$

elde edilir. Bu eşitliğin türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \vec{T}' = & \frac{1}{\mu_n \delta_n} \vec{D}'''_n + \left[\left(\frac{1}{\mu_n \delta_n}\right)' + \frac{1}{\mu_n} \left(\frac{1}{\delta_n}\right)' \right] \vec{D}''_n + \left[\frac{\delta_n}{\mu_n} + \left[\frac{1}{\mu_n} \left(\frac{1}{\delta_n}\right)' \right] \right] \vec{D}'_n \\ & + \left(\frac{\delta_n}{\mu_n}\right)' \vec{D}_n \end{aligned} \quad (5.22)$$

elde edilir. (5.19) ve (5.22) eşitlikleri (5.1) sisteminin ikinci denkleminde yazılırsa

$$\frac{1}{\mu_n \delta_n} \vec{D}'''_n + \left[\left(\frac{1}{\mu_n \delta_n}\right)' + \frac{1}{\mu_n} \left(\frac{1}{\delta_n}\right)' \right] \vec{D}''_n + \left[\frac{\delta_n}{\mu_n} + \left[\frac{1}{\mu_n} \left(\frac{1}{\delta_n}\right)' \right] \right] \vec{D}'_n + \left(\frac{\delta_n}{\mu_n}\right)' \vec{D}_n = -\frac{\mu_n}{\delta_n} \vec{D}'_n$$

bulunur. Bu denklem düzenlenirse

$$\frac{1}{\mu_n \delta_n} \vec{D}'''_n + \left[\left(\frac{1}{\mu_n \delta_n}\right)' + \frac{1}{\mu_n} \left(\frac{1}{\delta_n}\right)' \right] \vec{D}''_n + \left[\frac{\mu_n^2 + \delta_n^2}{\mu_n \delta_n} + \left[\frac{1}{\mu_n} \left(\frac{1}{\delta_n}\right)' \right] \right] \vec{D}'_n + \left(\frac{\delta_n}{\mu_n}\right)' \vec{D}_n = 0$$

elde edilir. Bulunan son denklemin her iki tarafı $\mu_n \delta_n$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} & \vec{D}_n''' + \left[\mu_n \delta_n \left(\frac{1}{\mu_n \delta_n} \right)' + \delta_n \left(\frac{1}{\delta_n} \right)' \right] \vec{D}_n'' + \left[\mu_n^2 + \delta_n^2 + \mu_n \delta_n \left[\frac{1}{\mu_n} \left(\frac{1}{\delta_n} \right)' \right]' \right] \vec{D}_n' \\ & + \mu_n \delta_n \left(\frac{\delta_n}{\mu_n} \right)' \vec{D}_n = 0 \end{aligned}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. $\square$

Sonuç 5.3.2: S , E^3 bir yüzey ve $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı bir D_n -Darboux slant helis olsun. β eğrisini $\vec{D}_n$ vektör alanına göre karakterize eden vektörel diferansiyel denklem

$$\vec{D}_n''' + \left[\mu_n \delta_n \left(\frac{1}{\mu_n \delta_n} \right)' + \delta_n \left(\frac{1}{\delta_n} \right)' \right] \vec{D}_n'' + \left[\mu_n^2 + \delta_n^2 + \mu_n \delta_n \left[\frac{1}{\mu_n} \left(\frac{1}{\delta_n} \right)' \right]' \right] \vec{D}_n' = 0$$

şeklindedir. Burada $\mu_n \neq 0$ ve $\delta_n \neq 0$ dır.

İspat: Teorem 5.3.1 de, E^3 de eğrileri ND-çatısının $\vec{D}_n$ elemanına göre karakterize eden genel diferansiyel denklemin (5.18) şeklinde olduğu gösterildi. Şimdi β eğrisinin D_n -Darboux slant helis olduğunu kabul edelim. D_n -Darboux slant helis olma şartından $\frac{\mu_n}{\delta_n}$ ifadesi sabit olduğundan $\frac{\delta_n}{\mu_n}$ ifadesi de sabittir. Dolayısıyla

$$\left(\frac{\delta_n}{\mu_n} \right)' = 0 \text{ ifadesi (5.18) denkleminde yazılırsa}$$

$$\vec{D}_n''' + \left[\mu_n \delta_n \left(\frac{1}{\mu_n \delta_n} \right)' + \delta_n \left(\frac{1}{\delta_n} \right)' \right] \vec{D}_n'' + \left[\mu_n^2 + \delta_n^2 + \mu_n \delta_n \left[\frac{1}{\mu_n} \left(\frac{1}{\delta_n} \right)' \right]' \right] \vec{D}_n' = 0$$

denklemini elde edilir. $\square$

Teorem 5.3.4: S, E^3 bir yüzey ve $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı bir eğri olsun. β eğrisini ND-çatısının $\vec{T}$ vektör alanına göre karakterize eden vektörel diferansiyel denklem, $\mu_n \neq 0$ ve $\delta_n \neq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \vec{T}''' + \left[\mu_n \delta_n \left(\frac{1}{\mu_n \delta_n} \right)' + \mu_n \left(\frac{1}{\mu_n} \right)' \right] \vec{T}'' + \left\{ \mu_n \delta_n \left[\frac{1}{\delta_n} \left(\frac{1}{\mu_n} \right)' \right]' + \mu_n^2 + \delta_n^2 \right\} \vec{T}' \\ + \mu_n \delta_n \left(\frac{\mu_n}{\delta_n} \right)' \vec{T} = 0 \end{aligned} \quad (5.23)$$

şeklindedir.

İspat: (5.1) sisteminin 2. denkleminde

$$\vec{Y}_n = \frac{1}{\mu_n} \vec{T}' \quad (5.24)$$

yazılabilir. Bu ifadenin türevi alınırsa

$$\vec{Y}_n' = \left(\frac{1}{\mu_n} \right)' \vec{T}' + \frac{1}{\mu_n} \vec{T}''$$

bulunur. Bu değer (5.1) sisteminin üçüncü denkleminde yazılıp $\vec{D}_n$ vektörü yalnız bırakılırsa

$$\vec{D}_n = \frac{1}{\mu_n \delta_n} \vec{T}'' + \frac{1}{\delta_n} \left(\frac{1}{\mu_n} \right)' \vec{T}' + \frac{\mu_n}{\delta_n} \vec{T}$$

elde edilir. Bulunan $\vec{D}_n$ vektörünün türevi alınıp denklem düzenlenirse

$$\vec{D}_n' = \frac{1}{\mu_n \delta_n} \vec{T}''' + \left[\left(\frac{1}{\mu_n \delta_n} \right)' + \frac{1}{\delta_n} \left(\frac{1}{\mu_n} \right)' \right] \vec{T}'' + \left\{ \left[\frac{1}{\delta_n} \left(\frac{1}{\mu_n} \right)' \right]' + \frac{\mu_n}{\delta_n} \right\} \vec{T}' + \left(\frac{\mu_n}{\delta_n} \right)' \vec{T}$$

bulunur. Bulunan $\vec{D}_n'$ değeri ve (5.24), (5.1) sisteminin birinci denkleminde yazılırsa

$$\frac{1}{\mu_n \delta_n} \vec{T}''' + \left[\left(\frac{1}{\mu_n \delta_n} \right)' + \frac{1}{\delta_n} \left(\frac{1}{\mu_n} \right)' \right] \vec{T}'' + \left\{ \left[\frac{1}{\delta_n} \left(\frac{1}{\mu_n} \right)' \right] + \frac{\mu_n}{\delta_n} \right\} \vec{T}' + \left(\frac{\mu_n}{\delta_n} \right)' \vec{T} = -\frac{\delta_n}{\mu_n} \vec{T}'$$

elde edilir. Son denklem düzenlenip $\mu_n \delta_n$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} & T''' + \left[\mu_n \delta_n \left(\frac{1}{\mu_n \delta_n} \right)' + \mu_n \left(\frac{1}{\mu_n} \right)' \right] T'' + \left\{ \mu_n \delta_n \left[\frac{1}{\delta_n} \left(\frac{1}{\mu_n} \right)' \right] + \mu_n^2 + \delta_n^2 \right\} T' \\ & + \mu_n \delta_n \left(\frac{\mu_n}{\delta_n} \right)' T = 0 \end{aligned}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. □

Sonuç 5.3.4: S , E^3 bir yüzey ve $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı bir D_n -Darboux slant helis olsun. β eğrisini $\vec{T}$ vektör alanına göre karakterize eden vektörel diferansiyel denklem

$$\vec{T}''' + \left[\mu_n \delta_n \left(\frac{1}{\mu_n \delta_n} \right)' + \mu_n \left(\frac{1}{\mu_n} \right)' \right] \vec{T}'' + \left\{ \mu_n \delta_n \left[\frac{1}{\delta_n} \left(\frac{1}{\mu_n} \right)' \right] + \mu_n^2 + \delta_n^2 \right\} \vec{T}' = 0$$

şeklindedir. Burada $\mu_n \neq 0$ ve $\delta_n \neq 0$ dır.

İspat: Teorem 5.3.3 de, E^3 de eğrileri ND-çatısının $\vec{T}$ vektör alanına göre karakterize eden genel diferansiyel denklemin (5.23) şeklinde olduğu gösterildi. Şimdi β eğrisinin D_n -Darboux slant helis olduğunu kabul edelim. D_n -Darboux slant

helis olma şartından $\frac{\mu_n}{\delta_n}$ ifadesi sabittir. Dolayısıyla $\left(\frac{\mu_n}{\delta_n} \right)' = 0$ ifadesi (5.23)

denkleminde yazılırsa

$$\vec{T}''' + \left[\mu_n \delta_n \left(\frac{1}{\mu_n \delta_n} \right)' + \mu_n \left(\frac{1}{\mu_n} \right)' \right] \vec{T}'' + \left\{ \mu_n \delta_n \left[\frac{1}{\delta_n} \left(\frac{1}{\mu_n} \right)' \right] + \mu_n^2 + \delta_n^2 \right\} \vec{T}' = 0$$

denklemini elde edilir. $\square$

Teorem 5.3.5: S , E^3 bir yüzey ve $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı bir eğri olsun. β eğrisini, ND-çatısının $\vec{Y}_n$ vektör alanına göre karakterize eden vektörel diferansiyel denklem, $m_1 \neq 0$ olmak üzere

$$\vec{Y}_n''' + \frac{1}{m_1}(m_1' - m_2)\vec{Y}_n'' + \frac{1}{m_1}(-m_2' + m_3)\vec{Y}_n' + \frac{1}{m_1}(-\delta_n + m_3')\vec{Y}_n = 0$$

şeklindedir. Burada $m_1 = \frac{\mu_n}{\mu_n'\delta_n - \mu_n\delta_n'}$, $m_2 = \frac{1}{\delta_n}(1 + \delta_n'm_1)$ ve $m_3 = m_1(\mu_n^2 + \delta_n^2)$ şeklindedir.

İspat: (5.1) sisteminin üçüncü denkleminde

$$\vec{D}_n = \frac{1}{\delta_n}\vec{Y}_n' + \frac{\mu_n}{\delta_n}\vec{T} \quad (5.25)$$

yazılabilir. Bulunan ifadenin türevi alınır ve ND-çatısının türev formülleri kullanılırsa

$$\frac{1}{\delta_n}\vec{Y}_n'' + \left(\frac{1}{\delta_n}\right)'\vec{Y}_n' + \frac{\mu_n^2 + \delta_n^2}{\delta_n}\vec{Y}_n + \left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\right)'\vec{T} = 0$$

bulunur. Son denklemde $\vec{T}$ vektörü yalnız bırakılırsa

$$\vec{T} = -\frac{\delta_n}{\mu_n'\delta_n - \mu_n\delta_n'}\vec{Y}_n'' + \frac{\delta_n'}{\mu_n'\delta_n - \mu_n\delta_n'}\vec{Y}_n' - \frac{\delta_n(\mu_n^2 + \delta_n^2)}{\mu_n'\delta_n - \mu_n\delta_n'}\vec{Y}_n$$

elde edilir. Bulunan bu ifade (5.25) de yazılırsa, $m_1 = \frac{\mu_n}{\mu_n'\delta_n - \mu_n\delta_n'}$, $m_2 = \frac{1}{\delta_n}(1 + \delta_n'm_1)$

ve $m_3 = m_1(\mu_n^2 + \delta_n^2)$ olmak üzere

$$\vec{D}_n = -m_1\vec{Y}_n'' + m_2\vec{Y}_n' - m_3\vec{Y}_n$$

elde edilir. Son bulunan eşitliğin her iki yanının türevi alınıp ND-çatısının türev formülleri kullanılırsa

$$\vec{Y}_n''' + \frac{1}{m_1}(m_1' - m_2)\vec{Y}_n'' + \frac{1}{m_1}(-m_2' + m_3)\vec{Y}_n' + \frac{1}{m_1}(-\delta_n + m_3')\vec{Y}_n = 0$$

denklemini elde edilir. □

Teorem 5.3.6: S , E^3 bir yüzey ve $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ bu yüzey üzerinde kalan birim hızlı bir D_n -Darboux slant helis olsun. β eğrisini $\vec{Y}_n$ vektör alanına göre karakterize eden vektörel diferansiyel denklem

$$\vec{Y}_n'' + \delta_n \left(\frac{1}{\delta_n} \right)' \vec{Y}_n' + (\mu_n^2 + \delta_n^2) \vec{Y}_n = 0$$

şeklindedir. Burada $\delta_n \neq 0$ dır.

İspat: (5.1) sisteminin üçüncü denkleminde

$$\vec{D}_n = \frac{1}{\delta_n} \vec{Y}_n' + \frac{\mu_n}{\delta_n} \vec{T}$$

bulunur. Bu ifadenin türevi alınırsa

$$\vec{D}_n' = \frac{1}{\delta_n} \vec{Y}_n'' + \left(\frac{1}{\delta_n} \right)' \vec{Y}_n' + \left(\frac{\mu_n}{\delta_n} \right)' \vec{T} + \left(\frac{\mu_n}{\delta_n} \right) \vec{T}'$$

elde edilir. Burada $\vec{T}'$ yerine, türev formüllerindeki eşiti yazılırsa

$$\vec{D}_n' = \frac{1}{\delta_n} \vec{Y}_n'' + \left(\frac{1}{\delta_n} \right)' \vec{Y}_n' + \left(\frac{\mu_n}{\delta_n} \right)' \vec{T} + \left(\frac{\mu_n^2}{\delta_n} \right) \vec{Y}_n$$

bulunur. Bulunan bu ifade (5.1) sisteminin birinci denkleminde yerine yazılıp denklem düzenlenirse

$$\frac{1}{\delta_n} \vec{Y}_n'' + \left(\frac{1}{\delta_n} \right)' \vec{Y}_n' + \left(\frac{\mu_n}{\delta_n} \right)' \vec{T} + \left(\frac{\mu_n^2 + \delta_n^2}{\delta_n} \right) \vec{Y}_n = 0$$

elde edilir. β eğrisi D_n -Darboux slant helis olduğundan $\left(\frac{\mu_n}{\delta_n}\right)' = 0$ dır. Dolayısıyla denklem

$$\frac{1}{\delta_n} \vec{Y}_n'' + \left(\frac{1}{\delta_n}\right)' \vec{Y}_n' + \left(\frac{\mu_n^2 + \delta_n^2}{\delta_n}\right) \vec{Y}_n = 0$$

halini alır. Son olarak bu denklem δ_n ile çarpılarak

$$\vec{Y}_n'' + \delta_n \left(\frac{1}{\delta_n}\right)' \vec{Y}_n' + (\mu_n^2 + \delta_n^2) \vec{Y}_n = 0$$

elde edilir. □

5.4. Yüzey Üzerinde D_n -Darboux Slant Helisin Elde Edilmesi

Bu kısımda, parametrik ve kapalı formda verilen bir yüzey üzerinde D_n -Darboux slant helis elde edilebilmek için yöntemler verilecektir.

5.4.1. Parametrik Formda Verilen Yüzey Üzerinde D_n -Darboux Slant Helisin Elde Edilmesi

S , E^3 uzayında $X = X(u, v)$ parametrizasyonu ile verilen bir yüzey olsun. $\beta(s) = X(u(s), v(s))$, S yüzeyi üzerinde, sabit ve birim $\vec{d}_n$ doğrultusu ile sabit $\mathcal{G}$ açısı yapan, Darboux çatısı $\{\vec{T}, \vec{V}, \vec{U}\}$ olan birim hızlı bir D_n -Darboux slant helis olsun. β eğrisini elde etmek için $u(s)$ ve $v(s)$ değerlerinin bulunması gerekir. İlk olarak $u(s)$ değerini bulalım.

$$\vec{\beta}' = \vec{T} = \vec{X}_u \frac{du}{ds} + \vec{X}_v \frac{dv}{ds}, \quad \vec{U} = \frac{\vec{X}_u \times \vec{X}_v}{\|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\|}, \quad \vec{V} = \vec{U} \times \vec{T}$$

dir. $\vec{T}$ vektörünün ve $\vec{U}$ vektörünün eşiti $\vec{V}$ vektöründe yazılırsa

$$\vec{V} = \frac{1}{\|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\|} \left[(E\vec{X}_v - F\vec{X}_u) \frac{du}{ds} + (F\vec{X}_v - G\vec{X}_u) \frac{dv}{ds} \right]$$

bulunur [15]. Burada E, F, G birinci temel formun katsayılarıdır. β , D_n -Darboux slant helis olduğundan $\langle \vec{D}_n, \vec{d}_n \rangle = \cos \vartheta$ dır. Bu ifadede $\vec{D}_n$ vektörü yerine yazılırsa

$$\left\langle -\frac{k_n}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} \vec{V} + \frac{k_g}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} \vec{U}, \vec{d}_n \right\rangle = \cos \vartheta \quad (5.26)$$

elde edilir. Yukarıda bulunan $\vec{V}$ ve $\vec{U}$ vektörleri (5.26) da yazılırsa

$$\begin{aligned} & \left\langle -\frac{k_n}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} \left(\frac{1}{\|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\|} \left[(E\vec{X}_v - F\vec{X}_u) \frac{du}{ds} + (F\vec{X}_v - G\vec{X}_u) \frac{dv}{ds} \right] \right) \right. \\ & \left. + \frac{k_g}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} \left(\frac{\vec{X}_u \times \vec{X}_v}{\|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\|} \right), \vec{d}_n \right\rangle = \cos \vartheta \end{aligned}$$

bulunur. Bu ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned} & -\frac{k_n}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} \frac{1}{\|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\|} E \langle \vec{X}_v, \vec{d}_n \rangle \frac{du}{ds} + \frac{k_n}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} \frac{1}{\|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\|} F \langle \vec{X}_u, \vec{d}_n \rangle \frac{du}{ds} \\ & -\frac{k_n}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} \frac{1}{\|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\|} F \langle \vec{X}_v, \vec{d}_n \rangle \frac{dv}{ds} + \frac{k_n}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} \frac{1}{\|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\|} G \langle \vec{X}_u, \vec{d}_n \rangle \frac{dv}{ds} \\ & + \frac{k_g}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} \frac{1}{\|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\|} \langle \vec{X}_u \times \vec{X}_v, \vec{d}_n \rangle = \cos \vartheta \end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan son denklemde işlem kolaylığı açısından

$$\frac{k_n}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} = P, \frac{k_g}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} = Q, \|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\| = \sqrt{EG - F^2} = N,$$

$$\langle \vec{X}_u, \vec{d}_n \rangle = L_n, \langle \vec{X}_v, \vec{d}_n \rangle = M_n, \langle \vec{X}_u \times \vec{X}_v, \vec{d}_n \rangle = B_n$$

kısaltmaları kullanılırsa, son ifade

$$-P \frac{1}{N} E M_n \frac{du}{ds} + P \frac{1}{N} F L_n \frac{du}{ds} - P \frac{1}{N} F M_n \frac{dv}{ds} + P \frac{1}{N} G L_n \frac{dv}{ds} + Q \frac{1}{N} B_n = \cos \vartheta$$

olur. Bu ifadenin her iki yanı N ile çarpılırsa

$$-PEM_n \frac{du}{ds} + PFL_n \frac{du}{ds} - PFM_n \frac{dv}{ds} + PGL_n \frac{dv}{ds} = N \cos \vartheta - QB_n$$

elde edilir. Son eşitlik $\frac{du}{ds}$ ve $\frac{dv}{ds}$ parantezine alınır

$$(-PEM_n + PFL_n) \frac{du}{ds} + (-PFM_n + PGL_n) \frac{dv}{ds} = N \cos \vartheta - QB_n \quad (5.27)$$

bulunur. Bu ifadede $\frac{dv}{ds}$ yalnız bırakılırsa

$$\frac{dv}{ds} = \frac{N \cos \vartheta - QB_n}{(-PFM_n + PGL_n)} - \frac{(-PEM_n + PFL_n)}{(-PFM_n + PGL_n)} \frac{du}{ds} \quad (5.28)$$

elde edilir. Ayrıca β eğrisi birim hızlı olduğundan

$$E \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2F \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + G \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 = 1 \quad (5.29)$$

bulunur [15]. (5.28) ifadesi (5.29) da yerine yazılırsa

$$E \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2F \frac{du}{ds} \left(\frac{N \cos \vartheta - QB_n}{(-PFM_n + PGL_n)} - \frac{(-PEM_n + PFL_n)}{(-PFM_n + PGL_n)} \frac{du}{ds} \right) + G \left(\frac{N \cos \vartheta - QB_n}{(-PFM_n + PGL_n)} - \frac{(-PEM_n + PFL_n)}{(-PFM_n + PGL_n)} \frac{du}{ds} \right)^2 = 1$$

denkleminde elde edilir. Bu denkleminde parantezler açılırsa

$$\begin{aligned} & E \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2F \frac{N \cos \vartheta - QB_n}{(-PFM_n + PGL_n)} \frac{du}{ds} - 2F \frac{(-PEM_n + PFL_n)}{(-PFM_n + PGL_n)} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 \\ & + G \frac{(N \cos \vartheta - QB_n)^2}{(-PFM_n + PGL_n)^2} - 2G \frac{(N \cos \vartheta - QB_n)(-PEM_n + PFL_n)}{(-PFM_n + PGL_n)^2} \frac{du}{ds} \\ & + G \frac{(-PEM_n + PFL_n)^2}{(-PFM_n + PGL_n)^2} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 = 1 \end{aligned}$$

bulunur. Elde edilen son denkleminde paydalar eşitlenirse

$$\begin{aligned}
& E(-PFM_n + PGL_n)^2 \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2F(N \cos \vartheta - QB_n)(-PFM_n + PGL_n) \frac{du}{ds} \\
& - 2F(-PEM_n + PFL_n)(-PFM_n + PGL_n) \left(\frac{du}{ds} \right)^2 \\
& + G(N \cos \vartheta - QB_n)^2 - 2G(N \cos \vartheta - QB_n)(-PEM_n + PFL_n) \frac{du}{ds} \\
& + G(-PEM_n + PFL_n)^2 \left(\frac{du}{ds} \right)^2 = (-PFM_n + PGL_n)^2
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $\left(\frac{du}{ds} \right)^2$ ve $\frac{du}{ds}$ parantezine alınarak

$$\begin{aligned}
& P^2 \left[E(-FM_n + GL_n)^2 - 2F(-EM_n + FL_n)(-FM_n + GL_n) + G(-EM_n + FL_n)^2 \right] \left(\frac{du}{ds} \right)^2 \\
& + 2(N \cos \vartheta - QB_n)P \left[F(-FM_n + GL_n) - G(-EM_n + FL_n) \right] \frac{du}{ds} \\
& + G(N \cos \vartheta - QB_n)^2 = (-PFM_n + PGL_n)^2
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilmiş olur. $\left(\frac{du}{ds} \right)^2$ ve $\frac{du}{ds}$ katsayılarındaki parantezler açılıp $\left(\frac{du}{ds} \right)^2$

ifadesinin katsayısı EM_n^2 , GL_n^2 ve $2FL_nM_n$ parantezine alınırsa

$$\begin{aligned}
& P^2 \left[EM_n^2(EG - F^2) + GL_n^2(EG - F^2) - 2FL_nM_n(EG - F^2) \right] \left(\frac{du}{ds} \right)^2 \\
& + 2(N \cos \vartheta - QB_n)P \left[M_n(EG - F^2) \right] \frac{du}{ds} \\
& + G(N \cos \vartheta - QB_n)^2 - (-PFM_n + PGL_n)^2 = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\left(\frac{du}{ds} \right)^2$ katsayısı $(EG - F^2)$ parantezine alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left[EM_n^2 + GL_n^2 - 2FL_nM_n \right] P^2(EG - F^2) \left(\frac{du}{ds} \right)^2 \\
& + 2(N \cos \vartheta - QB_n)P \left[M_n(EG - F^2) \right] \frac{du}{ds} \\
& + G(N \cos \vartheta - QB_n)^2 - (-PFM_n + PGL_n)^2 = 0
\end{aligned}$$

bulunur. İşlem kolaylığı açısından $EM_n^2 + GL_n^2 - 2FL_nM_n = A_n$ denilirse

$$A_n P^2 (EG - F^2) \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2(N \cos \vartheta - QB_n) P \left[M_n (EG - F^2) \right] \frac{du}{ds} + G(N \cos \vartheta - QB_n)^2 - (-PFM_n + PGL_n)^2 = 0$$

ikinci dereceden denklemi elde edilir. Bu denklemin kökleri bize $\frac{du}{ds}$ ifadesini verir.

Bu denklemin diskriminantı

$$\Delta_n = 4P^2 M_n^2 (N \cos \vartheta - QB_n)^2 (EG - F^2)^2 - 4A_n P^2 (EG - F^2) \left[G(N \cos \vartheta - QB_n)^2 - (-PFM_n + PGL_n)^2 \right]$$

olarak bulunur. Bu ifade düzenlenirse

$$\Delta_n = 4P^2 (N \cos \vartheta - QB_n)^2 (EG - F^2) \left[M_n^2 (EG - F^2) - A_n G \right] + 4A_n P^4 (EG - F^2) (-FM_n + GL_n)^2$$

elde edilir. Daha önce yapılan kısaltmalar bulunan diskriminantda yerine yazılırsa

$$\Delta_n = 4P^2 \left(\left\| \vec{X}_u \times \vec{X}_v \right\| \cos \vartheta - Q \left\langle \vec{X}_u \times \vec{X}_v, \vec{d}_n \right\rangle \right)^2 (EG - F^2) \left[\left\langle \vec{X}_v, \vec{d}_n \right\rangle^2 (EG - F^2) - A_n G \right] + 4A_n P^4 (EG - F^2) \left(-F \left\langle \vec{X}_v, \vec{d}_n \right\rangle + G \left\langle \vec{X}_u, \vec{d}_n \right\rangle \right)^2$$

bulunur. Dolayısıyla aradığımız $\frac{du}{ds}$ ifadesi

$$\frac{du}{ds} = \frac{-2(N \cos \vartheta - QB_n) P M_n (EG - F^2) \pm \sqrt{\Delta_n}}{2A_n P^2 (EG - F^2)}$$

şeklindedir. Yukarıdaki denklemde, yapılan kısaltmalar yerine yazılırsa

$$\frac{du}{ds} = \frac{-2P \left\langle \vec{X}_v, \vec{d}_n \right\rangle \left(\left\| \vec{X}_u \times \vec{X}_v \right\| \cos \vartheta - Q \left\langle \vec{X}_u \times \vec{X}_v, \vec{d}_n \right\rangle \right) (EG - F^2) \pm \sqrt{\Delta_n}}{2A_n P^2 (EG - F^2)} \quad (5.30)$$

bulunur. Burada $P = \frac{k_n}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}}$, $Q = \frac{k_g}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}}$ ve $A_n = EM_n^2 + GL_n^2 - 2FL_n M_n$ dir.

Şimdi benzer yolla $\frac{dv}{ds}$ ifadesini bulalım. (5.27) de $\frac{du}{ds}$ yalnız bırakılırsa

$$\frac{du}{ds} = \frac{N \cos \vartheta - QB_n}{(-PEM_n + PFL_n)} - \frac{(-PFM_n + PGL_n)}{(-PEM_n + PFL_n)} \frac{dv}{ds}$$

elde edilir. Bulunan $\frac{du}{ds}$ ifadesinin eşiti (5.29) da yazılırsa

$$\begin{aligned} & E \left(\frac{N \cos \vartheta - QB_n}{(-PEM_n + PFL_n)} - \frac{(-PFM_n + PGL_n)}{(-PEM_n + PFL_n)} \frac{dv}{ds} \right)^2 + \\ & 2F \left(\frac{N \cos \vartheta - QB_n}{(-PEM_n + PFL_n)} - \frac{(-PFM_n + PGL_n)}{(-PEM_n + PFL_n)} \frac{dv}{ds} \right) \frac{dv}{ds} + G \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 = 1 \end{aligned}$$

bulunur. Parantezler açılırsa

$$\begin{aligned} & E \frac{(N \cos \vartheta - QB_n)^2}{(-PEM_n + PFL_n)^2} - 2E \frac{(N \cos \vartheta - QB_n)(-PFM_n + PGL_n)}{(-PEM_n + PFL_n)^2} \frac{dv}{ds} \\ & + E \frac{(-PFM_n + PGL_n)^2}{(-PEM_n + PFL_n)^2} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + 2F \frac{(N \cos \vartheta - QB_n)}{(-PEM_n + PFL_n)} \frac{dv}{ds} \\ & - 2F \frac{(-PFM_n + PGL_n)}{(-PEM_n + PFL_n)} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + G \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 = 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Paydalar eşitlenirse

$$\begin{aligned} & E \frac{(N \cos \vartheta - QB_n)^2}{(-PEM_n + PFL_n)^2} - 2E \frac{(N \cos \vartheta - QB_n)(-PFM_n + PGL_n)}{(-PEM_n + PFL_n)^2} \frac{dv}{ds} \\ & + E \frac{(-PFM_n + PGL_n)^2}{(-PEM_n + PFL_n)^2} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + 2F \frac{(N \cos \vartheta - QB_n)(-PEM_n + PFL_n)}{(-PEM_n + PFL_n)^2} \frac{dv}{ds} \\ & - 2F \frac{(-PFM_n + PGL_n)(-PEM_n + PFL_n)}{(-PEM_n + PFL_n)^2} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + G \frac{(-PEM_n + PFL_n)^2}{(-PEM_n + PFL_n)^2} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 = 1 \end{aligned}$$

bulunur. Denklemin iki tarafı $(-PEM_n + PFL_n)^2$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
& E(N \cos \vartheta - QB_n)^2 - 2E(N \cos \vartheta - QB_n)(-PFM_n + PGL_n) \frac{dv}{ds} \\
& + E(-PFM_n + PGL_n)^2 \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + 2F(N \cos \vartheta - QB_n)(-PEM_n + PFL_n) \frac{dv}{ds} \\
& - 2F(-PFM_n + PGL_n)(-PEM_n + PFL_n) \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \\
& + G(-PEM_n + PFL_n)^2 \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 = (-PEM_n + PFL_n)^2
\end{aligned}$$

elde edilir. $\left(\frac{dv}{ds} \right)^2$ ve $\left(\frac{dv}{ds} \right)$ parantezine alınır

$$\begin{aligned}
& P^2 \left[E(-FM_n + GL_n)^2 - 2F(-FM_n + GL_n)(-EM_n + FL_n) + G(-EM_n + FL_n)^2 \right] \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \\
& + 2P(N \cos \vartheta - QB_n) \left[F(-EM_n + FL_n) - E(-FM_n + GL_n) \right] \frac{dv}{ds} \\
& + E(N \cos \vartheta - QB_n)^2 = (-PEM_n + PFL_n)^2
\end{aligned}$$

bulunur. $\left(\frac{dv}{ds} \right)^2$ ve $\left(\frac{dv}{ds} \right)$ katsayılarında parantezleri açılıp $\left(\frac{dv}{ds} \right)^2$ katsayısı EM_n^2 , GL_n^2 ve $2FL_nM_n$ parantezine alınarak

$$\begin{aligned}
& P^2 \left[EM_n^2 (EG - F^2) + GL_n^2 (EG - F^2) - 2FL_nM_n (EG - F^2) \right] \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \\
& - 2PL_n (N \cos \vartheta - QB_n) (EG - F^2) \frac{dv}{ds} \\
& + E(N \cos \vartheta - QB_n)^2 - (-PEM_n + PFL_n)^2 = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. $\left(\frac{dv}{ds} \right)^2$ ifadesinin katsayısı $(EG - F^2)$ parantezine alınır

$$\begin{aligned}
& P^2 \left[EM_n^2 + GL_n^2 - 2FL_nM_n \right] (EG - F^2) \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \\
& - 2PL_n (N \cos \vartheta - QB_n) (EG - F^2) \frac{dv}{ds} \\
& + E(N \cos \vartheta - QB_n)^2 - (-PEM_n + PFL_n)^2 = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. $EM_n^2 + GL_n^2 - 2FL_nM_n = A_n$ olduğundan

$$A_n P^2 (EG - F^2) \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 - 2PL_n (EG - F^2) (N \cos \vartheta - QB_n) \frac{dv}{ds} + E (N \cos \vartheta - QB_n)^2 - (-PEM_n + PFL_n)^2 = 0$$

ikinci dereceden denklemi elde edilir. Bu denklemin kökleri bize $\frac{dv}{ds}$ ifadesini verir.

Denklemin diskriminantı bulunursa

$$\Delta_n^* = 4P^2 L_n^2 (EG - F^2)^2 (N \cos \vartheta - QB_n)^2 - 4A_n P^2 (EG - F^2) \left[E (N \cos \vartheta - QB_n)^2 - (-PEM_n + PFL_n)^2 \right]$$

bulunur. Δ_n^* düzenlenirse

$$\Delta_n^* = 4P^2 (EG - F^2) (N \cos \vartheta - QB_n)^2 (L_n^2 (EG - F^2) - A_n E) + 4A_n P^4 (EG - F^2) (-EM_n + FL_n)^2$$

elde edilir. Yapılan kısaltmalar bulunan Δ_n^* da yerine yazılırsa

$$\Delta_n^* = 4P^2 (EG - F^2) \left(\left\| \vec{X}_u \times \vec{X}_v \right\| \cos \vartheta - Q \left\langle \vec{X}_u \times \vec{X}_v, \vec{d}_n \right\rangle \right)^2 \left(\left(\left\langle \vec{X}_u, \vec{d}_n \right\rangle \right)^2 (EG - F^2) - A_n E \right) + 4A_n P^4 (EG - F^2) \left(-E \left\langle \vec{X}_v, \vec{d}_n \right\rangle + F \left\langle \vec{X}_u, \vec{d}_n \right\rangle \right)^2$$

elde edilir. Dolayısıyla denklemin kökleri

$$\frac{dv}{ds} = \frac{2PL_n (N \cos \vartheta - QB_n) (EG - F^2) \pm \sqrt{\Delta_n^*}}{2A_n P^2 (EG - F^2)}$$

ile bulunur. Daha önce yapılan kısaltmalar yerine yazılırsa

$$\frac{dv}{ds} = \frac{2P \left\langle \vec{X}_u, \vec{d}_n \right\rangle \left(\left\| \vec{X}_u \times \vec{X}_v \right\| \cos \vartheta - Q \left\langle \vec{X}_u \times \vec{X}_v, \vec{d}_n \right\rangle \right) (EG - F^2) \pm \sqrt{\Delta_n^*}}{2A_n P^2 (EG - F^2)} \quad (5.31)$$

elde edilir. Burada $P = \frac{k_n}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}}$, $Q = \frac{k_g}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}}$ ve $A_n = EM_n^2 + GL_n^2 - 2FL_n M_n$ dır.

(5.30) ve (5.31) den

$$\begin{cases} \frac{du}{ds} = \frac{-2P \langle \vec{X}_v, \vec{d}_n \rangle (\|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\| \cos \vartheta - Q \langle \vec{X}_u \times \vec{X}_v, \vec{d}_n \rangle) (EG - F^2) \pm \sqrt{\Delta_n}}{2A_n P^2 (EG - F^2)} \\ \frac{dv}{ds} = \frac{2P \langle \vec{X}_u, \vec{d}_n \rangle (\|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\| \cos \vartheta - Q \langle \vec{X}_u \times \vec{X}_v, \vec{d}_n \rangle) (EG - F^2) \pm \sqrt{\Delta_n^*}}{2A_n P^2 (EG - F^2)} \end{cases} \quad (5.32)$$

diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Bu diferansiyel denklem sistemi

$$u(s_0) = u_0$$

$$v(s_0) = v_0$$

başlangıç noktası ile birlikte çözülüp bulunan değerler $X(u, v)$ de yazılırsa S yüzeyi üzerinde istenen D_n -Darboux slant helis elde edilir.

5.4.2. Kapalı Formda Verilen Yüzey Üzerinde D_n -Darboux Slant Helisin Elde Edilmesi

S , E^3 uzayında $f(x, y, z) = 0$ kapalı formu ile verilen bir yüzey olsun. $\beta(s) = (x(s), y(s), z(s))$, S yüzeyi üzerinde, sabit ve birim $\vec{d}_n = (a, b, c)$ doğrultusu ile sabit ϑ açısı yapan, Darboux çatısı $\{\vec{T}, \vec{V}, \vec{U}\}$ olan birim hızlı bir D_n -Darboux slant helis olsun. β eğrisini elde etmek için $x(s)$, $y(s)$ ve $z(s)$ değerlerinin bulunması gerekir. $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ ve $\vec{e}_3$, E^3 uzayının standart baz vektörleri olmak üzere Darboux çatısının elemanları;

$$\vec{T} = \beta' = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right),$$

$$\vec{U} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \frac{1}{\|\nabla f\|} (f_x, f_y, f_z),$$

$$\begin{aligned}\vec{V} = \vec{U} \times \vec{T} &= \frac{1}{\|\nabla \vec{f}\|} \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ f_x & f_y & f_z \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\|\nabla \vec{f}\|} \left(f_y \frac{dz}{ds} - f_z \frac{dy}{ds}, f_z \frac{dx}{ds} - f_x \frac{dz}{ds}, f_x \frac{dy}{ds} - f_y \frac{dx}{ds} \right)\end{aligned}$$

şeklindedir [15]. Bulunan $\vec{V}$ ve $\vec{U}$ vektörleri, $\vec{D}_n$ vektöründe yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\vec{D}_n(s) &= -\frac{k_n(s)}{\sqrt{k_n^2(s) + k_g^2(s)}} \left[\frac{1}{\|\nabla \vec{f}\|} \left(f_y \frac{dz}{ds} - f_z \frac{dy}{ds}, f_z \frac{dx}{ds} - f_x \frac{dz}{ds}, f_x \frac{dy}{ds} - f_y \frac{dx}{ds} \right) \right] \\ &\quad + \frac{k_g(s)}{\sqrt{k_n^2(s) + k_g^2(s)}} \left(\frac{1}{\|\nabla \vec{f}\|} (f_x, f_y, f_z) \right)\end{aligned}$$

elde edilir. β , D_n -Darboux slant helis olduğundan $\langle \vec{D}_n, \vec{d}_n \rangle = \cos \vartheta$ dır. $\vec{d}_n$ vektörü ve yukarıda bulunan $\vec{D}_n$ vektörü yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\left\langle -\frac{k_n(s)}{\sqrt{k_n^2(s) + k_g^2(s)}} \left[\frac{1}{\|\nabla \vec{f}\|} \left(f_y \frac{dz}{ds} - f_z \frac{dy}{ds}, f_z \frac{dx}{ds} - f_x \frac{dz}{ds}, f_x \frac{dy}{ds} - f_y \frac{dx}{ds} \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{k_g(s)}{\sqrt{k_n^2(s) + k_g^2(s)}} \left(\frac{1}{\|\nabla \vec{f}\|} (f_x, f_y, f_z) \right), (a, b, c) \right\rangle = \cos \vartheta\end{aligned}$$

bulunur. Burada işlem kolaylığı için $\frac{k_n}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} = P$ ve $\frac{k_g}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} = Q$ denilip ifade

düzenlenirse

$$\begin{aligned}\left\langle -P \left[\frac{1}{\|\nabla \vec{f}\|} \left(f_y \frac{dz}{ds} - f_z \frac{dy}{ds}, f_z \frac{dx}{ds} - f_x \frac{dz}{ds}, f_x \frac{dy}{ds} - f_y \frac{dx}{ds} \right) \right] \right. \\ \left. + Q \left(\frac{1}{\|\nabla \vec{f}\|} (f_x, f_y, f_z) \right), (a, b, c) \right\rangle = \cos \vartheta\end{aligned}$$

elde edilir. Buradaki iç çarpım işlemleri yapılırsa

$$\begin{aligned}
& -P \frac{1}{\|\nabla \vec{f}\|} \left(af_y \frac{dz}{ds} - af_z \frac{dy}{ds} + bf_z \frac{dx}{ds} - bf_x \frac{dz}{ds} + cf_x \frac{dy}{ds} - cf_y \frac{dx}{ds} \right) \\
& + Q \frac{1}{\|\nabla \vec{f}\|} (af_x + bf_y + cf_z) = \cos \vartheta
\end{aligned}$$

bulunur. Her iki taraf $\|\nabla \vec{f}\|$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
& -P \left(af_y \frac{dz}{ds} - af_z \frac{dy}{ds} + bf_z \frac{dx}{ds} - bf_x \frac{dz}{ds} + cf_x \frac{dy}{ds} - cf_y \frac{dx}{ds} \right), \\
& + Q (af_x + bf_y + cf_z) = \|\nabla \vec{f}\| \cos \vartheta
\end{aligned}$$

bu ifade $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ ve $\frac{dz}{ds}$ parantezine alınır

$$\begin{aligned}
& (-Pbf_z + Pcf_y) \frac{dx}{ds} + (Paf_z - Pcf_x) \frac{dy}{ds} \\
& + (-Paf_y + Pbf_x) \frac{dz}{ds} = \|\nabla \vec{f}\| \cos \vartheta - Q (af_x + bf_y + cf_z)
\end{aligned} \tag{5.33}$$

elde edilir. Ayrıca $\langle \vec{T}, \vec{U} \rangle = 0$ olduğundan

$$f_x \frac{dx}{ds} + f_y \frac{dy}{ds} + f_z \frac{dz}{ds} = 0 \tag{5.34}$$

dır [15]. Burada $\frac{dy}{ds}$ ifadesi yalnız bırakılırsa

$$\frac{dy}{ds} = -\frac{f_x}{f_y} \frac{dx}{ds} - \frac{f_z}{f_y} \frac{dz}{ds}$$

bulunur. Bu ifade (5.33) de yerine yazılırsa ve işlem kolaylığı için $\|\nabla \vec{f}\| \cos \vartheta - Q (af_x + bf_y + cf_z) = C$ denilirse

$$(-Pbf_z + Pcf_y) \frac{dx}{ds} + (Paf_z - Pcf_x) \left(-\frac{f_x}{f_y} \frac{dx}{ds} - \frac{f_z}{f_y} \frac{dz}{ds} \right) + (-Paf_y + Pbf_x) \frac{dz}{ds} = C$$

elde edilir. Parantezler açılırsa

$$P \left(-bf_z + cf_y - \frac{f_x}{f_y} (af_z - cf_x) \right) \frac{dx}{ds} + P \left(-af_y + bf_x - \frac{f_z}{f_y} (af_z - cf_x) \right) \frac{dz}{ds} = C$$

bulunur. Denklemin iki tarafı f_y ile çarpılırsa

$$P \left(f_y (-bf_z + cf_y) - f_x (af_z - cf_x) \right) \frac{dx}{ds} + P \left(f_y (-af_y + bf_x) - f_z (af_z - cf_x) \right) \frac{dz}{ds} = f_y C$$

elde edilir. Her iki taraf P ye bölünürse

$$\left(f_y (-bf_z + cf_y) - f_x (af_z - cf_x) \right) \frac{dx}{ds} + \left(f_y (-af_y + bf_x) - f_z (af_z - cf_x) \right) \frac{dz}{ds} = \frac{1}{P} f_y C$$

bulunur. Bulunan denklemde $\frac{dx}{ds}$ yalnız bırakılırsa

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{f_x (af_z - cf_x) - f_y (cf_y - bf_z)} \left[-\frac{1}{P} f_y C + \left(f_y (-af_y + bf_x) - f_z (af_z - cf_x) \right) \frac{dz}{ds} \right]$$

elde edilir. $f_x (af_z - cf_x) - f_y (cf_y - bf_z) = \Omega_n \neq 0$ denilirse

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\Omega_n} \left[-\frac{1}{P} f_y C + \left(f_y (-af_y + bf_x) - f_z (af_z - cf_x) \right) \frac{dz}{ds} \right] \quad (5.35)$$

bulunur. Benzer yolla $\frac{dy}{ds}$ ifadesini bulalım. (5.34) denklemde $\frac{dx}{ds}$ yalnız bırakılırsa

$$\frac{dx}{ds} = -\frac{f_y}{f_x} \frac{dy}{ds} - \frac{f_z}{f_x} \frac{dz}{ds}$$

bulunur. Bu ifade (5.33) de yazılırsa

$$(-Pbf_z + Pcf_y) \left(-\frac{f_y}{f_x} \frac{dy}{ds} - \frac{f_z}{f_x} \frac{dz}{ds} \right) + (Paf_z - Pcf_x) \frac{dy}{ds} + (-Paf_y + Pbf_x) \frac{dz}{ds} = C$$

elde edilir. Her iki taraf P ye bölünürse

$$(-bf_z + cf_y) \left(-\frac{f_y}{f_x} \frac{dy}{ds} - \frac{f_z}{f_x} \frac{dz}{ds} \right) + (af_z - cf_x) \frac{dy}{ds} + (-af_y + bf_x) \frac{dz}{ds} = \frac{1}{P} C$$

olur. $\frac{dy}{ds}$ ve $\frac{dz}{ds}$ parantezine alınır

$$\left[-\frac{f_y}{f_x} (-bf_z + cf_y) + (af_z - cf_x) \right] \frac{dy}{ds} + \left[-\frac{f_z}{f_x} (-bf_z + cf_y) + (-af_y + bf_x) \right] \frac{dz}{ds} = \frac{1}{P} C$$

bulunur. Bulunan bu ifadenin iki tarafı f_x ile çarpılırsa

$$\left[-f_y (-bf_z + cf_y) + f_x (af_z - cf_x) \right] \frac{dy}{ds} + \left[-f_z (-bf_z + cf_y) + f_x (-af_y + bf_x) \right] \frac{dz}{ds} = \frac{1}{P} f_x C$$

elde edilir. $\frac{dy}{ds}$ yalnız bırakılırsa

$$\frac{dy}{ds} = \frac{1}{f_x (af_z - cf_x) - f_y (cf_y - bf_z)} \left(\frac{1}{P} f_x C - \left[f_x (bf_x - af_y) - f_z (cf_y - bf_z) \right] \frac{dz}{ds} \right)$$

bulunur. Burada $f_x (af_z - cf_x) - f_y (cf_y - bf_z) = \Omega_n \neq 0$ denilirse

$$\frac{dy}{ds} = \frac{1}{\Omega_n} \left(\frac{1}{P} f_x C - \left[f_x (bf_x - af_y) - f_z (cf_y - bf_z) \right] \frac{dz}{ds} \right) \quad (5.36)$$

olur. β D_n -Darboux slant helisi birim hızlı olduğundan

$$\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 = 1 \quad (5.37)$$

elde edilir [15]. (5.35) ve (5.36) ifadeleri (5.37) de yerine yazılırsa

$$\left(\frac{1}{\Omega_n} \left[-\frac{1}{P} f_y C + \left(f_y (bf_x - af_y) - f_z (af_z - cf_x) \right) \frac{dz}{ds} \right] \right)^2 + \left(\frac{1}{\Omega_n} \left(\frac{1}{P} f_x C - \left[f_x (bf_x - af_y) - f_z (cf_y - bf_z) \right] \frac{dz}{ds} \right) \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 = 1$$

bulunur. Burada kareler alınıp bulunan ifade de benzer olan ifadeler ortak çarpan parantezine alınırsa

$$\left\{ \frac{1}{\Omega_n^2} \left[\left(f_x^2 + f_y^2 + 2f_z^2 \right) (bf_x - af_y)^2 + f_z^2 \left((af_z - cf_x)^2 + (cf_y - bf_z)^2 \right) \right] + 1 \right\} \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 - 2 \frac{1}{P} C \frac{1}{\Omega_n^2} \left[\left(f_x^2 + f_y^2 + f_z^2 \right) (bf_x - af_y) \right] \frac{dz}{ds} + \frac{1}{\Omega_n^2} \frac{1}{P^2} C^2 (f_x^2 + f_y^2) - 1 = 0$$

ikinci derece denklemi elde edilir. Bu denklemin kökleri

$$q_1 = \frac{1}{\Omega_n^2} \left[\left(f_x^2 + f_y^2 + 2f_z^2 \right) (bf_x - af_y)^2 + f_z^2 \left((af_z - cf_x)^2 + (cf_y - bf_z)^2 \right) \right] + 1$$

$$q_2 = -2 \frac{1}{P} C \frac{1}{\Omega_n^2} \left[\left(f_x^2 + f_y^2 + f_z^2 \right) (bf_x - af_y) \right]$$

$$q_3 = \frac{1}{\Omega_n^2} \frac{1}{P^2} C^2 (f_x^2 + f_y^2) - 1$$

olmak üzere

$$\frac{dz}{ds} = \frac{-q_2 \pm \sqrt{q_2^2 - 4q_1q_3}}{2q_1} \quad (5.38)$$

ile bulunur. (5.38) ifadesi (5.35) ve (5.36) de yerine yazılırsa

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\Omega_n} \left[-\frac{1}{P} f_y C + \left(f_y (bf_x - af_y) - f_z (af_z - cf_x) \right) \left(\frac{-q_2 \pm \sqrt{q_2^2 - 4q_1 q_3}}{2q_1} \right) \right] \\ \frac{dy}{ds} = \frac{1}{\Omega_n} \left(\frac{1}{P} f_x C - \left(f_x (bf_x - af_y) - f_z (cf_y - bf_z) \right) \left(\frac{-q_2 \pm \sqrt{q_2^2 - 4q_1 q_3}}{2q_1} \right) \right) \\ \frac{dz}{ds} = \frac{-q_2 \pm \sqrt{q_2^2 - 4q_1 q_3}}{2q_1} \end{cases} \quad (5.39)$$

diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Böylece

$$x(s_0) = x_0$$

$$y(s_0) = y_0$$

$$z(s_0) = z_0$$

başlangıç noktası ile birlikte bir başlangıç değer problemi elde ederiz. Bu problemin çözümü bize S üzerinde aradığımız D_n -Darboux slant helisi verir.

5.5. D_n -Darboux Slant Helis Örnekleri

Bu kısımda, D_n -Darboux slant helislere ait örnekler verilecektir. Örnek 5.5.1 ve Örnek 5.5.2 de yüzey üzerinde verilen bir eğrinin D_n -Darboux slant helis olup olmadığı Sonuç 5.2.3 yardımıyla kontrol edilecektir. Örnek 5.5.3 de parametrik formda verilen bir yüzey üzerinde D_n -Darboux slant helis elde edebilmek için 5.4.1 bölümünde verilen yöntem uygulanmıştır. Örnek 5.4.1 de kapalı formda verilen bir yüzey üzerinde D_n -Darboux slant helis elde edebilmek için 5.4.2 bölümünde verilen yöntem uygulanmıştır.

Örnek 5.5.1: S yüzeyi, $u > 0$ olmak üzere

$$X(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{u}{3\sqrt{2}} \cos(\sqrt{2} \ln u) + \frac{u}{3} \sin(\sqrt{2} \ln u) + \frac{v}{\sqrt{2}} \cos(\sqrt{2} \ln u), \\ \frac{u}{3\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2} \ln u) - \frac{u}{3} \cos(\sqrt{2} \ln u) + \frac{v}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2} \ln u), \\ \frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

parametrizasyonu ile verilsin. $u = s$ ($s > 0$) ve $v = 0$ alınarak S yüzeyi üzerinde

$$\beta(s) = \left(\frac{s}{3\sqrt{2}} \cos(\sqrt{2} \ln s) + \frac{s}{3} \sin(\sqrt{2} \ln s), \frac{s}{3\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2} \ln s) - \frac{s}{3} \cos(\sqrt{2} \ln s), \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$$

eğrisi elde edilir.

$$\vec{\beta}'(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\sqrt{2} \ln s), \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2} \ln s), \frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

dolayısıyla $\|\vec{\beta}'(s)\| = 1$ olduğundan β birim hızlıdır. β eğrisinin Darboux çatı elemanları

$$\vec{T} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos(\sqrt{2} \ln s), \sin(\sqrt{2} \ln s), 1)$$

$$\vec{V} = (\sin(\sqrt{2} \ln s), -\cos(\sqrt{2} \ln s), 0)$$

$$\vec{U}_\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos(\sqrt{2} \ln s), \sin(\sqrt{2} \ln s), -1)$$

olarak bulunur. Ayrıca

$$\beta'' = \left(-\frac{1}{s} \sin(\sqrt{2} \ln s), \frac{1}{s} \cos(\sqrt{2} \ln s), 0 \right)$$

$$\vec{U}'_\beta = \left(-\frac{1}{s} \sin(\sqrt{2} \ln s), \frac{1}{s} \cos(\sqrt{2} \ln s), 0 \right)$$

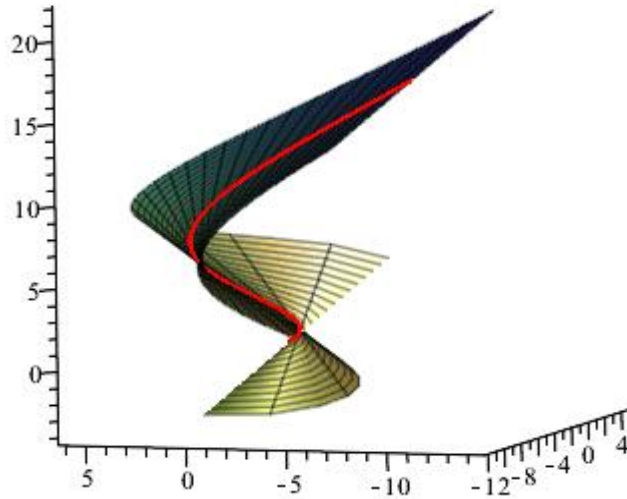
olduğundan

$$k_n = \langle \beta'', \vec{U}_\beta \rangle = 0$$

$$k_g = \langle \beta'', \vec{V} \rangle = -\frac{1}{s}$$

$$\tau_g = -\langle \vec{U}'_\beta, \vec{V} \rangle = \frac{1}{s}$$

elde edilir. Bulunan değerler (5.16) da yerine yazılırsa $\sigma_n = 1 = \text{sabit}$ olduğundan β eğrisi S yüzeyi üzerinde bir D_n -Darboux slant helistir. Ayrıca Sonuç 5.2.6 gereğince β eğrisi bir helistir. S yüzeyi ve seçilen β eğrisi Şekil 5.5.1 de gösterilmiştir.



Şekil 5.5.1 $X(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{u}{3\sqrt{2}} \cos(\sqrt{2} \ln u) + \frac{u}{3} \sin(\sqrt{2} \ln u) + \frac{v}{\sqrt{2}} \cos(\sqrt{2} \ln u), \\ \frac{u}{3\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2} \ln u) - \frac{u}{3} \cos(\sqrt{2} \ln u) + \frac{v}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2} \ln u), \\ \frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ yüzeyi

üzerindeki $\beta(s) = \begin{pmatrix} \frac{s}{3\sqrt{2}} \cos(\sqrt{2} \ln s) + \frac{s}{3} \sin(\sqrt{2} \ln s), \\ \frac{s}{3\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2} \ln s) - \frac{s}{3} \cos(\sqrt{2} \ln s), \frac{s}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ denklemlili D_n -Darboux slant helis

Örnek 5.5.2: S yüzeyi $X(u, v) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin u + \cos v, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos u + \sin v, \frac{u}{\sqrt{2}} + 1 \right)$ parametrizasyonu ile verilsin. $v = 0$ alınrsa S yüzeyi üzerinde $\beta(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s + 1, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, \frac{s}{\sqrt{2}} + 1 \right)$ eğrisi elde edilir. $\|\vec{\beta}'\| = 1$ olduğundan β eğrisi birim hızlıdır. β eğrisinin Darboux çatı elemanları

$$\vec{T} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos s, -\sin s, 1)$$

$$\vec{V} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+\cos^2 s}} (\cos s \sin s, 1 + \cos^2 s, \sin s)$$

$$\vec{U}_\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 s}} (-1, 0, \cos s)$$

olarak bulunur. Ayrıca

$$\beta'' = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\sin s, \cos s, 0)$$

$$\vec{U}'_\beta = \frac{1}{(1+\cos^2 s)^{\frac{3}{2}}} (-\cos s \sin s, 0, -\sin s)$$

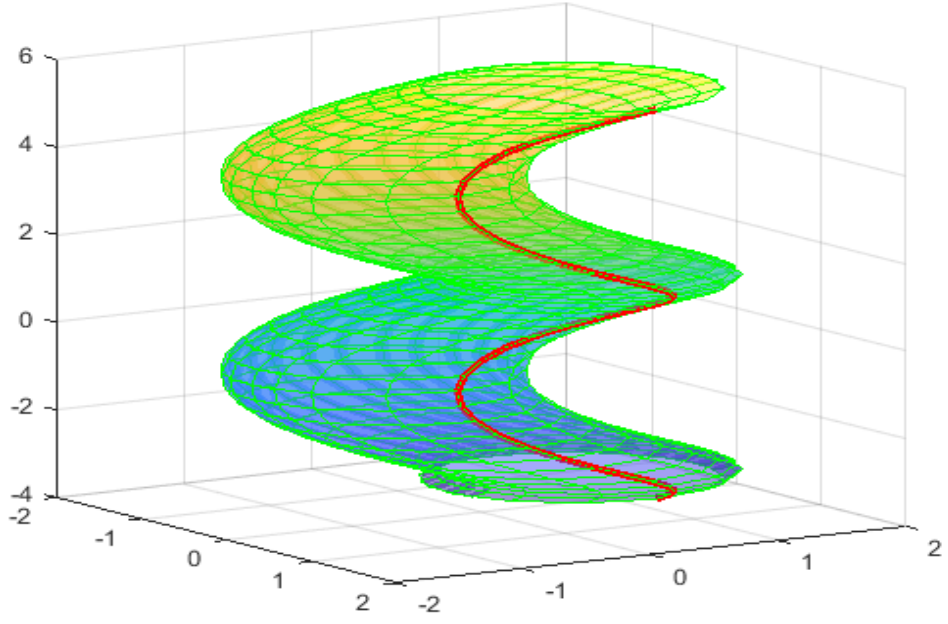
olduğundan

$$k_n = \langle \vec{\beta}'', \vec{U}_\beta \rangle = \frac{\sin s}{\sqrt{2}\sqrt{1+\cos^2 s}}$$

$$k_g = \langle \vec{\beta}'', \vec{V} \rangle = -\frac{\cos s}{\sqrt{1+\cos^2 s}}$$

$$\tau_g = -\langle \vec{U}'_\beta, \vec{V} \rangle = \frac{\sin^2 s}{\sqrt{2}(1+\cos^2 s)}$$

elde edilir. Bulunan değerler (5.16) da yazılırsa $\sigma_n = -1 = \text{sabit}$ olur. Dolayısıyla β eğrisi S yüzeyi üzerinde bir D_n -Darboux slant helistir. Ayrıca Sonuç 5.2.6 gereğince β eğrisi bir helistir. S yüzeyi ve β eğrisi Şekil 5.5.2 de gösterilmiştir.



Şekil 5.5.2. $X(u, v) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin u + \cos v, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos u + \sin v, \frac{u}{\sqrt{2}} + 1 \right)$ yüzeyi üzerindeki

$$\beta(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s + 1, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, \frac{s}{\sqrt{2}} + 1 \right) \text{ denklemleri } D_n \text{ -Darboux slant helis}$$

Örnek 5.5.3: S yüzeyi $X(u, v) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos u, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin u, \frac{u}{\sqrt{2}} - 2v \right)$ parametrizasyonu

ile verilsin. Bu yüzey üzerinde normal ve geodezik eğrilikleri $k_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $k_g = 0$ olan

ve $\vec{D}_n$ vektörü, sabit $d_n = (0, 0, 1)$ doğrultusu ile $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ açısı yapan D_n -Darboux

slant helisi 5.4.1 bölümünde verilen metotla bulalım.

$$\vec{X}_u = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin u, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos u, \frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

$$\vec{X}_v = (0, 0, -2)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\vec{X}_u \times \vec{X}_v &= -\sqrt{2}(\cos u, \sin u, 0), \|\vec{X}_u \times \vec{X}_v\| = \sqrt{2} \\
E &= \langle \vec{X}_u, \vec{X}_u \rangle = 1, F = \langle \vec{X}_u, \vec{X}_v \rangle = -\sqrt{2}, G = \langle \vec{X}_v, \vec{X}_v \rangle = 4, \\
EG - F^2 &= 2, L_n = \langle \vec{X}_u, \vec{d}_r \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, M_n = \langle \vec{X}_v, \vec{d}_r \rangle = -2, \\
A &= EM_n^2 - 2FL_nM_n + GL_n^2 = 2, B_n = 0
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Ayrıca $P = \frac{k_n}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} = 1, Q = \frac{k_g}{\sqrt{k_n^2 + k_g^2}} = 0$ olduğundan bulunan tüm

değerler yerine yazılırsa $\Delta_n = 0$ ve $\Delta_n^* = 8$ olur. Dolayısıyla

$$\begin{cases} \frac{du}{ds} = 1 \\ \frac{dv}{ds} = \frac{2\sqrt{2} \mp 2\sqrt{2}}{8} \end{cases}$$

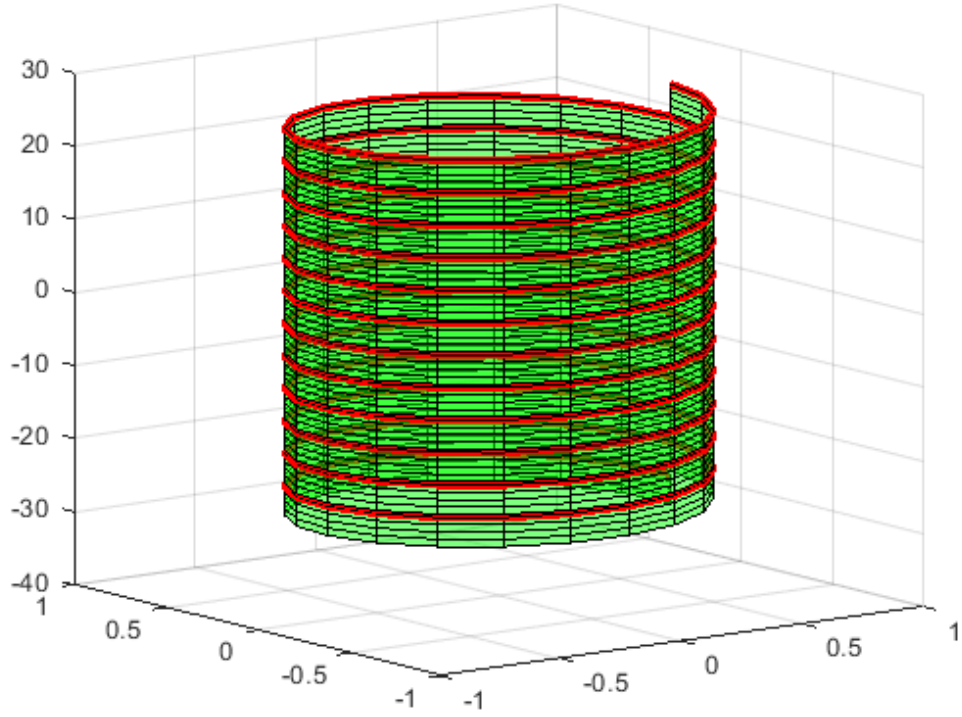
elde edilir. Bu diferansiyel denklemler, $(\mp)$ ifade negatif kabul edilip çözümlerse, c_1, c_2 integrasyon sabiti olmak üzere

$$\begin{aligned} u &= s + c_1 \\ v &= c_2 \end{aligned}$$

bulunur. Özel olarak $c_1 = c_2 = 0$ kabul edilirse $u = s$ ve $v = 0$ elde edilir. Bulunan bu değerler yüzeyin parametrik denkleminde yazılırsa, S yüzeyi üzerinde

$$\gamma = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$$

D_n -Darboux slant helisi elde edilir. S yüzeyi üzerindeki β D_n -Darboux slant helisin şekli Şekil 5.5.3 deki gibidir. Bu örnekte [26] nolu referanstan faydalanılmıştır.



Şekil 5.5.3: $X(u,v) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos u, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin u, \frac{u}{\sqrt{2}} - 2v \right)$ yüzeyi üzerinde normal eğriliği

$k_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$, geodezik eğriliği $k_g = 0$ olan ve $d_n = (0,0,1)$ doğrultusu ile $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ açısı yapan

D_n -Darboux slant helis

Örnek 5.5.4: $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z = 0$ kapalı formu ile verilen paraboloid yüzeyi

üzerinde eğrilikleri $k_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\tau_g = 0$ olan ve $d_n = (0,0,1)$ doğrultusu ile $\theta = \frac{\pi}{3}$ açısı

yapan D_n -Darboux slant helisi 5.4.2 bölümünde verilen yöntemle bulalım. Gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$P=1, Q=0, f_x=2x, f_y=2y, f_z=-1,$$

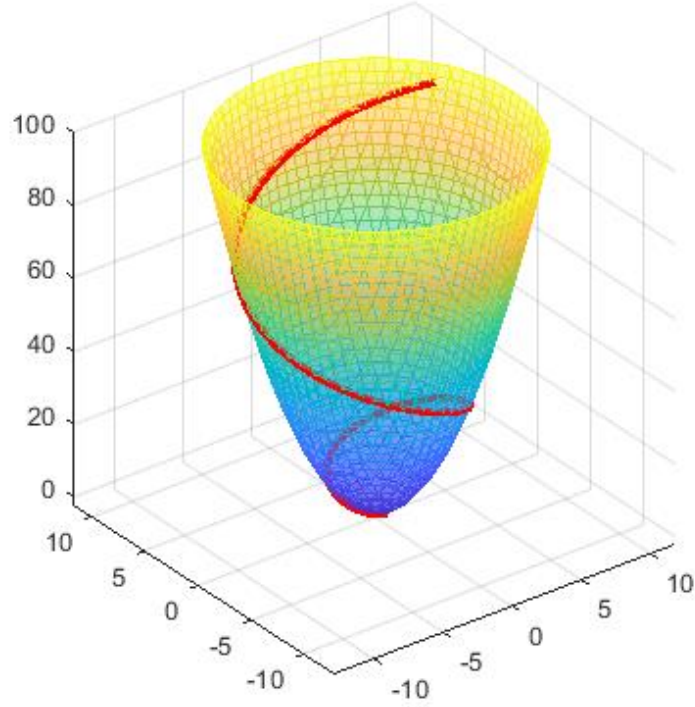
$$\|\nabla f\| = \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}, C = \frac{1}{2} \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}, \Omega_n = -4(x^2 + y^2),$$

$$q_1 = \frac{1}{4(x^2 + y^2)} + 1, q_2 = 0, q_3 = \frac{1}{16(x^2 + y^2)} - \frac{3}{4}$$

bulunur. Bulunan değerler (5.39) da yazılırsa

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = \frac{1}{4(x^2 + y^2)} \left[2x \sqrt{\frac{12(x^2 + y^2) - 1}{16(x^2 + y^2) + 4}} + y \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1} \right] \\ \frac{dy}{ds} = -\frac{1}{4(x^2 + y^2)} \left[x \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1} - 2y \sqrt{\frac{12(x^2 + y^2) - 1}{16(x^2 + y^2) + 4}} \right] \\ \frac{dz}{ds} = \pm \sqrt{\frac{12(x^2 + y^2) - 1}{16(x^2 + y^2) + 4}} \end{cases}$$

diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Bu diferansiyel denklem sistemi karmaşık olduğundan eğrinin parametrik denklemi elde edilememiş olsa da bu sistem için Matlab programında $P = (0, -1, 1)$ başlangıç noktası ile 'ode45' komutu kullanılırsa aranan eğrinin grafiği Şekil 5.5.4 deki gibi elde edilir.



Şekil 5.5.4: $x^2 + y^2 - z = 0$ yüzeyi üzerinde normal eğriliği $k_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$, geodezik eğriliği

$k_g = 0$ olan ve $d_n = (0, 0, 1)$ doğrultusu ile $\vartheta = \frac{\pi}{3}$ açısı yapan D_n -Darboux slant helis

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, daha önce [20] nolu referansta tanımlaması yapılan, fakat incelemesi yapılmayan, üç yeni yüzey eğrisi olan D_i -Darboux slant helisler ($i \in \{o, n, r\}$) üzerine çalışılmıştır. Öncelikle bu eğrileri daha kolay incelemek için üç yeni ortogonal çatı tanımlanmış ve bu çatılara ait türev formülleri bulunmuştur. Ardından bu çatılar yardımıyla D_i -Darboux slant helisleri karakterize eden denklemler elde edilmiştir. D_i -Darboux slant helisleri karakterize eden denklemler, tanımlanan bu çatıların eğrilikleri ile Darboux çatısının eğrilikleri arasındaki ilişkilerden yararlanılarak eğri-yüzey ikilisinin eğrilikleri cinsinden verilmiştir. Bu yeni çatılar yardımıyla yüzey üzerinde yatan tüm eğrileri karakterize eden diferansiyel denklemler bulunmuş, bulunan bu diferansiyel denklemlerden yararlanılarak D_i -Darboux slant helisleri karakterize eden diferansiyel denklemler elde edilmiştir. Son olarak, kapalı ve parametrik formda verilen bir yüzey üzerinde bulunan D_i -Darboux slant helisleri elde edebilmek için metotlar verilip ardından bu metotlara ilişkin örnekler verilmiştir.

Bu yapılan çalışmalara ek olarak, tanımlanan üç yeni ortogonal çatı ile yüzey üzerinde bulunan eğriler incelenebilir. Öklid uzayında yüzey üzerindeki D_i -Darboux slant helisler ilk kez bu çalışmada incelendiğinden, burada elde edilen veriler ışığında bu yüzey eğrilerinin farklı özellikleri ve karakterizasyonları Öklid uzayında incelenmeye devam edilebilir. D_i -Darboux slant helisler, burada verilen yol ve yöntemler yardımıyla başka uzaylarda da çalışılıp incelenebilir. Ayrıca bu çalışma, başka uzaylardaki farklı eğri ve yüzey tiplerine göre çalışmalar yapılmasına öncülük edebilir.

KAYNAKLAR

- [1] Barros, M. (1997). General helices and a theorem of Lancret. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 125(5), 1503-1509.
- [2] Izumiya, S., & Takeuchi, N. (2004). New special curves and developable surfaces. *Turkish Journal of Mathematics*, 28(2), 153-164.
- [3] Ziplar, E., Senol, A., & Yayli, Y. (2012). On Darboux helices in Euclidean 3-space. *Global Journal of Science Frontier Research Mathematics and Decision Sciences*, 12(13), 73-80.
- [4] Ali, A. T. (2011). Position vectors of general helices in Euclidean 3-space. *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, 3(2), 198-205.
- [5] Ali, A. T. (2012). Position vectors of slant helices in Euclidean 3-space. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 20(1), 1-6.
- [6] Beltran, J. V., & Monterde, J. (2007). A characterization of quintic helices. *Journal of computational and applied mathematics*, 206(1), 116-121.
- [7] Barros, M., Ferrandez, A., Lucas, P., & Merono, M. A. (2001). General helices in the three-dimensional Lorentzian space forms. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 373-388.
- [8] Kula, L., & Yayli, Y. (2005). On slant helix and its spherical indicatrix. *Applied Mathematics and Computation*, 169(1), 600-607.
- [9] Kula, L., Ekmekci, N., Yaylı, Y., & İlarslan, K. (2010). Characterizations of slant helices in Euclidean 3-space. *Turkish Journal of Mathematics*, 34(2), 261-274.
- [10] İlarslan, K., & Yıldırım, M. (2019). On Darboux helices in Euclidean 4-space. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 42(16), 5184-5189.
- [11] Puig-Pey, J., Gálvez, A., & Iglesias, A. (2004). Helical curves on surfaces for computer-aided geometric design and manufacturing. In *Computational Science and Its Applications–ICCSA 2004: International Conference, Assisi, Italy, May 14-17, 2004, Proceedings, Part II 4* (pp. 771-778). Springer Berlin Heidelberg.
- [12] Doğan, F. (2012). Isophote curves on timelike surfaces in Minkowski 3-space. *arXiv preprint arXiv:1203.4389*.

- [13] Doğan, F., & Yaylı, Y. (2021). Isophote curves on spacelike surfaces in Lorentz–Minkowski space. *Asian-European Journal of Mathematics*, 14(10), 2150180.
- [14] Doğan, F., & Yaylı, Y. (2015). On isophote curves and their characterizations. *Turkish Journal of Mathematics*, 39(5), 650-664.
- [15] Nesibe, M., & Döldül, M. (2017). Relatively normal-slant helices lying on a surface and their characterizations. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 46(3), 397-408.
- [16] Yadav, A., & Pal, B. (2021). On Relatively Normal-Slant Helices and Isophotic Curves. *arXiv preprint arXiv:2104.13220*.
- [17] Nešović, E., Öztürk, U., & Koç, Ö. E. B. (2022). On non-null relatively normal-slant helices in Minkowski 3-space. *Filomat*, 36(6), 2051-2062.
- [18] Yadav, A., & Yadav, A. K. (2022). Relatively normal-slant helices in Minkowski 3-space. *arXiv preprint arXiv:2201.03933*.
- [19] Hananoi, S., Ito, N., & Izumiya, S. (2015). Spherical Darboux images of curves on surfaces. *Beiträge zur Algebra und Geometrie/Contributions to Algebra and Geometry*, 56, 575-585.
- [20] Önder, M. (2022). Helices associated to helical curves, relatively normal-slant helices and isophote curves. *arXiv preprint arXiv:2201.09684*.
- [21] Sabuncuoğlu, A. *Diferensiyel Geometri*, Nobel Yayınevi, Ankara, 2001.
- [22] Hacısalihoğlu, H. H. *Diferensiyel Geometri*, İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak Yayınları, No. 2, 1980.
- [23] O'Neill, B. (2006). *Elementary differential geometry*. Elsevier.
- [24] Struik, D. J. (1961). *Lectures on classical differential geometry*. Courier Corporation.
- [25] Echabbi, N., & Ouazzani Chahdi, A. (2021). Direction Curves Associated with Darboux Vectors Fields and Their Characterizations. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2021, 1-11.
- [26] Echabbi, N., & Ouazzani Chahdi, A. (2021, September). Some Special Ruled Surfaces Generated by a Direction Curve according to the Darboux Frame and their Characterizations. In *Abstract and Applied Analysis* (Vol. 2021, pp. 1-12). Hindawi Limited.