



**HİPERELASTİK SÜREKLİ ORTAMIN HEXAHEDRAL UYARLAMALI
SONLU ELEMANLAR İLE ANALİZİ**

Mustafa TEKİN

**DOKTORA TEZİ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

OCAK 2024

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Mustafa TEKİN

29/01/2024

HİPERELASTİK SÜREKLİ ORTAMIN HEXAHEDRAL UYARLAMALI SONLU ELEMENLAR İLE ANALİZİ

(Doktora Tezi)

Mustafa TEKİN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2024

ÖZET

Yeterli kuvvet uygulandığında hiperelastik malzemeler büyük şekil değişimi yapar. Bu malzemelerin farklı kullanım alanları vardır. Bunlardan birtanesi de inşaat mühendisliğinde sismik kuvvetlerin azaltılması için yapı temelinde kullanılan elastomerik mesnetlerdir. Bu ortamlar çoğu durumda sonlu elemanlar yöntemi gibi sayısal çözüm teknikleri ile ele alınır. Büyük şekil değiştirme yapan ortamların çözümünde doğrusal olmayan analiz yöntemi kullanılır. Burada sunulan çalışmada, hiperelastik ortamın büyük şekil değişimleri hexahedral uyarlamalı sonlu elemanlar kullanılarak Mooney-Rivlin malzeme modeli ile hesaplandı. Toplam Lagrange formülasyonu kullanılarak doğrusal olmayan uyarlamalı sonlu eleman çözümü yapan bir MATLAB kodu yazıldı. Sonuçlar Abaqus yazılımı ile karşılaştırıldı. Uyarlamalı ve uniform çözüm sonuçları irdelendi.

Bilim Kodu : 91120
Anahtar Kelimeler : Hiperelastisite, uyarlamalı sonlu elemanlar yöntemi, hexahedral elemanlar
Sayfa Adedi : 101
Danışman : Doç. Dr. Bahadır ALYAVUZ

ANALYSIS OF HYPERELASTIC CONTINUUM WITH HEXAHEDRAL ADAPTIVE
FINITE ELEMENTS

(Ph. D. Thesis)

Mustafa TEKİN

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

January 2024

ABSTRACT

When sufficient force is applied, hyperelastic materials undergo large deformation. These materials have different areas of use. One of these is elastomeric bearings used on the basis of buildings to reduce seismic forces in civil engineering. In most cases, these environments are addressed with numerical solution techniques such as the finite element method. Nonlinear analysis method is used to solve environments with large deformations. In the study presented here, large deformations of the hyperelastic continuum were calculated with the Mooney-Rivlin material model using hexahedral adaptive finite elements. A MATLAB code that performs a nonlinear adaptive finite element solution using the total Lagrangian formulation was written. The results were compared with the Abaqus software. Adaptive and uniform solution results were examined.

Science Code : 91120

Key Words : Hyperelasticity, adaptive finite element method, hexahedral elements

Page Number : 101

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Bahadır ALYAVUZ

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımın her aşamasında üstün bilgi ve tecrübeleriyle değerli katkılarını sunarak bana destek olan başta tez danışmanım Doç. Dr. Bahadır ALYAVUZ olmak üzere tez izleme komitesinde yer alan Prof. Dr. Kurtuluş SOYLUK ve Dr. Öğr. Üyesi Mahmut Cem YILMAZ'a teşekkür ederim. Ayrıca lisansüstü eğitim sürecinde desteklerini esirgemeyerek bu sürecin her bir aşamasında yanımda olan ve zor dönemlerimin en baştaki destekçisi olan eşim Hatice, kızım Elif, kuzenim Tufan ve aileme şükranlarımı sunarım.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	v
ABSTRACT.....	vi
TEŞEKKÜR.....	vii
İÇİNDEKİLER.....	viii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ.....	x
ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....	xii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	xviii
1. GİRİŞ.....	1
2. DOĞRUSAL OLMAYAN ELASTİSİTE TEORİSİ VE HİPERELASTİK ORTAM MODELLEME.....	23
2.1. Deformasyon Gradyan Tansörü.....	23
2.2. Neo- Hookean Malzeme Modeli.....	25
2.3. Yeoh Malzeme Modeli.....	26
2.4. Ogden Malzeme Modeli.....	26
2.5. Mooney-Rivlin Malzeme Modeli.....	26
2.6. Seçici İndirgenmiş İntegrasyon.....	27
3. DOĞRUSAL OLMAYAN SONLU ELEMANLAR YÖNTEM.....	29
3.1. Teori ve Formülasyon.....	29
3.1.1. Newton-Raphson ve Modifiye Newton-Raphson yöntemi.....	32
4. UYARLAMALI YÖNTEMLER VE SONLU ELEMANLARDA KULLANIMI.....	41
5. ANALİZLER	47
5.1. Ele alınan problemler	49

Sayfa

5.1.1 Hiperelastik ortam için malzeme parametreleri.....	50
5.1.2. Üzerine tekil yükleme uygulanan hiperelastik blok.....	51
5.1.3 Basit kesme etkisinde hiperelastik blok.....	64
5.1.4. Dairesel boşluk içeren dikdörtgen blok.....	76
6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	93
KAYNAKLAR.....	97
ÖZGEÇMİŞ.....	101



ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 4.1. Bölünen elemana bir yüzeyinden birleştirilebilen elemanlar.....	44
Çizelge 5.1. $C_{10} = 0,552$ ve $C_{01} = 0,138$ için hacim modülü ve Poisson oranı ilişkisi.....	51
Çizelge 5.2. Uyarlamalı çözümlerde maksimum yer değiştirme ($u_{2_{\max}}$) ve mutlak değerce maksimum normal gerilme ($\sigma_{22_{\max}}$).....	54
Çizelge 5.3. Uniform sıklaştırma için maksimum yer değiştirme ($u_{2_{\max}}$) ve mutlak değerce maksimum normal gerilme ($\sigma_{22_{\max}}$).....	56
Çizelge 5.4. Abaqus lokal sıklaştırma ile elde edilen maksimum yer değiştirme ($u_{2_{\max}}$) ve mutlak değerce maksimum normal gerilme ($\sigma_{22_{\max}}$).....	58
Çizelge 5.5. Abaqus uniform sıklaştırma için maksimum yer değiştirme ($u_{2_{\max}}$) ve mutlak değerce maksimum normal gerilme ($\sigma_{22_{\max}}$).....	60
Çizelge 5.6. Uyarlamalı çözüm ile Abaqus çözümü maksimum yer değiştirme ($u_{2_{\max}}$) ve mutlak değerce maksimum normal gerilme ($\sigma_{22_{\max}}$) karşılaştırması.....	62
Çizelge 5.7. Uniform çözüm ile Abaqus çözümü maksimum yer değiştirme ($u_{2_{\max}}$) ve mutlak değerce maksimum normal gerilme ($\sigma_{22_{\max}}$) karşılaştırması.....	63
Çizelge 5.8. Uyarlamalı çözümlerde maksimum yer değiştirme ($u_{1_{\max}}$) ve maksimum normal gerilme ($\sigma_{12_{\max}}$).....	65
Çizelge 5.9. Uniform çözümlerde maksimum yer değiştirme ($u_{1_{\max}}$) ve maksimum kesme gerilmesi ($\sigma_{12_{\max}}$).....	68
Çizelge 5.10. Abaqus lokal sıklaştırma ile elde edilen maksimum yer değiştirme ($u_{1_{\max}}$) ve maksimum normal gerilme ($\sigma_{12_{\max}}$).....	70
Çizelge 5.11. Abaqus uniform sıklaştırma için maksimum yer değiştirme ($u_{1_{\max}}$) ve maksimum normal gerilme ($\sigma_{12_{\max}}$).....	72
Çizelge 5.12. Uyarlamalı çözüm ile Abaqus lokal sıklaştırma çözümü maksimum yer değiştirme ($u_{1_{\max}}$) ve maksimum kesme gerilmesi ($\sigma_{12_{\max}}$) karşılaştırması.....	75
Çizelge 5.13. Uniform çözümlerde maksimum yer değiştirme ($u_{1_{\max}}$) ve maksimum kesme gerilmesi ($\sigma_{12_{\max}}$).....	75

Çizelge	Sayfa
Çizelge 5.14. Uyarlamalı çözümlerde maksimum yer değiştirme ($u_{1_{\max}}$) ve maksimum normal gerilme ($\sigma_{11_{\max}}$).....	78
Çizelge 5.15. Uniform sıkıştırma için maksimum yer değiştirme ($u_{1_{\max}}$) ve maksimum normal gerilme ($\sigma_{11_{\max}}$).....	81
Çizelge 5.16. Abaqus lokal sıkıştırma ile elde edilen maksimum yer değiştirme ($u_{1_{\max}}$) ve maksimum normal gerilme ($\sigma_{11_{\max}}$).....	84
Çizelge 5.17. Abaqus uniform sıkıştırma için maksimum yer değiştirme ($u_{1_{\max}}$) ve maksimum normal gerilme ($\sigma_{11_{\max}}$).....	88
Çizelge 5.18. Uyarlamalı çözüm ile Abaqus çözümü maksimum yer değiştirme ($u_{1_{\max}}$) ve maksimum kesme gerilmesi ($\sigma_{11_{\max}}$) karşılaştırması.....	91
Çizelge 5.19. Uniform çözüm ile Abaqus çözümü maksimum yer değiştirme ($u_{1_{\max}}$) ve maksimum normal gerilme ($\sigma_{11_{\max}}$) karşılaştırması	91

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 1.1. Dört yüzlü elemanların dört adet altı yüzlü eleman oluşturacak şekilde bölünmesi.....	2
Şekil 1.2. Üç boyutlu hacim için başlangıç çözümü.....	3
Şekil 1.3. İç bölgelerin altı yüzlü elemanlara bölünmesi.....	3
Şekil 1.4. Karışık eleman ağları.....	4
Şekil 1.5. Izgara tabanlı çözüm ağı oluşturulmasının arka planı.....	4
Şekil 1.6. Sweeping yöntemi kullanılarak oluşturulan bazı örnekler.....	5
Şekil 1.7. H-Morph algoritmanın basit blok model üzerinde adımları.....	5
Şekil 1.8. Altı yüzlü elemanlarda (a) Kaba ağ ve (b) alt bölgelere bölünmüş ağ.....	6
Şekil 1.9. Geçiş elemanları ile altı yüzlü eleman ağı.....	6
Şekil 1.10. Geçiş elemanları ile oluşturulan farklı bölgelerin uyarlamalı dağılımları.....	7
Şekil 1.11. Eleman eleman bölme adımları.....	8
Şekil 1.12. Yüzeyin ağının sıklaştırılması.....	9
Şekil 1.13. Bölgesel sıklaştırma adımları.....	9
Şekil 1.14. Eleman ağı sıklaştırması örneği.....	10
Şekil 1.15. Uyarlanabilir altı yüzlü çözüm ağları.....	10
Şekil 1.16 Kenarlarından preslenen alüminyum çubuğun yeniden ağ dağılımı.....	11
Şekil 1.17. Düğüm noktası, eleman, eleman-kenar ve eleman yüzey bölme.....	12
Şekil 1.18. Çözüm ağlarının değişimi	12
Şekil 1.19. Uniform ve uyarlamalı ağ sıklaştırma	13
Şekil 1.20 Etkin gerilmeleri kullanan ızgara tabanlı uyarlamalı yaklaşım.....	13
Şekil 1.21. Uyarlamalı çözüme dayanan sonlu eleman çözümü.....	14

Şekil	Sayfa
Şekil 1.22. Kesme örneği.....	15
Şekil 1.23. Çözümü yapılan örnek için kum saati kararsızlığı.....	16
Şekil 1.24. Silindirik bar örneği.....	16
Şekil 1.25. Kauçuk conta örneği.....	17
Şekil 1.26. Altı yüzlü ve dört yüzlü eleman ağları.....	18
Şekil 1.27. Neredeyse sıkıştırılamaz blok için basınç örneği ve farklı çözüm ağları.....	18
Şekil 1.28. Kavisli giriş örneğinin deformasyon renk grafikleri.....	19
Şekil 1.29. Kesme ve çekme etkisi altında plastik silindir için yapılan uyarlamalı sonlu eleman analizi sonuçları.....	20
Şekil 1.30. Üst yüzünden yer değiştirme etki ettirilen dikdörtgen geometrinin farklı iterasyonlarda uyarlamalı ağ dağılımları ve yer değiştirmeler.....	21
Şekil 1.31. Elastik girişin farklı yüklemeler altındaki davranışı.....	21
Şekil 2.1. Sürekli ortamın referans konumu (Ω_0) ve uzay konumu (Ω).....	23
Şekil 3.1. Sekiz düğüm noktalı izoparametrik katı eleman. (a) Sonlu eleman, (b) Referasn eleman.....	29
Şekil 3.2. Newton-Raphson iteration şeması.....	33
Şekil 3.3. Modifiye Newton-Raphson iteration şeması.....	34
Şekil 4.1. Farklı uyarlamalı sonlu eleman ağları.....	41
Şekil 4.2. Sıklaştırmada kullanılan eleman türleri.....	43
Şekil 4.3. Farklı sıklaştırma stratejileri a) Bir noktada, b) bir kenarda, c) ve d) bir elemanda.....	43
Şekil 4.4. Kenar üzerinde noktada sıklaştırma, a) Başlangıç eleman ağı, b) Birinci sıklaştırma, c) İkinci sıklaştırma.....	44
Şekil 4.5. Bir yüzey üzerindeki noktada sıklaştırma, a) Başlangıç eleman ağı, b) Birinci sıklaştırma, c) İkinci sıklaştırma.....	44
Şekil 4.6. Bir eleman kenarında sıklaştırma, a) Başlangıç eleman ağı, b) Birinci sıklaştırma, c) İkinci sıklaştırma.....	45

Şekil	Sayfa
Şekil 4.7. Bir elemanda sıklaştırma, a) Başlangıç eleman ağı, b) Birinci sıklaştırma, c) İkinci sıklaştırma.....	45
Şekil 4.8. Bölme sonrası oluşan bazı elemanlar a) 4-eleman, b) 5-eleman, c) 11-eleman, d) 13-eleman, e) 22-eleman.....	45
Şekil 5.1. Sonlu elemanlar çözümü için program akış şeması.....	48
Şekil 5.2. Uyarlamalı sonlu elemanlar analizi için program akış şeması.....	49
Şekil 5.3. Kullanılan malzemenin gerilme-birim şekil değiştirme grafiği.....	51
Şekil 5.4. Blok üzerine etki eden tekil basınç yüklemesi.....	52
Şekil 5.5. Sonlu eleman çözüm ağı, a) başlangıç b) birinci uyarlamalı c) ikinci uyarlamalı.....	53
Şekil 5.6. Beş kat artırılarak gösterilen şekil değiştirmiş geometri, a) başlangıç çözüm ağı b) birinci uyarlamalı çözüm c) ikinci uyarlamalı çözüm.....	54
Şekil 5.7. u_2 (mm) yer değiştirme renk grafikleri, a) başlangıç çözüm ağı b) birinci uyarlamalı çözüm, c) ikinci uyarlamalı çözüm.....	55
Şekil 5.8. σ_{22} (MPa) normal gerilme renk grafikleri, a) başlangıç çözüm ağı b) birinci uyarlamalı çözüm c) ikinci uyarlamalı çözüm.....	55
Şekil 5.9. Beş kat büyütülerek gösterilen şekil değiştirmiş geometri, a) 1. uniform sıklaştırma b) 2. uniform sıklaştırma c) 3. uniform sıklaştırma.....	56
Şekil 5.10. u_2 (mm) yer değiştirme renk grafikleri, a) 1. uniform sıklaştırma b) 2. uniform sıklaştırma c) 3. uniform sıklaştırma.....	57
Şekil 5.11. σ_{22} (MPa) normal gerilme renk grafikleri, a) 1. uniform sıklaştırma b) 2. uniform sıklaştırma c) 3. uniform sıklaştırma.....	57
Şekil 5.12. Abaqus sonlu eleman çözüm ağı a) başlangıç, b) birinci lokal sıklaştırma, c) ikinci lokal sıklaştırma.....	58
Şekil 5.13. Beş kat artırılarak gösterilen Abaqus şekil değiştirmiş geometri, a) başlangıç çözüm ağı b) birinci lokal sıklaştırma c) ikinci lokal sıklaştırma.....	59
Şekil 5.14. u_2 (mm) Abaqus yer değiştirme renk grafikleri, a) başlangıç çözüm ağı b) birinci lokal sıklaştırma c) ikinci lokal sıklaştırma.....	59
Şekil 5.15. σ_{22} (MPa) normal gerilme Abaqus renk grafikleri, a) başlangıç çözüm ağı b) birinci lokal sıklaştırma c) ikinci lokal sıklaştırma.....	60

Şekil	Sayfa
Şekil 5.16. Beş kat büyütülerek gösterilen Abaqus şekil değiştirmiş geometri, a) 1. uniform sıklaştırma b) 2. uniform sıklaştırma c) 3. uniform sıklaştırma.....	61
Şekil 5.17. u_2 (mm) Abaqus yer değiştirme renk grafikleri, a) 1. uniform sıklaştırma b) 2. uniform sıklaştırma c) 3. uniform sıklaştırma.....	61
Şekil 5.18. σ_{22} (MPa) normal gerilme Abaqus renk grafikleri, a) 1. uniform sıklaştırma b) 2. uniform sıklaştırma c) 3. uniform sıklaştırma.....	62
Şekil 5.19. Maksimum yer değiştirmenin $u_{2_{\max}}$ eleman sayısına göre değişimi.....	64
Şekil 5.20. Maksimum normal gerilmelerin $\sigma_{22_{\max}}$ eleman sayısına göre değişimi.....	64
Şekil 5.21. Dikdörtgen blokta yüzey kesme yüklemesi.....	65
Şekil 5.22. Sonlu eleman çözüm ağı a) başlangıç b) birinci uyarlamalı c) ikinci uyarlamalı.....	66
Şekil 5.23. Beş kat artırılarak gösterilen şekil değiştirmiş geometri, a) başlangıç çözüm ağı b) birinci uyarlamalı çözüm c) ikinci uyarlamalı çözüm.....	66
Şekil 5.24. u_1 yer değiştirme renk grafikleri, a) başlangıç çözüm ağı b) birinci uyarlamalı çözüm c) ikinci uyarlamalı çözüm.....	67
Şekil 5.25. σ_{12} kesme gerilmesi renk grafikleri a) başlangıç çözüm ağı b) birinci uyarlamalı çözüm c) ikinci uyarlamalı çözüm.....	67
Şekil 5.26. Beş kat artırılarak gösterilen şekil değiştirmiş geometri, a) 1. uniform sıklaştırma b) 2. uniform sıklaştırma c) 3. uniform sıklaştırma d) 4. uniform sıklaştırma.....	68
Şekil 5.27. u_1 (mm) yer değiştirme renk grafikleri, a) 1. uniform sıklaştırma b) 2. uniform sıklaştırma c) 3. uniform sıklaştırma d) 4. uniform sıklaştırma.....	69
Şekil 5.28. σ_{12} (MPa) kesme gerilmesi renk grafikleri, a) 1. uniform sıklaştırma b) 2. uniform sıklaştırma c) 3. uniform sıklaştırma d) 4. uniform sıklaştırma.....	69
Şekil 5.29. Abaqus sonlu eleman çözüm ağı a) başlangıç b) birinci lokal sıklaştırma c) ikinci lokal sıklaştırma.....	70
Şekil 5.30. Beş kat artırılarak gösterilen Abaqus şekil değiştirmiş geometri, a) başlangıç çözüm ağı b) birinci lokal sıklaştırma c) ikinci lokal sıklaştırma.....	70

Şekil	Sayfa
Şekil 5.31. u_1 (mm) Abaqus yer değiştirme renk grafikleri, a) başlangıç çözüm ağı b) birinci lokal sıklaştırma c) ikinci lokal sıklaştırma.....	71
Şekil 5.32. σ_{12} (MPa) kesme gerilmesi Abaqus renk grafikleri, a) başlangıç çözüm ağı b) birinci lokal sıklaştırma, c) ikinci lokal sıklaştırma.....	72
Şekil 5.33. Beş kat büyütülerek gösterilen Abaqus şekil değiştirmiş geometri, a) 1. uniform sıklaştırma b) 2. uniform sıklaştırma c) 3. uniform sıklaştırma d) 4. uniform sıklaştırma.....	73
Şekil 5.34. u_1 (mm) Abaqus yer değiştirme renk grafikleri, a) 1. uniform sıklaştırma b) 2. uniform sıklaştırma c) 3. uniform sıklaştırma d) 4. uniform sıklaştırma.....	73
Şekil 5.35. σ_{12} (MPa) kesme gerilmesi Abaqus renk grafikleri, a) 1. uniform sıklaştırma b) 2. uniform sıklaştırma c) 3. uniform sıklaştırma d) 4. uniform sıklaştırma.....	74
Şekil 5.36. Maksimum yer değiştirmenin $u_{1_{\max}}$ eleman sayısına göre değişimi.....	75
Şekil 5.37. Maksimum kesme gerilmelerin $\sigma_{12_{\max}}$ eleman sayısına göre değişimi	76
Şekil 5.38. Problem geometrisi, sınır şartları ve uygulanan kuvvet.....	76
Şekil 5.39. Sonlu eleman çözüm ağı, a) başlangıç b) birinci uyarlamalı c) ikinci uyarlamalı.....	77
Şekil 5.40. Beş kat artırılarak gösterilen şekil değiştirmiş geometri, a) başlangıç çözüm ağı b) birinci uyarlamalı çözüm c) ikinci uyarlamalı çözüm.....	78
Şekil 5.41. u_1 (mm) yer değiştirme renk grafikleri, a) başlangıç çözüm ağı b) birinci uyarlamalı çözüm c) ikinci uyarlamalı çözüm.....	79
Şekil 5.42. σ_{11} (MPa) normal gerilme renk grafikleri, a) başlangıç çözüm ağı b) birinci uyarlamalı çözüm, c) ikinci uyarlamalı çözüm.....	80
Şekil 5.43. Beş kat büyütülerek gösterilen şekil değiştirmiş geometri, a) 1. uniform sıklaştırma b) 2. uniform sıklaştırma c) 3. uniform sıklaştırma d) 4. uniform sıklaştırma.....	81
Şekil 5.44. u_1 (mm) yer değiştirme renk grafikleri, a) 1. uniform sıklaştırma, b) 2. uniform sıklaştırma, c) 3. uniform sıklaştırma, d) 4. uniform sıklaştırma	82
Şekil 5.45. σ_{11} (MPa) normal gerilme renk grafikleri, a) 1. uniform sıklaştırma b) 2. uniform sıklaştırma c) 3. uniform sıklaştırma c) 4. uniform sıklaştırma.....	84

Şekil	Sayfa
Şekil 5.46. Abaqus sonlu eleman çözüm ağı, a) başlangıç b) birinci lokal sıklaştırma c) ikinci lokal sıklaştırma.....	84
Şekil 5.47. Beş kat artırılarak gösterilen Abaqus şekil değiştirmiş geometri, a) başlangıç çözüm ağı b) birinci lokal sıklaştırma, c) ikinci lokal sıklaştırma.....	85
Şekil 5.48. u_1 (mm) Abaqus yer değiştirme renk grafikleri, a) başlangıç çözüm ağı b) birinci lokal sıklaştırma c) ikinci lokal sıklaştırma	86
Şekil 5.49. σ_{11} (MPa) normal gerilme Abaqus renk grafikleri, a) başlangıç çözüm ağı b) birinci lokal sıklaştırma c) ikinci lokal sıklaştırma.....	87
Şekil 5.50. Beş kat büyütülerek gösterilen Abaqus şekil değiştirmiş geometri, a) 1. uniform sıklaştırma b) 2. uniform sıklaştırma c) 3. uniform sıklaştırma d) 4. uniform sıklaştırma.....	88
Şekil 5.51. u_2 (mm) Abaqus yer değiştirme renk grafikleri, a) 1. uniform sıklaştırma b) 2. uniform sıklaştırma c) 3. uniform sıklaştırma d) 4. uniform sıklaştırma.....	89
Şekil 5.52. σ_{11} (MPa) normal gerilme Abaqus renk grafikleri, a) 1. uniform sıklaştırma b) 2. uniform sıklaştırma c) 3. uniform sıklaştırma d) 4. uniform sıklaştırma.....	90
Şekil 5.53. Maksimum yer değiştirmenin $u_{1_{\max}}$ eleman sayısına göre değişimi.....	92
Şekil 5.54. Maksimum normal gerilmelerin $\sigma_{11_{\max}}$ eleman sayısına göre değişimi.....	92

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
Ω_0	Referans konum
Ω	Uzay konum
F	Deformasyon gradyan tansörü
dX	Referans konumundaki vektör
dx	Uzay konumundaki vektör
C	Sağ Cauchy-Green deformasyon tansörü
I_1, I_2 ve I_3	Sağ Cauchy-Green deformasyon tansörünün asal değişmezleri
λ_1^2, λ_2^2 ve λ_3^2	Sağ Cauchy-Green deformasyon tansörünün öz değerleri
C_{mnk}	Malzeme katsayıları
J_1, J_2 ve J_3	İndirgenmiş değişmezler
W	Şekil değiştirme enerji yoğunluğu
μ_i	Malzeme sabiti
α_i	Malzeme sabiti
K	Hacim modülü
S	İkinci Piola – Kirchhoff gerilmesi
E	Lagrange birim şekil değiştirme tansörü
D_{ijkl}	Bünye tansörü
W_1	Çarpılma enerjisi fonksiyonu
W_2	Hacimsel değişimden kaynaklanan enerji fonksiyonu
K_s	Çarpılma matrisi
K_p	Hacimsel değişim matrisi
u	Yer değiştirme vektörü
$\bar{u}$	Sanal yer değiştirme

Simgeler**Açıklamalar** $\mathbf{f}^{ext}$

Dış yük vektörü

 $\mathbf{K}$

Rijitlik matrisi

 $\mathbf{f}^{int}$

İç kuvvetler

 $\mathbf{F}$

Gerilmeden kaynaklı yük vektörü

 $\mathbf{N}_I$

Şekil fonksiyonu

 $\mathbf{B}_N$

Doğrusal olmayan analiz için dönüşüm matrisi

 $\bar{\mathbf{u}}$

Düğüm noktası deplasmanları

 $\Delta \mathbf{u}$

Deplasman artımı

 σ

Cauchy gerilmesi

 ϵ_R

Convergence kriteri

 ν

Poisson oranı

 G

Kesme modülü

1. GİRİŞ

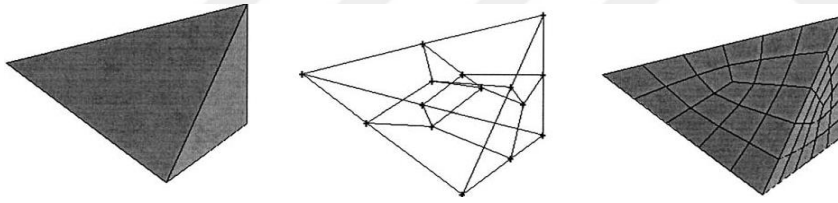
Hiperelastisite, bünye denkleminin bir elastik şekil değiştirme enerjisi potansiyelinden türetildiği, doğrusal olmayan ve büyük şekil değişimi yapabilen malzemeler için kullanılmaktadır. Bu tür malzemelerle çeşitli sektörlerde olduğu gibi inşaat mühendisliği alanında da sıklıkla karşılaşılır. En önemli kullanım alanlarından biri, sismik kuvvetlerin azaltılması için yapı temelinde kullanılan elastomerik mesnetlerdir. Hiperelastik malzemelerin büyük şekil değişimini içeren bu ortamlar çoğu durumda sonlu elemanlar yöntemi gibi sayısal çözüm teknikleri ile ele alınmaktadır.

Sonlu elemanlar yöntemi ile yapılacak çözümlerde problem geometrisinin ne şekilde sonlu elemanlara bölündüğü çözümü etkileyen önemli bir faktördür. Sonuçlar genellikle sonlu eleman boyutu küçülüp sonlu eleman ağı yoğunlaştıkça daha doğru hale gelir. Eleman ağı sıklaştırması olarak ifade edilecek bu işlemde, eleman sayısının artmasıyla çözüm süresi de artar. Bu nedenle sadece gerekli yerlerde eleman ağı sıklaştırmasıyla daha etkin bir çözüm elde edilebilir. Bu noktada analiz yapan kişinin belirlediği bölgelerde bu sıklaştırmayı yapması veya önceden tanımlanan belirli bir kritere göre çözüm ağının otomatik olarak sıklaştırılması seçenekleri karşımıza çıkmaktadır. İkincisi uyarlamalı çözüm ağı oluşturma olarak isimlendirilebilir. Sonlu elemanlar analizinden elde edilecek sonuçları kullanan bir kriter ile yöntem uyarlamalı sonlu elemanlar analizine dönüşür.

Bu tez çalışmasında, hiperelastik sürekli ortamların büyük şekil değişimlerini ve gerilmelerini, otomatik olarak daha küçük elemanlara bölünmesi ile elde edilen uyarlamalı hexahedral elemanlar kullanarak hesaplayan MATLAB ortamında program yazılması amaçlanmıştır. Bu doğrultuda doğrusal olmayan uyarlamalı sonlu elemanlar çözümü yapan, Mooney-Rivlin malzeme modeli ile toplam Lagrangian formülasyonu kullanan MATLAB ortamında program yazılmıştır. Yazılan programda analizi yapılan örnekler Abaqus yazılımı ile karşılaştırılmıştır. Çalışmada hexahedral elemanlar kullanarak seçilen hata kriterine göre uygun geçiş elemanları ile uyarlamalı eleman ağı oluşturmaya, hiperelastik malzemeler için doğrusal olmayan sonlu elemanlar analizine ve MATLAB programına ilişkin akış şemasına yer verilmektedir.

Literatür çalışması

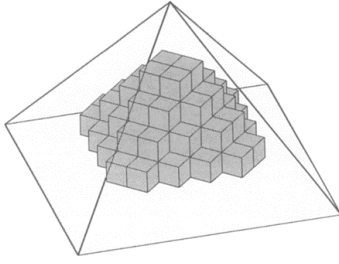
Sonlu elemanlar çözümünün doğruluğu, eleman ağının iyi bir şekilde oluşturulmasına bağlıdır. İki boyutlu geometride eleman ağları üçgen ve dörtgen elemanlar kullanılarak oluşturulurken, üç boyutlu geometride dört yüzlü (tetrahedron) ve altı yüzlü (hexahedron) elemanlar kullanılarak oluşturulur. Altı yüzlü elemanlar ile geometrinin ideal bir şekilde bölünebilmesi için algoritmada kullanılabilecek dört farklı yaklaşım vardır [1]. Bunlar “primitives”, “overlay grid”, “automated decomposition” ve “advancing front” tipi yaklaşımlardır. “Primitives” yönteminde, Şekil 1.1’de görüldüğü gibi dört yüzlü elemanlara bölünen geometrinin her bir dört yüzlü elemandan dört adet altı yüzlü eleman oluşturulur. “Overlay grid” yöntemi, ağ oluşturulacak hacmi kapsayan bir ızgaranın kullanımına dayanır. “Automated decomposition” yöntemi, ağ oluşturulacak hacmin mevcut algoritmalar ile bilinen geometrilere bölünmesine dayanır. “Advancing front” yöntemi ise geometrinin dış sınırından içeriye doğru oluşturulan katmanların arasında kalan elemanların ağ olarak kullanılması prensibine dayanır.



Şekil 1.1. Dört yüzlü elemanların dört adet altı yüzlü eleman oluşturacak şekilde bölünmesi [1]

Sonlu eleman ağları düzenli ve düzensiz olarak iki grupta toplanabilir. Schneiders düzenli sonlu eleman ağını oluşturabilmek için çalışmasını altıyüzlü eleman kullanarak ızgara tabanlı algoritma üzerine yapmıştır [2]. Bu algoritma iki boyutta geometriyi karşılıklı kenarlar üzerinde eşit sayıda nokta ile oluşturulan bir ızgara kullanarak sonlu elemanlara bölmektedir. Üç boyutta ise Şekil 1.2’de gösterildiği üzere hacim benzer şekilde birim elemanlar ile doldurulur. Sınır bölgeleri ile arasında bir dizi iyileştirme yapılarak farklı geometrilerde altı yüzlü elemanlar ile tamamlanır.

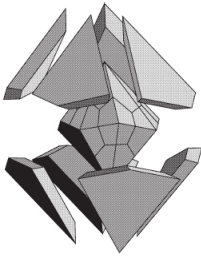
Algoritma ile elde edilen iç kısımdaki ve geometri sınırındaki elemanların sonlu eleman hesaplamaları için yeterli kalitede olduğu belirtilmiştir. Ancak bu algoritma için ağ yoğunluğu kontrolü yapılamaması algoritmanın eksikliği olarak belirtilmiştir.



Şekil 1.2. Üç boyutlu hacim için başlangıç çözümü [2]

Eğrisel yüzeylere sahip karmaşık geometrilerde oluşturulan düzensiz sonlu eleman ağlarını dört yüzlü ve altı yüzlü elemanlara bölmek için doğrudan ve dolaylı yöntemler kullanılabilir. Eppstein çalışmasında en az iki adet ve çift sayıda dört yüzlü eleman kullanarak eleman ağı oluşturmuştur [3]. Oluşturulan eleman ağına dört yüzlü elemanlar Şekil 1.3’de gösterildiği gibi çok sayıda altı yüzlü elemanlara bölünerek dolaylı bir yöntem ile elde edilebilmektedir.

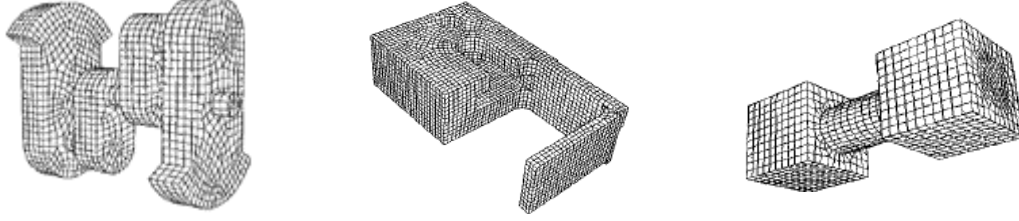
Topolojik geometrilerin altı yüzlü elemanlar ile basit şekilde modellenmesi bu yöntemin avantajlarından biridir. Ancak ortaya çıkan ağın karmaşıklığından dolayı, yani oluşturulan altıyüzlü hücrelerin sayısı konusunda bir garanti sağlamamaktadır. Bu durum ise herhangi bir sayısal yöntemin ağ kullanarak harcadığı süreyi doğrudan etkileyeceği için önemlidir.



Şekil 1.3. İç bölgelerin altı yüzlü elemanlara bölünmesi [3]

Baudouin vd. [4] dört yüzlü elemanları birleştirilerek altı yüzlü eleman ağı oluşturmuştur. Ancak dörtyüzlü elemanlar birleştirilirken yeniden birleştirme oranı çok nadiren yüzde yüz olarak elde edilmektedir. Bu nedenle çalışmada dörtyüzlü elemanlar ile altı yüzlü elemanlar birlikte kullanılarak Şekil 1.4’de gösterildiği gibi karışık çözüm ağlarına ulaşılmaktadır. Bu yöntemin dezavantajları eğri yüzeyli geometrilerde sınırı iyi

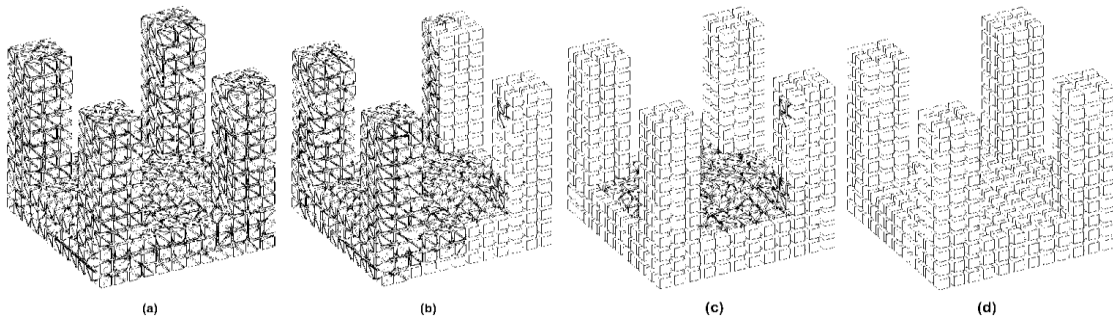
Oluşturulan bu yeni algoritma tek eksenli taramaya izin veren, birden fazla kaynak ve hedef yüzeyden oluşan Şekil 1.6'da bazı örnekleri görülen karmaşık katı modellere uygulanabilir.



Şekil 1.6. Sweeping yöntemi kullanılarak oluşturulan bazı örnekler [6]

Owen vd. [7] H-Morph adını verdiği algoritma ile rastgele hacimler için altı yüzlü baskın sonlu eleman ağının oluşturulmasını sağlamıştır. Algoritma yüzeyleri önce dörtgenlere, dörtgenleri üçgenlere bölmektedir. Üçgenler üç boyutta dörtyüzlü elemanlara dönüştürüldükten sonra bileştirilerek altı yüzlü eleman ağları elde edilir. Şekil 1.7'de H-Morph algoritmasının basit bir blok model üzerinde adımları görülmektedir.

Önerilen bu yöntem genel amaçlıdır. Özel geometri sınıflarını ayırmaya veya tanımaya gerek kalmadan ağ oluşturulmasına imkan sağlamaktadır. Ağın hızlı bir şekilde oluşturulabilmesi diğer algoritmalara karşı avantaj sağlamaktadır.

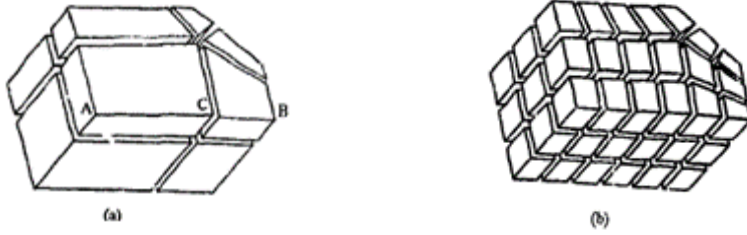


Şekil 1.7. H-Morph algoritmanın basit blok model üzerinde adımları [7]

Armstrong vd. [8] kaba olarak altı yüzlü elemanlara bölünen bölgeleri alt bölgelere bölmüştür. Alt bölgelere bölme işlemini seçilen bir nokta ile arasında kalan bölgeyi bölerek elde etmiştir. Bu yönetime orta nokta alt bölümü adını vermiştir. Elde edilen alt

bölgelerde de bölme işlemi yaparak geometri ağlara bölünebilmektedir. Bu teknik bağımsız bir yarı otomatik ağ oluşturma aracı olarak kullanılabilir.

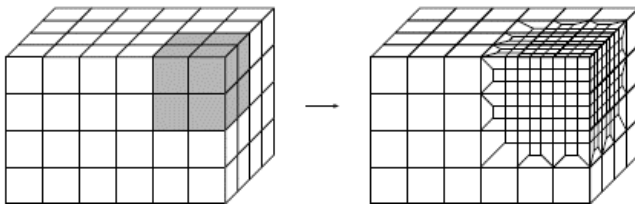
Altı yüzlü elemanların daha fazla alt altı yüzlü elemanlara hızlı bir şekilde bölünebilmesi kullanıcıya çözümlerde kolaylık sağlamaktadır.



Şekil 1.8. Altı yüzlü elemanlarda, (a) Kaba ağ ve (b) alt bölgelere bölünmüş ağ [8]

Schneiders oluşturulan kaba ağları büyük hata göstergelerinden dolayı alt bölgelere bölmek için algoritma geliştirmiştir [9]. Geliştirilen algoritma iki boyutta üçgen ve dörtgen elemanları, üç boyutta ise dört yüzlü ve altı yüzlü elemanları kapsamaktadır. Dörtgen veya altı yüzlü elemana sahip eğri yüzlü geometriler veya benzer durumdaki elemanları her zaman istenilen şartlarda alt elemanlara bölünemezler. Bu nedenle altı yüzlü elemanları alt elemanlara bölmek için Şekil 1.9’da yer alan geçiş elemanları çalışmada kullanılmıştır.

Geliştirilen algoritma ile karmaşık geometriler iki boyutta dörtgen, üç boyutta altı yüzlü alt elemanlara kolaylıkla bölünebilmektedir. Ayrıca geçiş elemanları kullanılarak alt bölgelere bölme işlemi uyarlama ağ oluşturulmasında da kullanılmaktadır.



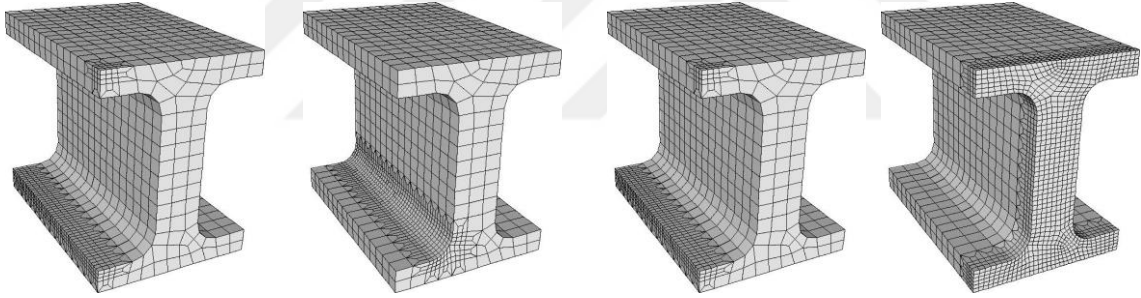
Şekil 1.9. Geçiş elemanları ile altı yüzlü eleman ağ [9]

Altıyüzlü elemanlar kullanılarak oluşturulan çözüm ağlarında, bölgesel sıklaştırmanın oluşturulabilmesi genellikle sonlu elemanın daha küçük elemanlara bölünmesi ile oluşturulur. Ancak oluşturulan elemandaki her bir düğüm noktasının sürekliliği

sağlanmalıdır. Bu nedenle elemanlar sürekliliği sağlayacak şekilde oluşturulmalıdır. Altıyüzlü eleman ağının sıklaştırılmasında sürekliliği sağlayan elemanlar geçiş elemanı olarak tanımlanır.

Harris vd. [10], çok yönlü düzlemlerde geçiş elemanları kullanarak yapılacak bölgesel sıklaştırma tipleri üzerine çalışmıştır. “Single sheet refinement” olarak adlandırılan yöntemde kullanılan geçiş elemanı ile Şekil 1.10’da görüldüğü gibi bölgesel sıklaştırma yapılması planlanan eleman 27 adet altı yüzlü elemana bölünmektedir. “Parallel sheet refinement” olarak adlandırılan yöntemde yüzeyi ikiye bölerek eleman sayısı artırılmaktadır. Bunların birleştirilmesiyle oluşturulan “hybrid method” olarak adlandırılan yöntem ile ağdaki tüm elemanların daha küçük elemanlara bölünmesi mümkündür.

Bu çalışma ile düğüm noktaları, eleman kenarları, eleman yüzleri veya elemanların tamamı altı yüzlü elemanlardan oluşturulan bir alt ağ içerisinde tanımlanabilmektedir.

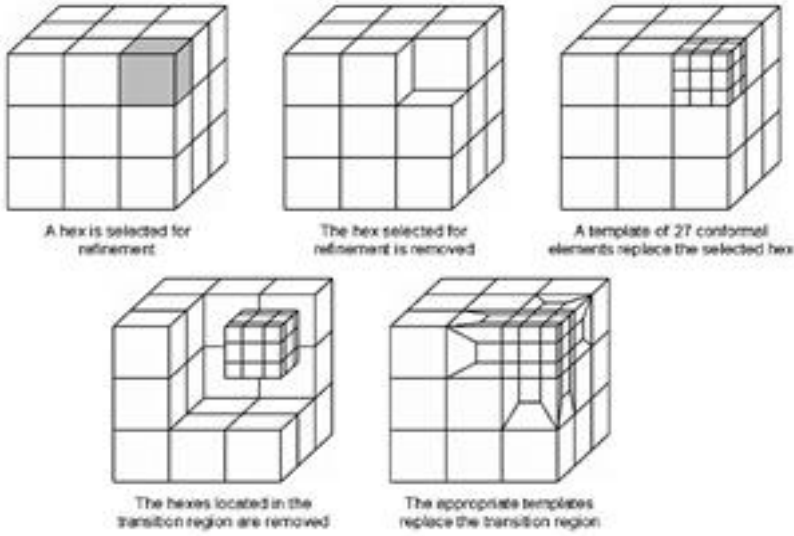


Şekil 1.10. Geçiş elemanları ile oluşturulan farklı bölgelerin uyarlamalı dağılımları [10]

Parrish vd. [11], “sheet refinement” tekniklerinin uygulanma zorluklarından dolayı seçici bir yaklaşım yöntemi önermektedir. Bu yaklaşım iki farklı metodolojiyi birleştiren bir prosedürdür. Eleman eleman bölme ve yönlü bölme yöntemleri bu yeni yaklaşımı oluşturur. Eleman eleman bölme yönteminde bölünmesine karar verilen her bir altıyüzlü eleman Şekil 1.11’de gösterildiği gibi üç doğrultuda alt elemanlara bölünür. Yönlü bölme yöntemi sheet refinement yöntemi gibi çalışır ancak altı yüzlü elemanlar eleman eleman işlenir.

Yönlü bölme yönteminde içbükey bölgeler daha rahat alt elemanlara ayrılır. Burada sunulan algoritma sayesinde hedef bölge her ekseninde sorunsuz bir şekilde uyarlamalı olarak bölünebilmektedir.

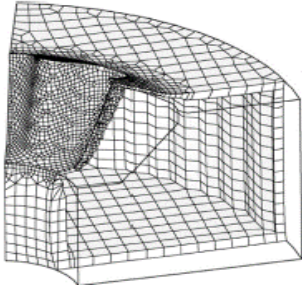
Element by Element Refinement



Şekil 1.11. Eleman eleman bölme adımları [11]

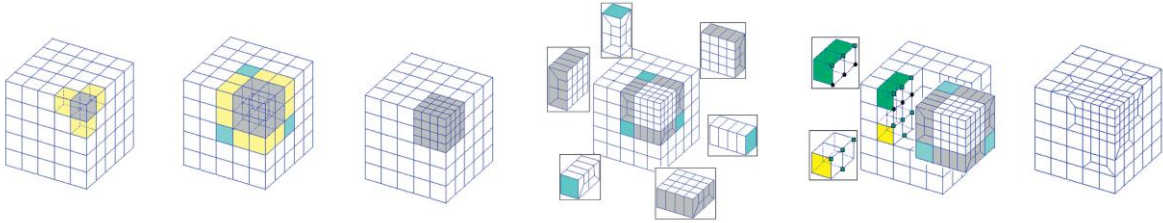
Huang vd. [12], altı yüzlü elemanlarla yapılacak uyarlamalı ağ dağılımları oluşturulması ve iyileştirilmesi üzerine ızgara tabanlı bir algoritma oluşturmuştur. Algoritma ağ yoğunluğunu, yüzey eğriliklerini ve geometriyi dikkate almaktadır. Oluşturulan algoritmanın özellikle kavisli yüzeylerde sınır elemanları ve uyarlamalı çözüm ağlarının sınır elemanlarında iyi bir dağılım oluşturduğu belirtilmiştir. Geometriyi iyi temsil edebilmesi için altı yüzlü elemanların yüzeyiyle eşleşen ağ için sekiz farklı tipte serbest eleman konfigürasyonu verilmiştir. Jacobian matrisi yardımı ile altı yüzlü eleman ağı kalitesi ölçülebilmektedir. Sınır elemanlarının kalitesini artırmak ve ağın sınır karakterlerini korumak için eğrilik tabanlı Laplace yaklaşımı kullanılmıştır.

Çalışmada yer alan algoritma eleman iyileştirme için analiz edilecek modelin tüm geometrik karakterlerini yakalayabilir. Altı yüzlü eleman ağları geometri yüzeyini Şekil 1.12'deki gibi alt elemanlara bölünebilmektedir. Algoritma ile ızgara tabanlı yöntem için sınır duyarlılığı eksikliğinin üstesinden kolaylıkla gelebilmektedir.



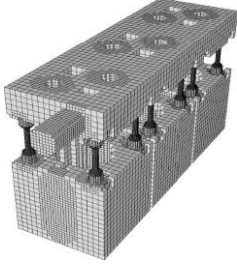
Şekil 1.12. Yüzeyin ağının sıklaştırılması [12]

Zhao vd. [13] ızgara tabanlı geometrik olarak uyarlanabilir altı yüzlü ağ oluşturma algoritması üzerine çalışmıştır. Algoritma bölgesel olarak seçilen altıyüzlü elemanı geçiş elemanı kullanılarak Şekil 1.13’de gösterildiği gibi 27 eleman veya 8 elemana etkin bir şekilde bölebilmektedir. Ayrıca çalışmada problem geometrisinin özelliklerine bağlı olarak eleman üzerindeki nokta, kenar, yüzey veya elemanın kendisi üzerinden sıklaştırmanın nasıl yapılacağı konusunda da bilgi verilmektedir. Mevcut veya sıklaştırılmış ağın farklı bölgeleri için kaba ağlara geçişlerde de geçiş elemanları kullanılabilir.



Şekil 1.13. Bölgesel sıklaştırma adımları [13]

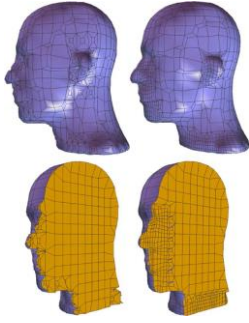
Tchon vd. [14], çalışmasını sayısal analiz için uzaysal ayrıklaştırmayı kontrol etmek üzere üçgen elemanlara bölünmüş CAD modelinden oluşturulmuş üç boyutlu anizotropik geometrinin altı yüzlü elemanlara bölünmesi üzerine yapmıştır. Bu dağılım eğrilik kriterini ve mevcut geometrinin bölgesel kalınlığını kullanarak elde edilmektedir. Oluşturulan model kullanıcının manuel olarak önerdiği bölgelerde uyarlamalı ağ oluşturulabilmesine olanak sağlamaktadır (Şekil1.14). Bölme işlemi için octree yöntemi kullanılmıştır. Bu çalışma ile enterpolasyonların hızlandığı belirtilmiştir.



Şekil 1.14. Eleman ağı sıklaştırması örneği [14]

Zhang vd. [15], uyarlanabilir dörtgen ve altı yüzlü ağları doğrudan hacimsel verilerden oluşturmak için bir algoritma hazırlamıştır. Topolojik yüzey alttan yukarı doğru octree yöntemi ile bölünür. Sonra önceden tanımlanan şablonlar ile dörtgen veya altı yüzlü elemanlar oluşturulur. Daha sonra sınır tepe noktalarının konumları yeniden hesaplanır.

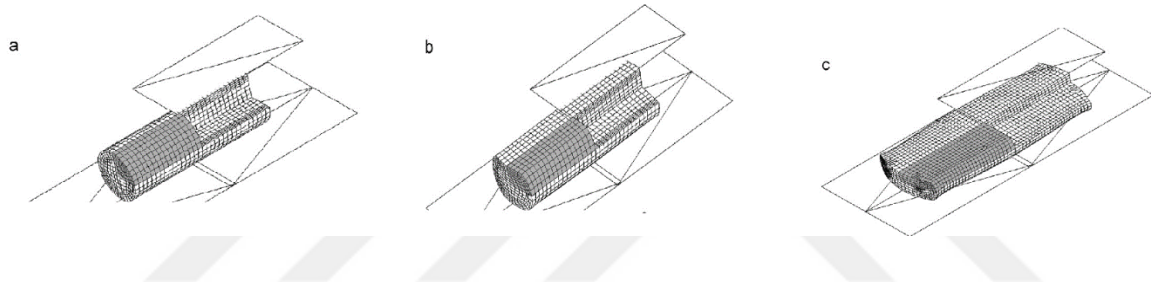
Şekil 1.15’de doğrudan veya dolaylı yöntemler ile oluşturulan uyarlanabilir ağ dağılımları görülmektedir. Uyarlanabilir ağın kalitesi algoritma tarafından seçilen kriterlere veya kullanıcının kendi uygulayacağı fonksiyona bağlı olarak elde edilebilmektedir. Ortaya çıkan ağlar, verimli ve doğru sonlu eleman hesaplamaları için yaygın olarak kullanılır.



Şekil 1.15. Uyarlanabilir altı yüzlü çözüm ağları [15]

Dört yüzlü elemanlar kullanılarak yapılan çözümlerde kesin çözüme daha yakın sonuçlar elde edebilmek için eleman sayısının artırılması gerektiğine değinen Martins vd. [16], çalışmalarında dört yüzlü elemene nazaran daha az altıyüzlü eleman kullanarak altı yüzlü bir çözüm algoritmasıyla yüzey ve kenarların yeniden bölünmesi ile hızlı bir çözüm sağlayan algoritma geliştirmiştir

Martins vd. [16], çalışmasını altı yüzlü elemanlar kullanarak deforme olmuş ağı otomatik olarak yeniden oluşturan bir algoritma üzerine yapmıştır. Algoritma eski ağın temel geometrik özelliklerinin çıkartılması, yeni ağın çekirdeğinin oluşturulması, yeni ağın kenar, yüzey ve hacimlerinin düzgünleştirilmesi gibi konuları esas almaktadır. Otomatik yeniden ağ oluşturmada deforme olmuş ağın temel geometrik özelliklerini ortaya koyarak eski ağ ile uyumu kontrol edilmektedir. Dış yüzeyleri tahmin eden algoritma bu yüzeyleri Şekil 1.16' da gösterildiği gibi öncelikle üçgen bölgelere böler. Yeni oluşturulacak çekirdeğin sınırları üçgen bölgeler yardımıyla elde edilir. Elde edilen sınırlar bir izomorfizm tekniği ile katmanlara bağlanarak yeni ağ elde edilir. Çekirdek ağı oluşturularak köşeleri ortadan kaldıran yenileme prosedürünün olması ızgara tabanlı bu algoritmanın avantajı olarak değerlendirilmektedir.

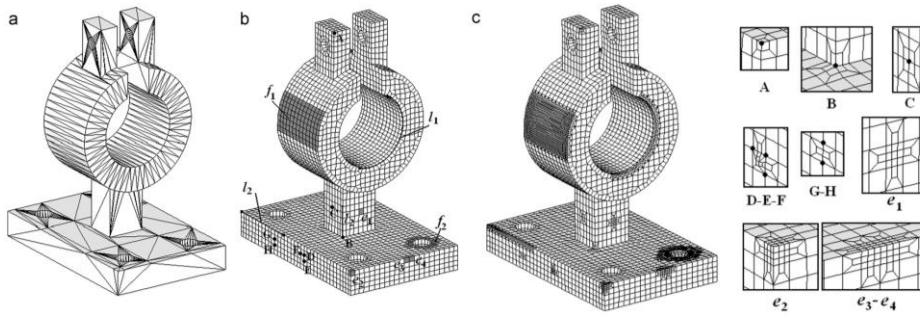


Şekil 1.16. Kenarlarından preslenen alüminyum çubuğun yeniden ağ dağılımı [16]

Bir göstergeye bağlı yöntemlerde, başlangıç eleman ağı kullanılarak her bir elemanda bir hata tahmini hesaplanır.

Sun vd. [17], çalışmasını altı yüzlü elemanlar ile bölgesel uyarlamalı ağ oluşturulması üzerine yapmıştır. Geometride bölme işleminin etkin bir şekilde oluşturulabilmesi için düğüm noktalarının, elemanların, eleman kenar ve eleman yüzey ile bağıntılarını kullanarak Şekil 1.17'deki farklı eleman tiplerini ızgara tabanlı bir algoritma içerisinde kullanmıştır.

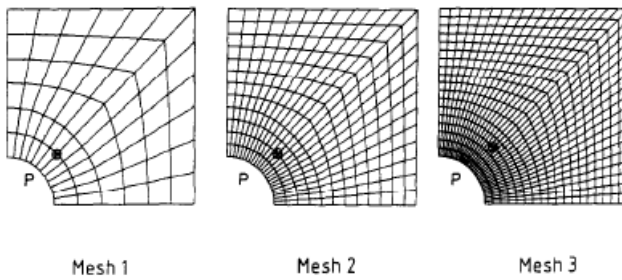
Algoritma eğriliğe dayalı bir iyileştirme kriteri kullandığı için eğri yüzeyleri iyi bir şekilde bölebilmektedir. Bölgesel sıkılaştırma yapabilmesi için düğüm noktaları, eleman kenarları ve eleman yüzeyleri arasındaki ilişkiyi iyi kurabilmesi farklı bölgesel ağlarda kontrol sağladığından algoritmanın avantajlarından biridir.



Şekil 1.17. Düğüm noktası, eleman, eleman-kenar ve eleman yüzey bölme [17]

Zienkiewicz vd. [18], bir enerji normu kullanarak hata tahmini göstergesi üzerine algoritma hazırlamıştır. Belirli bir analizden kaynaklanan hata tahmini ve kullanıcının belirlediği doğruluğu elde etmek için gereken yeni bir ağ oluşturulmasının tahmini hata bileşenlerinden olduğu belirtilmektedir. Algoritmada “The convergence of Z^2 ” tipi ve “Superconvergent patch recovery (SPR)” tipi hata tahminleri kullanılmıştır.

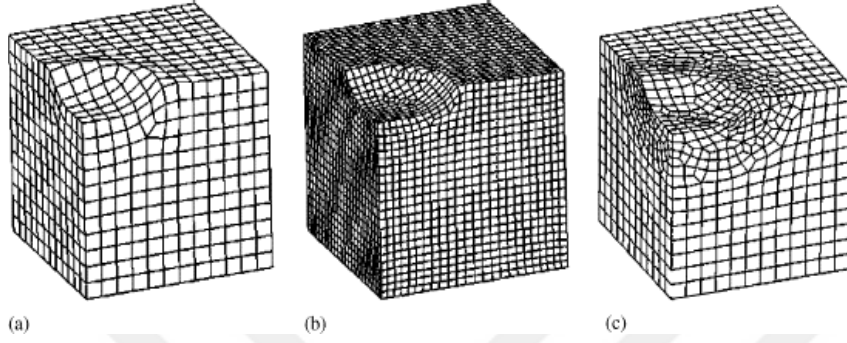
Bölgesel alanlarda uygulanabilmesi bu algoritmaların avantajı olarak gösterilmektedir. Analitik sonucu bilinen içi boşluklu ve kenarlarından çekme yükü uygulanmış örnek üzerinde bir sayısal çalışma yapılmıştır. Sayısal çalışmada hata tahmini olarak enerji parametresi kullanılmıştır. Şekil 1.18’de gösterilen çözüm ağları elde edilmiştir. Sonuç olarak “Superconvergent patch recovery (SPR)” tekniğinin analizlerde kullanıcı için kendi başına iyi sonuçlar verdiği belirtilmektedir.



Şekil 1.18. Çözüm ağlarının değişimi [18]

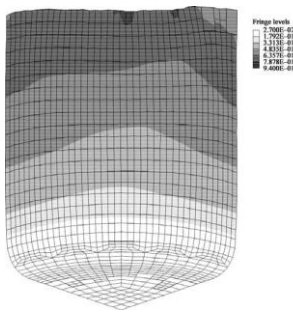
Yang vd. [19], çalışmasını eşit boyutlu elemanlara sahip bir başlangıç ağından başlayarak, önceden tanımlanmış ağ yoğunluğuna göre uyarlanabilir bir ağ oluşturmak için bir altı yüzlü ağ iyileştirme yöntemi üzerine yapmıştır. Ağ sıkılaştırması Şekil 1.19’da görüldüğü gibi uniform olarak veya bölgesel olarak yapılabilir. Geometrinin karmaşıklığına

uyarlanabilen çözüm ağı oluşturmak için istenen ağ yoğunluğu, Z-Z posteriori hata analizinden elde edilir. İstenilen ağ yoğunluğunu sağlamak için elde edilmiş ağı genişletilmesi ve düzgünleştirilmesi sırasında, komşu elemanların ağ yoğunluğuna dayalı ağ yoğunluğu faktörü, geleneksel Laplace yöntemine dahil edilir.



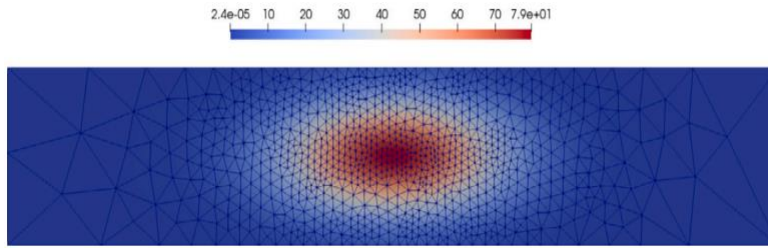
Şekil 1.19. Uniform ve uyarlamalı ağ sıklaştırma [19]

Moshfegh vd. [20], dört farklı hata göstergesi ile ızgara tabanlı uyarlamalı “metal forming” sonlu elemanlar analizi üzerine çalışmıştır. Sonlu elemanın açılarını temel alan, sonlu elemanın kalınlığını temel alan, etkin plastik şekil değiştirmeyi temel alan ve etkin gerilmeleri temel alan hata göstergeleri kullanılmıştır. Etkin gerilmeleri temel alan hata göstergelerinde Cauchy gerilmesi veya Von-Mises gerilmesi hata göstergesi olarak kullanılmıştır. Şekil 1.20’de etkin gerilmeleri kullanan ızgara tabanlı uyarlamalı yaklaşıma ait çözüm ağı görülmektedir. Uyarlamalı çözüm yapılacak elemanlar kullanıcının karar verdiği hata kriterini sağlayan elemanlardan seçilmiştir. Seçilen elemanlarda h - tipi uyarlamalı çözüm yapılmıştır. Çalışmada deneysel sonucu bilinen bir örnek dört farklı hata göstergesi ile analiz edilmiştir. Sonuç olarak uyarlamalı sonlu eleman çözümlerinin deneysel sonuca daha yakın olduğu belirtilmektedir.



Şekil 1.20. Etkin gerilmeleri kullanan ızgara tabanlı uyarlamalı yaklaşım [20]

Caboussat vd. [21] çalışmasını iki boyutlu galerkin sonlu elemanlar yöntemi kullanarak -hp tipi uyarlamalı çözümleri bir posteriori hata tahmincisi ile çatlaklar üzerine uygulamıştır. Şekil 1.21’de yer değiştirme renk grafiği görülen model bir üzerinde sonlu elemanlar yöntemi ve burada önerilen yöntem ile çözümler yapılmıştır. Sonuç olarak başlangıç geometrisi veya yükleme koşullarından bağımsız olarak çatlak alan problemlerini rastgele başlangıç ağılarıyla güvenilir ve verimli bir şekilde çözmenin mümkün olduğunu gösterilmiştir.



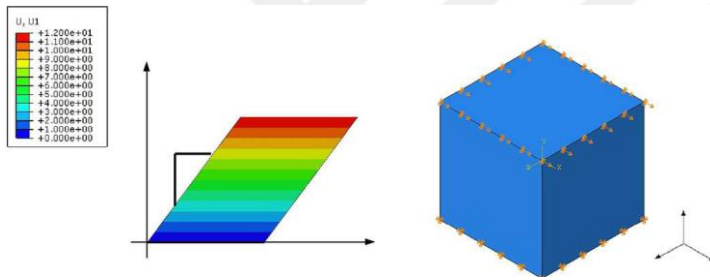
Şekil 1.21. Uyarlamalı çözüme dayanan sonlu eleman çözümü [21]

Hiperelastik malzemeler, büyük deformasyon yapabilen doğrusal olmayan davranış sergileyen malzemelerin özel bir türüdür. Bu türü kapsayan çözümler doğrusal olmayanlık nedeniyle zordur. Swanson [22], doğrusal olmayan davranışı modellemek için bünye denklemlerine sıkıştırılabilirliği dahil etmiştir. Malzeme modelleri gerilme şekil değiştirme ilişkisini şekil değiştirme enerji yoğunluğu fonksiyonu ile kurarak iteratif bir çözüm sağlamıştır. Oluşturulan yeni formülasyon bir programa eklenerek gerçek çözümü bilinen problemler üzerinde karşılaştırmalar yapılmıştır. Yapılan karşılaştırmalar neticesinde örnek çözümde kullanılan Mooney-Rivlin malzeme modelinin gerçek çözüm ile çok yakın sonuçlar verdiği gözlenmiştir.

Peng vd. [23] çalışmasında kauçuk-elastik malzemeler için sıkıştırılabilir tipteki şekil değiştirme enerji fonksiyonuna dayanan sonlu elemanlar prosedürünü sunmaktadır. Ogden-Tschoegl modeline hacim modülü eklenerek sıkıştırılabilir bir şekil değiştirme enerji fonksiyonu geliştirerek sonlu eleman formülasyonları için kullanmıştır. Çalışmada doğal penalty yaklaşımı, toplam ve güncellenmiş Lagrange formülasyonu kullanılmıştır. Kauçuk-elastik malzemelerin analizi için önerilen prosedürün etkinliğini göstermek amacıyla karşılaştırma problemleri üzerinde sayısal çözümler yapılmıştır. Yapılan değerlendirmede karışık formülasyonun kauçuk elastik malzemeler için gerekmediği, şekil

değiştirme enerjisi fonksiyonunun farklı problemler için tekdüze bir sonlu eleman formülasyonuna sahip olmasının avantaj sağladığı belirtilmektedir.

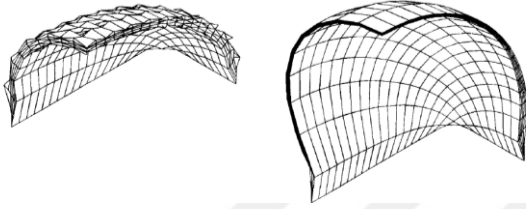
Suchocki [24] çalışmasını hafif sıkıştırılabilir izotropik hiperelastik bünye modellerinin sonlu elemanlara uygulanması üzerine yapmıştır. Sağ cauchy green deformasyon gradyan tensörünün birinci asal değişmezine dayanan depolanmış enerji fonksiyonu dikkate alınmıştır. Polimerik ve yumuşak doku için kullanılan bazı modeller üzerinde çalışılmıştır. Geliştirilen kod ile aksenal çekme örneği ve Şekil 1.22’de görülen basit kesme örneği için yapılan sonlu elemanlar çözümleri, analitik çözümler ile karşılaştırılmıştır. Sonuç olarak kullanılan polimerik modellerin gerilme şekil değiştirme ilişkisi için düz bir eğim elde edildiği bu nedenle malzeme modelinin yakınsama problemlerini önlemek amacıyla başlangıçta oldukça küçük bir şekil değiştirme artışının kullanılması gerektiği belirtilmektedir.



Şekil 1.22. Kesme örneği [24]

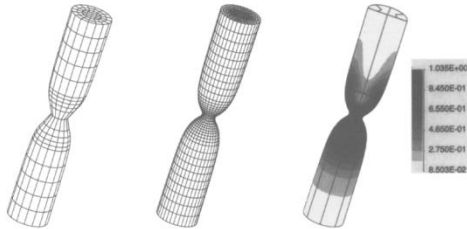
Herrmann [25] çalışmasında yer değiştirmeler ve ortalama basıncın bir fonksiyonu cinsinden ifade edilen elastik alan denklemlerine eşdeğer olan bir yaklaşık çözüm teoremi sunmuştur. Teorem özellikle sıkıştırılmaz ve neredeyse sıkıştırılmaz malzemeler için yaklaşık çözüm analizi tekniklerinin geliştirilmesinde kullanılmaktadır. Bu prosedürün örnek bir probleme uygulanmasından elde edilen sonuçlar, minimum potansiyel enerji teoremini kullanan benzer bir teknikle elde edilen sonuçlarla ve kesin sonuçla karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma, minimum potansiyel enerji teoremine dayalı analizden elde edilen sonuçların neredeyse sıkıştırılmaz malzemeler için oldukça sonuçlar elde ettiğini, buna karşın yeni varyasyon teoremini temel alan çözüm tekniğinin doğru sonuçlar verdiğini göstermektedir.

Bonet vd. [26] çalışmasında büyük şekil değiştirme yapan hiperelastik malzemenin analizini altı yüzlü elemanlar ile yapmıştır. Eleman davranışı sabit bir deformasyon gradyan tensorü ile Hu-Washizu karışık formülasyonu kullanılarak hesaplanmaktadır. Kum saati kararsızlığının modlarının yayılmasını kontrol etmek için basit bir prosedüre de yer verilmiştir. Bu prosedüre göre sabit deformasyon gradyan tensörü kullanılmasından dolayı kaybolan yapay kum saati kuvvetlerinin formülasyona eklenmesi ile doğrusal olmayan davranış modellenmektedir. Malzeme modeli olarak Neo-Hookean tipi model seçilmiştir. Şekil 1.23’de basit kum saati formülasyonunun kullanılmadığı ve kullanıldığı durumlar yer almaktadır. Sonuç olarak yeni formülasyonun kum saati kararsızlığının etkilerini karşılayabildiği anlaşılmaktadır.



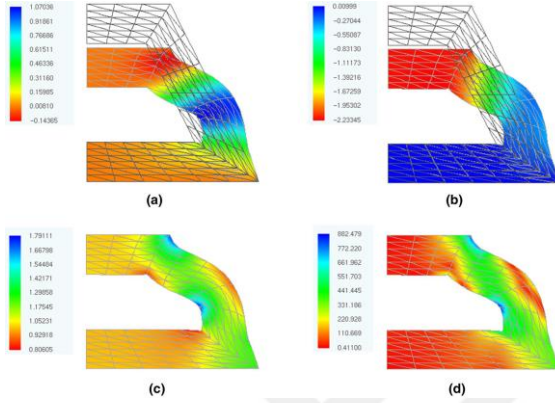
Şekil 1.23. Çözümü yapılan örnek için kum saati kararsızlığı [26]

Neto vd. [27] çalışmasında neredeyse sıkıştırılmaz katı cisimlerin büyük şekil değiştirme analizini yapabilen düşük dereceli sonlu elemanlar modellemiştir. Oluşturulan yeni formülasyon bütün malzeme modellerine uyarlanabilmektedir. Bu formülasyonda modifiye edilmiş deformasyon gradyan tensörü kullanılmıştır. Kullanılan bu yöntemle çözülen örneklerde hourglass kararsızlığı ile karşılaşılmamıştır. Şekil 1.24’de altı yüzlü elemanlar ve yeni formülasyon ile çözümlü yapılan örnek ve kontur grafiği görülmektedir.



Şekil 1.24. Silindirik bar örneği [27]

Pascon [28] düzlem gerilim koşulları altında hiperelastik malzemeleri içeren yapısal problemleri çözmek için sonlu elemanlar formülasyonu geliştirilmiştir. Yeni formülasyonun ana avantajı matematiksel basitliğidir, yani hiçbir özel tekniğe ve hiçbir karmaşık matematiksel formülasyona gerek yoktur. Şekil 1.25’de çalışmada çözümü yapılan örneğin kontur grafikleri görülmektedir. Sonuç olarak yeni formülasyonda hacimsel kilitlenme ve kumsaati kararsızlıkları olmadığı görülmüştür.



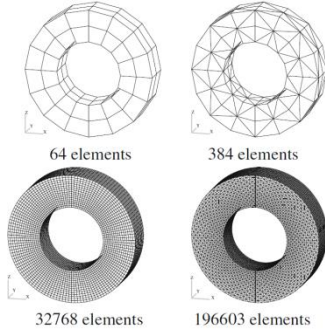
Şekil 1.25. Kauçuk conta örneği [28]

Medri vd. [29] çalışmasında elastomerik bir contadaki gerilim-şekil değiştirme alanının değerlendirilmesine izin veren bir prosedür sunmaktadır. Prosedür elastomerin mekanik modellenmesine ve yüksek şekil değiştirmelerle başa çıkabilen sonlu elemanların kullanılmasına dayanmaktadır. Çalışmada elde edilen sonuçlar deneysel sonuçlarla karşılaştırılarak kontrol edilmiştir. Elastomerik contanın sayısal simülasyonunda karşılaşılan zorluklar araştırılmıştır. Önerilen prosedürün geçerliliği ve sınırları, incelenen üç conta konfigürasyonuna üzerinde araştırılmıştır.

Sonuç olarak uygun sonlu eleman programlarının kullanılmasıyla birlikte elastomerik malzemelerin mekanik karakterizasyonunun, elastomerik contadaki gerilme-şekil değiştirme analizine izin verdiğini göstermektedir.

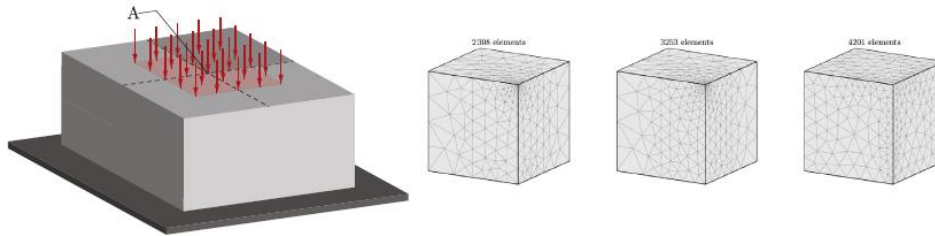
Chamberland vd. [30] çalışmasında hiperelastik malzemeler içeren büyük deformasyon problemlerinin sayısal çözümü için çeşitli sonlu eleman ayrıklaştırmalarını bilinen analitik çözümler ile karşılaştırmıştır. Bu farklı ayrıklaştırmaların performansı, ağ boyutuna göre uygun bir normda yakınsama, hesaplama süresi ve bellek tüketimi açısından analiz edilmiştir. Analizi yapılan geometriler Şekil 1.26 ile gösterilen dört yüzü ve altı yüzü

elemanlara bölünmüştür. Değerlendirmede ikinci dereceden elemanların doğruluk ve hesaplama verimliliği açısından avantajlı olduğu belirtilmiştir.



Şekil 1.26. Altı yüzlü ve dört yüzlü eleman ağları [30]

Shojaei vd. [31] çalışmasında 3 boyutlu sıkıştırılabilir ve sıkıştırılmaz doğrusal olmayan elastikiyet için yeni bir karma sonlu elemanlar yöntemi kullanmıştır. Bu formülasyon ile sıkıştırılabilir malzemeler için üç alanlı karma bir formülasyon elde edilmektedir. Bu formülasyon kararlı bir davranış sergilemektedir. Şekil 1.27’de gösterilen örnek problem ve diğer problemlerin çözümünden yeni formülasyonun eğilme, çekme ve sıkıştırma için neredeyse sıkıştırılmaz ve sıkıştırılmaz durumlarda güçlü bir performansa sahip olduğu anlaşılmaktadır. Ayrıca çok büyük şekil değiştirmelere sahip problemleri modelleyebildiği ve şekil değiştirmeleri doğru şekilde tahmin edebildiği belirtilmektedir. Ek olarak karışık formülasyonun kullanılması ile kum saati kararsızlığı ve hacimsel kilitlenme gibi sayısal kararsızlıkların engellendiği belirtilmektedir.

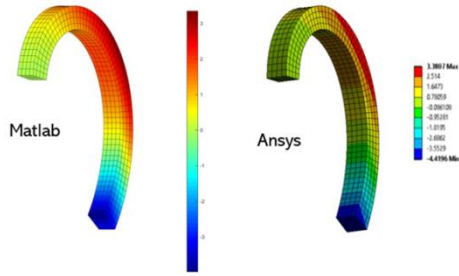


Şekil 1.27. Neredeyse sıkıştırılmaz blok için basınç örneği ve farklı çözüm ağları [31]

O’Shea vd. [32] çalışmasında hiperelastik malzemeler için şekil değiştirme enerjisi yoğunluklarının gelişmiş dördüncü dereceden tansör ile sonlu elemanlar ortamına nasıl uygulanabileceğini göstermiştir. Sunulan sonlu eleman denklemleri, yüksek mertebeden

elemanların yanı sıra levha elemanlarına da uygulanabilmektedir. Neredeyse sıkıştırılmaz malzemelerin basit deformasyon modlarını inceleyen bu çalışmada hiçbir kesme veya hacimsel kilitleme kararsızlığı gözlenmemiştir.

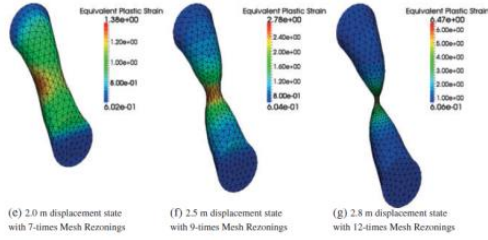
Nguyen vd. [33] çalışmasında hiperelastik malzemenin büyük deformasyon problemlerini analiz etmek için 8 düğüm noktalı altı yüzlü elemana sahip sonlu elemanlar yaklaşımı sunulmaktadır. Hiperelastik 3 boyutlu modellerin doğrusal olmayan davranışını simüle etmek için MATLAB dili kullanılarak bir hesaplama programı oluşturulmuştur. Sıkıştırılabilir 3 boyutlu hiperelastik problemler için Neo-Hookean malzeme modeli kullanılmıştır. Büyük deformasyon problemlerini ayrıklaştırmak için toplam Lagrange formülasyonu uygulanmıştır. Doğrusal olmayan çözümleri elde etmek için yineleme yöntemi olarak Newton-Raphson algoritması seçilmiştir. Sayısal algoritmanın ve programın doğruluğunu göstermek için elde edilen sonuçlar Şekil 1.28'deki gibi Ansys ticari programı ile karşılaştırılmış renk grafikleri gösterilmiştir.



Şekil 1.28. Kavisli kiriş örneğinin deformasyon renk grafikleri [33]

Uyarlamalı sıklaştırma, yukarıda ifade edilen bölgesel sıklaştırma yapmanın bir yoludur. Literatürde yer alan çalışmalar incelendiğinde, Onishi vd. [34], farklı malzeme modelleri için dörtyüzlü ve üçgen elemanlar kullanarak bölgesel uyarlamalı çözümler yapmıştır. Bunlar, eleman boyutu hesaplanan ve ağı yeniden oluşturulduğu yeniden ağ oluşturma safhası, sınır şartlarının yeni eleman ağına aktarıldığı safha ve yeniden çözüm safhasıdır. Burulma, çekme, eğilme, kesme, basınç ve bunların birlikte uygulandığı örnek problemler üzerinde yapılan çözümler Abaqus ticari yazılımı ile karşılaştırılmıştır. Şekil 1.29'de kesme ve çekme etkisinin birlikte olduğu hiperelastik bir silindir için yapılan çözümden elde edilen aşırı büyük deformasyon ile plastik birim şekil değişiminin dağılımı gösterilmiştir.

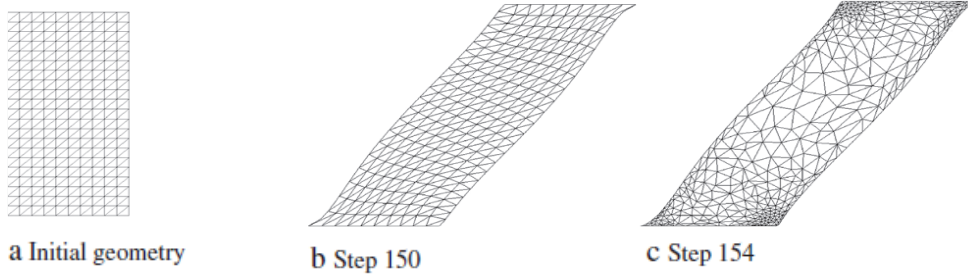
Sonuç olarak, hata yüzdeleri ifade edilerek aşırı büyük deformasyon etkisi altında olan hiperelastik malzemenin analizi için etkin bir sayısal model oluşturulduğu ifade edilmiştir. Bu çalışmadaki S-FEM olarak ifade edilen smoothed sonlu elemanlar tekniği ile standart FEM'e göre aynı eleman ağını kullanarak daha doğru sonuç elde etmek mümkün olabilmektedir.



Şekil 1.29. Kesme ve çekme etkisi altında plastik silindir için yapılan uyarlamalı sonlu eleman analizi sonuçları [34]

Leger vd. [35] büyük deformasyon yapan elastisite problemlerini yeni bir güncellenmiş Lagrange yöntemi ile çözümünü üçgen elemanlar kullanarak yapmıştır. Bu çözüm bir hata tahminini içeren anizotropik uyarlamalı ağ birleştirme yöntemini ve deformasyon gradyan tensörü için uygun transfer yöntemiyle birleştirilmeyi içerir. Şekil 1.30 (a)'daki yer değiştirme etki ettirilen örnek geometri 150 adım sonra yakınsama hatası vermiştir. Bu hatanın sebebi olarak Şekil 1.29 (b)'de üst sağ ve alt soldaki aşırı bozulmuş geometri gösterilmiştir. Bu noktadan sonraki beş adım içerisinde uyarlamalı ağ oluşturulmuştur. Şekil 1.29 (c)'de oluşan 770 elemanlı yeni ağ görülmektedir. Uyarlamalı ağda köşe bölgeler sıklaştırılmıştır. Uyarlanmış ağ toplamda 595 adımda hedeflenen yer değiştirmeye ulaşmıştır.

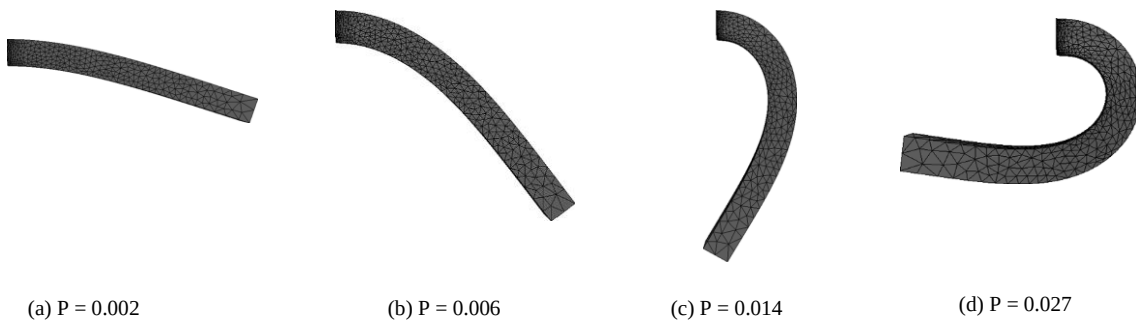
Çalışmada uyarlamalı ağ oluşturulduktan sonra deformasyon gradyan tensörünün eski ağdan yeni ağa aktarılmasında kübik L^2 -projection yönteminin doğru sonuçlar verdiği gösterilmiştir. Ayrıca büyük yer değiştirme yapan elastisite problemlerinde yeni algoritmanın kullanılarak sayısal sonuçların elde edilebildiği gösterilmiştir.



Şekil 1.30. Üst yüzünden yer değiştirme etki ettirilen dikdörtgen geometrinin farklı iterasyonlarda uyarlamalı ağ dağılımları ve yer değiştirmeler [35]

Leger vd. [36] çok büyük deformasyon yapan elastisite problemleri için hata tahmini ve uyarlamalı çözüm ağı oluşturmayı içeren güncellenmiş lagrange yöntemini üç boyutlu geometride uygulamıştır. Burada kullanılan güncellenmiş lagrange yönteminin üç temel bileşeni vardır. Bunlar hiyerarşik hata göstergesi ile anizotropik ağ uyarlama yöntemi, kübik L^2 -projection yöntemi ile deformasyon gradyan tensörünün transferi yöntemi ve Moore-Penrose süreklilik yöntemidir. Çalışmada farklı mesnet şartlarına ve yüklemelere sahip elastik kiriş problemi ile basınç yüklemesi altında çentik problemleri çözülmüştür. Bu problemlerin çözümünde dört yüzlü elemanlar kullanılmıştır. Şekil 1.31’de bir kenarından sabitlenen elastik kirişin farklı yüklemeler altındaki yer değiştirmeleri gösterilmiştir.

Büyük deformasyon yapan elastisite problemlerinin bu çalışmada kullanılan güncellenmiş lagrange yöntemi ile doğru sonuçlar elde edilebildiği sayısal örnekler ile gösterilmiştir.



Şekil 1.31. Elastik kirişin farklı yüklemeler altındaki davranışı [36]

Uyarlanabilir sonlu eleman hesaplamalarında sonlu eleman çözümü için seçilen hata göstergesine göre önceden belirlenen aralıkta bir hata tahmini yapılarak elde edilir. Zhu vd.

[37], iyileştirilmiş süperyakınsama tekniği ve bir posteriori hata göstergesi üzerine çalışmıştır. Seçilen hata değeri kullanılarak karar verilen yerlerde bölgesel eleman sıklaştırılması olan $-h$ tipi, eleman derecesinin artırılması ile elde edilen $-p$ tipi, düğüm noktası sayısının sabit tutularak yerlerinin değiştirilmesi ile elde edilen $-r$ tipi ve $-h$ ve $-p$ tipi çözüm ağlarının birlikte oluşturulmasıyla elde edilen $-hp$ tipi çözüm ağları kullanılabileceği belirtilmiştir.

Tezin bölümleri aşağıdaki gibi özetlenebilir.

Bölüm 2’de doğrusal olmayan elatisite teorisi ve hiperelastik ortam modellemeye yer verilmiştir. Referans konum ve uzay konum arasındaki bağlantı yardımıyla deformasyon gradyan tansörünün elde edilmesi, bazı hiperelastik malzeme modelleri ve seçici indirgenmiş integrasyon yönteminden bahsedilmektedir.

Bölüm 3’de, doğrusal olmayan sonlu elemanlar analizi üzerine teorik bilgilere, Newton-Raphson iteratif yaklaşık çözümüne, malzeme sabitlerinin matris formunda gösterimine ve yakınsama kriterine yer verilmiştir.

Bölüm 4’de, uyarlamalı yöntem çeşitlerine ve sonlu elemanlarda kullanımına, hexahedral elemanlarda kullanılacak geçiş elemanlarına yer verilmiştir.

Bölüm 5’de, MATLAB ortamında yazılan program kodu akış şemasına, analizi yapılan örnek problemlere, ilgili çizelge ve grafiklere yer verilmiştir.

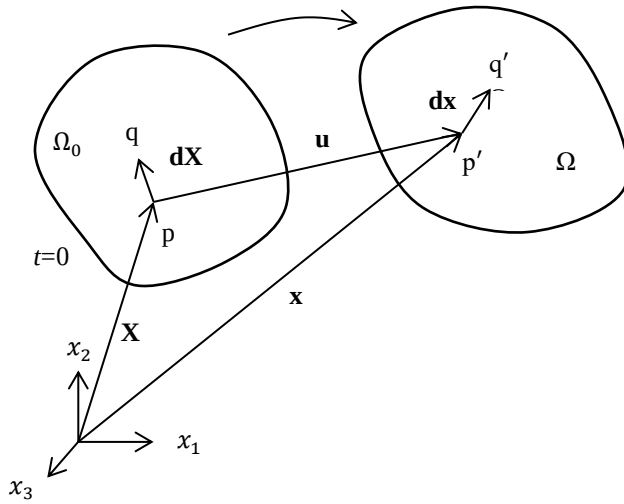
Bölüm 6’da ise çalışmada elde edilen verilerin yorumlanması ve yeni çalışmalar için önerilere yer verilmiştir.

2. DOĞRUSAL OLMAYAN ELASTİSİTE TEORİSİ VE HİPERELASTİK ORTAM MODELLEME

Büyük deformasyon yapan hiperelastik ortamların doğrusal olmayan sonlu elemanlar analizi ile yerdeğiştirme ve gerilme hesabı bu bölümde verilen formülasyonlar ile yapılabilir.

2.1. Deformasyon Gradyan Tansörü

Neredeyse sıkıştırılmaz hiperelastik bir cismin doğrusal olmayan hareketini incelemek için Şekil 2.1'de gösterilen sürekli ortam ele alınabilir. Burada, üzerine etki eden kuvvet ve/veya yer değiştirmeler nedeniyle referans konumundan yani şekil değiştirmemiş durumdan uzay konumuna yani şekil değiştirmiş duruma hareket eden bir sürekli ortam gösterilmektedir. Burada ve sonraki hesaplamalarda skaler büyüklükler italik, vektör ve tansör büyüklükler ise kalın harf ile ifade edilmektedir. Ayrıca, indis notasyonu ile herhangi bir vektör veya tansörün ilgili elemanları gösterilmektedir. Tansör büyüklüklerin elemanlarının oluşturduğu matris ve diğer matrisler için köşeli parantez içinde büyük harfler kullanılacaktır.



Şekil 2.1. Sürekli ortamın referans konumu (Ω_0) ve uzay konumu (Ω)

Sürekli ortam mekaniğinde büyük deformasyonları içeren hesaplamalar için deformasyon gradyan tansörü önemli bir büyüklüktür. Eş. 2.1’de görüldüğü gibi, deformasyon gradyan tansörü $\mathbf{F}$, referans konumunda tanımlı sonsuz küçük bir $d\mathbf{X}$ vektörünü uzay konumundaki hali olan $d\mathbf{x}$ vektörüne dönüştüren tansördür ve ilgili vektörün uzay konum vektörünün referans konum vektörüne göre türevi olarak tanımlıdır.

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad \text{veya} \quad F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (2.1)$$

Sol Cauchy - Green deformasyon tansörü Eş. 2.2 ile elde edilmektedir.

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T \quad (2.2)$$

Eş. 2.2 kullanılarak Eş. 2.3 ile Euler birim şekil değiştirme tansörü elde edilmektedir.

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) \quad (2.3)$$

Hiperelastik sürekli ortam için gerilme hesabında birim hacimde ifade edilen şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu kullanılır. Bu büyüklük, izotrop ortam için çoğu durumda asal değişmezler yardımı ile ifade edilir. Burada kullanılacak olan asal değişmezler Eş. 2.4 ile verilen Sağ Cauchy - Green deformasyon tansörü için ifade edilecek asal değişmezlerdir.

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (2.4)$$

Eş. 2.1 kullanılarak Eş. 2.5 ile Lagrange birim şekil değiştirme tansörü elde edilmektedir.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I} \quad (2.5)$$

Sağ Cauchy - Green deformasyon tansörünün asal değişmezleri, bu tansörün öz değerleri cinsinden Eş. 2.6’daki gibi yazılır.

$$I_1 = \text{tr}(\mathbf{C}) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \quad I_2 = \frac{1}{2} [(\text{tr} \mathbf{C})^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2)] = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2, \quad I_3 = \det(\mathbf{C}) = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \quad (2.6)$$

Burada λ_1^2 , λ_2^2 ve λ_3^2 simetrik olan sağ Cauchy – Green deformasyon tansörünün öz değerlerini, I_1 ve I_2 çarpılma şekil değişimi ile ilgili asal değişmezleri, I_3 ise hacimsel şekil değişimi ile ilgili asal değişmezi ifade etmektedir. Kauçuk türü malzemelerde gerilme hesabı için gereken şekil değiştirme enerjisi fonksiyonunun genel bir formu Eş. 2.7’de verilmektedir [38].

$$W(I_1, I_2, I_3) = \sum_{m+n+k=1}^{\infty} C_{mnk} (I_1-3)^m (I_2-3)^n (I_3-1)^k \quad (2.7)$$

Bu eşitlikte C_{mnk} malzeme katsayılarıdır. Kesme gerilmelerinden kaynaklanan çarpılma şekil değişimi ile normal gerilmelerden kaynaklanan hacimsel şekil değişimini tam olarak birbirinden ayırarak yazılabilecek şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu aşağıdaki değişmezlerin kullanımı ile mümkün olmaktadır [38].

$$J_1 = I_1 I_3^{1/3}, \quad J_2 = I_2 I_3^{2/3}, \quad J_3 = I_3^{1/2} \quad (2.8)$$

Burada J_1 , J_2 ve J_3 değerleri indirgenmiş değişmezlerdir. Malzeme sıkıştırılmazsa şekil değiştirme enerji yoğunluğu iki terimle ifade edilir.

$$W_1(I_1, I_2) = \sum_{m+n=1}^{\infty} C_{mnk} (I_1-3)^m (I_2-3)^n \quad (2.9)$$

Çeşitli hiperelastik malzeme modelleri aşağıda yer almaktadır.

2.2. Neo-Hookean Malzeme Modeli

Bu malzeme modeli plastikler ve kauçuk benzeri malzemeler için kullanılmaktadır [38]. Şekil değiştirmemiş durum referans olarak alındığında, sıkıştırılmaz davranış gösteren malzemeler için şekil değiştirme enerji yoğunluğu Eş. 2.10 ile ifade edilir. Bu model tek eksenli çekmede şekil değiştirme için % 40 uzamaya kadar, basit kesme için şekil değiştirmede % 90 uzamaya kadar iyi sonuçlar verir.

$$W_1(I_1, I_2) = C_{10}(I_1 - 3) \quad (2.10)$$

Burada W_1 , Çarpılma birim şekil değiştirme enerjisi fonksiyonunu, C_{10} , malzeme sabitini, I_1 , sağ Cauchy Green deformasyon tansörünün 1. asal değişmezini ifade eder.

2.3. Yeoh Malzeme Modeli

Sıkıştırılamaz kauçuk malzeme için Yeoh malzeme modeli sadece I_1 asal değişmezi kullanılarak Eş. 2.11'deki gibi ifade edilir.

$$W_1(I_1) = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 \quad (2.11)$$

Yalnızca ilk değişmez kullanıldığından Yeoh modeline genellikle indirgenmiş polinom modeli adı verilir.

2.4. Ogden Malzeme Modeli

Bu model kauçuk ve polimerler için kullanılır. Deformasyon gradyan tansörünün üç özdeğeri kullanarak çarpılma enerji yoğunluğu sıkıştırılabilir malzemeler için Eş. 2.12'da gösterildiği gibi ifade edilir. Burada μ_i ve α_i malzeme sabitleridir.

$$W_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3) \quad (2.12)$$

Ogden malzeme modeli sıkıştırılamaz malzemeler için ise Eş. 2.13'da gösterildiği gibi ifade edilir.

$$W_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_1^{-\alpha_i} \lambda_2^{-\alpha_i} - 3) \quad (2.13)$$

2.5. Mooney-Rivlin Malzeme Modeli

Mühendislikte kullanılan kauçuk türü malzemeler oldukça düşük miktarda sıkıştırılabildiği için “neredeyse sıkıştırılamaz” olarak isimlendirilirler. Bu hiperelastik malzemelerin şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu hesaplanırken Mooney-Rivlin malzeme modeli sıklıkla kullanılır. Bu tez çalışmasında neredeyse sıkıştırılamaz formdaki Mooney-Rivlin malzeme modeli kullanılmıştır. Bu model için şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu Eş. 2.8 ile elde

edilen indirgenmiş değişmezler kullanılarak Eş. 2.14 ile hesaplanır. Bu Eşitlikte W_1 çarpılma enerjisi fonksiyonunu, W_2 ise hacimsel değişimden kaynaklanan enerji fonksiyonunu ifade eder. Sadece W_1 çarpılma enerjisi fonksiyonu kullanıldığında tamamen sıkıştırılamaz durum temsil edilir.

$$W(J_1, J_2, J_3) = W_1(J_1, J_2) + W_2(J_3) = C_{10}(J_1 - 3) + C_{01}(J_2 - 3) + \frac{K}{2}(J_3 - 1)^2 \quad (2.14)$$

Burada C_{10} , C_{01} malzeme sabitleri ve K hacim modülüdür. Tamamen sıkışmaz malzeme için teorik olarak hacim modülünün sonsuz olması gerekir. Neredeyse sıkıştırılamaz ortam için büyük K değeri kullanılarak yapılan çözüm penaltı yöntemi ve K , penaltı parametresi olarak ifade edilir [39]. Üç boyutlu küçük birim şekil değişimi için $2(C_{10} + C_{01})$ değeri malzemenin kesme modülüne, $6(C_{10} + C_{01})$ değeri malzemenin elastisite modülüne karşılık gelir. Teorik olarak, sıkıştırılamaz malzemeler için Poisson oranının 0,5 olması gerekse de neredeyse sıkıştırılamaz davranış için Poisson oranı 0,49 ile 0,5 arasında olmaktadır.

Gerilme ve şekil değiştirme arasında kurulacak bünye denklemleri için ikinci Piola – Kirchhoff gerilmesi, $\mathbf{S}$, şekil değiştirme enerjisi fonksiyonunun, W , Lagrange birim şekil değiştirme tansörüne, $\mathbf{E}$, göre türevi ile elde edilir.

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial W_1}{\partial J_1} \frac{\partial J_1}{\partial \mathbf{E}} + \frac{\partial W_1}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{E}} + \frac{\partial W_2}{\partial J_3} \frac{\partial J_3}{\partial \mathbf{E}} \quad (2.15)$$

İkinci Piola – Kirchhoff gerilmesinin Lagrange birim şekil değiştirme tansörüne göre türevi ise dördüncü mertebe bünye tansörüne, $\mathbf{D}$, eşittir.

$$\mathbf{D} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} \quad (2.16)$$

$\mathbf{D}$ tansörünün malzeme sabitleri cinsinden hesaplanması ile gerilme ve birim şekil değiştirme arasındaki ilişki kurulmuş olur.

2.6. Seçici İndirgenmiş İntegrasyon

Eş. 2.14’de ifade edilen W_1 çarpılma enerjisi fonksiyonunu ve W_2 hacimsel değişimden kaynaklanan enerji fonksiyonunu gösterir. Bu fonksiyonlar sonlu elemanlara ayrıştırıldığında, $\mathbf{K}_s$ çarpılma ve $\mathbf{K}_p$ hacimsel değişimden kaynaklanan rijitlik matrislerini ifade eder. Penaltı yönteminde hacim modülünün büyük değerinden dolayı hacimsel değişimden kaynaklanan rijitlik, çarpılma kısmınınkinden daha büyüktür. Dolayısıyla, eğer $\mathbf{K}_p$ matrisinin determinanı sifıra eşit değilse, $(\mathbf{K}_s + \mathbf{K}_p)\Delta\mathbf{u} = \mathbf{R}$ artımlı denkleminin $\Delta\mathbf{u} = 0$ sonucunu verecektir. Böylece sağ taraftaki artık azaltılamaz ve rijitlik değerlerindeki büyük fark nedeniyle $\mathbf{K}_s$ 'nin etkisi göz ardı edilir. Bu durumda rijitlik aşırı kısıtlı olarak adlandırılır. Bu olaya “volumetric locking” adı verilir.

Seçici indirgenmiş integrasyon yönteminde neredeyse sıkıştırılamazlık kısıtlamasında “volumetric locking” olayını azaltmanın en uygun yoludur. Temel fikir $\mathbf{K}_p$ hacimsel değişimden kaynaklanan rijitlik matrisinin determinantını sıfır yapmaktır. Bu nedenle $\mathbf{K}_s$ çarpılma rijitlik matrisi yerdeğiştirmelerdeki artışı etkileyebilir. Ancak normalden bir mertebe daha az entegrasyon yapıldığında sonlu elemanlar denkleminin kabul edilebilir artımlı çözümler verdiği bulunmuştur. Yani üç boyutlu geometride $\mathbf{K}_s$ çarpılma rijitlik matrisini 2x2x2 Gauss kareleme yöntemi ile, $\mathbf{K}_p$ çarpılma rijitlik matrisini 1x1x1 Gauss kareleme yöntemi ile integral dışına çıkartılarak çözümün yapılması seçici indirgenmiş integrasyon yöntemini ifade eder [38].

Eş. 2.17’de verilen modifiye edilmiş deformasyon gradyan tansörü de kullanılarak “volumetric locking” etkisi azaltılabilir [40,41]. Bu tez çalışmasında Eş. 2.17 ile verilen modifiye edilmiş deformasyon gradyan tansörü kullanılarak analizler elde edilmiştir.

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{F} \left(\frac{J}{J} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (2.17)$$

Burada $\mathbf{F}$ deformasyon gradyan tansörünü, n eleman boyutunu, J ise deformasyon gradyan tansörünün determinantını ifade eder.

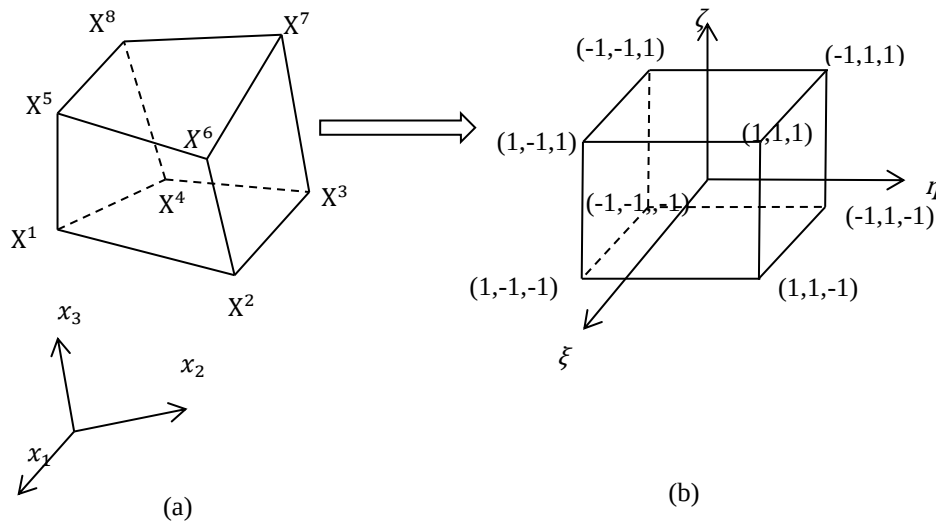
3. DOĞRUSAL OLMAYAN SONLU ELEMENLAR YÖNTEMİ

Doğrusal elastisite teorisinde kuvvet ve yer değiştirme arasında doğrusal ilişki bulunmaktadır. Ancak doğrusal olmayan teoride kuvvet ve yer değiştirme arasındaki değişim doğru orantılı olmayabilir. Yapı mekaniğinde doğrusal olmayan davranış genellikle iki durumda sınıflandırılabilir. Bunlar; Geometriden kaynaklı doğrusal olmayan davranış ve malzemeden kaynaklı doğrusal olmayan davranıştır.

Geometriden kaynaklı doğrusal olmayan davranış, büyük yer değiştirme, şekil değiştirme ve dönmeden kaynaklı ikincil etkilerin etki ettiği durumlar olarak ifade edilebilir. Malzemeden kaynaklı doğrusal olmayan davranış, gerilme ve birim şekil değiştirme eğrisinin doğrusal olmadığı durumlar olarak ifade edilebilir. Ayrıca temas problemleri ve sınır şartlarının değişmesi de doğrusal olmayan davranışa örnek diğer durumlardır [42].

3.1. Teori ve Formülasyon

Tezin bu bölümünde elastik sistemler için doğrusal olmayan sonlu eleman formülasyonuna yer verilecektir. Formülasyon referans [38, 42, 43]'den faydalanılarak özetlenmiştir.



Şekil 3.1. Sekiz düğüm noktalı izoparametrik katı eleman. (a) Sonlu eleman, (b) Referans eleman [38]

Şekil 3.1 üç boyutlu, sekiz düğüm noktalı, izoparametrik bir katı elemanı göstermektedir. Eleman sekiz düğüm noktasından ve her düğüm noktasında üç serbestlik derecesinden oluşur. Düğüm numaralarının sırası Şekil 3.1 (a)'da verilenle aynı sırada verilmelidir. Şekil 3.1 (a)'daki sonlu eleman, Şekil 3.1 (b)'de gösterilen referans elemana eşlenecektir. Sonlu eleman x_1, x_2, x_3 koordinatlarında tanımlanırken, referans eleman ξ, η, ζ koordinatlarında tanımlanmaktadır. Referans elemanı her kenarının uzunluğu 2 birim olan ve merkezi orijinde olan bir küptür. Sonlu elemanın ilk düğüm noktası herhangi bir köşede bulunabilmesine rağmen, referans elemanın ilk düğüm noktası her zaman (-1,-1,-1) konumundadır.

Enterpolasyon fonksiyonları, farklı elemanların aynı enterpolasyon fonksiyonuna sahip olması için referans elemanda tanımlanır. Tek fark, iki öge arasındaki eşleme ilişkisidir. $I=1, \dots, 8$ düğüm noktasındaki yer değiştirme $u_I = [u_{I1}, u_{I2}, u_{I3}]^T$ ve karşılık gelen referans koordinatı $\xi_I = [\xi_I, \eta_I, \zeta_I]^T$ olsun. İzoparametrik eleman için elemanın koordinatı ve yer değiştirmesi aşağıdaki eşitlikler ile ifade edilir.

$$x(\xi) = \sum_{I=1}^8 N_I(\xi) x_I \quad (3.1)$$

$$u(\xi) = \sum_{I=1}^8 N_I(\xi) u_I \quad (3.2)$$

Burada x_I düğüm noktası koordinatı ve $N_I(\xi)$ izoparametrik şekil fonksiyonudur. İzoparametrik şekil fonksiyonu Eş. 3.3 ile elde edilir.

$$N_I(\xi) = \frac{1}{8} (1 + \xi \xi_I)(1 + \eta \eta_I)(1 + \zeta \zeta_I) \quad (3.3)$$

Sonlu eleman yaklaşımı, enterpolasyon fonksiyonları kullanılarak elde edilebildiğinde, Eş. 3.4 ile çözüme ulaşılmaktadır.

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{f}^{ext}\} \quad (3.4)$$

Rijitlik ve yüklerin de yer değiştirmenin veya deformasyonun fonksiyonu haline gelmesinden dolayı yukarıda anlatılan problemler doğrusal olmayan çözüm gerektirir. Eş. 3.4'de rijitlik matrisi $[\mathbf{K}]$ ve yük vektörü $\{\mathbf{f}^{ext}\}$, yer değiştirme vektörünün $\{\mathbf{u}\}$ fonksiyonu haline gelir. Rijitlik matrisi ve yük vektörünü oluşturmak için gereken bilgi

önceden bilinmediğinden yer değiştirmeler hemen bulunamaz. Eş. 3.4'in dengede olmasını sağlayacak şekilde çözümün yapılabilmesi yenilemeli bir işlem gerektirir. Eş. 3.4 doğrusal olmadığından süperpozisyon ilkesi uygulanmaz. Yani sonuçları yükle orantılı olarak ölçeklendiremeyiz veya farklı yük durumlarının sonuçlarını üst üste koyamayız. Her farklı yük durumu ayrı bir analiz gerektirir.

Doğrusal olmayan fonksiyonların çözüm tekniklerinde genellikle iteratif çözümler uygulanır. Ana fikir çözümün bilindiği t zamanından $t + \Delta t$ zamanındaki çözüme ulaşmaktır. Bu nedenle sonlu elemanlarda denge durumu için Eş. 3.4, dışarıdan uygulanan yüklerin zamanın bir fonksiyonu olarak tanımlandığı varsayılarak Eş. 3.5'deki gibi ifade edilebilir.

$${}^t\{\mathbf{f}^{ext}\} - {}^t\{\mathbf{f}^{int}\} = 0 \quad (3.5)$$

Burada ${}^t\{\mathbf{f}^{ext}\}$, t anında düğüm noktasına etki eden dış kuvvet vektörünü, ${}^t\{\mathbf{f}^{int}\}$ ise t anında düğüm noktasındaki iç kuvveti ifade eder.

$t + \Delta t$ zamanı için eşitlik aşağıdaki gibi olur.

$${}^{t+\Delta t}\{\mathbf{f}^{ext}\} - {}^{t+\Delta t}\{\mathbf{f}^{int}\} = 0 \quad (3.6)$$

t anı bilindiğinde,

$${}^{t+\Delta t}\{\mathbf{f}^{int}\} = {}^t\{\mathbf{f}^{int}\} + \{\mathbf{f}^{int}\} \quad (3.7)$$

Burada düğüm noktasındaki t zamanından $t + \Delta t$ zamanına kadar eleman yer değiştirmeleri ve gerilmelerindeki artışa karşılık gelen iç kuvvetlerdeki artışlar hesaplanır. Bu artış $\{\mathbf{f}^{int}\}$, t zamanındaki geometrik ve malzeme koşullarını açıklayan bir tanjant rijitlik matrisi ${}^t[\mathbf{K}]$ ile Eş. 3.8'deki gibi yaklaşık olarak hesaplanır.

$$\{\mathbf{f}^{int}\} = {}^t[\mathbf{K}] \{\mathbf{u}\} \quad (3.8)$$

Burada $\{\mathbf{u}\}$, düğüm noktasındaki yer değiştirmelerdeki artışı gösteren bir vektördür. Eş. 3.8'i ve Eş. 3.7'ü Eş. 3.6'nın içerisinde yazarsak Eş. 3.9 elde edilir.

$${}^t[\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = {}^{t+\Delta t}\{\mathbf{f}^{ext}\} - {}^t\{\mathbf{f}^{int}\} \quad (3.9)$$

Düğüm noktasındaki yer değiştirmelerin artış vektörünü $\{\mathbf{u}\}$ bulabilmek için, $t + \Delta t$ zamanındaki yaklaşık yer değiştirmeler Eş. 3.10 ile hesaplanır.

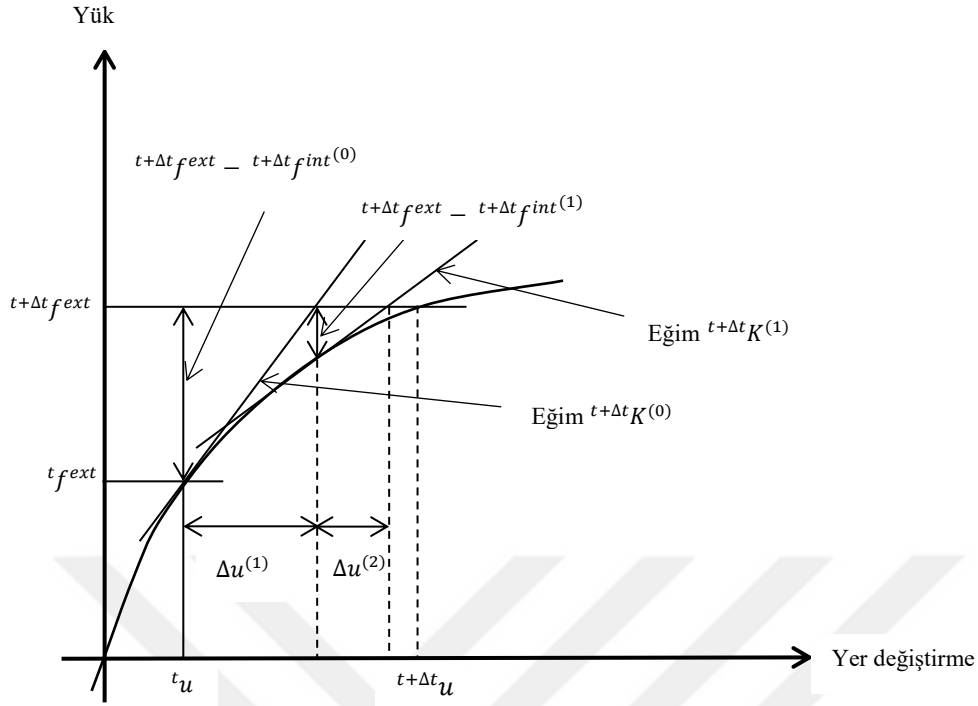
$${}^{t+\Delta t}\{\mathbf{u}\} = {}^t\{\mathbf{u}\} + \{\mathbf{u}\} \quad (3.10)$$

Yaklaşık çözüm bir ölçüde gerçek çözüme Eş. 3.9 yakınsayana kadar yinelemeli prosedürün tekrarlanması gerekir.

Doğrusal olmayan sonlu elemanlar analizinde birçok iteratif çözüm vardır. Bu çalışmada Newton-Raphson ve Modifiye Newton-Raphson yöntemleri açıklanmıştır.

3.1.1. Newton-Raphson ve Modifiye Newton-Raphson yöntemi

Doğrusal olmayan sonlu eleman denklemlerinin çözümü için çok etkili ve yaygın olarak kullanılan yinelemeli bir prosedürdür. Düğüm noktası yer değiştirmelerindeki artış hesaplanır. Sonra t zamanındaki yer değiştirmeler yerine mevcutta bilinen toplam yer değiştirmeler kullanılarak artımlı çözümün tekrarlanması ile $t+\Delta t$ zamanındaki yer değiştirmeler hesaplanır. Newton-Raphson şeması Şekil 3.2'de gösterilmektedir.



Şekil 3.2. Newton-Raphson iteration şeması [43]

Newton-Raphson iteratif çözümü için adımlar ($i=1,2,3,\dots$) Şekil 3.1’de gösterildiği üzere aşağıdaki gibi ifade edilir. Burada bir önceki iterasyondan elde edilen iç kuvvetler, uygulanan kuvvetten çıkartılarak artık kuvvet elde edilir. Elde edilen artık kuvvet ve bir önceki iterasyondan bilinen rijitlik matrisi kullanılarak i iterasyonundaki yer değiştirmeler hesaplanır.

$$t + \Delta t [\mathbf{K}]^{(i-1)} \Delta \{\mathbf{u}\}^{(i)} = t + \Delta t \{\mathbf{f}^{ext}\} - t + \Delta t \{\mathbf{f}^{int}\}^{(i-1)} \quad (3.11)$$

$$t + \Delta t \{\mathbf{u}\}^{(i)} = t + \Delta t \{\mathbf{u}\}^{(i-1)} + \Delta \{\mathbf{u}\}^{(i)} \quad (3.12)$$

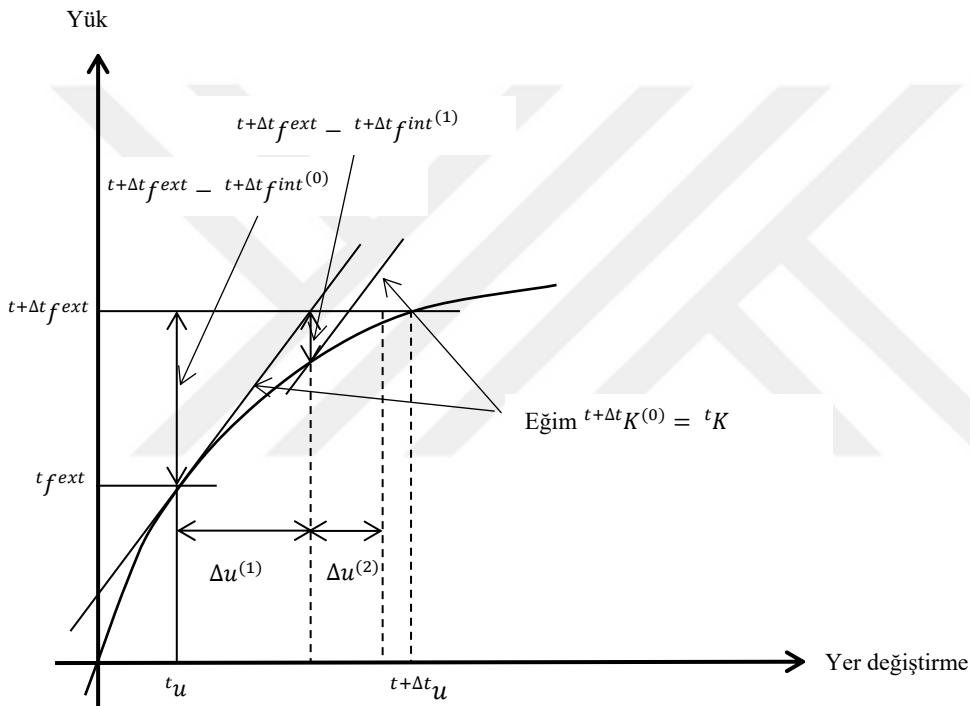
İterasyonların başladığı durum için eşitlikler aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$t + \Delta t \{\mathbf{u}\}^{(0)} = t \{\mathbf{u}\} \quad (3.13)$$

$$t + \Delta t [\mathbf{K}]^{(0)} = t [\mathbf{K}] \quad (3.14)$$

$${}^{t+\Delta t}\{\mathbf{f}^{int}\}^{(0)} = {}^t\{\mathbf{f}^{int}\} \quad (3.15)$$

Newton-Raphson iteratif çözüm yöntemi için her iterasyonda yeni bir tanjant rijitlik matrisi hesaplanması gerekir. Bu nedenle işlem sayısı artar ve çözüm süreci uzar. Tanjant rijitlik matrisinin ilk iterasyonda sadece bir defa hesaplandığı ve sonraki adımlarda bu rijitlik matrisinin kullanıldığı yöntem Modifiye Newton-Raphson yöntemi olarak adlandırılır. Tez çalışması için yazılan MATLAB ortamındaki programda bu yöntem kullanılmıştır.



Şekil 3.3. Modifiye Newton-Raphson iteration şeması [43]

Toplam Lagrange formülasyonunda sürekli ortamın referans konumu kullanılır (Şekil 2.1) [38]. Ayrıca referans konumundaki eksen takımının sabit olduğu düşünülür. Konum ve zaman bağımsız değişkenleri $(\mathbf{X}, t)$ ve yer değiştirme bağımlı değişkeni $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ şeklindedir. Referans konumunda yazılan şekil fonksiyonları ve düğüm noktalarındaki yer değiştirmeler cinsinden “yaklaşık yer değiştirme fonksiyonu” ifade edilir. Ayrıca, konuma göre türevler kullanılarak yer değiştirme gradyanı ve Lagrange birim şekil değiştirme tansörü de bu “yaklaşık yer değiştirme fonksiyonu” cinsinden Eş. 3.16, Eş. 3.17 ve Eş. 3.18’de ki gibi yazılır.

$$u_1 = \sum_{j=1}^8 u_{1j} N_j = u_{11} N_1 + u_{12} N_2 + u_{13} N_3 + \cdots + u_{18} N_8 \quad (3.16)$$

$$u_2 = \sum_{j=1}^8 u_{2j} N_j = u_{21} N_1 + u_{22} N_2 + u_{23} N_3 + \cdots + u_{28} N_8 \quad (3.17)$$

$$u_3 = \sum_{j=1}^8 u_{3j} N_j = u_{31} N_1 + u_{32} N_2 + u_{33} N_3 + \cdots + u_{38} N_8 \quad (3.18)$$

Burada yer değiştirmeleri ifade eden u_{ij} simgesinin alt indisinde yer alan i , doğrultuyu, j düğüm noktasını N_j , ise j düğüm noktasındaki şekil fonksiyonunu ifade etmektedir. N

Minimum potansiyel enerji prensibine göre, elastik sistemin potansiyel enerjisi, sistemde depolanan birim şekil değiştirme enerjisi ile dış kuvvetlerin yaptığı için farkına eşittir. Doğrusal olmayan sonlu elemanlar analizinde, yaklaşık çözüm için bu farkın en küçük değere yaklaştırılması prensibine dayalı iteratif bir çözüm yapılır.

Sistemde depolanan birim şekil değiştirme enerjisi, Π_{int} , birim şekil değiştirme enerjisi yoğunluğunun tüm hacim üzerinde integrali ile hesaplanır. Kütle kuvvetlerinin ortam düğüm noktalarının yer değiştirmesi ile çarpımının tüm hacim üzerindeki integrali ve ortam sınırlarındaki düğümlerin yer değiştirmesinin dış kuvvetler ile çarpımının sınırlar üzerinde hesaplanacak integralinin toplamı ile kuvvetlerin yaptığı iş, Π_{ext} , hesaplanır.

$$\Pi = \Pi_{int} - \Pi_{ext} = \iiint_{\Omega_0} W(\mathbf{E}) d\Omega - \iiint_{\Omega_0} \mathbf{u}^T \mathbf{f}_b d\Omega - \iint_{\tau_0} \mathbf{u}^T \mathbf{t} d\tau \quad (3.19)$$

Yer değiştirme alanı $\mathbf{u}$, herhangi bir yönde ve büyüklükte olan $\bar{\mathbf{u}}$ kadar değiştirilirse (varyasyon), potansiyel enerjideki değişim (varyasyon) sıfıra eşitlenerek Eş. 3.20 yazılır.

$$\bar{\Pi} = \iiint_{\Omega_0} \frac{\partial W(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} : \bar{\mathbf{E}} d\Omega - \iiint_{\Omega_0} \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{f}_b d\Omega - \iint_{\tau_0} \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{t} d\tau = 0 \quad (3.20)$$

Eş. 3.20'de cisme uygulanan yüklerin yaptığı için değişimi yer değiştirme ile doğru orantılıdır. Bilinen yer değiştirmeler için Lagrange birim şekil değiştirme tansörünün elemanları Eş. 3.21 ile hesaplanır.

$$E_{AB} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_B}{\partial X_A} + \frac{\partial U_A}{\partial X_B} + \frac{\partial U_C}{\partial X_A} \frac{\partial U_C}{\partial X_B} \right) \quad (3.21)$$

Yer değiştirme-birim şekil değiştirme dönüşüm matrisi $[\mathbf{B}]$, düğüm yer değiştirmeleri ile birim şekil değiştirme arasında bağıntı oluşturur. Doğrusal analizde sadece şekil fonksiyonlarının konum türevlerini içerir. Doğrusal olmayan analiz için ayrıca deformasyon gradyan tansörünü de içermektedir. Doğrusal analizde değişmezken, doğrusal olmayan analizde deformasyon gradyan tansörünü içerdiği için yer değiştirmeye göre değişim gösterir.

Doğrusal yer değiştirme-birim şekil değiştirme dönüşüm matrisi $\mathbf{B}_L$,

$$[\mathbf{B}_L] = \begin{bmatrix} N_{1,1} & 0 & 0 & N_{2,1} & \dots & 0 & 0 \\ N_{1,2} & 0 & 0 & N_{2,2} & \dots & 0 & 0 \\ N_{1,3} & 0 & 0 & N_{2,3} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,1} & 0 & 0 & \dots & N_{8,1} & 0 \\ 0 & N_{1,2} & 0 & 0 & \dots & N_{8,2} & 0 \\ 0 & N_{1,3} & 0 & 0 & \dots & N_{8,3} & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,1} & 0 & \dots & 0 & N_{8,1} \\ 0 & 0 & N_{1,2} & 0 & \dots & 0 & N_{8,2} \\ 0 & 0 & N_{1,3} & 0 & \dots & 0 & N_{8,3} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

ve doğrusal olmayan analiz için $[\mathbf{B}_N]$ dnüşüm matrisi [43],

$$[\mathbf{B}_N] = \begin{bmatrix} F_{11}N_{1,1} & F_{21}N_{1,1} & F_{31}N_{1,1} & \dots & F_{31}N_{8,1} \\ F_{12}N_{1,2} & F_{22}N_{1,2} & F_{32}N_{1,2} & \dots & F_{32}N_{8,2} \\ F_{13}N_{1,3} & F_{23}N_{1,3} & F_{33}N_{1,3} & \dots & F_{33}N_{8,3} \\ F_{12}N_{1,1} + F_{11}N_{1,2} & F_{22}N_{1,1} + F_{21}N_{1,2} & F_{32}N_{1,1} + F_{31}N_{1,2} & \dots & F_{32}N_{8,1} + F_{31}N_{8,2} \\ F_{13}N_{1,2} + F_{12}N_{1,3} & F_{23}N_{1,2} + F_{22}N_{1,3} & F_{33}N_{1,2} + F_{32}N_{1,3} & \dots & F_{33}N_{8,2} + F_{32}N_{8,3} \\ F_{13}N_{1,1} + F_{11}N_{1,3} & F_{23}N_{1,1} + F_{21}N_{1,3} & F_{33}N_{1,1} + F_{31}N_{3,1} & \dots & F_{33}N_{8,1} + F_{31}N_{8,3} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

şeklinde-dir. Burada N_I , şekil fonksiyonunu ve $N_{I,j}$, şekil fonksiyonunun konuma göre türevini, F_{ij} ise deformasyon gradyan tansörünün ilgili elemanını ifade eder.

$[\mathbf{B}_N]$ dönüşüm matrisi kullanılarak Lagrangian şekil değiştirme matrisi $\{\mathbf{E}\}$ Eş. 3.24’de gösterildiği gibi ifade edilir.

$$\{E\} = [B_N]\{u\} \quad (3.24)$$

Deplasman-birim şekil değiştirme ilişkisindeki doğrusal olmama durumundan dolayı varyasyonel denklemlerin doğrudan bir çözümü olmamaktadır. Arka arkaya bir dizi doğrusallaştırma yaparak iteratif Modifiye Newton-Raphson yöntemi ile çözüm elde etmek mümkündür.

İç kuvvetler şekil değişiminin doğrusal olmayan bir fonksiyonu olduğu için, oluşacak kuvvet-yer değiştirme denkleminin iteratif olarak çözülmesi gerekecektir. Genel bir doğrusal olmayan denklem Newton-Raphson yöntemi ile bir dizi doğrusallaştırma işlemiyle birlikte çözülebilir. Newton-Raphson yöntemi gibi iteratif bir yöntem tanjant rijitlik matrisi kullanımını gerektirir. Toplam Lagrangian formülasyonunda tanjant rijitlik matrisi, doğrusallaştırılmış enerji formunun ayrıklaştırılmış haline karşılık gelir. Tanjant rijitlik matrisinin doğrusal kısmının elde edilmesinde kullanılacak 9x9 büyüklüğündeki $[\Sigma]$ matrisi Eş. 3.25 ile elde edilir.

$$\bar{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\Sigma] = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{S}} & \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{S}} & \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{S}} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Burada $\mathbf{S}$ ikinci Piola-Krichhoff gerilme tansörü ve S_{IJ} bileşenlerini ifade etmektedir. Tanjant rijitlik matrisi $[\mathbf{K}_T]$, doğrusal ve doğrusal olmayan kısımların toplanması ile, Eş. 3.26'daki gibi yazılabilir.

$$[\mathbf{K}_T] = \iiint_{\Omega_0} ([\mathbf{B}_N]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}_N] + [\mathbf{B}_L]^T [\Sigma] [\mathbf{B}_L]) d\Omega \quad (3.26)$$

Genellikle buradaki integral Gauss kareleme yöntemi yardımı ile elde edilir. Hexahedral eleman için 2x2x2 integrasyon noktası kullanılmıştır.

Doğrusal olmayan elastik sistemin varyasyonel eşitliği, $a(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}})$, kullanılarak $\mathbf{f}^{int}$ iç kuvvetler Eş.(3.27) ile elde edilir [38].

$$a(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) = \iiint_{\Omega_0} \mathbf{S} : \bar{\mathbf{E}} d\Omega = \{\bar{\mathbf{u}}\}^T \iiint_{\Omega_0} [\mathbf{B}_N]^T \{\mathbf{S}\} d\Omega \equiv \{\bar{\mathbf{u}}\}^T \{\mathbf{f}^{int}\} \quad (3.27)$$

Minimum potansiyel enerji prensibinden faydalanılarak sonlu elemanlar matris eşitliği aşağıdaki gibi yazılır [38].

$$\{\bar{\mathbf{u}}\}^T [\mathbf{K}_T] \{\Delta \mathbf{u}\} = \{\bar{\mathbf{u}}\}^T \{\mathbf{f}^{ext} - \mathbf{f}^{int}\} \quad (3.28)$$

Burada $\bar{\mathbf{u}}$ sanal iş prensibindeki sanal yer değiştirmeyi, $\Delta \mathbf{u}$ deplasman artımını, $\mathbf{f}^{ext}$ dış kuvvetleri, $\mathbf{f}^{int}$ iç kuvvetleri ifade eder. Düğüm deplasmanları için bir başlangıç kabulü yapılarak bu denklem sisteminin çözümünden deplasmanlardaki artım, $\Delta \mathbf{u}$, hesaplanır ve mevcut düğüm deplasmanlarına eklenerek düğümün yeni deplasman değeri elde edilir. Böylelikle bir iterasyon tamamlanmış olur. Eşitiğin sağ tarafındaki dış kuvvetler ile iç kuvvetler arasındaki fark belirli bir tolerans değeri içinde sıfıra yaklaşıncaya kadar iterasyonlara devam edilir. Deplasman artımları hesaplanarak mevcut deplasmanlara eklenir ve yeni deplasmanlar hesaplanmış olur.

Eş. 2.1 ile elde edilen deformasyon gradyan tansörü $\mathbf{F}$ ve Eş. 2.15 ile elde edilen ikinci Piola Kirchhoff gerilmesi $\mathbf{S}$ kullanılarak hesaplanan Cauchy gerilmesi Eş. 3.29 ile hesaplanabilir.

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T \quad (3.29)$$

Yakınsama kriteri

İteratif çözümlerde iterasyonun sonlandırılması için bir kriter kullanılması gerekir. Her iterasyonun sonunda çözümün daha önceden karar verilen sınırlar içerisinde yakınsama gösterip göstermediği kontrol edilir. Karar verilen tolerans değerleri gerçekçi sınırlar içerisinde kalmalıdır. Çok küçük veya çok büyük seçilen değerler sonuca etki eder.

Yakınsama kriteri (ε_R) olarak yük veya deplasman değerleri kullanılabilir. Düğüm noktalarının yer değiştirme vektörü $\{\mathbf{u}\}$, uygulanan yük vektörü $\{\mathbf{f}^{ext}\}$, rijitlik matrisi $[\mathbf{K}]$ olmak üzere Eş. 3.30 ile artık $\{\mathbf{e}_R\}$ vektörü hesaplanır. Yük değeri kullanıldığında Eş. 3.31 formülasyonu kullanılabilir [42].

$$\{\mathbf{e}_R\} = \{\mathbf{f}^{ext}\} - [\mathbf{K}] \{\mathbf{u}\} \quad (3.30)$$

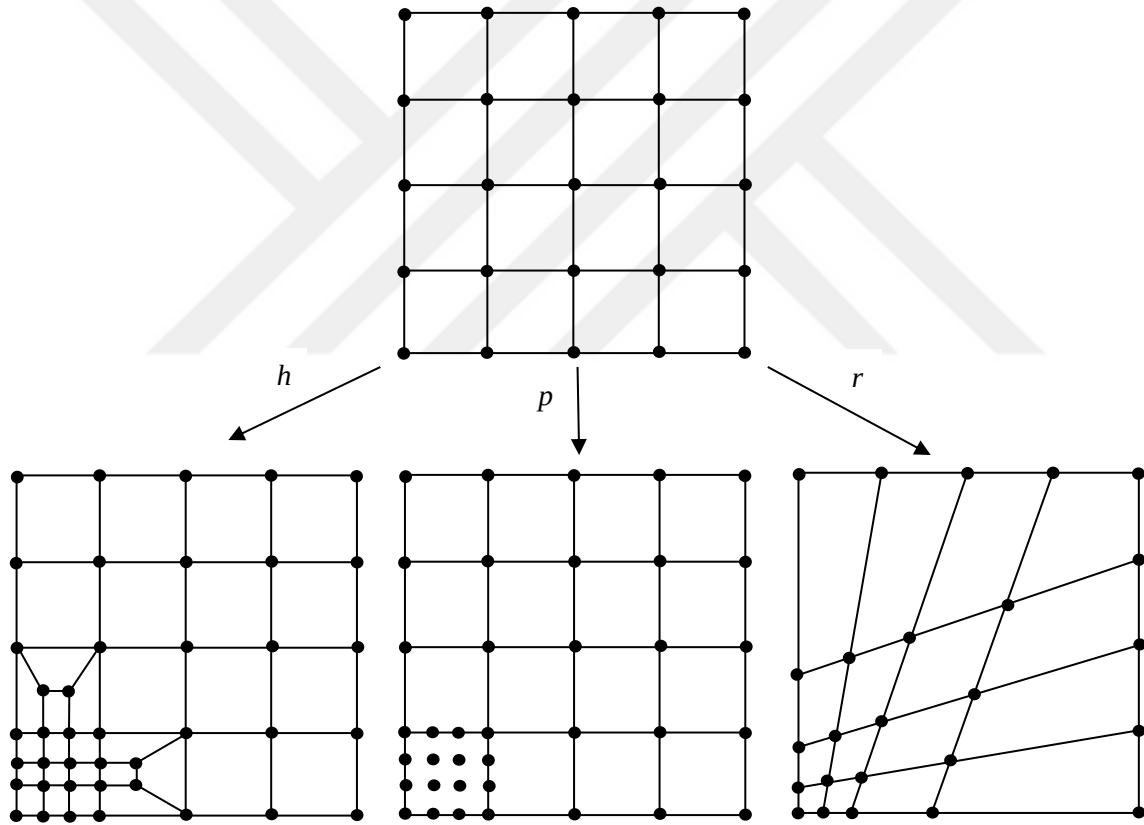
$$\|\mathbf{e}_R\| < \varepsilon_R \|\mathbf{f}^{ext}\| \quad (3.31)$$





4. UYARLAMALI YÖNTEMLER VE HEXAHEDRAL SONLU ELEMANLARDA KULLANIMI

Uyarlamalı sonlu eleman ağı, oluşturulan başlangıç eleman ağının problem şartlarına bağlı otomatik olarak gereken bölgelerde değiştirilmesi ile elde edilen sonlu eleman ağını ifade etmektedir. Sonlu eleman ağının sıklaştırılması, yani eleman boyutunun küçültülmesi sıklıkla analizi yapan mühendis tarafından yapılmaktadır. Uyarlamalı sonlu eleman ağında kişiden bağımsız olarak belirlenen bir kritere göre sıklaştırma otomatik olarak yapılır. Uyarlamalı sonlu eleman ağı h -, p -, r - ve hp - tipi olmak üzere dört farklı yöntem ile Şekil 4.1’de gösterildiği gibi yapılabilir [37].



Şekil 4.1. Farklı uyarlamalı sonlu eleman ağları [37]

Uyarlamalı h - dağılımı ile çözüm ağı yoğunluğu ağıdaki elemanların büyüklüğü değiştirilir. Düğüm noktası ve eleman sayısındaki artıştan dolayı problemin çözüm süresinde artışa neden olur. p - dağılımı ile çözüm ağı elemanının derecesi değiştirilir. Bu sayede daha yakınsak bir çözüm elde edilmiş olsa bile rijitlik matrisinde bant genişliğini artırdığı için çözüm süresinde artışa neden olur. r - dağılımı ile çözüm ağı elemanının derecesi ve sayısı

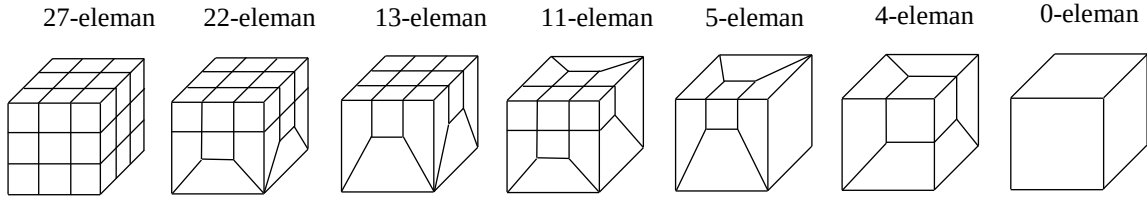
sabit tutulmak kaydı ile çözüm ağı hareket ettirilerek hedeflenen bölgede daha küçük sonlu elemanlar oluşturulur. Bu dağılım yönteminde çözüm denklemlerinin hem yapısı hem de boyutu korunmuş olur. hp - dağılımında ise h - ve p - yöntemleri birlikte kullanılır [20,37,42].

Mühendislik hesaplarında sıklıkla kullanılan sonlu elemanlar yazılımlarından biri olan Abaqus çeşitli büyüklükler için hesapladığı hata indikatörü ile iki boyutta üçgen ve dörtgen elemanlarda, üç boyutta dörtyüzlü elemanlarda uyarlamalı analiz yapmaktadır. Bu büyüklükler “Element energy density”, “Mises stress”, “Equivalent plastic strain”, “Plastic strain”, “Creep strain”, “Heat flux”, “Electric flux”, “Electric potential gradient”. Bu parametrelerden hangisinin seçileceği yapılan analize göre belirlenmektedir. Hata indikatörü patch recovery tekniği [20] ile hesaplanmaktadır. Bu değişkenler için kullanılan hata dağılımları minimum/maksimum ve uniform olmak üzere iki çeşittir. Minimum/maksimum hata dağılımında öncelikle sonlu elemanların/düğüm noktalarının ortalama değişken değeri bulunur. Bütün sonlu elemanlar/düğüm noktaları bu değer ile karşılaştırılır. Karşılaştırma sonucunda mevcut değişken değerinin ortalama değişken değerinden önceden karar verilen oranda fazla olması veya az olması durumunda uyarlamalı dağılım yapılacak elemanlara karar verilir. Uniform dağılımda ise seçilen sabit hata gösterge değeri dikkate alınarak uyarlamalı dağılım yapılacak elemanlara karar verilir. Değerlerin değişim oranına göre belirlenen sayıda veya kullanıcının seçtiği tekrar sayısına göre uyarlamalı çözüm oluşturulur [40].

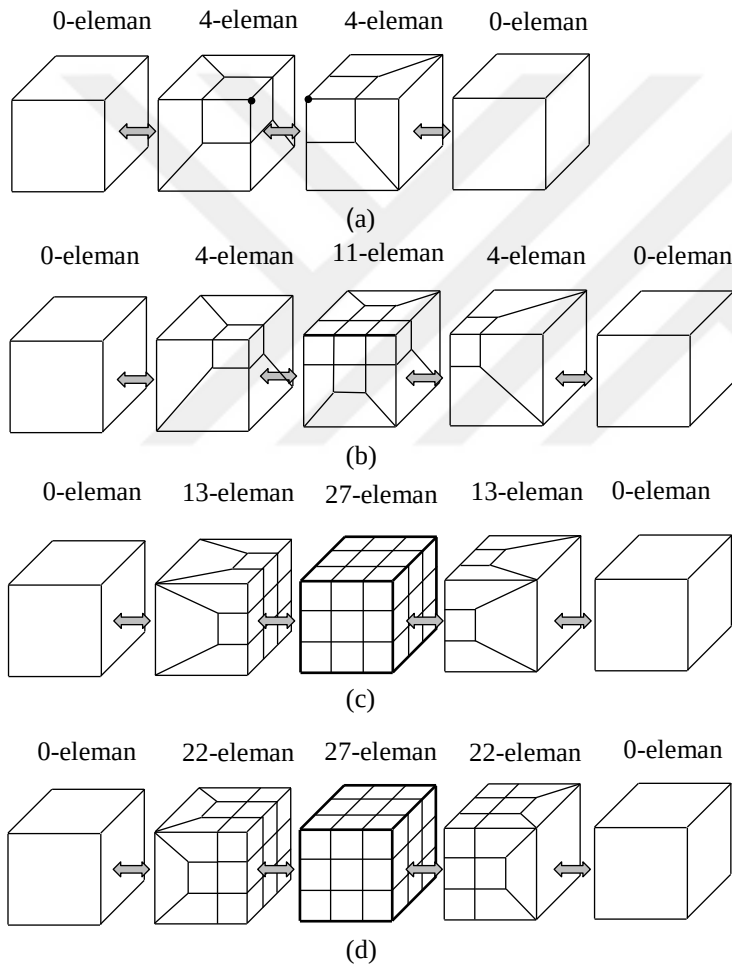
Bu çalışmada hexahedral sonlu elemanlar ile h - tipi uyarlamalı sonlu elemanlar kullanılmıştır. Uyarlamalı ağı oluşturmak için değişken olarak gerilmeler ve minimum/maksimum hata göstergesi kullanılmıştır. Etkin gerilme, problemde tanımlanan dış yüke bağlı olarak kullanılan bir gerilme bileşeni olarak ifade edilmektedir.

Sonlu eleman sıklaştırması için en sık kullanılan yöntem, bir elemanın daha küçük elemanlara bölünmesi şeklindedir. Bu bölme işleminden sonra sonlu eleman ağına oluşan düğüm noktaları başka bir elemanın düğüm noktasına bağlanmalı, eleman kenarları veya yüzeyleri başka elemanların kenar ve yüzeylerini kesecek şekilde oluşmamalıdır. Bunu sağlayacak şekilde bölme işlemi için kullanılabilecek eleman tipleri Şekil 4.2’de gösterilmektedir. Burada üzerinde bölme işlemi yapılmamış bir eleman 0-eleman olarak ve bölünen eleman, içinde oluşan eleman sayısına göre isimlendirilmiştir. Bölünen elemanın

eleman ağı ile bağlantısını sağlayacak elemanlar ise geçiş elemanları olarak ifade edilecektir.



Şekil 4.2. Sıklaştırmada kullanılan eleman türleri



Şekil 4.3. Farklı sıklaştırma stratejileri, a) Bir noktada b) bir kenarda c) ve d) bir elemanda

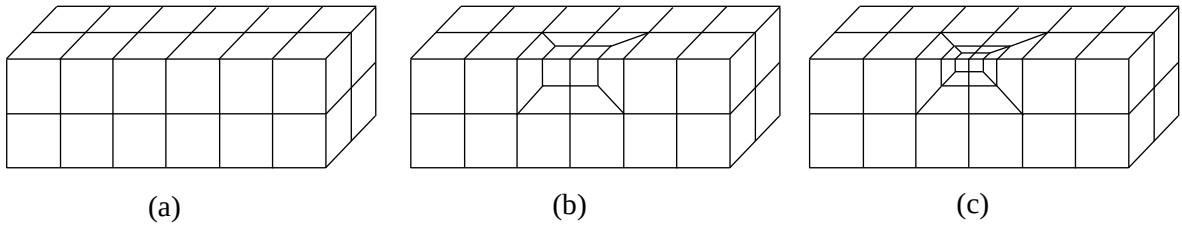
Sıklaştırmada düğüm noktası, eleman kenarı, eleman yüzeyi veya elemanın kendisi kullanılarak yeni sonlu eleman ağı teşkil edilebilir. İhtiyaca uygun olarak yapılabilecek sıklaştırma stratejileri Şekil 4.3’de gösterilmektedir. Bir elemandaki bölme işleminden sonra etkilenen diğer elemanlarda da gerekli bölme işlemi yapılarak geçiş elemanları elde

edilmelidir. Bu doğrultuda bölünen elemana bağlanabilecek eleman türleri Çizelge 4.1’de ifade edilmiştir.

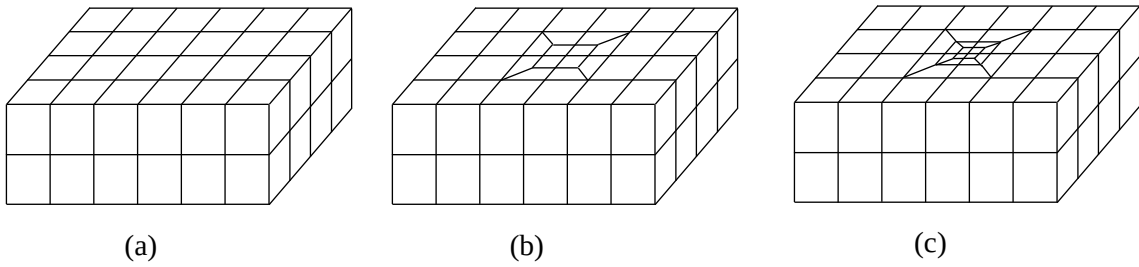
Çizelge 4.1. Bölünen elemana bir yüzeyinden birleştirilebilen elemanlar

Bölünen Eleman	Geçiş elemanı
27	27, 22, 13
22	27, 22, 13, 11, 0
13	27, 22, 13, 5, 0
11	22, 11, 4, 0
5	13, 5, 0
4	11, 4, 0

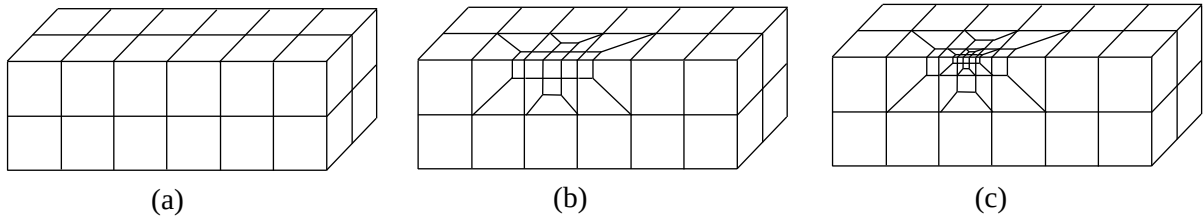
Bir nokta üzerinden bölme işlemi 4-eleman kullanarak yapılır. 4-eleman, üç yüzeyinden 0-eleman ile ve diğer üç yüzeyinden 4-eleman ile bağlanabilmektedir. Şekil 4.4’de bir kenar üzerinde bulunan nokta için ve Şekil 4.5’de bir yüzey üzerindeki nokta için sıklaştırma gösterilmektedir. Ayrıca 11-eleman kullanarak bir kenarda yapılabilecek sıklaştırma Şekil 4.6’da ve 27-eleman kullanarak bir elemanda yapılabilecek sıklaştırma Şekil 4.7’de gösterilmiştir.



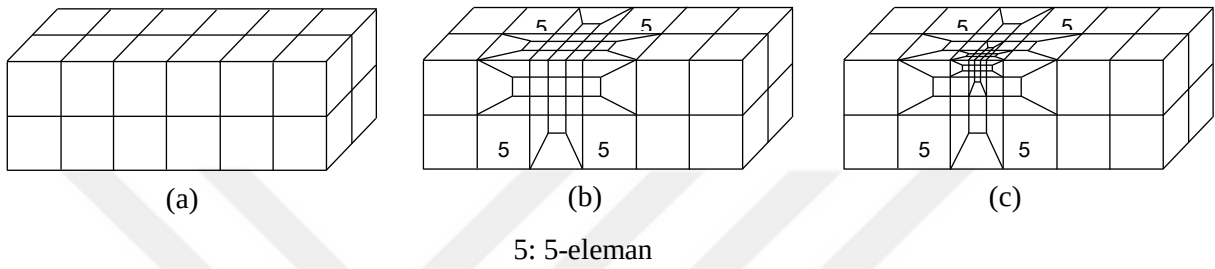
Şekil 4.4. Kenar üzerinde noktada sıklaştırma a) Başlangıç eleman ağı b) Birinci sıklaştırma c) İkinci sıklaştırma



Şekil 4.5. Bir yüzey üzerindeki noktada sıklaştırma, a) Başlangıç eleman ağı b) Birinci sıklaştırma c) İkinci sıklaştırma

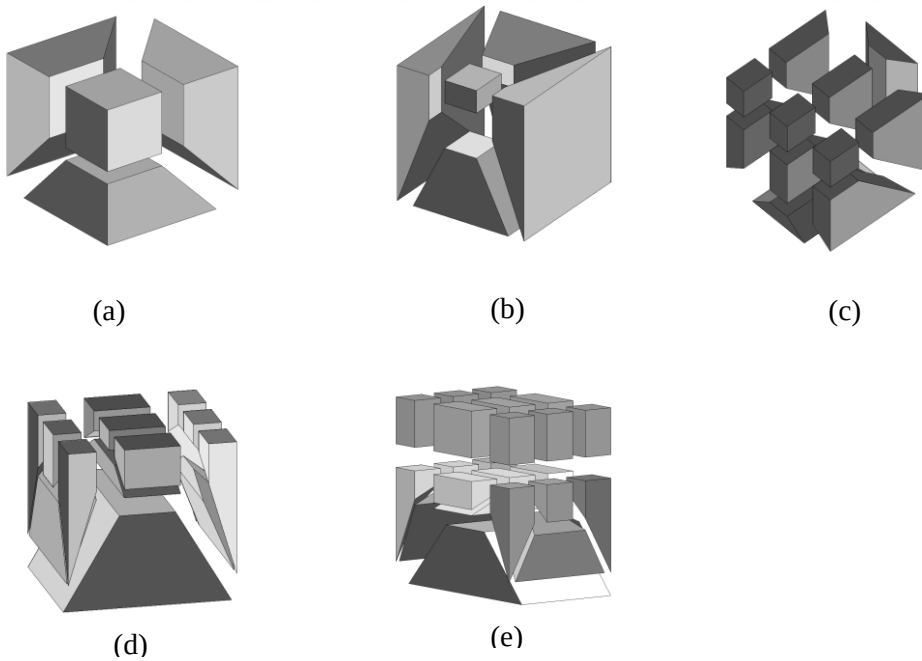


Şekil 4.6. Bir eleman kenarında sıklaştırma, a) Başlangıç eleman ağı b) Birinci sıklaştırma c) İkinci sıklaştırma



Şekil 4.7. Bir elemanda sıklaştırma, a) Başlangıç eleman ağı b) Birinci sıklaştırma c) İkinci sıklaştırma

Ayrıca bazı elemanlarda bölünme sonrası oluşan yeni elemanlar Şekil 4.8’de gösterilmektedir.



Şekil 4.8. Bölme sonrası oluşan bazı elemanlar, a) 4-eleman b) 5-eleman c) 11-eleman d) 13-eleman e) 22-eleman

Uyarlamalı sonlu eleman ağında bölme işlemi yapılacak elemanların seçiminde problem özelinde etkin olan gerilmeler kullanılmıştır. Örneğin dikdörtgen blokta tek nokta yüklemesi için kuvvet yönünde normal gerilme, dikdörtgen blokta üst yüzeyden kesme yüklemesi için kuvvet yönünde kesme gerilmesi ve dairesel boşluk içeren dikdörtgen blok probleminde de kuvvet yönünde normal gerilme değerleri kullanılmıştır.

MATLAB ortamında yazılan programda başlangıç sonlu eleman ağı dikdörtgenler prizması şeklinde bir geometriyi hexahedral elemanlara bölmek için hexahedral elemanın bir kenar uzunluğu verildikten sonra, prizma kenar uzunlukları verilen hexahedral elemanın bir kenar uzunluğuna bölünür, tam sayı olmaması durumunda sayı yuvarlanır, sonrasında elde edilen sayı kadar blok geometri kenarları bölünerek elde edilir.

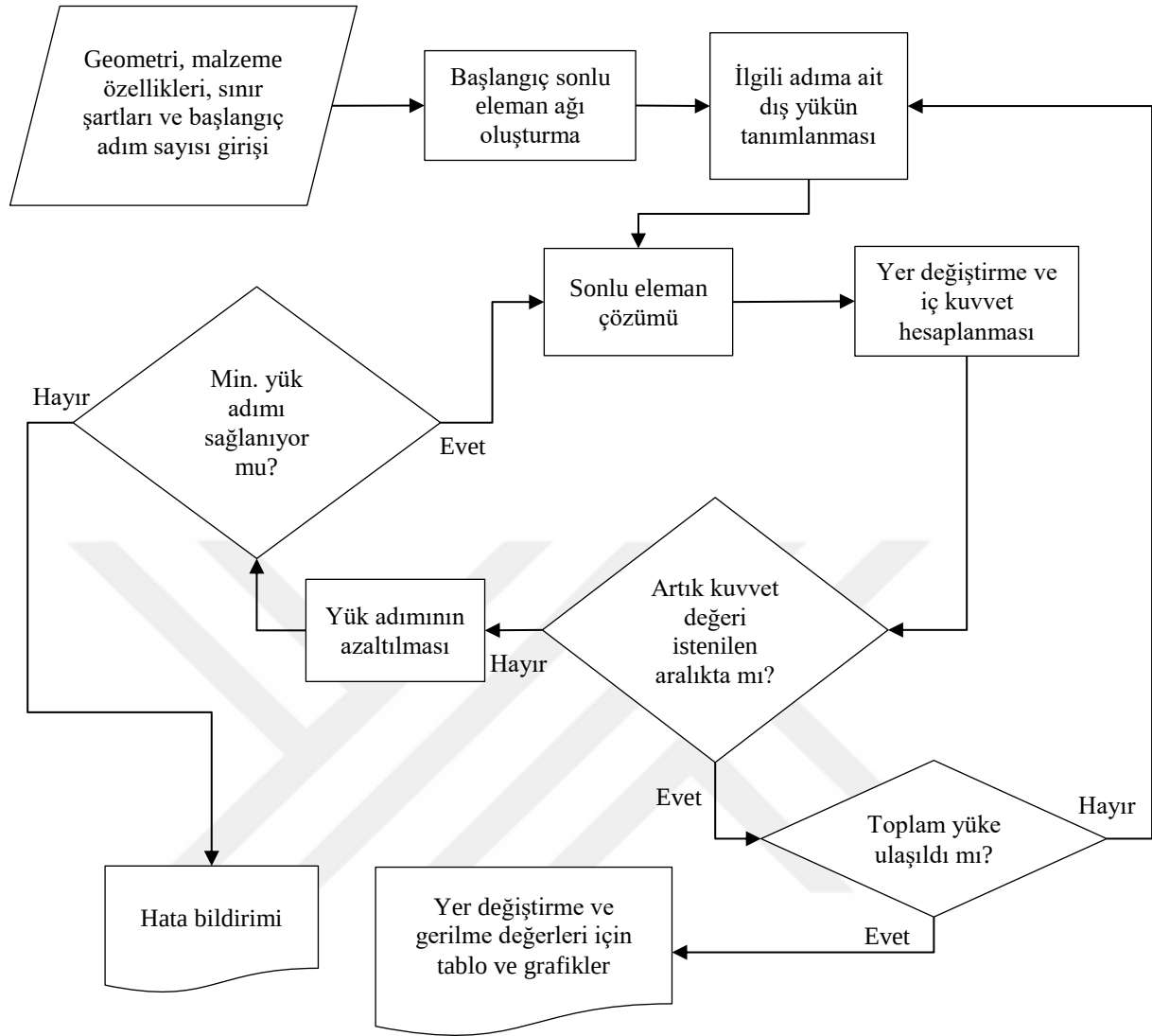
Dairesel boşluk içeren bir geometriyi başlangıç sonlu eleman ağı hexahedron elemanlara bölmek için boşluğun çeyrek kenarının ve boşluğun yatay en üst/en alt kenara olan mesafesinin kaç parçaya bölüneceği ayrı ayrı belirtilir. Sonrasında çeyrek çember etrafında elde edilen en büyük hexahedron elemanın bir kenar uzunluğu kullanılarak kalan geometri bölünür.

5. ANALİZLER

Sonlu elemanlar yöntemi öncelikle bilgisayar ortamında kullanıma yönelik bir sayısal çözüm yöntemidir. Karmaşık geometrilerin elemanlara bölünmesi ve eleman bazında kurulacak denklem sisteminin çözümü için MATLAB v.b. bir programlama ortamına ihtiyaç duyulur. Kullanıcı dostu arayüze sahip olan MATLAB ortamı geniş bir fonksiyon kütüphanesine sahiptir. Kullanıcı tarafından oluşturulan kodlar sonucunda elde edilen sayısal sonuçlar grafik çizimleri ile hızlıca görselleştirilebilmektedir. MATLAB, bu doğrultuda mühendislik hesaplarının hızlı ve kolay bir şekilde gerçekleştirilmesini sağlar.

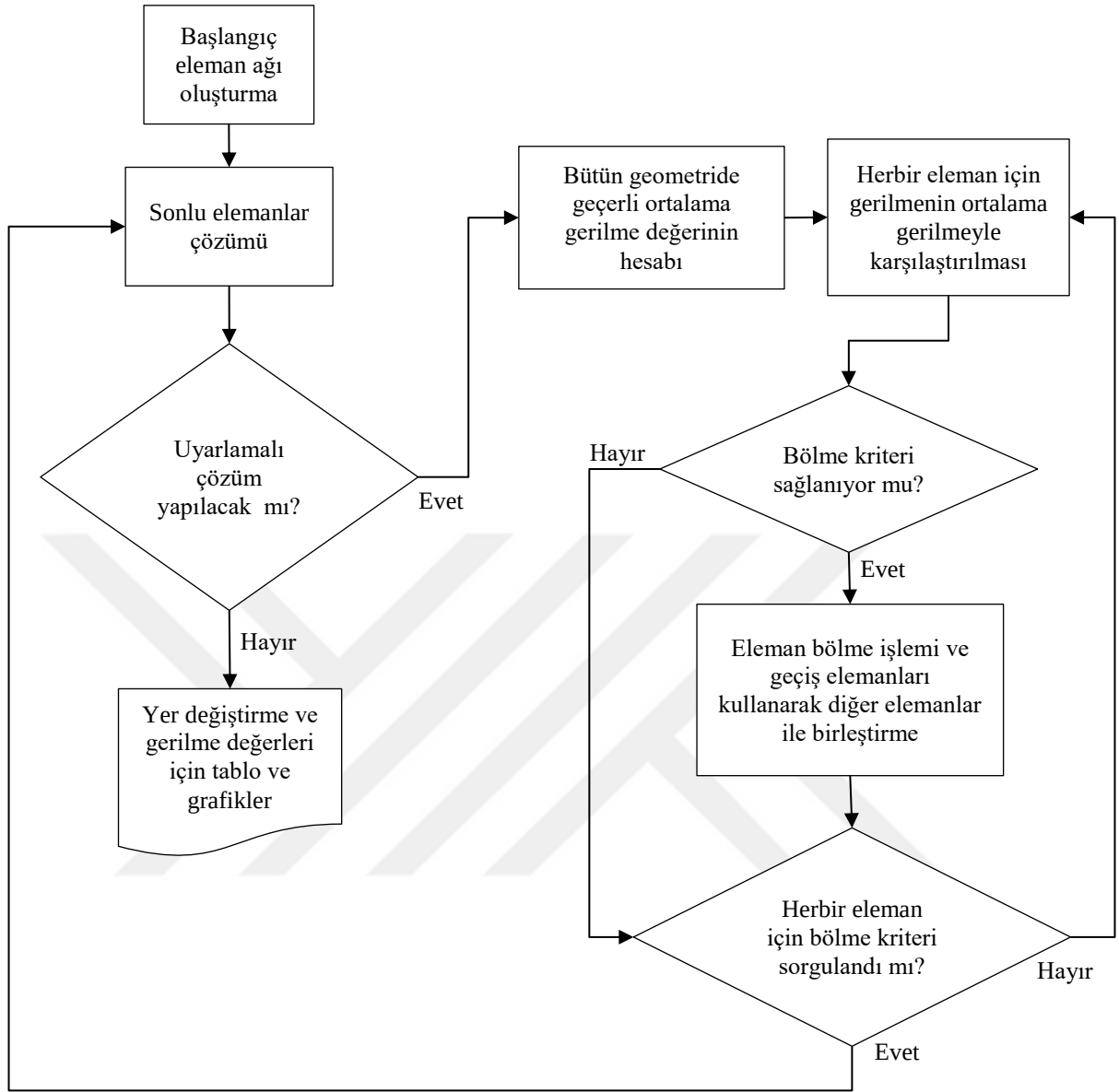
Hiperelastik ortamın sonlu elemanlar analizi için yazılan MATLAB kodu, herhangi bir arayüz oluşturmadan, yazılan fonksiyonların MATLAB'ın temel komut satırından çağırılması ile çalıştırılmaktadır. Öncelikli olarak sistemin sonlu elemanlara bölünmesi gerekmektedir. Oluşturulan ilk eleman ağı başlangıç eleman ağı olarak isimlendirilmiştir. Bu eleman ağının özelliği hızlıca oluşturulmuş ve istenilen sonlu eleman boyutundan uzak sonlu elemanlara sahip olmasıdır. Daha küçük elemanlara bölünerek oluşturulan eleman ağı sıklaştırılmış eleman ağıdır. Bu eleman ağı, iki şekilde oluşturulmuştur. Bunlardan ilki, tüm geometrideki elemanların bölünmesi ile sıklaştırılmaktadır. Bu sıklaştırma uniform sıklaştırma olarak isimlendirilmiştir. Diğer sıklaştırma yöntemi, sadece gerekli bölgedeki elemanların bölünmesini kullanmaktadır. Burada uyarlamalı yöntem ile gerekli bölgedeki elemanların sıklaştırılması yapılmıştır.

Sonlu eleman analizi için yazılan MATLAB kodunun çalışma mantığı Şekil 5.1'de gösterilen akış şeması ile ifade edilmektedir. Kodun çalışması için öncelikle problem özelliklerinin tanımlanması yapılır. Uygulanan toplam kuvvetin adım sayısına bölünmesi ile elde edilen yük adımı ve başlangıç eleman ağı kullanılarak bu yük adımı için sonlu eleman çözümü yapılır. Bu adımda elde edilen iç kuvvetler ve dış kuvvetler arasındaki farkın belirlenen bir değerden daha küçük olması istenir. Bu sağlanıyor ise çözüm yakınsamıştır ve yük adımı kadar artım yapılmış yeni yük değeri için işlemler tekrar edilir. Çözümün yakınsamaması durumunda bisection yöntemi ile yeni yük adımı için iterasyonlar tekrar edilir.



Şekil 5.1. Sonlu elemanlar çözümü için program akış şeması

Şekil 5.1’de gösterilen akış şeması başlangıçta belirlenen eleman ağı kullanılarak yapılan sonlu elemanlar çözümünü göstermektedir. MATLAB ortamında yazılan kod ile uyarlamalı sonlu elemanlar analizi yapılabilmektedir. Uyarlamalı analizde belirlenen bir kriter ve sonlu elemanlar çözümünden elde edilen sonuçlar kullanılarak yeni sıklaştırılmış eleman ağına karar verilmektedir. Bu sıklaştırılmış eleman ağı kullanılarak nihai çözüm bulunmaktadır. Eleman ağının uyarlamalı olarak sıklaştırılması ve sonlu eleman çözümü elde edilmesi için kullanılan kodun akış şeması Şekil 5.2’de gösterilmiştir.



Şekil 5.2. Uyarlamalı sonlu elemanlar analizi için program akış şeması

5.1. Ele alınan problemler

Çalışmanın bu aşamasında MATLAB ortamında yazılan kodun seçilen problemler için kullanılması yer almaktadır. Bu problemler temel geometri ve yüklemeleri içeren örnekler olarak belirlenmiştir. Ele alınan cisimlerin geometrileri dikdörtgen prizmatik geometriye sahiptir. Ayrıca bir örnekte dairesel bir boşluk yer almaktadır. Yükleme şartları noktasal basınç yüklemesi, basit kesme yüklemesi ve çekme yüklemesi olarak alınmıştır.

Bu örnekler için elde edilen sonuçların doğrulaması, literatürde sıklıkla kullanılan Abaqus sonlu elemanlar yazılımından elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılarak yapılmıştır. Bu doğrultuda Abaqus sonuçları ile yapılan karşılaştırmadan elde edilen % fark değerleri kullanılmıştır. %10 fark değerinin altındaki değerler beklenen makul değerler olarak görülmektedir.

MATLAB ortamında yazılan kod ile yapılan çözümlerde uyarlamalı sonlu eleman analizinin yanında uniform sıklaştırılmış sonlu eleman ağı da kullanılarak çözümler elde edilmiştir.

Problemlerde kullanılan hiperelastik cisim için malzeme parametreleri her bir problemde aynı olacak şekilde belirlenmiştir.

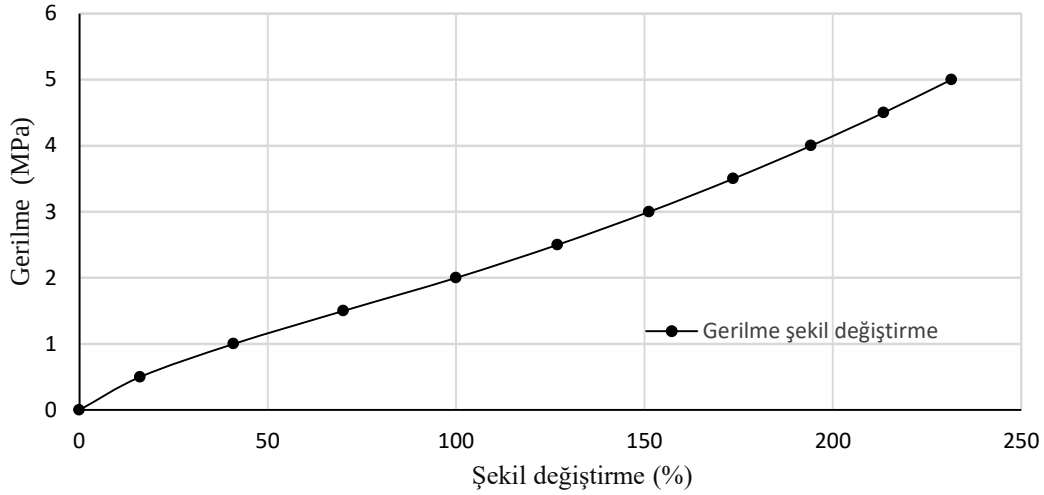
5.1.1. Hiperelastik ortam için malzeme parametreleri

Analizlerde üç parametrelili Mooney-Rivlin malzeme modeli kullanılmıştır. Bu model için ilk iki malzeme sabiti C_{10} ve C_{01} sabitleridir. Küçük birim şekil değişimi olduğu durumda $2(C_{10} + C_{01})$ değeri malzemenin kesme modülüne eşittir. Üçüncü malzeme sabiti hacim modülü olan K değeridir. Bu değer malzemenin sıkıştırılmaz özelliğini tanımlamada kullanılan penalti parametresi olarak görev yapmaktadır.

Literatürde kullanılan değerler içinden seçim yapılarak, C_{10} ve C_{01} sabitleri sırasıyla 0,552 MPa ve 0,138 MPa olarak alınmıştır [44]. Bu değerler kullanılarak hesaplanabilecek kesme modülü, G , 1,38 MPa ve elastisite modülü, E , 4,14 MPa olmaktadır. Poisson oranı hacim modülü ve kesme modülüne bağlı olarak aşağıdaki eşitlik ile hesaplanabilir.

$$\nu = \frac{\frac{3}{2} \frac{K}{G} - 1}{\frac{3}{2} \frac{K}{G} + 1} \quad (5.1)$$

Kullanılan malzemenin gerilme birim şekil değişime grafiği Şekil 5.3 ile verilmektedir.



Şekil 5.3. Kullanılan malzemenin gerilme-birim şekil değiştirme grafiği

C_{10} ve C_{01} sabitleri kullanılarak farklı hacim modülü değerleri için hesaplanan Poisson oranı değerleri Çizelge 5.1’de gösterilmiştir. $K=100$ değerinden büyük hacim modülleri için cismin neredeyse sıkıştırılmaz olduğu kabul edilebilir.

Çizelge 5.1. $C_{10} = 0,552$ ve $C_{01} = 0,138$ için hacim modülüne karşılık Poisson oranı

K (MPa)	1	3	5	10	100	1000	10000
ν	0,0274	0,3006	0,3736	0,4340	0,4931	0,4993	0,4999

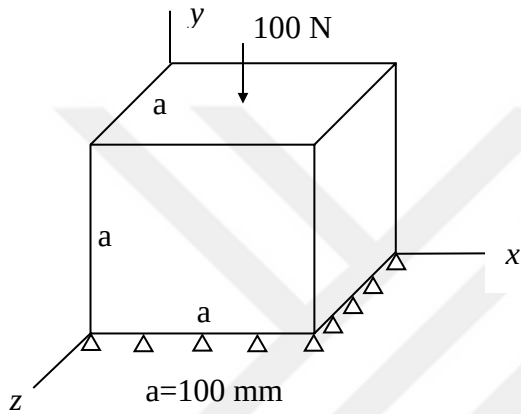
Sonlu elemanlar analizinde yüksek K değerine sahip malzemeler için yapılan çözümde hacimsel kilitleme (volumetric locking) adı verilen bir stabilite problemi ile karşılaşmaktadır. Özellikle yer değiştirme değerindeki küçük bir değişim, büyük K değeri nedeniyle basınçta büyük bir değişime yol açmaktadır. Bu nedenle sonlu eleman daha rijit bir davranış sergilemekte ve daha az şekil değiştirmektedir.

5.1.2. Üzerine tekil yükleme uygulanan hiperelastik blok

Burada kübik geometriye sahip hiperelastik bir cismin üzerine etki eden tekil basınç kuvveti nedeniyle oluşacak yer değiştirme ve gerilme değerleri hesaplanmıştır. Cismin kenar uzunluğu 100 mm’dir. Alt yüzeyine ait düğüm noktalarının yer değiştirmeleri Şekil 5.4’de gösterildiği gibi düşey ve yatay doğrultularda sınırlandırılmıştır. Bloğun üst yüzünün orta noktasına 100 N değerinde basınç oluşturacak tekil kuvvet uygulanmıştır.

MATLAB ortamında yapılan sonlu elemanlar hesabında başlangıç adım sayısı 100 olarak seçilmiştir.

Hesaplanan iç kuvvetler ile uygulanan dış kuvvetler arasındaki fark %2'nin altına indiğinde sonlu elemanlar çözümü yakınsamış olarak kabul edilmiştir. Yakınsayan çözüm elde edilince sonraki yük adımına geçilerek toplam 100N yük değerine ulaşmaya kadar yük adımı miktarı değerinde yük artırılarak çözüm yapılmıştır.



Şekil 5.4. Blok üzerine etki eden tekil basınç yüklemesi

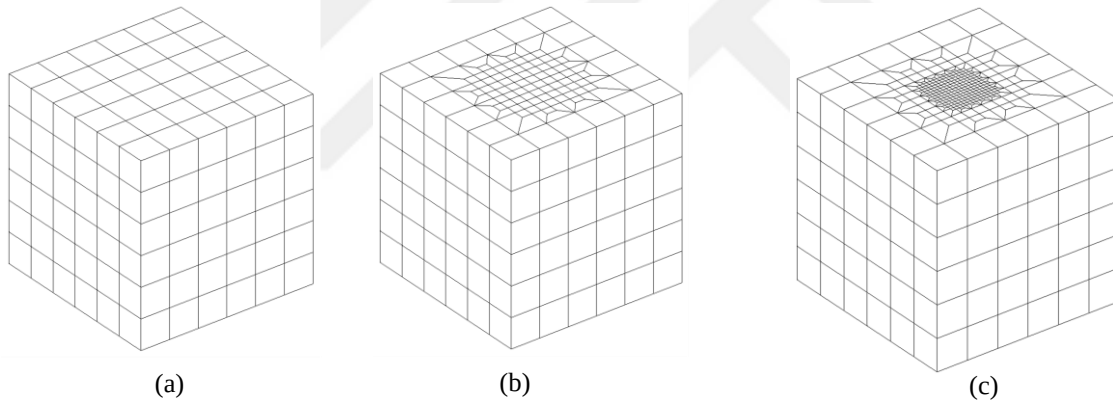
Uyarlamalı sonlu elemanlar analizi

Analizde öncelikle uyarlamalı çözüm ağı kullanılmıştır. Uyarlamalı sonlu elemanlar için kullanılan başlangıç çözüm ağı Şekil 5.5a'da gösterilmektedir. Bu eleman ağı görece az sayıda elemana sahip olacak şekilde seçilmiştir. Bu eleman ağının oluşturulmasında kenar uzunlukları eşit sayıda düğüm noktasına bölünmüştür. Bu doğrultuda yapılan bölünme ile 216 adet hexahedral eleman içerecek şekilde başlangıç eleman ağı oluşturulmuştur.

Bu örnekte iki kez arka arkaya uyarlamalı sonlu eleman analizi yapılmıştır. Birinci ve ikinci uyarlamalı analizlere ait sonlu eleman ağları Şekil 5.5 (b) ve (c)'de gösterilmektedir. Tekil yükün uygulandığı yön olan y doğrultusundaki normal gerilme, σ_{22} , uyarlamalı çözüm ağı oluşturmada kullanılan sıklaştırma kriteri için gerekli gerilme parametresi olarak seçilmiştir. Sıklaştırma kriteri için, başlangıç eleman ağı ile yapılan sonlu elemanlar çözümünün sonunda elde edilen σ_{22} normal gerilmesinin tüm elemanlardaki ortalama

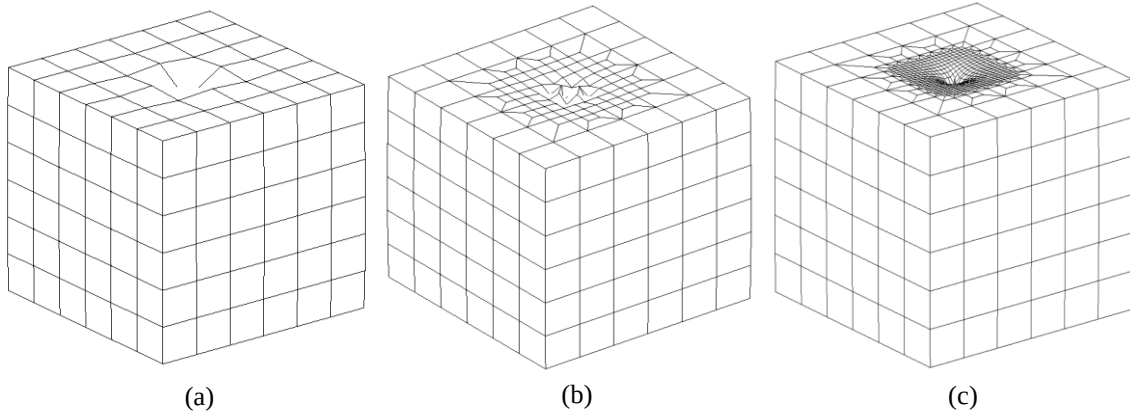
değeri hesaplanmıştır. Sonrasında tüm elemanlardaki σ_{22} normal gerilme değeri ortalama değer ile karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırma sonucunda ortalamanın % 3'ünün altında olanlar ile ortalamanın % 30 üstünde olan elemanın bölünmesine karar verilmektedir.

Birinci uyarlamalı analizde 1016, ikinci uyarlamalı analizde 3108 adet sonlu eleman oluşmuştur. Kullanılan sıklaştırma kriteri sonucunda tekil basınç yükünün uygulandığı düğüm etrafındaki elemanlar bölünerek daha küçük elemanlar oluşmuştur. Sıklaştırma kriteri sonucu bölünmek durumunda kalan eleman 27-eleman olarak isimlendirilen elemana dönüştürülmüştür. Bu elemanın bölünmeyen elemanlar ile birleştirilmesi gerektiğinde geçiş elemanı olarak isimlendirilen Şekil 4.2'de gösterilen uygun elemanlardan biri kullanılmıştır. Uyarlamalı sıklaştırma sonrasında eleman minimum kenar uzunluğu 1,85 mm olmuştur. Bu değer başlangıç ağının minimum kenar uzunluğunun %11'ine karşılık gelmektedir.



Şekil 5.5. Sonlu eleman çözüm ağı a) başlangıç, b) birinci uyarlamalı, c) ikinci uyarlamalı

İki kez uyarlamalı çözümden elde edilen şekil değiştirmiş geometriler, yer değiştirmelerin daha iyi görülebilmesi için beş kat büyütülerek Şekil 5.6'da verilmiştir. Maksimum yer değiştirme, tekil yükün uygulandığı noktada düşey yönde oluşmaktadır. Bu yer değiştirme $u_{2_{\max}}$ olarak isimlendirilmiştir ve değeri Çizelge 5.2'de gösterilmiştir. Düşey yöndeki yer değiştirmelerin tüm blok üzerinde değişimi renk grafiği olarak Şekil 5.7'de gösterilmiştir.



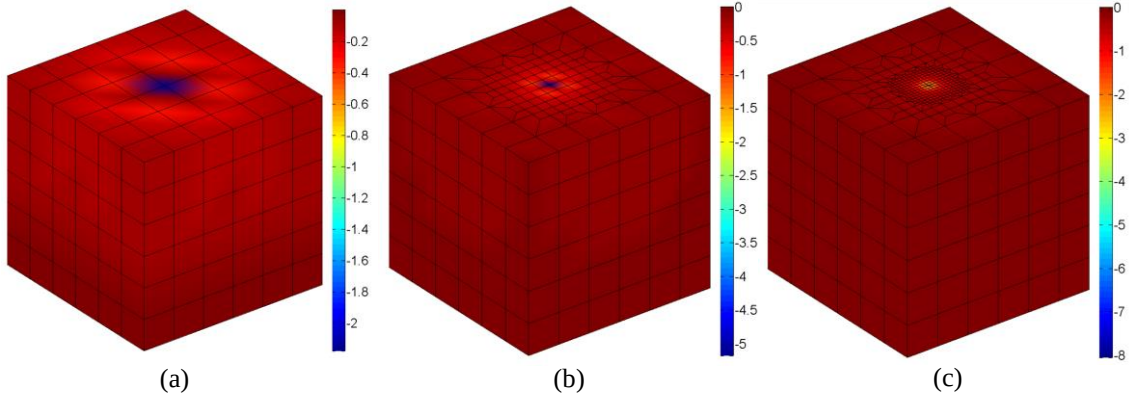
Şekil 5.6. Beş kat artırılarak gösterilen şekil değiştirmiş geometri, a) başlangıç çözüm ağı b) birinci uyarlamalı çözüm c) ikinci uyarlamalı çözüm

Çizelge 5.2. Uyarlamalı çözümlerde maksimum yer değiştirme ($u_{2_{\max}}$) ve mutlak değerce maksimum normal gerilme ($\sigma_{22_{\max}}$)

Analiz adı	Eleman sayısı	Eleman min. kenar uzunluğu (mm)	$u_{2_{\max}}$ (mm)	$\sigma_{22_{\max}}$ (MPa)
Başlangıç çözüm ağı	216	16,7	2,18	0,164
Birinci uyarlamalı analiz	1016	5,55	6,17	0,791
İkinci uyarlamalı analiz	3108	1,85	8,05	0,811

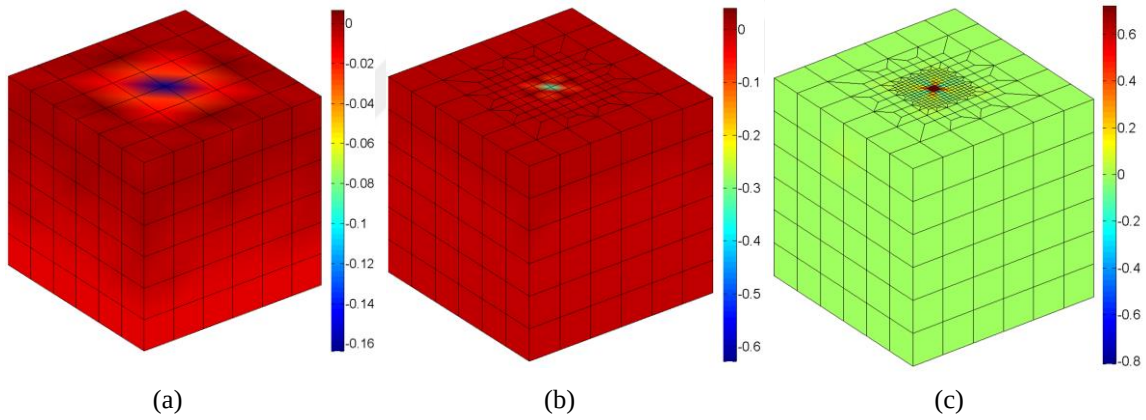
Ayrıca MATLAB ortamında yazılan kod ile uyarlamalı sonlu eleman çözümünü sonrasında elde edilen y - yönündeki maksimum normal gerilme, $\sigma_{22_{\max}}$, değerleri Çizelge 5.2’de verilmiştir. Bu gerilme bileşenin bütün blok üzerinde değişimi renk grafiği olarak Şekil 5.8’de gösterilmiştir.

y - yönünde kuvvetin uygulandığı noktada oluşan maksimum yer değiştirmenin değeri, 216 elemanlı başlangıç çözüm ağı için 2,18 mm, 1016 elemanlı birinci uyarlamalı analizde 6,17 mm ve 3108 elemanlı ikinci uyarlamalı analizde 8,05 mm olmaktadır. Düşey yöndeki maksimum normal gerilme, kuvvetin uygulandığı noktada meydana gelmektedir. Bu maksimum gerilme değeri başlangıç çözüm ağı için 0,164 MPa, birinci uyarlamalı çözümde 0,791 MPa ve ikinci uyarlamalı çözümde 0,811 MPa olmaktadır.



Şekil 5.7. u_2 (mm) yer değiştirme renk grafikleri, a) başlangıç çözüm ağı b) birinci uyarlamalı çözüm, c) ikinci uyarlamalı çözüm

Uyarlamalı sonlu elemanlar analizi tekil yük uygulandığı noktada sonlu elemanlar dağılımını ve şeklini otomatik olarak ayarlayarak adaptif bir çözüm sağlamıştır.



Şekil 5.8. σ_{22} (MPa) normal gerilme renk grafikleri, a) başlangıç çözüm ağı b) birinci uyarlamalı çözüm, c) ikinci uyarlamalı çözüm

Uniform sıklaştırma sonlu elemanlar analizi

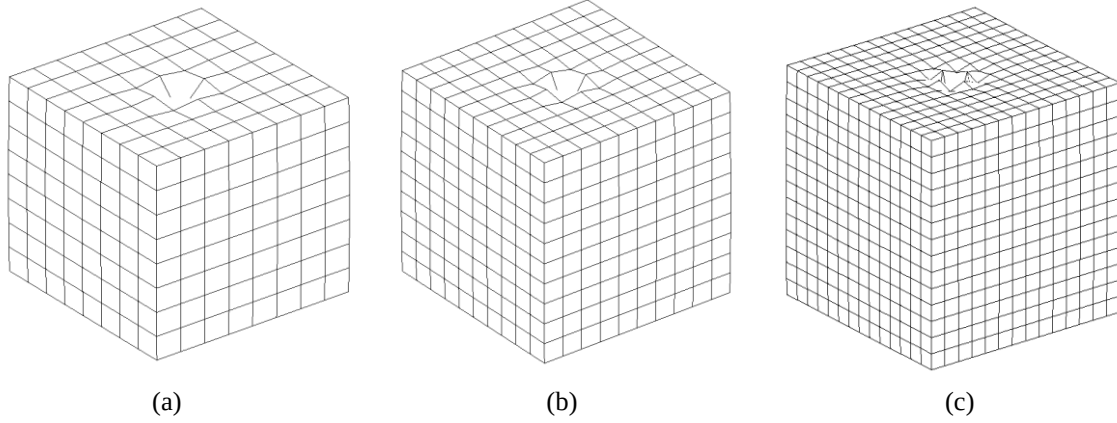
Ayrıca ağıdaki tüm elemanların bölündüğü uniform sıklaştırma olarak isimlendirilen analizler yapılmıştır. Bu analizlerin başlangıç çözüm ağı uyarlamalı sıklaştırmada kullanılan ile aynı başlangıç çözüm ağıdır. Uniform sıklaştırma sonrasında oluşan eleman sayıları Çizelge 5.3'de verilmiştir. Üçüncü uniform sıklaştırma sonrasında eleman sayısı 2744'e yükselmiştir. Minimum eleman kenar uzunluğu ise 7,14 mm'ye düşmüştür.

Minimum kenar uzunluğu, başlangıç çözüm ağının minimum eleman kenar uzunluğunun %43'ü olmuştur.

Çizelge 5.3. Uniform sıklaştırma için maksimum yer değiştirme ($u_{2_{max}}$) ve mutlak değerce maksimum normal gerilme ($\sigma_{22_{max}}$)

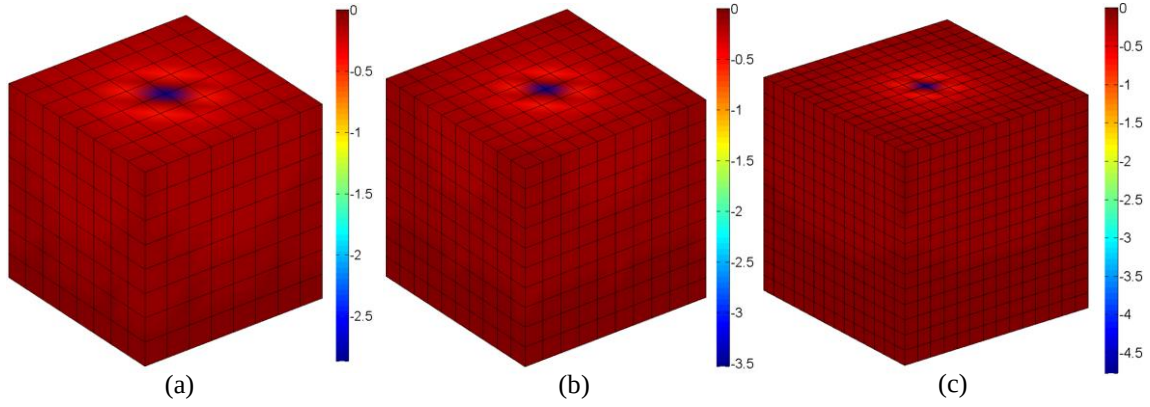
Analiz adı	Eleman sayısı	Eleman min. kenar uzunluğu (mm)	$u_{2_{max}}$ (mm)	$\sigma_{22_{max}}$ (MPa)
Başlangıç çözüm ağı	216	16,7	2,18	0,164
1. uniform sıklaştırma	512	12,5	2,86	0,265
2. uniform sıklaştırma	1000	10	3,52	0,364
3. uniform sıklaştırma	2744	7,14	4,76	0,538

Uniform sıklaştırma yapılan analizler sonucunda elde edilen şekil değiştirmiş geometriler Şekil 5.9'da gösterilmiştir. Genel olarak şekil değişimi tekil yük noktasında olmuştur. Tekil yükün uygulandığı bölgede lokal sıklaştırma yapılarak eleman boyutunun küçültülmesi gerekliliği şekil değiştirmelerin dağılımından görülebilmektedir.

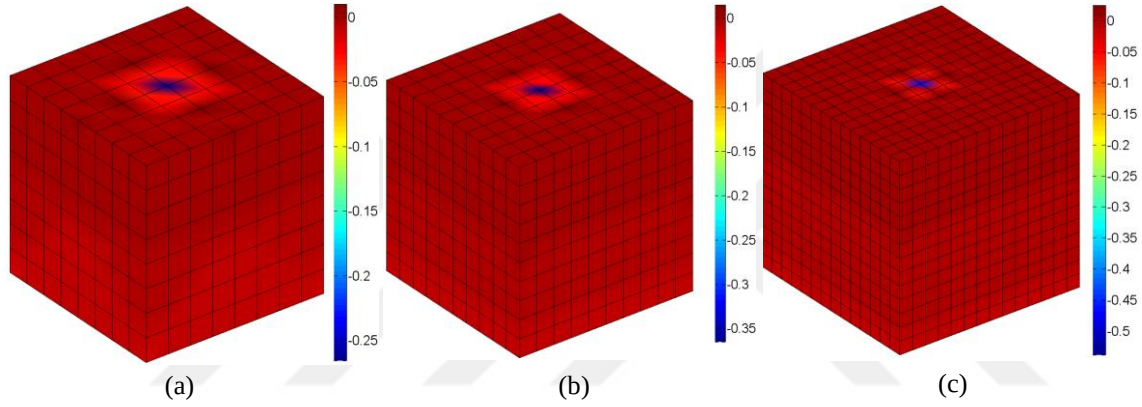


Şekil 5.9. Beş kat büyütülerek gösterilen şekil değiştirmiş geometri, a) 1. uniform sıklaştırma b) 2. uniform sıklaştırma c) 3. uniform sıklaştırma

Bu analizlerde elde edilen düşey yöndeki yer değiştirmelerin cisim genelinde dağılımı Şekil 5.10'da gösterilmiştir. Eleman boyutunun küçülmesiyle birlikte tekil yükün uygulandığı noktada hesaplanan yer değiştirme değeri mutlak değerce büyümektedir.



Şekil 5.10. u_2 (mm) yer değiştirme renk grafikleri, a) 1. uniform sıklaştırma b) 2. uniform sıklaştırma c) 3. uniform sıklaştırma



Şekil 5.11. σ_{22} (MPa) normal gerilme renk grafikleri, a) 1. uniform sıklaştırma b) 2. uniform sıklaştırma c) 3. uniform sıklaştırma

Düşey yönde hesaplanan normal gerilmenin cisim genelinde dağılımı ise Şekil 5.11’de gösterilmiştir. Tekil yükün uygulandığı bölgenin dışında oldukça küçük gerilme değerleri elde edilirken, tekil yük bölgesinde yoğunlaşan basınç gerilmeleri eleman boyutunun küçülmesiyle birlikte mutlak değerce daha büyük bir değere yaklaşmıştır.

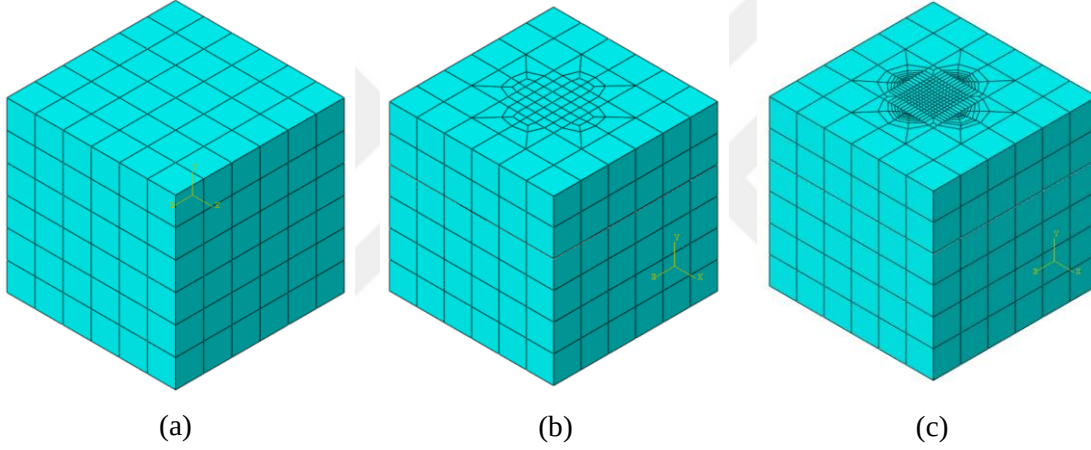
Abaqus yazılımında oluşturulan modeller

MATLAB ortamında oluşturulan uyarlamalı sonlu eleman çözümünde oluşan eleman ağına yakın bir eleman ağı Abaqus yazılımında manuel olarak oluşturulmuş ve lokal sıklaştırma olarak isimlendirilmiştir. Oluşan eleman sayıları ve eleman minimum kenar uzunlukları Çizelge 5.4’de gösterilmiştir. Başlangıç çözüm ağındaki elemanlar MATLAB kodu ile yapılan çözümdeki sayıda ve büyüklükte elemanlara sahiptir. Uyarlamalı analizde

elde edilen eleman boyutlarına ve sıklaştırmaya yakın manuel olarak yapılan birinci lokal sıklaştırma ve ikinci lokal sıklaştırma Şekil 5.12 (b) ve Şekil 5.12 (c)'de gösterilmiştir.

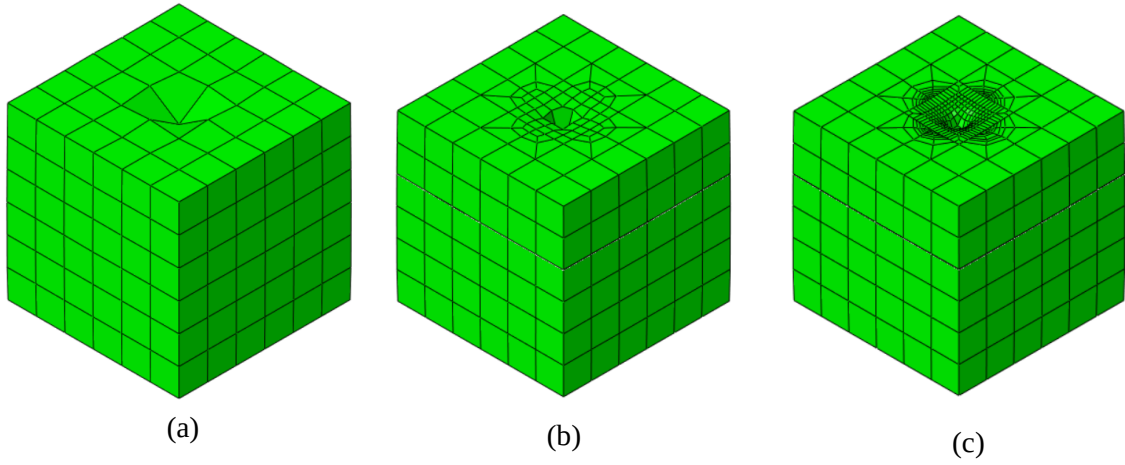
Çizelge 5.4. Abaqus lokal sıklaştırma ile elde edilen maksimum yer değiştirme ($u_{2_{\max}}$) ve mutlak değerce maksimum normal gerilme ($\sigma_{22_{\max}}$)

Analiz adı	Eleman sayısı	Eleman min. kenar uzunluğu (mm)	$u_{2_{\max}}$ (mm)	$\sigma_{22_{\max}}$ (MPa)
Başlangıç çözüm ağı	216	16,7	2,26	0,234
Birinci lokal sıklaştırma	344	5,55	4,51	1,022
İkinci lokal sıklaştırma	840	1,72	6,79	1,550

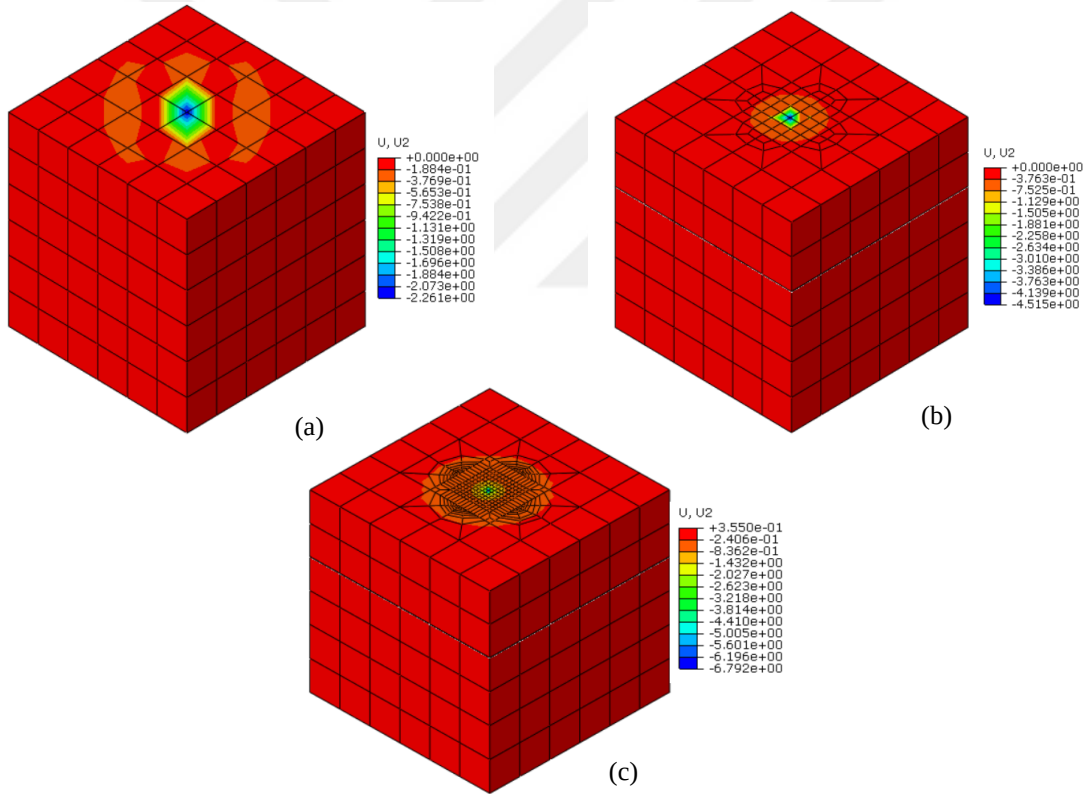


Şekil 5.12. Abaqus sonlu eleman çözüm ağı, a) başlangıç b) birinci lokal sıklaştırma c) ikinci lokal sıklaştırma

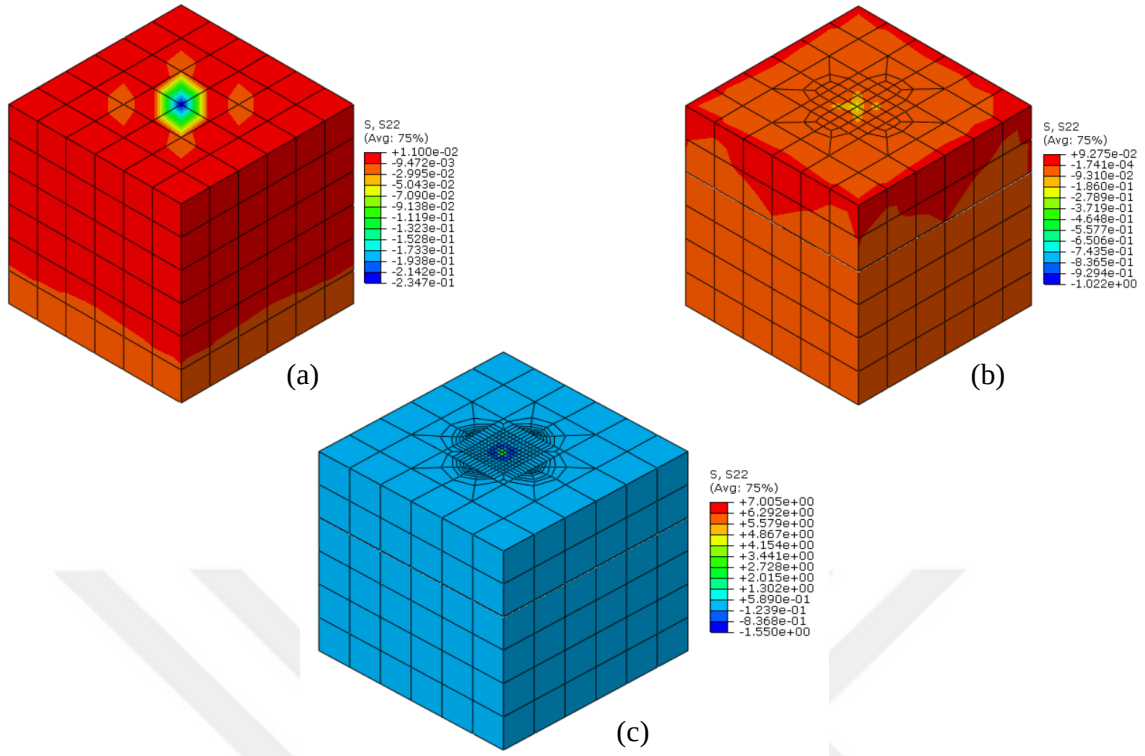
Bu eleman ağının aynı sınır şartları altında kullanılmasıyla elde edilen şekil değiştirmiş geometri Şekil 5.13'de gösterilmiştir. Düşey yöndeki u_2 yer değiştirme değerlerinin cisim içindeki değişimi renk grafiği olarak Şekil 5.14'de gösterilmektedir. Ayrıca y -doğrultusundaki normal gerilme değerlerinin cisim içindeki değişimi de Şekil 5.15'de gösterilmiştir.



Şekil 5.13. Beş kat artırılarak gösterilen Abaqus şekil değiştirmiş geometri, a) başlangıç çözüm ağı b) birinci lokal sıkılaştırma c) ikinci lokal sıkılaştırma



Şekil 5.14. u_2 (mm) Abaqus yer değiştirme renk grafikleri, a) başlangıç çözüm ağı b) birinci lokal sıkılaştırma c) ikinci lokal sıkılaştırma



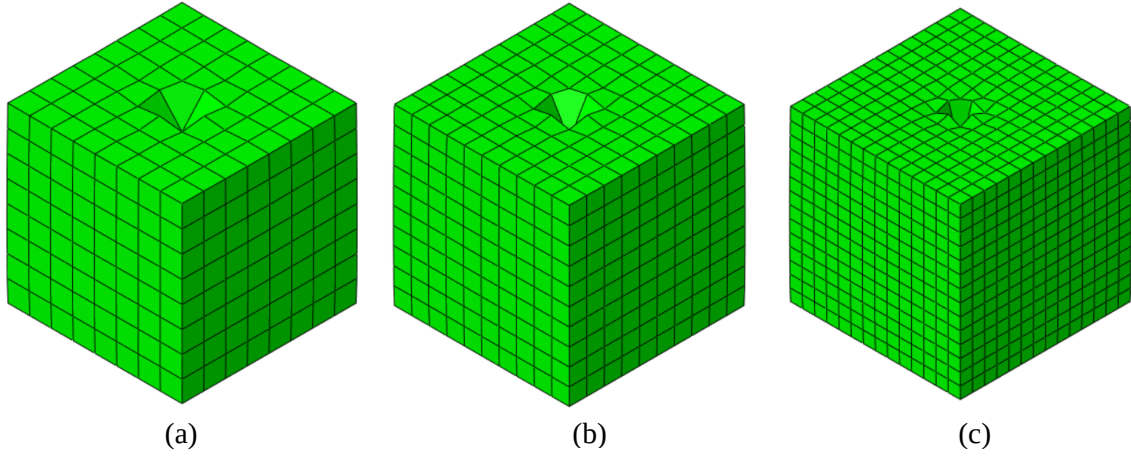
Şekil 5.15. σ_{22} (MPa) normal gerilme Abaqus renk grafikleri, a) başlangıç çözüm ağı b) birinci lokal sıklaştırma c) ikinci lokal sıklaştırma

MATLAB ortamında yazılan kod ve uniform sıklaştırma ile oluşan eleman ağı ayrıca Abaqus ortamında da oluşturulmuş ve aynı şartlar altında çözülmüştür. Oluşan eleman sayıları ve minimum kenar uzunluğu Çizelge 5.5’de gösterilmiştir.

Çizelge 5.5. Abaqus uniform sıklaştırma için maksimum yer değiştirme ($u_{2_{\max}}$) ve mutlak değerce maksimum normal gerilme ($\sigma_{22_{\max}}$)

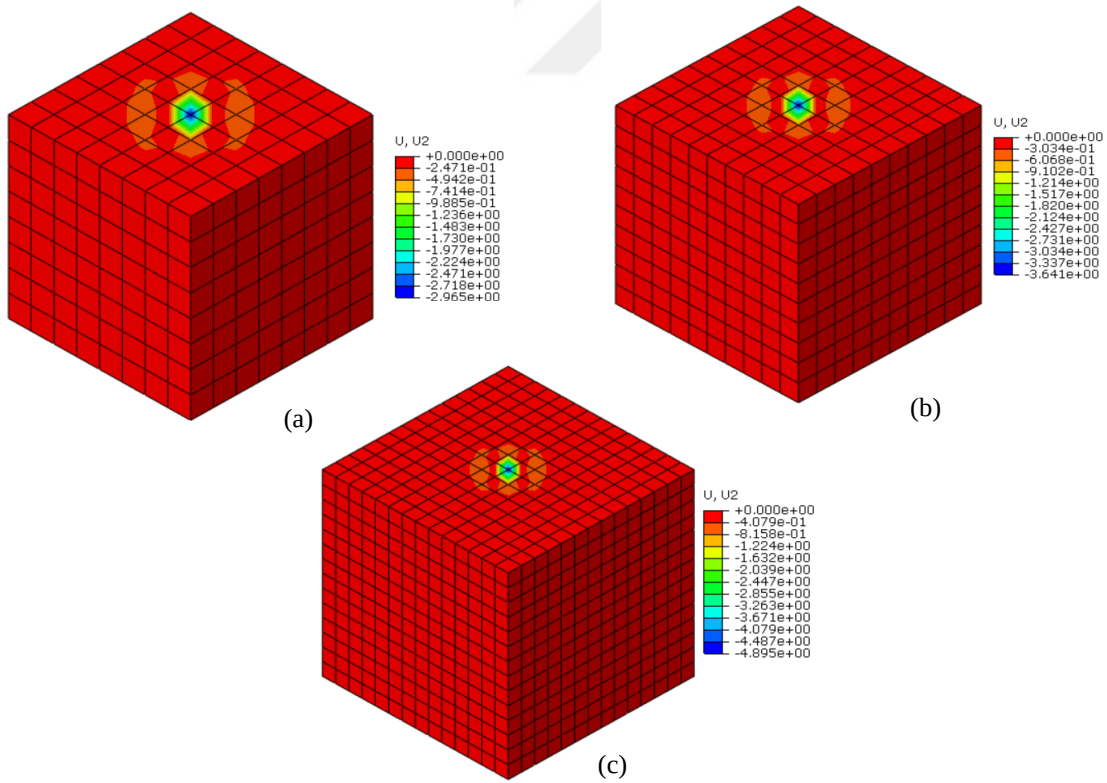
Analiz adı	Eleman sayısı	Eleman min. kenar uzunluğu (mm)	$u_{2_{\max}}$ (mm)	$\sigma_{22_{\max}}$ (MPa)
Başlangıç çözüm ağı	216	16,7	2,26	0,234
1. uniform sıklaştırma	512	12,5	2,96	0,373
2. uniform sıklaştırma	1000	10	3,60	0,497
3. uniform sıklaştırma	2744	7,14	4,89	0,892

Şekil 5.16’da uniform eleman ağı sıklaştırmaları yapılarak Abaqus ile elde edilen şekil değiştirmiş geometriler gösterilmiştir.

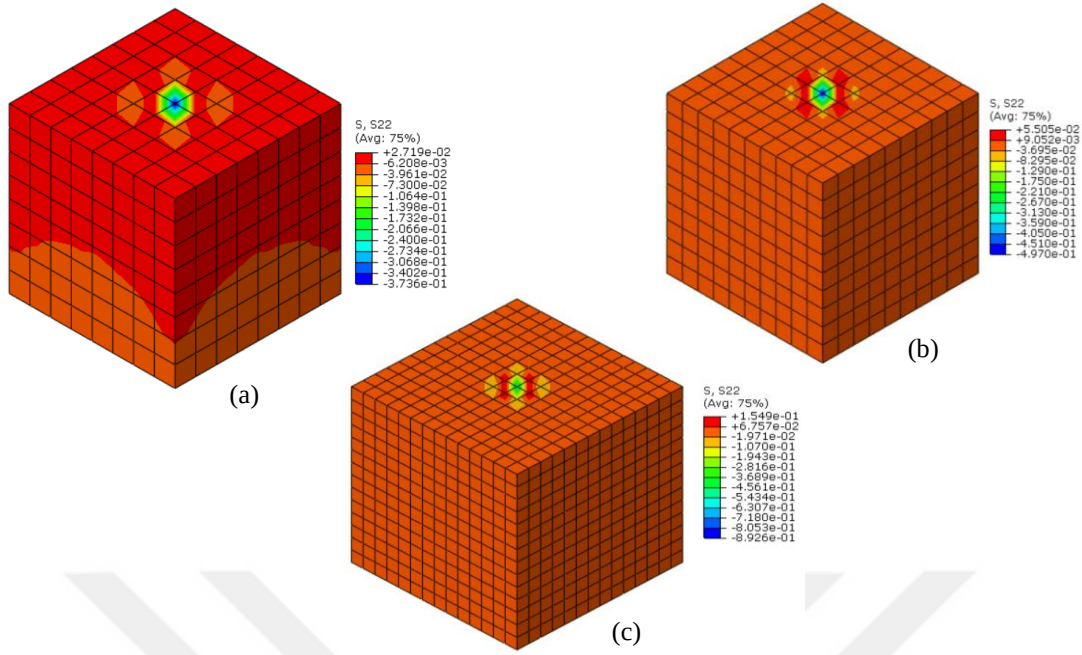


Şekil 5.16. Beş kat büyütülerek gösterilen Abaqus şekil değiştirmiş geometri, a) 1. uniform sıkılaştırma b) 2. uniform sıkılaştırma c) 3. uniform sıkılaştırma

Abaqus ile yapılan uniform sıkılaştırmalardan elde edilen düşey yer değiştirme değerlerinin cisim içindeki değişimi Şekil 5.17’de gösterilmiştir. Düşey doğrultuda normal gerilmenin değişimi ise Şekil 5.18’de verilmiştir.



Şekil 5.17. u_2 (mm) Abaqus yer değiştirme renk grafikleri, a) 1. uniform sıkılaştırma b) 2. uniform sıkılaştırma c) 3. uniform sıkılaştırma



Şekil 5.18. σ_{22} (MPa) normal gerilme Abaqus renk grafikleri, a) 1. uniform sıkıştırma b) 2. uniform sıkıştırma c) 3. uniform sıkıştırma

Analizler arası karşılaştırmalar

Uyarlamalı sonlu eleman çözümü, uniform sıkıştırmalı sonlu eleman çözümü ve Abaqus ile elde edilen lokal sıkıştırma ve uniform sıkıştırma çözümleri karşılaştırılmıştır. Sıkıştırmmanın etkisi, eleman sayısı ile değişim göz önünde bulundurularak incelenmiştir. Bu doğrultuda Çizelge 5.6'da yer değiştirme ve gerilme için uyarlamalı çözüm ile Abaqus lokal sıkıştırma çözümü arasındaki % fark değerleri gösterilmiştir. Burada elde edilen fark değerleri %10'dan oldukça fazla olmuş ve eleman sayısının artmasıyla fark değeri büyümüştür.

Çizelge 5.6. Uyarlamalı çözüm ile Abaqus çözümü maksimum yer değiştirme ($u_{2_{\max}}$) ve mutlak değerce maksimum normal gerilme ($\sigma_{22_{\max}}$) karşılaştırması

Analiz adı	$u_{2_{\max}}$ (mm)	$u_{2_{\max}}$ (mm) (Abaqus)	Fark (%)	$\sigma_{22_{\max}}$ (MPa)	$\sigma_{22_{\max}}$ (MPa) (Abaqus)	Fark(%)
Başlangıç çözüm ağı	2,18	2,26	3,54	0,164	0,234	29,91
Birinci uyarlamalı analiz	6,17	4,51	-36,80	0,791	1,022	22,6
İkinci uyarlamalı analiz	8,05	6,79	-18,56	0,811	1,550	47,68

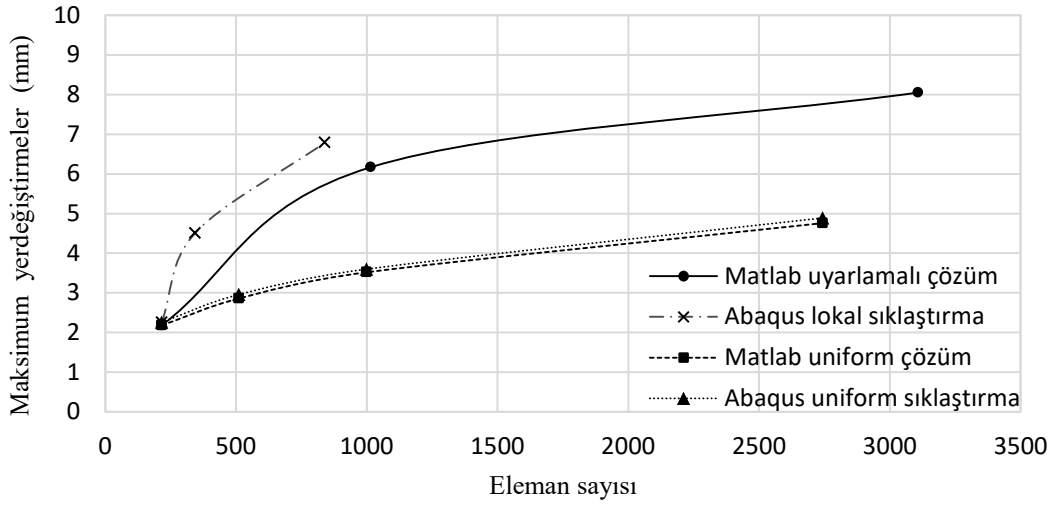
Uniform sıklaştırma kullanılarak yapılan analizler için yazılan kod ve Abaqus arasındaki % fark değerleri Çizelge 5.7’de verilmiştir. Maksimum yer değiştirme için fark değeri istenilen seviyede olmuş ve %10’un altında gerçekleşmiştir. Ancak gerilme için fark değerleri %10’dan oldukça fazla olmuş ve yine eleman sayısının artması ile fark değeri büyümüştür.

Çizelge 5.7. Uniform çözüm ile Abaqus çözümü maksimum yer değiştirme ($u_{2_{\max}}$) ve mutlak değerce maksimum normal gerilme ($\sigma_{22_{\max}}$) karşılaştırması

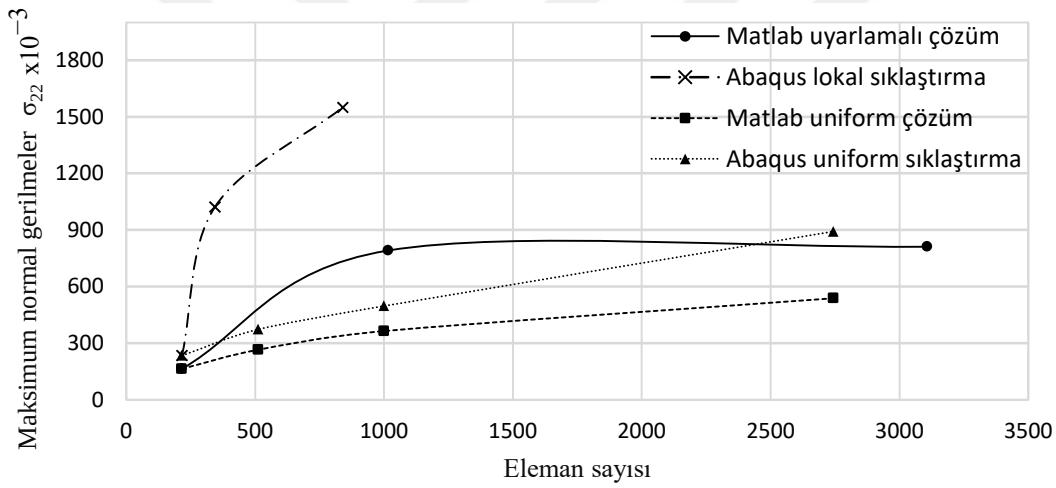
Analiz adı	$u_{2_{\max}}$ (mm)	$u_{2_{\max}}$ (mm) (Abaqus)	Fark (%)	$\sigma_{22_{\max}}$ (MPa)	$\sigma_{22_{\max}}$ (MPa) (Abaqus)	Fark(%)
Başlangıç çözüm ağı	2,18	2,26	3,54	0,164	0,234	29,91
1. uniform sıklaştırma	2,86	2,96	3,38	0,265	0,373	28,95
2. uniform sıklaştırma	3,52	3,6	2,22	0,364	0,497	26,76
3. uniform sıklaştırma	4,76	4,89	2,66	0,538	0,892	39,69

Sıklaştırmanın etkisi görmek için yer değiştirmenin eleman sayısı ile değişim grafiği Şekil 5.19’da çizilmiştir. Hem uyarlamalı ve hem de uniform sıklaştırma analizlerinde tekil yükün uygulandığı noktadaki yer değiştirme değerinin eleman sayısının artması ile sabit bir değere yakınsamadığı görülmektedir. Bu durum Abaqus ile yapılan analizlerde de benzer şekildedir.

Ancak gerilme değeri açısından Şekil 5.20’ye bakıldığında, uyarlamalı sonlu eleman sıklaştırması ile birlikte gerilme belirli bir değere yakınsamıştır. Uniform sıklaştırma analizlerinde, kod ve Abaqus ile yapılan çözümlerde eleman sayısı arttıkça gerilme değeri de artmıştır.



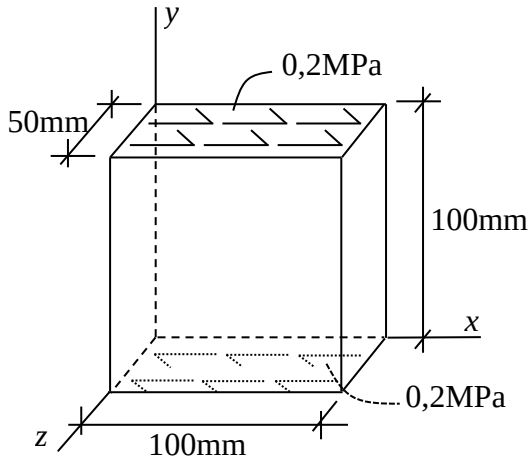
Şekil 5.19. Maksimum yer değiştirmenin $u_{2_{\max}}$ eleman sayısına göre değişimi



Şekil 5.20. Maksimum normal gerilmelerin mutlak değerce $\sigma_{22_{\max}}$ eleman sayısına göre değişimi

5.1.3. Basit kesme etkisinde hiperelastik blok

Dikdörtgen prizmatik şekle sahip blok üzerine Şekil 5.21’da gösterilen alt ve üst yüzeyden 0,2 MPa değerinde kesme gerilmesi uygulanmıştır. Bu alt ve üst yüzeyler sadece yatayda hareket edebilecek şekilde sınır şartı oluşturulmuştur. MATLAB ortamında yapılan sonlu elemanlar çözümünde başangıç adım sayısı 100 olarak seçilmiştir.



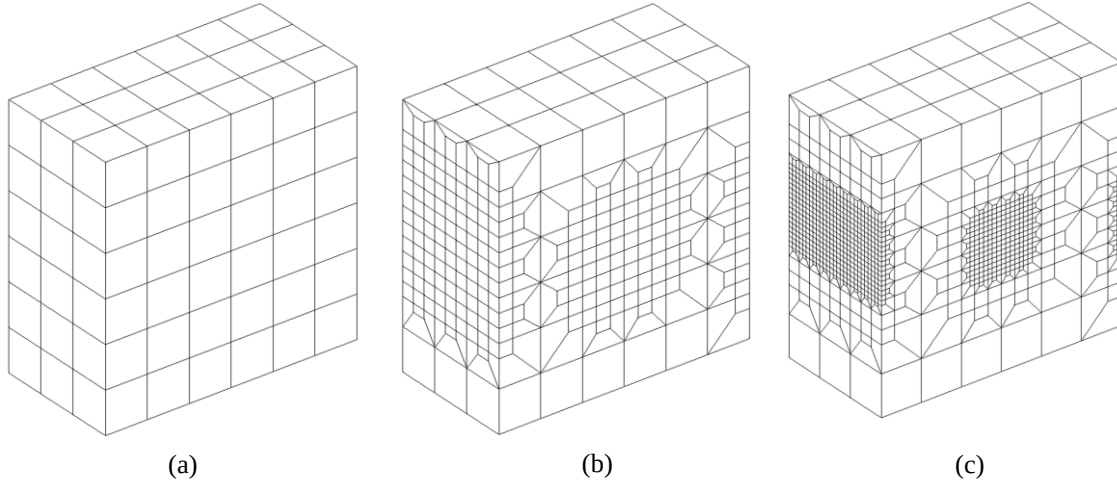
Şekil 5.21. Dikdörtgen blokta yüzey kesme yüklemesi

Uyarlamalı sonlu elemanlar analizi

MATLAB ortamında arka arkaya iki tane uyarlamalı analiz yapılmıştır. Uyarlamalı çözüm ağı için eleman bölme kriterinde kullanılan gerilme bileşeni σ_{12} kesme gerilmesidir. Bu gerilmenin tüm elemanlardaki ortalama değeri hesaplanmıştır. Sonrasında tüm elemanlardaki σ_{12} kesme gerilmesi değeri ortalama değer ile karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırma sonucunda ortalamanın % 3'ünün altında olanlar ile ortalamanın % 30 üstünde olan elemanın bölünmesine karar verilen bir kriter uygulanmaktadır. Kritere göre bölünen elemanlar Şekil 5.22'de gösterildiği gibi cisim yan kenarlarında ve orta bölgede yoğunlaşmıştır. Uyarlamalı çözüm ağında oluşan elemanların sayısı ve minimum kenar uzunluğu Çizelge 5.8'de verilmiştir.

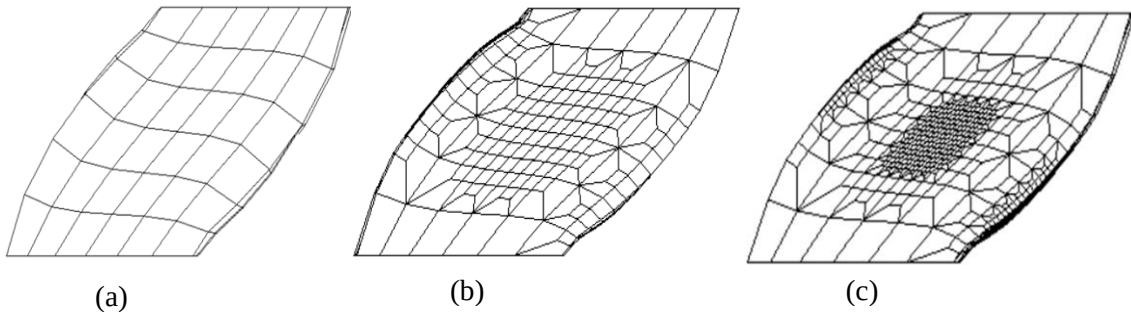
Çizelge 5.8. Uyarlamalı çözümlerde maksimum yer değiştirme ($u_{1_{\max}}$) ve maksimum normal gerilme ($\sigma_{12_{\max}}$)

Analiz adı	Eleman sayısı	Eleman min. kenar uzunluğu (mm)	$u_{1_{\max}}$ (mm)	$\sigma_{12_{\max}}$ (MPa)
Başlangıç çözüm ağı	108	16,7	9,73	0,265
Birinci uyarlamalı analiz	1542	5,55	10,12	0,277
İkinci uyarlamalı analiz	10920	1,85	10,14	0,279



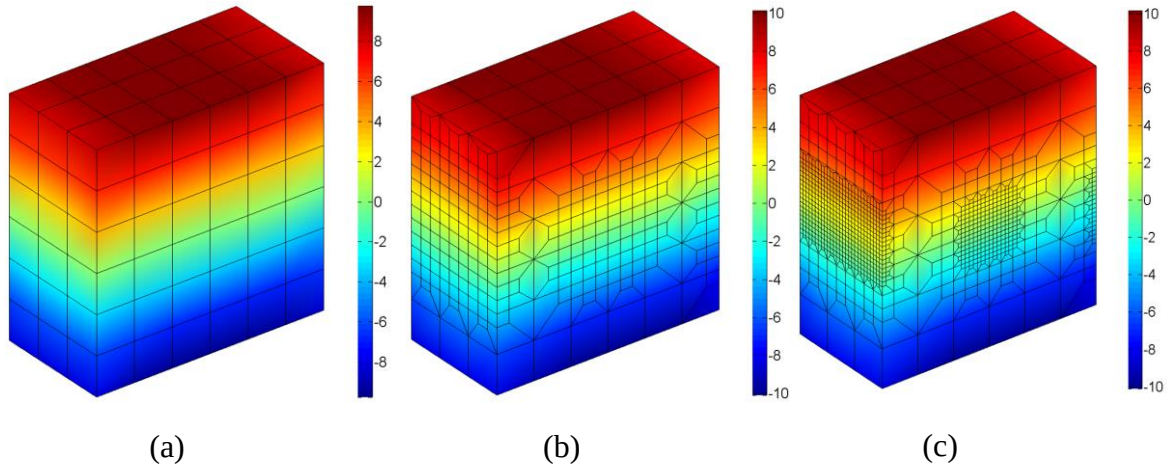
Şekil 5.22. Sonlu eleman çözüm ağı a) başlangıç b) birinci uyarlamalı c) ikinci uyarlamalı

Uyarlamalı sonlu eleman analizi sonrasında elde edilen şekil değiştirmiş geometri Şekil 5.23’de gösterilmiştir. x yönündeki maksimum yer değiştirme $u_{1_{\max}}$, uygulanan gerilme yönünde problem geometrisinin üst ve alt kenarlarında hesaplanmıştır. Üst kenar $+x$ yönünde ve alt kenar $-x$ yönünde anti-simetrik hareket ederek orta bölgede yer değiştirme sıfır olmuştur. Sınır şartı, cisim üst ve alt yüzlerinin yatayda hareket etmesi şeklinde olduğu için şekil değiştirmiş geometri de buna uygun olarak elde edilmiştir.

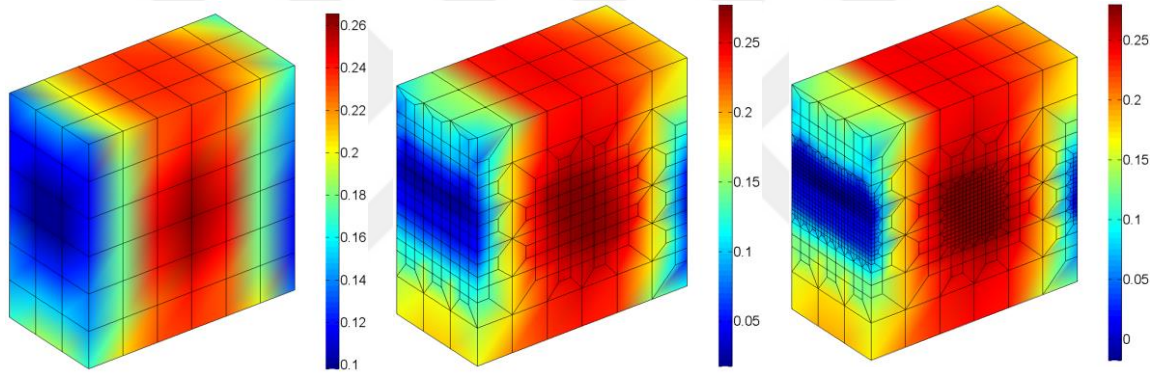


Şekil 5.23. Beş kat artırılarak gösterilen şekil değiştirmiş geometri, a) başlangıç çözüm ağı b) birinci uyarlamalı çözüm c) ikinci uyarlamalı çözüm

Şekil 5.25’de gösterilen kesme gerilmelerinin mutlak değerce maksimum değeri $\sigma_{12_{\max}}$, problem geometrisinin orta bölgesinde elde edilmiştir. Orta bölgedeki eleman boyutunun küçülmesiyle birlikte gerilmede önemli bir değişim olmamıştır.



Şekil 5.24. u_1 yer değiştirme renk grafikleri, a) başlangıç çözüm ağı b) birinci uyarlamalı çözüm c) ikinci uyarlamalı çözüm



Şekil 5.25. σ_{12} kesme gerilmesi renk grafikleri, a) başlangıç çözüm ağı b) birinci uyarlamalı çözüm c) ikinci uyarlamalı çözüm

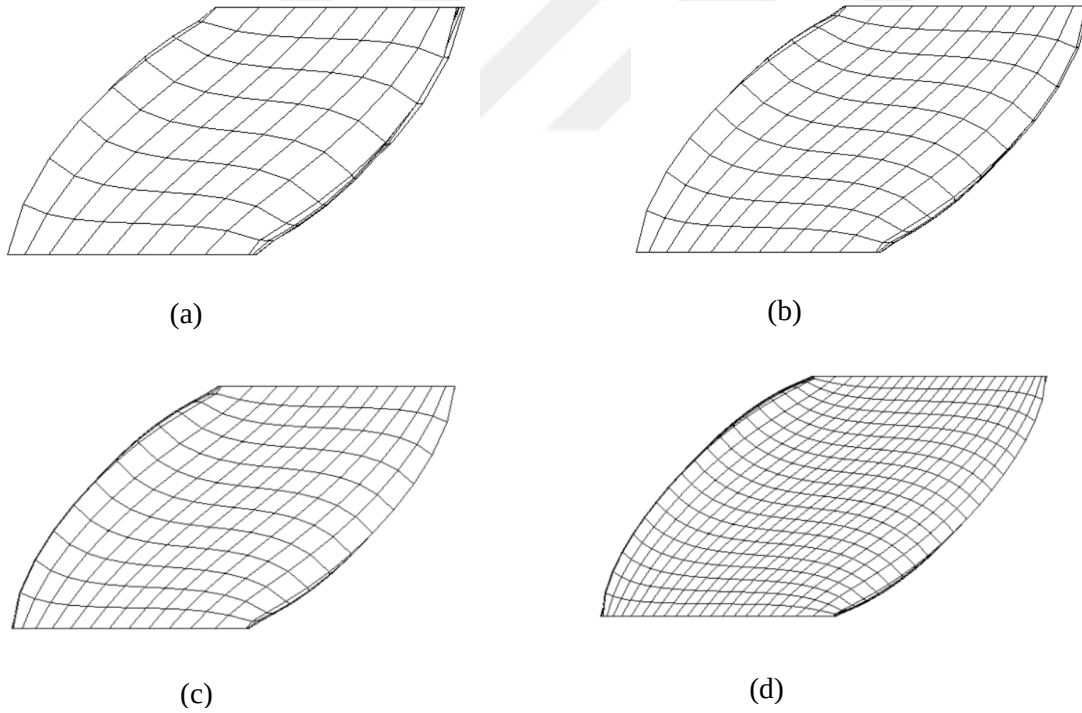
Uniform sıkılaştırma sonlu elemanlar analizi

Bu örnekte sonlu eleman ağı dört kez uniform sıkılaştırılarak analizler yapılmıştır. Oluşan eleman sayıları, eleman minimum kenar uzunluğu, hesaplanan maksimum yer değiştirme ($u_{1_{\max}}$) ve maksimum kesme gerilmesi ($\sigma_{12_{\max}}$) değerleri her bir sıkılaştırma için Çizelge 5.9'da gösterilmiştir.

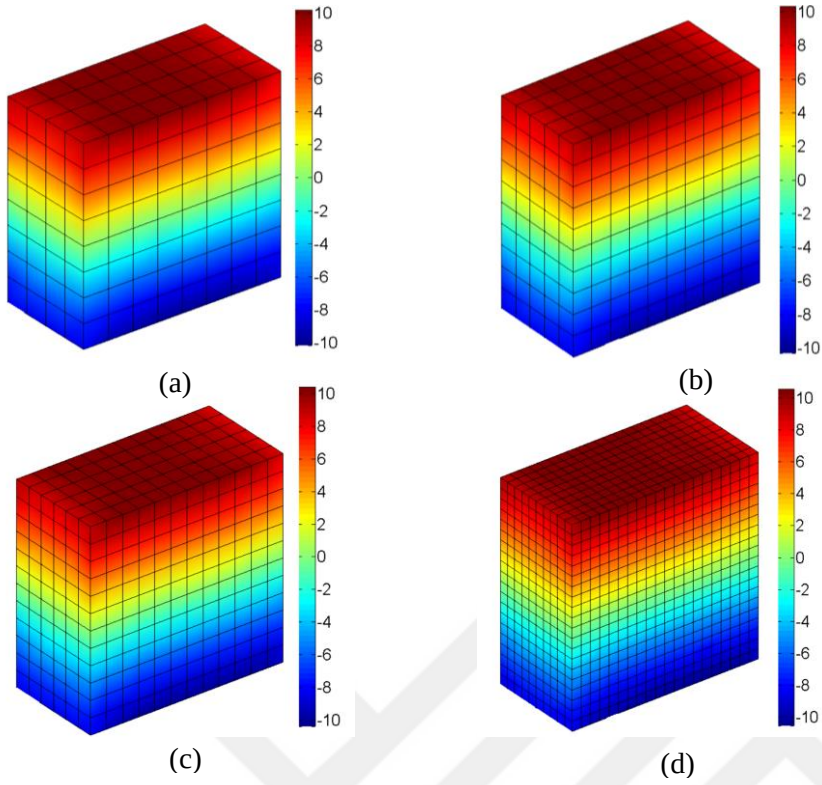
Çizelge 5.9. Uniform çözümlerde maksimum yer değiştirme ($u_{1_{\max}}$) ve maksimum kesme gerilmesi ($\sigma_{12_{\max}}$)

Analiz adı	Eleman sayısı	Eleman min. kenar uzunluğu (mm)	$u_{1_{\max}}$ (mm)	$\sigma_{12_{\max}}$ (MPa)
Başlangıç çözüm ağı	108	16,7	9,73	0,265
1. uniform sıklaştırma	256	12,5	10,18	0,279
2. uniform sıklaştırma	500	10	10,31	0,286
3. uniform sıklaştırma	864	8,33	10,40	0,290
4. uniform sıklaştırma	4000	5	10,52	0,294

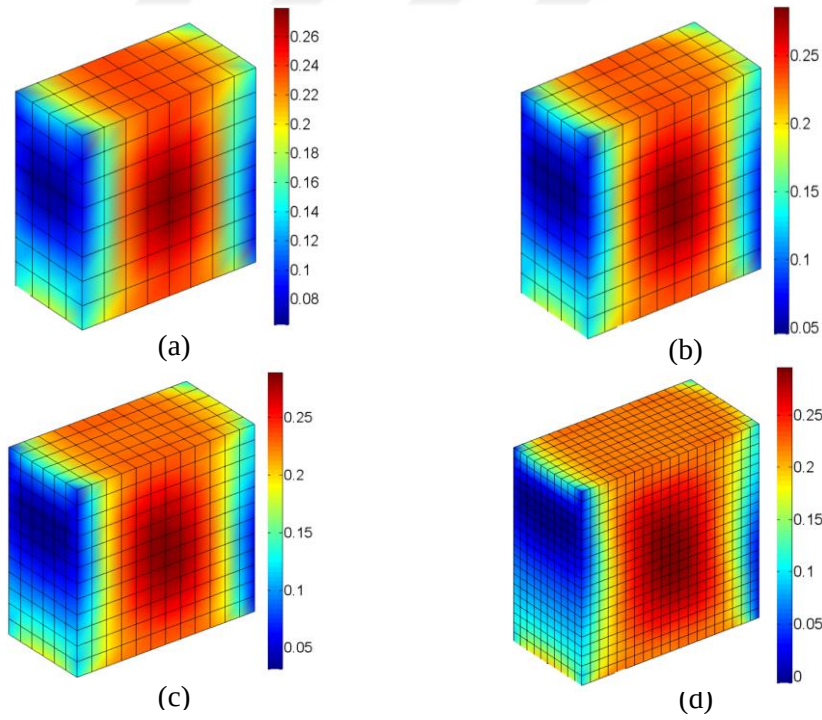
MATLAB ortamında sonlu eleman ağında yapılan uniform sıklaştırma sonrasında elde edilen şekil değiştirmeler Şekil 5.26'da gösterilmiştir. Eleman boyutunun küçülmesi, yükün uygulandığı alt ve üst yüzey kenarlarında ve serbest yüzeylerde şekil değişimini etkilemiştir.



Şekil 5.26. Beş kat artırılarak gösterilen şekil değiştirmiş geometri, a) 1. uniform sıklaştırma b) 2. uniform sıklaştırma c) 3. uniform sıklaştırma d) 4. uniform sıklaştırma



Şekil 5.27. u_1 (mm) yer değiştirme renk grafikleri, a) 1. uniform sıkıştırma b) 2. uniform sıkıştırma c) 3. uniform sıkıştırma d) 4. uniform sıkıştırma



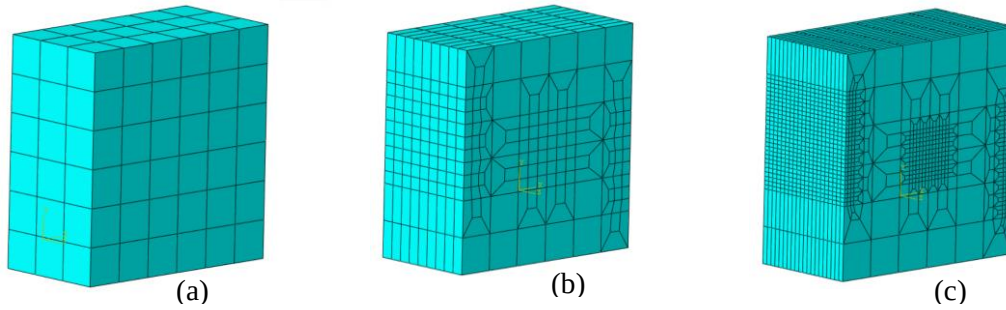
Şekil 5.28. σ_{12} (MPa) kesme gerilmesi renk grafikleri, a) 1. uniform sıkıştırma b) 2. uniform sıkıştırma c) 3. uniform sıkıştırma d) 4. uniform sıkıştırma

Abaqus yazılımında oluşturulan modeller

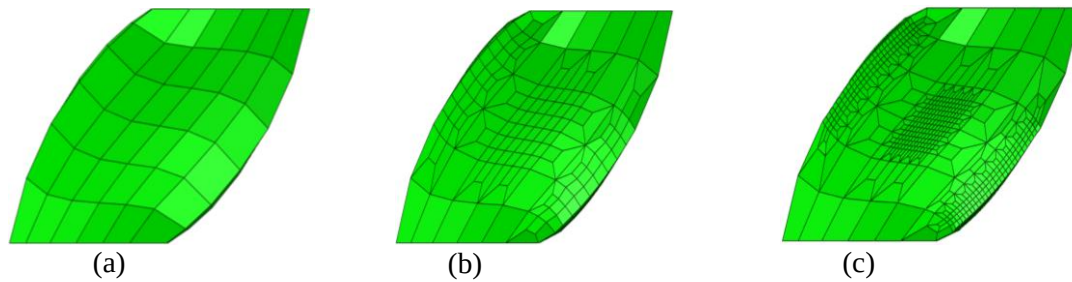
Uyarlamalı analiz ile elde edilen sonlu eleman ağına yakın bir eleman ağı Abaqus ortamında manuel olarak elle oluşturulmuştur. Oluşan eleman sayıları ve eleman minimum kenar uzunlukları Çizelge 5.10’da gösterilmiştir. Lokal sıklaştırma olarak ifade edilen bu eleman ağları Şekil 5.29’da gösterilmektedir. Aynı sınır şartları altında yapılan çözüm ile elde edilen şekil değiştirmiş geometri her bir lokal sıklaştırma için Şekil 5.30’de gösterilmiştir.

Çizelge 5.10. Abaqus lokal sıklaştırma ile elde edilen maksimum yer değiştirme ($u_{1_{\max}}$) ve maksimum normal gerilme ($\sigma_{12_{\max}}$)

Analiz adı	Eleman sayısı	Eleman min. kenar uzunluğu (mm)	$u_{1_{\max}}$ (mm)	$\sigma_{12_{\max}}$ (MPa)
Başlangıç çözüm ağı	108	16,7	10,31	0,283
Birinci lokal sıklaştırma	1422	5,66	10,44	0,295
İkinci lokal sıklaştırma	10880	1,83	10,46	0,296

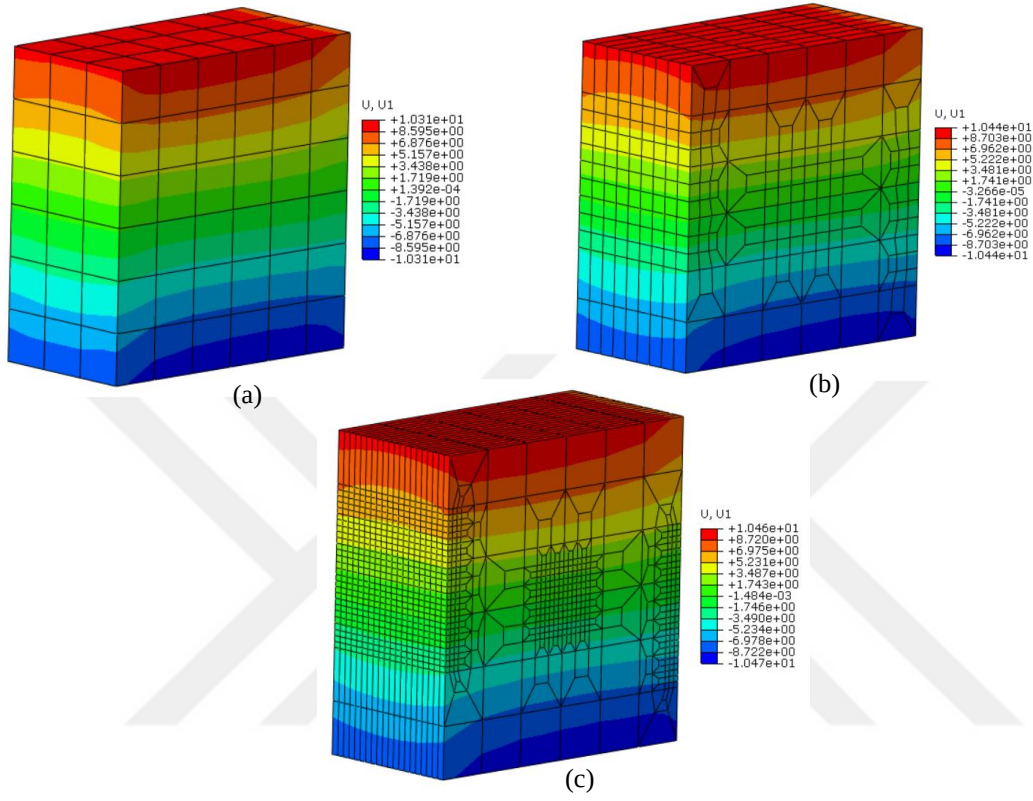


Şekil 5.29. Abaqus sonlu eleman çözüm ağı a) başlangıç b) birinci lokal sıklaştırma c) ikinci lokal sıklaştırma

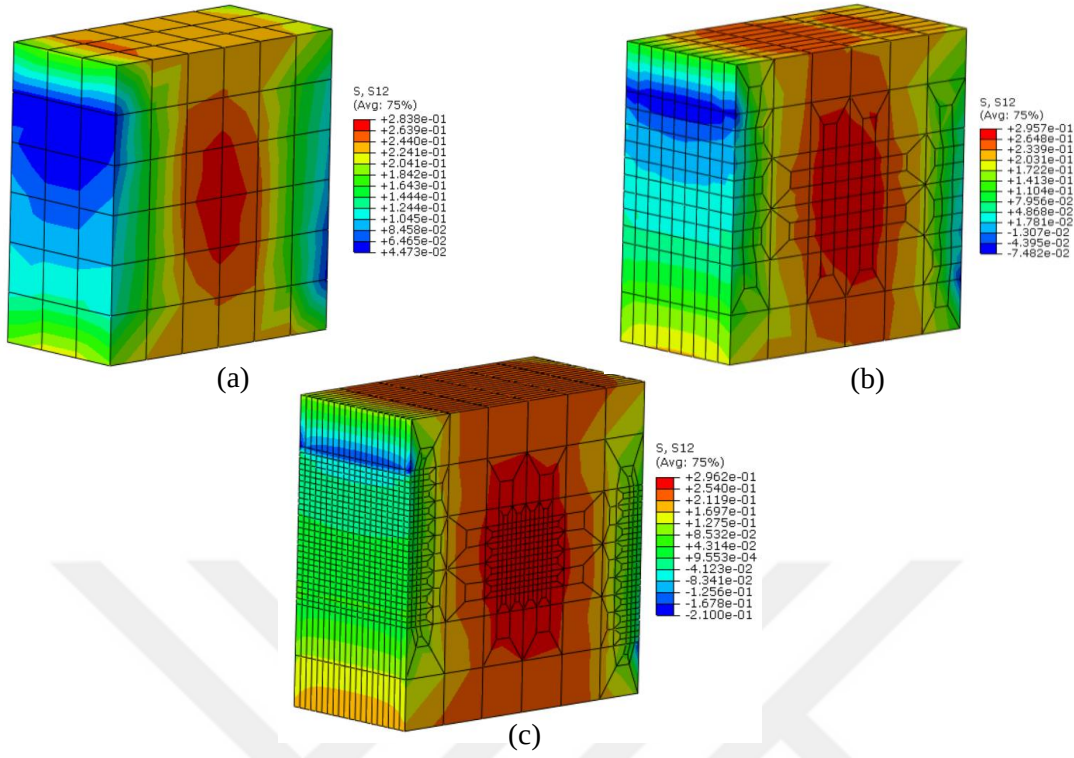


Şekil 5.30. Beş kat artırılarak gösterilen Abaqus şekil değiştirmiş geometri, a) başlangıç b) birinci lokal sıklaştırma c) ikinci lokal sıklaştırma

Abaqus ile lokal sıkılaştırma kullanılarak elde edilen x doğrultusundaki yer değiştirme değerlerinin blok içindeki değişimi Şekil 5.31’de renk grafiği olarak gösterilmiştir. Ayrıca Abaqus ile elde edilen σ_{12} kesme gerilmesi değerlerinin değişimi Şekil 5.32’de verilmiştir.



Şekil 5.31. u_1 (mm) Abaqus yer değiştirme renk grafikleri, a) başlangıç çözüm ağı b) birinci lokal sıkılaştırma c) ikinci lokal sıkılaştırma



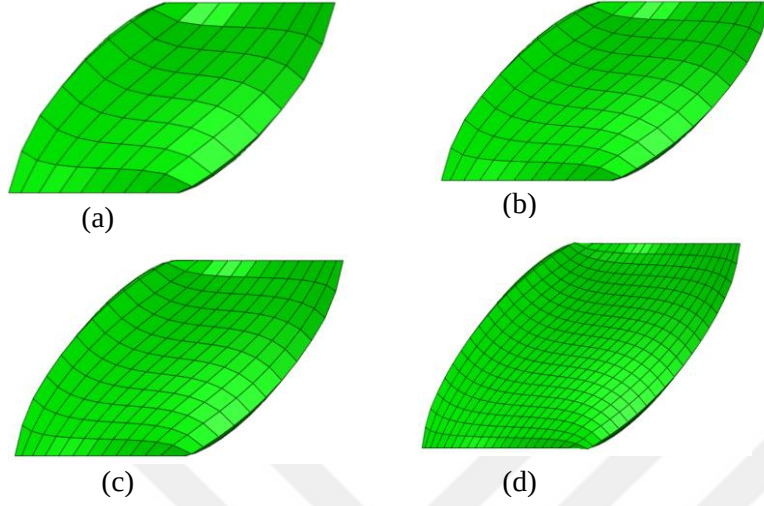
Şekil 5.32. σ_{12} (MPa) kesme gerilmesi Abaqus renk grafikleri, a) başlangıç çözüm ağı b) birinci lokal sıkılaştırma c) ikinci lokal sıkılaştırma

Ayrıca Abaqus ortamında dört kez uniform sıkılaştırma ile eleman ağı oluşturulmuştur. Burada oluşan eleman sayıları ve minimum kenar uzunluğu Çizelge 5.11’de gösterilmiştir. Aynı şartlar altında yapılan çözümlerden elde edilen şekil değiştirmiş geometriler Şekil 5.33’de gösterilmiştir.

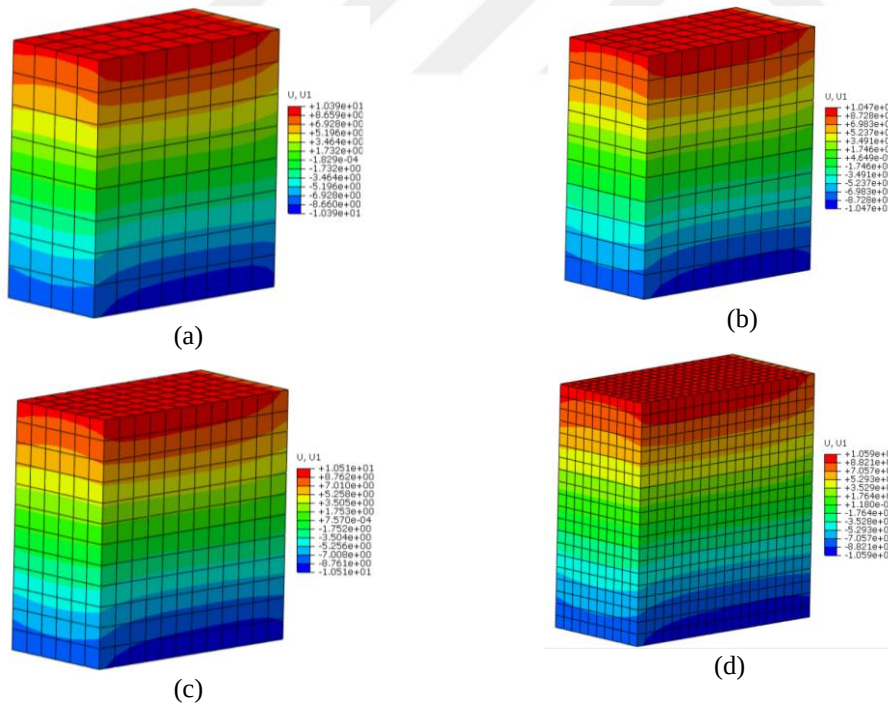
Çizelge 5.11. Abaqus uniform sıkılaştırma için maksimum yer değiştirme ($u_{1_{\max}}$) ve maksimum normal gerilme ($\sigma_{12_{\max}}$)

Analiz adı	Eleman sayısı	Eleman min. kenar uzunluğu (mm)	$u_{1_{\max}}$ (mm)	$\sigma_{12_{\max}}$ (MPa)
Başlangıç çözüm ağı	108	16,7	10,31	0,283
1. uniform sıkılaştırma	256	12,5	10,39	0,289
2. uniform sıkılaştırma	500	10	10,47	0,292
3. uniform sıkılaştırma	864	8,33	10,5	0,293
4. uniform sıkılaştırma	4000	5	10,6	0,297

Abaqus ile uniform sıklaştırma analizlerinde elde edilen x doğrultusundaki yer değiştirmelerin cisim içindeki değişimi Şekil 5.34’de renk grafiği olarak gösterilmiştir.

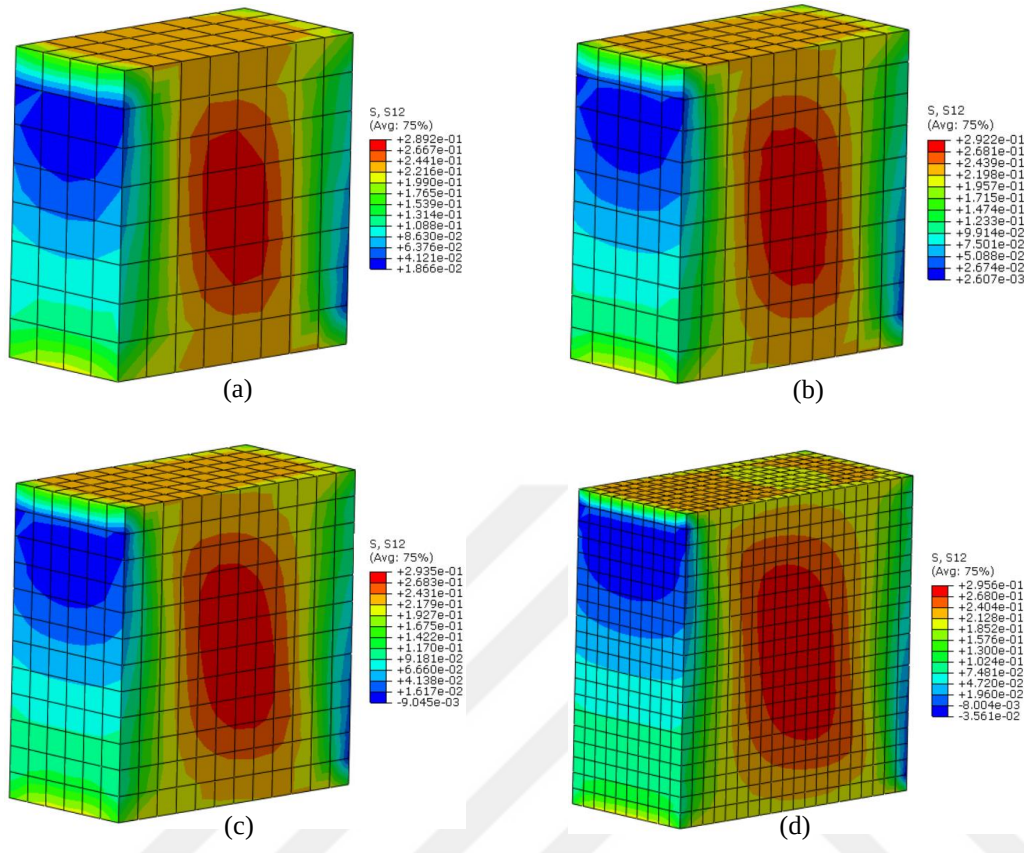


Şekil 5.33. Beş kat büyütülerek gösterilen Abaqus şekil değiştirmiş geometri, a) 1. uniform sıklaştırma b) 2. uniform sıklaştırma c) 3. uniform sıklaştırma d) 4. uniform sıklaştırma



Şekil 5.34. u_1 (mm) Abaqus yer değiştirme renk grafikleri, a) 1. uniform sıklaştırma b) 2. uniform sıklaştırma c) 3. uniform sıklaştırma d) 4. uniform sıklaştırma

Yine uniform sıklaştırma analizlerinde elde edilen σ_{12} kesme gerilmesinin cisim içindeki değişimi Şekil 5.35’de gösterilmiştir.



Şekil 5.35. σ_{12} (MPa) kesme gerilmesi Abaqus renk grafikleri, a) 1. uniform sıkılaştırma b) 2. uniform sıkılaştırma c) 3. uniform sıkılaştırma d) 4. uniform sıkılaştırma

Analizler arası karşılaştırmalar

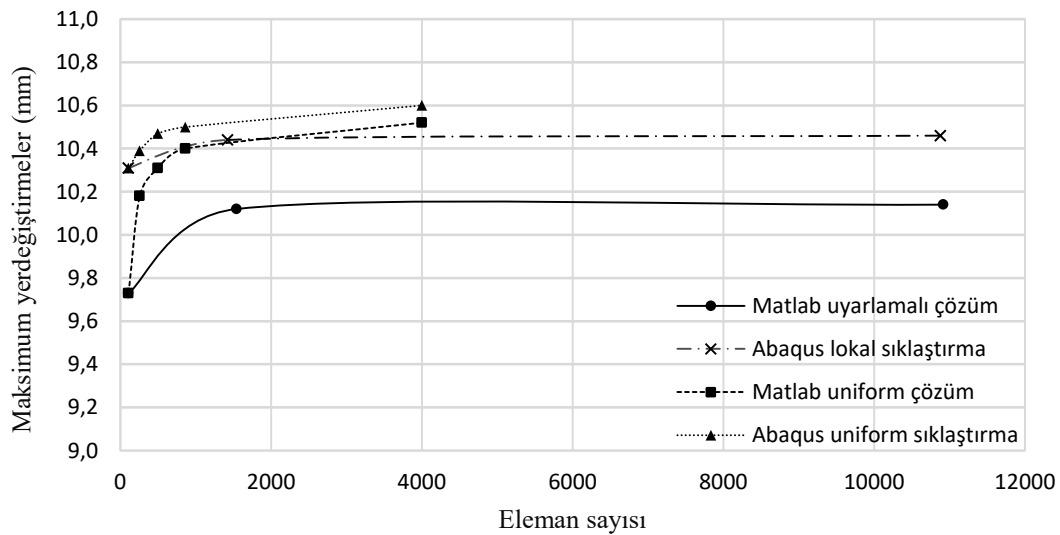
Çizelge 5.12’de uyarlamalı çözüm ile Abaqus lokal sıkılaştırma çözümü arasındaki yer değiştirme ve gerilme için % fark değerleri gösterilmiştir. Uniform sıkılaştırma kullanılarak yapılan analizler için yazılan kod ve Abaqus arasındaki % fark değerleri Çizelge 5.13’de verilmiştir. Her iki karşılaştırmada fark değerleri %10’un altında olmuştur. Eleman sayısı arttıkça yazılan kod ve Abaqus arasındaki fark azalmıştır. Uyarlamalı analizde ve manuel lokal sıkılaştırma analizinde eleman sayısının artması ile x doğrultusundaki maksimum yer değiştirme ve xy düzlemindeki maksimum kesme gerilmesi değerleri belirli bir değere yakınsamıştır. Bu yakınsama ve yer değiştirmenin eleman sayısı ile değişimi Şekil 5.36’de gösterilmiştir. Ayrıca maksimum kesme gerilmesinin eleman sayısı ile değişimi Şekil 5.37’de gösterilmektedir.

Çizelge 5.12. Uyarlamalı çözüm ile Abaqus lokal sıkılaştırma çözümü maksimum yer değiştirme ($u_{1_{\max}}$) ve maksimum kesme gerilmesi ($\sigma_{12_{\max}}$) karşılaştırması

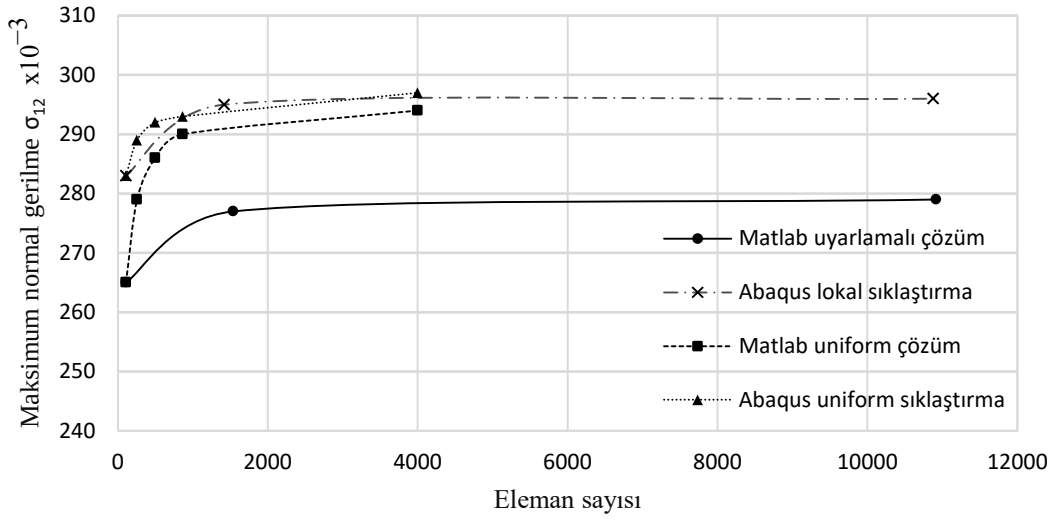
Analiz adı	$u_{1_{\max}}$ (mm)	$u_{1_{\max}}$ (mm) (Abaqus)	Fark (%)	$\sigma_{12_{\max}}$ (MPa)	$\sigma_{12_{\max}}$ (MPa) (Abaqus)	Fark(%)
Başlangıç çözüm ağı	9,73	10,31	5,63	0,265	0,283	6,36
Birinci uyarlamalı analiz	10,12	10,44	3,07	0,277	0,295	6,10
İkinci uyarlamalı analiz	10,14	10,46	3,06	0,279	0,296	5,74

Çizelge 5.13. Uniform çözümlerde maksimum yer değiştirme ($u_{1_{\max}}$) ve maksimum kesme gerilmesi ($\sigma_{12_{\max}}$)

Analiz adı	$u_{1_{\max}}$ (mm)	$u_{1_{\max}}$ (mm) (Abaqus)	Fark (%)	$\sigma_{12_{\max}}$ (MPa)	$\sigma_{12_{\max}}$ (MPa) (Abaqus)	Fark (%)
Başlangıç çözüm ağı	9,73	10,31	5,63	0,265	0,283	6,36
1. uniform sıkılaştırma	10,18	10,39	2,02	0,279	0,289	3,46
2. uniform sıkılaştırma	10,31	10,47	1,53	0,286	0,292	2,05
3. uniform sıkılaştırma	10,40	10,50	0,95	0,290	0,293	1,02
4. uniform sıkılaştırma	10,52	10,60	0,75	0,294	0,297	1,01



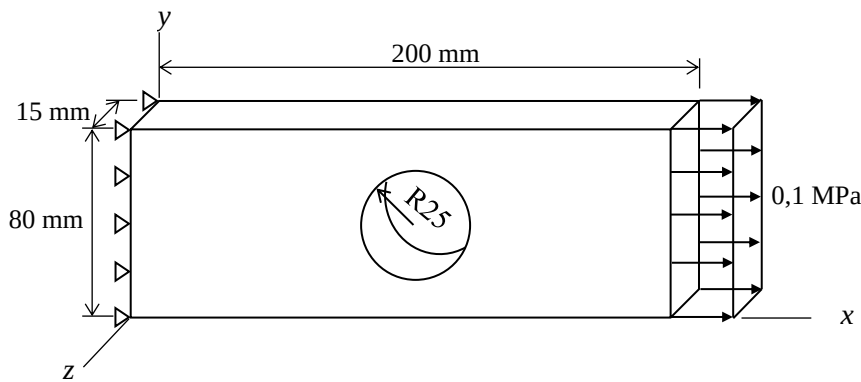
Şekil 5.36. Maksimum yer değiştirmenin $u_{1_{\max}}$ eleman sayısına göre değişimi



Şekil 5.37. Maksimum kesme gerilmelerin $\sigma_{12_{\max}}$ eleman sayısına göre değişimi

5.1.4. Dairesel boşluk içeren dikdörtgen blok

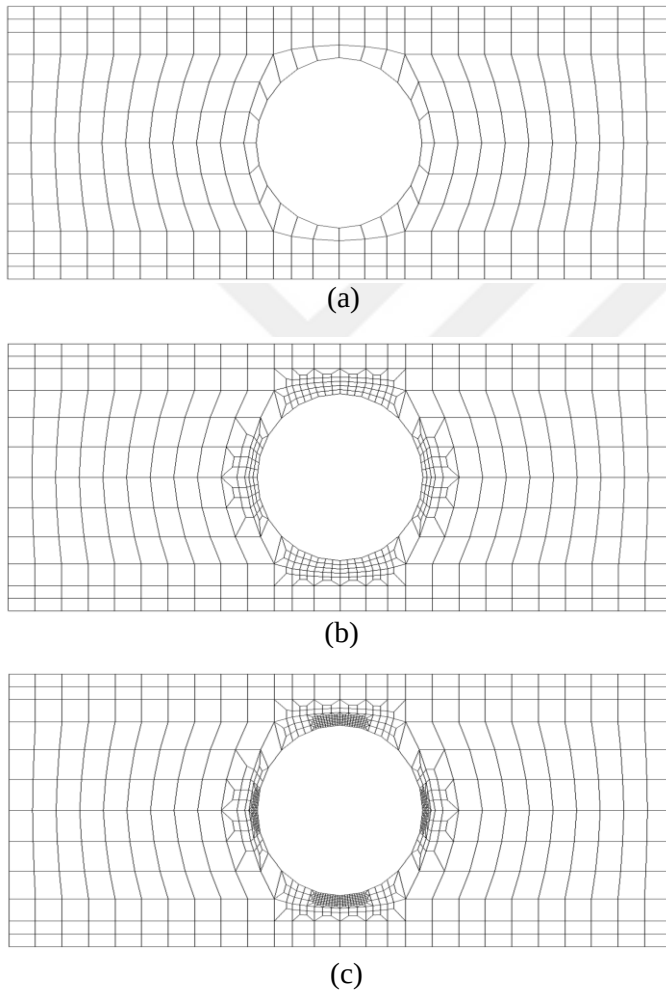
Geometrik süreksizlik içeren ortamlar arasında en sık kullanılan problemlerden bir tanesi içinde dairesel bir boşluk bulunan sürekli ortamdır. Bu çalışmadaki analizlerde kullanılan böyle bir cismin geometrik ölçüleri Şekil 5.38’de verilmiştir. Dikdörtgen bloğun sol ucundaki düğümler x , y ve z yönlerinde hareket etmeyecek şekilde sınır şartı oluşturulmuştur. Cismin diğer ucunda yayılı çekme yüklemesi uygulanmıştır.



Şekil 5.38. Problem geometrisi, sınır şartları ve uygulanan kuvvet

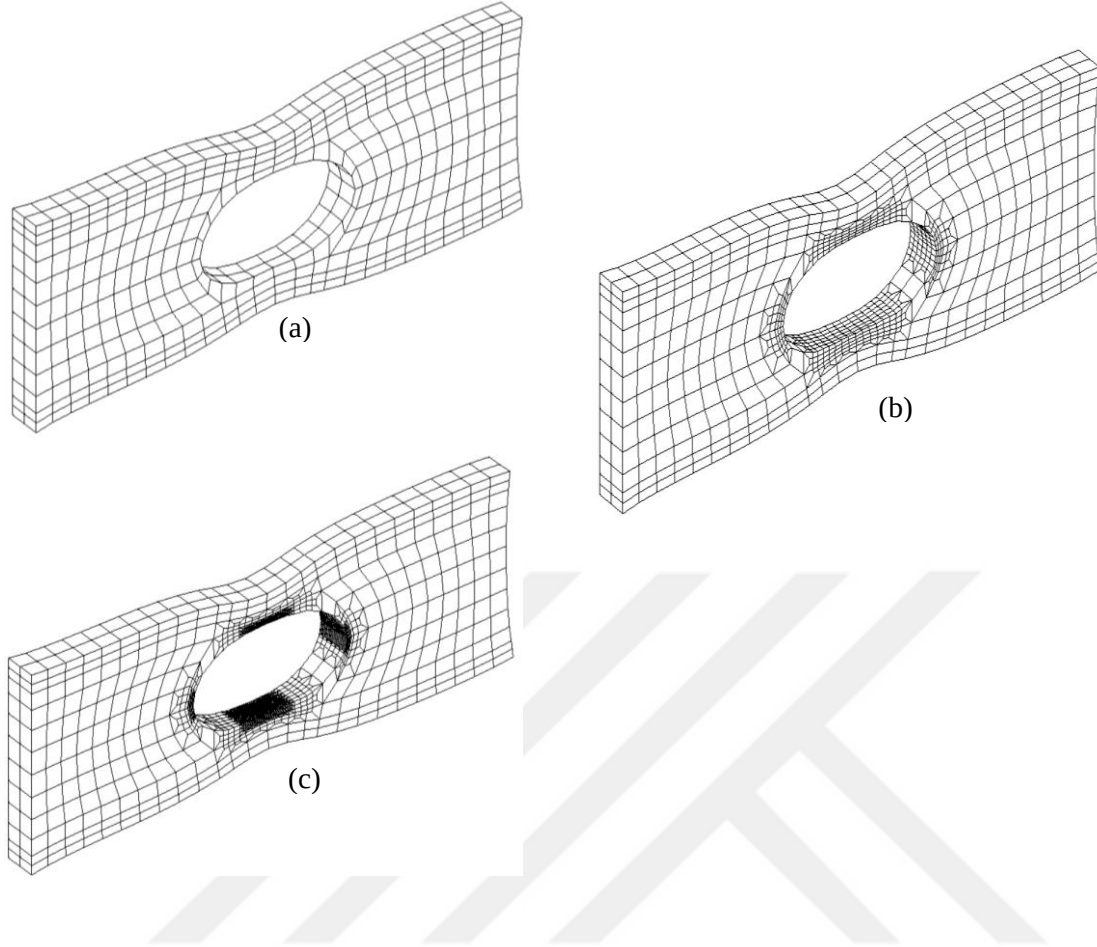
Uyarlamalı sonlu elemanlar analizi

Şekil 5.39 (a)'da gösterilen başlangıç çözüm ağı oluşturulduktan sonra ardışık iki uyarlamalı analiz gerçekleştirilmiştir. Uyarlamalı sıklaştırma kriterinde çekme yükü yönündeki normal gerilme bileşeni (σ_{11}) kullanılmıştır. Kriteria göre oluşan uyarlamalı sıklaştırma Şekil 5.39 (b) v (c)'de gösterilmektedir. Dairesel boşluğun alt ve üst uç noktalarıyla sağ ve sol uç noktalarında elemanlarda bölme işlemi olmuştur.



Şekil 5.39. Sonlu eleman çözüm ağı, a) başlangıç b) birinci uyarlamalı c) ikinci uyarlamalı

Arka arkaya yapılan iki kez uyarlamalı çözümünden elde edilen şekil değiştirmiş geometriler Şekil 5.40'da gösterilmiştir.



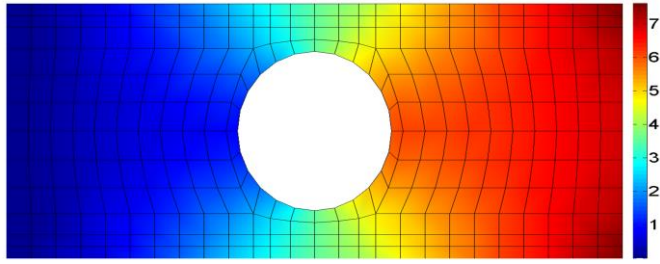
Şekil 5.40. Beş kat artırılarak gösterilen şekil değiştirmiş geometri, a) başlangıç çözüm ağı b) birinci uyarlamalı çözüm c) ikinci uyarlamalı çözüm

Çizelge 5.14’de bu uyarlamalı analizlerden elde edilen x yönündeki maksimum yer değiştirme değerleri ve maksimum normal gerilme değerleri verilmiştir.

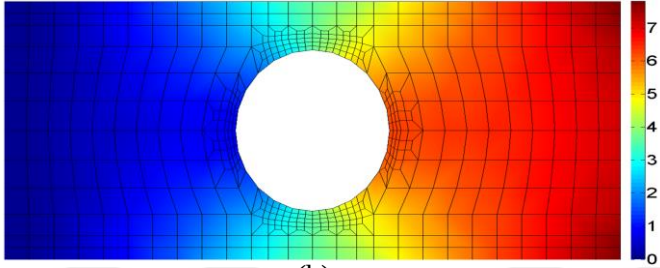
Çizelge 5.14. Uyarlamalı çözümlerde maksimum yer değiştirme ($u_{1_{\max}}$) ve maksimum normal gerilme ($\sigma_{11_{\max}}$)

Analiz adı	Eleman sayısı	Eleman min. kenar uzunluğu (mm)	$u_{1_{\max}}$ (mm)	$\sigma_{11_{\max}}$ (MPa)
Başlangıç çözüm ağı	600	6,54	7,61	0,435
Birinci uyarlamalı analiz	2230	2,18	7,81	0,509
İkinci uyarlamalı analiz	11770	0,73	7,81	0,594

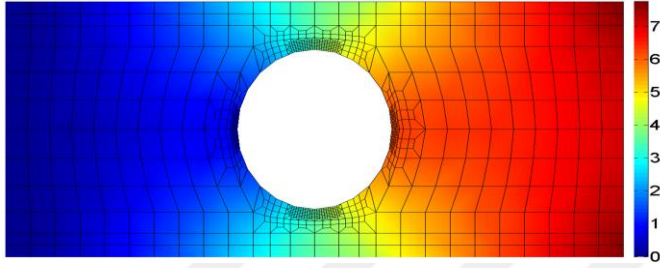
Dairesel deliğin alt ve üst orta noktalarında maksimum normal gerilmeler $\sigma_{11_{\max}}$ gözlenmiştir. Maksimum yer değiştirmeler $u_{1_{\max}}$ yükün uygulandığı yüzeyin üst ve alt kenarlarının orta noktasında gözlenmiştir.



(a)

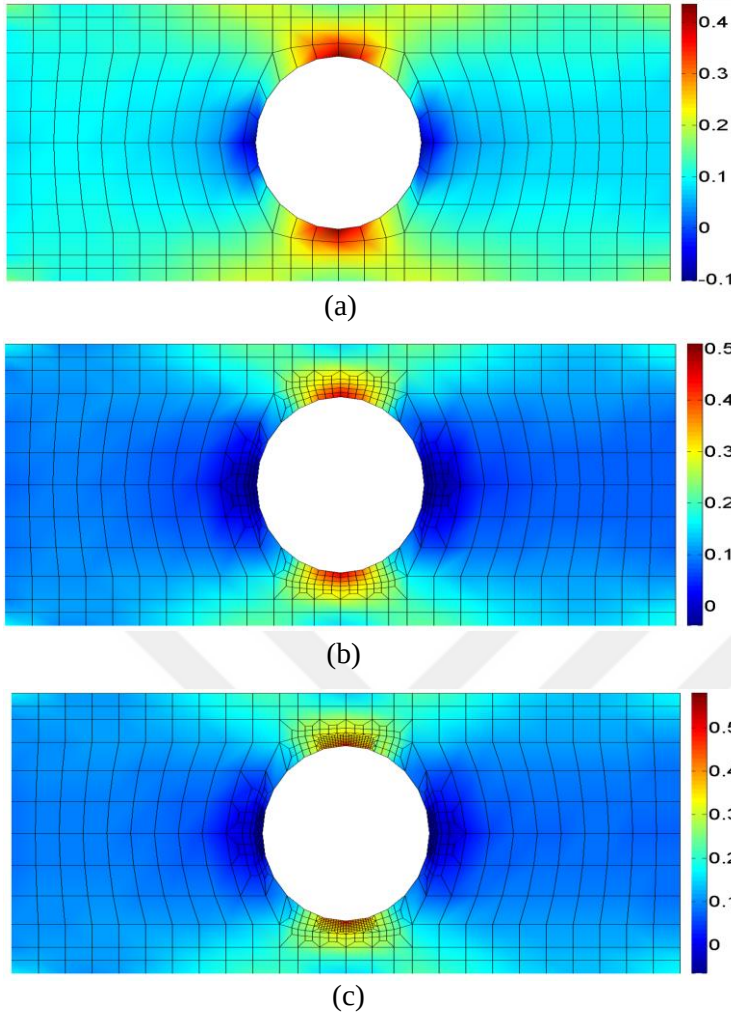


(b)



(c)

Şekil 5.41. u_1 (mm) yer değıştirme renk grafikleri, a) başlangıç çözüm ağı b) birinci uyarlamalı çözüm c) ikinci uyarlamalı çözüm



Şekil 5.42. σ_{11} (MPa) normal gerilme renk grafikleri, a) başlangıç çözüm ağı b) birinci uyarlamalı çözüm, c) ikinci uyarlamalı çözüm

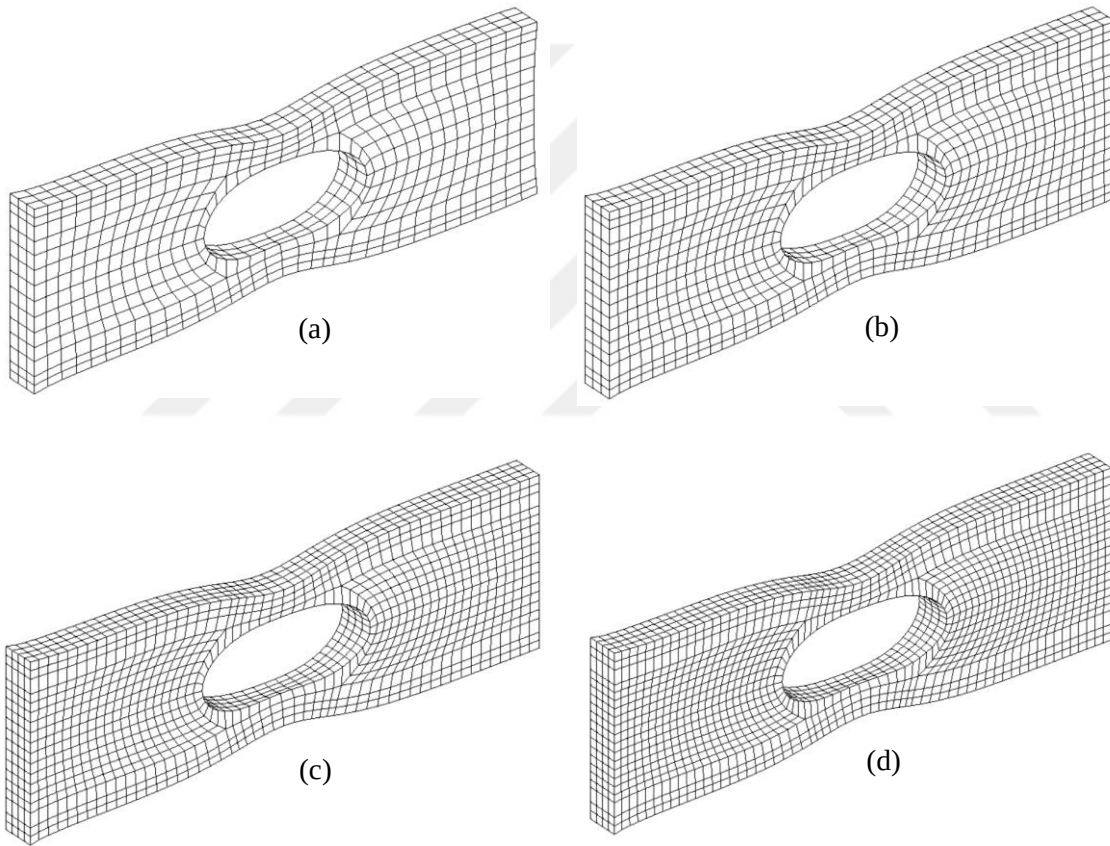
Uniform sıklaştırma sonlu elemanlar analizi

Sonlu elemanlar ağındaki bütün elemanların küçültülmesiyle elde edilen dört uniform sıklaştırma yapılmıştır. Bu sıklaştırmalarda oluşan eleman sayısı ve minimum kenar uzunluğu Çizelge 5.15’de verilmiştir. Sonlu elemanlar çözümünden elde edilen maksimum yer değiştirme ve maksimum normal gerilme değerleri de bu çizelgede gösterilmiştir.

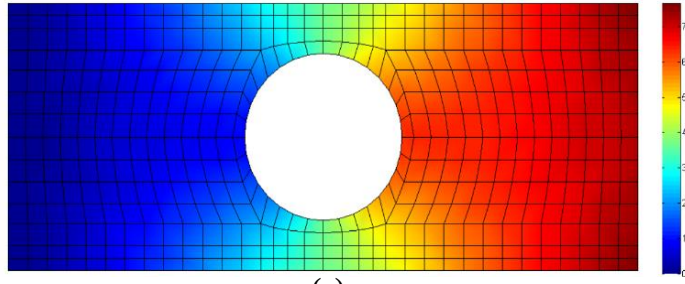
Uniform sıklaştırma sonlu elemanlar analizlerinden elde edilen şekil değiştirmiş geometriler Şekil 5.43’de gösterilmiştir. x doğrultusundaki yer değiştirmenin cisim içindeki değişimi Şekil 5.44’de ve x doğrultusundaki normal gerilmenin değişimi Şekil 5.45’de gösterilmiştir.

Çizelge 5.15. Uniform sıklaştırma için maksimum yer değiştirme ($u_{1\max}$) ve maksimum normal gerilme ($\sigma_{11\max}$)

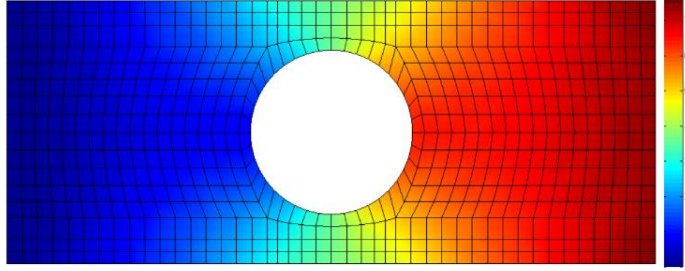
Analiz adı	Eleman sayısı	Eleman min. kenar uzunluğu (mm)	$u_{1\max}$ (mm)	$\sigma_{11\max}$ (MPa)
Başlangıç çözüm ağı	600	6,54	7,61	0,435
1. uniform sıklaştırma	1332	4,91	7,63	0,442
2. uniform sıklaştırma	1932	3,93	7,65	0,450
3. uniform sıklaştırma	3360	3,27	7,65	0,464
4. uniform sıklaştırma	4260	2,8	7,66	0,465



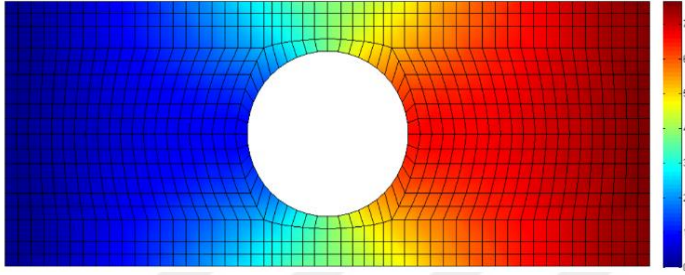
Şekil 5.43. Beş kat büyütülerek gösterilen şekil değiştirmiş geometri, a) 1. uniform sıklaştırma b) 2. uniform sıklaştırma c) 3. uniform sıklaştırma d) 4. uniform sıklaştırma



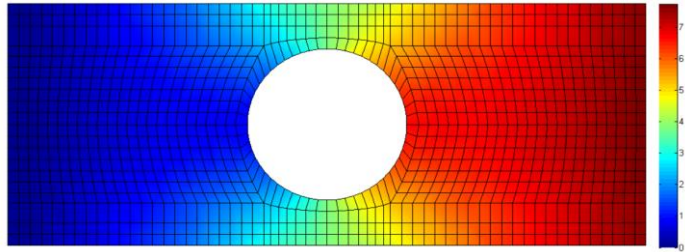
(a)



(b)

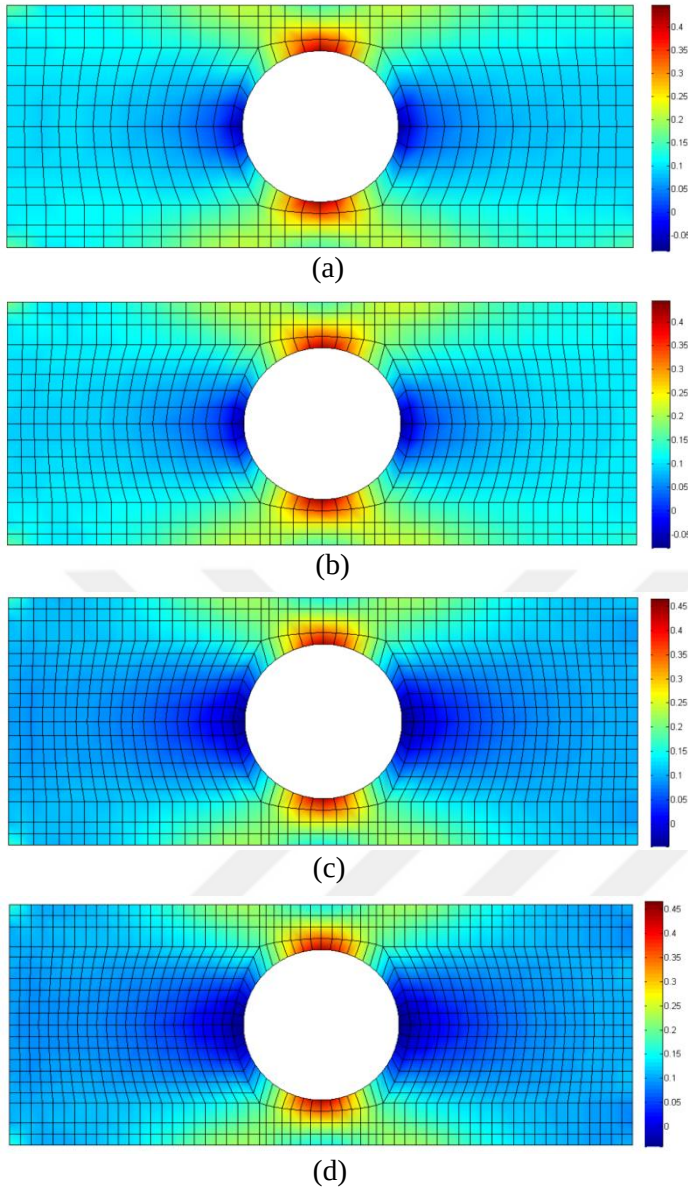


(c)



(d)

Şekil 5.44. u_1 (mm) yer değiştirme renk grafikleri, a) 1. uniform sıklaştırma, b) 2. uniform sıklaştırma, c) 3. uniform sıklaştırma, d) 4. uniform sıklaştırma



Şekil 5.45. σ_{11} (MPa) normal gerilme renk grafikleri, a) 1. uniform sıkıştırma b) 2. uniform sıkıştırma c) 3. uniform sıkıştırma c) 4. uniform sıkıştırma

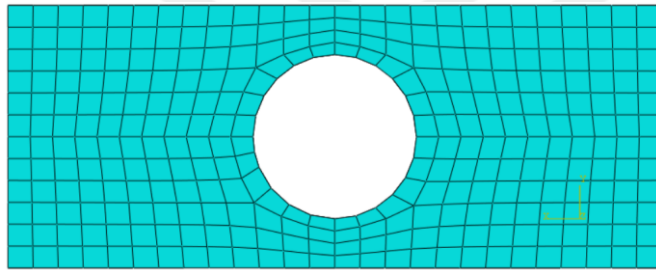
Abaqus yazılımında oluşturulan modeller

Dairesel boşluk içeren blok için Abaqus yazılımında 600 elemanlı bir başlangıç eleman ağı oluşturulmuştur. Bu eleman ağı ile başlangıç çözümleri yapılmıştır. Sonrasında iki kez üst üste yapılan manuel lokal sıkıştırma iki ayrı sıkıştırılmış eleman ağı elde edilmiştir. Bu eleman ağı için eleman sayıları ve minimum kenar uzunlukları Çizelge 5.16'da gösterilmiştir. Ayrıca, oluşturulan eleman ağları Şekil 5.46'da gösterilmiştir.

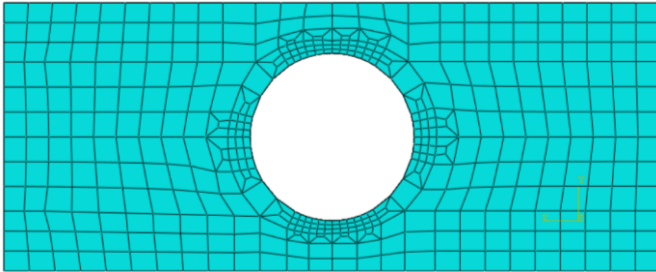
Çizelge 5.16. Abaqus lokal sıkılaştırma ile elde edilen maksimum yer değiştirme ($u_{1_{\max}}$) ve maksimum normal gerilme ($\sigma_{11_{\max}}$)

Analiz adı	Eleman sayısı	Eleman min. kenar uzunluğu (mm)	$u_{1_{\max}}$ (mm)	$\sigma_{11_{\max}}$ (MPa)
Başlangıç çözüm ağı	600	3,97	7,50	0,480
Birinci lokal sıkılaştırma	2280	2,37	7,57	0,522
İkinci lokal sıkılaştırma	11312	0,629	7,57	0,539

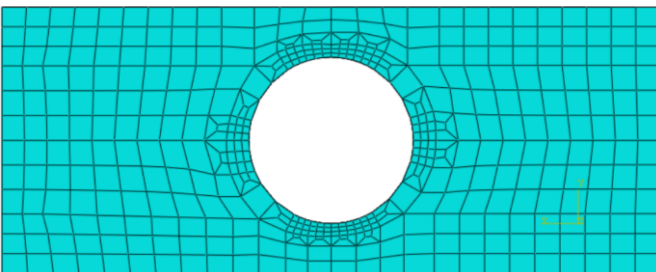
Abaqus ile manuel oluşturulan lokal sıkılaştırmalar, Şekil 5.46'de gösterilen MATLAB ortamında yazılan kodun otomatik oluşturduğu eleman ağına yakın benzerlikte oluşturulmuştur.



(a)



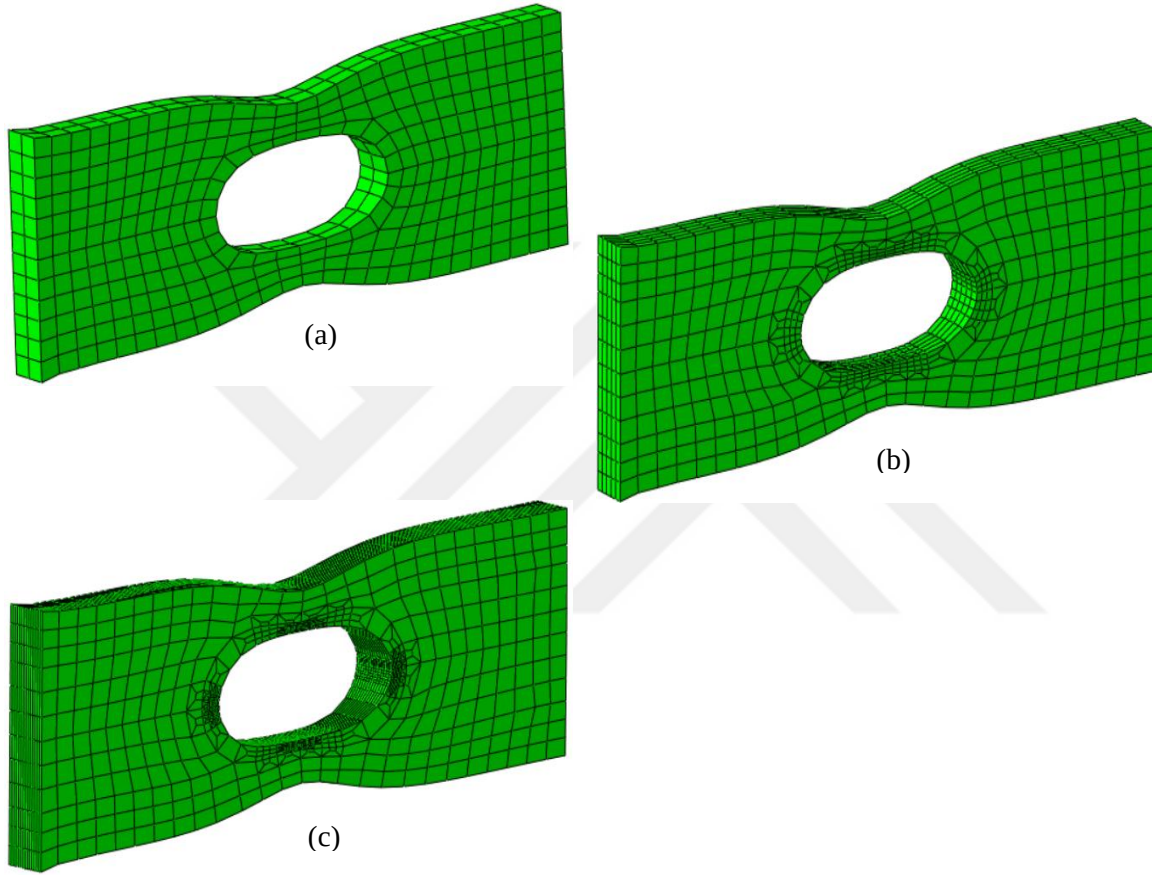
(b)



(c)

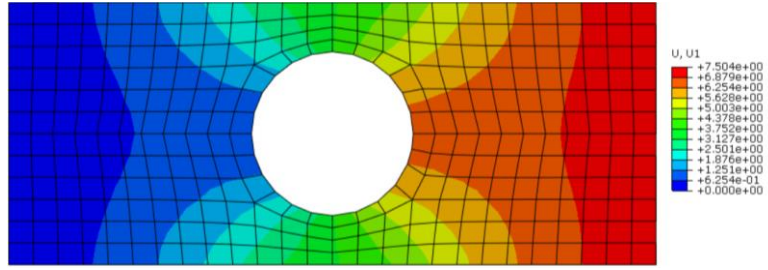
Şekil 5.46. Abaqus sonlu eleman çözüm ağı a) başlangıç, b) birinci lokal sıkılaştırma, c) ikinci lokal sıkılaştırma

Abaqus analizleri sonrası dairesel boşluk içeren blok için elde edilen şekil değiştirmiş geometriler Şekil 5.47’de gösterilmiştir. Burada elde edilen şekil değiştirmiş geometriler, MATLAB ortamında yazılan kodun oluşturduğu şekil değiştirmiş geometrilere oldukça yakın olmuştur. Lokal sıkılaştırma ile birlikte sınır geometrisi daha gerçekçi bir şekilde olmuştur.

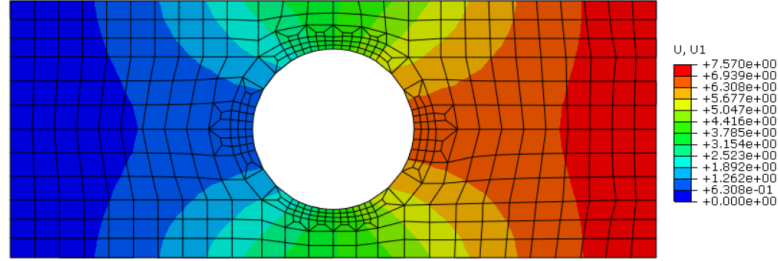


Şekil 5.47. Beş kat artırılarak gösterilen Abaqus şekil değiştirmiş geometri, a) başlangıç çözüm ağı b) birinci lokal sıkılaştırma, c) ikinci lokal sıkılaştırma

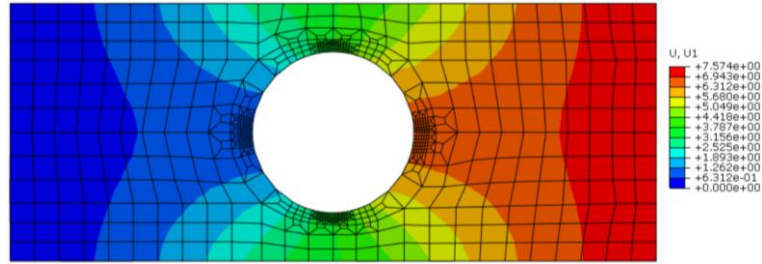
x doğrultusundaki yer değiştirmenin blok içindeki değişimi Şekil 5.48’de ve x doğrultusundaki normal gerilmenin değişimi Şekil 5.49’da gösterilmiştir. Maksimum çekme gerilmesi dairesel boşluğun üst ve alt kenarlarında oluşmaktadır.



(a)

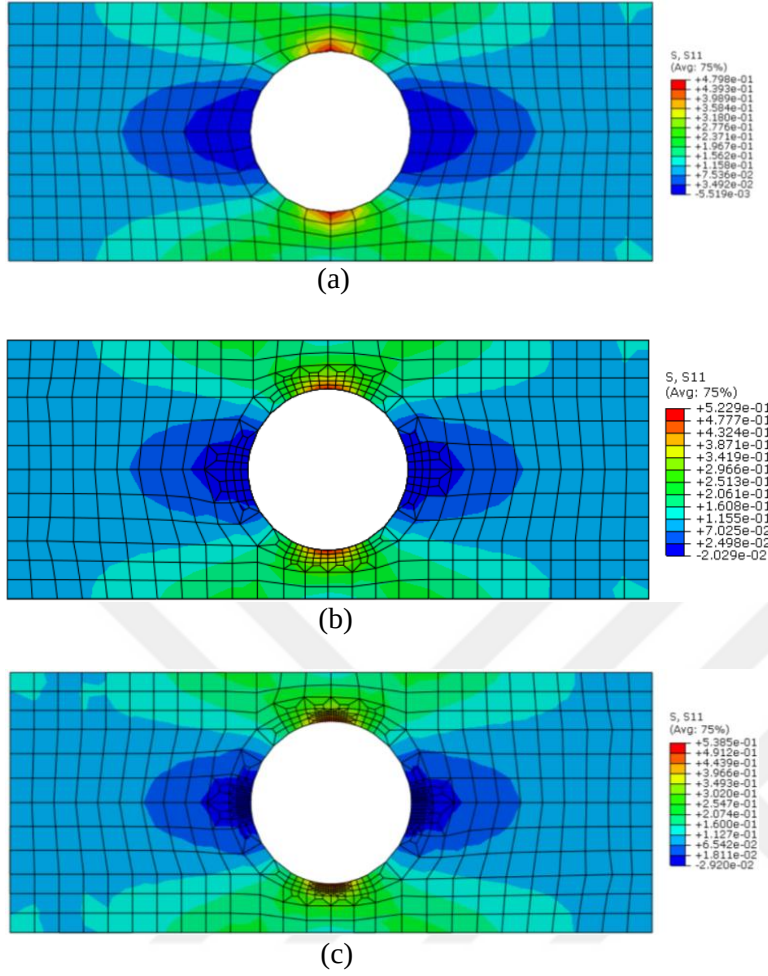


(b)



(c)

Şekil 5.48. u_1 (mm) Abaqus yer değiştirme renk grafikleri, a) başlangıç çözüm ağı b) birinci lokal sıkılaştırma c) ikinci lokal sıkılaştırma



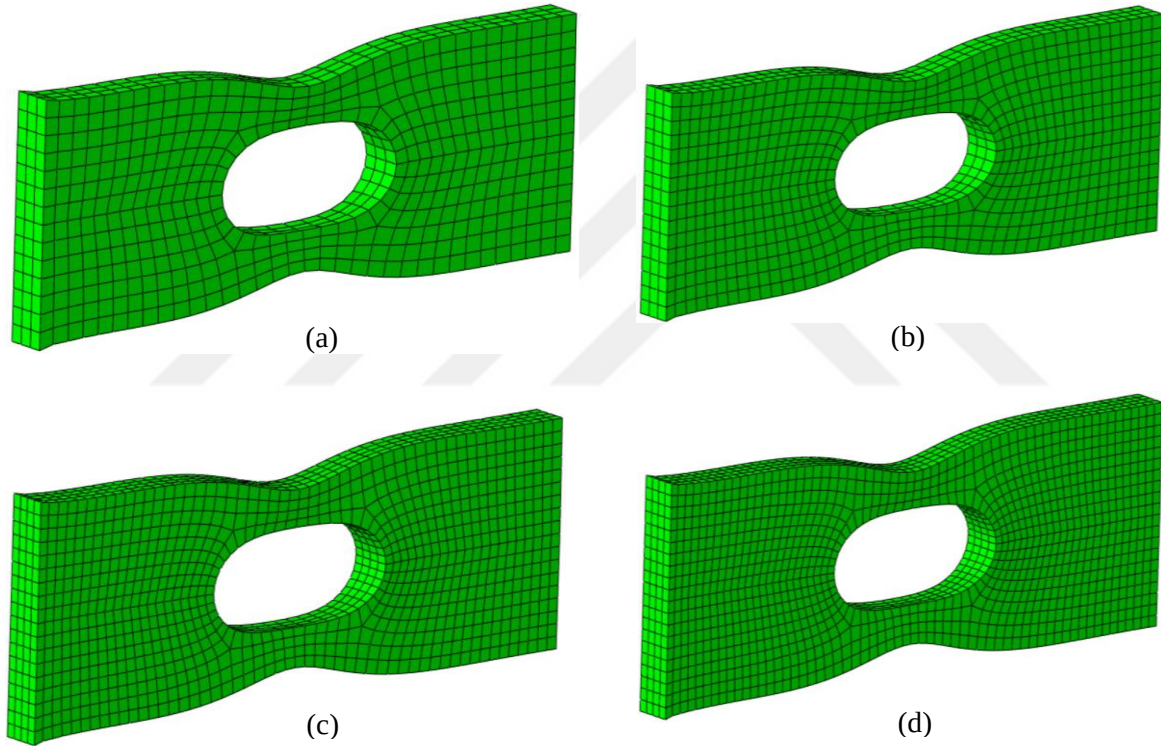
Şekil 5.49. σ_{11} (MPa) normal gerilme Abaqus renk grafikleri, a) başlangıç çözüm ağı b) birinci lokal sıkılaştırma c) ikinci lokal sıkılaştırma

Abaqus yazılımında lokal sıkılaştırma dışında uniform sıkılaştırma kullanılarak eleman ağı oluşturulmuştur. Buradaki uniform sıkılaştırma, MATLAB ortamında yazılan kodun oluşturduğu uniform sıkılaştırma eleman ağına yakın eleman ağı oluşturacak şekilde yapılmıştır. Bu eleman ağlarında oluşan eleman sayıları ve minimum kener uzunlukları Çizelge 5.17’de verilmiştir.

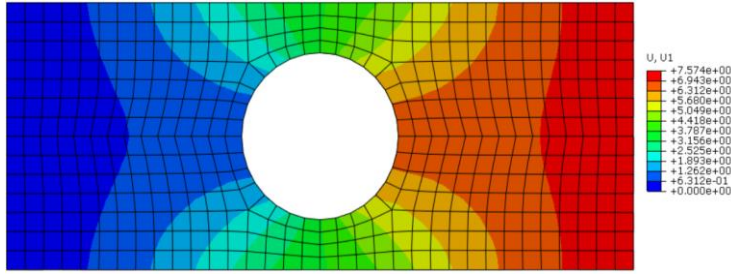
Uniform sıkılaştırma ile oluşturulan eleman ağlarını kullanarak yapılan sonlu elemanlar çözümünden elde edilen şekil değiştirmiş geometriler her bir eleman ağı için Şekil 5.50’de gösterilmiştir. x doğrultusundaki yer değiştirmenin cisim içindeki değişimi Şekil 5.51’de ve x doğrultusundaki normal gerilmenin değişimi Şekil 5.52’de gösterilmiştir.

Çizelge 5.17. Abaqus uniform sıklaştırma için maksimum yer değiştirme ($u_{1_{\max}}$) ve maksimum normal gerilme ($\sigma_{11_{\max}}$)

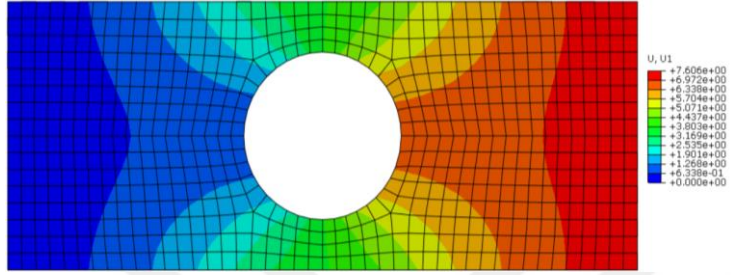
Analiz adı	Eleman sayısı	Eleman min. kenar uzunluğu (mm)	$u_{1_{\max}}$ (mm)	$\sigma_{11_{\max}}$ (MPa)
Başlangıç çözüm ağı	600	6,54	7,50	0,480
1. uniform sıklaştırma	1332	4,91	7,57	0,487
2. uniform sıklaştırma	1932	3,93	7,61	0,491
3. uniform sıklaştırma	3360	3,27	7,62	0,497
4. uniform sıklaştırma	4260	2,8	7,63	0,499



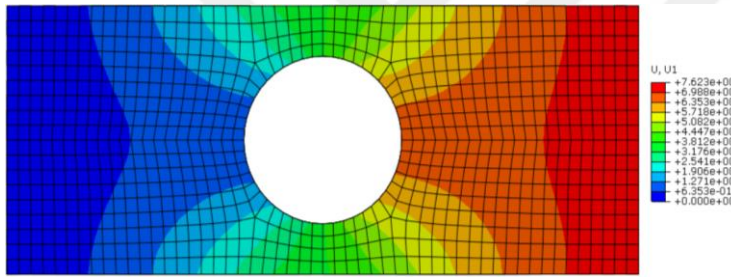
Şekil 5.50. Beş kat büyütülerek gösterilen Abaqus şekil değiştirmiş geometri, a) 1. uniform sıklaştırma b) 2. uniform sıklaştırma c) 3. uniform sıklaştırma d) 4. uniform sıklaştırma



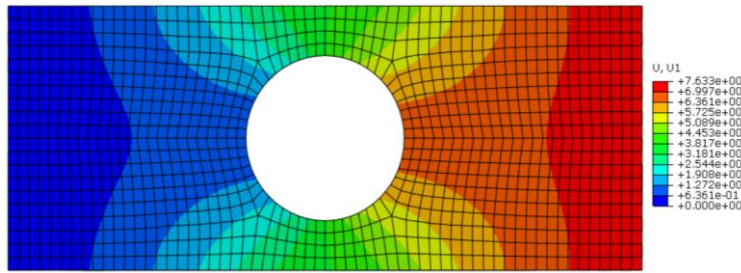
(a)



(b)

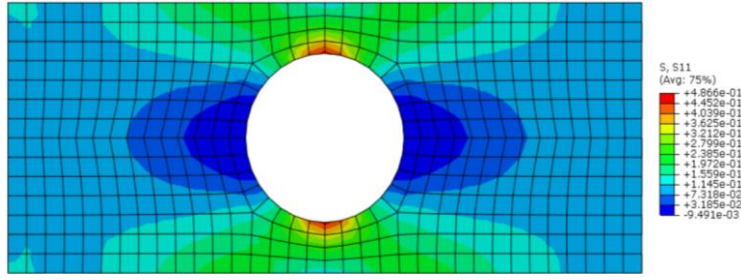


(c)

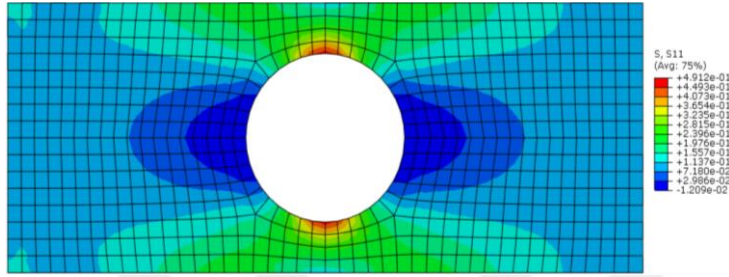


(d)

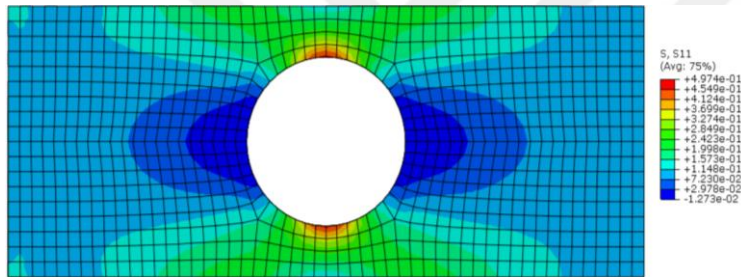
Şekil 5.51. u_2 (mm) Abaqus yer değiştirme renk grafikleri, a) 1. uniform sıklaştırma b) 2. uniform sıklaştırma c) 3. uniform sıklaştırma d) 4. uniform sıklaştırma



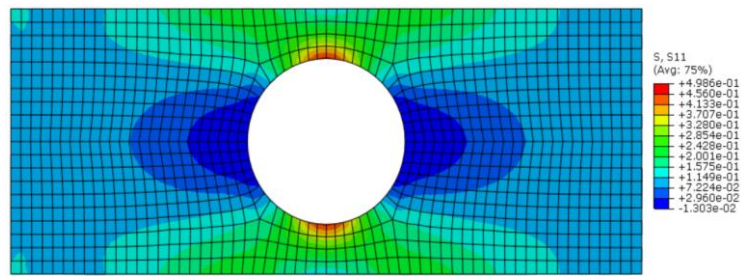
(a)



(b)



(c)



(d)

Şekil 5.52. σ_{11} (MPa) normal gerilme Abaqus renk grafikleri, a) 1. uniform sıkıştırma b) 2. uniform sıkıştırma c) 3. uniform sıkıştırma d) 4. uniform sıkıştırma

Analizler arası karşılaştırmalar

Çizelge 5.18’de gösterilen uyarlamalı analiz çözümü ve Abaqus lokal sıkıştırma çözümü karşılaştırmasına bakıldığında, x doğrultusundaki maksimum yer değiştirme için ve x doğrultusundaki maksimum çekme gerilmesi için bir değer hariç %10’un altında fark değerleri oluşmuştur.

Uniform sıklaştırma için yapılan karşılaştırma Çizelge 5.19’de gösterilmiştir. Burada da hem maksimum yer değiştirme hem de maksimum çekme gerilmesi için %10’un altında fark değerleri oluşmuştur. Eleman sayısının artmasıyla fark değerleri küçülmüştür.

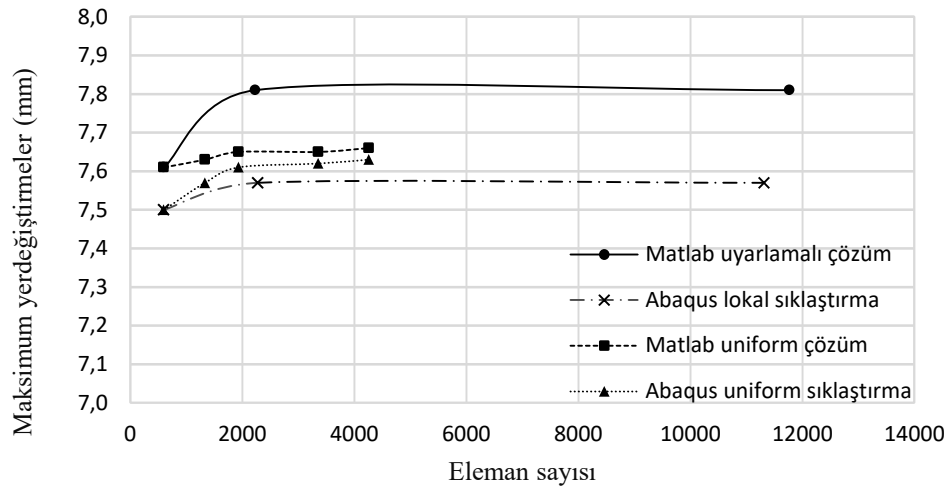
Çizelge 5.18. Uyarlamalı çözüm ile Abaqus çözümü maksimum yer değiştirme ($u_{1_{\max}}$) ve maksimum kesme gerilmesi ($\sigma_{11_{\max}}$) karşılaştırması

Analiz adı	$u_{1_{\max}}$ (mm)	$u_{1_{\max}}$ (mm) (Abaqus)	Fark (%)	$\sigma_{12_{\max}}$ (MPa)	$\sigma_{12_{\max}}$ (MPa) (Abaqus)	Fark(%)
Başlangıç çözüm ağı	7,61	7,50	-1,47	0,435	0,480	9,38
Birinci uyarlamalı analiz	7,81	7,57	-3,17	0,509	0,522	2,49
İkinci uyarlamalı analiz	7,81	7,57	-3,17	0,594	0,539	10,2

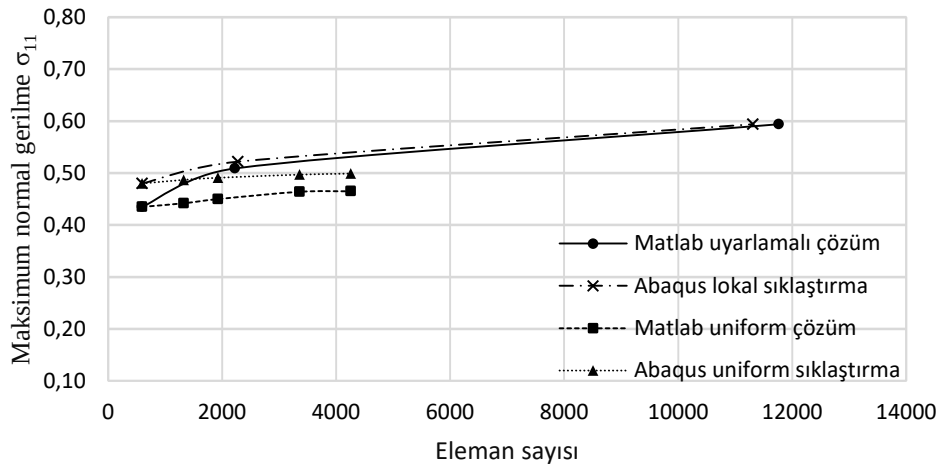
Çizelge 5.19. Uniform çözüm ile Abaqus çözümü maksimum yer değiştirme ($u_{1_{\max}}$) ve maksimum normal gerilme ($\sigma_{11_{\max}}$) karşılaştırması

Analiz adı	$u_{1_{\max}}$ (mm)	$u_{1_{\max}}$ (mm) (Abaqus)	Fark (%)	$\sigma_{11_{\max}}$ (MPa)	$\sigma_{11_{\max}}$ (MPa) (Abaqus)	Fark (%)
Başlangıç çözüm ağı	7,61	7,5	-1,47	0,435	0,480	9,38
1. uniform sıklaştırma	7,63	7,57	-0,79	0,442	0,487	9,24
2. uniform sıklaştırma	7,65	7,61	-0,53	0,450	0,491	8,35
3. uniform sıklaştırma	7,65	7,62	-0,39	0,464	0,497	6,64
4. uniform sıklaştırma	7,66	7,63	-0,39	0,465	0,499	6,81

Maksimum yer değiştirmenin eleman sayısı ile değişimi Şekil 5.53’de gösterilmiştir. Uyarlamalı analiz ve Abaqus lokal sıklaştırma analizlerinde maksimum yer değiştirme değeri eleman sayısının artmasıyla belirli bir değere yakınsamıştır. Maksimum çekme gerilmesinin eleman sayısı ile değişimi Şekil 5.54’de gösterilmiştir. Burada, uyarlamalı analiz ve Abaqus lokal sıklaştırma analizlerinin sonuçlarının tam olarak bir değere yakınsadığı görülmemektedir.



Şekil 5.53. Maksimum yer değiştirmenin $u_{1_{\max}}$ eleman sayısına göre değişimi



Şekil 5.54. Maksimum normal gerilmelerin $\sigma_{11_{\max}}$ eleman sayısına göre değişimi

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, hexahedral uyarlamalı sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak hiperelastik ortamın büyük şekil değişimi ve gerilme hesabı yapılmıştır. Hiperelastik malzeme modeli olarak Mooney Rivlin malzeme modeli seçilmiştir. Bu doğrultuda MATLAB ortamında bir program yazılmıştır. Bu program altı yüzlü sonlu elemanları otomatik olarak daha küçük altı yüzlü sonlu elemanlara bölebilmekte ve toplam Lagrangian formülasyonunu kullanarak sonlu elemanlar analizi yapılmasına olanak sağlamaktadır. Sonlu elemanlar ağının gereken bölgelerde otomatik olarak daha küçük elemanlara bölünmesiyle oluşturulması uyarlamalı çözüm ağı oluşturma ve bu eleman ağını kullanarak yapılan sonlu elemanlar analizi de uyarlamalı sonlu elemanlar yöntemi olarak isimlendirilmiştir. Uyarlamalı çözüm ağının kullanılması ile elde edilen sonuçlar, Abaqus yazılımında manuel olarak yapılan lokal sıklaştırma analizlerinden elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılmıştır.

Ayrıca, uyarlamalı ve lokal sıklaştırmaya ek olarak eleman ağındaki bütün elemanların bölünmesi ile oluşturulan uniform sıklaştırma analizleri de yapılmıştır. Yazılan programın ve Abaqus yazılımıyla elde edilen sonuçların karşılaştırması yapılmıştır.

a. Uyarlamalı çözüm ağının oluşturulması ile ilgili sonuçlar

Uyarlamalı çözüm ağı oluşturma, bütün problem geometrisinin belirli bölgelerinde daha küçük diğer bölgelerinde daha büyük elemanların oluşmasını otomatik olarak sağlamaktadır. Bunun için bölünecek elemanlara karar veren bir kritere ihtiyaç vardır. Bu çalışmada kullanılan ortalama gerilme değeri ile min-max karşılaştırması yapılması, ele alınan örneklerde uygun eleman ağlarının oluşmasını sağlamıştır.

Uyarlamalı çözüm ağı oluşturulması için gereken hesap adım sayısı yapılan işlemlerin karmaşıklığı nedeniyle ağ oluşturma süresi daha fazla olmaktadır. Bu nedenle uyarlamalı ağ oluşturma algoritmasının süre kısaltacak şekilde daha etkin olması gerekmektedir.

b. Uyarlamalı sonlu elemanlar analizinde ulaşılan sonuçlar

Üzerinde tekil yükleme uygulanan hiperelastik blok analizinde, iki uyarlamalı analiz sonrasında eleman minimum kenar uzunluğu başlangıçtaki yaklaşık yüzde 10'una düşmüştür. Maksimum yer değiştirme (u_{2max}) değerinin eleman sayısındaki artışla birlikte sabit bir değerde kalmadığı görülmüştür. Bu durum Abaqus yazılımında da aynı olmuştur. Ancak maksimum normal gerilme (σ_{22max}) değerlerinin eleman sayısında artışla birlikte sabit bir değere yakınsamıştır.

Eleman ağında arka arkaya uniform sıklaştırma yapılan analizlerde eleman minimum kenar uzunluğu son durumda başlangıçtaki yüzde 43'üne küçülmüştür. MATLAB ile yazılan kod ve Abaqus yazılımının sonuçları maksimum yer değiştirme (u_{2max}) için oldukça yakın olmuştur. Uniform sıklaştırma analizlerinde, maksimum yer değiştirme için eleman sayısındaki artışla sabit bir değere yakınsama durumu uyarlamalı analizdeki gibi olmuştur. Eleman sayısındaki artışla birlikte maksimum normal gerilme (σ_{22}) değerleri yine bir değere tam olarak yakınsamamıştır.

Tekil yükleme uygulanan bu analizde, yazılan kod sonuçları ve Abaqus sonuçları arasındaki fark maksimum yer değiştirme ve maksimum gerilme değerleri için %10'dan büyük olmuştur. Sadece uniform sıklaştırma uygulanan analizlerde kod ve Abaqus maksimum yer değiştirme değerleri arasındaki fark %10'un altında olmuştur.

Basit kesme yüklemesi uygulanan analizlerde, uyarlamalı çözüm ağında en küçük eleman kenar uzunluğu bir önceki örnekteki gibi olmuştur. Yazılan uyarlamalı analiz kodu, maksimum yer değiştirme (u_{1max}) ve maksimum kesme gerilmesi (σ_{12max}) değerleri için eleman sayısının artmasıyla birlikte belirli bir değere yakınsayan sonuç oluşturmuştur. Abaqus ile manuel olarak yapılan benzer lokal sıklaştırma da belirli bir değere yakınsayan sonuç oluşturmuştur. Maksimum yer değiştirme ve maksimum kesme gerilmesi değerlerinde yazılan kod ve Abaqus arasında %10'dan küçük farklar oluşmuştur.

Aynı yükleme için, arka arkaya uniform sıklaştırma yapılan analizlerde eleman minimum kenar uzunluğu başlangıçtaki yaklaşık yüzde 30'una düşmüştür. Burada da yazılan kod ve Abaqus sonuçları arasındaki fark %10'dan küçük olmuştur. Uniform sıklaştırmada,

eleman sayısındaki artış ile maksimum yer değiştirme ve maksimum gerilme değerinde sabit bir değere yakınsama oluşması için, eleman boyutunun belirli bir miktar daha küçültülmesi gerektiği görülmüştür.

Çekme gerilmesi etkisindeki dairesel boşluk içeren dikdörtgen blok için yapılan analizlerde, uyarlamalı çözümlerde eleman minimum kenar uzunluğu başlangıçtaki yaklaşık yüzde 11'ine düşmüştür. Uyarlamalı analiz ve Abaqus lokal sıklaştırma analizleri sonuçları arasındaki fark genel olarak %10'un altında oluşmuştur. Eleman sayısının artmasıyla birlikte maksimum yer değiştirme (u_{1max}) değeri belirli bir değere yakınsamıştır. Benzer durum Abaqus lokal sıklaştırma analizinde de olmuştur. Ancak maksimum normal gerilme (σ_{11max}) değeri eleman sayısındaki artış ile birlikte belirli bir değere tam olarak yakınsamamıştır.

Aynı yükleme için uniform sıklaştırma yapılan analizlerde, eleman minimum kenar uzunluğu başlangıçtaki yaklaşık yüzde 43'üne düşmüştür. Yazılan kod ve Abaqus yazılımının sonuçları arasında %10'dan küçük farklar oluşmuştur. Bu analizlerde, maksimum yer değiştirme ve maksimum gerilme değerinin eleman sayısındaki artışla birlikte belirli bir değere yakınsadığı görülmüştür.

Yapılan analizlerde yüklemenin şekli etkili olduğu görülmüştür. Yayıllı yüklerin uygulandığı durumlar, bir noktadan yapılan yüklemeye göre daha fazla yakınsamanın elde edildiği örnekler olmuştur.

Uyarlamalı analiz için bölme işlemi yapılacak elemanların seçiminde kullanılan kriter etkin bir şekilde çalışarak gerekli yerlerde eleman sıklaştırması yapılmasını sağlamıştır. Gerilme yığılmasının olduğu yerlerde elemanlar daha küçük elemanlara bölünebilmiştir.

c. Gelecekte yapılacak çalışmalar

Geçiş elemanlarının iç geometrik özelliklerinin ve farklı tipteki geçiş elemanlarının çözüm üzerindeki etkisi bu çalışma sonrasında yapılacak çalışmalar arasındadır. Uyarlamalı çözüm ağı oluşturulmasında eleman bölme krite olarak kullanılabilecek diğer yaklaşımların etkisi incelenmelidir. Yazılan kod için yapılan karşılaştırmalar Abaqus yazılımı ile sınırlı kaldığı için deneysel çalışmaların verilerini kullanan bir karşılaştırma

ihtiyacı duyulmaktadır. Ele alınan örneklerin fiziki doğası gereği olması gereken temas analizi için formülasyon güncellenmelidir. Statik yükleme ile sınırlı kalan bu çalışma devamında doğrusal olmayan dinamik davranış da incelenmelidir.



KAYNAKLAR

1. Blacker, T. (2002). Automated conformal hexahedral meshing constraints, challenges and opportunities. *Engineering with Computers*, 17, 201-210.
2. Schneiders, R. (1996). A grid-based algorithm for the generation of hexahedral element meshes. *Engineering with Computers*, 12, 168-177.
3. Eppstein, E. (1999). Linear complexity hexahedral mesh generation. *Computational Geometry Theory and Applications*, 12, 3-16.
4. Baudouin, T.C., Remacle, J.F., Marchandise, E., Henrotte, F. and Geuzaine, C. (2014). A frontal approach to hex-dominant mesh generation. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, 1-8.
5. Staten, M.L., Canann, S.A., Owen, S.J. (1999). BMSweep: Locating interior nodes during sweeping. *Engineering with Computers*, 15, 212-218.
6. Lai, M., Benzley, S., White, D. (2000). Automated hexahedral mesh generation by generalized multiple source to multiple target sweeping. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 49, 261-275.
7. Owen, S.J., Saigal, S. (2000). H-Morph: an indirect approach to advancing front hex meshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 49, 289-312.
8. Li, T.S., McKeag, R.M., Armstrong, C.G. (1995). Hexahedral meshing using midpoint subdivision and integer programming. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 124, 171-193.
9. Schneiders, R. (1996). *Refining quadrilateral and hexahedral element meshes*. Proceedings of the 5th International Meshing Roundtable, New York, 679-688.
10. Harris, N.J., Benzley, S.E., Owen, S.J. (2004). *Conformal refinement of all-hexahedral element meshes based on multiple twist plane insertion*. Proceedings of the 13th International Meshing Roundtable, Williamsburg, 157-168.
11. Parrish, M., Borden, M., Staten, M. ve Benzley, S. (2007). *A selective approach to conformal refinement of unstructured hexahedral finite element meshes*. Proceedings of the 16th International Meshing Roundtable, Seattle, 14-17.
12. Huang, L., Zhao, G., Wang, Z. ve Zhang, X. (2016). Adaptive hexahedral mesh generation and regeneration using an improved grid-based method. *Advances in Engineering Software*, 102, 49-70.
13. Huang, L., Zhao, G., Ma, X. ve Wang, Z. (2013). Incorporating improved refinement techniques for a grid-based geometrically-adaptive hexahedral mesh generation algorithm. *Advances in Engineering Software*, 64, 20-32.

14. Tchon, K.F., Khachan, M., Guibault, F. ve Camarero, R. (2005). Three-dimensional anisotropic geometric metrics based on local domain curvature and thickness. *Computer-Aided Design*, 37, 173-187.
15. Zhang, Y., Bajaj, C. (2006). Adaptive and quality quadrilateral/hexahedral meshing from volumetric data. *Computer Methods Applied Mechanics and Engineering*, 195, 942–960.
16. Fernandes, J.L.M., Martins, P.A.F. (2007). All-hexahedral remeshing for the finite element analysis of metal forming processes. *Finite Elements in Analysis and Design*, 43, 666 – 679.
17. Sun, L., Zhao, G., Ma, X. (2012). Adaptive generation and local refinement methods of three-dimensional hexahedral element mesh. *Finite Elements in Analysis and Design*, 50, 184–200.
18. Zhu, J., Zienkiewicz, C. (1990). Super convergence recovery technique and a posteriori error estimators. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 30, 1321-1339.
19. Park, C.,H., Yang, D.Y. (2006). Adaptive refinement of all-hexahedral elements for three-dimensional metal forming analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, 43, 22–35.
20. Moshfegh, R., Li, X., Nilsson, L. (2000). Gradient-based refinement indicators in adaptive finite element analysis with special reference to sheet metal forming. *Engineering Computations*, 17, 910-932.
21. Caboussat, A., Girardin, M., Picasso, M. (2024). Error assessment of an adaptive finite elements neural networks method for an elliptic parametric PDE. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 421, 1-17.
22. Swanson, S. R. (1985). Large deformation finite element calculations for slightly compressible hyperelastic materials. *Computers and Structures*, 21, 81-88.
23. Pengt, S. H., Cbang, W. V. (1997). A compressible approach in finite element analysis of rubber-elastic materials. *Computers and Structures*, 62, 573-593.
24. Suchocki, C. (2017). Finite element implementation of slightly compressible and incompressible first invariant-based hyperelasticity: theory, coding, exemplary problems. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 55, 787-800.
25. Herrmann, L. R. (1965). Elasticity equations for incompressible and nearly incompressible materials by a variational theorem. *American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA) Journal*, 3, 1896-1900.
26. Bonet, J., Bhargava, P. (1995). A uniform deformation gradient hexahedron element with artificial hourglass control. *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, 38, 2809-2828.

27. Neto, E. A. S., Peril D., Dutko M. ve Owen D. R. J. (1996). Design of simple low order finite elements for large strain analysis of nearly incompressible solids. *International Journal of Solids and Structures*, 33, 3211-3296.
28. Pascon, J. P. (2019). Large deformation analysis of plane-stress hyperelastic problems via triangular membrane finite elements. *International Journal of Advanced Structural Engineering*, 11, 331–350.
29. Medri, G., Strozzi, A. (1984) Mechanical analysis of elastomeric seals by numerical methods. *Industrial and Engineering Chemistry Product Research and Development*, 23, 596-600.
30. Chamberland, E., Fortin, A., Fortin, M. (2010). Comparison of the performance of some finite element discretizations for large deformation elasticity problems. *Computers and Structures*, 88, 664–673.
31. Shojaei, M. F., Yavari, A. (2019). Compatible-strain mixed finite element methods for 3D compressible and incompressible nonlinear elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 357.
32. O'Shea, D. J., Attard, M. M., Kellermann, D.C. ve Sansour, C. (2000). Nonlinear finite element formulation based on invariant-free hyperelasticity for orthotropic materials. *International Journal of Solids and Structures*, 185, 191-201.
33. Nguyen, T. D., Huynh, T. T. H., Nguyen, N. T., Nguyen, H. T. M. ve Truong, T. T. (2022). Finite element analysis for three-dimensional hyper-elastic problems. *Science and Technology Development Journal*, 24, 43-50.
34. Onishi, Y., Amaya, K. (2014). A locking-free selective smoothed finite element method using tetrahedral and triangular elements with adaptive mesh rezoning for large deformation problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 99, 354-371.
35. Leger, S., Fortin, A., Tibirna, C. ve Forfin M. (2014). An updated Lagrangian method with error estimation and adaptive remeshing for very large deformation elasticity problems. *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, 100, 1006-1030.
36. Leger, S., Pepin, A. (2016). An updated Lagrangian method with error estimation and adaptive remeshing for very large deformation elasticity problems: The three-dimensional case. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 309, 1-18.
37. Zienkiewicz, O.C., Zhu, J.Z. (1992). The superconvergent patch recover (SPR) and adaptive finite element refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 101, 207-224.
38. Kim, N.H. (2015). *Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*. Londra: Springer, 5-220.

39. Simo, J.C., Taylor, R.L. (1982). Penalty function formulations for incompressible nonlinear elastostatics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 35, 107-118.
40. Smith, M. (2009). *ABAQUS/Standard User's Manual*, Version 6.9, Dassault Systemes, Simulia Corp.
41. Doll, S., Hauptmann, R., Schwizerhof, K. ve Freischlager, C., (2000). On volumetric locking of low-order solid and solid-shell elements for finite elastoviscolastic deformations and selective reduced integration. *Engineering Computation*, 7, 1-48.
42. Wriggers, P. (2008). *Nonlinear Finite Element Methods*. Berlin: Springer, 273-313.
43. Bathe, K.-J. (2006). *Finite Element Procedures*. (1st ed.). New Jersey: Prentice-Hall, 20-280.
44. Gharooni, H., Ghannad, M. (2019). New nonlinear solution of nearly incompressible hyperelastic FGM cylindrical shells with arbitrary variable thickness and non-uniform pressure based on perturbation theory. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 16, 1-28.





Gazili olmak ayrıcalıktır