

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ AĞIRLIKLİ MORREY UZAYLARINDA
RIESZ POTANSİYELLERİ VE KOMÜTATÖRLERİ İÇİN İKİ
AĞIRLIKLİ EŞİTSİZLİKLER

Fatma GELERİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2024

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ AĞIRLIKLIL MORREY UZAYLARINDA RIESZ POTANSİYELLERİ VE KOMÜTATÖRLERİ İÇİN İKİ AĞIRLIKLIL EŞİTSİZLİKLER

Fatma GELERİ

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Canay AYKOL KOCAKUŞAKLI

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde tez için gerekli olan tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. Bu bölümün birinci kısmında genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarında Riesz potansiyeli için iki ağırlıklı eşitsizlikler elde edilmiştir ve elde edilen eşitsizlikler yardımıyla Riesz potansiyelinin genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarındaki sınırlılığı ispatlanmıştır. Bu bölümün ikinci kısmında ise genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarında Riesz potansiyelinin komütatörleri için iki ağırlıklı eşitsizlikler elde edilmiştir ve elde edilen eşitsizlikler yardımıyla Riesz potansiyelinin komütatörünün genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarındaki sınırlılığı ispatlanmıştır. Dördüncü bölümde elde edilen sonuçların uygulaması olarak genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarında Riesz potansiyelleri ve komütatörleri tarafından üretilen altlineer ve altlineer komütatör operatörler için iki ağırlıklı eşitsizlikler elde edilmiştir ve elde edilen eşitsizlikler yardımıyla Riesz potansiyeli tarafından üretilen altlineer ve altlineer komütatörün genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayındaki sınırlılığı ispatlanmıştır. Beşinci bölümde ise elde edilen sonuçların analizi yapılmıştır.

Mayıs 2024, 46 sayfa

Anahtar Kelimeler: Morrey uzayı, genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayı, Riesz potansiyeli, kesirli maksimal operatör, komütatör, maksimal komütatör, BMO uzayı, altlineer operatör

ABSTRACT

Master Thesis

TWO WEIGHTED INEQUALITIES FOR RIESZ POTENTIALS AND THEIR COMMUTATORS IN GENERALIZED WEIGHTED MORREY SPACES

Fatma GELERİ

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Canay AYKOL KOCAKUŞAKLI

This thesis consists of five chapters. The first chapter is dedicated to the introduction. In the second chapter, basic definitions and theorems for thesis are given. The third chapter consists of two parts. In the first part of this chapter, two weighted inequalities for the Riesz potential in generalized weighted Morrey spaces are obtained and with the help of the obtained inequalities the boundedness of the Riesz potential in generalized weighted Morrey spaces has been proven. In the second part of this chapter, two weighted inequalities for the commutators of the Riesz potential in generalized weighted Morrey spaces are obtained and with the help obtained of the inequalities, the boundedness of the commutator of the Riesz potential in generalized weighted Morrey spaces has been proven. In the fourth chapter, as an application of the results obtained, two weighted inequalities for sublinear and sublinear commutator operators produced by Riesz potentials are obtained in generalized weighted Morrey spaces. In the fifth chapter, the results obtained are analyzed.

May 2024, 46 pages

Key Words: Morrey space, generalized weighted Morrey space, Riesz potential, fractional maximal operator, commutator, maximal commutator, BMO space, sublinear operator

TEŞEKKÜR

Tez konumda ve çalışmamın her aşamasında fikir ve önerileriyle beni destekleyen sayın hocam Prof. Dr. Canay AYKOL KOCAKUŞAKLI'ya (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü), engin fikirleriyle gelişmemde katkı sağlayan sayın hocam Prof. Dr. Javanshir J. Hasanov'a (Azerbaijan State Oil and Industry University), yüksek lisans yaptığım süre boyunca beni "2210-A Genel Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı" ile destekleyen TÜBİTAK'a, çalışmam boyunca beni her zaman destekleyen sevgili ailem ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Fatma GELERİ
Ankara, Mayıs 2024

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI	
ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1 Temel Tanım ve Teoremler.....	4
2.2 Morrey Uzayları	14
3. GENELLEŞTİRİLMİŞ AĞIRLIKLİ MORREY UZAYLARINDA RIESZ POTANSİYELLERİ VE KOMÜTATÖRLERİ İÇİN İKİ AĞIRLIKLİ EŞİTSİZLİKLER	18
3.1 Genelleştirilmiş Ağırlıklı Morrey Uzaylarında Riesz Potansiyel- leri için İki Ağırlıklı Eşitsizlikler	18
3.2 Genelleştirilmiş Ağırlıklı Morrey Uzaylarında Riesz Potansiyel- lerinin Komütatörleri için İki Ağırlıklı Eşitsizlikler	21
4. BAZI UYGULAMALAR	31
4.1 Genelleştirilmiş Ağırlıklı Morrey Uzaylarında Riesz Potansiyel- leri Tarafından Üretilen Altlineer Operatörler için İki Ağırlıklı Eşitsizlikler	31
4.2 Genelleştirilmiş Ağırlıklı Morrey Uzaylarında Riesz Potansiyel- leri Tarafından Üretilen Altlineer Komütatör Operatörler için İki Ağırlıklı Eşitsizlikler	34
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	41
KAYNAKLAR.....	43
ÖZGEÇMİŞ	46

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}^n$	n-boyutlu Öklid uzayı
$B(x, r)$	$\mathbb{R}^n$ de x merkezli r yarıçaplı yuvar
$ B(x, r) $	$B(x, r)$ yuvarının Lebesgue ölçüsü
${}^cB(x, r)$	$\mathbb{R}^n$ de x merkezli r yarıçaplı yuvarın tümleyeni
ω	Ağırlık fonksiyonu
m	Lebesgue ölçüsü
$L_p(\mathbb{R}^n)$	Lebesgue uzayı
$L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$	p inci mertebeden lokal integrallenebilen fonksiyonların uzayı
$L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$	$\mathbb{R}^n$ de lokal integrallenebilen fonksiyonların uzayı
$L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$	Morrey uzayı
$L_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$	$\mathbb{R}^n$ de ağırlıklı L_p uzayı
$\mathcal{M}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$	Genelleştirilmiş Morrey uzayı
$\mathcal{M}_\omega^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$	Genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayı
S^{n-1}	$\mathbb{R}^n$ de birim küre
ω_n	Birim kürenin hacmi
$\widehat{h}$	h fonksiyonunun Fourier dönüşümü
χ_A	A nın karakteristik fonksiyonu
$A_p(\mathbb{R}^n)$	Muckenhoupt ağırlık sınıfı
$F_p(\mathbb{R}^n)$	Fefferman-Pong ağırlık sınıfı
$Supph$	h nin desteği
M	Maksimal operatör
M_α	Kesirli maksimal operatör
$M^\#$	Sharp maksimal fonksiyon
M_b	Maksimal komütatör
I_α	Riesz potansiyeli
$[b, I_\alpha]$	I_α Riesz potansiyelinin komütatörü
$ b, I_\alpha $	b ölçülebilir fonksiyon olmak üzere, I_α Riesz potansiyelinin komütatörü
T	Singüler integral operatörü
T_α	Riesz potansiyelinin ürettiği altlineer operatörü
$T_{b,\alpha}$	Riesz potansiyelinin ürettiği altlineer komütatör operatörü

1. GİRİŞ

Yeterince düzgün ve sonsuzda küçük olan bir h fonksiyonun Fourier dönüşümü ve onun $\Delta h = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 h}{\partial x_j^2}$ Laplasyen'i

$$(-\Delta h)^\wedge(x) = 4\pi^2 |x|^2 \widehat{h}(x)$$

ile ilişkilidir. $|x|^2$ deki 2 üssünü genel bir β üssü ile değiştirerek ve böylece (en azından biçimsel olarak) Laplasyen'in kesirli kuvvetini

$$\left((- \Delta)^{\beta/2} h\right)^\wedge = (2\pi |x|)^\beta \widehat{h}(x) \quad (1.1)$$

ile tanımlayarak (1.1) integral operatörü elde edilir. Notasyonda küçük bir değişiklik ile $0 < \alpha < n$ olmak üzere

$$I_\alpha(h) = (-\Delta)^{-\alpha/2}(h)$$

bulunur, burada Riesz potansiyeli

$$I_\alpha h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^{\alpha-n} h(y) dy$$

şeklinde tanımlanır (Stein, 1970).

$0 \leq \alpha < n$ ve $h \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olacak biçimde M_α kesirli maksimal fonksiyon

$$M_\alpha h(x) = \sup_{r>0} |B(x, r)|^{-1+\alpha/n} \int_{B(x, r)} |h(y)| dy$$

şeklinde tanımlanır, burada $B(x, r)$ x merkezli r yarıçaplı yuvar olmak üzere $|B(x, r)|$, $B(x, r)$ yuvarının Lebesgue ölçüsüdür. $\alpha = 0$ iken Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu elde edilir. Maksimal operatörler, fonksiyonların türevlenebilirlik özelliklerinde, singüler integrallerde ve kısmi diferensiyel denklemlerde önemli rol oynar. Bu alanlardaki sorunları anlamak için genellikle diğer yöntemlere göre daha derin ve daha basitleştirilmiş bir yaklaşım sağlarlar. $0 < \alpha < n$ olduğundan dolayı I_α Riesz potansiyeli zayıf singüler bir operatördür. I_α Riesz potansiyeli ile M_α kesirli maksimal operatör ilişkilidir, öyle ki

$$M_\alpha h(x) \leq \omega_n^{\frac{\alpha}{n}-1} (I_\alpha |h|)(x) \quad (1.2)$$

eşitsizliği gerçekleşir.

I_α Riesz potansiyeli kısmi diferensiyel denklemlerin çözümünde kullanılan harmonik analizin temel araçlarından biri olup bu operatörlerin çeşitli fonksiyon uzaylarındaki sınırlılığı birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır. Bu uzaylardan birkaçı $L_{p,\lambda}$ Morrey uzayı, $\mathcal{M}^{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzayı, $\mathcal{M}_\omega^{p,\varphi}$ genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayı ve $G\mathcal{M}_{p,\theta,\varphi,\omega}$ global genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayıdır. Morrey uzayları 1938 yılında Morrey tarafından ilk defa ortaya çıkarılmıştır. Morrey uzayları kısmi diferensiyel denklemler teorisinde ve varyasyonlar teorisi alanındaki problemler için kullanışlıdır. Harmonik analizde, sıklıkla rastlanan operatörler olan singüler, maksimal ve Riesz potansiyelleri gibi çeşitli fonksiyon uzaylarındaki eşitsizliklerinin çalışmaları oldukça önemli bir yere sahiptir. Riesz potansiyelinin Morrey uzaylarındaki sınırlılığı Adams tarafından 1975 yılında elde edilmiştir. Nakai ve Mizuhara gibi bilim insanları genelleştirilmiş Morrey uzaylarında Riesz potansiyeli, singüler integral ve maksimal operatörlerin sınırlılığını elde etmişlerdir. Guliyev 2009 yılında bulduğu yeni yöntemleri kullanarak genelleştirilmiş Morrey uzaylarında Riesz potansiyeli, singüler integral ve maksimal operatörlerin sınırlılığını elde etmiştir. 2012 yılında Guliyev, hem genelleştirilmiş Morrey uzayını hem de ağırlıklı Morrey uzayını genelleştirerek genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayını tanımlamıştır. Genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayının tanımında geçen ağırlıklı Lebesgue uzaylarında singüler, maksimal operatörlerin ve Riesz potansiyelinin sınırlılığı Muckenhoupt ile Wheeden ve Coifman ile Fefferman tarafından bulunmuştur. Riesz potansiyelinin genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayındaki sınırlılığı 2023 yılında Aykol, Hasanov ve Safarov tarafından ispatlanmıştır. Riesz potansiyelinin global genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarındaki sınırlılığı 2024'te Aykol, Geleri, Hasanov ve Safarov tarafından ispatlanmıştır.

" $1 \leq p < \infty$, $h \in L_{p,\omega}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ φ , $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ de ölçülebilir pozitif bir fonksiyon ve ω , $\mathbb{R}^n$ uzayı üzerinde negatif olmayan ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $\mathcal{M}_\omega^{p,\varphi}$ genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayı,

$$\|h\|_{\mathcal{M}_\omega^{p,\varphi}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{1}{\varphi(x, r) \|\omega\|_{L_p(B(x, r))}} \|h\|_{L_{p,\omega}(B(x, r))} < \infty$$

2

olacak biçimde fonksiyonların uzayıdır. Burada $h \in L_{p,\omega}(B(x, r))$

$$\|h\|_{L_{p,\omega}(B(x,r))} \equiv \|h\chi_{B(x,r)}\|_{L_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{B(x,r)} |h(y)|^p \omega(y) dy \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

olan ölçülebilir h fonksiyonlarının ağırlıklı L_p uzayını belirtir.

Ayrıca, $h \in WL_{p,\omega}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere $WM_{\omega}^{p,\varphi}$ zayıf genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayı

$$\|h\|_{WM_{\omega}^{p,\varphi}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{1}{\varphi(x, r) \|\omega\|_{L_p(B(x,r))}} \|h\|_{WL_{p,\omega}(B(x,r))} < \infty$$

şeklindeki fonksiyonların uzayıdır, burada $h \in WL_{p,\omega}(B(x, r))$

$$\|h\|_{WL_{p,\omega}(B(x,r))} \equiv \|h\chi_{B(x,r)}\|_{WL_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{t > 0} t \left(\int_{\{y \in B(x,r) : |f(y)| > t\}} |h(y)|^p \omega(y) dy \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

olan h fonksiyonlarının zayıf ağırlıklı L_p uzayını belirtir (Guliyev, 2012)."

Eğer $\omega(x) = \chi_{B(x,r)}$ seçilirse, bu durumda $\mathcal{M}_{\omega}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzayı ve $\varphi(x, r) = r^{\frac{\lambda-n}{p}}$ seçilirse $\mathcal{M}_{\omega}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n) = L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ağırlıklı Morrey uzayına eşit olur.

" $1 < p, q, t < \infty$ olsun. Eğer

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} |B(x, r)|^{\frac{\alpha}{n} - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}} \left(\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x,r)} \omega_2^{qt}(y) dy \right)^{\frac{1}{qt}} \left(\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x,r)} \omega_1^{-p't}(y) dy \right)^{\frac{1}{p't}} < \infty$$

(ω_1, ω_2) ağırlık fonksiyonları $F_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ sınıfına aittir, denir (Perez, 1994)."

Bu tezin amacı ω ağırlıkları Fefferman-Pong sınıfına ait olmak üzere, genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarında I_{α} Riesz potansiyeli ve $|b, I_{\alpha}|$ Riesz potansiyelinin komütatörü için iki ağırlıklı eşitsizlikler elde edilerek elde edilen bu eşitsizlikler yardımıyla I_{α} Riesz potansiyelinin ve $|b, I_{\alpha}|$ Riesz potansiyelinin komütatörünün $\mathcal{M}_{\omega_1}^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathcal{M}_{\omega_2}^{q,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlılığını elde etmektir. Ayrıca burada I_{α} Riesz potansiyelinin $\mathcal{M}_{\omega_1}^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathcal{M}_{\omega_2}^{q,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlılığını ispatlarken Hardy eşitsizliğinden faydalanılmıştır. Son olarak ise uygulama olarak, genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarında I_{α} Riesz potansiyeli ve $|b, I_{\alpha}|$ Riesz potansiyelinin komütatörü tarafından üretilen T_{α} altlineer operatörü ve $T_{b,\alpha}$ altlineer komütatörü için iki ağırlıklı eşitsizlikler elde edilecektir. Benzer biçimde elde edilen eşitsizliklerle birlikte altlineer operatörünün ve altlineer komütatörünün $\mathcal{M}_{\omega_1}^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathcal{M}_{\omega_2}^{q,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlılığı elde edilecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Temel Tanım ve Teoremler

Bu kısımda tez boyunca kullanılacak olan tanımlar ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1 " V bir K ($\mathbb{R}^n$ veya $\mathbb{C}$) cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere eğer bir $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü her $a, b \in V$ ve her $\beta \in K$ için

$$(N1) \quad \|a\| \geq 0 \text{ ve } \|a\| = 0 \Leftrightarrow a = \theta$$

$$(N2) \quad \|\beta a\| = |\beta| \|a\|$$

$$(N3) \quad \|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$$

şartlarını sağlıyorsa bu dönüşüm V vektör uzayı üzerinde norm olarak adlandırılır. $(V, \|\cdot\|)$ ikilisine ise normlu bir vektör uzayı denir. $(V, \|\cdot\|)$ normlu uzayı kısaca X ile gösterilir. Bu tanımdaki (N3) özelliğindeki eşitsizliğin yerine $C > 0$ olmak üzere

$$\|a + b\| \leq C(\|a\| + \|b\|)$$

olduğu zaman bu dönüşüme quasi-norm adı verilir (Kreyszig, 1989)."

Tanım 2.2 "Bir T lineer operatörü aşağıdaki şartları sağlayan operatördür:

(i) T lineer operatörünün $D(T)$ tanım kümesi bir vektör uzayı olup $R(T)$ değer kümesi aynı cisim üzerinde bir vektör uzayıdır.

(ii) Her $a, b \in D(T)$ ve β skaleri için,

$$T(a + b) = Ta + Tb$$

$$T(\beta a) = \beta Ta$$

gerçeklenir (Kreyszig, 1989)."

Tanım 2.3 "Herhangi bir μ ölçüsü $\mu(B(x, 2r)) \leq c\mu(B(x, r))$ şartını sağlıyorsa μ ölçüsü doubling şartını sağlıyor denir (Guliyev, 2012)."

Tanım 2.4 " V ve U normlu uzaylar ve $D(T) \subset V$ olmak üzere, $T : D(T) \rightarrow B$ lineer operatör olsun. Eğer her $a \in D(T)$ için $\|Ta\| \leq C_1 \|a\|$ olacak biçimde bir C_1

reel sayısı varsa, T operatörüne sınırlıdır denir. Bir T operatörünün normu

$$\|T\| = \sup_{a \in D(T), a \neq 0} \frac{\|Ta\|}{\|a\|}$$

şeklinde tanımlanır (Kreyszig, 1989)."

Tanım 2.5 " V ve U normlu uzaylar ve $D(T) \subset V$ olacak biçimde, $T : D(T) \rightarrow U$ operatör ve $a_0 \in D(T)$ olsun. Eğer verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $\|a - a_0\| < \delta$ şartını sağlayan her $a \in D(T)$ için, $\|Ta - Ta_0\| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ sayısı mevcut ise T ye a_0 a süreklidır denir (Kreyszig, 1989)."

Tanım 2.6 " V ve U normlu uzaylar ve $D(T) \subset V$ olmak üzere, $T : D(T) \rightarrow U$ lineer operatör olsun. Bu durumda T nin sürekli olması için gerek ve yeter şart T nin sınırlı olmasıdır (Kreyszig, 1989)."

Teorem 2.1 "(Diferensiyel Hesabın Ortalama Değer Teoremi) $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve her $x \in (a, b)$ noktasında türevlenebilir olmak üzere (a, b) aralığında

$$h'(x) = \frac{h(b) - h(a)}{b - a}$$

olacak şekilde en az bir x noktası vardır (Kreyszig, 1989)."

Tanım 2.7 " V bir küme olmak üzere eğer V nin alt kümelerinin bir Σ sınıfı için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa bu durumda Σ sınıfına V kümesi üzerinde bir cebirdir denir:

(a) $V \in \Sigma$

(b) Her $E \in \Sigma$ için $E^c = V \setminus E \in \Sigma$

(c) $i = 1, 2, \dots, k$ için $E_i \in \Sigma$ ise $\bigcup_{i=1}^k E_i \in \Sigma$

Eğer (c) şartı yerine

Her $i \in \mathbb{N}$ için $E_i \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \Sigma$

koşulu konulursa Σ cebirine bir σ - cebiri denir (Royden ve Fitzpatrick, 2010)."

Tanım 2.8 " V bir küme ve Σ , V kümesi üzerinde bir σ - cebiri olsun. Bu durumda (V, Σ) ikilisine bir ölçülebilir uzay, Σ daki her bir kümeye ise Σ -ölçülebilir küme veya ölçülebilir küme adı verilir (Royden ve Fitzpatrick, 2010)."

Tanım 2.9 " (V, Σ) bir ölçülebilir uzay ve $h : V \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere eğer her $\gamma \in \mathbb{R}$ için

$$h^{-1}(]\gamma, +\infty[) = \{a \in V : h(a) > \gamma\} \in \Sigma$$

oluyorsa h ye ölçülebilir fonksiyon denir. V üzerindeki ölçülebilir fonksiyonların ailesi $\mathcal{M}(V, \Sigma)$ ile gösterilir (Royden ve Fitzpatrick, 2010)."

Tanım 2.10 " (V, Σ) bir ölçülebilir uzay olsun. Σ üzerinde tanımlı reel değerli bir μ fonksiyonu

$$(i) \mu(\emptyset) = 0$$

$$(ii) \text{ Her } A \in \Sigma \text{ için } \mu(A) \geq 0$$

$$(iii) \text{ Her ayrık } (A_k) \text{ dizisi için } \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

özelliklerini sağlıyorsa bu fonksiyona ölçü denir. Eğer her $A \in \Sigma$ için $\mu(A) < \infty$ ise μ ye sonlu ölçü denir (Royden ve Fitzpatrick, 2010)."

Tanım 2.11 "Bir V kümesi, V in alt kümelerinin bir Σ σ - cebiri ve Σ üzerinde tanımlı bir μ ölçüsünden oluşan (V, Σ, μ) ölçüsüne bir ölçü uzayı denir (Royden ve Fitzpatrick, 2010)."

Tanım 2.12 " V bir küme ve $P(V)$ de V nin kuvvet kümesi olsun. $P(V)$ üzerinde tanımlı, genişletilmiş reel değerli bir μ^* fonksiyonu

$$(i) \mu^*(\emptyset) = 0$$

$$(ii) \text{ Her } E \in P(V) \text{ için } \mu^*(E) \geq 0$$

$$(iii) A \subset B \subset V \text{ için } \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$$

$$(iv) \text{ Her bir } k \in \mathbb{N} \text{ için } A_k \in P(V) \text{ ise } \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$$

şartlarını sağlıyorsa μ^* fonksiyonuna V üzerinde bir dış ölçü adı verilir (Royden ve Fitzpatrick, 2010)."

Tanım 2.13 " (I_k) , $\mathbb{R}$ nin sınırlı ve açık alt aralıklarının bir dizisi

$$\tau_A = \left\{ (I_k) : A \subset \bigcup I_k \right\}$$

olsun. $P(\mathbb{R})$ üzerinde

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \iota(I_k) : (I_k) \in \tau_A \right\}$$

biçiminde tanımlanan m^* bir dış ölçüdür. Bu dış ölçüye Lebesgue dış ölçüsü adı verilir. Lebesgue dış ölçüsü $\mathbb{R}$ nin her bir alt aralığına onun uzunluğunu karşılık getirir.

n – boyutlu $\mathbb{R}^n$ uzayında Lebesgue dış ölçüsünü tanımlamak için

$$I = \{x : a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, n\}$$

n – boyutlu kapalı aralıklarını göz önüne alalım. Bu aralıkların hacimleri

$$v(I) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

biçimindedir. Keyfi bir $E \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin Lebesgue dış ölçüsü

$$m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} v(I_k) : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, I_k \text{ bir aralık} \right\}$$

ile tanımlanır. Her $A \subset \mathbb{R}^n$ için eğer

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap (\mathbb{R}^n - E))$$

ise E kümesine Lebesgue ölçülebilirdir, denir (Royden ve Fitzpatrick, 2010)."

Tanım 2.14 " (V, Σ, μ) bir ölçü uzayı olmak üzere, eğer bir önerme ölçüsü sıfır olan bir küme dışında doğru ise, bu durumda o önerme hemen her yerde (h.h.y) doğrudur denir (Royden ve Fitzpatrick, 2010)."

Tanım 2.15 " (V, Σ, μ) bir ölçü uzayı olsun. Böylece

$$i) 1 \leq p < \infty \text{ iken } \|h\|_{L_p(V)} = \left(\int_V |h|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

$$ii) p = \infty \text{ iken } \operatorname{ess\,sup}_{v \in V} |f(v)| < \infty$$

$i)$ ve $ii)$ koşullarını sağlayan fonksiyonların sınıfı p . mertebeden integrallenebilir fonksiyonlar uzayı olarak adlandırılır ve ayrıca L_p şeklinde gösterilir (Grafakos, 2014)."

Tanım 2.16 " $B \subset \mathbb{R}^n$ ölçülebilir bir küme olmak üzere B nin Lebesgue ölçüsü

$$|B| = \int_B dx$$

şeklinde tanımlanır (Grafakos, 2014)."

Tanım 2.17 " $K, \mathbb{R}^n$ Öklid uzayında keyfi bir kompakt küme olsun. h Lebesgue ölçülebilir fonksiyon olacak biçimde

$$\int_K |h| d\mu < \infty$$

ise h fonksiyonuna $\mathbb{R}^n$ de lokal integrallenebilirdir denir ve $h \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir (Grafakos, 2014)."

Teorem 2.2 "(Hölder Eşitsizliği) $p, q \in (1, \infty)$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olacak biçimde eğer $f \in L_p, h \in L_q$ iken $fh \in L_1$ ise

$$\|fh\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_p} \|h\|_{L_q}$$

eşitsizliği sağlanır ve bu eşitsizliğe Hölder eşitsizliği denir (Sadosky, 1979)."

Teorem 2.3 "(Minkowski Eşitsizliği) $p \in [1, \infty)$ olacak biçimde eğer $f, h \in L_p$ ise $(f + h) \in L_p$ ve

$$\|f + h\|_{L_p} \leq \|f\|_{L_p} + \|h\|_{L_p}$$

eşitsizliği sağlanır ve bu eşitsizliğe Minkowski eşitsizliği denir (Sadosky, 1979)."

Teorem 2.4 "(Fubini Teoremi) $g, \mathbb{R}^{n+k}$ üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon ve ayrıca

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\mathbb{R}^{n+k}} |g(x, y)| dx dy \\ I_2 &= \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x, y)| dx \right) dy \\ I_3 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^k} |g(x, y)| dy \right) dx \end{aligned}$$

integrallerinden en az biri mevcut ve sonlu olsun. Bu durumda

1. Hemen her $y \in \mathbb{R}^k$ için $g(., y) \in L_1(\mathbb{R}^n)$,
2. Hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için $g(x, .) \in L_1(\mathbb{R}^k)$,
3. $\int_{\mathbb{R}^k} g(., y) dy \in L_1(\mathbb{R}^n)$,
4. $\int_{\mathbb{R}^n} g(x, .) dx \in L_1(\mathbb{R}^k)$,
5. $I_1 = I_2 = I_3$

elde edilir (Grafakos, 2004)."

Teorem 2.5 "(Lebesgue Diferensiyelleme Teoremi) $\mathbb{R}^n$ de tanımlı lokal integral-
lenebilen bir h fonksiyonu olsun. Bu durumda

$$\lim_{r \rightarrow 0} |B(x, r)|^{-1} \int_{B(x, r)} |h(y)| dy = h(x)$$

ifadesi hemen her x için sağlanır (Grafakos, 2004)."

Tanım 2.18 "Bir h fonksiyonunun desteği

$$Supph = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : h(x) \neq 0\}}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $Supph$ sınırlı bir kümeysen o zaman h fonksiyonu kompakt
desteğe sahiptir, denir (Royden ve Fitzpatrick, 2010)."

A_p sınıfı 1972 yılında Muckenhoupt tarafından ağırlıklı $L_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$ Lebesgue uzayında
tanımlı Hardy-Littlewood maksimal operatörünün sınırlılık çalışmalarında tanımlanmıştır.

Tanım 2.19 " $1 \leq p < \infty$, h ölçülebilir bir fonksiyon ve ω , $\mathbb{R}^n$ de negatif olmayan
ölçülebilir fonksiyon olsun. Bu durumda ağırlıklı Lebesgue uzayı olan $L_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$

$$\|h\|_{L_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{B(x,r)} |h(y)|^p \omega(y) dy \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

olacak biçimde fonksiyonların uzayıdır (Grafakos, 2014)."

Tanım 2.20 " $p \in [1, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ olsun. Eğer

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} |B(x, r)|^{-1} \left(\int_{B(x, r)} \omega^p(y) dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B(x, r)} \omega^{-p'}(y) dy \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

ise ω ağırlık fonksiyonu $A_p(\mathbb{R}^n)$ sınıfına aittir, denir. Her $x \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ için

$$|B(x, r)|^{-1} \int_{B(x, r)} \omega(y) dy \leq C \operatorname{ess\,sup}_{y \in B(x, r)} \frac{1}{\omega(y)} < \infty$$

olacak şekilde C var ise ω ağırlık fonksiyonu $A_1(\mathbb{R}^n)$ sınıfına aittir, denir (Muckenhoupt, 1972)."

Tanım 2.21 " $p \in [1, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ olsun. Eğer

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} |B(x, r)|^{-1} \left(\int_{B(x, r)} \omega_2^p(y) dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B(x, r)} \omega_1^{-p'}(y) dy \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

ise (ω_1, ω_2) ağırlık fonksiyonları $\tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$ sınıfına aittir, denir (Muckenhoupt, 1972)."

Tanım 2.22 " $p, q \in [1, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ olsun. Eğer

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} |B(x, r)|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q} - 1} \left(\int_{B(x, r)} \omega_2^q(y) dy \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{B(x, r)} \omega_1^{-p'}(y) dy \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

ise (ω_1, ω_2) ağırlık fonksiyonları $A_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ sınıfına aittir, denir (Muckenhoupt, 1972)."

Tanım 2.23 " $p \in (1, \infty)$, $1 < t < \infty$ olsun. Eğer

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \left(\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} \omega_2^p(y) dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} \omega_1^{-p't}(y) dy \right)^{\frac{1}{p't}} < \infty$$

ise (ω_1, ω_2) ağırlık fonksiyonları $F_p(\mathbb{R}^n)$ sınıfına aittir, denir (Perez, 1994)."

Tanım 2.24 " $1 < p, q, t < \infty$ olsun. Eğer

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} |B(x, r)|^{\frac{\alpha}{n} - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}} \left(\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} \omega_2^{qt}(y) dy \right)^{\frac{1}{qt}} \left(\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} \omega_1^{-p't}(y) dy \right)^{\frac{1}{p't}} < \infty$$

(ω_1, ω_2) ağırlık fonksiyonları $F_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ sınıfına aittir, denir (Perez, 1994)."

Tanım 2.25 "(Mh Hardy-Littlewood Maksimal Fonksiyonu) $\alpha \in [0, n)$ ve $h \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olacak biçimde M maksimal fonksiyonu

$$Mh(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |h(y)| dy$$

şeklinde tanımlanır (Grafakos, 2014)."

Teorem 2.6 " $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda

1) $\omega \in A_p(\mathbb{R}^n)$ olacak biçimde M operatörü $L_{p, \omega}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_{p, \omega}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır,

2) $\omega \in A_1(\mathbb{R}^n)$ olacak biçimde M operatörü $L_{1, \omega}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WL_{1, \omega}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır (Aykol vd., 2022)."

Teorem 2.7 " $1 < p < \infty$ ve $(\omega_1, \omega_2) \in F_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda M operatörü $L_{p, \omega_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_{p, \omega_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

Tanım 2.26 "(M_α Kesirli Maksimal Fonksiyon) $h, \mathbb{R}^n$ de lokal integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Kesirli maksimal fonksiyon

$$M_\alpha h(x) = \sup_{r>0} |B(x, r)|^{-1+\alpha/n} \int_{B(x, r)} |h(y)| dy, \quad 0 \leq \alpha < n$$

dir (Guliyev, 2012)."

Ayrıca M_α kesirli maksimal fonksiyonunda $\alpha = 0$ alırsak bize Mh Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonunu verir.

Tanım 2.27 "($M^\sharp$ Sharp Maksimal Fonksiyon) $M^\sharp$ sharp maksimal fonksiyonu

$$h_{B(x, r)}(x) = |B(x, r)|^{-1} \int_{B(x, r)} h(y) dy$$

olacak biçimde

$$M^\sharp h(x) = \sup_{r>0} |B(x, r)|^{-1} \int_{B(x, r)} |h(y) - h_{B(x, r)}| dy$$

ile tanımlanır (Hao, 2020)."

Tanım 2.28 " $BMO(\mathbb{R}^n)$ uzayı

$$\|h\|_{BMO} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} |B(x, r)|^{-1} \int_{B(x, r)} |h(y) - h_{B(x, r)}| dy < \infty$$

veya

$$\|h\|_{BMO} = \inf_C \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} |B(x, r)|^{-1} \int_{B(x, r)} |h(y) - C| dy < \infty$$

olacak şekilde tüm lokal integrallenebilir h fonksiyonlarının kümesi şeklinde tanımlanır (Aykol vd., 2023)."

Tanım 2.29 " $1 \leq p < \infty$ olacak biçimde $BMO_{p, \omega}(\mathbb{R}^n)$

$$\|h\|_{BMO_{p, \omega}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{\|(h(\cdot) - h_{B(x, r)})\chi_{B(x, r)}\|_{L_{p, \omega}(\mathbb{R}^n)}}{\|\omega\|_{L_p(B(x, r))}}$$

veya

$$\|h\|_{BMO_{p, \omega}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{1}{|B(x, r)|} \|(h(\cdot) - h_{B(x, r)})\chi_{B(x, r)}\|_{L_{p, \omega}(\mathbb{R}^n)} \|\omega^{-1}\|_{L_{p'}(B(x, r))} < \infty$$

tüm lokal integrallenebilir h fonksiyonlarının kümesi şeklinde tanımlanır (Aykol vd., 2023)."

Teorem 2.8 " $1 \leq p < \infty$ ve ω Lebesgue ölçülebilir fonksiyon olmak üzere, eğer $\omega \in A_p(\mathbb{R}^n)$ ise, bu durumda $\|\cdot\|_{BMO_{p, \omega}}$ ve $\|\cdot\|_{BMO}$ normları denktir (Ho, 2016)."

Lemma 2.1 " $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda, $0 < 2r < s$ için

$$|b_{B(x, r)} - b_{B(x, s)}| \leq C \|b\|_{BMO} \ln \frac{s}{r}$$

olacak şekilde bir C sabiti vardır, burada C , b , x , r ve s den bağımsızdır (Guliyev ve Shukurov, 2013)."

Tanım 2.30 " $L_{\infty, v}(\mathbb{R}_+)$ ağırlıklı L_{∞} uzayında olsun, normu

$$\|g\|_{L_{\infty, v}(\mathbb{R}_+)} = \operatorname{ess\,sup}_{r > 0} v(r)g(r)$$

dir. $\mathbb{A}$ konisi,

$$\mathbb{A} = \left\{ \varphi \in \mathfrak{M}^+(\mathbb{R}_+; \uparrow) : \lim_{r \rightarrow 0+} \varphi(r) = 0 \right\}$$

şeklindedir (Aykol vd., 2023)."

Tanım 2.31 " $u, \mathbb{R}_+$ da sürekli ve negatif olmayan fonksiyon olsun. $\overline{S}_u$ supremal operatörü

$$(\overline{S}_u g)(r) := \|ug\|_{L_\infty(0,r)}, \quad r \in (0, \infty)$$

ile tanımlanır (Aykol vd., 2023)."

Aşağıdaki teoremin ispatı Burenkov tarafından verilmiştir.

Teorem 2.9 "Kabul edelim ki her $r > 0$ için $0 < \|v_1\|_{L_\infty(0,r)} < \infty$ olacak biçimde v_1 ve v_2 negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonlar olsun. Ayrıca u fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde negatif olmayan sürekli fonksiyon olsun. Bu durumda $\overline{S}_u$ operatörü $\mathbb{A}$ konisi üzerinde $L_{v_1}^\infty(\mathbb{R}_+)$ dan $L_{v_2}^\infty(\mathbb{R}_+)$ a sınırlıdır öyle ki

$$\left\| v_2 \overline{S}_u \left(\|v_1\|_{L_\infty(0,\cdot)}^{-1} \right) \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} < \infty$$

eşitsizliği gerçekleşir (Guliyev, 2013)."

Tanım 2.32 " $0 < r < \infty$ ve w ağırlık fonksiyonu olacak biçimde Hardy operatörleri

$$H_w g(r) := \int_0^r g(s)w(s)ds, \quad H_w^* g(r) := \int_r^\infty g(s)w(s)ds$$

şeklinde tanımlanır (Guliyev, 2013)."

Teorem 2.10 " v_1, v_2 ve w $(0, \infty)$ üzerinde ağırlıklar olsun ve $v_1(r)$ orijinin bir komşuluğunun dışında sınırlı olsun.

$$\operatorname{ess\,sup}_{r>0} v_2(r) H_w^* g(r) \leq C \operatorname{ess\,sup}_{r>0} v_1(r) g(r)$$

eşitsizliği bir $C > 0$ ve $(0, \infty)$ üzerinde negatif olmayan ve azalmayan g fonksiyonu için vardır ancak ve ancak

$$B := \sup_{r>0} v_2(r) \int_r^\infty \frac{w(s)ds}{\operatorname{ess\,sup}_{s<\tau<\infty} v_1(\tau)} < \infty$$

dır (Guliyev, 2013)."

Teorem 2.11 " v_1, v_2 ve ω $(0, \infty)$ üzerinde ağırlıklar olsun ve $v_1(r)$ orijinin bir komşuluğunun dışında sınırlı olsun. Bu durumda

$$\operatorname{ess\,sup}_{r>0} v_2(r) H_w g(r) \leq C \operatorname{ess\,sup}_{r>0} v_1(r) g(r)$$

eşitsizliği bir $C > 0$ ve $(0, \infty)$ üzerinde negatif olmayan ve azalmayan g için vardır ancak ve ancak

$$B := \operatorname{ess\,sup}_{r>0} v_2(r) \int_0^r \frac{w(s)ds}{\operatorname{ess\,sup}_{0<\tau<s} v_1(\tau)} < \infty$$

dır (Guliyev, 2013)."

2.2 Morrey Uzayları

Bu bölümde tez içerisinde faydalanacağımız bazı tanım ve teoremler ile birlikte ispatları verilecektir.

Tanım 2.33 " $(L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n))$ Morrey Uzayı $\lambda \in (0, n)$, $p \in [1, \infty)$ ve $h \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olacak biçimde $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayları

$$\|h\|_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r>0} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|h\|_{L_p(B(x,r))} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r>0} r^{-\frac{\lambda}{p}} \left(\int_{B(x,r)} |h(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

şeklindeki fonksiyonların uzayıdır (Morrey, 1938)."

" $L_{p,\lambda}$ için özel seçimler yoluyla aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

- $\lambda = 0$ iken $L_{p,0} \equiv L_p$ klasik Lebesgue uzayına eşit olur.
- $\lambda > n$ ve $\lambda < 0$ iken $L_{p,\lambda} \equiv \theta$ eşittir ve burada θ , $\mathbb{R}^n$ deki 0'a denk olan fonksiyonlar kümesidir.
- $\lambda = n$ iken $L_{p,\lambda} \equiv L_\infty$ eşittir.

Yukarıdaki $L_{p,\lambda}$ norm tanımında $B(x, r)$ de $x = 0$ alınırsa $L_{p,\lambda}^{loc}$ lokal Morrey uzayları elde edilir (Guliyev ve Shukurov, 2013)."

Tanım 2.34 " $p \in [1, \infty)$ ve $h \in W L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. $W L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ zayıf Morrey uzayları

$$\|h\|_{W L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r>0} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|h\|_{W L_p(B(x,r))} < \infty$$

olacak biçimdeki fonksiyonların uzayıdır. Burada

$$\|h\|_{W L_p(B(x,r))} = \sup_{t>0} t |\{y \in B(x, r) : |h(y)| > t\}|^{\frac{1}{p}} < \infty$$

dir. Ayrıca $\lambda = 0$ iken $W L_p(\mathbb{R}^n) = W L_{p,0}(\mathbb{R}^n)$ eşittir (Guliyev, 2011)."

Tanım 2.35 ω fonksiyonu hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ öyle ki $\omega(x) > 0$ için $\mathbb{R}^n$ üzerinde lokal integrallenebilir ise ω bir ağırlık fonksiyonudur, denir.

Teorem 2.12 " $1 < p < \infty$ ve $0 < \lambda < n$ olsun. Bu durumda

$$\|Mh\|_{L_{p,\lambda}} \leq C \|h\|_{L_{p,\lambda}} \quad (2.1)$$

dir. Burada C sabiti h den bağımsızdır. Bu teorem maksimal operatörün Morrey uzaylarındaki sınırlılığını gösterir ve (2.1) eşitsizliği gerçekleşir (Guliyev, 2009)."

Teorem 2.13 " $1 \leq p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n}{p}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n-\lambda}$ ve $0 < \lambda < n - \alpha p$ olsun. Böylece

$$\|I_\alpha h\|_{L_{q,\lambda}} \leq C \|h\|_{L_{p,\lambda}}$$

dir. $p = 1$ için

$$t^\alpha |\{|I_\alpha h| > t\} \cap B_r| \leq Cr^\lambda \|h\|_{L_{1,\lambda}}$$

dir (Adams, 1975)."

M_α kesirli maksimal operatörü ile I_α Riesz potansiyel operatörü arasındaki ilişkiyi gösteren eşitsizlik

$$M_\alpha h(x) \leq \omega_n^{\frac{\alpha}{n}-1} (I_\alpha |h|)(x) \quad (2.2)$$

dir. Bu sonucu ispatlamadan önce (2.2) eşitsizliğini ispatlayalım.

İspat.

$$\begin{aligned} M_\alpha h(x) &= \sup_{r>0} |B(x,r)|^{\frac{\alpha}{n}-1} \int_{B(x,r)} |h(y)| dy \\ &= \sup_{r>0} |B(x,r)|^{\frac{\alpha}{n}-1} \int_{B(x,r)} |h(y)| |x-y|^{\alpha-n} |x-y|^{n-\alpha} dy \\ &= (n-\alpha) \sup_{r>0} |B(x,r)|^{\frac{\alpha}{n}-1} \int_{B(x,r)} |h(y)| |x-y|^{\alpha-n} \left(\int_0^{|x-y|} t^{n-\alpha-1} dt \right) dy \\ &\leq (n-\alpha) |B(x,r)|^{\frac{\alpha}{n}-1} \int_{\mathbb{R}^n} |h(y)| |x-y|^{\alpha-n} \left(\int_0^r t^{n-\alpha-1} dt \right) dy \\ &= (n-\alpha) \omega_n^{\frac{\alpha}{n}-1} r^{\alpha-n} (I^\alpha |h|)(x) r^{n-\alpha} (n-\alpha)^{-1} \\ &= \omega_n^{\frac{\alpha}{n}-1} (I_\alpha |h|)(x) \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Şimdi M_α kesirli maksimal operatörün Morrey uzaylarındaki sınırlılığının ispatını vereceğimiz sonuca bakalım.

Sonuç 2.1 " $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $0 < \alpha < n$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n-\lambda}$ ve $0 < \lambda + \alpha p < n$ olsun. Bu durumda M_α kesirli maksimal operatörü $L_{p,\lambda}$ Morrey uzayından $L_{q,\lambda}$ Morrey uzayına sınırlıdır (Adams, 1975)."

İspat. (2.2) eşitsizliği ve Teorem 2.13 yardımıyla

$$\begin{aligned} \|M_\alpha h\|_{L_{q,\lambda}} &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} r^{-\frac{\lambda}{q}} \left(\int_{B(x,r)} |M_\alpha h(y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} r^{-\frac{\lambda}{q}} \left(\int_{B(x,r)} \omega_n^{\frac{\alpha}{n}-1} |I_\alpha |h|(y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} r^{-\frac{\lambda}{p}} \left(\int_{B(x,r)} |h(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= C \|h\|_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\|M_\alpha h\|_{L_{q,\lambda}} \leq C \|h\|_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)}$$

bulunarak ispat tamamlanır. ■

Tanım 2.36 " $(M^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ Genelleştirilmiş Morrey Uzayı) $p \in [1, \infty)$, $h \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve $\varphi, \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ üzerinde negatif olmayan ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere $M^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzayları

$$\|h\|_{M^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{r^{-\frac{n}{p}}}{\varphi(x, r)} \|h\|_{L_p(B(x,r))} < \infty$$

şartını sağlayan h fonksiyonlarının uzayıdır. Özel olarak $\varphi(x, r) = r^{\frac{\lambda-n}{p}}$ alınırsa $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayı elde edilir (Guliyev, 2009)."

Tanım 2.37 " $(WM^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ Zayıf Genelleştirilmiş Morrey Uzayı) $1 \leq p < \infty$ ve

$h \in WL_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \|h\|_{WM^{p,\varphi}} &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{r^{-\frac{n}{p}}}{\varphi(x, r)} \|h\|_{WL_p(B(x, r))} \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{r^{-\frac{n}{p}}}{\varphi(x, r)} \sup_{t > 0} t |\{y \in B(x, r) : |h(y)| > t\}|^{\frac{1}{p}} < \infty \end{aligned}$$

şartını sağlayan h fonksiyonlarına zayıf genelleştirilmiş Morrey uzayı denir (Guliyev, 2009)."

Teorem 2.14 " $1 \leq p < \infty$ olsun. $\varphi_1(x, t)$ ve $\varphi_2(x, t)$ fonksiyonları C sabiti x ve r den bağımsız olmak üzere

$$\int_r^\infty t_1^{-1} \varphi_1(x, t) dt \leq C \varphi_2(x, r) \quad (2.3)$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda $i)$ ve $ii)$ koşulları gerçekleşir.

$i)$ $p > 1$ iken M maksimal operatörü $M^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ den $M^{p,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ ye sınırlıdır.

$ii)$ $p = 1$ iken M maksimal operatörü $M^{1,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WM^{1,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır (Guliyev, 1994)."

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ AĞIRLIKLIL MORREY UZAYLARINDA RIESZ POTANSİYELLERİ VE KOMÜTATÖRLERİ İÇİN İKİ AĞIRLIKLIL EŞİTSİZLİKLER

Bu bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda I_α Riesz potansiyeli için iki ağırlıklı eşitsizlikler elde edilecektir ve bu eşitsizlikler ile birlikte, bazı teoremler yardımıyla Riesz potansiyelinin $\mathcal{M}_{\omega_1}^{p,\varphi_1}$ uzayından $\mathcal{M}_{\omega_2}^{q,\varphi_2}$ uzayına sınırlılığı elde edilecektir. İkinci kısımda ise Riesz potansiyelinin komütatörü için iki ağırlıklı eşitsizlikler elde edilecektir. Daha sonra bu eşitsizlikler ile birlikte bazı teoremler ve lemmalar yardımıyla $|b, I_\alpha|$ Riesz potansiyelinin komütatörünün $\mathcal{M}_{\omega_1}^{p,\varphi_1}$ uzayından $\mathcal{M}_{\omega_2}^{q,\varphi_2}$ uzayına sınırlılığı elde edilecektir.

Tanım 3.1 " $(\mathcal{M}_\omega^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n))$ Genelleştirilmiş Ağırlıklı Morrey Uzayı) $1 \leq p < \infty$, $h \in L_{p,\omega}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ $\varphi, \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ üzerinde ölçülebilir pozitif bir fonksiyon ve $\omega, \mathbb{R}^n$ de negatif olmayan ölçülebilir fonksiyon olmak üzere $\mathcal{M}_\omega^{p,\varphi}$ genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayı

$$\|h\|_{\mathcal{M}_\omega^{p,\varphi}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{1}{\varphi(x, r) \|\omega\|_{L_p(B(x, r))}} \|h\|_{L_{p,\omega}(B(x, r))} < \infty$$

şeklindeki fonksiyonların uzayıdır. Burada $h \in L_{p,\omega}(B(x, r))$

$$\|h\|_{L_{p,\omega}(B(x, r))} \equiv \|h \chi_{B(x, r)}\|_{L_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{B(x, r)} |h(y)|^p \omega(y) dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

olan ölçülebilir f fonksiyonlarının ağırlıklı L_p uzayını belirtir (Guliyev, 2012)."

Eğer $\omega(x) = \chi_{B(x, r)}$ alınırsa, bu durumda $\mathcal{M}_\omega^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayı genelleştirilmiş Morrey uzayına eşit olur ve ayrıca eğer $\varphi(x, r) = r^{\frac{\lambda-n}{p}}$ ise o zaman $\mathcal{M}_\omega^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n) = L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayı ağırlıklı Morrey uzayına eşit olur.

3.1 Genelleştirilmiş Ağırlıklı Morrey Uzaylarında Riesz Potansiyelleri için İki Ağırlıklı Eşitsizlikler

Bu bölümde genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarında Riesz potansiyellerinin iki ağırlıklı sınırlılıkları elde edilecektir. Ayrıca aşağıda bu sınırlılıkları ispatlamak için kullanılacak olan teorem ve sonuçlar birlikte verilecektir.

Teorem 3.1 $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{q}$ ve $(\omega_1, \omega_2) \in F_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda I_α operatörü $L_{p,\omega_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

Sonuç 3.1 $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{q}$ ve $(\omega_1, \omega_2) \in F_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda M_α operatörü $L_{p,\omega_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

Sonuç 3.1 in ispatı, Sonuç (2.2) eşitsizliği ve Teorem 3.1 den elde edilir. Şimdi vereceğimiz teoremden I_α Riesz potansiyelinin genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayındaki sınırlılığında kullanacağımız iki ağırlıklı eşitsizliği elde edeceğiz.

Teorem 3.2 $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{q}$ ve $(\omega_1, \omega_2) \in F_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda keyfi bir $h \in L_{p,\omega_1}(B(x,r))$ için

$$\|I_\alpha h\|_{L_{q,\omega_2}(B(x,r))} \leq C r^{\frac{n}{qt'}} \|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,r))} \int_r^\infty s^{-\frac{n}{qt'}} \frac{\|h\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))}}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \quad (3.1)$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti vardır.

İspat. h yi $h = h_1 + h_2$ şeklinde ayıralım. $r > 0$ olacak biçimde

$$h_1(y) = h(y)\chi_{B(x,2r)}(y) \quad \text{ve} \quad h_2(y) = h(y)\chi_{B^c(x,2r)}(y)$$

olsun. Bu durumda

$$I_\alpha h(x) = I_\alpha h_1(x) + I_\alpha h_2(x)$$

dir. Teorem 3.1 den

$$\|I_\alpha h_1\|_{L_{q,\omega_2}(B(x,r))} \leq \|I_\alpha h_1\|_{L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|h_1\|_{L_{p,\omega_1}(\mathbb{R}^n)} = C \|h\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,2r))}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\|I_\alpha h_1\|_{L_{q,\omega_2}(B(x,r))} \leq C \|h\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,2r))} \quad (3.2)$$

dir. (3.2) eşitsizliği yardımıyla

$$\|I_\alpha h_1\|_{L_{q,\omega_2}(B(x,r))} \leq C r^{\frac{n}{qt'}} \|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,r))} \int_r^\infty s^{-\frac{n}{qt'}} \frac{\|h\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))}}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \quad (3.3)$$

elde edilir.

$|x - z| \leq r$ ve $|z - y| \geq 2r$ olduğundan $\frac{1}{2}|z - y| \leq |x - y| \leq \frac{3}{2}|z - y|$ elde edilir.

Bu eşitsizlik kullanılarak

$$|I_\alpha h_2(z)| \leq \int_{B^c(x,2r)} |z - y|^{\alpha-n} |h(y)| dy \leq C \int_{B^c(x,2r)} |x - y|^{\alpha-n} |h(y)| dy$$

elde edilir. Eşitsizliğin sağ tarafından, Hölder eşitsizliğinden, Fubini Teoreminden ve Tanım 2.24 ten

$$\begin{aligned}
\int_{^c B(x, 2r)} |x - y|^{\alpha-n} |h(y)| dy &= C \int_{^c B(x, 2r)} |h(y)| \left(\int_{|x-y|}^{\infty} s^{\alpha-n-1} ds \right) dy \\
&= C \int_{2r}^{\infty} s^{\alpha-n-1} \left(\int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2r \leq |x-y| \leq s\}} |h(y)| dy \right) ds \\
&\leq C \int_r^{\infty} s^{\alpha-n-1} \|h\|_{L_{p, \omega_1}(B(x, s))} \|\omega_1^{-1}\|_{L_{p'}(B(x, s))} ds \\
&\leq C \int_r^{\infty} s^{\alpha-n+\frac{n}{p't}-1} \|h\|_{L_{p, \omega_1}(B(x, s))} \|\omega_1^{-1}\|_{L_{p't}(B(x, s))} ds \\
&\leq C \int_r^{\infty} s^{\alpha-n+\frac{n}{p't}-1-\alpha+\frac{n}{p}-\frac{n}{q}+\frac{n}{p't}+\frac{n}{qt}} \frac{\|h\|_{L_{p, \omega_1}(B(x, s))}}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x, s))}} ds \\
&= C \int_r^{\infty} s^{-\frac{n}{qt'}} \frac{\|h\|_{L_{p, \omega_1}(B(x, s))}}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x, s))}} \frac{ds}{s}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan hem elde edilen eşitsizliğin iki tarafının $L_{q, \omega_2}(B(x, r))$ normu alınarak hem de Hölder eşitsizliği uygulayarak

$$\begin{aligned}
\|I_{\alpha} h_2\|_{L_{q, \omega_2}(B(x, r))} &\leq C \|\omega_2\|_{L_q(B(x, r))} \int_r^{\infty} s^{-\frac{n}{qt'}} \frac{\|h\|_{L_{p, \omega_1}(B(x, s))}}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x, s))}} \frac{ds}{s} \\
&\leq C r^{\frac{n}{qt'}} \|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x, r))} \int_r^{\infty} s^{-\frac{n}{qt'}} \frac{\|h\|_{L_{p, \omega_1}(B(x, s))}}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x, s))}} \frac{ds}{s}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece

$$\|I_{\alpha} h_2\|_{L_{q, \omega_2}(B(x, r))} \leq C r^{\frac{n}{qt'}} \|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x, r))} \int_r^{\infty} s^{-\frac{n}{qt'}} \frac{\|h\|_{L_{p, \omega_1}(B(x, s))}}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x, s))}} \frac{ds}{s} \quad (3.4)$$

bulunur. (3.3) ve (3.4) yardımıyla (3.1) elde edilir. ■

Aşağıdaki teoremden Riesz potansiyelinin $\mathcal{M}_{\omega}^{p, \varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayındaki iki ağırlıklı sınırlılığı için gerek koşul verilecektir.

Teorem 3.3 $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{q}$ ve $(\omega_1, \omega_2) \in F_{p, q}(\mathbb{R}^n)$ olsun.

$\varphi_1(x, r)$ ve $\varphi_2(x, r)$ fonksiyonları

$$\int_r^{\infty} s^{-\frac{n}{qt'}} \frac{\operatorname{ess\,inf}_{s < t < \infty} \varphi_1(x, t) \|\omega_1\|_{L_p(B(x, t))}}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x, s))}} \frac{ds}{s} \leq C \varphi_2(x, r) \quad (3.5)$$

koşulunu sağlasın. Bu durumda I_α operatörü $\mathcal{M}_{\omega_1}^{p,\varphi_1}$ uzayından $\mathcal{M}_{\omega_2}^{q,\varphi_2}$ uzayına sınırlıdır.

İspat. $h \in \mathcal{M}_{\omega_1}^{p,\varphi_1}$ olsun. (3.5) eşitsizliğinden, Tanım 2.32, Teorem 2.10, Teorem 3.2 ve $\nu_2(r) = \frac{1}{\varphi_2(x,r)}$, $\nu_1(r) = \frac{1}{\varphi_1(x,r)\|\omega_1\|_{L_p}}$, $g(r) = \|h\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,r))}$ ve $w(s) = s^{-\frac{n}{qt'}-1}\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,s))}^{-1}$ özel seçimleriyle

$$\begin{aligned}
\|I_\alpha h\|_{\mathcal{M}_{\omega_2}^{q,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)} &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{1}{\varphi_2(x,r) \|\omega_2\|_{L_q(B(x,r))}} \|I_\alpha h \chi_{B(x,r)}\|_{L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{r^{\frac{n}{qt'}} \|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,r))}}{\varphi_2(x,r) r^{\frac{n}{qt'}} \|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,r))}} \int_r^\infty s^{-\frac{n}{qt'}} \frac{\|h\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))}}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \\
&= C \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{1}{\varphi_2(x,r)} \int_r^\infty s^{-\frac{n}{qt'}} \frac{\|h\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))}}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \\
&\leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{1}{\varphi_1(x,r) \|\omega_1\|_{L_p(B(x,r))}} \|h\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,r))} \\
&= C \|h\|_{\mathcal{M}_{\omega_1}^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

3.2 Genelleştirilmiş Ağırlıklı Morrey Uzaylarında Riesz Potansiyellerinin Komütatörleri için İki Ağırlıklı Eşitsizlikler

Komütatörler harmonik analiz için önemli bir integral operatördür. Coifman, Rochberg, ve Weiss 1976 yılında komütatörü şöyle tanımlamışlardır; ölçülebilir fonksiyonlar kümesi üzerinde tanımlı lineer bir operatör olan T operatörü ve b de bir fonksiyon olmak üzere $[b, T]$ komütatörü

$$[b, T] h(x) = b(x)Th(x) - T(bh)(x)$$

eşitliği şeklinde tanımlanır.

Bu bölümde genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarında Riesz potansiyellerinin komütatörleri için iki ağırlıklı eşitsizlikler elde edilecektir ve bu eşitsizlik yardımıyla $|b, I_\alpha|$ Riesz potansiyelinin komütatörünün $\mathcal{M}_{\omega_1}^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathcal{M}_{\omega_2}^{q,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlılığı ispatlanacaktır. Aşağıda bu sınırlılıkları ispatlamak için kullanılacak olan tanım, teorem, lemma ve sonuçlar verilmiştir.

Tanım 3.2 (I_α Riesz Potansiyeli'nin Komütatörü) $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, $0 < \alpha < n$ ve $h \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. I_α Riesz potansiyelinin komütatörü

$$[b, I_\alpha] h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (b(x) - b(y)) |x - y|^{\alpha-n} h(y) dy \quad (3.6)$$

şeklinde tanımlanır. Benzer biçimde $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, $0 < \alpha < n$ ve $h \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere Riesz potansiyelinin komütatörü

$$|b, I_\alpha| h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |b(x) - b(y)| |x - y|^{\alpha-n} |h(y)| dy \quad (3.7)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.3 (" M_b Maksimal Komütatörü) $\forall x \in \mathbb{R}^n$ olacak şekilde

$$M_b(h)(x) = \sup_{r>0} |B(x, r)|^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} |b(x) - b(y)| |h(y)| dy \quad (3.8)$$

eşitliği maksimal komütatör olarak adlandırılır (Guliyev vd., 2011)."

Tanım 3.4 " $b \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere M Hardy-Littlewood maksimal operatörünün komütatörü

$$[M, b] h(x) = M(bh)(x) - b(x)Mh(x)$$

şeklinde tanımlanır (Ağcayazı vd., 2015)."

$[M, b]$ operatörü Milman ve arkadaşları tarafından incelenmiştir (Milman ve Schonbek, 1990 ve Bastero vd., 2000). M_b ve $[M, b]$ operatörleri aslında birbirinden farklıdır. Gerçekte M_b operatörü pozitif ve altlineer operatör iken $[M, b]$ operatörü ne pozitif ne de altlineerdir. Ancak b bazı ek koşulları sağladığı zaman M_b operatörü ve $[M, b]$ operatörünü çalıştırır.

Lemma 3.1 " b negatif olmayan lokal integrallenebilen bir fonksiyon ve $h \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere

$$|[M, b] h| \leq M_b(h)(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

eşitsizliği gerçekleşir (Ağcayazı vd., 2015)."

Teorem 3.4 " $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. $X, \mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı ölçülebilir fonksiyonların Banach uzayı olsun. M_b, X üzerinde sınırlı olsun. Böylece

$$\|M_b\|_X \leq C \|b\|_{BMO} \|h\|_X$$

eşitsizliği gerçekleşir. Burada C sabiti, h den bağımsızdır (Ağcayazı vd., 2015)."

Sonuç 3.2 $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ ve $\omega \in F_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda M_b maksimal komütatörü $L_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$ de sınırlıdır.

Teorem 3.5 " $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ ve $(\omega_1, \omega_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$, $\omega_1 \in A_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda M_b maksimal komütatörü $L_{p,\omega_1}(\mathbb{R}^n)$ den $L_{p,\omega_2}(\mathbb{R}^n)$ sınırlıdır (Aykol vd., 2022)."

İspat. " $h \in L_{p,\omega_1}(\mathbb{R}^n)$ ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda

$$M_b h(x) \leq C \|b\|_{BMO} M^2 h(x) \quad (3.9)$$

eşitsizliği sağlanır (Ağcayazı vd., 2015, Teorem 1.2). (3.9) eşitsizliğinden, Sonuç 3.2, Teorem 3.4'den ve $M^2 h(x) = M(Mh(x))$ eşitliğinden

$$\begin{aligned} \|M_b h\|_{L_{p,\omega_2}(\mathbb{R}^n)} &\leq C \|b\|_{BMO} \|M^2 h\|_{L_{p,\omega_2}(\mathbb{R}^n)} \\ &= C \|b\|_{BMO} \|M(Mh)\|_{L_{p,\omega_1}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C \|b\|_{BMO} \|Mh\|_{L_{p,\omega_1}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C \|b\|_{BMO} \|h\|_{L_{p,\omega_1}(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

elde edilir." ■

Lemma 3.2 " $1 < s < \infty$ ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda

$$M^\#(|b, I_\alpha| h(x)) \leq C \|b\|_{BMO} \left[(M|I_\alpha h(x)|^s)^{\frac{1}{s}} + (M_\alpha^s |h(x)|^s)^{\frac{1}{s}} \right] \quad (3.10)$$

eşitsizliği gerçekleşir. Burada C sabiti, h ve x ten bağımsızdır (Di Fazio ve Ragusa, 1991)."

Aşağıdaki önerme sağlanır (Stein, 1993):

Önerme 3.1 " $1 < p < \infty$ olsun. Bu durumda $h \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ve $g \in L_{p'}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} h(y)g(y)dy \right| \leq C \left| \int_{\mathbb{R}^n} M^\sharp h(y)Mg(y)dy \right|$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $C > 0$ sabiti h den bağımsızdır."

Lemma 3.3 " $1 < p < \infty$ ve $\omega \in F_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda

$$\|h\|_{L_{p,\omega}} \leq C \|M^\sharp h\|_{L_{p,\omega}}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $C > 0$ sabiti h den bağımsızdır (Stein, 1993)."

İspat. "Aşağıdaki denklik gerçeklenir

$$\|h\omega\|_{L_p} \approx \sup_{\|g\|_{L_{p'}} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} h(y)g(y)\omega(y)dy \right|.$$

Önerme 3.1 e göre

$$\|h\omega\|_{L_p} \leq C \sup_{\|g\|_{L_{p'}} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} M^\sharp h(y)Mg\omega(y)dy \right|$$

dir. Hölder eşitsizliği ve Teorem 2.7 den

$$\begin{aligned} \|h\omega\|_{L_p} &\leq C \sup_{\|g\|_{L_{p'}} \leq 1} \int_{\mathbb{R}^n} |M^\sharp h(y)Mg\omega(y)| dy \\ &\leq C \sup_{\|g\|_{L_{p'}} \leq 1} \|M^\sharp h\omega\|_{L_p} \|Mg\omega(y)\omega^{-1}(y)\|_{L_{p'}} \\ &= C \sup_{\|g\|_{L_{p'}} \leq 1} \|M^\sharp h\omega\|_{L_p} \|Mg\|_{L_{p'}} \\ &\leq C \sup_{\|g\|_{L_{p'}} \leq 1} \|M^\sharp h\omega\|_{L_p} \|g\|_{L_{p'}} \\ &\leq C \|M^\sharp h\omega\|_{L_p} \end{aligned}$$

elde edilerek ispat tamamlanır." ■

Teorem 3.6 $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{q}$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve $(\omega_1, \omega_2) \in F_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, $\omega_1 \in F_p(\mathbb{R}^n)$, $\omega_2 \in F_q(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda $|b, I_\alpha|$ operatörü $L_{p,\omega_1}(\mathbb{R}^n)$ den $L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)$ sınırlıdır.

İspat. $h \in L_{p,\omega_1}(\mathbb{R}^n)$ ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Lemma 3.3 den

$$\| |b, I_\alpha| h \|_{L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|M^\sharp (|b, I_\alpha| h)\|_{L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)} \quad (3.11)$$

elde edilir. (3.11) eşitsizliğinin sağ tarafından ve Lemma 3.2 den

$$\begin{aligned} \|M^\#(|b, I_\alpha| h)\|_{L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)} &\leq C \|b\|_{BMO} \left\| (M |I_\alpha h|^s)^{\frac{1}{s}} + (M_\alpha^s |h|^s)^{\frac{1}{s}} \right\|_{L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C \|b\|_{BMO} \left(\left\| (M |I_\alpha h|^s)^{\frac{1}{s}} \right\|_{L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)} + \left\| (M_\alpha^s |h|^s)^{\frac{1}{s}} \right\|_{L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 2.7 ve Teorem 3.1 den

$$\left\| (M |I_\alpha h|^s)^{\frac{1}{s}} \right\|_{L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)} \leq C \left\| (|I_\alpha h|^s)^{\frac{1}{s}} \right\|_{L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|I_\alpha h\|_{L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|h\|_{L_{p,\omega_1}(\mathbb{R}^n)} \quad (3.12)$$

elde edilir. Sonuç 3.1 den

$$\left\| (M_\alpha^s |h|^s)^{\frac{1}{s}} \right\|_{L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)} \leq C \left\| (|h|^s)^{\frac{1}{s}} \right\|_{L_{p,\omega_1}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|h\|_{L_{p,\omega_1}(\mathbb{R}^n)} \quad (3.13)$$

elde edilir. Böylece (3.12) ve (3.13) den

$$\| |b, I_\alpha| h \|_{L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|b\|_{BMO} \|h\|_{L_{p,\omega_1}(\mathbb{R}^n)} \quad (3.14)$$

(3.14) eşitsizliği elde edilerek ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.7 $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{q}$, $(\omega_1, \omega_2) \in F_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, $\omega_1 \in F_p(\mathbb{R}^n)$ ve $\omega_2 \in F_q(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda

$$\| |b, I_\alpha| h \|_{L_{q,\omega_2}(B(x,r))} \leq C r^{\frac{n}{qt}} \|b\|_{BMO} \|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,r))} \int_r^\infty s^{-\frac{n}{qt}} \left(1 + \ln \frac{s}{r}\right) \frac{\|h\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))} ds}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,s))} s} \quad (3.15)$$

eşitsizliği gerçekleşir. Burada C sabiti h ve x ten bağımsızdır.

İspat. h yi $h = h_1 + h_2$ şeklinde ayıralım. $r > 0$ olacak biçimde

$$h_1(y) = h(y) \chi_{B(x,2r)}(y) \quad \text{ve} \quad h_2(y) = h(y) \chi_{B^c(x,2r)}(y)$$

olsun. Bu durumda

$$|b, I_\alpha| h(x) \leq |b, I_\alpha| h_1(x) + |b, I_\alpha| h_2(x)$$

dir. Teorem 3.6 dan

$$\begin{aligned} \| |b, I_\alpha| h_1 \|_{L_{q,\omega_2}(B(x,r))} &\leq \| |b, I_\alpha| h_1 \|_{L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C \|b\|_{BMO} \|h_1\|_{L_{p,\omega_1}(\mathbb{R}^n)} \\ &= C \|b\|_{BMO} \|h\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,2r))} \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\| |b, I_\alpha| h_1 \|_{L_{q, \omega_2}(B(x, r))} \leq C \|b\|_{BMO} \|h\|_{L_{p, \omega_1}(B(x, 2r))} \quad (3.16)$$

bulunur. (3.16) eşitsizliği dikkate alınarak

$$\| |b, I_\alpha| h_1 \|_{L_{q, \omega_2}(B(x, r))} \leq C r^{\frac{n}{qt'}} \|b\|_{BMO} \|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x, r))} \int_r^\infty \left(1 + \ln \frac{s}{r}\right) s^{-\frac{n}{qt'}} \frac{\|h\|_{L_{p, \omega_1}(B(x, s))}}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x, s))}} \frac{ds}{s} \quad (3.17)$$

eşitsizliği elde edilir.

$|x - z| \leq r$, $|z - y| \geq 2r$ ve $|x - y| > r$ eşitsizliklerinden faydalananarak

$$\frac{1}{2} |z - y| \leq |x - y| \leq \frac{3}{2} |z - y| \quad (3.18)$$

elde edilir. (3.18) eşitsizliği yardımıyla

$$\begin{aligned} |b, I_\alpha| h_2(z) &\leq \int_{^c B(x, 2r)} |b(y) - b(z)| |z - y|^{\alpha-n} |h(y)| dy \\ &\leq C \int_{^c B(x, 2r)} |b(y) - b(z)| |x - y|^{\alpha-n} |h(y)| dy \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece

$$|b, I_\alpha| h_2(z) \leq C \int_{^c B(x, 2r)} |b(y) - b(z)| |x - y|^{\alpha-n} |h(y)| dy \quad (3.19)$$

bulunur. Buradan (3.19) eşitsizliğinin sağ tarafından ve Fubini teoreminden

$$\begin{aligned} &\int_{^c B(x, 2r)} |b(y) - b(z)| |x - y|^{\alpha-n} |h(y)| dy \\ &= C \int_{^c B(x, 2r)} |b(y) - b(z)| |h(y)| \left(\int_{|x-y|}^\infty s^{\alpha-n-1} ds \right) dy \\ &= C \int_{2r}^\infty s^{\alpha-n-1} \left(\int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2r \leq |x-y| \leq s\}} |b(y) - b(z)| |h(y)| dy \right) ds \\ &\leq C \int_r^\infty s^{\alpha-n-1} \left(\int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2r \leq |x-y| \leq s\}} |b(y) - b_{B(x, r)}| |h(y)| dy \right) ds \\ &\quad + C |b(z) - b_{B(x, r)}| \int_r^\infty s^{\alpha-n-1} \left(\int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2r \leq |x-y| \leq s\}} |h(y)| dy \right) ds \\ &= J_1 + J_2 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan Hölder eşitsizliği, Lemma 2.1, Tanım 2.29 ve Teorem 2.8 dan

$$\begin{aligned}
J_1 &= C \int_r^\infty s^{\alpha-n-1} \left(\int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2r \leq |x-y| \leq s\}} |b(y) - b_{B(x,r)}| |h(y)| dy \right) ds \\
&\leq C \int_r^\infty s^{\alpha-n-1} \left(\int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2r \leq |x-y| \leq s\}} |b(y) - b_{B(x,s)}| |h(y)| dy \right) ds \\
&\quad + C \int_r^\infty s^{\alpha-n-1} |b_{B(x,r)} - b_{B(x,s)}| \left(\int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2r \leq |x-y| \leq s\}} |h(y)| dy \right) ds \\
&\leq C \int_r^\infty s^{\alpha-n-1} \|b(\cdot) - b_{B(x,s)}\|_{L_{p', \omega_1^{-1}}(B(x,s))} \|h\|_{L_{p, \omega_1}(B(x,s))} ds \\
&\quad + C \int_r^\infty s^{\alpha-n-1} |b_{B(x,r)} - b_{B(x,s)}| \|h\|_{L_{p, \omega_1}(B(x,s))} \|\omega_1^{-1}\|_{L_{p'}(B(x,s))} ds \\
&\leq C \|b\|_{BMO} \int_r^\infty s^{\alpha-n-1} \|h\|_{L_{p, \omega_1}(B(x,s))} \|\omega_1^{-1}\|_{L_{p'}(B(x,s))} ds \\
&\quad + C \|b\|_{BMO} \int_r^\infty s^{\alpha-n-1} \ln \frac{s}{r} \|h\|_{L_{p, \omega_1}(B(x,s))} \|\omega_1^{-1}\|_{L_{p'}(B(x,s))} ds \\
&= C \|b\|_{BMO} \int_r^\infty s^{\alpha-n-1} \left(1 + \ln \frac{s}{r} \right) \|h\|_{L_{p, \omega_1}(B(x,s))} \|\omega_1^{-1}\|_{L_{p'}(B(x,s))} ds \\
&\leq C \|b\|_{BMO} \int_r^\infty s^{\alpha-n+\frac{n}{p't}-1} \left(1 + \ln \frac{s}{r} \right) \|h\|_{L_{p, \omega_1}(B(x,s))} \|\omega_1^{-1}\|_{L_{p't}(B(x,s))} ds \\
&\leq C \|b\|_{BMO} \int_r^\infty s^{\alpha-n+\frac{n}{p't}-1-\alpha+\frac{n}{p}-\frac{n}{q}+\frac{n}{p't}+\frac{n}{qt}} \left(1 + \ln \frac{s}{r} \right) \frac{\|h\|_{L_{p, \omega_1}(B(x,s))}}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,s))}} ds \\
&\leq C \|b\|_{BMO} \int_r^\infty s^{-\frac{n}{qt}} \left(1 + \ln \frac{s}{r} \right) \frac{\|h\|_{L_{p, \omega_1}(B(x,s))}}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,s))}} \frac{ds}{s}
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$J_1 \leq C \|b\|_{BMO} \int_r^\infty s^{-\frac{n}{qt}} \left(1 + \ln \frac{s}{r} \right) \frac{\|h\|_{L_{p, \omega_1}(B(x,s))}}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \quad (3.20)$$

eşitsizliği bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
|b(z) - b_{B(x,r)}| &= \left| b(z) - |B(x,r)|^{-1} \int_{B(x,r)} b(y) dy \right| \\
&= \left| b(z) + |B(x,r)|^{-1} \left(\int_{B(x,r)} (b(z) - b(y)) dy - \int_{B(x,r)} b(z) dy \right) \right| \\
&= |B(x,r)|^{-1} \int_{B(x,r)} (b(z) - b(y)) dy \\
&\leq \sup_{r>0} |B(x,r)|^{-1} \int_{B(x,r)} |b(z) - b(y)| dy = M_b \chi_{B(x,r)}(z)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$|b(z) - b_{B(x,r)}| \leq \sup_{r>0} |B(x,r)|^{-1} \int_{B(x,r)} |b(z) - b(y)| dy = M_b \chi_{B(x,r)}(z) \quad (3.21)$$

eşitsizliği elde edilir. (3.21) den, Hölder eşitsizliğinden ve Tanım 2.24 ten

$$\begin{aligned}
J_2 &= C |b(z) - b_{B(x,r)}| \int_r^\infty s^{\alpha-n-1} \left(\int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2r \leq |x-y| \leq s\}} |h(y)| dy \right) ds \\
&\leq C |b(z) - b_{B(x,r)}| \int_r^\infty s^{\alpha-n-1} \|h\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))} \|\omega_1^{-1}\|_{L_{p'}(B(x,s))} ds \\
&\leq C |b(z) - b_{B(x,r)}| \int_r^\infty s^{\alpha-n+\frac{n}{p't}-1} \|h\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))} \|\omega_1^{-1}\|_{L_{p't}(B(x,s))} ds \\
&\leq C |b(z) - b_{B(x,r)}| \int_r^\infty s^{\alpha-n+\frac{n}{p't}-1-\alpha+\frac{n}{p}-\frac{n}{q}+\frac{n}{p't}+\frac{n}{qt}} \frac{\|h\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))}}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,s))}} ds \\
&\leq C |b(z) - b_{B(x,r)}| \int_r^\infty s^{-\frac{n}{qt}} \left(1 + \ln \frac{s}{r} \right) \frac{\|h\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))}}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \\
&\leq C M_b \chi_{B(x,r)}(z) \int_r^\infty s^{-\frac{n}{qt}} \left(1 + \ln \frac{s}{r} \right) \frac{\|h\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))}}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,s))}} \frac{ds}{s}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$J_2 \leq C M_b \chi_{B(x,r)}(z) \int_r^\infty s^{-\frac{n}{qt}} \left(1 + \ln \frac{s}{r} \right) \frac{\|h\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))}}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \quad (3.22)$$

eşitsizliği bulunur. Dolayısıyla (3.20), (3.22) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} |b, I_\alpha| h_2(z) &\leq C \|b\|_{BMO} \int_r^\infty s^{-\frac{n}{qt}} \left(1 + \ln \frac{s}{r}\right) \frac{\|h\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))}}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \\ &\quad + CM_b \chi_{B(x,r)}(z) \int_r^\infty s^{-\frac{n}{qt}} \left(1 + \ln \frac{s}{r}\right) \frac{\|h\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))}}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 3.4 ten

$$\begin{aligned} \||b, I_\alpha| h_2\|_{L_{q,\omega_2}(B(x,r))} &\leq \|J_1\|_{L_{q,\omega_2}(B(x,r))} + \|J_2\|_{L_{q,\omega_2}(B(x,r))} \\ &\leq Cr^{\frac{n}{qt}} \|b\|_{BMO} \|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,r))} \int_r^\infty s^{-\frac{n}{qt}} \left(1 + \ln \frac{s}{r}\right) \frac{\|h\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))}}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \\ &\quad + \|M_b \chi_{B(x,r)}(z)\|_{L_{q,\omega_2}} \int_r^\infty s^{-\frac{n}{qt}} \left(1 + \ln \frac{s}{r}\right) \frac{\|h\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))}}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \\ &\leq Cr^{\frac{n}{qt}} \|b\|_{BMO} \|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,r))} \int_r^\infty s^{-\frac{n}{qt}} \left(1 + \ln \frac{s}{r}\right) \frac{\|h\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))}}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\||b, I_\alpha| h_2\|_{L_{q,\omega_2}(B(x,r))} \leq Cr^{\frac{n}{qt}} \|b\|_{BMO} \|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,r))} \int_r^\infty s^{-\frac{n}{qt}} \left(1 + \ln \frac{s}{r}\right) \frac{\|h\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))}}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \quad (3.23)$$

bulunur. (3.17) ve (3.23) ten (3.15) eşitsizliği elde edilerek ispat tamamlanır. ■

Bir sonraki teoremden Riesz potansiyelinin komütatörünün $\mathcal{M}_{\omega_1}^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayından $\mathcal{M}_{\omega_2}^{q,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlılığı verilecektir.

Teorem 3.8 $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{q}$, $(\omega_1, \omega_2) \in F_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, $\omega_1 \in F_p(\mathbb{R}^n)$ ve $\omega_2 \in F_q(\mathbb{R}^n)$ olsun. $\varphi_1(x, r)$ ve $\varphi_2(x, r)$ fonksiyonları

$$\int_r^\infty s^{-\frac{n}{qt}} \left(1 + \ln \frac{s}{r}\right) \frac{\operatorname{ess\,inf}_{s < t < \infty} \varphi_1(x, t) \|\omega_1\|_{L_p(B(x,t))}}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \leq C \varphi_2(x, r) \quad (3.24)$$

koşulunu sağlasın. Bu durumda $|b, I_\alpha|$ operatörü $\mathcal{M}_{\omega_1}^{p,\varphi_1}$ uzayından $\mathcal{M}_{\omega_2}^{q,\varphi_2}$ uzayına sınırlıdır.

İspat. $h \in \mathcal{M}_{\omega_1}^{p,\varphi_1}$ olsun. (3.24) eşitsizliği, Tanım 2.32, Teorem 2.10, Teorem 3.7,

$$\begin{aligned} \nu_2(r) &= \frac{1}{\varphi_2(x, r)}, \quad \nu_1(r) = \frac{1}{\varphi_1(x, r) \|\omega_1\|_{L_p}}, \quad g(r) = \|h\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,r))} \\ \text{ve } w(s) &= s^{-\frac{n}{qt}-1} \left(1 + \ln \frac{s}{r}\right) \|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,s))}^{-1} \quad \text{özel seçimleriyle} \end{aligned}$$

$$\||b, I_\alpha| h\|_{\mathcal{M}_{\omega_2}^{q,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)} = \|b\|_{BMO} \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{1}{\varphi_2(x, r) \|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,r))}} \||b, I_\alpha| h \chi_{B(x,r)}\|_{L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \|b\|_{BMO} \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{r^{\frac{n}{qt'}} \|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,r))}}{\varphi_2(x, r) r^{\frac{n}{qt'}} \|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,r))}} \int_r^\infty s^{-\frac{n}{qt'}} \left(1 + \ln \frac{s}{r}\right) \frac{\|h\|_{L_{p, \omega_1}(B(x,s))}}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \\
&\leq C \|b\|_{BMO} \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{1}{\varphi_1(x, r) \|\omega_1\|_{L_p(B(x,r))}} \|h\|_{L_{p, \omega_1}(B(x,r))} \\
&= C \|b\|_{BMO} \|h\|_{\mathcal{M}_{\omega_1}^{p, \varphi_1}(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Sonuç 3.3 $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, $0 < \alpha < n$, $1 < \alpha < \frac{n}{p}$, $\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{q}$, $(\omega_1, \omega_2) \in F_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, $\omega_1 \in F_p(\mathbb{R}^n)$ ve $\omega_2 \in F_q(\mathbb{R}^n)$ ve (3.24) şartları altında $|b, I_\alpha|$ komütatörü $\mathcal{M}_{\omega_1}^{p, \varphi_1}$ uzayından $\mathcal{M}_{\omega_2}^{q, \varphi_2}$ uzayına sınırlıdır.

4. BAZI UYGULAMALAR

Üçüncü bölümde elde edilen sonuçların bir uygulaması olarak $\mathcal{M}_\omega^{p,\varphi}$ genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarında Riesz potansiyelleri ve komütatörleri tarafından üretilen T_α altlineer ve $T_{b,\alpha}$ altlineer komütatör operatörleri için iki ağırlıklı eşitsizlikler elde edilecektir. Ayrıca elde edilen bu eşitsizlikler yardımıyla bahsedilen operatörlerin genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarında sınırlılıkları elde edilecektir.

4.1 Genelleştirilmiş Ağırlıklı Morrey Uzaylarında Riesz Potansiyelleri Tarafından Üretilen Altlineer Operatörler için İki Ağırlıklı Eşitsizlikler

" T_α , $\alpha \in (0, n)$ nın bir lineer veya bir altlineer operatörü temsil ettiğini varsayalım, öyleyse kompakt destekli herhangi bir $h \in L_1(\mathbb{R}^n)$ için ve $x \notin \text{Supp} h$ olacak biçimde

$$|T_\alpha h(x)| \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^{\alpha-n} |h(y)| dy \quad (4.1)$$

dir, burada C , h ve x ten bağımsızdır (Guliyev vd., 2011)."

" $t \in [r, 2r]$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ olacak biçimde $\omega(x, r)$ fonksiyonu

$$C^{-1}\omega(x, r) \leq \omega(x, r) \leq C\omega(x, r) \quad (4.2)$$

koşulunu sağlar. Maksimal operatörler için

$$\int_r^\infty t^{-1} \omega(x, t)^p dt \leq C\omega(x, r)^p \quad (4.3)$$

sağlanır, ayrıca $C \geq 1$ sabiti t ve r ye bağlı değildir. Potansiyel operatörler için ise

$$\int_r^\infty t^{\alpha p-1} \omega(x, t)^p dt \leq C r^{\alpha p} \omega(x, r)^p \quad (4.4)$$

eşitsizlikleri sağlar. Ayrıca $C > 0$ sabiti r ve $x \in \mathbb{R}^n$ ye bağlı değildir (Guliyev vd., 2011)."

Teorem 4.1 $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{q}$, $(\omega_1, \omega_2) \in F_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Ayrıca (ω_1, ω_2) (4.2) ve (4.4) koşullarını sağlasın. Bu durumda T_α altlineer operatörü (4.1) koşulunu sağlar ve $L_{p,\omega_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

Teorem 4.2 $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{n}$ ve $(\omega_1, \omega_2) \in F_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ olsun. $h \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olacak biçimde

$$\|T_\alpha h\|_{L_{q,\omega_2}(B(x,r))} \leq C r^{\frac{n}{qt}} \|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,r))} \int_r^\infty s^{-\frac{n}{qt}} \frac{\|h\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))}}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \quad (4.5)$$

sağlanır.

İspat. Keyfi bir $x \in \mathbb{R}^n$ seçelim ve h yi $h = h_1 + h_2$ şeklinde ayıralım. $r > 0$ olacak biçimde

$$h_1(y) = h(y)\chi_{B(x,2r)}(y) \quad ve \quad h_2(y) = h(y)\chi_{cB(x,2r)}(y)$$

olsun. Bu durumda

$$\|T_\alpha h\|_{L_{q,\omega_2}(B(x,r))} \leq \|T_\alpha h_1\|_{L_{q,\omega_2}(B(x,r))} + \|T_\alpha h_2\|_{L_{q,\omega_2}(B(x,r))}$$

eşitsizliği gerçekleşir. $h_1 \in L_{p,\omega_1}(\mathbb{R}^n)$, $T_\alpha h_1 \in L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)$ ve Teorem 4.1'den

$$\|T_\alpha h_1\|_{L_{q,\omega_2}(B(x,r))} \leq \|T_\alpha h_1\|_{L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|h_1\|_{L_{p,\omega_1}(\mathbb{R}^n)} = C \|h\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,2r))}$$

elde edilir. Burada

$$\|h\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,2r))} \leq C r^{\frac{n}{qt}} \|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,r))} \int_r^\infty s^{-\frac{n}{qt}} \frac{\|h\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))}}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,s))}} \frac{ds}{s}$$

olduğundan

$$\|T_\alpha h_1\|_{L_{q,\omega_2}(B(x,r))} \leq C r^{\frac{n}{qt}} \|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,r))} \int_r^\infty s^{-\frac{n}{qt}} \frac{\|h\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))}}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \quad (4.6)$$

bulunur. $|x - z| \leq r$ ve $|z - y| \geq 2r$ eşitsizliklerinden

$$\frac{1}{2} |x - y| \leq |z - y| \leq \frac{3}{2} |x - y| \quad (4.7)$$

olduğu açıktır. (4.7) eşitsizliğinden faydalanarak

$$|T_\alpha h_2(z)| \leq \int_{cB(z,2r)} |z - y|^{\alpha-n} |h(y)| dy \leq C \int_{cB(x,2r)} |x - y|^{\alpha-n} |h(y)| dy \quad (4.8)$$

elde edilir. (4.8) eşitsizliğinin sağ tarafından, Fubini teoreminden ve Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\int_{^c B(x, 2r)} |x - y|^{\alpha-n} |h(y)| dy &= (\alpha - n) \int_{^c B(x, 2r)} |h(y)| \left(\int_{|x-y|}^{\infty} s^{\alpha-n-1} ds \right) dy \\
&= C \int_{2r}^{\infty} s^{\alpha-n-1} \left(\int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2r \leq |x-y| \leq s\}} |h(y)| dy \right) ds \\
&\leq C \int_r^{\infty} s^{\alpha-n-1} \|h\|_{L_{p, \omega_1}(B(x, s))} \|\omega_1^{-1}\|_{L_{p'}(B(x, s))} ds \\
&= C \int_r^{\infty} s^{\alpha-n+\frac{n}{p't}-1} \|h\|_{L_{p, \omega_1}(B(x, s))} \|\omega_1^{-1}\|_{L_{p't}(B(x, s))} ds \\
&\leq C \int_r^{\infty} s^{\alpha-n+\frac{n}{p't}-1-\alpha+\frac{n}{p}-\frac{n}{q}+\frac{n}{p't}+\frac{n}{qt}} \frac{\|h\|_{L_{p, \omega_1}(B(x, s))}}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x, s))}} ds \\
&\leq C \int_r^{\infty} s^{-\frac{n}{qt}} \frac{\|h\|_{L_{p, \omega_1}(B(x, s))}}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x, s))}} \frac{ds}{s}
\end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen eşitsizliğin iki tarafının $L_{q, \omega_2}(B(x, r))$ normu alınarak, ayrıca Hölder eşitsizliği uygulanarak

$$\begin{aligned}
\|T_\alpha h_2\|_{L_{q, \omega_2}(B(x, r))} &\leq C \|\omega_2\|_{L_q(B(x, r))} \int_r^\infty s^{-\frac{n}{qt'}} \frac{\|h\|_{L_{p, \omega_1}(B(x, s))}}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x, s))}} \frac{ds}{s} \\
&\leq C r^{\frac{n}{qt'}} \|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x, r))} \int_r^\infty s^{-\frac{n}{qt'}} \frac{\|h\|_{L_{p, \omega_1}(B(x, s))}}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x, s))}} \frac{ds}{s}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece

$$\|T_\alpha h_2\|_{L_{q, \omega_2}(B(x, r))} \leq C r^{\frac{n}{qt'}} \|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x, r))} \int_r^\infty s^{-\frac{n}{qt'}} \frac{\|h\|_{L_{p, \omega_1}(B(x, s))}}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x, s))}} \frac{ds}{s} \quad (4.9)$$

bulunur. (4.6) ve (4.9) dan (4.5) eşitsizliği elde edilerek ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.3 $0 < \alpha < n$, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{q}$, $(\omega_1, \omega_2) \in F_{p, q}(\mathbb{R}^n)$ olsun. $\varphi_1(x, r)$ ve $\varphi_2(x, r)$ fonksiyonları

$$\int_r^\infty s^{-\frac{n}{qt'}} \frac{\operatorname{ess\,inf}_{s < t < \infty} \varphi_1(x, t) \|\omega_1\|_{L_p(B(x, t))}}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x, s))}} \frac{ds}{s} \leq C \varphi_2(x, r) \quad (4.10)$$

koşulunu sağlasın. Bu durumda T_α operatörü $\mathcal{M}_{\omega_1}^{p, \varphi_1}$ uzayından $\mathcal{M}_{\omega_2}^{q, \varphi_2}$ uzayına sınırlıdır.

İspat. $h \in \mathcal{M}_{\omega_1}^{p, \varphi_1}$ olsun. (4.10) eşitsizliği, Tanım 2.32, Teorem 2.10, Teorem 4.2 $\nu_2(r) = \frac{1}{\varphi_2(x, r)}$, $\nu_1(r) = \frac{1}{\varphi_1(x, r) \|\omega_1\|_{L_p}}$, $g(r) = \|h\|_{L_{p, \omega_1}(B(x, r))}$ ve $w(s) = s^{-\frac{n}{qt}-1} \|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x, s))}^{-1}$ özel seçimleriyle

$$\begin{aligned}
\|T_\alpha h\|_{\mathcal{M}_{\omega_2}^{q, \varphi_2}(\mathbb{R}^n)} &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{1}{\varphi_2(x, r) \|\omega_2\|_{L_q(B(x, r))}} \|T_\alpha h \chi_{B(x, r)}\|_{L_{q, \omega_2}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{r^{\frac{n}{qt}} \|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x, r))}}{\varphi_2(x, r) r^{\frac{n}{qt}} \|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x, r))}} \int_r^\infty s^{-\frac{n}{qt}} \frac{\|h\|_{L_{p, \omega_1}(B(x, s))}}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x, s))}} \frac{ds}{s} \\
&\leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{1}{\varphi_1(x, r) \|\omega_1\|_{L_p(B(x, r))}} \|h\|_{L_{p, \omega_1}(B(x, r))} \\
&= C \|h\|_{\mathcal{M}_{\omega_1}^{p, \varphi_1}(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

4.2 Genelleştirilmiş Ağırlıklı Morrey Uzaylarında Riesz Potansiyelleri Tarafından Üretilen Altlineer Komütatör Operatörler için İki Ağırlıklı Eşitsizlikler

Bu bölümde genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarında Riesz potansiyelleri tarafından üretilen altlineer komütatör operatör için iki ağırlıklı eşitsizlikler elde edilecektir. " $T_{b, \alpha}$, $\alpha \in (0, n)$ nın bir lineer veya bir altlineer komütatör operatörü temsil ettiğini varsayalım, öyleyse kompakt destekli herhangi bir $h \in L_1(\mathbb{R}^n)$ için ve $x \notin \text{Supp } h$ olacak biçimde

$$|T_{b, \alpha} h(x)| \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |b(x) - b(y)| |x - y|^{\alpha - n} |h(y)| dy \quad (4.11)$$

dir, burada C , h ve x ten bağımsızdır (Guliyev vd., 2011)."

Teorem 4.4 $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, $0 < \alpha < n$, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{q}$, $(\omega_1, \omega_2) \in F_{p, q}(\mathbb{R}^n)$, $\omega_1 \in F_p(\mathbb{R}^n)$ ve $\omega_2 \in F_q(\mathbb{R}^n)$ olsun. Ayrıca (ω_1, ω_2) , (4.2) ve (4.4) koşullarını sağlasın. Bu durumda $|b, T_\alpha|$ altlineer operatörünün komütatörü (4.1) koşulunu sağlar ve $L_{p, \omega_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_{q, \omega_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

İspat. $h \in L_{p, \omega_1}(\mathbb{R}^n)$ ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Lemma 3.3 den

$$\| |b, T_\alpha| h \|_{L_{q, \omega_2}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|M^\#(|b, T_\alpha| h)\|_{L_{q, \omega_2}(\mathbb{R}^n)} \quad (4.12)$$

elde edilir. (4.12) eşitsizliğinin sağ tarafından ve Lemma 3.2 den

$$\begin{aligned} \|M^\#(|b, T_\alpha| h)\|_{L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)} &\leq C \|b\|_{BMO} \left\| (M|T_\alpha h|^s)^{\frac{1}{s}} + (M_\alpha^s |h|^s)^{\frac{1}{s}} \right\|_{L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C \|b\|_{BMO} \left(\left\| (M|T_\alpha h|^s)^{\frac{1}{s}} \right\|_{L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)} + \left\| (M_\alpha^s |h|^s)^{\frac{1}{s}} \right\|_{L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)} \right) \end{aligned}$$

bulunur. Teorem 2.6 ve Teorem 4.1 den

$$\left\| (M|T_\alpha h|^s)^{\frac{1}{s}} \right\|_{L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|T_\alpha h\|_{L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|h\|_{L_{p,\omega_1}(\mathbb{R}^n)} \quad (4.13)$$

elde edilir. Sonuç 3.1 den

$$\left\| (M_\alpha^s |h|^s)^{\frac{1}{s}} \right\|_{L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|h\|_{L_{p,\omega_1}(\mathbb{R}^n)} \quad (4.14)$$

bulunur. Böylece (4.13) ve (4.14) den

$$\| |b, T_\alpha| h \|_{L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|b\|_{BMO} \|h\|_{L_{p,\omega_1}(\mathbb{R}^n)} \quad (4.15)$$

(4.15) eşitsizliği elde edilerek ispat tamamlanır. ■

Lemma 4.1 $b \in BMO$, $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{q}$, $(\omega_1, \omega_2) \in F_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, $\omega_1 \in F_p(\mathbb{R}^n)$ ve $\omega_2 \in F_q(\mathbb{R}^n)$ olsun. $h \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olacak biçimde

$$\|T_{b,\alpha} h\|_{L_{q,\omega_2}(B(x,r))} \leq C \|b\|_{BMO} r^{\frac{n}{qt}} \|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,r))} \int_r^\infty s^{-\frac{n}{qt}} \left(1 + \ln \frac{s}{r}\right) \frac{\|h\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))} ds}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,s))} s} \quad (4.16)$$

sağlanır.

İspat. h yi $h = h_1 + h_2$ şeklinde ayıralım. $r > 0$ olacak biçimde

$$h_1(y) = h(y) \chi_{B(x,2r)}(y) \quad ve \quad h_2(y) = h(y) \chi_{cB(x,2r)}(y)$$

olsun. Buradan

$$\|T_{b,\alpha} h\|_{L_{q,\omega_2}(B(x,r))} \leq \|T_{b,\alpha} h_1\|_{L_{q,\omega_2}(B(x,r))} + \|T_{b,\alpha} h_2\|_{L_{q,\omega_2}(B(x,r))}$$

dir. Teorem 4.4 ten

$$\|T_{b,\alpha} h_1\|_{L_{q,\omega_2}(B(x,r))} \leq \|T_{b,\alpha} h_1\|_{L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|b\|_{BMO} \|h_1\|_{L_{p,\omega_1}(\mathbb{R}^n)} = C \|b\|_{BMO} \|h\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,2r))}$$

elde edilir. Buradan

$$\|T_{b,\alpha}h_1\|_{L_{q,\omega_2}(B(x,r))} \leq C \|b\|_{BMO} r^{\frac{n}{qt}} \|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,r))} \int_r^\infty s^{-\frac{n}{qt}} \left(1 + \ln \frac{s}{r}\right) \frac{\|h\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))}}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \quad (4.17)$$

eşitsizliği elde edilir.

$|x - z| \leq r$, $|z - y| \geq 2r$ ve $|x - y| > r$ eşitsizliklerinden faydalanarak

$$\frac{1}{2} |z - y| \leq |x - y| \leq \frac{3}{2} |z - y| \quad (4.18)$$

elde edilir. (4.18) eşitsizliği yardımıyla

$$\begin{aligned} |T_{b,\alpha}h_2(z)| &\leq \int_{^cB(x,2r)} |b(y) - b(z)| |z - y|^{\alpha-n} |h(y)| dy \\ &\leq C \int_{^cB(x,2r)} |b(y) - b(z)| |x - y|^{\alpha-n} |h(y)| dy \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$|T_{b,\alpha}h_2(z)| \leq C \int_{^cB(x,2r)} |b(y) - b(z)| |x - y|^{\alpha-n} |h(y)| dy \quad (4.19)$$

eşitsizliği elde edilir. (4.19) eşitsizliğinin sağ tarafından ve Fubini teoreminden

$$\begin{aligned} \int_{^cB(x,2r)} |b(y) - b(z)| |x - y|^{\alpha-n} |h(y)| dy &= C \int_{^cB(x,2r)} |b(y) - b(z)| |h(y)| \left(\int_{|x-y|}^\infty s^{\alpha-n-1} ds \right) dy \\ &= C \int_{2r}^\infty s^{\alpha-n-1} \left(\int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2r \leq |x-y| \leq s\}} |b(y) - b(z)| |h(y)| dy \right) ds \\ &\leq C \int_r^\infty s^{\alpha-n-1} \left(\int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2r \leq |x-y| \leq s\}} |b(y) - b_{B(x,r)}| |h(y)| dy \right) ds \\ &\quad + C |b(z) - b_{B(x,r)}| \int_r^\infty s^{\alpha-n-1} \left(\int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2r \leq |x-y| \leq s\}} |h(y)| dy \right) ds \\ &= J_1 + J_2 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan Hölder eşitsizliği, Lemma 2.1, Tanım 2.29 ve Teorem 2.8 den

$$\begin{aligned}
J_1 &= C \int_r^\infty s^{\alpha-n-1} \left(\int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2r \leq |x-y| \leq s\}} |b(y) - b_{B(x,r)}| |h(y)| dy \right) ds \\
&\leq C \int_r^\infty s^{\alpha-n-1} \left(\int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2r \leq |x-y| \leq s\}} |b(y) - b_{B(x,s)}| |h(y)| dy \right) ds \\
&\quad + C \int_r^\infty s^{\alpha-n-1} |b_{B(x,r)} - b_{B(x,s)}| \left(\int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2r \leq |x-y| \leq s\}} |h(y)| dy \right) ds \\
&\leq C \int_r^\infty s^{\alpha-n-1} \|b(\cdot) - b_{B(x,s)}\|_{L_{p', \omega_1^{-1}}(B(x,s))} \|h\|_{L_{p, \omega_1}(B(x,s))} ds \\
&\quad + C \int_r^\infty s^{\alpha-n-1} |b_{B(x,r)} - b_{B(x,s)}| \|h\|_{L_{p, \omega_1}(B(x,s))} \|\omega_1^{-1}\|_{L_{p'}(B(x,s))} ds \\
&\leq C \|b\|_{BMO} \int_r^\infty s^{\alpha-n-1} \|h\|_{L_{p, \omega_1}(B(x,s))} \|\omega_1^{-1}\|_{L_{p'}(B(x,s))} ds \\
&\quad + C \|b\|_{BMO} \int_r^\infty s^{\alpha-n-1} \ln \frac{s}{r} \|h\|_{L_{p, \omega_1}(B(x,s))} \|\omega_1^{-1}\|_{L_{p'}(B(x,s))} ds \\
&= C \|b\|_{BMO} \int_r^\infty s^{\alpha-n-1} \left(1 + \ln \frac{s}{r} \right) \|h\|_{L_{p, \omega_1}(B(x,s))} \|\omega_1^{-1}\|_{L_{p'}(B(x,s))} ds \\
&\leq C \|b\|_{BMO} \int_r^\infty s^{\alpha-n+\frac{n}{p't}-1} \left(1 + \ln \frac{s}{r} \right) \|h\|_{L_{p, \omega_1}(B(x,s))} \|\omega_1^{-1}\|_{L_{p't}(B(x,s))} ds \\
&\leq C \|b\|_{BMO} \int_r^\infty s^{\alpha-n+\frac{n}{p't}-1-\alpha+\frac{n}{p}-\frac{n}{q}+\frac{n}{p't}+\frac{n}{qt}} \left(1 + \ln \frac{s}{r} \right) \frac{\|h\|_{L_{p, \omega_1}(B(x,s))}}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,s))}} ds \\
&\leq C \|b\|_{BMO} \int_r^\infty s^{-\frac{n}{qt}} \left(1 + \ln \frac{s}{r} \right) \frac{\|h\|_{L_{p, \omega_1}(B(x,s))}}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,s))}} \frac{ds}{s}
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$J_1 \leq C \|b\|_{BMO} \int_r^\infty s^{-\frac{n}{qt}} \left(1 + \ln \frac{s}{r} \right) \frac{\|h\|_{L_{p, \omega_1}(B(x,s))}}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \quad (4.20)$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
|b(z) - b_{B(x,r)}| &= \left| b(z) - |B(x,r)|^{-1} \int_{B(x,r)} b(y) d(y) \right| \\
&= \left| b(z) + |B(x,r)|^{-1} \left(\int_{B(x,r)} (b(z) - b(y)) d(y) - \int_{B(x,r)} b(z) dy \right) \right| \\
&= |B(x,r)|^{-1} \int_{B(x,r)} (b(z) - b(y)) dy \\
&\leq \sup_{r>0} |B(x,r)|^{-1} \int_{B(x,r)} |b(z) - b(y)| d(y) = M_b \chi_{B(x,r)}(z)
\end{aligned}$$

dir. Buradan

$$|b(z) - b_{B(x,r)}| \leq \sup_{r>0} |B(x,r)|^{-1} \int_{B(x,r)} |b(z) - b(y)| dy = M_b \chi_{B(x,r)}(z) \quad (4.21)$$

elde edilir. (4.21) den, Hölder eşitsizliğinden ve Tanım 2.24 dan

$$\begin{aligned}
J_2 &= C |b(z) - b_{B(x,r)}| \int_r^\infty s^{\alpha-n-1} \left(\int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2r \leq |x-y| \leq s\}} |h(y)| dy \right) ds \\
&\leq C |b(z) - b_{B(x,r)}| \int_r^\infty s^{\alpha-n-1} \|h\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))} \|\omega_1^{-1}\|_{L_{p'}(B(x,s))} ds \\
&\leq C |b(z) - b_{B(x,r)}| \int_r^\infty s^{\alpha-n+\frac{n}{p't}-1} \|h\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))} \|\omega_1^{-1}\|_{L_{p't}(B(x,s))} ds \\
&\leq C |b(z) - b_{B(x,r)}| \int_r^\infty s^{\alpha-n+\frac{n}{p't}-1-\alpha+\frac{n}{p}-\frac{n}{q}+\frac{n}{p't}+\frac{n}{qt}} \frac{\|h\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))}}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,s))}} ds \\
&\leq C |b(z) - b_{B(x,r)}| \int_r^\infty s^{-\frac{n}{qt}} \left(1 + \ln \frac{s}{r} \right) \frac{\|h\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))}}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \\
&\leq C M_b \chi_{B(x,r)}(z) \int_r^\infty s^{-\frac{n}{qt}} \left(1 + \ln \frac{s}{r} \right) \frac{\|h\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))}}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,s))}} \frac{ds}{s}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$J_2 \leq C M_b \chi_{B(x,r)}(z) \int_r^\infty s^{-\frac{n}{qt}} \left(1 + \ln \frac{s}{r} \right) \frac{\|h\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))}}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \quad (4.22)$$

eşitsizliği bulunur. Dolayısıyla (4.20) ve (4.22) eşitsizlerinden

$$\begin{aligned} T_{b,\alpha} h_2(z) &\leq C \|b\|_{BMO} \int_r^\infty s^{-\frac{n}{qt'}} \left(1 + \ln \frac{s}{r}\right) \frac{\|h\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))}}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \\ &\quad + C M_b \chi_{B(x,r)}(z) \int_r^\infty s^{-\frac{n}{qt'}} \left(1 + \ln \frac{s}{r}\right) \frac{\|h\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))}}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 3.4 ten

$$\begin{aligned} \|T_{b,\alpha} h_2\|_{L_{q,\omega_2}(B(x,r))} &\leq \|J_1\|_{L_{q,\omega_2}(B(x,r))} + \|J_2\|_{L_{q,\omega_2}(B(x,r))} \\ &\leq C \|b\|_{BMO} r^{\frac{n}{qt'}} \|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,r))} \int_r^\infty s^{-\frac{n}{qt'}} \left(1 + \ln \frac{s}{r}\right) \frac{\|h\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))}}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \\ &\quad + C \|M_b \chi_{B(x,r)}(z)\|_{L_{q,\omega_2}} \int_r^\infty s^{-\frac{n}{qt'}} \left(1 + \ln \frac{s}{r}\right) \frac{\|h\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))}}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \\ &\leq C \|b\|_{BMO} r^{\frac{n}{qt'}} \|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,r))} \int_r^\infty s^{-\frac{n}{qt'}} \left(1 + \ln \frac{s}{r}\right) \frac{\|h\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))}}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\|T_{b,\alpha} h_2\|_{L_{q,\omega_2}(B(x,r))} \leq C \|b\|_{BMO} r^{\frac{n}{qt'}} \|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,r))} \int_r^\infty s^{-\frac{n}{qt'}} \left(1 + \ln \frac{s}{r}\right) \frac{\|h\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))}}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \quad (4.23)$$

bulunur. (4.17) ve (4.23) dan (4.16) elde edilerek ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.5 $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{q}$, $(\omega_1, \omega_2) \in F_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, $\omega_1 \in F_p(\mathbb{R}^n)$ ve $\omega_2 \in F_q(\mathbb{R}^n)$ olsun. $\varphi_1(x, r)$ ve $\varphi_2(x, r)$ fonksiyonları

$$\int_r^\infty \left(1 + \ln \frac{s}{r}\right) s^{-\frac{n}{qt'}} \frac{\text{ess inf}_{s < t < \infty} \varphi_1(x, t) \|\omega_1\|_{L_p(B(x,t))}}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \leq C \varphi_2(x, r) \quad (4.24)$$

koşulunu sağlasın. Bu durumda $T_{b,\alpha}$ operatörü $\mathcal{M}_{\omega_1}^{p,\varphi_1}$ uzayından $\mathcal{M}_{\omega_2}^{q,\varphi_2}$ uzayına sınırlıdır.

İspat. $h \in \mathcal{M}_{\omega_1}^{p,\varphi_1}$ olsun. (4.24) eşitsizliği, Tanım 2.32, Teorem 2.10, Lemma 4.1, $\nu_2(r) = \frac{1}{\varphi_2(x,r)}$, $\nu_1(r) = \frac{1}{\varphi_1(x,r)\|\omega_1\|_{L_p}}$, $g(r) = \|h\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,r))}$

ve $w(s) = s^{-\frac{n}{qt'}-1} \left(1 + \ln \frac{s}{r}\right) \|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,s))}^{-1}$ özel seçimleriyle

$$\begin{aligned}
& \|T_{b,\alpha} h\|_{\mathcal{M}_{\omega_2}^{q,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)} \\
&= \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{1}{\varphi_2(x, r) \|\omega_2\|_{L_q(B(x,r))}} \|T_{b,\alpha} h \chi_{B(x,r)}\|_{L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C \|b\|_{BMO} \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{r^{\frac{n}{qt'}} \|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,r))}}{\varphi_2(x, r) r^{\frac{n}{qt'}} \|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,r))}} \int_r^\infty \left(1 + \ln \frac{s}{r}\right) s^{-\frac{n}{qt'}} \frac{\|h\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))}}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \\
&\leq C \|b\|_{BMO} \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{1}{\varphi_1(x, r) \|\omega_1\|_{L_p(B(x,r))}} \|h\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,r))} \\
&= C \|b\|_{BMO} \|h\|_{\mathcal{M}_{\omega_1}^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

$1 \leq p < \infty$, $h \in L_{p,\omega}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ φ , $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ üzerinde ölçülebilir pozitif bir fonksiyon ve ω , $\mathbb{R}^n$ de negatif olmayan ölçülebilir fonksiyon olmak üzere $\mathcal{M}_{\omega}^{p,\varphi}$ genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayı,

$$\|h\|_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\varphi}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{1}{\varphi(x, r) \|\omega\|_{L_p(B(x, r))}} \|h\|_{L_{p,\omega}(B(x, r))} < \infty$$

olacak şekilde fonksiyonların uzayıdır. Tezde ω ağırlıkları Fefferman-Pong sınıfından olmak üzere I_{α} Riesz potansiyeli ve onun komütatörü olan $|b, I_{\alpha}|$ nın genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayları $\mathcal{M}_{\omega_1}^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathcal{M}_{\omega_2}^{q,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlılık koşulları elde edilmiştir.

- $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{q}$ ve $(\omega_1, \omega_2) \in F_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ olsun. $\varphi_1(x, r)$ ve $\varphi_2(x, r)$ fonksiyonları

$$\int_r^{\infty} s^{-\frac{n}{qt'}} \frac{\operatorname{ess\,inf}_{s < t < \infty} \varphi_1(x, t) \|\omega_1\|_{L_p(B(x, t))} ds}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x, s))}} \frac{ds}{s} \leq C \varphi_2(x, r)$$

koşulunu sağlasın. Bu durumda I_{α} operatörü $\mathcal{M}_{\omega_1}^{p,\varphi_1}$ uzayından $\mathcal{M}_{\omega_2}^{q,\varphi_2}$ uzayına sınırlıdır.

- $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{q}$, $(\omega_1, \omega_2) \in F_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, $\omega_1 \in F_p(\mathbb{R}^n)$ ve $\omega_2 \in F_q(\mathbb{R}^n)$ olsun. $\varphi_1(x, r)$ ve $\varphi_2(x, r)$ fonksiyonları

$$\int_r^{\infty} s^{-\frac{n}{qt'}} \left(1 + \ln \frac{s}{r}\right) \frac{\operatorname{ess\,inf}_{s < t < \infty} \varphi_1(x, t) \|\omega_1\|_{L_p(B(x, t))} ds}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x, s))}} \frac{ds}{s} \leq C \varphi_2(x, r)$$

koşulunu sağlasın. Bu durumda $|b, I_{\alpha}|$ operatörü $\mathcal{M}_{\omega_1}^{p,\varphi_1}$ uzayından $\mathcal{M}_{\omega_2}^{q,\varphi_2}$ uzayına sınırlıdır.

Tezin dördüncü bölümünde elde edilen sonuçların uygulaması olarak ω ağırlıkları Fefferman-Pong sınıfından olmak üzere T_{α} ve $T_{b,\alpha}$ operatörlerinin genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayları $\mathcal{M}_{\omega_1}^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathcal{M}_{\omega_2}^{q,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlılık koşulları elde edilmiştir.

- $0 < \alpha < n$, $\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{q}$, $(\omega_1, \omega_2) \in F_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ olsun. $\varphi_1(x, r)$ ve $\varphi_2(x, r)$ fonksiyonları

$$\int_r^\infty s^{-\frac{n}{qt'}} \frac{\operatorname{ess\,inf}_{s < t < \infty} \varphi_1(x, t) \|\omega_1\|_{L_p(B(x,t))} ds}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \leq C \varphi_2(x, r)$$

koşulunu sağlasın. Bu durumda T_α operatörü $\mathcal{M}_{\omega_1}^{p,\varphi_1}$ uzayından $\mathcal{M}_{\omega_2}^{q,\varphi_2}$ uzayına sınırlıdır.

- $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{q}$, $(\omega_1, \omega_2) \in F_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, $\omega_1 \in F_p(\mathbb{R}^n)$ ve $\omega_2 \in F_q(\mathbb{R}^n)$ olsun. $\varphi_1(x, r)$ ve $\varphi_2(x, r)$ fonksiyonları

$$\int_r^\infty \left(1 + \ln \frac{s}{r}\right) s^{-\frac{n}{qt'}} \frac{\operatorname{ess\,inf}_{s < t < \infty} \varphi_1(x, t) \|\omega_1\|_{L_p(B(x,t))} ds}{\|\omega_2\|_{L_{qt}(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \leq C \varphi_2(x, r)$$

koşulunu sağlasın. Bu durumda $T_{b,\alpha}$ operatörü $\mathcal{M}_{\omega_1}^{p,\varphi_1}$ uzayından $\mathcal{M}_{\omega_2}^{q,\varphi_2}$ uzayına sınırlıdır.

Bu tez çalışmasında, harmonik analizin klasik operatörlerinden biri olan Riesz potansiyelinin genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarında iki ağırlıklı sınırlılığı $F_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ Fefferman-Pong ağırlık sınıflarıyla literatürde ilk kez elde edilmiş olup bu alanda yapılan iki ağırlıklı çalışmalar az sayıda bulunduğundan verilen tezin bu kapsamda çalışma yapacak olan lisansüstü öğrencilere yol gösterici bir kaynak olacağı düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- Adams D.R. 1975. A note on Riesz potentials. *Duke Math. J.*, 42 (4), 765-778.
- Ağcayazı M., Gogatishvili A., Koca K. and Mustafayev R. 2015. A note on maximal commutators and commutators of maximal functions, *J. Math. Soc. Japan.*, 67 (2), 581-593.
- Aykol C., Hasanov J.J. and Safarov Z.V. 2022. A characterization of two-weighted inequalities for maximal, singular operators and their commutators in generalized weighted Morrey spaces, *Funct. Approx. Comment. Math.*, 67 (2), 145-167.
- Aykol C., Hasanov J.J. and Safarov Z.V. 2023. Two-weighted inequalities for Riesz potential and its commutators in generalized weighted Morrey spaces, *Mat. Vesnik*, 75, (1), 37-49.
- Aykol C., Geleri F., Hasanov J.J. and Safarov Z.V. 2024. A new characterization of two-weighted inequalities for Riesz potential and its commutators in global generalized weighted Morrey spaces, *dergiye gönderildi*.
- Bastero J., Milman M. and Ruiz Francisco J. 2000. Commutators for the maximal and sharp functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 128, (11), 3329–3334 (electronic).
- Burenkov V., Gogatishvili A., V.S. Guliyev and Mustafayev R. 2010. Boundedness of the fractional maximal operator in local Morrey-type spaces, *Complex Var. Elliptic Equ.*, 55 (8-10), 739-758.
- Coifman R.R. and Fefferman C. 1974. Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals, *Studia Math.*, vol. 51, pp. 241-250.
- Coifman R.R., Rochberg R. and Weiss G. 1976. Factorization theorems for Hardy spaces in several variables, *Ann. of Math.*, (2) 103, no.3, 611–635.
- Di Fazio G. and Ragusa M.A. 1991. Commutators and Morrey spaces, *Bollettino U.M.I.* 7 (5-A), 323-332.
- Grafakos L. 2004. *Classical and Modern Fourier Analysis*. Pearson Edu. Inc. Upper Saddle River.
- Grafakos L. 2014. *Classical Fourier Analysis*. Springer NY, (3) 17, 638.
- Guliyev V.S. 1994. Two-weighted L_p inequalities for singular integral operators on Heisenberg groups, *Georgian Math. J.*, 1 (4), 367-376.
- Guliyev V.S. 2009. Boundedness of the maximal, potential and singular operators in the generalized Morrey spaces. *J. Inequal. Appl.*, 1-20.
- Guliyev V.S., Aliyev S.S, Karaman T. and Shukurov P.S. 2011. Boundedness of sublinear operators and commutators on generalized Morrey spaces. *Integr. Equ. Oper. Theory*, 71 (3), 327–355.

- Guliyev V.S. 2012. Generalized weighted Morrey spaces and higher order commutators of sublinear operators, *Eurasian Math. J.*, 3 (3), 33-61.
- Guliyev V.S. 2013. Generalized local Morrey spaces and fractional integral operators with rough kernel, *J. Math. Sci. (N. Y.)* 193 (2).
- Guliyev V.S. 2013. Local generalized Morrey spaces and singular integrals with rough kernel, *Azerb. J. Math.*, 3 (2), 79-94.
- Guliyev V.S. and Shukurov P.S. 2013. On the boundedness of the fractional maximal operator, Riesz potential and their commutators in generalized Morrey spaces, *Advances in Harmonic Analysis and Operator Theory, The Stefan Samko Anniversary*, Vol. 229, 175-194.
- Hao C. 2020. Lecture notes on harmonic analysis, Institute of Math. AMSS, CAS.
- Ho K.P. 2016. Singular integral operators, John-Nirenberg inequalities and Triebel-Lizorkin type spaces on weighted Lebesgue spaces with variable exponents, *Revista De La Union Matematica Argentina*, 57 (1), 85-101.
- Kreyszig E. 1989. *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley.
- Milman M. and Schonbek T. 1990. Second order estimates in interpolation theory and applications, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 110 (4), 961-969.
- Mizuhara T. 1991. Boundedness of some classical operators on generalized Morrey spaces. *Harmonic Analysis, ICM-90 Satell. Proc.*, Springer-Verlag, Tokyo, pp. 183-189.
- Morrey C.B. 1938. On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 43, pp. 126-166.
- Muckenhoupt B. 1972. Hardy's inequality with weights. *Stud. Math.*, 44 (1), 31-38.
- Muckenhoupt B. and Wheeden R. L. 1974. Weighted norm inequalities for fractional integrals, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 192, pp. 261-274.
- Nakai E. 1994. Hardy-Littlewood maximal operator, singular integral operators and Riesz potentials on generalized Morrey spaces, *Math. Nachr.*, 166, 95-103.
- Perez C. 1994. Two weighted inequalities for potential and fractional type maximal operators, *Indiana University Mathematics Journal*, 43 (2), 663-683.
- Royden H.L. and Fitzpatrick P.M. 2010. *Real analysis*, China Machine Press, (4).
- Sadosky C. 1979. *Interpolation of operators and singular integrals*, Marcel Dekker Inc., 375p.
- Sawyer E.T. and Wheeden R.L. 1992. Weighted inequalities for fractional integrals on Euclidean and homogeneous spaces, *Amer. J. Math.* 114, 813-874.

Stein E.M. 1970. Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton Math. Ser., 30, Princeton Univ. Press, Princeton.

Stein E.M. 1993. Harmonic analysis: Real-variable methods, orthogonality and oscillatory integrals, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ.

