

T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
EKONOMETRİ ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

ZAMAN SERİLERİ ANALİZİNDE PARAMETRİK
OLMAYAN YAKLAŞIMLAR: YENİ BİR TEST
ÖNERİSİ

Hüseyin İÇEN

2502180039

TEZ DANIŞMANI

Prof. Dr. Nilgün ÇİL

İSTANBUL – 2024

ÖZ

ZAMAN SERİLERİ ANALİZİNDE PARAMETRİK OLMAYAN YAKLAŞIMLAR: YENİ BİR TEST ÖNERİSİ

HÜSEYİN İÇEN

Bu çalışmada parametrik olmayan yaklaşımlarla zaman serileri analizlerinde kullanılan dirençli tahmin yöntemleriyle üstel yumuşak geçişli otoregresif bir birim kök testi önerilmektedir. Birim kök testlerinde yaygın olarak görülen hata terimlerindeki beyaz gürültü varsayımının sağlanmamasından dolayı kullanılan birim kök testleri hatalı sonuçlara neden olabilmektedir. Bu varsayımın esnetilmesi ile çeşitli birim kök testleri oluşturulmaktadır. Bu tez kapsamında üstel yumuşak geçişli extremum tipi bir doğrusal olmayan birim kök testi geliştirilmiştir.

Bu tez kapsamında parametrik olmayan yöntemlerle elde edilen uzun dönem varyansın hata terimlerindeki yapının daha doğru tahmin edilmesiyle doğrusal olmayan birim kök testlerinin geleneksel birim kök testlerine göre üstünlükleri bir arada değerlendirilmektedir. Dolayısıyla çalışmada öncelikle hata terimlerindeki dinamikleri dikkate alan doğrusal ve doğrusal olmayan birim kök testleri ele alınmıştır. Daha sonra uzun dönem varyansın tahmin edilmesinde kullanılan parametrik olmayan yaklaşımlar açıklanmıştır. Son kısımda parametrik olmayan yöntemlerle elde edilen uzun dönem varyansın üstel geçişli otoregresif bir birim kök testine uyarlanmasıyla yeni bir birim kök testi önerilmiştir. Önerilen bu testin benzer yaklaşımlarla elde edilen testlere kıyasla daha üstün güç özellikleri bulunmaktadır. Ayrıca hata terimlerindeki otoregresif ve hareketli ortalama süreçleri izlemesi durumunda da testin güç performansı oldukça yüksektir.

Anahtar Kelimeler: *Doğrusal Olmayan Zaman Serileri, Parametrik Olmayan Yaklaşımlar, ESTAR tipi Birim Kök Testleri*

ABSTRACT

NON-PARAMETRIC APPROACHES IN TIME SERIES ANALYSIS: A NOVEL TEST PROPOSAL

HÜSEYİN İÇEN

In this study, we propose an exponential smooth transition autoregressive unit root test, utilizing robust estimation methods commonly employed in time series analysis with non-parametric approaches. Traditional unit root tests often yield inaccurate results due to the white noise assumption in error terms, which may not hold true. To address this limitation, various unit root tests have been enhanced by relaxing this assumption. In this thesis, we present the development of an exponential smooth transition extremum-type non-linear unit root test.

Within the scope of this thesis, we evaluate the advantages of non-linear unit root tests over traditional ones, along with the more accurate estimation of error term structure in long-run variance obtained through non-parametric methods. Firstly, we discuss both linear and non-linear unit root tests, considering the dynamics of error terms. Subsequently, we explain non-parametric approaches used for estimating long-run variance.

In conclusion, we propose a novel unit root test by adapting the long-run variance obtained through non-parametric methods to an autoregressive unit root test with exponential transition. This proposed test demonstrates superior power properties compared to tests derived from similar approaches. Additionally, the test exhibits high power performance when applied to autoregressive and moving average processes in error terms.

Keywords: *Non-linear Time Series, Non-parametric Approaches, ESTAR type Unit Root Tests*

ÖNSÖZ

Doktora tezimin tüm simülasyonları ve kodları için uzun süreler emek veren çok değerli Prof. Dr. Burak GÜRİŞ'e teşekkürü borç bilirim. Her zaman desteğini ve yardımlarını benden esirgemeyen saygıdeğer tez danışmanım Prof. Dr. Nilgün ÇİL'e, lisans hayatımdan doktora tezime kadar beni yalnız bırakmayan, öğrencisi olmaktan gurur duyduğum Prof. Dr. Kenan LOPCU'ya, değerli jüri üyelerim Prof. Dr. Kutluk Kağan SÜMER ve Dr. Öğr. Üyesi Turgut ÜN'e, akademisyen olma yolunda birlikte adımlar attığımız Araş. Gör. Ali Samet KARATAŞ'a, Araş. Gör. Sinan DEMİREZEN'e, Araş. Gör. Buğra POLAT'a, çok sevgili ailem ve kardeşlerime ayrıca teşekkür ederim. Tüm bu zorlu süreçte bana her türlü destek olan, bana güvenen, cesaret veren çok sevgili eşim Araş. Gör. Dr. N. Melis ESENYEL İÇEN'e çok şey borçluyum.



HÜSEYİN İÇEN

İÇİNDEKİLER

ÖZ.....	ii
ABSTRACT.....	iii
ÖNSÖZ.....	iv
İÇİNDEKİLER.....	v
TABLolar LİSTESİ.....	vii
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	viii
KISALTMALAR LİSTESİ.....	ix
GİRİŞ.....	1

BİRİNCİ BÖLÜM

DURAĞANLIK KAVRAMI VE BİRİM KÖK TESTLERİ

1.1. Durağanlık Kavramı.....	1
1.2. Doğrusal Birim Kök Testleri.....	1
1.3. Birim Kök Test Sürecindeki Gelişmeler	6
1.4. Doğrusal Olmayan Birim Kök Testleri	7
1.4.1. SETAR Tipi Birim Kök Testleri	7
1.4.2. MTAR Tipi Birim Kök Testleri	8
1.4.3. STAR Tipi Birim Kök Testleri	9
1.4.3.1. LSTAR Tipi Birim Kök Testleri	10
1.4.3.2. ESTAR Tipi Birim Kök Testleri	11
1.4.3.2.1. Taylor Yaklaşımını Kullanan Birim Kök Testleri	11
1.4.3.2.2. Inf-t Yaklaşımını Kullanan Birim Kök Testleri.....	14

İKİNCİ BÖLÜM

HAR ÇIKARIMI VE UZUN DÖNEM VARYANS TAHMİNİ

2.1.	HAR Çıkarımı	19
2.2.	Uzun Dönem Varyans Tahmini	19
2.3.	Otoregresif Tahminci	20
2.4.	Kırılmış Tahminci	21
2.5.	Düzgünleştirilmiş Otokovaryans Tahmincisi.....	22
2.6.	Kernel Tahmincisi.....	22
2.7.	Kernel Türleri ve Band Genişliği Seçimi.....	24
2.7.1.	Newey-West/Bartlett ve Quadratik Spektral.....	26
2.7.2.	Sapma Azaltma ve Önbeyazlatma	28

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

ESTAR TİPİ BİRİM KÖK TESTİ İÇİN PARAMETRİK OLMAYAN DÜZELTME

3.1.	Parametrik Olmayan Doğrusal Olmayan Birim Kök Testi Önerisi	31
3.2.	Simülasyon Sonuçları.....	35
3.2.1.	Kritik Değerler	35
3.2.2.	Boyut Özellikleri.....	35
3.2.3.	Güç Özellikleri	36
SONUÇ.....		41
KAYNAKÇA.....		43
EKLER.....		50
ÖZGEÇMİŞ.....		51

TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 1.1: Dickey – Fuller Testlerinin Özeti.....	2
Tablo 3.1: <i>inf</i> – <i>tESTAR</i> – <i>R</i> testi için kritik değerler.....	35
Tablo 3.2: T=100, 200 için Boyut Özellikleri.....	35
Tablo 3.3: Ham Veri için Güç Özellikleri.....	38
Tablo 3.4: Ortalamadan Arındırılmış Veri için Güç Özellikleri.....	39
Tablo 3.5: Ortalamadan ve Trendten Arındırılmış Veri için Güç Özellikleri.....	40



ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1: HAC Tahmini için Kernel Fonksiyonlar 26



KISALTMALAR LİSTESİ

AR	Otoregresif
MA	Hareketli Ortalama
ARMA	Otoregresif Hareketli Ortalama
DF	Dickey Fuller
ADF	Genişletilmiş Dickey Fuller
PP	Phillips Perron
iid	Bağımsız ve Özdeş Dağılım
MAIC	Modifiye Edilmiş Akaike Bilgi Kriteri
AMSE	Asimptotik Ortalama Hata Kare
BIC	Bayesyen Bilgi Kriteri
TAR	Eşik Değerli Otoregresif
SETAR	Kendinden Uyarımlı Eşik Değerli Otoregresif
MTAR	Momentum Eşik Değerli Otoregresif
STAR	Yumuşak Geçişli Eşik Değerli Otoregresif
ESTAR	Üstel Yumuşak Geçişli Eşik Değerli Otoregresif
LSTAR	Lojistik Yumuşak Geçişli Eşik Değerli Otoregresif
AESTAR	Asimetrik Üstel Yumuşak Geçişli Eşik Değerli Otoregresif
EQ-TAR	Denge Eşik Değerli Otoregresif
EQ-LSTAR	Denge Lojistik Yumuşak Geçişli Eşik Değerli Otoregresif
B-TAR	Band Eşik Değerli Otoregresif
D-TAR	Double Eşik Değerli Otoregresif
ESTAR-M	Üstel Yumuşak Geçişli Eşik Değerli Otoregresif - Sıfırdan Farklı Ortalamaya Sahip
HAC	Değişen Varyans ve Otokorelasyon Tutarlı
HAR	Değişen Varyans ve Otokorelasyona Dirençli
LRV	Uzun Dönem Varyans
VAR	Vektör Otoregresif
VMA	Vektör Hareketli Ortalama

GİRİŞ

BİRİNCİ BÖLÜM

DURAĞANLIK KAVRAMI VE BİRİM KÖK TESTLERİ

1.1. Durağanlık Kavramı

Stokastik bir sürecin gözlemlenen değerlerine dayanarak süreç hakkında istatistiksel çıkarımlar yapmak için sürecin yapısı hakkında birtakım varsayımlar yapılması gerekmektedir. Bu varsayımların en önemlisi ise sürecin durağanlığıdır. Durağanlık katı ve zayıf durağanlık olarak iki farklı şekilde ele alınabilmektedir. $\{Y_t\}$ sürecinin $Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_n}$ ortak dağılımları t_1, t_2, \dots, t_n zamanının tüm noktaları için $Y_{t_1-k}, Y_{t_2-k}, \dots, Y_{t_n-k}$ 'nin ortak dağılımları gibi aynı olduğunda katı durağanlıktan bahsedilebilmektedir. $\{Y_t\}$ stokastik sürecinin zayıf (yada ikinci dereceden) durağan olması için ise ortalama fonksiyonunun zaman içerisinde sabit olması ve tüm t ve k 'lar için $\gamma_k = cov(Y_t, Y_{t-k})$ olması gerekmektedir (Cryer ve Chan, 2008:16).

1.2. Doğrusal Birim Kök Testleri

Bir zaman serisinin durağanlığının test edilmesinde kullanılan birim kök testlerinin başında Dickey Fuller (DF) birim kök testi gelmektedir. Bu test bilindik t testiyle aynı prensip üzerine inşa edilmiş olsa da birim kök temel hipotezi altında standart t dağılımına sahip değildir. Bu test τ ($\hat{\tau}$) olarak adlandırılmaktadır. Ayrıca normalleştirilmiş sapma olarak adlandırılan ($\hat{\delta}$) test yapay (pseudo) t istatistiğinin payının T katı olarak oluşturulur. İlgilenilen veri yaratma süreci şu şekilde tanımlanmaktadır:

$$\begin{aligned} y_t &= y_{t-1} + u_t, \quad (t = 2, \dots, T) \\ u_t &\sim N(0, \sigma^2) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Burada verilen veri yaratma süreci AR(1)'in $\rho = 1$ olan özel bir durumudur. Dolayısıyla genel formu:

$$y_t = \rho y_{t-1} + u_t, \quad (t = 2, \dots, T) \quad (1.2)$$

Olarak ifade edilebilmektedir. $\rho = 1$ olması durumunda birim kökün varlığından söz edilebilmektedir. Temel hipotez altında ρ 'nun en küçük kareler tahmini aşağı yönlü sapmalı ve sola çarpık bir dağılıma sahiptir (Kirchgassner & Wolters, 2007:166). Burada denklemin her iki yanından y_{t-1} çıkarılmasıyla ve deterministik bileşenlerin dahil edilmesiyle test denklemleri oluşturulmaktadır. Dickey ve Fuller (1981) bileşik hipotezleri test etmek için çeşitli F istatistiklerini önermektedir (Enders, 2014:207).

Tablo 1.1: Dickey – Fuller Testlerinin Özeti

Model	Hipotez	Test İstatistiği	
$\Delta y_t = \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t$	$\gamma = 0$	τ	(1.3)
$\Delta y_t = a_0 + \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t$	$\gamma = 0$	τ_μ	(1.4)
	$a_0 = \gamma = 0$	ϕ_1	
$\Delta y_t = a_0 + \gamma y_{t-1} + a_2 t + \varepsilon_t$	$\gamma = 0$	τ_τ	(1.5)
	$a_2 = \gamma = 0$	ϕ_3	
	$a_0 = \gamma = a_2 = 0$	ϕ_2	

Denklem (1.3)'te açıkça $\gamma = (\rho - 1)$ olduğu görülmektedir. Denklem (1.4), Denklem (1.3)'e sabit ya da kesme teriminin eklenmesi ile Denklem (1.5) ise Denklem (1.3)'e sabit ve doğrusal zaman trendinin eklenmesiyle oluşturulmaktadır. ϕ_i istatistikleri aşağıdaki şekilde oluşturulan F istatistiği ile sınılanmaktadır:

$$\phi_i = \frac{(SSR_r - SSR_{UR})/r}{SSR_{UR}/(T - k)} \quad (1.6)$$

Burada SSR_r ve SSR_{UR} sırasıyla kısıtlı ve kısıtsız modelin kalıntı kareler toplamını; r, kısıt sayısını; T, gözlem sayısını ve k, kısıtsız modeldeki tahmin edilen parametre sayısını ifade etmektedir.

Dickey ve Fuller (1979) iki tür test istatistiği önermektedir:

$$\hat{\delta} = T(\hat{\rho} - 1) \quad (1.7)$$

$$\hat{t} = \frac{\hat{\rho} - 1}{\hat{\delta}} \quad (1.8)$$

Denklem (1.7) ve (1.8) ile verilen test istatistikleri açık formda şu şekilde ifade edilebilmektedir:

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=1}^T y_t y_{t-1}}{\sum_{t=1}^T y_{t-1}^2} \quad (1.9)$$

$$\hat{\rho} - 1 = \frac{\sum_{t=1}^T y_{t-1} (y_t - y_{t-1})}{\sum_{t=1}^T y_{t-1}^2} \quad (1.10)$$

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=1}^T y_{t-1} \varepsilon_t}{\sum_{t=1}^T y_{t-1}^2} \quad (1.11)$$

$$\hat{\delta} = T(\hat{\rho} - 1) \quad (1.12)$$

$$= T \frac{\sum_{t=1}^T y_{t-1} \varepsilon_t}{\sum_{t=1}^T y_{t-1}^2} \quad (1.13)$$

$$= \frac{\sum_{t=1}^T y_{t-1} \varepsilon_t / T}{\sum_{t=1}^T y_{t-1}^2 / T^2} \quad (1.14)$$

Burada bazı sınırlayıcı varsayımlar altında $\hat{\delta}$ ve \hat{t} istatistiklerinin limit dağılımı bozulmayacak şekilde deterministik bileşenlerin eklenmesiyle oluşturulacak olan modeller türetilmektedir.

DF testinde kullanılan regresyonlarda örtük bir biçimde ε_t 'nin otokorelasyonlu olmadığı varsayılmaktadır. Dolayısıyla uzun dönem varyans (σ_{lr}^2), bilindik varyansa (σ^2) eşittir. Uygulamada bu durumla karşılaşmak pek mümkün değildir. $\sigma_{lr}^2 \neq \sigma^2$ durumu söz konusu olduğunda ya da hata terimleri otokorelasyonlu olduğu durumda \hat{t} tipi test istatistiğinin dağılımı etkilenmezken $\hat{\delta}$ tipi test istatistiğinin dağılımı bozucu etki yapmaktadır.

Gerçekte AR(p) sürecini izleyen y_t zaman serisi, AR(1) modeli ile ifade edilirse, hata terimleri otokorelasyonlu olmaktadır (Çil, 2018:293). Gecikmelerin sonsuz mertebeden olduğu en genel model:

$$\Delta y_t = \gamma y_{t-1} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t, \quad (1.15)$$

şeklinde ifade edilebilmektedir. Pratikte bu model tahmin edilemeyeceği için sonlu sayıda gecikme olacak biçimde kırılmaktadır. Modelin bu şekilde yeniden düzenlenmesi ile genişletilmiş Dickey Fuller test denklemleri aşağıdaki şekilde ifade edilebilmektedir:

$$\Delta y_t = \gamma y_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} a_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t, \quad (1.16)$$

$$\Delta y_t = a_0 + \gamma y_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} a_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t \quad (1.17)$$

$$\Delta y_t = a_0 + \gamma y_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} a_j \Delta y_{t-j} + \beta t + \varepsilon_t \quad (1.18)$$

Burada $a_j = -(\rho_{j+1} + \dots + \rho_p)$ 'dir. Birim kök temel hipotezin durağan alternatifine karşı test edilen hipotezler Tablo (1.1)'de verildiği şekildedir. Burada Δy_t 'nin kaç gecikmeye kadar dahil edileceğine model seçim kriterlerine göre veya bazı yüksek dereceli modellerden başlayarak sırayla önemsiz katsayıları ortadan kaldıran bir test prosedürü kullanılarak karar verilebilir (Lütkepohl, 2004:55).

Genişletilmiş Dickey Fuller (ADF) testinde, hata terimindeki ARMA yapısını modellemek için parametrik bir otoregresif yapı kullanılır. Phillips – Perron (PP), birim kök için kullanılan Dickey – Fuller regresyonuna Phillips (1987) çalışmasına dayanan parametrik olmayan bir yaklaşım önermiştir. PP testi, büyük bir negatif MA teriminden şüphelenildiğinde yaygın olarak kullanılmasına karşılık modifiye edilmiş Akaike bilgi kriteri (MAIC) kullanıldığında genellikle Dickey – Fuller testi kadar güçlü değildir (Enders, 2014:221). ADF yaklaşımı bağımlı hataların test istatistiğinin limit dağılımına göre değişmez olmaması durumuna çözüm olarak

otoregresif bir yapıyı benimsemektedir. PP testi ise hata terimlerinin dinamik yapısı hakkında ADF testinden daha az bir yapı varsaymaktadır ve uzun dönemli varyansın yarı parametrik bir tahminini kullanmaktadır (Patterson, 2011:237-238). Aşağıda üç temel denklem üzerinden Phillip (1987) ve Phillips-Perron (1988) tarafından ortaya koyulan sonuçlar verilmektedir:

$$y_t = ay_{t-1} + u_t, \quad (t = 2, \dots, T) \quad (1.19)$$

$$T(\hat{a} - 1) \Rightarrow \left(\int_0^1 W^2(r) dr \right)^{-1} \left(\int_0^1 W(r) dW(r) + \lambda \right) \quad (1.20)$$

$$y_t = \mu + ay_{t-1} + u_t, \quad (t = 2, \dots, T) \quad (1.21)$$

$$T(\bar{a} - 1) \Rightarrow \left(\int_0^1 \bar{W}^2(r) dr \right)^{-1} \left(\int_0^1 \bar{W}(r) dW(r) + \lambda \right) \quad (1.22)$$

$$y_t = \mu + \beta t + ay_{t-1} + u_t, \quad (t = 2, \dots, T) \quad (1.23)$$

$$T(a^* - 1) \Rightarrow \left(\int_0^1 W^{*2}(r) dr \right)^{-1} \left(\int_0^1 W^*(r) dW(r) + \lambda \right) \quad (1.24)$$

Burada $\lambda = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sigma_u^2}{\sigma_1^2} \right)$ ve $\sigma_u^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T E(u^2)$ 'dir. Eğer $\{u_t\}$ zayıf durağan ise σ_u^2 EKK kalıntıları kullanılarak tutarlı bir şekilde tahmin edilebilmektedir. Denklem (1.19) için bu tahmin $\hat{\sigma}_u^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{u}_t^2$ şeklindedir. Uzun dönem varyansın (σ_1^2) tahmini ise:

$$\hat{\sigma}_1^2 = n^{-1} \sum_{t=1}^n \hat{u}_t^2 + \frac{2}{n} \sum_{s=1}^l w_{sl} \sum_{t=s+1}^n \hat{u}_t \hat{u}_{t-s} \quad (1.25)$$

Kırpma (truncation) parametresi (l) otokovaryansların dahil edildiği maksimum dereceyi ifade etmekte olup, T örnek boyutuyla birlikte l 'nin sonsuza gitmesi $-T$ kadar hızlı değil- gerekmektedir. w_{sl} bu varyans tahmin edicisinin yalnızca

tutarlılığını değil, aynı zamanda negatif olmamasını da sağlayan ağırlıklardır¹. Bartlett (1948)'e dayanan bu ağırlıklar şu şekilde ifade edilmektedir:

$$w_{sl} = 1 - \frac{s}{l+1}, \quad s = 1, \dots, l \quad (1.26)$$

Denklem (1.19), (1.21) ve (1.23) için Phillips (1987) ve Phillips-Perron (1988) tarafından önerilen test istatistikleri sırasıyla şu şekilde ifade edilmektedir:

$$Z(\hat{a}) = T(\hat{a} - 1) - (T^{-2} \sum_{t=1}^T y_t^2)^{-1} \hat{\delta} \quad (1.27)$$

$$Z(\bar{a}) = T(\bar{a} - 1) - (T^{-2} \sum_{t=1}^T \bar{y}_t^2)^{-1} \bar{\delta} \quad (1.28)$$

$$Z(a^*) = T(a^* - 1) - (T^{-2} \sum_{t=1}^T y_t^{*2})^{-1} \delta^* \quad (1.29)$$

Burada $\hat{\delta} = \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_1^2 - \hat{\sigma}_u^2)$; $\bar{\delta}$ ve δ^* ise $\hat{\delta}$ 'e benzer şekilde hesaplanan, sırayla sabitli model ve sabitli trendli modelden elde edilen kalıntıları ifade etmektedir. Düzeltilmiş test istatistikleri Dickey – Fuller dağılımına sahiptir (Maddala ve Kim, 1999:79).

1.3. Birim Kök Test Sürecindeki Gelişmeler

Zaman serilerini analizinde bir değişkenin durağanlık özelliklerinin incelenmesinde birim kök testleri üzerine kapsamlı bir literatür bulunmaktadır. Bu testlerin pek çoğu birbiri üzerine inşa edilen veya eksik bir yönü üzerinden alternatifler sunan yapılara sahiptirler. Diğer yandan farklı bakış açılarına göre oldukça çeşitli yönlerden birbirine rakip yöntem ve testler geliştirilmektedir. Dolayısıyla birim kök literatürünü tek bir bakış açısına göre ya da kronolojik olarak sınıflandırmak yerine belirli bir noktadan hareket ederek tartışmak, sınıflandırmak gerekmektedir. Bu bakış açısıyla da tezin kapsamının sınırları da belirlenmiş olacaktır.

Dickey ve Fuller (1979) ve Dickey ve Fuller (1981)'in devrim niteliğinde çalışmalarının ardından yaklaşık yarım yüzyıl geçmiştir. Ancak hala temelde aynı

¹ Gecikme penceresi (lag window) olarak da bilinmektedir.

sorunu farklı biçimlerde ele alarak literatüre katkı sunan testler geliştirilmeye devam edilmektedir. Durağan olmamanın iki önemli formu birim kök ve yapısal kırılmalardır. Her ikisi de veride kalıcı değişikliğe neden olmaktadır (Hendry, 2009: 17). Değişim endeksi zaman olarak ele alındığında birim kök testleri yapısal kırılma çerçevesinde şekillenmektedir (Perron, 1989; Zivot ve Andrews, 1992; Perron, 1997). Ancak değişim endeksinin zamandan bağımsız gözlemler itibariyle belirlendiği bir durum söz konusu olduğunda birim kök testleri eşik değer kavramı etrafında kümelenmektedir (Terasvirta, 1994; Enders ve Granger, 1998; Caner ve Hansen, 2001). Her iki durumda da zamanda ya da rejimde bir ayrışma olmasından kaynaklı farklılaşma olmaktadır. Yapısal kırılma literatüründe bu farklılaşma kukla değişkenler ile, eşik değer literatüründe ise bir geçiş fonksiyonu ile sağlanmaktadır.

1.4. Doğrusal Olmayan Birim Kök Testleri

Doğrusal olmayan modeller ve bu modellerin birim kök çerçevesinde kullanılması oldukça yaygındır. Bu modeller ortalamada ve varyansta doğrusal olmayan modeller olarak iki ana başlık altında sınıflandırılabilir. ² Ortalamada doğrusal olmayan yapıdaki birim kök testlerinde doğrusal olmamanın kaynağını rejim değişim modelleri kapsamında değerlendirildiğinde SETAR, MTAR ve STAR tipi testler öne çıkmaktadır.

1.4.1. SETAR Tipi Birim Kök Testleri

Doğrusal olmayan zaman serileri analizinde sıklıkla kullanılan SETAR modelleri Tong (1983) çalışmasıyla literatüre katılmış olup rejim değişimlerini kendi gecikme parametreleri üzerinden araştırmaktadır (Bildirici vd., 2010:146). İki rejimli bir TAR modelini Hansen (1997) şu şekilde ifade etmektedir:

$$y_t = (a_0 + a_1 y_{t-1} + \dots + a_p y_{t-p}) 1(q_{t-1} \leq \gamma) + (\beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \dots + \beta_p y_{t-p}) 1(q_{t-1} > \gamma) + e_t \quad (1.30)$$

² Bu modeller hakkında detaylı bir inceleme için Gürış, B. (2008)'e bakınız.

Denklem (1.30)'da $1(\cdot)$ gösterge fonksiyonu ve $q_{t-1} = q(y_{t-1}, \dots, y_{t-p})$ verinin bilinen bir fonksiyonudur. γ eşik parametresi olup $q_{t-1} \leq \gamma$ olduğunda a_j , $q_{t-1} > \gamma$ olduğunda β_j otoregresif parametreleri geçerli olmaktadır. Böylece süreç gecikmeli değerin konumuna bağlı olarak iki doğrusal mekanizma arasında geçiş yapmaktadır (Cramer ve Chan, 2008:396).

$\theta = (a' \beta)'$ olmak üzere Denklem (1.30) kapalı formda $y_t = x_t(\gamma)' \theta + e_t$ olarak ifade edildiğinde eşik parametresi ardışık bir EKK yöntemi ile $\hat{\gamma} = \underset{\gamma \in \Gamma}{\operatorname{argmin}} \hat{\sigma}_n^2(\gamma)$ olacak şekilde seçilmektedir. Burada $\hat{\theta}(\gamma) = (\sum_{t=1}^n x_t(\gamma)x_t(\gamma)')^{-1}(\sum_{t=1}^n x_t(\gamma)y_t)$ ve $\hat{e}_t(\gamma) = y_t - x_t(\gamma)'\hat{\theta}(\gamma)$ olmak üzere kalıntı varyansı $\hat{\sigma}_n^2(\gamma) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{e}_t(\gamma)^2$ minimum yapan değer uygun eşik değer olarak seçilmektedir. Bu model yapısında q_{t-1} 'in bağımlı değişken y_t 'nin gecikmeli terimleri arasından seçilmesi model yapısının SETAR tipi olmasını ifade etmektedir. SETAR tipi birim kök sınamalarında kullanılan testlerden biri olan Caner ve Hansen (2001) çalışmalarında doğrusal olmama ve durağanlık sınamaları eşanlı olarak gerçekleştirilmektedir.

1.4.2. MTAR Tipi Birim Kök Testleri

SETAR tipi birim kök testlerine benzer bir yaklaşım ile alternatif hipotez altında TAR modeli Enders ve Granger (1998) şu şekilde tanımlamaktadır:

$$\Delta y_t = I_t \rho_1 [y_{t-1} - a_0] + (1 - I_t) \rho_2 [y_{t-1} - a_0] + \varepsilon_t \quad (1.31)$$

Burada I_t gösterge fonksiyonu olup şu şekilde tanımlanmaktadır:

$$I_t = \begin{cases} 1, & y_{t-1} \geq a_0 \\ 0, & y_{t-1} < a_0 \end{cases} \quad (1.32)$$

y_{t-1} 'deki bir önceki döneme bağlı olan bozulmaya izin veren alternatif bir tanımlama ise:

$$I_t = \begin{cases} 1, & \Delta y_{t-1} \geq a_0 \\ 0, & \Delta y_{t-1} < a_0 \end{cases} \quad (1.33)$$

Şeklinde oluşturulmakta olup, bu model yapısı Enders ve Granger (1998) birim kök testinde (momentum eşik değerli otogresif) M-TAR model olarak adlandırılmıştır. Burada a_0 eşik değer olup ρ_1 ve ρ_2 birlikte tahmin edilmektedir. Tahmin edilen eşik değerle birlikte $H_0: \rho_1 = \rho_2 = 0$ birim kök temel hipotezi F istatistiği kullanılarak test edilmektedir (Zhang, 2016:4530). Test istatistiğinin dağılımı standart olmadığı için kritik değerler Enders (2001)'de verilen değerler ile karşılaştırılmaktadır.

1.4.3. STAR Tipi Birim Kök Testleri

SETAR modelin bir eleştirisi koşullu ortalama denkleminin sürekli olmamasıdır. Bu eleştiriye yanıt olarak düzgün geçişli TAR (STAR) model önerilmektedir (Tsay, 2002:134). Tek değişkenli STAR model iki rejimli TAR modelinin özel bir durumudur (Lütkepohl, 2004:223). TAR ve STAR modelleri arasındaki temel fark rejimler arasında geçiş mekanizmasının yapısıdır. TAR modellerde gösterge fonksiyonu “0” ve “1” değerlerini alırken STAR modellerde bu aralıktaki herhangi bir değeri alabilmektedir. En basit haliyle STAR model yapısı aşağıdaki şekilde ifade edilebilmektedir:

$$\begin{aligned} y_t &= a_1 y_{t-1} + \gamma_1 y_{t-1} \Theta(y_{t-d}) + \varepsilon_t & t = 1, \dots, T & \quad (1.34) \\ &= [(a_1 + \gamma_1 \Theta(\theta; y_{t-d}))] y_{t-1} + \varepsilon_t \end{aligned}$$

Basitlik açısından $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_\varepsilon^2)$ olduğu varsayılmaktadır. Denklem ikinci parçası “ $\Theta(\dots)$ ” bir geçiş fonksiyonu olarak ifade edilen doğrusal olmayan bileşendir. Bu ifade olmadığında model AR(1) sürecini göstermektedir³. Geçiş fonksiyonu “ y_{t-d} ” ve herhangi bir parametreye göre türevlenebilir⁴. Otogresif terimin ortak paranteze alınması ile elde edilen genel otogresif katsayı “ $a_1 + \gamma_1 \Theta(y_{t-d})$ ” elde edilmektedir. Burada $0 \leq \Theta(y_{t-d}) \leq 1$ aralığında yer aldığındaki genel katsayı olarak ifade edilen otogresif terim $[a_1, a_1 + \gamma_1]$ aralığında olacaktır. Bu durumda iç ve dış olarak ifade edilen iki rejim vardır. $\Theta(y_{t-d}) = 0$ durumunda model iç rejimdedir ve otogresif katsayısı a_1 'dir. $\Theta(y_{t-d}) = 1$ olduğunda ise model dış rejimdedir ve

³ Bu model yapısı AR(p) sürecine genişletilebilir (Bkz. Tsay & Chen, 2019:92)

⁴ y_{t-d} yerine model dışındaki bir değişkenin fonksiyonu olarak da tanımlanabilmektedir.

otoregresif katsayısı $a_1 + \gamma_1$ 'dir. $a_1 = 1$ olması durumunda ise iç rejimde birim kökün varlığından söz edilebilmektedir (Patterson, 2012:242).

Eşik değerli otoregresif modellerde doğrusal olmamayı sağlayan geçiş fonksiyonu kesikli olmasının yanı sıra düzgün (smooth) geçişli de olabilmektedir. Sıklıkla kullanılan iki farklı geçiş fonksiyonu (ESTAR ve LSTAR) bulunmaktadır. ESTAR model $(y_{t-1} - c)^2$ kuadratik uzaklığın üstel dönüşümüne, LSTAR model ise $(y_{t-1} - c)$ uzaklığın lojistik dönüşümüne dayanmaktadır.

1.4.3.1. LSTAR Tipi Birim Kök Testleri

STAR tipi birim kök testlerinde doğrusal olmayan yapıyı veren yapılardan biri olarak lojistik geçiş fonksiyonu kullanılmaktadır. En basit haliyle LSTAR(1) şu şekilde ifade edilebilmektedir:

$$y_t = a_1 y_{t-1} + \gamma_1 y_{t-1} \Theta(y_{t-d}) + \varepsilon_t \quad t = 1, \dots, T \quad (1.35)$$

$\Theta(y_{t-d}) = [(1 + \exp(-\psi(y_{t-d} - c)))^{-1}]$ olmak üzere $\psi > 0$ tanımlayıcı bir kısıttır (Lütkepohl, 2004:223). Burada üç farklı rejimden söz edilebilmektedir. Alt rejim:

$$y_t = a_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \quad y_{t-d} - c \rightarrow -\infty; \psi(-\infty) = 0 \quad (1.36)$$

Orta rejim:

$$y_t = a_1 y_{t-1} + 0.5 \gamma_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \quad y_{t-d} = c; \psi(0) = 0.5 \quad (1.37)$$

Üst rejim:

$$y_t = a_1 y_{t-1} + 0.5 \gamma_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \quad y_{t-d} - c \rightarrow +\infty; \psi(\infty) = 1 \quad (1.38)$$

$d = 1$ olan ve alt rejimde birim köklü ancak üst rejimde daha az kalıcılığa sahip bir LSTAR modelinde, $a_1 = 1$, $\gamma_1 < 0$ ve $1 + \gamma_1 < 1$ olacaktır. Bu çerçevede sapmalar $(y_{t-d} - c)$ çevrimin derinliğinin bir ölçüsüdür (Patterson, 2012:262).

1.4.3.2. ESTAR Tipi Birim Kök Testleri

Doğrusal olmayan modeller ailesine ait ESTAR fonksiyonel formunun ilgi çekici üç özelliğinden bahsedilebilmektedir. İlki finansal ve emtia piyasalarındaki denge ve arbitraj koşullarındaki sapmaların doğrusal olmayan doğasının modellenmesinde oldukça kullanışlıdır. İkincisi çoklu denge dinamiklerini karakterize edebilmektedir ve son olarak iktisadi ve finansal değişkenlerin karmaşık, kaotik ve dinamik yapısı için uygundur (Pavlidis vd., 2020:573-574).

1.4.3.2.1. Taylor Yaklaşımını Kullanan Birim Kök Testleri

ESTAR tipi birim kök testleri arasında Kapetanios vd. (2003), Sollis (2009) ve Kruse (2011) temel hipotez altındaki tanımlamama problemine çözüm olarak Taylor yaklaşımıyla test denkleminde yaklaşık polinomial bir fonksiyon elde etmektedirler. Kapetanios vd. (2003) tek değişkenli birinci derece otoregresif düzgün geçiş (STAR(1)) modelini aşağıdaki şekilde tanımlamaktadır:

$$y_t = \beta y_{t-1} + \gamma y_{t-1} \Theta(\theta; y_{t-d}) + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T \quad (1.39)$$

Burada, β ve γ bilinmeyen parametreler ve $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$ hata terimidir. STAR modellerde bahsedildiği gibi, burada ele alınan geçiş fonksiyonu Denklem (1.40)'ta ifade edildiği gibi üstel formdadır:

$$\Theta(\theta; y_{t-d}) = 1 - \exp(-\theta y_{t-d}^2) \quad (1.40)$$

Burada $\theta \geq 0$ ve geçiş değişkeninde $d \geq 1$ olduğu varsayılmaktadır. Üstel geçiş fonksiyonunun görüntü kümesi $\Theta: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ olmak üzere, $\Theta(0) = 0$ ve $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \Theta(x) = 1$ 'dir. ESTAR yapının Denklem (1.39)'da yerine koyulduktan sonra eşitliğin iki tarafından y_{t-1} çıkarılarak:

$$\Delta y_t = \phi y_{t-1} + \gamma y_{t-1} [1 - \exp(-\theta y_{t-d}^2)] + \varepsilon_t \quad (1.41)$$

Şeklindeki model yapısına ulaşılmaktadır. Burada $\phi = \beta - 1$ şeklindedir. θ 'nın pozitif olması, ortalamaya dönüş hızının belirlemektedir. Bununla birlikte

sürecin genel olarak durağan olabilmesi için $\gamma < 0$ ve $\phi + \gamma < 0$ olmalıdır. Bu koşullar altında, süreç y_{t-d}^2 'nin küçük değerleri için orta rejimde birim kök veya patlayan kök davranışı sergileyebilir, ancak y_{t-d}^2 'nin büyük değerleri için tutarlı dinamiklere sahiptir. Balke ve Fomby (1997) ve Micheal vd. (1997) çalışmalarından hareketle, Denklem (1.41)'de ifade edilen modelde $\phi = 0$ olarak alınmaktadır. Bu da y_t 'nin orta rejimde birim kök sürecini takip ettiği anlamına gelmektedir. $\phi = 0$ ve $\theta = 0$ olan doğrusal birim kökün özel bir durumunu içeren sıfır hipotezi ele alınmaktadır. Alternatif hipotez altında ($\phi = 0$ ancak $\theta > 0$) y_t , $-2 < \gamma < 0$ olduğu varsayılan bir doğrusal olmayan ancak küresel durağan bir süreci izlemektedir. Gecikme parametresi $d=1$ ve $\phi = 0$ olarak alındığından Denklem (1.41)'deki ESTAR modeli aşağıdaki gibi olmaktadır:

$$\Delta y_t = \gamma y_{t-1} [1 - \exp(-\theta y_{t-1}^2)] + \varepsilon_t \quad (1.42)$$

Bu durumda, gerçek sürecin durağan ancak doğrusal olmadığı durumda, ADF testinin gücü azalacaktır. Bu sebeple θ parametresine bağlı olan bir test istatistiği oluşturulmuştur. Böylece KSS (Kapetanios, Shin ve Snell, 2003) testinde hipotezler,

$$\begin{aligned} H_0: \theta &= 0 \\ H_1: \theta &> 0 \end{aligned} \quad (1.43)$$

Şeklinde dir. Burada, γ parametresi sıfır hipotezi altında belirlenemeyeceği için doğrudan $H_0: \theta = 0$ şeklinde verilen sıfır hipotezi doğrudan test edilemeyecektir. Bu durumda ESTAR modeli 1. dereceden Taylor açılımı kullanılarak Denklem (1.44)'teki gibi yazılmaktadır.

$$\Delta y_t = \delta y_{t-1}^3 + hata \quad (1.44)$$

Böylelikle hipotezler, $H_0: \delta = 0$, $H_1: \delta < 0$ şekline dönüşürken KSS test istatistiği Denklem (1.45)'te ifade edildiği gibidir.

$$t_{NL} = \frac{\hat{\delta}}{se(\hat{\delta})} \quad (1.45)$$

Sollis (2009) çalışmasında ise, KSS testindeki simetriklik varsayımını esneterek, genişletilmiş ESTAR modeli önermiştir. Bu genişletilmiş ESTAR modelinde, birim kök sıfır hipotezine karşılık alternatif hipotez altında doğrusal olmayan simetrik ve asimetrik durağan ESTAR sürecine izin veren yeni bir birim kök testi ortaya konulmuştur. Sıfır hipotezi reddedildiğinde, önerilen spresifikasyon aynı zamanda F testi kullanılarak simetrik ve asimetrik ESTAR süreci arasındaki farkın tespit edilmesi için de kullanılabilir. AESTAR (asimetrik ESTAR) model Denklem (1.46)'da verildiği gibidir.

$$\Delta y_t = G_t(\gamma_1, y_{t-1})\{S_t(\gamma_2, y_{t-1})\rho_1 + (1 - S_t(\gamma_2, y_{t-1}))\rho_2\}y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (1.46)$$

$$G_t(\gamma_1, y_{t-1}) = 1 - \exp(-\gamma_1(y_{t-1}^2)), \quad \gamma_1 \geq 0 \quad (1.47)$$

$$S_t(\gamma_2, y_{t-1}) = [1 - \exp(-\gamma_2 y_{t-1})]^{-1} \quad \gamma_2 \geq 0 \quad (1.48)$$

Burada ε_t , sıfır ortalama ve sabit varyans ile bağımsız ve benzer dağılmaktadır. Burada sıfır hipotezi $H_0: \gamma_1 = 0$ şeklindedir. Ancak γ_2, ρ_1 ve ρ_2 parametreleri sıfır hipotezi altından tanımlı olmadığından, test istatistiğinin hesaplanmasında geleneksel yöntemler kullanılamamaktadır. KSS testinde $\gamma = 0$ etrafında birinci dereceden Taylor açılımına benzer süreç uygulanmaktadır. $G_t(\gamma_1, y_{t-1})$ ifadesi $\gamma_1 = 0$ etrafında birinci dereceden Taylor açılımı kullanılarak denklem polinomial hale getirilmeye çalışılmaktadır. Denklem (1.46) ile verilen AESTAR modeline Taylor açılımı uygulandığında elde edilen yardımcı modelde, tanımlı olmayan parametre sorununun devam edildiği görülmektedir. Ardından lojistik fonksiyon ($S_t(\gamma_2, y_{t-1})$) $\gamma_2 = 0$ etrafında Taylor açılımı kullanılarak nihai test denklemi aşağıdaki şekilde elde edilmektedir:

$$\Delta y_t = \phi_1 y_{t-1}^3 + \phi_2 y_{t-1}^4 + \sum_{i=1}^k k_i \Delta y_{t-i} + \eta_t \quad (1.49)$$

Burada temel hipotez $H_0: \phi_1 = \phi_2 = 0$ olarak kurulmaktadır. Birim kök hipotezi red edilirse (alternatif simetrik veya asimetrik ESTAR doğrusal olmama),

daha sonra simetrik ESTAR doğrusal olmamaya karşı asimetrik ESTAR doğrusal olmama alternatifi ($H_0: \phi_2 = 0$ a karşı $H_0: \phi_2 \neq 0$) standart F, t yada LM testi ile sınanabilmektedir.

1.4.3.2.2. Inf-t Yaklaşımını Kullanan Birim Kök Testleri

Kılıç (2011) çalışmasında, bazı varsayımlar altında katı (strict) durağan ve ergodik koşulları bilinen bir ESTAR sürecine dayanan yeni bir birim kök testi önermiştir. Test istatistiğinin asimptotik dağılımı hem temel hipotez hem de alternatif hipotez altında üretilmiştir. Bununla birlikte Kılıç (2011) tarafından önerilen birim kök testinin sonlu örnek performansı incelendiğinde, KSS (2003), Park ve Shintani (2005) birim kök testlerine göre daha iyi performans sergilediği sonucuna ulaşılmıştır. Ele alınan ESTAR model Denklem (1.50)'deki gibidir:

$$\Delta y_t = \phi y_{t-1} F(\gamma, z_t) + u_t, \quad t = 1, \dots, T \quad (1.50)$$

Burada u_t durağan hata terimi, $F(\gamma, z_t) = 1 - \exp(-\gamma z_t^2)$, ϕ ve γ bilinmeyen parametreler, $z_t = \Delta y_{t-d}$ ($d \in 1, \dots, d^{maks}$) ise geçiş değişkenidir. Geçiş parametresini ifade eden γ , iki rejim arasındaki geçiş hızını belirlemektedir. Denklem (1.50)'de verilen ESTAR modeli, $\gamma = 0$ için Denklem (1.51)'deki rassal yürüyüş sürecine dönüşmektedir.

$$y_t = y_{t-1} + u_t \quad (1.51)$$

Dış rejim ise $\gamma \rightarrow \infty$ iken elde edilir ve yine Denklem (1.52) ile ifade edilen AR(1) modeline karşılık gelmektedir.

$$y_t = (1 + \phi)y_{t-1} + u_t \quad (1.52)$$

KSS (2003) ve Park ve Shintani (2005) çalışmalarındaki gibi, modelde ilişki hataların doğrusal olduğu varsayımı yapılmaktadır. Bu varsayım altında Denklem

(1.50)'ye bağımlı değişkenin gecikmeli değerleri dahil edilerek, Denklem (1.53) elde edilmektedir.

$$\Delta y_t = \sum_{i=1}^p \delta_i \Delta y_{t-i} + \phi y_{t-1} (1 - \exp(-\gamma z_t^2)) + u_t \quad (1.53)$$

Burada $\delta(L) = 1 - \sum_{j=1}^p \delta_j L^j$ için birim çember dışındaki tüm kökleri içerdiği varsayımı yapılmaktadır.

Test sürecinde modeldeki gecikme parametresi $d=1$ olarak ayarlanmıştır. γ parametresi bilinmediği için, $H_0: \phi = 0$ temel hipotezi altında γ tanımlı değildir. Kılıç (2011) bu sorunu çözebilmek için, geçiş değişkeni z_t 'nin örneklem standart sapması ile normalize edilmiş γ değerlerinin sabit bir parametre uzayında en düşük olasılıklı t-değerinin bulunmasını önermiştir. Böylelikle test istatistiği aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$t_{ESTAR} = \inf_{\gamma \in \Gamma_T} \hat{t}_{\phi=0}(\gamma) = \inf_{\gamma \in \Gamma_T} \frac{\hat{\phi}(\gamma)}{\hat{se}(\hat{\phi}(\gamma))} \quad (1.54)$$

Burada $\Gamma_T = [\underline{\gamma}_T, \bar{\gamma}_T] = \left[\frac{1}{100s_{zT}}, \frac{100}{s_{zT}} \right] \in \mathbb{R}$ şeklindedir ve s_{zT}, z_t 'nin örneklem standart sapmasıdır.

Shintani (2013) geliştirmiş olduğu ESTAR tipi birim kök testinde geçiş fonksiyonunda asimetrik yapıya izin vermektedir. ESTAR modelinin asimetrik versiyonu basit STAR tipi modelden hareketle şu şekilde ifade edilmektedir:

$$y_t = \rho_1 y_{t-1} \pi(z_{t-d}, \theta) + \rho_2 y_{t-1} (1 - \pi(z_{t-d}, \theta)) + \varepsilon_t \quad (1.55)$$

Burada geçiş fonksiyonu $0 \leq \pi(z_{t-d}, \theta) \leq 1$ olup U şeklinde sürekli bir fonksiyondur. z_{t-d} geçiş değişkeni, ε_t ise beyaz gürültüdür. Anderson (1997) tarafından önerilen yapıya dayanarak asimetrik geçiş fonksiyonu şu şekilde tanımlanmaktadır:

$$\pi(z_{t-d}, \theta) = 1 - \exp \{ -\kappa^2 z_{t-d}^2 \times h(z_{t-d}, \gamma) \} \quad (1.56)$$

$$h(z_{t-d}, \gamma) = 0.5 + [1 + \exp(\gamma z_{t-d})]^{-1} \quad (1.57)$$

Burada $\theta = (\kappa, \gamma)$, $\kappa \geq 0$ ve $\gamma \in R$. Lojistik geçiş fonksiyonundaki γ parametresi asimetrinin derecesini ayarlamaktadır. Burada yalnızca temel hipotez altında tanımlanan bozucu parametreden kaynaklanan bir tahmin problemi söz konusudur. KSS (2003) birim köke karşılık simetrik ESTAR modeli test ederken temel hipotezde tanımlanamayan parametre probleminden dolayı Taylor açılımı ile fonksiyona yaklaşık bir polinomial denklem elde etmişlerdir. Park ve Shintani (2005) ise bu durumu ekstremum tipi bir test istatistiği ile çözmeye çalışmaktadır. θ 'daki parametrelerin seçimi aşağıdaki regresyon denklemi yoluyla yapılmaktadır:

$$y_t = \lambda(\theta)w_t(\theta) + \sum_{j=1}^k \phi_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t \quad (1.58)$$

$$w_t(\theta) = y_{t-1} \pi(z_{t-d}, \theta) = y_{t-1} [1 - \exp\{-\kappa^2 y_{t-1}^2\}], \quad \theta = \kappa \quad (1.59)$$

$H_0: \lambda = 0$ karşı $H_0: \lambda < 0$ için test istatistiği θ 'nın tüm mümkün değerleri için t istatistiğinin minimum yapan değer olarak ayarlanmaktadır. Dolayısıyla test istatistiği:

$$\inf t_E = \inf_{\theta \in \Theta_n} \frac{\hat{\lambda}(\theta)}{s(\hat{\lambda}(\theta))} \quad (1.60)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Arama süreci (grid) Park ve Shintani (2005) benzer şekilde $\kappa \in [0.1, 10] * \left(\frac{\sum y_{t-1}^2}{n}\right)^{-0.5}$ aralığında gerçekleşmektedir. Birim köke karşılık asimetrik ESTAR modeli aşağıdaki denklem üzerinden şu şekilde ifade edilebilmektedir:

$$\Delta y_t = \lambda y_{t-1} [1 - \exp\{-\kappa^2 y_{t-1}^2 * \{0.5 + [1 + \exp(\gamma z_{t-d})]^{-1}\}\}] + \varepsilon_t \quad (1.61)$$

Burada $\lambda = \rho - 1$ 'dir. Birim köke karşılık asimetrik ESTAR modelini Taylor yaklaşımını kullanarak tahmin eden Sollis (2009)'ten farklı olarak burada da ekstremum tipi test istatistiği kullanılmaktadır.

$$inf t_{AE} = inf_{\theta \in \Theta_n} \frac{\hat{\lambda}(\theta)}{s(\hat{\lambda}(\theta))} \quad (1.62)$$

Arama süreci simetrik duruma benzer şekilde gerçekleştirilmektedir. $\theta = (\kappa, \gamma) \in \Theta_n$ olmak üzere $\Theta^* = \Theta_\kappa * \Theta_\gamma$ ve $\Theta_\kappa = [0.1, 10] * \left(\frac{\sum y_{t-1}^2}{n}\right)^{-0.5}$, $\Theta_\gamma = [10, 10] * \left(\frac{\sum y_{t-1}^2}{n}\right)^{-0.5}$ aralığındadır (Shintani, 2013:4-10).

Park ve Shintani (2016) birim kök temel hipotezine karşılık çeşitli geçiş fonksiyonları kullanarak bir test geliştirmiştir. Alternatif hipotez altında üç tür geçiş fonksiyonundan bahsedilmektedir: Denge-Eşik Değerli Otoregresif (EQ-TAR) Model, Üstel Düzgün Geçişli Otoregresif Model (ESTAR) ve Denge – Lojistik Düzgün Geçişli Otoregresif Model (EQ-LSTAR). Ayrıca bu fonksiyonların çeşitli versiyonları da (B-TAR, D-TAR, ESTAR-M, LSTAR) incelenmiştir.⁵

EQ-TAR ve ESTAR modelleri için Denklem (1.55)'e $\rho_2 = 1$ kısıtının uygulanmasıyla:

$$\Delta y_t = \lambda y_{t-1} \pi(z_{t-d}, \theta) + \varepsilon_t \quad (1.63)$$

Şeklindeki model spesifikasyonuna ulaşılmaktadır. Burada $\lambda = \rho_1 - 1$ 'dir ve $-1 < \lambda < 0$ olduğunda belirli bir $\theta = \kappa$ değeriyle Denklem (1.63) düzeltme hızına bağlı bir TAR modeli ifade etmektedir. Burada ilgilenilen teste ait hipotezler: $H_0: \lambda = 0$, $H_0: \lambda < 0$ şeklinde oluşturulmaktadır. Ancak $\lambda = 0$ ise, uzun dönem dengeye yönelik hiçbir düzeltmeyi temsil etmeyen, birim köke sahip tek bir rejim olacaktır. Dolayısıyla birim kök temel hipotezi altında tanımlı olmayan θ parametresine göre extremum tipi test istatistiğine dayanan bir hipotez kurulması önerilmektedir. Test istatistiğinin oluşturulması için θ 'nın tüm mümkün değerleri için aşağıdaki model tahmin edilmektedir:

$$\Delta y_t = \lambda w_t(\theta) + \varepsilon_t, \quad w_t(\theta) = y_{t-1} \pi(z_{t-d}, \theta) \quad (1.64)$$

⁵ Bu tez kapsamında yalnızca EQ-TAR ve ESTAR geçiş fonksiyonları açıklanmıştır.

Denklem (1.62)'de verildiği gibi test istatistiği mümkün tüm θ değerleri için $\hat{\lambda}_n(\theta)$ 'nin en küçük kareler tahmincisinin t istatistiğini minimum yapacak şekilde oluşturulmaktadır.

Denklem (1.61)'de verilen genel duruma ilişkin EQ-TAR ve ESTAR model çerçevesinde geçiş fonksiyonları sırasıyla Denklem (1.65) ve (1.66)'de verilmektedir:

$$\pi(y_{t-d}, \theta) = 1\{|y_{t-d}| \geq \mu\} = 1\left\{\left|\frac{y_{t-d}}{\sqrt{n}}\right| \geq \frac{\mu}{\sqrt{n}}\right\} = \pi\left(\frac{y_{t-d}}{\sqrt{n}}, \theta_n\right) \quad (1.65)$$

$$\pi(y_{t-d}, \theta) = 1 - \exp\{-\kappa^2 y_{t-d}^2\} \quad (1.66)$$

$$\begin{aligned} &= 1 - \exp\left\{-\left(\sqrt{n}\kappa\right)^2 \left(\frac{y_{t-d}}{\sqrt{n}}\right)^2\right\} \\ &= \pi\left(\frac{y_{t-d}}{\sqrt{n}}, \theta_n\right) \end{aligned}$$

EQ-TAR için $\theta_n = \mu_n = \mu/\sqrt{n}$, ESTAR için $\theta_n = \kappa_n = \sqrt{n}\kappa$ 'dir. Parametre arama süreci için kullanılan aralıklar EQ-TAR modelinde Caner ve Hansen (2001)'in önermiş olduğu şekilde verinin %15 - %85'lik kısımlarını kapsamaktadır. ESTAR modeli için ise $\Theta_n = [0.01, 100] * \left(\frac{\sum(y_t - \bar{y})^2}{n}\right)^{-0.5}$ aralığını kapsamaktadır.

İKİNCİ BÖLÜM

HAR ÇIKARIMI VE UZUN DÖNEM VARYANS TAHMİNİ

2.1. HAR Çıkarımı

Otokorelasyona dirençli çıkarımlar verilerin uzun dönem varyansının (LRV) tutarlı bir şekilde tahmin edilmesine dayanmaktadır. Regresyon bağlamında, nonparametrik kernel yönteme dayanan böyle bir tahminci genellikle heteroskedasite ve otokorelasyon tutarlı (HAC) tahminci olarak adlandırılır ve bilinmeyen formda serisel korelasyonun varlığında standart hataları veya Wald tipi test istatistiklerini oluşturmak için sıklıkla kullanılır (Cai ve Shintani, 2006). Bir HAC kovaryans matrisinin oluşturulmasındaki kilit adım, kalıntı vektörünün sıfır frekansındaki spektral yoğunluk matrisini tahmin etmektir (Den Haan ve Levin, 1997:2). Andrews (1991)'in çalışması nedeniyle, bu sınıftaki tahmincilere uzun süredir heteroskedasite ve otokorelasyon tutarlı (HAC) kovaryans matrisi tahmin edicileri adı verilmektedir. Ancak, tutarsız kernel düzgünleştirilmiş tahmin ediciler, iyi tanımlanmış test istatistikleri sağlayabilmektedir (Hirukawa, 2023:36). Dolayısıyla heteroskedasite ve otokorelasyon tutarlı (HAC) kovaryans matrisi yerine heteroskedasite ve otokorelasyona dirençli (HAR) kovaryans matrisi kullanmak uygun olacaktır.

2.2. Uzun Dönem Varyans Tahmini

Uzun dönem varyans ($\sigma_{lr,y}^2$), $var(\sqrt{T}\bar{y})$ 'ın $T \rightarrow \infty$ için limit değerini ifade etmektedir.

$$\begin{aligned}\sigma_{lr,y}^2 &= \lim_{T \rightarrow \infty} var(\sqrt{T}\bar{y}) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} var\left(T^{-1/2} \sum_{t=1}^T y_t\right) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} var\left(\sum_{t=1}^T y_t\right)\end{aligned}\tag{2.1}$$

$S_t = \sum_{t=1}^T y_t$ olmak üzere y_t sıfır ortalamaya sahip olduğunda $var(S_t) = E(S_t^2)$ 'e eşit olacaktır. Bu durumda uzun dönem varyans şu şekilde yeniden tanımlanmaktadır:

$$\sigma_{lr,y}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} E(S_t^2) \quad (2.2)$$

Denklem (2.2)'deki form birim kök testlerinde sıklıkla kullanılmakta olup S_t yerine kalıntıların toplamı alınmaktadır. Sıfır ortalamadan farklı bir ortalama olması durumunda ise orijinal gözlem değerlerinin ortalamadan farkları kullanılmaktadır (Patterson, 2010: 57-58).

Uzun dönem varyans tahmin prosedürü iki genel kategoride ele alınabilmektedir. İlki, sürecin vektör otoregresif (VAR) ya da vektör hareketli ortalama (VMA) gibi doğrusal zaman serileri modellerine uydurulduğu parametrik yöntemdir. İkincisi ise ağırlıkların kernel ve band genişliği ile belirlendiği örnek otokovaryanslarının ağırlıklandırılmış toplamına dayanan nonparametrik yöntemdir (Hirukawa, 2023). Burada parametrik tahmincilerden öncelikle vektör otoregresif modellere (VAR) dayanan LRV tahmini özetlenmekte olup nonparametrik çerçevede kırılmış ve düzgünleştirilmiş otoregresif modellere dayanan tahminciler ele alınmaktadır.

2.3. Otoregresif Tahminci

Den Haan ve Levin (1997) bir otoregresif spektral tahminci önermiştir. h_t sonsuz mertebeden bir vektör otoregresif (VAR) model olarak varsayıldığında:

$$h_t = \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_j h_{t-j} + e_t, \quad Ee_t e_t' = \Omega \quad (2.3)$$

olarak ifade edilebilmektedir. Bu durumda uzun dönem varyans:

$$S = \left(I - \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_j \right)^{-1} \Omega \left(I - \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_j \right)^{-1'} \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Buradaki temel mantık, h_t 'deki sonlu mertebeden bir VAR modelinden tahminler yoluyla bu niceliğe yaklaşmaktır. \hat{h}_t 'nin, p mertebesinden bir VAR modeli tahmini ise:

$$\hat{h}_t = \hat{\Phi}_1 \hat{h}_{t-1} + \dots + \hat{\Phi}_p \hat{h}_{t-p} + \hat{e}_t \quad (2.5)$$

$$\hat{\Omega} = T^{-1} \sum_{t=p+1}^T \hat{e}_t \hat{e}_t'$$

Bu durumda \hat{S} tahmincisi ise:

$$\hat{S}_{AR} = \left(I - \sum_{j=1}^p \hat{\Phi}_j \right)^{-1} \hat{\Omega} \left(I - \sum_{j=1}^p \hat{\Phi}_j \right)^{-1'} \quad (2.6)$$

Denklem (2.6)'da p Bayesyen Bilgi Kriteri (BIC)'ne göre seçilirse ve bazı teknik koşullar altında bu tahminci hemen hemen $T^{1/2}$ hızında yakınsamaktadır. Tahmin zorluklarından dolayı h_t 'nin q elemanının her biri için BIC kriterini denklem denklem kullanarak makul bir şekilde parametrize edilmesini önerilmektedir. (**West, 2018:5801**).

2.4. Kırpılmış Tahminci

Newey ve West (1994), kırpılmış örnek otokovaryanslarından optimum band genişliğini tahmin etmek için alternatif bir yöntem önermiştir. Bu prosedür, hata yapısının doğrudan tahmin edilmesini gerektirmemekle birlikte bir kırpma parametresinin başlangıç seçimini içermektedir (Cheung ve Lai, 1997:680). Önsel olarak n gecikmeden sonra h_t 'nin otokovaryanslarının sıfır olduğu varsayımı altında S 'nin kırpılmış tahmincisi şu şekilde ifade edilmektedir:

$$\hat{S}_{TR} = \hat{\Gamma}_0 + \sum_{j=1}^n (\hat{\Gamma}_j + \hat{\Gamma}_j') \quad (2.7)$$

Kırpılmış tahminci daha genel durumlar için tutarlıdır. Başka bir ifade ile tüm j 'ler için $\Gamma_j \neq 0$ olduğu durumda kırpma noktası uygun bir oranda $n \rightarrow \infty$ iken kırpılmış tahminci tutarlıdır (West, 2018:5799). Bu tahmincinin dezavantajlarından biri pozitif yarı tanımlı tahminler sağlamamasıdır (Hirukawa, 2023:41).

2.5. Düzgünleştirilmiş Otokovaryans Tahmincisi

Uzun dönem varyans tahmincisinin pozitif yarı tanımlı olması gerekliliği örneklem otokovaryanslarına verilen ağırlıklar üzerinde belirleyici bir rol oynamaktadır. Andrews (1991), spektral yoğunlukların tahminine ilişkin literatürü temel alarak analiz için genel bir çerçeve oluşturmuştur (West, 2018:5801). Gözlemlenen verilerin örnek otokovaryanslarının ağırlıklandırılmış toplamlarının alınmasıyla parametrik olmayan kernel yaklaşımı tahmincisi şu şekilde tanımlanmaktadır:

$$\hat{S} = \hat{\Gamma}_0 + \sum_{j=1}^{T-1} k_j (\hat{\Gamma}_j + \hat{\Gamma}_j') \quad (2.8)$$

Burada k_j kernel (veya ağırlık) olarak bilinmektedir. Kernel'in pozitif yarı tanımlılık ve tutarlılık özelliklerini sağlayacak şekilde seçilmesi gerekmektedir (Wang ve Wu, 2012:517). Örneğin, tutarlı bir tahminci elde etmek için istenen durum her j için $k_j \rightarrow 1$ iken büyük gecikmelerdeki otokovaryanslar daha az kesin tahmin edildiğinden $T-1$ yakınındaki j değerleri için k_j 'nin sifıra yakın olması gereklidir. (West, 2018:5801).

2.6. Kernel Tahmincisi

Kernel yoğunluk tahmini bir veri setinin genel dağılımını incelemekte kullanılan yöntemlerden biridir. T gözlem sayısı olmak üzere y_1, \dots, y_n ve ampirik dağılım fonksiyonu gözlemlenen her bir veri noktasının $1/T$ ile tartılandırılmasıyla elde edilir.

$$f(\hat{y}) = \frac{1}{Th} \sum_{t=1}^T I\left(y - \frac{h}{2} \leq y_t \leq y + \frac{h}{2}\right) = \frac{1}{Th} \sum_{t=1}^T I\left(\left|\frac{y - y_t}{h}\right| \leq \frac{1}{2}\right) \quad (2.9)$$

$$I_t = \begin{cases} 1 & \left|\frac{y - y_t}{h}\right| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \left|\frac{y - y_t}{h}\right| > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2.10)$$

Burada I_t gösterge fonksiyonudur. Bu tahminci $w_t = \frac{1}{h} I_t \left(\left|\frac{y - y_t}{h}\right| \leq \frac{1}{2}\right)$ olmak üzere kapalı formda $f(\hat{y}) = \frac{1}{Th} \sum_{t=1}^T w_t$ olarak gösterilebilmektedir (Martin vd. 2013:406). Yerel histogram yaklaşımı ile yoğunluğun tahmin edilmesinde kullanılan formun süreksiz yapısı ve $y \pm h/2$ noktalarında sıçramalarından dolayı oldukça kaba (rough) yapıya sahiptir. Dolayısıyla bu kademeli yapı yerine daha yumuşak bir ağırlık seti kullanılarak (pozitif reel bir Kernel fonksiyonu) giderilebilmektedir (Rosenblatt, 1956).

Kernel yoğunluk tahmini:

$$f(\hat{y}) = \frac{1}{Th} \sum_{i=1}^T K\left(\frac{y - y_t}{h}\right) \quad (2.11)$$

K olarak ifade edilen kernel fonksiyonu ampirik dağılım fonksiyonu üzerinden her biri veri noktasında kütle $1/T$ ile yeniden dağıtılmaktadır. Kernel fonksiyonu negatif olmayan, simetrik ve tek modlu bir olasılık yoğunluk fonksiyonudur. “h” pencere genişliğini temsil etmekte olup band genişliği olarak da adlandırılmaktadır.

En yaygın olarak kullanılan Kernel fonksiyonu Gaussian Kernel olup aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir:

$$K(u) = (\sqrt{2\pi})^{-1} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right), \quad u = \frac{y - y_t}{h} \quad (2.12)$$

Kernel Yoğunluk Tahmincisi (KDE) olarak kullanılan kernelin aşağıdaki özellikleri taşıması gerekmektedir:

$$\int K(y)dy = 1,$$

$$\int yK(y)dy = 0,$$

$$\int y^2K(y)dy < \infty, \quad (2.13)$$

$K(y) \geq 0$ tüm y 'ler için,

$$K(y) = K(-y)$$

Yani kernel simetrik, sınırlı varyans ve sıfır ortalamayla olasılık yoğunluk fonksiyonu sürekli olmalıdır (Gramacki, 2018:26).

Bunun dışında simetrik beta ailesi de kullanılmaktadır:

$$K_\gamma(u) = \frac{1}{Beta\left(\frac{1}{2}, \gamma + 1\right)} (1 - u^2)^\gamma I(|u| \leq 1) \quad (2.14)$$

$\gamma = 0,1,2,3$ için sırasıyla uniform, Epanechnikov, iki ağırlıklı (biweight) ve üç ağırlıklı (triweight) kernel fonksiyonlarıdır. γ büyüdükçe, uygun ölçeklemeyle, simetrik gamma kernel yaklaşık olarak Gaussian kernel fonksiyonuyla aynıdır. Farklı kernel fonksiyonlarının farklı desteklere sahip olduğuna dikkat edilmelidir. Örneğin, uniform kernel $[-1,1]$ aralığında etkili iken, üç ağırlıklı kernelin desteği çok daha kısarken Gaussian kernelin çok daha uzundur. Kernel yoğunluk tahmincisini kullanmak için kernel fonksiyonu ve band genişliğini seçmek gerekir. Kernel fonksiyonunun seçimi kernel yoğunluk tahmincisinde çok önemli olmadığı hem teorik hem de ampirik olarak bilinmektedir. Simetrik ve tek modlu olduğu sürece, bulunan kernel yoğunluk tahmincileri band genişliği h optimal olarak seçildiyse neredeyse aynı çalışır (Fan ve Yao, 2003:195-196).

2.7. Kernel Türleri ve Band Genişliği Seçimi

Kernel yöntemi, uzun dönem varyansın sonlu örneklem özelliklerinin iki önemli belirleyicisi olan kernel ve bant genişliğinin seçimi uzun bir geçmişte sahiptir.

(Wang ve Wu, 2012:516). Kernel'in genellikle bazı özelliklere⁶ sahip olması beklenmekte iken bu özellikleri taşıyan çok az Kernel fonksiyon bulunmaktadır. Uygulamada yaygın olarak kullanılan Kernel fonksiyonlar şu şekilde verilmektedir:

Kırılmış Uniform (White ve Domowitz,1984):

$$k(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases} \quad (2.15)$$

Bartlett (Newey ve West, 1987):

$$k(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1 \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases} \quad (2.16)$$

Parzen (Gallant, 1987):

$$k(x) = \begin{cases} 1 - 6x^2 + 6|x|^3, & |x| \leq 1/2 \\ 2(1 - |x|)^3, & 0.5 < |x| \leq 1 \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases} \quad (2.17)$$

Tukey-Hanning (Priestley, 1962):

$$k(x) = \begin{cases} (1 + \cos(\pi x))/2, & |x| \leq 1 \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases} \quad (2.18)$$

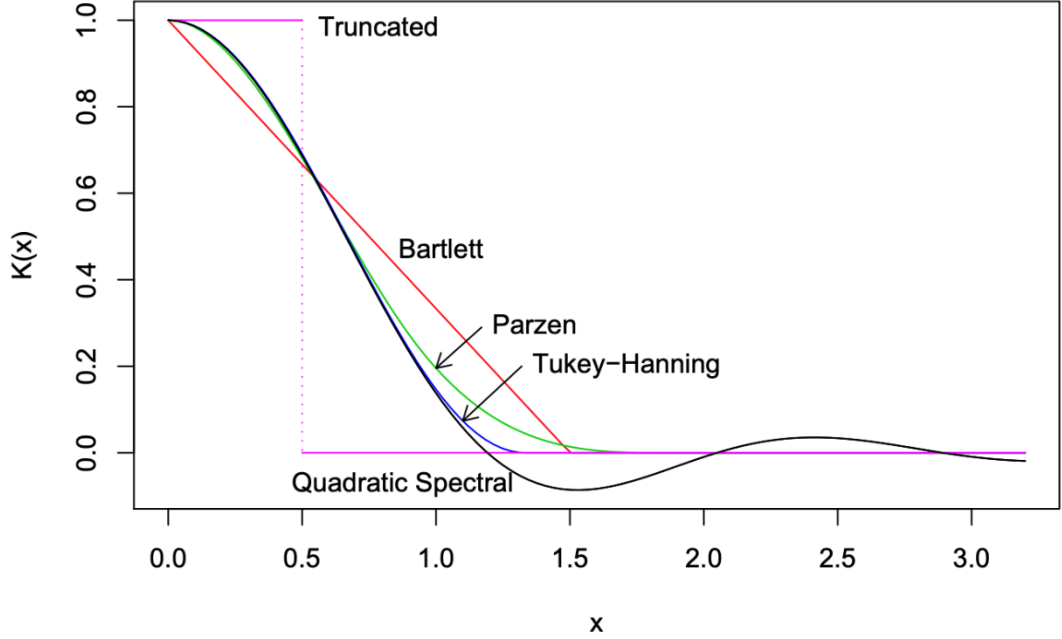
Quadratik Spektral (Epanechnikov, 1969):

$$k(x) = \frac{25}{12\pi^2 x^2} \left\{ \frac{\sin(6\pi x/5)}{6\pi x/5} - \cos\left(\frac{6\pi x}{5}\right) \right\} \quad (2.19)$$

Kırılmış, Bartlett ve Parzen kerneller HAC tahmini ile ilgili literatürde yer alırken Tukey-Hanning ve Quadratik Spektral kerneller spektral ve olasılık yoğunluk tahmini literatüründe yer almaktadır (Andrews, 1991:821). Verilen bir band genişliği baz alınarak yeniden normalleştirilmiş Kernel'lerin gecikmeli kovaryanslara koyduğu ağırlıklar Şekil 1'de sunulmaktadır.

⁶ Denklem (2.13)'de Kernel fonksiyonların taşıması gereken özellikler verilmektedir.

Şekil 2.1: HAC Tahmini için Kernel Fonksiyonlar



Kaynak: Andrews,1991:882; Zeileis, 2004:6

Band genişliği seçiminde ise Andrews (1991) ve Newey West (1994) yöntemlerinin kullanımı popülerdir. İki yöntem arasındaki en önemli fark, HAR tahmincisinin asimptotik ortalama kare hatasını (AMSE) en aza indirecek şekilde, optimum bant genişliğinde bilinmeyen miktarın iyi bir temsilinin nasıl elde edileceğidir (Hirukawa, 2004:1). Bu tez kapsamında yalnızca Newey-West ve Andrews'in sırasıyla Bartlett ve Quadratik Spektral Kernel yaklaşımı detaylandırılmıştır.

2.7.1. Newey-West/Bartlett ve Quadratik Spektral

Uzun dönem varyansın pozitif yarı tanımlı olması için Bartlett ve Quadratik Spektral en yaygın kullanılan kernel ağırlıklardır. Kırpma parametresi “m” olmak üzere;

Bartlett kernel ($j > m$ için 0):

$$k_j = [1 - j/(m + 1)], \quad j \leq m \quad (2.20)$$

Quadratic Spektral ($m > 0$ ve $x_j = j/m$):

$$k_j = [25/12\pi^2 x_j^2] \times \{[\sin(6\pi x_j/5)/(6\pi x_j/5)] - \cos(6\pi x_j/5)\} \quad (2.21)$$

olarak tanımlanmaktadır. Buradaki önemli bir konu kırpma parametresi ya da band genişliği olarak ifade edilen m 'in belirlenmesidir. Andrews (1991), \hat{S} 'nin S 'ye yakınsama hızının maximize etmenin örneklem boyutunun uygun bir fonksiyonu olarak m 'nin artması gerektiğini göstermiştir. $\gamma \neq 0$ olmak üzere Bartlett ve QS için maximum yakınsama oranları sırasıyla $m = \gamma T^{1/3}$ ve $m = \gamma T^{1/5}$ 'tir. Dolayısıyla, Bartlett için \hat{S} , S 'e $T^{1/3}$ oranında yakınsarken, S 'in tahmininde ortalama kareli hata (MSE) sıfıra $T^{2/3}$ hızında yakınsamaktadır. Burada m 'in belirlenmesi problemi, γ 'nın seçimi problemine dönüşmektedir. Yakınsamanın en hızlı şekilde sağlanması için γ 'ya verilecek olan keyfi bir değer farklı asimptotik ortalama kareli hatalara yol açacaktır (West, 2018:5801-5802). Ayrıca kırpma parametresinin seçimi varyans ve sapma arasındaki bir dengeyi sağladığı için oldukça önemlidir. Daha yüksek bir m varyansı artırırken sapmayı azaltacaktır⁷ (Lazarus vd., 2018). Cheung ve Lai (1997)'de optimal band genişliği genellikle şu şekilde ifade edilmektedir:

$$m^* = c_q \left[(S^{(q)}/S^{(0)})^2 T \right]^{1/(2q+1)} \quad (2.22)$$

$$S^{(q)} = (2\pi T)^{-1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |j|^q \Omega_j \quad (2.23)$$

$$c_q = \left[q c_k^2 / \int_{-\infty}^{\infty} k^2(y) dy \right]^{1/(2q+1)} \quad (2.24)$$

Burada Ω_j , j gecikmeli tahmin edilen otokovaryansı göstermektedir. q değeri kernele göre değişebilmektedir ve Bartlett için $q = 1$, Parzen ve QS kerneller için $q = 2$ 'dir. c_q 'nin değeri Bartlett için 1.1447 ve QS Kernel için 1.3221'dir (Cheung ve Lai, 1997:681).

⁷ Bu durum zaman alanı (time domain) için geçerlidir. Frekans alanında tam tersi bir durum söz konusudur.

Skaler bir S için optimal seçim;

$$S^{(0)} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Omega_j \quad (2.25)$$

$$S^{(1)} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |j| \Omega_j \quad (2.26)$$

$$S^{(2)} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |j|^2 \Omega_j \quad (2.27)$$

S 'nin ortalama kareli hataya göre nasıl ağırlıklandırılacağını gösteren $q \times 1$ boyutundaki ağırlık vektörü $w = (w_1, w_2, \dots, w_q)$ olsun. Andrews'in kayıp fonksiyonu $\sum_{i=1}^q w_i (S_{ii} - \hat{S}_{ii})^2$, QS için $T^{4/5}$ ile normalize edilirken; Newey - West'in kayıp fonksiyonu $[w'(\hat{S} - S)w]^2$, Bartlett için $T^{2/3}$ ile normalize edilmektedir. Andrews (1991), $S^{(q)}$ ve $S^{(0)}$ 'in tahmini için kalıntıların otoregresif tahminini, Newey -West (1994) ise otokovaryansların kırılmış toplamlarını Schwert (1989)'ın prosedürünün uygulanması yoluyla bu frekansların alternatif bir tahminini önermektedir.

2.7.2. Sapma Azaltma ve Önbeyazlatma

Andrews ve Monahan (1992) band genişliği seçimi prosedüründen önce düşük dereceden bir otoregresif süreçle önbeyazlatma (prewhitening) kullanmayı önermektedir (Cheung ve Lai, 1997:681-682). Her iki prosedürde de ilk aşamada ön beyazlatılmış (prewhiten) bir otoregresif vektör son aşamada yeniden renklendirilmektedir. Ön beyazlatmanın amacı, sıfır frekans yakınlarındaki filtrelenmiş sürecin spektral yoğunluğunu düzleştirmektir.

Ön beyazlatma: Ön beyazlatma, önce spektral yoğunluğu doğrusal bir filtre ile düzleştirerek tahmindeki sapmayı azaltmaya yardımcı olmaktadır. Dolayısıyla, düzleştirilmiş yoğunluk artık daha az sapmayla tahmin edilebilmektedir. Nihai

aşamada bir ters transformasyonla tahmin süreci tamamlanmaktadır (Rho ve Shao, 2013:1913). Süreç düşük dereceli bir VAR modeliyle tahmin edilir. VAR(1) için;

$$x_t = \hat{A}x_{t-1} + u_t \quad (2.28)$$

$$\hat{A} = \sum_{t=2}^T x_t x_{t-1}' \left(\sum_{t=2}^T x_{t-1} x_{t-1}' \right)^{-1} \quad (2.29)$$

HAR tahmini: VAR kalıntılarının j . otokovaryansı $\tilde{\Gamma}_j = (T - 1)^{-1} \sum_{t=2}^T u_t u_{t-j}'$ ve optimal m kullanılarak VAR kalıntılarının uzun dönem varyansının tahmini (\tilde{S}) elde edilir. Optimal m seçilirken Andrews ve Monahan (1992) yaklaşımında \tilde{S} 'nin her q elementi için AR(1) model tahmin edilir. Basit AR filtresini kullanan Andrews Monahan prosedürünün aksine Lee ve Phillips ARMA filtresi içeren prosedürü önermektedir (Cheung ve Lai, 1997:690). Modelden elde edilen katsayılar $\hat{\rho}_i$, ve kalıntıların varyansı $\hat{\sigma}^2$ olmak üzere optimal kırpma parametresi $\hat{m}_{QS} = \hat{\gamma}_{QS} T^{1/5}$, tir. $\hat{\gamma}_{QS} = 1.3221[\hat{s}_2/\hat{s}_0]^{1/5}$ olup;

$$\hat{s}_2 = \sum_{i=1}^q w_i (4\hat{\rho}_i^2 \hat{\sigma}_i^4) / (1 - \hat{\rho}_i)^8 \quad (2.30)$$

$$\hat{s}_0 = \sum_{i=1}^q w_i \hat{\sigma}_i^4 / (1 - \hat{\rho}_i)^4 \quad (2.31)$$

şeklinde hesaplanmaktadır. Burada elde edilen optimal kırpma parametresi kullanılarak $\tilde{S} = \tilde{\Gamma}_0 + \sum_{j=1}^{T-1} k_j (\tilde{\Gamma}_j + \tilde{\Gamma}_j')$ 'de yerine koyulur.

Newey-West (1994) için $n = 12(T/100)^{2/9}$ olmak üzere; Bartlett kırpma parametresi $\hat{m}_{BT} = \hat{\gamma}_{BT} T^{1/3}$ 'nin tam sayı değeri alınmaktadır. Burada $\hat{\gamma}_{BT} = 1.1447[\hat{S}^{(1)}/\hat{S}^{(0)}]^{2/3}$ olup;

$$\hat{S}^{(1)} = w' \hat{\Gamma}_0 w + 2 \sum_{i=1}^n i w' \hat{\Gamma}_i^\dagger w \quad (2.32)$$

$$\hat{S}^{(0)} = 2 \sum_{i=1}^n w' \hat{\Gamma}_i^\dagger w \quad (2.33)$$

olarak hesaplanmaktadır. Benzer şekilde kırpma parametresi m_{BT} , \tilde{S} 'de yerine koyularak yeniden renklendirme aşamasına geçilir.

Yeniden renklendirme (re-colouring): Sürecin nihai uzun dönem varyansı $(I - \hat{A})^{-1} \tilde{S} (I - \hat{A})^{-1}$ şeklinde elde edilir.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

ESTAR TİPİ BİRİM KÖK TESTİ İÇİN PARAMETRİK OLMAYAN DÜZELTME

3.1. Parametrik Olmayan Doğrusal Olmayan Birim Kök Testi Önerisi

Zaman serisi analizlerinde sürecin doğrusal olduğu varsayımı altında yapılan birim kök testleri uygulama ve yorumlama kolaylığından dolayı sıklıkla tercih edilmektedir. Ancak çoğu durumda doğrusal modeller yetersiz kalmakta, hatta hatalı sonuçlara yol açabilmektedir. En basit haliyle yapısal kırılma dikkate alınmamasına benzer şekilde doğrusal olmamanın dikkate alınmaması birim kök temel hipotezinin red edilemeye yönünde sapmalı sonuçlar verebilmektedir. Doğrusal olmayan birim kök literatürü hakkında oldukça kapsamlı bir literatür bulunmakla birlikte günümüzde de geliştirme çabaları devam etmektedir. Doğrusal olmayan birim kök testleri içerisinde STAR tipi modeller oldukça kullanışlıdır ve iktisadi olguların test edilmesinde uygun yapıya sahiptir. Ancak bu modellerin tahmin süreçlerinde çeşitli zorluklarla karşılaşmaktadır. Davies problemi olarak bilinen temel hipotezde tanımlanamayan bozucu terimin varlığı bu zorluklardan biridir (Van Dijk ve Franses, 1999:315). Bu zorluğun üstesinden gelmek için literatürde iki yaklaşım bulunmaktadır. Bunlardan ilki Taylor açılımı ile modeli polinomial olarak yaklaşık elde etmek, ikincisi ise ekstremum tipi bir test istatistiği yoluyla modeli doğrudan tahmin etmektir. STAR tipi modeller ESTAR çerçevesinde sınırlandırıldığında ilk yaklaşımı kullanan çalışmalar arasında KSS (2003), Sollis (2009) ve Kruse (2011) örnek olarak gösterilebilmektedir. İkinci yaklaşımı kullanan çalışmalar arasında Kılıç (2011), Park & Shintani (2005,2016) ve Shintani (2013) yer almaktadır.

Birim kök testlerinde karşılaşılan en büyük problemlerden biri de hata terimindeki yapının $u_t \sim iid(0, \sigma_u^2)$ olduğu varsayımına dayanmasıdır. Bu varsayımın sağlanması oldukça güçtür ve uygulamada sıklıkla ihlal edilmektedir. Sürecin gerçekte AR(p) yapıya sahip olması durumunda AR(1) biçimindeki Dickey-Fuller modeli kullanılırsa, hata terimleri otokorelasyonlu olacaktır. (Harris ve Sollis

2003:48). Said ve Dickey (1984) Dickey Fuller testini Berk (1974) yöntemini kullanarak ARMA modelini test etmek üzere genişletmişlerdir (Choi, 2010:33). Phillips ve Perron (1988) parametrik olmayan bir düzeltme ile hata terimlerindeki otokorelasyonlu yapının modellenmesine izin veren bir yaklaşımı benimsemişlerdir.

Bu tezde STAR tipi doğrusal olmayan birim kök testi önerilmektedir. Kapetanios vd. (2003) ve Shintani (2013)'e benzer şekilde oluşturulan Dickey Fuller tipindeki model şu şekilde ifade edilmektedir:

$$y_t = \lambda y_{t-1} \pi(z_{t-d}, \theta) + u_t \quad (3.1)$$

Burada $\pi(z_{t-d}, \theta)$ geçiş fonksiyonunu ifade etmekte olup $[0,1]$ aralığında değerler alan simetrik U şeklinde ESTAR yapıya sahiptir. $\pi(0) = 0$ ve $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \pi(x) = 1$ özelliklerini taşımaktadır. Geçiş değişkeni $z_{t-d} = y_{t-d}$ ve $d = 1$ olarak kabul edilmektedir. Denklem (3.1)'deki yapı ESTAR geçiş fonksiyonunu verilen koşulları içerecek şekilde yeniden parametrize edilmesiyle test denklemi:

$$\Delta y_t = \lambda y_{t-1} [1 - \exp\{-\kappa^2 y_{t-1}^2\}] + u_t \quad (3.2)$$

olarak yazılabilmektedir. $\lambda = \rho - 1$ birim kök temel hipotezi $\lambda = 0$ için oluşturulmaktadır. Ancak bu durumda Davies probleminden dolayı temel hipotez altında denklemdaki bozucu terimin varlığından dolayı tahmin süreci gerçekleştirilemediği için Shintani (2013) ve Park ve Shintani (2016)'a benzer şekilde bir test istatistiği oluşturulması amaçlanmaktadır. Ancak hata terimlerinin $u_t \sim iid(0, \sigma_u^2)$ olduğu varsayımı bu tez kapsamında esnetilmektedir. $\inf t_E$ yaklaşımı yerine Phillips & Perron (1988)'deki şekilde uzun dönemli varyansın (LRV) parametrik olmayan bir tahminini kullanarak extremum tipi test istatistiği oluşturulmaktadır. Bu sayede değişen varyans ve otokorelasyona dirençli tahminciler üretilebilmektedir. Uzun dönem varyansın tahmin edilmesinde çeşitli yaklaşımlar bulunmaktadır. Bu yaklaşımları parametrik ve parametrik olmayan LRV tahmini olarak iki ana başlık altında ifade etmek mümkündür. Bu tez kapsamında parametrik olmayan LRV tahmininin elde edilmesinde kernel fonksiyonu ile düzgünleştirilmiş otokovaryans tahmincisinin kullanımı benimsenmektedir.

Uzun dönem varyansı en genel haliyle aşağıdaki şekilde tanımlamak mümkündür:

$$\sigma_{Irv}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} E(S_t^2), \quad S_t = \sum_{t=1}^T y_t \quad (3.3)$$

LRV'nin otokovaryans cinsinden eşiti ise:

$$\begin{aligned} \sigma_{Irv}^2 &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_j \\ &= \gamma_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \end{aligned} \quad (3.4)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Andrews (1991)'e dayanan otokovaryansların (kernel) ağırlıklandırılmış toplamlarının alınması işlemi LRV tahmincisinin pozitif tanımlı olmasını sağlamaktadır. Parametrik olmayan bu yaklaşımda LRV şu şekilde tanımlanmaktadır:

$$\sigma_{Irv}^2 = \gamma_0 + 2 \sum_{j=1}^m k_j \gamma_j \quad (3.5)$$

Burada k_j kernel ağırlıklardır. Eğer hata terimleri zayıf durağan ise γ_0 en küçük kareler yöntemiyle elde edilen kalıntılar kullanılarak tutarlı bir şekilde tahmin edilebilmektedir. Bu tahmin $\gamma_0 = \hat{\sigma}_u^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{u}_t^2$ şeklindedir. Uzun dönem varyansın (σ_{Irv}^2) tahmini ise:

$$\sigma_{Irv}^2(\theta) = n^{-1} \sum_{t=1}^n \hat{u}_t^2 + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^m k_j \sum_{t=s+1}^n \hat{u}_t \hat{u}_{t-s} \quad (3.6)$$

Kırpma (truncation) parametresi (m) otokovaryansların dahil edildiği maksimum dereceyi ifade etmekte olup, T örnek boyutuyla birlikte m 'nin sonsuza gitmesi $-T$ kadar hızlı değil- gerekmektedir. k_j bu varyans tahmin edicisinin yalnızca tutarlılığını değil, aynı zamanda negatif olmamasını da sağlayan ağırlıklardır⁸. Bartlett (1948)'e dayanan bu ağırlıklar şu şekilde ifade edilmektedir:

⁸ Gecikme penceresi (lag window) olarak da bilinmektedir.

$$k(j) = 1 - \frac{j}{m+1}, \quad j = 1, \dots, m \quad (3.7)$$

Burada m kırpma parametresi ya da band genişliğini ifade etmektedir. Kırpma parametresinin seçimi de varyans ve sapma arasındaki dengeyi sağladığı için oldukça önem arz etmektedir. Bu tez kapsamında Bartlet kernele dayanan ağırlıklar için kırpma parametresinin seçimi $\left[4 \left(\frac{T}{100}\right)^{2/9}\right]$ olarak ayarlanmaktadır (Rothe ve Sibbertsen, 2006:447).

Elde edilen kırpma parametresine göre otokovaryansların uzun dönem varyansı pozitif tanımlı olacak şekilde elde edilmesinin ardından elde edilecek olan test istatistiği:

$$\begin{aligned} \inf - t_{ESTAR-R} &= \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_u}{\hat{\sigma}_{lrv}^2(\theta)}} \times \frac{\hat{\lambda}(\theta)}{S_{\hat{\lambda}}(\theta)} \\ &- \frac{1}{2} (\hat{\sigma}_{lrv}^2(\theta) - \hat{\sigma}_u^2) \frac{1}{\hat{\sigma}_{lrv}} \times \frac{T \times S_{\hat{\lambda}}(\theta)}{\left(\frac{1}{T-k} \sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2\right)^{0.5}} \end{aligned} \quad (3.8)$$

şeklinde elde edilmektedir. Burada $\hat{\lambda}(\theta)$ 'nin ve buna bağlı olarak hesaplanan standart hataların ve LRV için test istatistiğini minimum yapan değer için arama süreci Shintani (2013)'te önerilen yaklaşımla:

$$\Theta_\kappa = \kappa \in [min, max] * \left(\frac{\sum y_{t-1}^2}{n}\right)^{-0.5} \quad (3.9)$$

$\theta = \kappa$ olmak üzere önerilen extremum test istatistiği bozucu parametreden bağımsız ancak Θ_κ 'nın seçimine bağlı olacaktır. Θ_κ ile verilen "min" ve "max" değerler arama sürecinde maksimum test istatistiğini içeren aralığa karşılık gelecek şekilde belirlenmektedir.

3.2. Simülasyon Sonuçları

Bu bölümde STAR modele dayanan hata terimlerindeki otokorelasyon ve değişen varyansa karşı direçli ESTAR tipi birim kök testi için extremum test istatistiği önerilmektedir. Önerilen test için kritik değerler R version 4.3.1 kullanılarak Monte Carlo simülasyonları ile elde edilmiştir. Ayrıca testin sonlu örnek için boyut ve güç özellikleri simüle edilmiş ve benzer testlerle karşılaştırılmıştır.

3.2.1. Kritik Değerler

Test için kritik değerler Kapetonios vd. (2003), Kılıç (2011) ve Shitani (2013) benzer şekilde ham veri (y_t); $x_t = \mu + y_t$ olmak üzere ortalamadan arındırılmış veri ($y_t = x_t - \bar{x}_t$); $x_t = \mu + \beta t + y_t$ olmak üzere trendten arındırılmış veri ($y_t = x_t - \hat{\mu} - \hat{\beta}t$) için hesaplanmaktadır. Kritik değerler T=1000 gözlem sayısı için 10000 iterasyon ile gerçekleştirilmiştir.

Tablo 3.1: $inf - t_{ESTAR-R}$ testi için kritik değerler

	$inf - t_{ESTAR-R}$	$inf - t_{ESTAR-R,\mu}$	$inf - t_{ESTAR-R,\tau}$
% 1	-2.607	-3.467	-4.012
% 5	-1.979	-2.903	-3.465
% 10	-1.665	-2.601	-3.186

3.2.2. Boyut Özellikleri

Standart istatistiksel çıkarımlara dayanan bir hipotez testi için beklenen durum, testin boyutunun nominal değerine yakın olması ve en azından bazı alternatiflere karşı yüksek güce sahip olmasıdır (Harris ve Sollis 2003:54).

Tablo 3.2: T=100, 200 için Boyut Özellikleri

	$inf - t_{ESTAR-R}$	$inf - t_{ESTAR-R,\mu}$	$inf - t_{ESTAR-R,\mu}$
100	5.94	5.97	6.90
200	5.07	6.03	6.18

Önerilen testin %5 için hesaplanan küçük örnek performansları incelediğinde 100 gözlem için temel hipotezi reddetme performansı nominal değere oldukça yakın çıkmıştır. Gözlem sayısı 200'e çıktığında nominal değere daha da yaklaştığı görülmektedir.

3.2.3. Güç Özellikleri

Alternatif hipotez doğru olduğunda temel hipotezin kabul edilmesi II. tip hata (β) olarak adlandırılmaktadır. Alternatif hipotez altında reddetme olasılığı ise testin gücünü ifade etmekte olup $(1 - \beta)$ 'ya eşittir (Hansen, 2022:225).

Testin güç özelliklerinin incelenmesinde aşağıdaki veri üretim süreci ele alınmıştır:

$$\Delta y_t = \lambda y_{t-1} [1 - \exp\{-\kappa^2 y_{t-1}^2\}] + \xi_t \quad \xi_t \sim iid(0, \sigma^2) \quad (3.10)$$

Denklem (3.10) ile ifade edilen veri yaratma süreci ile 10000 tekrarlı $\kappa^2 = (0.1, 1)$; $n = (100, 200)$ ve $\lambda = (-0.1, -0.2)$ için testin gücü simüle edilmiştir. Ayrıca

$$\xi_t = u_t,$$

$$\xi_t = \rho \xi_{t-1} + u_t, \quad (3.11)$$

$$\xi_t = u_t - \theta u_{t-1}$$

olmak üzere AR(1) ve MA(1) terimleri ile modeldeki hata terimlerinin yapısı bozularak ($\rho = 0.8; \theta = 0.8, \rho = -0.8; \theta = -0.8$) testin güç performansı üç farklı durum (ham veri, ortalamadan arındırılmış veri, ortalama ve trendten arındırılmış veri) için hesaplanmıştır. Shintani (2013)'ün simetrik ESTAR^{9,10} modeli ve KSS (2003)

⁹ Shintani (2013) karşılaştırma amacıyla veri yaratma sürecini asimetrik olarak oluşturmuştur. Ancak simetrik ESTAR karşılık birim kök testinin gücünü simüle etmiştir. Bu tezde de benzer veri yaratma süreci kullanılmış olup $\gamma = 0.5$ için sonuçlar raporlanmaktadır.

¹⁰ Shintani (2013) Tablo 3' için verilen güç performansları boyut düzeltilmesi yapılmış kritik değerlerden elde edilerek oluşturulmuştur. Bu tez de karşılaştırma yapılması amacıyla Shintani (2013)'ün Tablo 1'de vermiş olduğu kritik değerler kullanılarak simetrik ESTAR'a karşılık birim kök testinin gücü karşılaştırılmıştır.

Taylor yaklaşımı ile global ESTAR durağan süreç için simülasyon sonucu elde ettiği değerler ile önerilen testin güç performansları karşılaştırılmıştır. Tablo 3.3, 3.4 ve 3.5'te testin güç performansları verilmektedir:



Tablo 3.3: Ham Veri için Güç Özellikleri

κ^2	n	λ	$inf - t_{ESTAR-R}$			t_{NL}	$inf - t_E$
			$\xi_t \sim iid(0,1)$	$\rho = 0.8; \theta = 0.8$	$\rho = -0.8; \theta = -0.8$		
0.1	100	-0.1	47.64	73.01	100	25.76	49.47
		-0.2	88.93	93.80	100	84.29	89.24
	200	-0.1	96.92	100	100	89.66	95.71
		-0.2	99.99	100	100	99.66	99.99
1	100	-0.1	75.49	84.98	100	53.18	68.66
		-0.2	99.67	99.12	100	98.32	99.96
	200	-0.1	99.52	100	100	98.55	98.95
		-0.2	100	100	100	100	100

Tablo 3.4: Ortalamadan Arındırılmış Veri için Güç Özellikleri

κ^2	n	λ	$inf - t_{ESTAR-R,\mu}$			t_{NL}	$inf - t_{E,\mu}$
			$\xi_t \sim iid(0,1)$	$\rho = 0.8; \theta = 0.8$	$\rho = -0.8; \theta = -0.8$		
0.1	100	-0.1	20.54	73.01	100	14.69	16.65
		-0.2	42.26	93.80	100	33.98	40.80
	200	-0.1	57.35	100	100	49.72	54.77
		-0.2	97.20	100	100	96.87	97.42
1	100	-0.1	34.24	84.98	100	26.93	28.71
		-0.2	86.95	99.12	100	81.05	79.83
	200	-0.1	85.12	100	100	81.73	78.72
		-0.2	99.99	100	100	99.99	99.97

Tablo 3.5: Ortalamadan ve Trendten Arındırılmış Veri için Güç Özellikleri

κ^2	n	λ	$inf - t_{ESTAR-R,\tau}$			t_{NL}	$inf - t_{E,\tau}$
			$\xi_t \sim iid(0,1)$	$\rho = 0.8; \theta = 0.8$	$\rho = -0.8; \theta = -0.8$		
0.1	100	-0.1	15.05	73.01	100	14.68	12.45
		-0.2	29.54	93.80	100	26.09	25.44
	200	-0.1	37.30	100	100	34.46	32.17
		-0.2	83.88	100	100	84.46	83.01
1	100	-0.1	23.18	84.98	100	21.08	19.07
		-0.2	66.92	99.12	100	63.59	59.35
	200	-0.1	65.12	100	100	63.34	57.02
		-0.2	99.72	100	100	99.84	99.57

Tablo 3.3, 3.4 ve 3.5 ile önerilen testin güç özellikleri KSS (2003) ve Shintani (2013)'ün değerleriyle birlikte sunulmaktadır. Burada $inf - t_{ESTAR-R}$ (ham veri) önerilen test için üç farklı şekilde oluşturulan hata terimi yapısıyla ham veri için küçük örnekler için birim kök temel hipotezine karşılık durağan ESTAR alternatifi reddetme olasılıklarını vermektedir. t_{NL} ve $inf - t_E$ sırasıyla KSS (2003) ve Shintani (2013) için simülasyon yoluyla elde edilen güç değerlerini ifade etmektedir. Burada hem Taylor yaklaşımını kullanan KSS (2003) hem de extremum tipi test istatistiğini kullanan Shintani (2013)'ün simetrik durum için önerdiği testlerin güç özellikleriyle karşılaştırma yapılmıştır. Tablo 3.3, 3.4 ve 3.5'te önerilen testin geçiş parametresi (κ^2)'nin değerinin artmasıyla testin gücünün belirgin bir şekilde artış gösterdiği görülmektedir. Diğer her iki test için de bu durum geçerli olmakla birlikte görece olarak önerilen testin daha yüksek güç performansı göstermektedir. Özellikle hata terimi yapısı yüksek AR ve MA (pozitif ve negatif) katsayılarla sahip olduğunda testin güç performansı oldukça yüksektir. Özellikle en belirgin fark ortalamadan arındırılmış veri için KSS (2003) geçiş parametresinin düşük olduğu ve gözlem sayısının 100 olduğu durumda görülmektedir. Önerilen testin en düşük performans gösterdiği ($\kappa^2 = 0.1, n = 100$ ve $\lambda = -0.1$) ortalamadan ve trendten arındırılmış veri için dahi KSS (2003) ve Shintani (2013)'ten yüksek güce sahiptir.

SONUÇ

Zaman serisi analizlerinde ilgili değişkenin durağan olup olmadığının bilinmesi en önemli konulardan bir tanesidir. Değişkenin durağanlık özelliklerini ortaya koymak için kullanılan oldukça çeşitli yöntem ve prosedür bulunmaktadır. Fuller (1976) ve Dickey & Fuller (1979)'in devrim niteliğinde çalışmalarının ardından yaklaşık yarım yüzyıl geçmiştir. Ancak hala temelde aynı sorunu farklı biçimlerde ele alarak literatüre katkı sunan testler geliştirilmeye devam edilmektedir. İktisadi ilişkilerin karmaşık ve farklı formlarda ortaya çıkması bu gelişim sürecinin sürekli olarak canlı kalmasını sağlamaktadır.

Bu tez kapsamında zaman serileri analizlerinde HAC ya da HAR tahmincileri olarak bilinen dirençli tahmin yöntemleri kullanılarak spesifik bir yapıdaki doğrusal

olmayan birim kök önerilmektedir. ESTAR tipi bir birim kök testinin düzgünleştirilmiş otokovaryans tahmincisi ile uzun dönem varyansının elde edilmesi yoluyla geliştirilen extremum tipi test istatistiği için Monte Carlo simülasyonları ile kritik değerleri ve testin boyut-güç özellikleri incelenmiştir. Önerilen testin küçük örnek performansı incelendiğinde boyut çarpıklığı olmadığı değerlendirilmektedir. Ayrıca hata terimlerinin AR ve MA tipi yapıyı izlediği durumlarda da testin oldukça yüksek güç performansına sahip olduğu görülmektedir.

Doğrusal yöntemlere kıyasla doğrusal olmamanın avantajları ve geleneksel tahmin yöntemlerine kıyasla HAR çıkarımında kullanılan parametrik olmayan yapının güçlü özelliklerinin bir araya getirilmesini tezin ana motivasyonunu oluşturmaktadır. Geliştirilen test ile ESTAR tipi doğrusal olmayan birim kök testi literatürüne bir katkı yapılmıştır.

KAYNAKÇA

Anderson, Heather M.:	“Transaction costs and nonlinear adjustment towards equilibrium in the US Treasury Bill market”, Oxford Bulletin of Economics and Statistics , Vol. 59, No.4, 1997, pp. 465-484.
Andrews, Donald W.K., Monahan, J. Christopher:	“An improved heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix estimator”, Econometrica: Journal of the Econometric Society , 1992, pp. 953-966.
Balke, Nathan S., Thomas B., Fomby:	“Threshold Cointegration”, International Economic Review , Vol. 38, No. 3, 1997, pp. 627- 645.
Bartlett, M. S.:	“Smoothing periodograms from time-series with continuous spectra”, Nature , 161, 4096, 1948, pp. 686-687.
Berk, Kenneth N.:	“Consistent autoregressive spectral estimates”, The Annals of Statistics , 1974, pp. 489-502.
Bildirici, M., Aykaç Alp, E., Ersin, Ö.Ö. & Bozoklu, Ü.:	İktisatta Kullanılan Doğrusal Olmayan Zaman Serisi , İstanbul, Türkmen, 2010.
Cai, Ye, Mototsugu, Shintani:	“On the alternative long-run variance ratio test for a unit root”, Econometric Theory , Vol. 22, No.3, 2006, 347-372.
Caner, Mehmet, Hansen, Bruce:	“Threshold Autoregression with a Unit Root,” Econometrica , Vol. 69, No.6, 2001, pp. 1555-1596.
Cheung, Yin-Wong, Kon S. Lai:	“Bandwidth selection, prewhitening, and the power of the Phillips-Perron test”, Econometric Theory , Vol. 13, No.5, 1997, pp. 679-691.
Choi In:	: Almost All About Unit Roots Foundations, Developments, and Applications , New York, Cambridge University Press; 2010.

Cryer, Jonathan. D., Chan, Kung-Sik:	Time series analysis with applications in R. Springer Publication, 2008.
Çil, Nilgün:	Finansal Ekonometri, İstanbul, Der Yayınları, 2018.
Den Haan, Wouter J. & Levin, A.T.:	“ A practitioner's guide to robust covariance matrix estimation”, Chapter 12, in Ed. by G. Maddala and C. Rao, Handbook of Statistics: Robust Inference , 1997, Vol. 15, pp. 299-342.
Dickey, David A., Fuller, Wayne A.:	“Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root”, Journal of the American Statistical Association , Vol. 7, No. 4, 1979, pp. 427-431.
Dickey, David A., Fuller, Wayne A.:	“Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series with A Unit Root”, Econometrica , Vol. 49, No. 4, 1981, pp. 1057-1072.
Donald W. K. Andrews:	“Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix Estimation.” Econometrica , 59(3), 1991, pp. 817–58.
Enders, Walter, C. W. J., Granger:	“Unit-Root Tests and Asymmetric Adjustment with an Example Using the Term Structure of Interest Rates”, Journal of Business & Economic Statistics , 16(3), 1998, pp. 304-311.
Enders, Walter:	“Improved critical values for the Enders-Granger unit-root test”, Applied Economics Letters , Vol. 8, No. 4, 2001, pp. 257-261.
Enders, Walter:	Applied Econometric Time Series , 4. Baskı. New York, John Wiley & Sons, 2014.
Epanechnikov, Vassiliy A.:	“Non-parametric estimation of a multivariate probability density”, Theory of Probability & Its Applications , Vol. 14, No.1, 1969, pp. 153-158.

Fan, Jianqing, Qiwei, Yao:	Nonlinear time series: nonparametric and parametric methods , Vol. 20. New York, Springer, 2003.
Gallant, A. Ronald:	Nonlinear Statistical Models , New York, John Wiley & Sons, 2009.
Gramacki, Artur:	Nonparametric kernel density estimation and its computational aspects , Cham, Switzerland, Springer International Publishing, 2018.
Güriş, Burak:	Çok rejimli eşik değerli hata düzeltme modelleri ile Türkiye ekonomisinde bütçe açıklarının analizi , Yayınlanmamış Doktora Tezi, İstanbul, İstanbul Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, 2008.
Hansen, Bruce E.:	“Inference in TAR Models”, Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics , 1997, Vol. 2, No. 1, pp. 1-14.
Hansen, Bruce E.:	Econometrics , New Jersey, Princeton University Press, 2022.
Harris, Richard, Sollis, Robert:	Applied Time Series Modelling and Forecasting , England, John Wiley & Sons, 2003.
Hendry, David F.:	“The Methodology of Empirical Econometric Modeling: Applied Econometrics Through the Looking Glass,” Palgrave Handbook of Econometrics Volume 2: Applied Econometrics , Ed. By. Terence C. Mills and Kerry Patterson, New York, 2009, pp. 3-67.
Hirukawa, Masayuki:	“Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix Estimation”, University of Wisconsin-Madison, 2004.
Hirukawa, Masayuki:	“Robust covariance matrix estimation in time series: A review”, Econometrics and Statistics , Vol. 27, 2023, pp. 36-61.

Kapetanios, George, Yongcheol Shin, and Andy Snell:	“Testing for a unit root in the nonlinear STAR framework”, Journal of Econometrics , Vol. 112, No.2, 2003, pp. 359-379.
Kılıç, Rehim:	“Testing for a unit root in a stationary ESTAR process”, Econometric Reviews , Vol. 30, No. 3, 2011, pp. 274-302.
Kirchgässner, Gebhard, Wolters, Jürgen:	Introduction to Modern Time Series Analysis , Berlin, Springer-Verlag, 2007.
Lazarus, Eben, Lewis, D. J., Stock, J. H., Watson, M. W.:	“HAR inference: Recommendations for practice”, Journal of Business & Economic Statistics , 36(4), 2018, pp. 541-559.
Lütkepohl, Helmut:	“Univariate Time Series Analysis.” Chapter. In Applied Time Series Econometrics , Ed. by Helmut Lütkepohl and Markus Krätzig, Themes in Modern Econometrics, Cambridge, Cambridge University Press, 2004, pp. 8–85.
Maddala, G. S., In-Moo Kim:	Unit Roots, Cointegration, and Structural Change , Themes in Modern Econometrics. Cambridge, Cambridge University Press, 1999.
Martin, Vance, Hurn, Stan, Harris, David:	Econometric modelling with time series: specification, estimation and testing , New York, Cambridge University Press, 2013.
Michael, Panos, A. Robert Nobay, and David A. Peel:	“Transactions costs and nonlinear adjustment in real exchange rates; An empirical investigation”, Journal of political economy , 105, 4, 1997, pp. 862-879.
Mototsugu Shintani:	“The Inf-T Test For A Unit Root Against Asymmetric Exponential Smooth Transition Autoregressive Models”, The Japanese Economic Review , Japanese Economic Association, Vol. 64, No.1, 2013, pp. 3-15.
Newey, Whitney K., and Kenneth D. West:	“A simple, positive semi-definite, heteroskedasticity and

	autocorrelationconsistent covariance matrix”, Technical Working Paper , no.55, National Bureau of Economic Research, Massachusetts, 1986.
Park, Joon Y., Mototsugu Shintani:	“Testing for A Unit Root against Transitional Autoregressive Models”, International Economic Review , Vol. 57, No. 2, 2016, pp. 635-664.
Park, Joon Y., Mototsugu, Shintani:	“Testing for a unit root against transitional autoregressive models”, Working Paper No. 05-W10 , 2005.
Patterson, K.:	Primer Unit Root Testing , London, Palgrave Macmillan UK, 2010.
Patterson, K.:	Unit Root Tests in Time Series: Extensions and Developments , Vol. 2, London, Palgrave Macmillan UK, 2012.
Patterson, K.:	Unit Root Tests in Time Series: Key Concepts and Problems , Vol. 1, London, Palgrave Macmillan UK, 2011.
Pavlidis Efthymios G., Paya, Ivan, Peel, David A., Siriopoulos, Costas:	“Nonlinear dynamics in economics and finance and unit root testing”, Chapter, in New Facets of Economic Complexity in Modern Financial Markets , Ed. By Catherine Kyrtsov, Didier Sornette, Chris Adcock, London, Routledge Taylor & Francis Group, 2020, pp. 235-251.
Perron, Pierre:	“Further evidence on breaking trend functions in macroeconomic variables”, Journal of Econometrics , Vol. 80, 2, 1997, pp. 355-385.
Perron, Pierre:	“The great crash, the oil price shock, and the unit root hypothesis”, Econometrica , 1989, pp. 1361-1401.
Phillips, Peter C. B., and Pierre, Peron:	“Testing for a Unit Root in Time Series Regression”, Biometrika , 75, 2, 1988, pp. 335-346.

Phillips, Peter C. B.:	“Time Series Regression with a Unit Root”, Econometrica , Vol. 55, No. 2, March, 1987, pp. 277-301.
Priestley, Maurice Bertram:	“Basic Considerations in the Estimation of Spectra”, Technometrics , Vol. 4, No.4, pp. 551-564
Rho, Yeonwoo, and Xiaofeng Shao:	“Improving the bandwidth-free inference methods by prewhitening”, Journal of Statistical Planning and Inference , Vol. 143, No.11, 2013, pp. 1912-1922.
Rosenblatt, Murray:	“Remarks on some nonparametric estimates of a density function”, The annals of mathematical statistics , 1956, 832-837.
Rothe, Christoph and Sibbertsen, Philipp:	“Phillips-Perron-type unit root tests in the nonlinear ESTAR framework”, Allgemeines Statistisches Archiv , Vol. 90, 2006, pp. 439-456.
Said, Said E., and David A. Dickey.:	“Testing for unit roots in autoregressive-moving average models of unknown order”, Biometrika , 71(3), 1984, pp. 599-607.
Sollis, Robert:	“A simple unit root test against asymmetric STAR nonlinearity with an application to real exchange rates in Nordic countries”, Economic Modelling , Vol. 26, 2009, pp. 118-125. □ Kruse, Robinson: “A new unit root test against ESTAR based on a class of modified statistics.” Statistical Papers , 52, 2011, pp. 71-85.
Teräsvirta, Timo:	“Specification, estimation, and evaluation of smooth transition autoregressive models,” Journal of the American Statistical Association , Vol. 89, 425, 1994, pp. 208-218.
Tong, Howell,	Threshold Models in Non-linear Time Series Analysis , Springer-Verlag, 1983.

Tsay, Ruey S., Chen, R.:	Nonlinear Time Series Analysis , 1st Edition, USA, John Wiley & Sons, 2019.
Tsay, Ruey S.:	Analysis of Financial Time Series , 1st Edition, USA, John Wiley & Sons, 2002.
Van Dijk, Dick, Philip Hans Franses:	“Modeling multiple regimes in the business cycle”, Macroeconomic Dynamics , Vol. 3, No.3, 1999, pp. 311-340.
Wang, Qunyong, Na Wu:	“Long-run covariance and its applications in cointegration regression”, The Stata Journal , Vol. 12, No.3, 2012, pp. 515-542.
West, Kenneth D.:	“Heteroskedasticity and autocorrelation corrections”, Macroeconometrics and Time Series Analysis , London: Palgrave Macmillan UK, 2018, pp. 135-144.
White, Halbert, Ian Domowitz:	“Nonlinear regression with dependent observations”, Econometrica: Journal of the Econometric Society , 1984 pp. 143-161.
Zeileis, Achim:	“Econometric computing with HC and HAC covariance matrix estimators”, Research Report Series, Journal of Statistical Software , Vol. 11, No. 10, Nov. 2004, pp. 1-17.
Zhang, Lingxiang:	“Performance of unit-root tests for non linear unit-root and partial unit-root processes” Communications in Statistics-Theory and Methods , 45(15), 2016, pp. 4528-4536.
Zivot, E. and Andrews, Donald W. K.:	“Further Evidence On the Great Crash, the Oil Price Shock, and the Unit Root Hypothesis”, Journal of Business and Economic Statistics , 10(10), 1992, pp. 251-270.
Zivot, Eric, Andrews, Donald W. K.:	“Further evidence on the great crash, the oil-price shock, and the unit-root hypothesis”, Journal of Business & Economic Statistics , 1992, Vol. 10, No. 3, 25-44.

EKLER

EK 1: Shintani (2013) için Boyut Düzeltmesi Yapılmış Kritik Değerler, Simetrik ESTAR Model (n=100)

	$inf - t_E$	$inf - t_{E,\mu}$	$inf - t_{E,\tau}$
% 1	-2.920	-3.802	-4.300
% 5	-2.271	-3.167	-3.685
% 10	-1.959	-2.863	-3.395

EK 2: Shintani (2013) için Boyut Düzeltmesi Yapılmış Kritik Değerler, Simetrik ESTAR Model (n=200)

	$inf - t_E$	$inf - t_{E,\mu}$	$inf - t_{E,\tau}$
% 1	-2.927	-3.703	-4.216
% 5	-2.292	-3.124	-3.663
% 10	-1.976	-2.831	-3.375

ÖZGEÇMİŞ

Hüseyin İçen, Çukurova Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Ekonometri lisans eğitimini 2014 yılında, Çukurova Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü'de yüksek lisans eğitimini 2018 yılında tamamlamıştır. 2017 yılında İstanbul Üniversitesi İktisat Fakültesi Ekonometri Bölümü Ekonometri Anabilim Dalında araştırma görevlisi olarak çalışmaya başlamıştır. Yazarın doğrusal olmayan zaman serileri ve panel veri analizi ile ilgili ulusal ve uluslararası bilimsel çalışmaları bulunmaktadır.

