

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**SINIR KATLI NEUTRAL TİP GECİKMELİ DİFERANSİYEL
PROBLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**

DOKTORA TEZİ

Yılmaz EKİNCİ
Danışman: Prof. Dr. Musa ÇAKIR

VAN – 2023

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**SINIR KATLI NEUTRAL TİP GECİKMELİ DİFERANSİYEL
PROBLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**

DOKTORA TEZİ

Yılmaz EKİNCİ

VAN – 2023

KABUL VE ONAY SAYFASI

Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Prof. Dr. Musa ÇAKIR danışmanlığında, Yılmaz EKİNCİ tarafından sunulan “Sınır Katlı Neutral Tip Gecikmeli Diferansiyel Problemlerin Nümerik Çözümleri” başlıklı bu çalışma Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği’nin ilgili hükümleri gereğince 22/12/2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile başarılı bulunmuş ve Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Mehmet Gıyas SAKAR

İmza:

Üye: Prof. Dr. Musa ÇAKIR

İmza:

Üye: Doç. Dr. Erkan ÇİMEN

İmza:

Üye: Doç. Dr. Mustafa KUDU

İmza:

Üye: Doç. Dr. Derya ARSLAN

İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun/...../..... tarih ve sayılı kararı ile onaylanmıştır.

İmza

.....

Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

İmza

Yılmaz EKİNCİ



ÖZET

SINIR KATLI NEUTRAL TİP GECİKMELİ DİFERANSİYEL PROBLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

EKİNCİ, Yılmaz

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Musa ÇAKIR

Aralık 2023, 101 sayfa

Bu çalışmada, lineer ve lineer olmayan singüler pertürbe özellikli birinci mertebeden neutral tip gecikmeli diferansiyel denklemler için sonlu farklar metodu kullanılarak nümerik çözümler ele alınmıştır. Ele alınan problemler için hata teriminin incelemelerinde kullanılacak asimptotik değerlendirmeler yapılmıştır. Kalan terimleri integral biçiminde olan integral özdeşlikleri ile lineer problem için düzgün, Shishkin ve Bakhvalov şebekelerinde ve lineer olmayan problem için de Shishkin ve Bakhvalov şebekelerinde uygun fark şemaları kurulmuştur. Fark şemalarının pertürbasyon parametresine göre ayrık maksimum normda düzgün yakınsaklıkları ve kararlılıkları incelenmiş, ele alınan problemler örnekler üzerinde test edilerek grafik çizimleri yapılmıştır.

Anahtar kelimeler: Düzgün yakınsaklık, Neutral tip gecikmeli diferansiyel denklem, Singüler pertürbe, Sonlu fark metodu



ABSTRACT

NUMERICAL SOLUTIONS OF BOUNDARY LAYERED NEUTRAL TYPE DELAYED DIFFERENTIAL PROBLEMS

EKİNCİ, Yılmaz

Ph.D. Thesis, Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Musa ÇAKIR

December 2023, 101 pages

In this study, numerical solutions are handled by using finite different methods for linear and non-linear first order neutral type delay differential equations with singular perturbation properties. Asymptotic evaluations are made to be used in the analysis of the error term for the problems considered. Appropriate difference schemes, consisting of integral identities where the remainder terms are in integral form, have been established on the uniform, Shishkin and Bakhvalov meshes for the linear problem; and on Shishkin and Bakhvalov meshes for the non-linear problem. The uniform convergence and stability of the difference schemes at discrete maximum norm according to the perturbation parameter are discussed, the problems discussed are tested on examples and graphic drawings are presented.

Keywords: Finite difference method, Neutral type delay differential equation, Singular perturbation, Uniform convergence



TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasında göstermiş olduğu ilgi ve yardımlarından dolayı danışmanım Prof. Dr. Musa ÇAKIR'a ve yakın ilgi ve desteklerinden dolayı Doç. Dr. Erkan ÇİMEN'e, bana uygun çalışma ortamı sağlayan aileme, desteğini esirgemeyen arkadaşlarıma ve bu çalışmada emeği geçen herkese teşekkür ederim.

2023

Yılmaz EKİNCİ





İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER.....	vii
ÇİZELGELER LİSTESİ	ix
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR	xiii
1. GİRİŞ.....	1
2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ	7
3. MODEL DENKLEMLER	11
3.1 Açık AK Ekonomi Modeli	11
3.2 Radyo Frekans Modeli	13
3.3 Kayıpsız İletim Hattı	15
4. TEMEL TANIMLAR VE ÖN BİLGİLER.....	17
5. LİNEER SİNGÜLER PERTÜRBE NEUTRAL TİP GECİKMELİ DİFERANSİYEL PROBLEM.....	25
5.1 Bazı Ön Değerlendirmeler.....	25
5.2 Düzgün Şebeke	33
5.3 Düzgün Şebekede Fark Şemasının Kurulması	33
5.4 Düzgün Şebekede Kararlılık ve Düzgün Yakınsaklık Analizi.....	40
5.5 Düzgün Olmayan Şebekede Fark Şemasının Kurulması	48
5.6 Düzgün Olmayan Şebekede Hata Fonksiyonunun Değerlendirmesi	49
5.7 Shishkin Şebeke (Parçalı Düzgün Şebeke)	51
5.8 Shishkin Şebekede Kalan Teriminin Değerlendirmesi	52
5.9 Bakhvalov Şebeke (Graded Mesh).....	55
5.10 Bakhvalov Şebekede Kalan Teriminin Değerlendirmesi	57
5.11 Nümerik Sonuçlar.....	62
5.12 Bölüm Sonu Değerlendirmesi	69
6. LİNEER OLMAYAN SİNGÜLER PERTÜRBE NEUTRAL TİP GECİKMELİ DİFERANSİYEL PROBLEM.....	71
6.1 Bazı Ön Değerlendirmeler.....	71
6.2 Fark Şemasının Kurulması	79
6.3 Hata Fonksiyonunun Değerlendirmesi	80
6.4 Shishkin Şebekede Kalan Teriminin Değerlendirmesi	82
6.5 Bakhvalov Şebekede Kalan Teriminin Değerlendirmesi	83

6.6 Nümerik Sonuçlar.....	84
6.7 Bölüm Sonu Değerlendirmesi	91
7. TARTIŞMA VE SONUÇ	93
KAYNAKLAR.....	95
ÖZ GEÇMİŞ.....	101



ÇİZELGELER LİSTESİ

Çizelge 5.1 Örnek 5.1 için Shishkin şebekede ε ve N 'nin farklı değerleri için maksimum hatalar ve yakınsama oranları.....	63
Çizelge 5.2 Örnek 5.1 için Bakhvalov şebekede ε ve N 'nin farklı değerleri için maksimum hatalar ve yakınsama oranları.....	66
Çizelge 6.1 Örnek 6.1 için Shishkin şebekede ε ve N 'nin farklı değerleri için maksimum hatalar ve yakınsama oranları.....	86
Çizelge 6.2 Örnek 6.1 için Bakhvalov şebekede ε ve N 'nin farklı değerleri için maksimum hatalar ve yakınsama oranları.....	89



ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1 (1.12) probleminin çözümünün $\varepsilon = 1, 2^{-1}, 2^{-2}$ değerlerine göre değişimi.....	5
Şekil 1.2 (1.12) probleminin çözümünün $\varepsilon = 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}$ değerlerine göre değişimi..	6
Şekil 3.1 Kayıpsız iletim hattı düzeneği.....	15
Şekil 5.1 [0.T] aralığının Shishkin şebekedeki parçalanışı	51
Şekil 5.2 [0.T] aralığının Bakhvalov şebekedeki parçalanışı	56
Şekil 5.3 $\varepsilon = 2^{-4}$ ve $N = 64$ için Örnek 5.1'in [0,2] aralığında Shishkin şebekedeki nümerik çözümü.....	64
Şekil 5.4 $\varepsilon = 2^{-4}$ ve $N = 64$ için Örnek 5.1'in [0,1] aralığında Shishkin şebekedeki nümerik çözümü.....	64
Şekil 5.5 $\varepsilon = 2^{-4}$ ve $N = 64$ için Örnek 5.1'in [1,2] aralığında Shishkin şebekedeki nümerik çözümü.....	65
Şekil 5.6 Farklı ε ve N değerleri için Örnek 5.1'in Shishkin şebekedeki maksimum hata grafiği	65
Şekil 5.7 $\varepsilon = 2^{-4}$ ve $N = 64$ için Örnek 5.1'in [1,2] aralığında Bakhvalov şebekedeki nümerik çözümü.....	67
Şekil 5.8 $\varepsilon = 2^{-4}$ ve $N = 64$ için Örnek 5.1'in [0,1] aralığında Bakhvalov şebekedeki nümerik çözümü.....	67
Şekil 5.9 $\varepsilon = 2^{-4}$ ve $N = 64$ için Örnek 5.1'in [1,2] aralığında Bakhvalov şebekedeki nümerik çözümü.....	68
Şekil 5.10 Farklı ε ve N değerleri için Örnek 5.1'in Bakhvalov şebekedeki maksimum hata grafiği	68
Şekil 6.1 $\varepsilon = 2^{-4}$ ve $N = 64$ için Örnek 6.1'in [0,2] aralığında Shishkin şebekedeki nümerik çözümü.....	86
Şekil 6.2 $\varepsilon = 2^{-4}$ ve $N = 64$ için Örnek 6.1'in [0,1] aralığında Shishkin şebekedeki nümerik çözümü.....	87
Şekil 6.3 $\varepsilon = 2^{-4}$ ve $N = 64$ için Örnek 6.1'in [1,2] aralığında Shishkin şebekedeki nümerik çözümü.....	87
Şekil 6.4 Farklı ε ve N değerleri için Örnek 6.1'in Shishkin şebekedeki maksimum hata grafiği	88
Şekil 6.5 $\varepsilon = 2^{-4}$ ve $N = 64$ için Örnek 6.1'in [0,2] aralığında Bakhvalov şebekedeki nümerik çözümü.....	89

Şekil 6.6 $\varepsilon = 2^{-4}$ ve $N = 64$ için Örnek 6.1'in $[0,1]$ aralığında Bakhvalov şebekedeki nümerik çözümü.....	90
Şekil 6.7 $\varepsilon = 2^{-4}$ ve $N = 64$ için Örnek 6.1'in $[1,2]$ aralığında Bakhvalov şebekedeki nümerik çözümü.....	90
Şekil 6.8 Farklı ε ve N değerleri için Örnek 6.1'in Bakhvalov şebekedeki maksimum hata grafiği	91



SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamalarıyla aşağıda sunulmuştur.

Simgeler

Açıklama

e^N	Şebekedeki maksimum hata
e_ε^N	Şebekedeki tam hata
σ_p	Geçiş noktası
$\varphi(t)$	Başlangıç fonksiyonu
$\psi_i(t)$	Sonlu baz fonksiyonları
ω_h	Şebeke
h	Şebeke adımı
C	Şebeke adımı ve ε 'dan bağımsız genel sabit
$C^n[a, b]$	$[a, b]$ aralığında n . mertebeden sürekli türevlere sahip fonksiyonlar kümesi
N	Şebeke elemanlarının sayısı
$O(h^p)$	Yakınsama hızı
p	Yakınsaklık mertebesi
r	Gecikme parametresi
u	Diferansiyel denklemin analitik çözümü
y	Diferansiyel denklemin yaklaşık çözümü
ε	Pertürbasyon parametresi

Kısaltmalar

Açıklama

DDE	Gecikmeli (Delay) Diferansiyel Denklemler
NDDE	Neutral Tip Gecikmeli Diferansiyel Denklemler
SPNDDE	Singüler Pertürbe Neutral Tip Gecikmeli Diferansiyel Denklemler



1. GİRİŞ

En yüksek mertebeden türev terimi t' 'ye, diğer terimleri t ve t' 'den önceki anlara bağlı olan diferansiyel denklemlere gecikmeli (delay) diferansiyel denklemler (DDEs) denir. En yüksek mertebeden türev teriminde de gecikme varsa bu tip diferansiyel denklemlere de neutral tip gecikmeli diferansiyel denklemler (NDDEs) denir. Gecikmeli ve neutral tip gecikmeli diferansiyel denklemlerle ilgili çalışmalar 1960'lı yıllara dayanmaktadır ve günümüze kadar da bu konularla ilgili varlık-teklik, kararlılık ve çözümleri üzerine çok sayıda çalışma yürütülmektedir (Bellman ve Cooke, 1963; El'sgolts, 1973; Hale, 1977; Jackiewicz, 1987; Kuang ve Feldstein, 1991; Kuang, 1993; Bellen ve Zennaro, 2003; Balachandran vd., 2009; Bellen vd., 2009; Cakir vd., 2022).

Biyoloji, tıp, kimya, fizik, mühendislik, ekonomi vb. alanlardaki hem doğal hem de insan yapımı süreçlerin çoğu zaman gecikmeleri içermektedir. Doğadaki basit bir örnek yeniden ağaçlandırmadır. Kesilen bir ormanın yeniden ağaçlandırılmasının ardından herhangi bir olgunluğa ulaşması uzun bir süre alacaktır. Dolayısıyla orman hasadı ve yenilenmesine ilişkin herhangi bir matematiksel modelin zaman gecikmelerine sahip olması gerekmektedir. Başka bir örnek, hayvanların daha sonraki faaliyet ve sorumluluklarını gerçekleştirmeden önce yiyeceklerini sindirmek için zaman ayırmaları gerekmektedir. Yani gelecek sistemin durumu geçmişteki bazı değişkenlere bağlı olduğundan, daha gerçekçi bir model geçmişin bazı kısımlarını içermelidir. Geçmiş durumları içeren model problemler DDEs ve NDDEs olarak adlandırılır (Bellman ve Cooke, 1963; Kuang, 1993).

Diğer yandan singüler pertürbe olmuş problemlerle ilgili çalışmalar 20. yüzyılın başlarında başlamıştır. Bu dönemde araştırmalar çoğunlukla asimptotik açılımlar üzerine yapılmış ve 1960'lı yıllardan sonraki dönemlerde nümerik çözüm konusunda dikkat çekici sonuçlar elde edilmiştir (Nayfeh, 1973; O'Malley, 1974; Dolan vd., 1980; Kevorkian ve Cole, 1981; Kadalbajoo ve Reddy, 1989; O'Malley, 1991; Nayfeh, 1993; Farrell vd., 2000). Son dönemlerde bu araştırmalar daha çok adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin çeşitli tipleri üzerine yoğunlaşarak devam etmektedir. Bu tür problemler matematiksel olarak en yüksek mertebeden türevlerinin katsayılarının pozitif küçük bir parametre olduğu problemler olarak bilinmektedir. Böyle problemlerin çözümleri, pertürbasyon terimi ε sıfıra yaklaştığında oluşan sınır katmanlarından dolayı problemin

çözümü aniden değişiyorken katmanların dışındaki bölgelerde çözüm davranışları düzenli ve yavaş değişir (Linß, 1985; Roos vd., 1996; Shishkin ve Shishkina, 2009).

Singüler pertürbe neutral tip gecikmeli diferansiyel denklemler (SPNDDEs) iki tip zorluk içermektedir. Birincisi problemin en yüksek mertebeden türev içeren terimin büyük bir gecikme parametresine sahip olmasıdır. Gecikme parametresinin büyük olması Taylor açılımını kullanmayı imkânsız kılmaktadır. Dolayısıyla probleme uygun nümerik yöntem geliştirmek önemlidir. İkinci zorluk ise problemin singüler pertürbe özellikli olmasıdır. Bu, doğal olarak problemin sınır katına sahip olduğunu göstermektedir. Bu tarz problemlerde çözüm, ince geçiş katlarında hızlı, diğer yerlerde düzenli ve yavaş değişir. Bu da nümerik çözüm için ciddi sorunlara sebep olmaktadır. Dolayısıyla, klasik nümerik yöntemleri kararsızlıkları ya da ıraksak olmaları nedeniyle bu tarz problemlere uygulamak imkânsız olmaktadır. Bu sebepten dolayı ε 'na göre düzgün yakınsaklığı sağlayacak uygun nümerik metotların kurulması önem arz etmektedir.

Bu çalışmada birinci mertebeden SPNDDEs ele alınacak, lineer ve lineer olmayan formlarının nümerik çözümleri yapılacaktır. Bu problemlerin yapısı ve sağlaması gereken şartlar aşağıda verilmektedir:

İlk olarak birinci mertebeden lineer singüler pertürbe neutral tip gecikmeli diferansiyel denklemini ele alacağız.

$$\varepsilon[u(t) + a(t)u(t - r)]' + b(t)u(t) + c(t)u(t - r) = f(t), \quad t \in I, \quad (1.1)$$

$$u(t) = \varphi(t), \quad t \in I_0 \quad (1.2)$$

burada $u \in C^1(\bar{I})$, $a(t)$, $b(t) \geq \beta > 0$, $c(t)$, $f(t)$ ve $\varphi(t)$, I ve I_0 'da istenilen mertebeden sürekli türevlere sahip fonksiyonlardır.

Daha sonra birinci mertebeden lineer olmayan singüler pertürbe neutral tip gecikmeli diferansiyel denklemini ele alacağız.

$$\varepsilon[u(t) + a(t)u(t - r)]' + f(t, u(t), u(t - r)) = 0, \quad t \in I, \quad (1.3)$$

$$u(t) = \varphi(t), \quad t \in I_0 \quad (1.4)$$

burada $u \in C^1(\bar{I})$, $a(t)$, $\varphi(t)$ ve $f(t, u(t), v(t))$ sırasıyla $\bar{I}$, I_0 ve $\bar{I} \times R^2$ 'de yeterince düzgün fonksiyonlardır. Bunlara ek olarak

$$0 < \mu \leq \frac{\partial f}{\partial u} \leq M_1, \quad (1.5)$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial v} \right| \leq M_2 \quad (1.6)$$

şartları sağlansın. (1.1)-(1.2) ve (1.3)-(1.4) problemleri için $I = (0, T] = \cup_{p=1}^m I_p$, $I_p = \{t: r_{p-1} < t \leq r_p\}$, $1 \leq p \leq m$ ve $r_s = sr$, $0 \leq s \leq m$ ve $I_0 = [-r, 0]$, $\bar{I} = [0, T]$ (sadelik için T/r 'yi tam sayı olarak kabul edeceğiz yani $T = mr$). r gecikme sabitidir ve $0 < \varepsilon \ll 1$ olacak şekilde küçük bir pozitif parametredir.

(1.1)-(1.2) ve (1.3)-(1.4) problemleri literatürde Hale tipi problemler olarak bilinmektedirler (Hale, 1977). Ayrıca bu problemlerimiz $x = 0$ 'da başlangıç sınır katına ve iç bölgelerde de iç sınır katlarına sahiptirler.

Neutral tip gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin sürdürülebilir olması için ekstradan bir şarta ihtiyaç duyulmaktadır. Fermuar şartı (Sewing condition) olarak adlandırılan bu şart aşağıda verildiği gibidir:

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t-r), x'(t-r)), \quad t_0 \leq t < \infty, \quad r > 0 \quad (1.7)$$

ve başlangıç fonksiyonu $\varphi \in C^1[t_0 - r, t_0]$ olarak verilen neutral tip gecikmeli diferansiyel problem için fermuar şartı (sewing condition),

$$\varphi'(t_0^-) = F(t_0, \varphi(t_0), \varphi'(t_0)) \quad (1.8)$$

olarak belirlenmektedir (Kolmanovskii ve Myshkis, 1992). Böylece (1.8) şartıyla birlikte (1.7) probleminin çözümün sürdürülebilir olduğu söylenir. Bu şart (1.1) ve (1.3) problemlerine uyarlandığında sırasıyla,

$$\varepsilon[\varphi'(0^-) + a'(0)\varphi(-r) + a(0)\varphi'(-r)] + b(0)\varphi(0) + c(0)\varphi(-r) = f(0), \quad (1.9)$$

$$\varepsilon[\varphi'(0^-) + a'(0)\varphi(-r) + a(0)\varphi'(-r)] + f(0, \varphi(0), \varphi(-r)) = 0 \quad (1.10)$$

ifadeleri elde edilir. Diğer yandan bu şarta denk olan

$$u(t) = \varphi(t), \quad -r \leq t \leq 0 \text{ ve } u'(t) = \varphi'(t), \quad -r \leq t \leq 0 \quad (1.11)$$

şartını kullanmakta olan yazarlarda bulunmaktadır (Baker ve Parmuzın, 2008; Enright ve Hayashi, 1998; Baker ve Paul, 2006).

(1.1)-(1.2) ve (1.3)-(1.4) problemlerinde verilen şartlar ve sırasıyla (1.9), (1.10) fermuar şartları (ya da (1.11) şartı) dikkate alınırsa (1.1)-(1.2) ve (1.3)-(1.4) problemlerin varlık-tekliği garanti altına alınmış olur.

Klasik fark şemalarının düzgün şebekede, kararsızlıkları ve ε 'a göre düzgün yakınsak olmamalarını gösteren aşağıdaki örneği inceleyelim.

Örnek 1.1 Aşağıda verilen birinci mertebeden adi diferansiyel problemini ele alalım.

$$\varepsilon u'(x) + u(x) = 0, \quad 0 < x \leq 1, \quad u(0) = 1. \quad (1.12)$$

(1.12) probleminin kesin çözümü,

$$u(x) = e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \quad (1.13)$$

olur. Ayrıca (1.12) problemi için açık Euler şemasını yazalım:

$$\varepsilon y_i = \varepsilon y_{x,i} + y_i = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N, \quad y_0 = 1. \quad (1.14)$$

Burada

$$y_{x,i} = (y_{i+1} - y_i)/h$$

ileri fark türevi ve h şebeke adımındır. (1.14)'ten

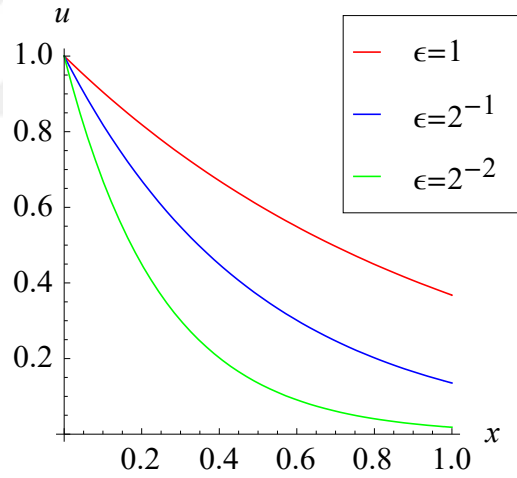
$$y_i = \left(1 - \frac{h}{\varepsilon}\right)^i$$

bulunur. y_i ve (1.3) beraber dikkate alınırsa,

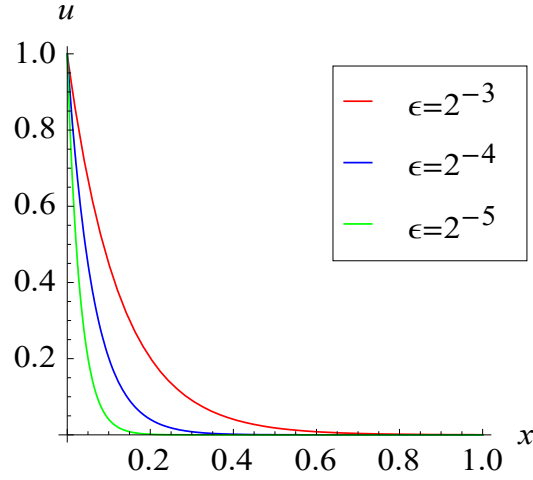
$$\lim_{h \rightarrow 0} |y_i - u(x_i)| = \left| \left(1 - \frac{h}{\varepsilon}\right)^i - e^{-i \frac{h}{\varepsilon}} \right|$$

ifadesi elde edilir. Burada h ve ε değerlerinin oranından dolayı kararsız bir yapı oluşmaktadır. Dolayısıyla ε 'a göre düzgün yakınsaklık yoktur denir (Amirali ve Amirali, 2018).

Singüler pertürbe olmuş problemlerin davranışını örneklemek amacıyla (1.12) probleminin çözümü olan (1.3) denkleminin grafiği, değişen ε değerlerine göre aşağıda Şekil 1.1 ve Şekil 1.2 ile verilmiştir.



Şekil 1.1 (1.12) probleminin çözümünün $\varepsilon = 1, 2^{-1}, 2^{-2}$ değerlerine göre değişimi



Şekil 1.2 (1.12) probleminin çözümünün $\varepsilon = 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}$ değerlerine göre değişimi

Şekil 1.1 ve Şekil 1.2’de görüldüğü gibi küçülen ε değerleri için grafik sınır katının olduğu $x = 0$ noktasına daha fazla yaslanmaktadır. Bu tip davranış singüler pertürbe olmuş diferansiyel denklemlere has bir özelliktir ve başlangıç veya sınır katının varlığının belirtisidir. (1.12) problemi $x = 0$ noktasında bir başlangıç katına sahiptir ve ε küçüldükçe grafik eğrisi koordinat eksenlerine daha fazla yaslanmaktadır.

Singüler pertürbe gecikmeli diferansiyel denklemlerle ilgi literatürde çok sayıda çalışma mevcuttur fakat singüler pertürbe neutral tip gecikmeli diferansiyel denklemlerle ilgi pek bir çalışmaya rastlamadık. Sadece küçük gecikme durumlarında çalışmalar mevcut ve bunların çözümü için Taylor açılımı yardımıyla bazı nümerik çalışmalar sunulmuştur (Kadalbajoo ve Sharma, 2004; Reddy ve ark., 2012). Küçük gecikmeler için Taylor açılımını kullanmak mümkün iken gecikmenin büyük olması durumunda bu yaklaşımı kullanmak mümkün değildir (ihmal edilemeyecek kadar kayıp oluşmaktadır). SPNDDEs için literatürde büyük gecikme ile ilgili herhangi bir çalışmaya rastlanmamakla birlikte 3. bölümde verilen “Kayıpsız İletim Hattı Modeli” bu tezi hazırlamamızdaki temel motivasyon kaynağımızı oluşturmaktadır.

2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

DDE'ler tıp, biyoloji, fizik, kimya, mühendislik, ekonomi ve özellikle enzim kinetiği, enfeksiyon hastalıkları ve immünolojideki matematiksel modeller gibi bilimsel ve teknik alandaki uygulamalarda model denklemler olarak ortaya çıkmaktadır (Driver, 1977; Gopalsamy, 1992; Hairer vd., 2008; Villasana ve Radunskaya, 2003; Foley ve Mackey, 2009; Liz ve Röst, 2013; Martina ve Veronika, 2015; Getto ve Waurick, 2016; Guo ve Ma, 2016; Rihan, 2021).

NDDE'ler popülasyon ekolojisi, kontrol teorisi, salınım teorisi, elektrodinamik, biyomatematik ve tıp bilimi gibi alanlardaki uygulamalarda göze çarpmaktadır (Kuang, 1993; Kolmanovskii ve Myshkis, 1999; Baker vd., 2008; Haderler, 2008; Erneux, 2009; Rihan, 2010; Zeng vd., 2016).

NDDE'lerin çözümünün davranışları, çözümünün varlık-tekliği ve çözümlerin kararlılık sonuçları üzerine çalışmalar yoğun olarak devam etmektedir (Bellman ve Cooke, 1963; El'sgolts, 1973; Hale, 1977; Jackiewicz, 1987; Kuang ve Feldstein, 1991; Kuang, 1993; Palaniswami, 1995; Bellen ve Zennaro, 2003; Zhang vd., 2005; Bellen ve Guglielmi, 2009; Liu vd., 2010; Halas ve Anguelova, 2013; Tunç ve Altun, 2017).

NDDE'lerin kesin çözümünü bulmak çoğunlukla zor olmaktadır. Bu nedenle nümerik yaklaşımlara başvurmak gerekir. Son yıllarda NDDE'lerin sayısal çözümü için birçok yöntem önerilmiştir. Bu yöntemlerin çoğu, sayısal yöntemlerin sıradan diferansiyel denklemler için uyarlamalarıdır. Euler ve Runge-Kutta gibi geleneksel yöntemler kullanılarak NDDE'ler için kapsamlı yaklaşık çözümler sunulmuştur (Bellen ve Zennaro, 2003). Runge-Kutta metodu kullanılarak NDDE'ler kararlı sayısal çözümler verilmiştir (Wen vd., 2015; Wang, 2017). Tek adımlı θ (one-leg θ) ve lineer θ metodları ile yaklaşık çözümler önerilmiştir (Gan, 2009). θ -yöntemi ile NDDE'lerin Hopf çatallanmasının (Hopf bifurcation) korunmasını ele alarak, türetilen sayısal ayrık sistemin dinamiklerini analiz etmektedirler (Su vd., 2013). H-yöntemleri kullanılarak neutral lojistik gecikmeli diferansiyel denklemin sayısal çözümünün salınımlarıyla ilgilenilmiştir (Wang, 2015). Sobolev normlarında block-pulse fonksiyonları ve Legendere polinomlarıyla sayısal çözümler sunulmuştur (Sedaghat vd., 2015). Klasik çözümlerin belirli bir zaman anından sonra NDDE'ler için mevcut olmaması söz konusu olacağı için Utkin (Filippov) tipi zayıf çözümler genişletiyor ve süreksizlikleri ortadan kaldıran yeni bir düzenleme öneriliyor (Guglielmi ve Hairer, 2016). Düzgün şebekede

üstel katsayılı baz fonksiyonları kullanılarak sonlu farklar metoduyla ayırık maksimum normda yaklaşık çözümler sunulmuştur (Ekinci, 2017; Cimen ve Ekinci, 2017). Genelleştirilmiş Lambert W fonksiyonunu kullanarak lineer NDDE'leri çözmek için yeni bir sayısal yöntem önerilmiştir (Jamilla vd., 2020). Lineer olmayan neutral stokastik gecikmeli integro-diferansiyel denklem için bölünmüş adımlı teta (split-step theta) yaklaşımıyla kesin çözüme güçlü bir yakınsaklık ispatlanmış ve sayısal çözümler önerilmiştir (Zhao vd., 2020). Düzgün şebeke üzerinde sonlu farklar metodu kullanılarak neutral tip gecikmeli Volterra integro-diferansiyel denklem için nümerik sonuçlar sunulmuştur (Amirali ve Acar, 2024).

Singüler pertürbe problemler levha teorisi, yarı iletken cihaz modelleri, akışkanlar mekaniği, yüksek Reynolds sayılı akışkan akışında, kuantum mekaniği, reaksiyon-difüzyon süreçleri, elastikiyet gibi bilim ve mühendisliğin çeşitli alanlarındaki matematiksel problemlere uygulanmasında ortaya çıkmaktadır (Doolan vd., 1980; O'Malley, 1991; Nayfeh, 1993; Miller vd., 1996; Farrel vd., 2000).

Singüler pertürbe gecikmeli problemlerle ilgili son yıllarda çok fazla nümerik çalışma mevcuttur. Nümerik olarak çalışılmış bazı singüler pertürbe özellikli gecikmeli problemlere aşağıdaki örnekler verilebilir.

Amiraliyev ve Erdoğan (2007), aşağıdaki birinci mertebeden singüler pertürbe gecikmeli başlangıç değer problemini ele aldılar.

$$\begin{cases} \varepsilon u'(t) + a(t)u(t) + b(t)u(t-r) = f(t), & t \in I, \\ u(t) = \varphi(t), & t \in I_0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Bu problemin çözümü için sonlu farklar metodunu kullanarak her bir alt aralık üzerinde parçalı düzgün şebekede fark şemasının pertürbasyon parametresine göre düzgün yakınsaklığını incelediler.

Geng ve Qian (2014), yukarıdaki problemi ele aldılar ve problemin çözümü için parçalı doğurgan çekirdekli metodu (piecewise reproducing kernel method) kullanarak sınır katlarındaki bozulmayı iyileştirecek sonuçlar elde ettiler.

Amiraliyeva ve Amiraliyev (2009), aşağıdaki birinci mertebeden singüler pertürbe parametrize gecikmeli sınır değer problemini ele aldılar:

$$\begin{cases} \varepsilon u'(t) + f(t, u(t), u(t-r), \lambda) = 0, & t \in I = (0, T], T > 0, \\ u(t) = \varphi(t), & t \in I_0, \quad u(T) = B. \end{cases} \quad (2.2)$$

Sonlu farklar metodunu kullanarak parçalı düzgün şebeke üzerinde, fark şemasının pertürbasyon parametresine göre düzgün yakınsaklığını incelediler.

Liu ve Chen (2014), aşağıdaki küçük gecikmeli ikinci mertebeden singüler pertürbe sınır değer problemini ele aldılar:

$$\begin{cases} -\varepsilon u_\varepsilon''(x) - a(x)u_\varepsilon'(x - \delta) + b(x)u_\varepsilon(x) = f(x), \\ u_\varepsilon(x) = \varphi(x), \quad -\delta \leq x \leq 0, \quad u_\varepsilon(1) = \gamma. \end{cases} \quad (2.3)$$

Gecikme içeren terim, Taylor açılımı kullanılarak gecikme teriminden kurtararak problemi gecikme terimi içermeyen bir singüler pertürbe probleme dönüştürdüler. Daha sonra monitör fonksiyonuyla uygun şebeke üzerinde nümerik çalışmalar sundular.

Amiraliyev ve Cimen (2010), aşağıdaki ikinci mertebeden singüler pertürbe konveksiyon difüzyon gecikmeli sınır değer problemini ele aldılar:

$$\begin{cases} \varepsilon u''(x) + a(x)u'(x) + b(x)u(x-r) = f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = \varphi(x), & x \in \Omega_0; \quad u(l) = B. \end{cases} \quad (2.4)$$

Problemın çözümü için bir düzgün şebeke üzerinde üstel katsayılı fark şeması sundular ve pertürbasyon parametresinden bağımsız olarak ayrık maksimum normda birinci dereceden yakınsaklığı incelediler.

Amiraliyev vd. (2019), aşağıdaki birinci mertebeden singüler pertürbe Volterra integro gecikmeli problemi ele aldılar:

$$\begin{cases} \varepsilon u' + a(t)u + \int_{t-r}^t K(t,s)u(s)ds = f(t), & t \in I, \\ u(t) = \varphi(t), & t \in I_0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Bu problemi çözmek için düzgün şebekede, kalan terimi integral formunda olan üstel baz fonksiyonlarını ve kuadratür formülleri içeren integral özellikli yöntemi kullandılar ve pertürbasyon parametresine göre düzgün yakınsaklığı incelediler.

Podila ve Kumar (2019), aşağıdaki ikinci mertebeden singüler pertürbe gecikmeli sınır değer problemini ele aldılar:

$$\begin{cases} -\varepsilon y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x-1) = f(x), & x \in \Omega, \\ y(x) = \varphi(x), x \in \Omega_0; y(2) = \beta. \end{cases} \quad (2.6)$$

Bu problem için düzgün şebeke üzerinde serbest salınlı çözüm verdiler. Düzgün şebeke üzerinde geleneksel şemalardan daha kesin bir şema önerdiler ve bu şemanın pertürbasyon parametresine göre düzgün yakınsadığını da gösterdiler.

Cimen ve Cakir (2018), aşağıdaki nonlokal şarta sahip singüler pertürbe gecikmeli problemi ele aldılar:

$$\begin{cases} \varepsilon u''(x) + a(x)u'(x) + b(x)u(x) + c(x)u(x-r) = f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = \varphi(x), x \in \Omega_0; \gamma u(l_1) + u(l) = A, l_1 \in \Omega. \end{cases} \quad (2.7)$$

Bu problemin çözümü için sonlu fark metodunun düzgün yakınsaklığını analiz ettiler.

Bartoszewski ve Baranowska (2015), aşağıdaki ikinci mertebeden singüler pertürbe gecikmeli diferansiyel denklemler için sınır değer problemini ele aldılar:

$$\begin{cases} \varepsilon y''(t) = f(x, y(x), y'(x), y(\alpha(x))), & a \leq x \leq b, \\ y(x) = \varphi(x), x \leq a, & y(b) = \psi. \end{cases} \quad (2.8)$$

Bu problemi kübik splineler kullanarak nümerik yaklaşım önerdiler.

3. MODEL DENKLEMLER

Bu bölümde bilimin çeşitli alanlarında ortaya çıkan neutral tip gecikmeli diferansiyel denklemle ifade edilen bazı model denklemler ele alınacaktır. Hücre çoğalması modeli (Baker vd., 1998), popülasyon dinamiği modeli (Kuang ve Felstein, 1991), iki durumlu devre ağı modeli (Chukwu, 1992) ve insan vücut denge modeli (Domoshnitsky vd., 2021) çalışmaları model denklemlere örnek olarak verilebilir. Ayrıca bunların dışında üç farklı model denklem aşağıda detaylı şekilde incelenmiştir.

3.1 Açık AK Ekonomi Modeli

Aşağıdaki formül, ekonominin bir mal veya hizmet olan Y 'yi üretmek için fiziksel sermaye (makine, üretim bandı vs.) K 'yi kullanarak sahip olduğu üretim sürecini temsil eder.

$$Y = AK \quad (3.1)$$

burada, $A > 0$ toplam faktör verimliliğini temsil eder ve birim fiziksel sermayenin birim ürün üretimine katkısını yansıtır.

Aşağıda hanehalkının faydasını ifade eden Ramsey ekonomik modeli verilmiştir. Bu model hanehalklarının temel ekonomik davranışlarını ve kararlarını incelemek için kullanılır.

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho t \frac{C(t)^{1-\theta}-1}{1-\theta}} dt. \quad (3.2)$$

Hanehalkının tüketim malı olan C ile ne kadar fayda sağladığını gösterir. C , " t " zamanında tüketilen mal veya hizmet miktarını temsil eder ve $\theta \geq 0$, $\rho \geq 0$, faydanın zamanla nasıl azaldığını ifade eden bir katsayıdır (iskonto oranlarıdır).

Aşağıdaki formülde de hanehalkının bütçe kısıtını ifade eder. Bu bütçe kısıtı, hanehalkının tüketim kararlarını etkiler.

$$K'(t) - D'(t) = AK(t) - \delta K(t) - rD(t) - C(t). \quad (3.3)$$

Burada

$K'(t)$: Mevcut dönemdeki toplam varlık miktarını,

$D'(t)$: Net yabancı borcu,

$C(t)$: Hanehalkının mevcut dönemdeki tüketimi,

$AK(t) - \delta K(t)$: Gelecek dönemdeki yatırım

$rD(t)$: Borç geri ödemesini temsil etmektedir.

Burada hanehalkı, bütçe kısıtı içinde, mevcut ve gelecek dönemlerdeki tüketim, yatırım ve borç geri ödemesi arasında bir denge kurmaya çalışır. (3.3)'te $\lambda \geq 0$ ve $\tau \geq 0$ olacak şekilde

$$D(t) = \lambda K(t - \tau)$$

dönüşümü yapılırsa aşağıdaki gibi (3.4) elde edilmiş olur.

$$K'(t) = \lambda K'(t - \tau) + (A - \delta)K(t) - r\lambda K(t - \tau) - C(t) \quad (3.4)$$

(3.4)'te Ramsey hanehalklarının borç alma konusunda belirli kısıtlamalar olduğunu ve gelecekteki yatırımlara taahhütte bulunmadığını ifade ediyor. Hanehalkları, geçmişte sahip oldukları rehin değerinin bir kısmına kadar borç alabilirler ancak gelecekteki yatırımları taahhüt etmek zorunda değildir.

Tüketim C ve tasarruf oranı s arasındaki ilişkiyi ifade etmek için

$$C = (1 - s)Y \quad (3.5)$$

denklemini kullanılır. Burada $0 < s < 1$ tasarruf oranını ve Y toplam çıktıyı temsil etmektedir. (3.5) eşitliği (3.4)'te dikkate alınırsa

$$K'(t) = \lambda K'(t - \tau) + \varepsilon K(t) - r\lambda K(t - \tau) \quad (3.6)$$

denklemini elde edilir. Burada $\varepsilon = sA - \delta$ dir. Sonuç olarak (3.6) denklemini neutral tipten gecikmeli bir diferansiyel denklemdir (Boucekkine ve Pintus, 2010).

3.2 Radyo Frekans Modeli

Bu model denklem bir iletim hattı osilatöründe gecikmeye bağlı radyo frekanslarının deneysel gözlemini ifade etmektedir. Kullanılan değişkenler aşağıda verilmektedir.

ψ^R : Sağa doğru hareket eden bir gerilim dalgasıdır.

ψ^L : Sola doğru hareket eden bir gerilim dalgasıdır.

$V(z, t)$: Voltaj (z : konum, t : zaman)

$I(z, t)$: Akım (z : konum, t : zaman)

R_c : Karakteristik impedans

R : Direnç

C : Kapasitans

ρ : Yansıma katsayısı

v_0 : Dalga hızı

Yansıma katsayısı denklemi, standart iletim hattı teorisine göre

$$\rho = \frac{-R - R_c}{-R + R_c}$$

ile verilir. Hat boyunca her noktadaki $V(z, t)$ ve $I(z, t)$ şu şekilde verilen “Telgrafçının denklemleri” olarak ifade edilir.

$$R_c \frac{\partial I(z, t)}{\partial t} = -v_0 \frac{\partial V(z, t)}{\partial z}$$

$$\frac{\partial V(z, t)}{\partial t} = -v_0 R_c \frac{\partial I(z, t)}{\partial z}.$$

Bu denklemlerin genel çözümü şu şekilde verilmektedir:

$$V(z, t) = \psi^R \left(t - \frac{z}{v_0} \right) + \psi^L \left(t + \frac{z}{v_0} \right) \quad (3.7)$$

$$I(z, t) = \frac{1}{R_c} \left\{ \psi^R \left(t - \frac{z}{v_0} \right) - \psi^L \left(t + \frac{z}{v_0} \right) \right\}. \quad (3.8)$$

Burada ψ^R ve ψ^L , sistemin başlangıç koşullarına bağlı ve zamanın keyfi fonksiyonlarını ifade eden, sırasıyla sağa ve sola doğru hareket eden birer gerilim dalgasıdır ve dahası ψ^R ile ψ^L arasında aşağıdaki ilişki mevcuttur.

$$\psi^R(t) = g[\psi^L(t)].$$

Ohm yasasına göre $z = d$ konumu için

$$V(d, t) = -RI(d, t) \quad (3.9)$$

ifadesi tanımlanabilir. Burada (3.7) ve (3.8), (3.9)'da dikkate alınırsa

$$\psi^L(t) = \frac{R + R_c}{R - R_c} g[\psi^L(t - \tau)]$$

eşitliği elde edilir ve $\tau = 2d/v_0$ dır. Bu fark denklem modeli, fiziksel sistem üzerinde sağlıklı bilgiler sağlıyor olsa da fiziksel olarak gerçekçi olmayan anlık sonlu sıçramalara izin verdiği için tam olarak gerçekçi bir model sayılmaz. $z = d$ için daha gerçekçi

$$C \frac{dV(d, t)}{dt} = I(d, t) + \frac{V(d, t)}{R}$$

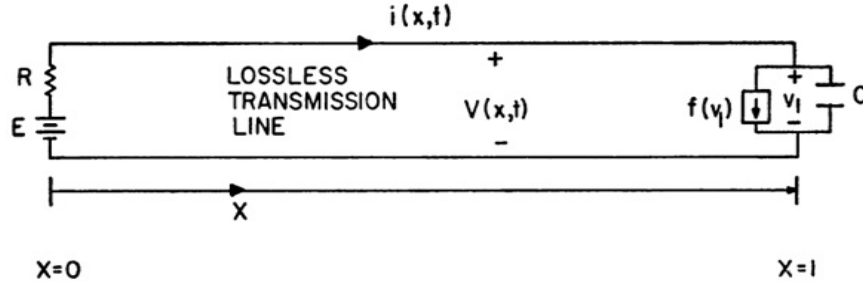
sınır şartı dikkate alınır

$$\begin{aligned} C\dot{\psi}^L(t) = & -\left(\frac{1}{R_c} - \frac{1}{R}\right)\psi^L(t) + \left(\frac{1}{R_c} + \frac{1}{R}\right)g[\psi^L(t - \tau)] \\ & -Cg'[\psi^L(t - \tau)]\dot{\psi}^L(t - \tau) \end{aligned} \quad (3.11)$$

model denklemi elde edilir ve (3.11) denklemi neutral diferansiyel denklem olarak bilinen bir tür fonksiyonel diferansiyel denklemdir (Blakely ve Corron, 2004).

3.3 Kayıpsız İletim Hattı

Lineer olmayan bir devre ile sonlandırılan kayıpsız bir iletim hattındaki küçük genliğin salınımları, pertürbasyon teorisiyle incelenir. Bu sistemi tanımlayan denklemler, bir gecikmeli fark diferansiyel denklemine indirgenir (Brayton, 1967).



Şekil 3.1 Kayıpsız iletim hattı düzeneği

E elektromotor kuvvet, R direnç, L seri indüktans, C birim hat başına paralel kapasitans, C_1 bir toplu paralel kapasitör kapasitansı olarak temsil etmektedir. Burada

$$s = (LC)^{-1/2} \text{ ve } z = (L/C)^{1/2}$$

olsun.

$$C_1[\dot{w}(t) + k\dot{w}(t - \tau)] = f(w(t), w(t - \tau)) \quad (3.12)$$

burada $\tau = 2/s$, $k = (R - z)/(R + z)$ ve

$$f(w(t), w(t - \tau)) = \frac{2E}{z + R} - \frac{1}{z}w(t) + \frac{k}{z}w(t - \tau) - g(w(t)) - kg(w(t - \tau)).$$

Ek olarak, farz edelim ki $R > z$, böylece $0 < k < 1$ olur. $u(t) = w(\tau t)$ dönüşümünü yaparsak:

$$u(t) = w(\tau t), \quad u(t - 1) = w(\tau t - \tau), \quad \frac{\dot{u}(t)}{\tau} = \dot{w}(\tau t), \quad \frac{\dot{u}(t - 1)}{\tau} = \dot{w}(\tau t - \tau)$$

olacaktır. Bu değerler (3.12)'de dikkate alınır

$$\varepsilon[\dot{u}(t) + k\dot{u}(t - 1)] = f(u(t), u(t - 1)) \quad (3.13)$$

denklemleri elde edilir. Burada $\varepsilon = C_1/\tau$ olarak alınmaktadır. Pratikte kapasitans C_1 küçüktür dolayısıyla ε da pozitif küçük bir değerdir. Dolayısıyla (3.13) denklemleri bir singüler pertürbe diferansiyel denklemdir (Huang, 2005).



4. TEMEL TANIMLAR VE ÖN BİLGİLER

Bu bölümde düzgün ve düzgün olmayan şebekede fark şemasının kurulmasında ihtiyaç duyulan temel tanım, teorem, notasyon ve formüller verilmektedir.

Tanım 4.1 Şebeke ve Şebeke Fonksiyonu

a) $\bar{I}$ aralığının sonlu sayıda noktadan oluşan parçalanışına bir şebeke denir. Bu şebekede tanımlanmış fonksiyona ise şebeke fonksiyonu denir.

b) $\bar{I}$ üzerinde tanımlanan

$$\omega_{N_0} = \{t_i: 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N_0} = T\}$$

ayrık noktalar kümesine $\bar{I}$ 'da tanımlanan düzgün olmayan şebeke denir. t_i noktalarına ise düğüm noktaları veya şebeke düğümleri denir. $h_i = t_i - t_{i-1}$ şebeke adımındır.

c) Eğer düğümler eşit aralıklı iseler

$$\omega_{N_0} = \{t_i: t_i = ih, i = 0, 1, 2, \dots, N; h = T/N\}$$

ifadesine $\bar{I}$ aralığındaki düzgün şebeke denir. h sabitine şebeke adımı denir.

d) Düzgün veya düzgün olmayan şebekede tanımlanmış $g_i = g(t_i)$ fonksiyonuna t_i düğüm noktalarındaki şebeke fonksiyonu denir (Samarskii, 2001; Amirali ve Amirali, 2018).

Tanım 4.2 Maksimum Norm ve L_1 Normu

$$\|g\|_{\infty, \bar{I}} = \max_{0 \leq t \leq T} |g(t)|$$

ifadesine $g(t)$ fonksiyonunun $\bar{I}$ aralığındaki maksimum normu denir (Samarskii, 2001; Amirali ve Amirali, 2018).

$$\|g\|_{1,\bar{I}} = \int_0^T |g(x)| dx$$

ifadesine $g(t)$ fonksiyonunun $\bar{I}$ aralığındaki L_1 normu denir (Samarskii, 2001; Amirali ve Amirali, 2018).

Tanım 4.3 Şebeke Normları

$$\|g\|_{\infty,\omega_h} = \max_{0 \leq i \leq N} |g_i|$$

ifadesine düzgün şebekede maksimum normun fark benzeri denir.

$$\|g\|_{\infty,\omega_N} = \max_{0 \leq i \leq N} |g_i|$$

ifadesi düzgün olmayan şebekede maksimum normun fark benzeridir (Samarskii, 2001; Amirali ve Amirali, 2018).

$$\|g\|_{1,\omega_h} = h \sum_{i=1}^{N-1} |g_i|$$

ifadesine düzgün şebekede L_1 normunun fark benzeri denir.

Tanım 4.4 Fark Türevleri

$\bar{I}$ aralığında $g(t)$ fonksiyonu için

$$g_{\bar{t},i} = \frac{g_i - g_{i-1}}{h}$$

ifadesine düzgün şebekede birinci mertebeden geri fark türevi ve

$$g_{\bar{t},i} = \frac{g_i - g_{i-1}}{h_i}$$

ifadesi de düzgün olmayan şebekede birinci mertebeden geri fark türevi olarak bilinir. Burada $h_i = t_i - t_{i-1}$ şebeke adımındır (Samarskii, 2001; Amirali ve Amirali, 2018).

Tanım 4.6 Kararlılık

Lineer

$$Lu = f(t), \quad t \in G \quad (4.1)$$

denkleminin

$$lu = \mu(t), \quad t \in \Gamma \quad (4.2)$$

şartını (sınır şartı veya başlangıç şart olabilir.) sağlayan çözümünün bulunması istensin. Burada $f(t)$, $\mu(t)$ belirli fonksiyonlar (veri fonksiyonları), l belirli bir lineer diferansiyel operatördür. $\bar{G} = G \cup \Gamma$ bölgesinde herhangi bir $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup l_h$ şebekesinin kurulduğunu varsayalım. Burada ω_h -iç şebeke, l_h -sınır şebeke (şebeke sınır noktaları kümesi), h ise şebeke düğümlerinin yoğunluğunu ifade eden parametredir (şebeke adımı). (4.1)-(4.2) problemine karşılık

$$L_h y = \varphi_h, \quad t \in \omega_h, \quad (4.3)$$

$$l_h y = \chi_h, \quad t \in l_h \quad (4.4)$$

fark problemi olsun. Burada, $L_h, l_h - \bar{\omega}_h$ 'da tanımlanan fonksiyonlar kümesinde etkili olan fark operatörleri, φ_h, χ_h belli şebeke fonksiyonlarıdır.

Kararlılık, fark problemleri veya genellikle yaklaşık algoritmalar için bunların pratik uygulanabilmesinin gerektirdiği önemli bir özelliktir.

(4.3)-(4.4) fark problemi, belli sınıflardan olan her bir φ_h, χ_h başlangıç veri fonksiyonları ve yeteri kadar küçük $h \leq h_0$ için bir tek çözüme sahip olduğunu varsayalım. (4.3)-(4.4) probleminin başlangıç veri fonksiyonları $\tilde{\varphi}_h, \tilde{\chi}_h$ olan çözümünü $\tilde{y}$ ile belirleyelim.

h 'a bağlı olmayan C_1, C_2 sabitleri varsa yeteri kadar küçük $h \leq h_0$ için

$$\|\tilde{y} - y\|_1 \leq C_1 \|\tilde{\varphi}_h - \varphi_h\|_2 + C_2 \|\tilde{\chi}_h - \chi_h\|_3 \quad (4.5)$$

eşitsizliği sağlanmış olsun, bu durumda (4.3)-(4.4) fark şeması sağ tarafa ve sınır (veya başlangıç) şartına göre kararludur denir. Burada $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_3$ herhangi şebeke normlarıdır.

(4.3)-(4.4) problemi lineer olduğundan kararlılığı ifade eden (4.5) eşitsizliği

$$\|y\|_1 \leq C_1 \|\varphi_h\|_2 + C_2 \|\chi_h\|_3$$

eşitsizliğine denktir.

Böylece kararlılık, fark şemasının çözümünün başlangıç veri fonksiyonlarına sürekli bağlı olduğuna, hem de bu bağlılığın h 'a göre düzgün biçimli olduğunu ifade eder (Samarskii, 2001; Amirali ve Amirali, 2018).

Tanım 4.7 Yakınsaklık

u , (4.1)-(4.2) probleminin kesin çözümü ve herhangi bir şebekedeki bu probleme uygun fark probleminin çözümü y olsun. $z = y - u$ farkı hata fonksiyonu olarak tanımlanmaktadır.

$h \rightarrow 0$ olduğunda $\|z\|_1 = \|y - u\|_1 \rightarrow 0$ ise ($\|\cdot\|_1$ söz konusu şebekede herhangi bir norm), bu durumda y fark probleminin çözümü u probleminin çözümüne yakınsıyor denir. Ayrıca, yeteri kadar küçük h sabitleri için

$$\|y - u\|_1 \leq Ch^k, \quad k > 0$$

ise (C, h 'a bağlı olmayan sabittir.) bu durumda yaklaşık çözüm kesin çözüme h 'ın k 'ıncı derecesiyle yakınsar veya yaklaşık çözüm $O(h^k)$ kesinliğine sahiptir denir.

Bu tanıma ilave olarak C ve h sabitleri, singüler pertürbe özellikli problemdeki pertürbasyon parametresi olan ε 'dan bağımsız iseler o zaman yaklaşık çözüm, kesin çözüme ε 'na göre düzgün yakınsak olur denir (Samarskii, 2001; Amirali ve Amirali, 2018).

Tanım 4.8 Maksimum Hata ve Yakınsaklık Oranı

Kesin çözümü olmayan problem için çift katlı şebekede yaklaşık çözümlerden biri $y^{\varepsilon,N}$ ve diğeri $\tilde{y}^{\varepsilon,2N}$ olsun. Bu durumda maksimum hata ve maksimum noktasal hata sırasıyla

$$e^{\varepsilon,N} = \|y^{\varepsilon,N} - \tilde{y}^{\varepsilon,2N}\|_{\infty},$$

$$e^N = \max_{\omega_N} e^{\varepsilon,N}$$

olarak belirlenir. Burada $\tilde{y}^{\varepsilon,2N}$ orijinal $t_i \in \omega_N$ şebekesinin noktalarını ve $t_{i+1/2} = (t_i + t_{i+1})/2, i = 0, 1, \dots, N-1$ orta noktalarını içeren nümerik değerlerdir ve p^N düzgün yakınsaklık oranı

$$p^N = \log_2(e^N/e^{2N})$$

biçiminde belirlenir (Farrell vd., 2000).

Tanım 4.9

$f(t), \bar{I}$ 'de tanımlı herhangi bir fonksiyon olsun. Bu durumda $C^n(\bar{I})$ ifadesine $\bar{I}$ aralığında t 'ye göre n . mertebeden sürekli türevlere sahip fonksiyonlar kümesi denir (Samarskii, 2001; Amirali ve Amirali, 2018).

Tanım 4.10

Düzgün şebekede fark şemasının kurulması ve incelenmesinde aşağıda belirtilen bazı kuadratür formülleri kullanılacaktır. Birinci özdeşlik

$$\begin{aligned} \int_a^b p(x)f(x)dx &= \left[\int_a^b p(x)dx \right] \{ \sigma f(b) + (1 - \sigma)f(a) \} \\ &\quad + f[a, b] \int_a^b (x - x^{(\sigma)})p(x)dx + R_n(f) \end{aligned} \quad (4.6)$$

şeklindedir. Burada σ -reel parametre, $p(x) \in C[a, b]$ ağırlık fonksiyonu, $f(x)$ belirli fonksiyon ve

$$R_n(f) = \int_a^b dx p(x) \int_a^b f^{(n)}(\xi) K_{n-1}(x, \xi) d\xi, \quad f \in C^n, \quad n = 1, 2$$

kalan terimdir ve diğer bazı ifadeler aşağıda verilmiştir.

$$K_s(x, \xi) = T_s(x - \xi) - (b - a)^{-1}(x - a)(b - \xi)^s, \quad s = 0, 1,$$

$$x^{(\sigma)} = \sigma b + (1 - \sigma)a, \quad f[a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

$$T_s(\lambda) = \frac{\lambda^s}{s!}, \quad \lambda \geq 0; \quad T_s(\lambda) = 0, \quad \lambda < 0.$$

Bir diğer özdeşlik

$$\int_a^b p(x)f'(x)dx = f[a, b] \int_a^b p(x)dx + R_n^*(f) \quad (4.7)$$

şeklindedir ve burada $p \in C^1[a, b]$ ve kalan terim $R_n^*(f)$ aşağıda verilmiştir.

$$R_n^*(f) = - \int_a^b dx p'(x) \int_a^b f^{(n)}(\xi) K_{n-1}(x, \xi) d\xi, \quad f \in C^n, \quad n = 1, 2.$$

(4.6) ve (4.7) formüllerinde aynı $K_s(x, \xi)$ fonksiyonunun bulunduğunu belirtelim (Amirali ve Amirali, 2018).

Tanım 4.11 Regüler ve Singüler Pertürbe Problem

P_ε problemi ε küçük parametresine bağlı bir problem olsun. Bu problemin u_ε çözümünün $L(u, \varepsilon) = 0$ denklemi ile belirlendiği kabul edilsin. Bu tür problemlere genelde pertürbe olmuş problem denir. $\varepsilon = 0$ durumundaki P_0 probleminin çözümü, başka bir deyişle $L(u_0, 0) = 0$ bağıntısı ile tanımlanan problemin çözümü, u_0 olsun. P_0 problemine, P_ε problemine uygun indirgenmiş problem denir. İndirgenmiş P_0 problemi verilmiş problemle aynı tipe ve mertebeye sahipse, ayrıca her iki problemin de bir tek çözümü varsa P_ε problemine regüler pertürbe olmuş problem, aksi durumda ise singüler pertürbe olmuş problem denir (Amirali ve Amirali, 2018).

Teorem 4.1 Ortalama Değer Teoremi

$u = f(x, y, z)$ fonksiyonu bir D bölgesinde tanımlanmış bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyonun D bölgesinde f_x, f_y, f_z sürekli kısmi türevlerinin var olduğunu kabul edelim. Bu takdirde D bölgesinde herhangi $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ve $M_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$ noktaları için öyle bir $\exists 0 < \theta < 1$ bulunur ki

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0, y_0, z_0) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0) \\ &= f_x(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y, z_0 + \theta \Delta z) \Delta x \\ &\quad + f_y(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y, z_0 + \theta \Delta z) \Delta y \\ &\quad + f_z(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y, z_0 + \theta \Delta z) \Delta z \end{aligned}$$

olur. Buna ortalama değer formülü denir (Musayev vd., 2006).

Teorem 4.2 Maksimum Prensibi

Aşağıdaki fark problemini ele alalım.

$$l_N v_i := \varepsilon v_{\bar{t},i} + a_i v_i = F_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N_0, \quad (4.8)$$

$$v_0 = A. \quad (4.9)$$

Burada $|F_i| \leq \bar{F}_i$, $a \geq \alpha > 0$ ve $\bar{F}_i$ azalmayan fonksiyon olsun. Bu durumda (4.8)-(4.9)'un çözümü,

$$|v_i| \leq |A| + \alpha^{-1} \bar{F}_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N_0 \quad (4.10)$$

eşitsizliğini sağlar (Amiraliyev ve Yılmaz, 2014).

İspat. $\Phi_i^\pm = \pm v_i + |A| + \alpha^{-1} \bar{F}_i$ bariyer fonksiyonunu göz önünde bulunduralım ve $\bar{F}_i$ azalmayan fonksiyon olduğu için $\bar{F}_{\bar{t},i} = (\bar{F}_i - \bar{F}_{i-1})/\tau \geq 0$ olur. Dolayısıyla açık bir şekilde,

$$l_N \Phi_i^\pm \geq \pm \bar{F}_i + a_i \alpha^{-1} \bar{F}_i \geq F_i + \bar{F}_i \geq 0$$

ve

$$\Phi_0^\pm = \pm A + |A| + \alpha^{-1} \bar{F}_0 \geq 0$$

olduğu görülür. Böylece maksimum prensibine göre

$$\Phi_0^\pm \geq 0$$

olur. Dolayısıyla (4.10)'un ispatı tamamlanmış olur (Amiraliyev ve Yılmaz, 2014).

5. LİNEER SİNGÜLER PERTÜRBE NEUTRAL TİP GECİKMELİ DİFERANSİYEL PROBLEM

Bu bölümde (1.1)-(1.2) problemi için Lemma 5.1’de bazı ön değerlendirmeler yapılacaktır. Düzgün şebekede fark şeması kurulacak, düzgün şebekede Lemma 5.2’de kalan terim R_i ’nin, Lemma 5.3’te hata fonksiyonu z_i ’nin değerlendirmesi yapılacaktır ve daha sonra Teorem 5.1’de düzgün şebekede Lemma 5.2 ve Lemma 5.3’ün birleşiminden fark şemasının kararlılığı ve düzgün yakınsaklığı gösterilecektir. Daha sonra düzgün olmayan şebekede fark şeması kurulacak, düzgün olmayan şebekede Lemma 5.4’te hata fonksiyonu z_i ’nin, Lemma 5.5’de Shishkin şebekede kalan terim R_i ’nin ve Lemma 5.6’da Bakhvalov şebekede kalan terim R_i ’nin değerlendirmesi yapılacaktır. Teorem 5.2’de, Lemma 5.4 ve Lemma 5.5’in birleşiminden Shishkin şebekede ve Teorem 5.3’te, Lemma 5.4 ve Lemma 5.6’nın birleşiminden Bakhvalov şebekede fark şemasının kararlılığı ve düzgün yakınsaklığı gösterilecektir. En son bir örnek üzerinde nümerik sonuçlar incelenecek, grafik çizimleri yapılacak ve bölüm değerlendirmesi yapılacaktır.

5.1 Bazı Ön Değerlendirmeler

Bu kısımda nümerik metodumuzu sunmadan önce (1.1)-(1.2) probleminin $u(t)$ çözümün ve türevinin bazı özelliklerini vereceğiz. Uygun nümerik çözümün analizinde bu özelliklere ihtiyaç duyulacaktır.

Lemma 5.1 $a, b, c, f \in C^1(\bar{I})$; $\varphi \in C^1(I_0)$ olduğunu kabul edelim. O zaman (1.1)-(1.2) probleminin u çözümü ve türevi için aşağıdaki değerlendirmeler doğrudur:

$$\|u\|_{\infty, I_p} \leq C_p, 1 \leq p \leq m, \quad (5.1)$$

$$|u'(t)| \leq C \left\{ 1 + \frac{(t-r_{p-1})^{p-1}}{\varepsilon^p} e^{\left(\frac{-\beta(t-r_{p-1})}{\varepsilon}\right)} \right\}, 1 \leq p \leq m. \quad (5.2)$$

Burada

$$C_1 = (1 + 2\|a\|_{\infty, I_1})\|\varphi\|_{\infty, I_0} + \beta^{-1}\{\|f\|_{\infty, I_1} + [\|c\|_{\infty, I_1} + \|a\|_{\infty, I_1}\|b\|_{\infty, I_1}]\|\varphi\|_{\infty, I_0}\},$$

$$C_2 \equiv (1 + \|a\|_{\infty, I_2})C_1 + \|a\|_{\infty, I_2}\|\varphi\|_{\infty, I_0} \\ + \beta^{-1}\{\|f\|_{\infty, I_2} + [\|c\|_{\infty, I_2} + \|a\|_{\infty, I_2}\|b\|_{\infty, I_2}]C_1\},$$

$$C_3 \equiv (1 + \|a\|_{\infty, I_3})C_2 + \|a\|_{\infty, I_3}C_1 + \beta^{-1}\{\|f\|_{\infty, I_3} + [\|c\|_{\infty, I_3} + \|a\|_{\infty, I_3}\|b\|_{\infty, I_3}]C_2\},$$

$$C_p \equiv (1 + \|a\|_{\infty, I_p})C_{p-1} + \|a\|_{\infty, I_p}C_{p-2} \\ + \beta^{-1}\{\|f\|_{\infty, I_p} + [\|c\|_{\infty, I_p} + \|a\|_{\infty, I_p}\|b\|_{\infty, I_p}]C_{p-1}\}.$$

İspat. İlk önce (5.1)'in doğruluğunu göstereceğiz. Bazı düzenlemelerle birlikte (1.1) problemi

$$\varepsilon v'(t) + b(t)v(t) = F(t) \quad (5.3)$$

formunda yazılabilir. Burada,

$$v(t) = u(t) + a(t)u(t - r),$$

$$F(t) = f(t) - [c(t) - a(t)b(t)]u(t - r)$$

olur. (5.1) eşitsizliğini değerlendirmek için tümevarım yöntemini kullanıyoruz. (5.3)'ten

$$v(t) = v(r_{p-1})e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{r_{p-1}}^t b(s)ds} + \frac{1}{\varepsilon} \int_{r_{p-1}}^t F(\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^t b(s)ds} d\tau, \quad t \in I_p \quad (5.4)$$

ifadesi yazılabilir. Daha açık yazmak için $v(t)$ ve $F(t)$ değerlerini (5.4)'te yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
u(t) &= -a(t)u(t-r) + [u(r_{p-1}) + a(r_{p-1})u(r_{p-1}-r)]e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{r_{p-1}}^t b(s)ds} \\
&\quad + \frac{1}{\varepsilon} \int_{r_{p-1}}^t \{f(\tau) - [c(\tau) - a(\tau)b(\tau)]u(\tau-r)\}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^t b(s)ds} d\tau \\
&= -a(t)u(t-r) + [u(r_{p-1}) + a(r_{p-1})u(r_{p-1}-r)]e^{\frac{-\beta(t-r_{p-1})}{\varepsilon}} \\
&\quad + \frac{1}{\varepsilon} \int_{r_{p-1}}^t \{f(\tau) - [c(\tau) - a(\tau)b(\tau)]u(\tau-r)\}e^{\frac{-\beta(t-\tau)}{\varepsilon}} d\tau
\end{aligned} \tag{5.5}$$

eşitliğini elde ediyoruz. Bundan sonraki adımlarda tümevarım yöntemiyle ispat aşamaları verilecektir. $p = 1$ için ($t \in I_1$), (5.5)'ten

$$\begin{aligned}
|u(t)| &\leq |a(t)||u(t-r)| + [|\varphi(0)| + |a(0)||\varphi(-r)|]e^{\frac{-\beta t}{\varepsilon}} \\
&\quad + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \{|f(\tau)| + [|\varphi(\tau)| + |a(\tau)||b(\tau)|]|\varphi(\tau-r)|\}e^{\frac{-\beta(t-\tau)}{\varepsilon}} d\tau \\
\|u\|_{\infty, I_1} &\leq \|a\|_{\infty, I_1} \|\varphi\|_{\infty, I_0} + \|\varphi\|_{\infty, I_0} + \|a\|_{\infty, I_1} \|\varphi\|_{\infty, I_0} \\
&\quad + \{\|f\|_{\infty, I_1} + [\|c\|_{\infty, I_1} + \|a\|_{\infty, I_1} \|b\|_{\infty, I_1}]\|\varphi\|_{\infty, I_0}\} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{\frac{-\beta(t-\tau)}{\varepsilon}} d\tau \\
&\leq \|a\|_{\infty, I_1} \|\varphi\|_{\infty, I_0} + \|\varphi\|_{\infty, I_0} + \|a\|_{\infty, I_1} \|\varphi\|_{\infty, I_0} \\
&\quad + \{\|f\|_{\infty, I_1} + (\|c\|_{\infty, I_1} + \|a\|_{\infty, I_1} \|b\|_{\infty, I_1})\|\varphi\|_{\infty, I_0}\} \beta^{-1} e^{\frac{-\beta t}{\varepsilon}} \\
\|u\|_{\infty, I_1} &\leq (1 + 2\|a\|_{\infty, I_1})\|\varphi\|_{\infty, I_0} \\
&\quad + \beta^{-1}\{\|f\|_{\infty, I_1} + [\|c\|_{\infty, I_1} + \|a\|_{\infty, I_1} \|b\|_{\infty, I_1}]\|\varphi\|_{\infty, I_0}\} \equiv C_1
\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ediyoruz. Dolayısıyla (5.1) eşitsizliğindeki $p = 1$ için ispat yapıldı. Benzer şekilde, (5.5)'ten $p = 2$ için ($t \in I_2$)

$$|u(t)| \leq |a(t)||u(t-r)| + [|u(r)| + |a(r)||u(0)|]e^{\frac{-\beta(t-r)}{\varepsilon}} \\ + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \{|f(\tau)| + [|c(\tau)| + |a(\tau)||b(\tau)|]|u(\tau-r)|\} e^{\frac{-\beta(t-\tau)}{\varepsilon}} d\tau$$

$$\|u\|_{\infty, I_2} \leq \|a\|_{\infty, I_2} \|u\|_{\infty, I_1} + \|u\|_{\infty, I_1} + \|a\|_{\infty, I_2} \|\varphi\|_{\infty, I_0} \\ + \left\{ \|f\|_{\infty, I_2} + [\|c\|_{\infty, I_2} + \|a\|_{\infty, I_2} \|b\|_{\infty, I_2}] \|u\|_{\infty, I_1} \right\} \frac{1}{\varepsilon} \int_r^t e^{\frac{-\beta(t-\tau)}{\varepsilon}} d\tau$$

$$\leq (1 + \|a\|_{\infty, I_2}) C_1 + \|a\|_{\infty, I_2} \|\varphi\|_{\infty, I_0} \\ + \left\{ \|f\|_{\infty, I_2} + [\|c\|_{\infty, I_2} + \|a\|_{\infty, I_2} \|b\|_{\infty, I_2}] C_1 \right\} \beta^{-1} \left(1 - e^{\frac{-\beta(t-r)}{\varepsilon}} \right)$$

$$\|u\|_{\infty, I_2} \leq (1 + \|a\|_{\infty, I_2}) C_1 + \|a\|_{\infty, I_2} \|\varphi\|_{\infty, I_0} \\ + \beta^{-1} \left\{ \|f\|_{\infty, I_2} + [\|c\|_{\infty, I_2} + \|a\|_{\infty, I_2} \|b\|_{\infty, I_2}] C_1 \right\} \equiv C_2$$

eşitsizliğini elde ederiz ve benzer yaklaşımla $p = 3$ için ($t \in I_3$)

$$\|u\|_{\infty, I_3} \leq (1 + \|a\|_{\infty, I_3}) C_2 + \|a\|_{\infty, I_3} C_1 \\ + \beta^{-1} \left\{ \|f\|_{\infty, I_3} + [\|c\|_{\infty, I_3} + \|a\|_{\infty, I_3} \|b\|_{\infty, I_3}] C_2 \right\} \equiv C_3$$

değerlendirmesi yapılabilir. Şimdi, $p = k$ için (5.1) eşitsizliğinin doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$$\|u\|_{\infty, I_k} \leq (1 + \|a\|_{\infty, I_k}) C_{k-1} + \|a\|_{\infty, I_k} C_{k-2} \\ + \beta^{-1} \left\{ \|f\|_{\infty, I_k} + [\|c\|_{\infty, I_k} + \|a\|_{\infty, I_k} \|b\|_{\infty, I_k}] C_{k-1} \right\} \equiv C_k$$

eşitsizliği doğru olsun. Böylece $t \in I_{k+1}$ için değerlendirmenin doğru olduğunu göstermemiz gerekmektedir. (5.5) denkleminde,

$$\begin{aligned} \|u\|_{\infty, I_{k+1}} &\leq (1 + \|a\|_{\infty, I_{k+1}})C_k + \|a\|_{\infty, I_{k+1}}C_{k-1} \\ &\quad + \beta^{-1}\{\|f\|_{\infty, I_{k+1}} + [\|c\|_{\infty, I_{k+1}} + \|a\|_{\infty, I_{k+1}}\|b\|_{\infty, I_{k+1}}]C_k\} \equiv C_{k+1} \end{aligned}$$

ifadesini elde ederiz ve bu da aradığımız sonuçtur. Dolayısıyla $p = k + 1$ için de (5.1) eşitsizliğinin doğruluğu ispatlanmış oldu. Böylece (5.1) eşitsizliğinin ispatı tamamlanır.

Şimdi ise (5.2) eşitsizliğini ispatını verelim: (5.3)'ten bir kere türev alırsak

$$\varepsilon v''(t) + b(t)v'(t) = F'(t) - b'(t)v(t) = \Phi(t), \quad (5.6)$$

denklemini elde edilir. Burada $\Phi(t)$ aşağıda verildiği gibidir:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= f'(t) + [a'(t)b(t) - c'(t)]u(t-r) \\ &\quad + [a(t)b(t) - c(t)]u'(t-r) - b'(t)u(t). \end{aligned}$$

İspat aşamalarına geçmeden önce $\Phi(t)$ için değerlendirme yapalım:

$$\begin{aligned} |\Phi(t)| &\leq |f'(t)| + [|a'(t)||b(t)| + |c'(t)|]|u(t-r)| \\ &\quad + [|a(t)||b(t)| + |c(t)|]|u'(t-r)| + |b'(t)||u(t)|. \end{aligned}$$

Buradan, Lemma 5.1'deki şartlar ve (5.1) eşitsizliği dikkate alınır $\Phi(t)$ için

$$|\Phi(t)| \leq C(1 + |u'(t-r)|) \quad (5.7)$$

yaklaşımı yazılabilir. Daha sonra (5.2)'nin ispatı için, (5.6) denkleminde aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz:

$$v'(t) = v'(r_{p-1})e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{r_{p-1}}^t b(s)ds} + \frac{1}{\varepsilon} \int_{r_{p-1}}^t \Phi(\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^t b(s)ds} d\tau, \quad t \in I_p. \quad (5.8)$$

(5.8) bağıntısını daha açık yazarsak aşağıdaki gibi bir değerlendirme elde ediyoruz:

$$\begin{aligned}
u'(t) &= -a(t)u'(t-r) - a'(t)u(t-r) \\
&+ [u'(r_{p-1}) + a'(r_{p-1})u(r_{p-1}-r) + a(r_{p-1})u'(r_{p-1}-r)]e^{\frac{-1}{\varepsilon} \int_{r_{p-1}}^t b(s)ds} \\
&+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{r_{p-1}}^t \Phi(\tau) e^{\frac{-1}{\varepsilon} \int_{\tau}^t b(s)ds} d\tau.
\end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned}
|u'(t)| &\leq |a(t)||u'(t-r)| + |a'(t)||u(t-r)| + |u'(r_{p-1})|e^{\frac{-\beta(t-r_{p-1})}{\varepsilon}} \\
&+ [|a(r_{p-1})||u'(r_{p-1}-r)| + |a'(r_{p-1})||u(r_{p-1}-r)|]e^{\frac{-\beta(t-r_{p-1})}{\varepsilon}} \\
&+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{r_{p-1}}^t |\Phi(\tau)| e^{\frac{-\beta(t-\tau)}{\varepsilon}} d\tau
\end{aligned} \tag{5.9}$$

ifadesi yazılabilir. Ayrıca (1.1) denkleminde

$$\varepsilon[u'(t) + a(t)u'(t-r)] = -\varepsilon a'(t)u(t-r) - b(t)u(t) - c(t)u(t-r) + f(t)$$

olup, $t = 0$ için

$$\begin{aligned}
|\varphi'(0)| + |a(0)||\varphi'(-r)| &\leq |a'(0)||\varphi(-r)| \\
+ \frac{|b(0)||\varphi(0)| + |c(0)||\varphi(-r)| + |f(0)|}{\varepsilon} &\leq \frac{C}{\varepsilon}
\end{aligned} \tag{5.10}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Bu aşamadan sonra (5.2)'nin ispatı için tümevarım metodunu kullanacağız. Şimdi (5.9) eşitsizliğinden $p = 1$ ($t \in I_1$) için,

$$\begin{aligned}
|u'(t)| &\leq |a(t)||\varphi'(t-r)| + |a'(t)||\varphi(t-r)| \\
&+ [| \varphi'(0)| + |a(0)||\varphi'(-r)| + |a'(0)||\varphi(-r)|]e^{\frac{-\beta t}{\varepsilon}} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t |\Phi(\tau)| e^{\frac{-\beta(t-\tau)}{\varepsilon}} d\tau
\end{aligned}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Burada (5.7) ve (5.10) eşitsizliklerini de dikkate alırsak

$$|u'(t)| \leq C \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{\frac{-\beta}{\varepsilon}} \right) \quad (5.11)$$

ifadesini elde ederiz. Daha sonra $p = k$ ($t \in I_k$) için aşağıda verildiği gibi (5.2) eşitsizliğinin doğru olduğunu kabul edelim.

$$|u'(t)| \leq C \left\{ 1 + \frac{(t-r_{k-1})^{k-1}}{\varepsilon^k} e^{\frac{-\beta(t-r_{k-1})}{\varepsilon}} \right\}. \quad (5.12)$$

Şimdi de $p = k + 1$ ($t \in I_{k+1}$) için doğru olduğunu gösterelim. (5.9) eşitsizliği $p = k + 1$ için aşağıdaki formda yazılabilir:

$$\begin{aligned} |u'(t)| &\leq |a(t)||u'(t-r)| + |a'(t)||u(t-r)| \\ &\quad + [|u'(r_k)| + |a(r_k)||u'(r_{k-1})|] e^{\frac{-\beta(t-r_k)}{\varepsilon}} \\ &\quad + |a'(r_k)||u(r_{k-1})| e^{\frac{-\beta(t-r_k)}{\varepsilon}} + \frac{1}{\varepsilon} \int_{r_k}^t |\Phi(\tau)| e^{\frac{-\beta(t-\tau)}{\varepsilon}} d\tau. \end{aligned} \quad (5.13)$$

İspatın devamı için $u'(r_k)$, $u'(r_{k-1})$ ve $u'(t-r)$ ifadeleri için bazı değerlendirmeleri yapalım. İlk olarak (5.12) eşitsizliğinden $t = r_k$ alınırsa

$$\begin{aligned} |u'(r_k)| &\leq C \left\{ 1 + \frac{(r_k - r_{k-1})^{k-1}}{\varepsilon^k} e^{\frac{-\beta(r_k - r_{k-1})}{\varepsilon}} \right\} \\ &\leq C \left\{ 1 + \frac{r^{k-1}}{\varepsilon^k} e^{\frac{-\beta r}{\varepsilon}} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $x^k e^x \leq C e^{-\gamma x}$, $0 < \gamma < 1$, $x \in [0, \infty)$, $k > 0$ eşitsizliğini uygularsak

$$|u'(r_k)| \leq C, \quad k \geq 1 \quad (5.14)$$

ifadesini elde ederiz. Benzer şekilde

$$|u'(r_{k-1})| \leq C, \quad k \geq 1 \quad (5.15)$$

yaklaşımını da elde ederiz. Yine (5.12) dikkate alınırsa $u'(t-r)$ için

$$\begin{aligned} |u'(t-r)| &\leq C \left\{ 1 + \frac{(t-r-r_{k-1})^{k-1}}{\varepsilon^k} e^{\frac{-\beta(t-r-r_{k-1})}{\varepsilon}} \right\} \\ &\leq C \left\{ 1 + \frac{(t-r_k)^{k-1}}{\varepsilon^k} e^{\frac{-\beta(t-r_k)}{\varepsilon}} \right\} \end{aligned} \quad (5.16)$$

ifadesini elde ederiz ve buradan da

$$|\Phi(t)| \leq C \left\{ 1 + \frac{(t-r_k)^{k-1}}{\varepsilon^k} e^{\frac{-\beta(t-r_k)}{\varepsilon}} \right\} \quad (5.17)$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Bu değerlendirmelerden sonra (5.14), (5.15), (5.16) ve (5.17) eşitsizlikleri (5.13)'te dikkate alırsak

$$\begin{aligned} |u'(t)| &\leq C \left(1 + \frac{(t-r_k)^{k-1}}{\varepsilon^k} e^{\frac{-\beta(t-r_k)}{\varepsilon}} \right) + C e^{\frac{-\beta(t-r_k)}{\varepsilon}} \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} C \int_{r_k}^t \left(1 + \frac{(\tau-r_k)^{k-1}}{\varepsilon^k} e^{\frac{-\beta(\tau-r_k)}{\varepsilon}} \right) e^{\frac{-\beta(t-\tau)}{\varepsilon}} d\tau \\ &\leq C + C \frac{(t-r_k)^{k-1}}{\varepsilon^k} e^{\frac{-\beta(t-r_k)}{\varepsilon}} + C \frac{1}{\varepsilon} \beta^{-1} \varepsilon \left(1 - e^{\frac{-\beta(t-r_k)}{\varepsilon}} \right) + \frac{1}{\varepsilon} C e^{\frac{-\beta(t-r_k)}{\varepsilon}} \frac{(t-r_k)^k}{k \varepsilon^k} \\ &\leq C \left\{ 1 + \frac{(t-r_k)^k}{\varepsilon^{k+1}} e^{\frac{-\beta(t-r_k)}{\varepsilon}} \right\} \end{aligned}$$

son değerlendirmeyi elde ederiz. Bu da (5.2) eşitsizliğinin ispatını verir.

5.2 Düzgün Şebeke

Burada probleme uygun şebeke tanımını vereceğiz. Herhangi $g(t)$ şebeke fonksiyonu için, $g_i = g(t_i)$ olarak kullanacağız ve $u(t)$ 'nin t_i 'deki yaklaşık çözümünü y_i olarak ifade edeceğiz. I üzerinde düzgün şebeke ω_{N_0} olsun:

$$\omega_{N_0} = \{t_i = ih, i = 1, 2, \dots, N_0, h = T/N_0 = r/N\},$$

$$\omega_{N,p} = \{t_i: t_i = r_{p-1} + [i - (p-1)N]h\}, (p-1)N + 1 \leq i \leq pN,$$

$$\omega_{N_0} = \bigcup_{p=1}^m \omega_{N,p},$$

$$\bar{\omega}_{N_0} = \omega_{N_0} \cup \{0\}, \quad \bar{\omega}_{-N} = \{t_i: t_i = -ih, i = -N, -N+1, \dots, 0\}.$$

$g_i = g(t_i)$ şebeke fonksiyonu için probleme uygun şebeke normları aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\|g\|_{\infty, \omega_{N,p}} = \max_{\omega_{N,p}} |g_i|, \quad 1 \leq p \leq m,$$

$$\|g\|_{\infty, \omega_{N_0}} = \max_{\omega_{N_0}} |g_i|, \quad 1 \leq p \leq m.$$

5.3 Düzgün Şebekede Fark Şemasının Kurulması

Burada (1.1)-(1.2) probleminin fark yaklaşımı için

$$\chi_i^{-1} h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} Lu(t) \psi_i(t) dt = \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t) \psi_i(t) dt \quad (5.18)$$

özdeşliğini kullanacağız. Burada $\psi_i(t)$

$$\psi_i(t) = e^{-\frac{b_i}{\varepsilon}(t_i-t)}, \quad t_{i-1} \leq t \leq t_i \quad (5.19)$$

olarak belirlenmiş üstel katsayılı baz fonksiyonudur. Dahası bu fonksiyon

$$-\varepsilon\psi_i'(t) + b_i\psi_i(t) = 0, \quad t_{i-1} \leq t \leq t_i, \quad \psi_i(t_i) = 1$$

probleminin çözümüdür. Ayrıca χ_i

$$\chi_i = h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi_i(t) dt = \frac{1 - e^{-b_i\rho}}{b_i\rho}, \quad \rho = \frac{h}{\varepsilon} \quad (5.20)$$

olarak seçilmiş bir katsayıdır. Şimdi de (5.18) özdeşliğini yeniden düzenlersek

$$\begin{aligned} \chi_i^{-1}h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varepsilon[u(t) + a(t)u(t-r)]'\psi_i(t) dt + \chi_i^{-1}h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} b(t)u(t)\psi_i(t) dt \\ + \chi_i^{-1}h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} c(t)u(t-r)\psi_i(t) dt = \chi_i^{-1}h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\psi_i(t) dt \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Hem eşitliğin sol tarafındaki ikinci ve üçüncü terimlere ve hem de eşitliğin sağ tarafına ekleme çıkarmalar yaparsak

$$\begin{aligned} \chi_i^{-1}h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varepsilon[u(t) + a(t)u(t-r)]'\psi_i(t) dt + \chi_i^{-1}h^{-1}b_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} u(t)\psi_i(t) dt \\ + \chi_i^{-1}h^{-1}c_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} u(t-r)\psi_i(t) dt = \chi_i^{-1}h^{-1}f_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi_i(t) dt \\ + R_i^{(1)} + R_i^{(2)} + R_i^{(3)} \end{aligned} \quad (5.21)$$

özdeşliğini elde ederiz ve (5.21)'de kalan terimler

$$R_i^{(1)} = \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} [b_i - b(t)] u(t) \psi_i(t) dt,$$

$$R_i^{(2)} = \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} [c_i - c(t)] u(t-r) \psi_i(t) dt,$$

$$R_i^{(3)} = \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} [f(t) - f_i] \psi_i(t) dt$$

olarak belirlenir. Daha sonra (5.21) için bazı terimlere (4.6) ve (4.7) kuadratrür formüllerini uygulayacağız. İlk olarak

$$\chi_i^{-1} h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varepsilon [u(t) + a(t)u(t-r)]' \psi_i(t) dt$$

terimine (4.7) formülünü uygularsak

$$\begin{aligned} & \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varepsilon [u(t) + a(t)u(t-r)]' \psi_i(t) dt \\ &= \chi_i^{-1} h^{-1} \varepsilon \left[\frac{u(t_i) + a_i u(t_i-r) - u(t_{i-1}) - a_{i-1} u(t_{i-1}-r)}{h} \right] \int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi_i(t) dt - R_i^{(*)} \\ &= \varepsilon \left[\frac{u(t_i) - u(t_{i-1}) + a_i u(t_i-r) - a_{i-1} u(t_{i-1}-r)}{h} \right] - R_i^{(*)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon \left[\frac{u(t_i) - u(t_{i-1})}{h} + \frac{a_{i-1}u(t_i - r) - a_{i-1}u(t_{i-1} - r)}{h} \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_i u(t_i - r) - a_{i-1}u(t_i - r)}{h} \right] - R_i^{(*)} \\
&\quad \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varepsilon [u(t) + a(t)u(t-r)]' \psi_i(t) dt \\
&= \varepsilon [u_{\bar{t},i} + a_{i-1}u_{\bar{t},i-N} + a_{\bar{t},i}u_{i-N}] - R_i^{(*)}
\end{aligned} \tag{5.22}$$

eşitliğini elde ederiz. Burada kalan terim $R_i^{(*)}$

$$R_i^{(*)} = \chi_i^{-1} h^{-1} \varepsilon \int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi'_i(t) dt \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[u'(s) + \frac{d}{ds} [a(s)u(s-r)] K_0(t,s) \right] ds$$

olarak elde edilmiştir. İkinci olarak

$$\chi_i^{-1} h^{-1} b_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} u(t) \psi_i(t) dt$$

terimine (4.6) formülünü uygularsak

$$\begin{aligned}
\chi_i^{-1} h^{-1} b_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} u(t) \psi_i(t) dt &= \chi_i^{-1} h^{-1} b_i \left[\int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi_i(t) dt \right] u(t_i) \\
&+ \chi_i^{-1} h^{-1} b_i u_{\bar{t},i} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t - t_i) \psi_i(t) dt - R_i^{(**)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \chi_i^{-1} h^{-1} b_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} u(t) \psi_i(t) dt \\
& = b_i u_i + \chi_i^{-1} h^{-1} b_i u_{\bar{t},i} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t - t_i) \psi_i(t) dt - R_i^{(**)}
\end{aligned} \tag{5.23}$$

eşitliğini elde ederiz ve kalan terim

$$R_i^{(**)} = -\chi_i^{-1} h^{-1} b_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi_i(t) dt \int_{t_{i-1}}^{t_i} u'(s) K_0(t, s) ds$$

olarak belirlenir. Burada $R_i^{(*)}$ ve $R_i^{(**)}$ beraber düşünüldüğünde (5.19)'da verilen üstel katsayılı baz fonksiyonu elde edilir ve $R_i^{(*)}$ 'da geriye kalan hata terimi

$$R_i^{(4)} = \chi_i^{-1} h^{-1} \varepsilon \int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi'_i(t) dt \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{d}{ds} [a(s)u(s-r)] K_0(t, s) ds$$

biçiminde olacaktır. Son olarak

$$\chi_i^{-1} h^{-1} c_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} u(t-r) \psi_i(t) dt$$

terimine de (4.6) formülünü uygularsak

$$\begin{aligned}
& \chi_i^{-1} h^{-1} c_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} u(t-r) \psi_i(t) dt = \chi_i^{-1} h^{-1} c_i \left[\int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi_i(t) dt \right] u_{i-N} \\
& + \chi_i^{-1} h^{-1} c_i u_{\bar{t},i-N} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t - t_i) \psi_i(t) dt - R_i^{(5)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \chi_i^{-1} h^{-1} c_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} u(t-r) \psi_i(t) dt = \\
& c_i u_{i-N} + \chi_i^{-1} h^{-1} c_i u_{\bar{t},i-N} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t-t_i) \psi_i(t) dt - R_i^{(5)}
\end{aligned} \tag{5.24}$$

eşitliğini elde ederiz ve burada da kalan terim

$$R_i^{(5)} = -\chi_i^{-1} h^{-1} c_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi_i(t) dt \int_{t_{i-1}}^{t_i} u'(s-r) K_0(t,s) ds$$

olacaktır. (5.21) eşitliğinde (5.22)-(5.23) ve (5.24) değerlendirmeleri dikkate alırsak

$$\begin{aligned}
& \varepsilon [u_{\bar{t},i} + a_{i-1} u_{\bar{t},i-N} + a_{\bar{t},i} u_{i-N}] + \chi_i^{-1} h^{-1} b_i u_{\bar{t},i} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t-t_i) \psi_i(t) dt \\
& + \chi_i^{-1} h^{-1} c_i u_{\bar{t},i-N} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t-t_i) \psi_i(t) dt + b_i u_i + c_i u_{i-N} = f_i + R_i
\end{aligned} \tag{5.25}$$

özdeşliğini elde ederiz. Buradan da (5.19) ve (5.20) dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
\chi_i^{-1} h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t-t_i) \psi_i(t) dt &= \frac{\frac{b_i}{\varepsilon}}{1 - e^{-b_i \frac{h}{\varepsilon}}} \left(h \frac{\varepsilon}{b_i} e^{-\frac{b_i h}{\varepsilon}} - \frac{\varepsilon^2}{b_i^2} + \frac{\varepsilon^2}{b_i^2} e^{-\frac{b_i h}{\varepsilon}} \right) \\
&= \frac{h}{1 - e^{-b_i \frac{h}{\varepsilon}}} e^{-b_i \frac{h}{\varepsilon}} - \frac{\varepsilon}{b_i}
\end{aligned} \tag{5.26}$$

ifadesi bulunur. Bu düzenlemelerle birlikte (5.25)'ten aşağıdaki fark yaklaşımını yazabiliriz:

$$\varepsilon A_i u_{\bar{t},i} + B_i u_{\bar{t},i-N} + b_i u_i + C_i u_{i-N} = f_i + R_i. \tag{5.27}$$

Buradaki katsayılar

$$A_i = b_i \rho \frac{e^{-b_i \rho}}{1 - e^{-b_i \rho}}, \quad B_i = c_i h \frac{e^{-b_i \rho}}{1 - e^{-b_i \rho}} + \varepsilon \left(a_{i-1} - \frac{c_i}{b_i} \right), \quad C_i = c_i + \varepsilon a_{\bar{t},i}$$

olup kalan terim R_i aşağıda verildiği gibidir:

$$R_i = R_i^{(1)} + R_i^{(2)} + R_i^{(3)} + R_i^{(4)} + R_i^{(5)}, \quad (5.28)$$

$$R_i^{(1)} = \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} [b_i - b(t)] u(t) \psi_i(t) dt,$$

$$R_i^{(2)} = \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} [c_i - c(t)] u(t - r) \psi_i(t) dt,$$

$$R_i^{(3)} = \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} [f(t) - f_i] \psi_i(t) dt,$$

$$R_i^{(4)} = \chi_i^{-1} h^{-1} \varepsilon \int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi'_i(t) dt \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{d}{ds} [a(s) u(s - r)] K_0(t, s) ds,$$

$$R_i^{(5)} = -\chi_i^{-1} h^{-1} c_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi_i(t) dt \int_{t_{i-1}}^{t_i} u'(s - r) K_0(t, s) ds.$$

Sonuç olarak (5.27) denkleminde R_i kalan terimi ihmal edilirse

$$\varepsilon A_i y_{\bar{t},i} + B_i y_{\bar{t},i-N} + b_i y_i + C_i y_{i-N} = f_i, \quad 1 \leq i \leq N_0, \quad (5.29)$$

$$y_i = \varphi_i, \quad -N \leq i \leq 0 \quad (5.30)$$

fark yaklaşımı önerilebilir.

5.4 Düzgün Şebekede Kararlılık ve Düzgün Yakınsaklık Analizi

Bu bölümde fark şemasının kararlılığı ve düzgün yakınsaklığı incelenecektir. Lemma 5.2’de kalan terim R_i nin, Lemma 5.3’te hata fonksiyonu z_i nin değerlendirilmesi yapılacaktır. Daha sonra Teorem 5.1’de de bu iki lemmanın birleşiminden kararlılık ve düzgün yakınsaklık gösterilmiş olacaktır.

Bu metodun yakınsaklığını incelemek için, z_i hata fonksiyonunu ele alacağız ve $z_i = y_i - u_i$, $0 \leq i \leq N_0$ hata fonksiyonu aşağıdaki fark probleminin çözümüdür.

$$\varepsilon A_i z_{\bar{t},i} + B_i z_{\bar{t},i-N} + b_i z_i + C_i z_{i-N} = R_i, \quad 1 \leq i \leq N_0, \quad (5.31)$$

$$z_i = 0, \quad -N \leq i \leq 0. \quad (5.32)$$

Buradaki R_i kalan terimi (5.28) bağıntısıyla tanımlanmaktadır.

Lemma 5.2 Eğer, $a \in C^1(I)$, $b, c, f \in C(I)$ ve $\varphi \in C^1(I_0)$ ise o zaman R_i hata fonksiyonu için

$$\|R\|_{1,\omega_{N,p}} \leq Ch, \quad 1 \leq p \leq m$$

ifadesi doğrudur.

İspat. Burada hata terimlerini tek tek ele alacağız. $R_i^{(1)}$ teriminde ortalama değer teoremi kullanılırsa

$$|b(t_i) - b(t)| = |b'(\xi)| |t_i - t|, \quad t, \xi \in [t_{i-1}, t_i],$$

$$|b(t_i) - b(t)| \leq Ch$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Bu eşitsizlik dikkate alınırsa

$$\left| R_i^{(1)} \right| \leq Ch \left[\chi_i^{-1} h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |u(t)| \psi_i(t) dt \right]$$

olur. Burada (5.1) eşitsizliği dikkate alınırsa

$$\left\| R^{(1)} \right\|_{1, \omega_h} \leq Ch \chi_i^{-1} h^{-1} h \sum_{i=1}^{N-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi_i(t) dt$$

ifadesi yazılabilir ve

$$\chi_i = h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi_i(t) dt$$

olduğundan

$$\chi_i^{-1} h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi_i(t) dt = 1$$

eşitliğini elde ederiz. Dolayısıyla

$$\left\| R^{(1)} \right\|_{1, \omega_h} \leq Ch^2 \tag{5.33}$$

olur. $R_i^{(2)}$ hatasını ele alalım. Burada

$$|c(t_i) - c(t)| = |c'(\xi)| |t_i - t|, \quad t, \xi \in [t_{i-1}, t_i]$$

$$|c(t_i) - c(t)| \leq Ch$$

eşitsizliğinden

$$|R_i^{(2)}| \leq Ch \left[\chi_i^{-1} h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} u(t-r) \psi_i(t) dt \right]$$

yazılabilir ve burada (5.1) eşitsizliği de dikkate alınırsa

$$\|R^{(2)}\|_{1,\omega_h} \leq Ch \left[\chi_i^{-1} h^{-1} h \sum_{i=1}^{N-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi_i(t) dt \right] \leq Ch^2 \quad (5.34)$$

yazılabilir. $R_i^{(3)}$ hatasını ele alalım. Burada

$$|f(t) - f(t_i)| = |f'(\xi)| |t - t_i|, \quad t, \xi \in [t_{i-1}, t_i]$$

$$|f(t) - f(t_i)| \leq Ch$$

olur ve bu eşitsizlikle birlikte

$$\|R^{(3)}\|_{1,\omega_h} \leq Ch \left[\chi_i^{-1} h^{-1} h \sum_{i=1}^{N-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi_i(t) dt \right] \leq Ch^2 \quad (5.35)$$

ifadesini elde ederiz. $R_i^{(4)}$ hata terimini ele alalım.

$$R_i^{(4)} = \chi_i^{-1} h^{-1} \varepsilon \int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi'_i(t) dt \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{d}{ds} [a(s)u(s-r)] K_0(t,s) ds.$$

Biliyoruz ki

$$K_0(t, \xi) = T_0(t - \xi) - h^{-1}(t - t_{i-1})$$

$$\left(T_n(\lambda) = \frac{\lambda^n}{n!}, \quad \lambda \geq 0; \quad T_n(\lambda) = 0, \quad \lambda < 0 \right)$$

$$|T_0(t - \xi) - h^{-1}(t - t_{i-1})| \leq 1$$

olur ve

$$\psi_i(t) = e^{-\frac{b_i}{\varepsilon}(t_i-t)}, \quad t_{i-1} \leq t \leq t_i,$$

$$\chi_i = \frac{\varepsilon \left(1 - e^{-b_i \frac{h}{\varepsilon}} \right)}{b_i h}$$

eşitlikleri dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} \chi_i^{-1} h^{-1} \varepsilon \int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi'_i(t) dt &= \frac{b_i h}{\varepsilon \left(1 - e^{-b_i \frac{h}{\varepsilon}} \right)} h^{-1} \varepsilon (\psi_i(t_i) - \psi_i(t_{i-1})) \\ &= \frac{b_i}{1 - e^{-b_i \frac{h}{\varepsilon}}} \left(1 - e^{-b_i \frac{h}{\varepsilon}} \right) = b_i \end{aligned}$$

olup $b \in C(\bar{I})$ olduğundan $|b_i| \leq C$ olur. Dolayısıyla

$$\left| R_i^{(4)} \right| \leq C \int_{t_{i-1}}^{t_i} [|a'(s)| |u(s-r)| + |a(s)| |u'(s-r)|] ds$$

eşitsizliği yazılabilir. Lemma 5.1'den ve $a \in C^1(I)$ şartından,

$$\left| R_i^{(4)} \right| \leq C \int_{t_{i-1}}^{t_i} [1 + |u'(s-r)|] ds$$

olur. Buradan $|u'(t-r)|$ ifadesinin değerlendirmesini yapacağız. Biliyoruz ki (5.2) eğitsizliği ağağıdaki gibi revize edilebilir.

$$|u'(t-r)| \leq C \left\{ 1 + \frac{(t-r_{p-2})^{p-2}}{\varepsilon^{p-1}} e^{\left(\frac{-\beta(t-r_{p-2})}{\varepsilon} \right)} \right\}, \quad 1 \leq p \leq m. \quad (5.36)$$

Buradan $x^k e^x \leq C e^{-\gamma x}$, $0 < \gamma < 1$, $x \in [0, \infty)$, $k > 0$, eęitsizlięini (5.36) eęitsizlięinin sağ tarafına uygularsak

$$|u'(t-r)| \leq C \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{\frac{-\beta\gamma(t-r_{p-2})}{\varepsilon}} \right)$$

eğitsizliği elde edilmiş olur. Bu eğitsizlik $R_i^{(4)}$ ifadesinin değerlendirmesi için dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} \|R^{(4)}\|_{1, \omega_h} &\leq C \left(h + h \sum_{i=1}^{N-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} u'(s-r) ds \right) \\ &\leq C \left(h + h \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{\frac{-\beta\gamma(s-r_{p-2})}{\varepsilon}} ds \right) \\ &\leq Ch \left(T + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T e^{\frac{-\beta\gamma(s-r_{p-2})}{\varepsilon}} ds \right) \\ &\leq Ch \left(T + \beta^{-1} \gamma^{-1} e^{\frac{-\beta\gamma r_{p-2}}{\varepsilon}} \left(e^{\frac{-\beta\gamma T}{\varepsilon}} - 1 \right) \right) \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$\|R^{(4)}\|_{1,\omega_h} \leq Ch \quad (5.37)$$

sonucuna varılır. Son olarak da $R_i^{(5)}$ hata terimini ele alalım. $R_i^{(5)}$ hata terimi aşağıdaki gibidir:

$$R_i^{(5)} = -\chi_i^{-1} h^{-1} c_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi_i(t) dt \int_{t_{i-1}}^{t_i} u'(s-r) K_0(t,s) ds.$$

Yine $R_i^{(4)}$ 'ün değerlendirmesinde olduğu gibi

$$K_0(t, \xi) = T_0(t - \xi) - h^{-1}(t - t_{i-1})$$

$$\left(T_n(\lambda) = \frac{\lambda^n}{n!}, \lambda \geq 0; \quad T_n(\lambda) = 0, \lambda < 0 \right)$$

$$|T_0(t - \xi) - h^{-1}(t - t_{i-1})| \leq 1$$

olur ve

$$\chi_i^{-1} h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi_i(t) dt = 1$$

eşitliği de yazılabildiği için

$$|R_i^{(5)}| \leq C \int_{t_{i-1}}^{t_i} |u'(s-r)| ds$$

eşitsizliği elde edilir. $R_i^{(4)}$ 'ün değerlendirmesine benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\|R^{(5)}\|_{1,\omega_h} &\leq Ch \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{\frac{-\beta\gamma(s-r_{p-2})}{\varepsilon}} ds \\
&\leq Ch \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T e^{\frac{-\beta\gamma(s-r_{p-2})}{\varepsilon}} ds \\
&\leq Ch\beta^{-1}\gamma^{-1}e^{\frac{-\beta\gamma r_{p-2}}{\varepsilon}} \left(e^{\frac{-\beta\gamma T}{\varepsilon}} - 1 \right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan

$$\|R^{(5)}\|_{1,\omega_h} \leq Ch \quad (5.38)$$

ifadesi elde edilir. Sonuç olarak (5.33), (5.34), (5.35), (5.37) ve (5.38) eşitsizlikleri (5.28) eşitliğinde dikkate alınırsa Lemma 5.2'nin doğruluğu gösterilmiş olur.

Lemma 5.3 (5.31)-(5.32) probleminin çözümü olan z_i için

$$\|z\|_{\infty,\omega_{N,p}} \leq C \sum_{k=1}^p \|R\|_{1,\omega_{N,k}}, \quad 1 \leq p \leq m$$

değerlendirmesi doğrudur.

İspat. (5.31) ifadesini

$$\varepsilon A_i z_{\bar{t},i} + b_i z_i = -B_i z_{\bar{t},i-N} - C_i z_{i-N} + R_i$$

olarak yazalım. Burada

$$lz := \varepsilon A_i z_{\bar{t},i} + b_i z_i, \quad (p-1)N < i \leq pN$$

fark operatörü için maksimum prensibi uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\|z\|_{\infty, \omega_{N,p}} &\leq |z_{p-1}| + \beta^{-1}(1 + h + \beta^{-1})\|c\|_{\infty, \omega_{N,p}}\|z\|_{\infty, \omega_{N,p-1}} \\
&\quad + (\varepsilon + 2\varepsilon h^{-1})\|a\|_{\infty, \omega_{N,p}}\|z\|_{\infty, \omega_{N,p-1}} + \beta^{-1}\|R\|_{1, \omega_{N,p}} \\
&\leq \left\{1 + \beta^{-1} \left[(1 + h + \beta^{-1})\|c\|_{\infty, \omega_{N,p}} + (\varepsilon + 2\varepsilon h^{-1})\|a\|_{\infty, \omega_{N,p}} \right] \right\} \|z\|_{\infty, \omega_{N,p-1}} \\
&\quad + \beta^{-1}\|R\|_{1, \omega_{N,p}} \tag{5.39}
\end{aligned}$$

fark eşitsizliği elde edilir. Biliyoruz ki

$$w_p \leq \mu w_{p-1} + \psi_p, \tag{5.40}$$

formundaki birinci mertebeden fark eşitsizliğinin çözümü aşağıdaki gibi verilebilir:

$$w_p \leq w_0 \mu^p + \sum_{s=1}^p \mu^{p-s} \psi_s. \tag{5.41}$$

(5.39) eşitsizliğinde

$$w_p = \|z\|_{\infty, \omega_{N,p}}, \mu = 1 + \beta^{-1} \left[(1 + h + \beta^{-1})\|c\|_{\infty, \omega_{N,p}} + (\varepsilon + 2\varepsilon h^{-1})\|a\|_{\infty, \omega_{N,p}} \right],$$

$$w_{p-1} = \|z\|_{\infty, \omega_{N,p}} \text{ ve } \psi_p = \beta^{-1}\|R\|_{1, \omega_{N,p}}$$

olarak alınırsa (5.39) fark eşitsizliğinin çözümü

$$\begin{aligned}
\|z\|_{\infty, \omega_{N,p}} &\leq \beta^{-1} \sum_{k=1}^p \left[1 \right. \\
&\quad \left. + \beta^{-1} \left[(1 + h + \beta^{-1})\|c\|_{\infty, \omega_{N,p}} + (\varepsilon + 2\varepsilon h^{-1})\|a\|_{\infty, \omega_{N,p}} \right] \right]^{p-k} \|R\|_{1, \omega_{N,k}}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu ise Lemma 5.3'ün ispatıdır.

Önceki iki lemmadan çalışmanın kararlılık ve yakınsaklık sonucunu aşağıdaki gibi formüle edebiliriz.

Teorem 5.1 (5.29)-(5.30) fark probleminin çözümü düğüm noktalarında (1.1)-(1.2) probleminin çözümüne $\varepsilon \leq h$ şartı altında ε 'na göre düzgün yakınsaktır ve yakınsama hızı $O(h)$ biçimindedir. Dolayısıyla $\varepsilon \leq h$ şartı altında aşağıdaki değerlendirme doğrudur:

$$\|y - u\|_{\infty, \bar{\omega}_{N_0}} \leq Ch.$$

İspat. Lemma 5.2 ve Lemma 5.3 beraber düşünülürse teoremin doğruluğu kolaylıkla görünür.

5.5 Düzgün Olmayan Şebekede Fark Şemasının Kurulması

Herhangi $g(t)$ şebeke fonksiyonu için, $g_i = g(t_i)$ olarak kullanacağız ve $u(t)$ 'nin t_i 'deki yaklaşık çözümünü y_i olarak ifade edeceğiz. (1.1) probleminin fark yaklaşımı için aşağıdaki özdeşliği kullanacağız.

$$h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} Lu(t)dt = h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)dt, \quad 1 \leq i \leq N_0 \quad (5.42)$$

(5.42) bağıntısını yeniden düzenlersek

$$\begin{aligned} \varepsilon h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{d}{dt} [u(t) + a(t)u(t-r)]dt + h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} b(t)u(t)dt \\ + h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} c(t)u(t-r)dt = h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)dt \end{aligned} \quad (5.43)$$

yazabiliriz. (5.43) bağıntısındaki ilk terim hariç diğer integral ifadelerine kısmi integrasyon uygularsak (1.1) denklemini için aşağıdaki fark yaklaşımını elde ederiz:

$$\varepsilon[u_{t,i} + a_{i-1}u_{t,i-N} + a_{t,i}u_{i-N}] + b_i u_i + c_i u_{i-N} = f_i + R_i, i = 1, 2, \dots, N_0. \quad (5.44)$$

Burada kalan terim R_i aşağıdaki gibidir:

$$R_i = h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t - t_{i-1}) \frac{d}{dt} [b(t)u(t) + c(t)u(t-r) - f(t)] dt. \quad (5.45)$$

(5.44) fark yaklaşımındaki R_i hata terimini ihmal edersek (1.1)-(1.2) problemi için aşağıdaki fark şemasını önerebiliriz:

$$\varepsilon[y_{t,i} + a_{i-1}y_{t,i-N} + a_{t,i}y_{i-N}] + b_i y_i + c_i y_{i-N} = f_i, i = 1, 2, \dots, N_0, \quad (5.46)$$

$$y_i = \varphi_i, -N \leq i \leq 0. \quad (5.47)$$

5.6 Düzgün Olmayan Şebekede Hata Fonksiyonunun Değerlendirmesi

Bu metodun yakınsaklığını incelemek için $z_i = y_i - u_i$, $0 \leq i \leq N_0$ hata fonksiyonu aşağıdaki fark probleminin çözümüdür.

$$\varepsilon[z_{t,i} + a_{i-1}z_{t,i-N} + a_{t,i}z_{i-N}] + b_i z_i + c_i z_{i-N} = R_i, 1 \leq i \leq N_0, \quad (5.48)$$

$$z_i = 0, -N \leq i \leq 0. \quad (5.49)$$

Buradaki R_i , (5.45) denkleminde verilen hata terimidir.

Lemma 5.4 (5.48)-(5.49) probleminin çözümü olan z_i için aşağıdaki değerlendirme doğrudur:

$$\|z\|_{\infty, \omega_{N,p}} \leq C \sum_{k=1}^p \|R\|_{\infty, \omega_{N,k}}, \quad 1 \leq p \leq m.$$

İspat. (5.48) denkleminde,

$$\varepsilon z_{\bar{t},i} + b_i z_i = -\varepsilon a_{i-1} z_{\bar{t},i-N} - \varepsilon a_{\bar{t},i} z_{i-N} - c_i z_{i-N} + R_i, \quad 1 \leq i \leq N_0 \quad (5.50)$$

eşitliği yazılabilir. Burada

$$\ell z_i \equiv \varepsilon z_{\bar{t},i} + b_i z_i, \quad (p-1)N < i \leq pN$$

fark operatörü için maksimum prensibi uygulanırsa

$$\begin{aligned} \|z\|_{\infty, \omega_{N,p}} &\leq |z_{p-1}| + \beta^{-1} \left\{ (3\varepsilon \|a\|_{\infty, \omega_{N,p}} + \|c\|_{\infty, \omega_{N,p}}) \|z\|_{\infty, \omega_{N,p-1}} + \|R\|_{\infty, \omega_{N,p}} \right\} \\ &\leq \left\{ 1 + \beta^{-1} (3\varepsilon \|a\|_{\infty, \omega_{N,p}} + \|c\|_{\infty, \omega_{N,p}}) \right\} \|z\|_{\infty, \omega_{N,p-1}} + \beta^{-1} \|R\|_{\infty, \omega_{N,p}} \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan (5.40) formundaki birinci mertebeden fark eşitsizliğinin çözümü olan (5.41) eşitsizliğini kullanacağız.

$$w_p = \|z\|_{\infty, \omega_{N,p}}, \quad \mu = 1 + \beta^{-1} (3\varepsilon \|a\|_{\infty, \omega_{N,p}} + \|c\|_{\infty, \omega_{N,p}})$$

$$w_{p-1} = \|z\|_{\infty, \omega_{N,p-1}} \text{ ve } \psi_p = \beta^{-1} \|R\|_{\infty, \omega_{N,p}}$$

olarak alınırsa

$$\|z\|_{\infty, \omega_{N,p}} \leq \beta^{-1} \sum_{s=1}^p \left[1 + \beta^{-1} (3\varepsilon \|a\|_{\infty, \omega_{N,p}} + \|c\|_{\infty, \omega_{N,p}}) \right]^{p-s} \|R\|_{\infty, \omega_{N,k}}$$

ifadesi elde edilir. Bu da Lemma 5.4'ün ispatıdır.

5.7 Shishkin Şebeke (Parçalı Düzgün Şebeke)

I üzerinde düzgün olmayan şebeke ω_{N_0} olsun:

$$\omega_{N_0} = \{0 < t_0 < t_1 < \dots < t_{N_0} = T, \quad h_i = t_i - t_{i-1}\}$$

I_p her bir alt aralıklarında N şebeke noktalarını içerir ($1 \leq p \leq m$).

$$\omega_{N,p} = \{t_i: (p-1)N + 1 \leq i \leq pN\}, \quad 1 \leq p \leq m,$$

$$\omega_{N_0} = \bigcup_{p=1}^m \omega_{N,p},$$

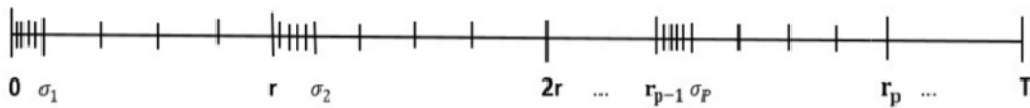
$$\bar{\omega}_{N_0} = \omega_{N_0} \cup \{0\}$$

şeklinde verilmektedir. $g_i = g(t_i)$ şebeke fonksiyonu için probleme uygun şebeke normları aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\|g\|_{\infty, \omega_{N,p}} = \max_{\omega_{N,p}} |g_i|, \quad 1 \leq p \leq m,$$

$$\|g\|_{\infty, \omega_{N_0}} = \max_{\omega_{N_0}} |g_i|, \quad 1 \leq p \leq m.$$

(5.46)-(5.47) fark şemasının ε 'na göre düzgün yakınsak olması için Shishkin şebekesini kullanacağız. N çift sayıları için parçalı düzgün $\omega_{N,p}$ şebekesini $[r_{p-1}, \sigma_p]$ ve $[\sigma_p, r_p]$ aralıklarının her birini $N/2$ tane eşit alt aralıklara böleceğiz. Bu bölünen aralıklar parçalı düzgün şebekede aşağıdaki doğru parçasında gösterildiği gibidir:



Şekil 5.1 $[0, T]$ aralığının Shishkin şebekedeki parçalanışı

Burada σ_p geçiş noktası,

$$\sigma_p = r_{p-1} + \min\left\{\frac{r}{2}, \beta^{-1} \varepsilon \ln N\right\} \quad (5.51)$$

şebekenin kalın ve ince kısımlarını birbirinde ayıran geçiş noktasıdır.

Burada $h_p^{(1)}$ ve $h_p^{(2)}$ adım uzunlukları, sırasıyla aşığıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$h_p^{(1)} = 2(\sigma_p - r_{p-1})N^{-1}, \quad h_p^{(2)} = 2(r_p - \sigma_p)N^{-1}, \quad 1 \leq p \leq m. \quad (5.52)$$

Şebekenin noktalar kümesi aşığıdaki şekilde verilmektedir:

$$t_i = r_{p-1} + (i - (p-1)N)h_p^{(1)}, \quad i = (p-1)N, \dots, \left(p - \frac{1}{2}\right)N, \quad (5.53)$$

$$t_i = \sigma_p + \left(i - \left(p - \frac{1}{2}\right)N\right)h_p^{(2)}, \quad i = \left(p - \frac{1}{2}\right)N + 1, \dots, pN, \quad 1 \leq p \leq m. \quad (5.54)$$

5.8 Shishkin Şebekede Kalan Teriminin Değerlendirmesi

Lemma 5.5 Eğer $a \in C^1(I)$, $b, c, f \in C(I)$ ve $\varphi \in C^1(I_0)$, o zaman R_i hata fonksiyonu

$$\|R\|_{\infty, \omega_{N,p}} \leq CN^{-1} \ln N, \quad 1 \leq p \leq m \quad (5.55)$$

değerlendirmesini sağlar.

İspat. (5.45)'ten

$$|R_i| \leq h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t - t_{i-1}) \frac{d}{dt} |b(t)u(t) + c(t)u(t-r) - f(t)| dt$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Bu eşitsizlikte, (5.1) ve Lemma 5.1'in şartlarını dikkate alırsak aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz:

$$|R_i| \leq C \left\{ h_i + \int_{t_{i-1}}^{t_i} [|u'(t)| + |u'(t-r)|] dt \right\}.$$

Buradan da (5.2) eşitsizliğini göz önüne aldığımızda aşağıdaki değerlendirmeyi buluruz:

$$|R_i| \leq C \left\{ h_i + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[\frac{(t-r_{p-1})^{p-1}}{\varepsilon^p} e^{\left(\frac{-\beta(t-r_{p-1})}{\varepsilon}\right)} + \frac{(t-r_{p-2})^{p-2}}{\varepsilon^{p-1}} e^{\left(\frac{-\beta(t-r_{p-2})}{\varepsilon}\right)} \right] dt \right\}. \quad (5.56)$$

Daha sonra $x^k e^x \leq C e^{-\gamma}$, $0 < \gamma < 1$, $x \in [0, \infty)$, $k > 0$, eşitsizliğini (5.56) eşitsizliğine uygularsak (5.56) eşitsizliğini

$$|R_i| \leq C \left\{ h_i + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[e^{\left(\frac{-\beta\gamma(t-r_{p-1})}{\varepsilon}\right)} \right] dt \right\}$$

formuna indirgemiş oluruz.

Her bir $\omega_{N,p}$ alt aralığında kalan terimi değerlendireceğiz. İlk önce

$$\sigma_p = r_{p-1} + r/2$$

durumunu göz önünde bulunduralım. Dolayısıyla

$$r/2 \leq \beta^{-1} \gamma^{-1} \varepsilon \ln N \text{ ve } h_p^{(1)} = h_p^{(2)} = h_p = r/N$$

olur. Böylece

$$|R_i| \leq C \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{\frac{-\beta\gamma(t-r_{p-1})}{\varepsilon}} \right] dt \leq C(1 + \varepsilon^{-1})h_i \quad (5.57)$$

$$|R_i| \leq C \frac{r}{N} \left(1 + \frac{2}{r} \beta^{-1} \gamma^{-1} \ln N \right)$$

yaklaşımı verilebilir. Buradan da

$$|R_i| \leq CN^{-1} \ln N, \quad (p-1)N \leq i \leq pN, \quad 1 \leq p \leq m \quad (5.58)$$

sonucuna varılabilir. Şimdi de

$$\sigma_p = r_{p-1} + \beta^{-1} \gamma^{-1} \varepsilon \ln N$$

durumunu göz önünde bulunduracağız ve R_i 'yi, $[r_{p-1}, \sigma_p]$ ve $[\sigma_p, r_p]$ aralıklarında sırasıyla değerlendireceğiz. Önce $[r_{p-1}, \sigma_p]$ sınır bölgesini ele alalım. (5.57)'den

$$\begin{aligned} |R_i| &\leq C(1 + \varepsilon^{-1})h_i^{(1)} = C(1 + \varepsilon^{-1})2\beta^{-1}\gamma^{-1}\varepsilon N^{-1} \ln N \\ &\leq C(2\beta^{-1}\gamma^{-1}\varepsilon N^{-1} \ln N + 2\beta^{-1}\gamma^{-1}N^{-1} \ln N) \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan da aşağıdaki eşitsizliğe varılabilir.

$$|R_i| \leq CN^{-1} \ln N, \quad (p-1)N \leq i \leq (p-1/2)N, \quad 1 \leq p \leq m. \quad (5.59)$$

Daha sonra $[\sigma_p, r_p]$ aralığında $(p-1/2)N + 1 \leq i \leq pN$ için R_i 'yi değerlendirelim.

$$t_i = \sigma_p + (i - (p-1/2)N)h_p^{(2)} = r_{p-1} + \beta^{-1}\gamma^{-1}\varepsilon \ln N + (i - (p-1/2)N)h_p^{(2)}$$

olduğu için

$$|R_i| \leq C \left\{ h_p^{(2)} + \beta^{-1} \gamma^{-1} N^{-1} \left[e^{\frac{-\beta \gamma}{\varepsilon}(i-1-(p-1/2)N)h_p^{(2)}} - e^{\frac{-\beta \gamma}{\varepsilon}(i-(p-1/2)N)h_p^{(2)}} \right] \right\}$$

$$|R_i| \leq C \left\{ h_p^{(2)} + \beta^{-1} \gamma^{-1} N^{-1} e^{\frac{-\beta \gamma}{\varepsilon}(i-1-(p-1/2)N)h_p^{(2)}} \left(1 - e^{\frac{-\beta \gamma}{\varepsilon}h_p^{(2)}} \right) \right\}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Buradan da

$$|R_i| \leq CN^{-1}, \quad (p-1/2)N+1 \leq i \leq pN \quad (5.60)$$

olduğu görülebilir. Sonuç olarak (5.58), (5.59) ve (5.60) beraber dikkate alınırsa (5.55) eşitsizliğinin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 5.2 (1.1)-(1.2) probleminin çözümü u ve (5.46)-(5.47) probleminin çözümü y olsun. Bu durumda

$$\|y - u\|_{\infty, \bar{\omega}_{N_0}} \leq CN^{-1} \ln N$$

ifadesi doğrudur.

İspat. Lemma 5.4 ve Lemma 5.5 beraber dikkate alınırsa teoremin doğruluğu kolaylıkla görünür.

5.9 Bakhvalov Şebeke (Graded Mesh)

I üzerinde düzgün olmayan şebeke ω_{N_0} olsun.

$$\omega_{N_0} = \{0 < t_0 < t_1 < \dots < t_{N_0} = T, \quad h_i = t_i - t_{i-1}\}.$$

I_p her bir alt aralıklarında N şebeke noktalarını içerir:

$$\omega_{N,p} = \{t_i: (p-1)N+1 \leq i \leq pN\}, \quad 1 \leq p \leq m,$$

$$\omega_{N_0} = \cup_{p=1}^m \omega_{N,p},$$

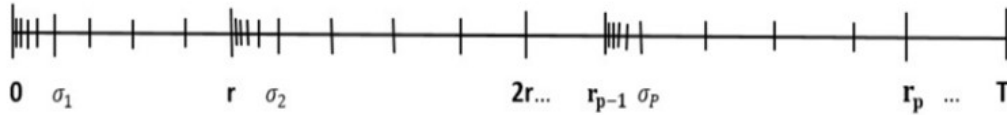
$$\bar{\omega}_{N_0} = \omega_{N_0} \cup \{0\}$$

şeklinde verilmektedir. $g_i = g(t_i)$ şebeke fonksiyonu için probleme uygun şebeke normları aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\|g\|_{\infty, \omega_{N,p}} = \max_{\omega_{N,p}} |g_i|, \quad 1 \leq p \leq m,$$

$$\|g\|_{\infty, \omega_{N_0}} = \max_{\omega_{N_0}} |g_i|, \quad 1 \leq p \leq m.$$

(5.46)-(5.47) fark şemasının ε 'na göre düzgün yakınsak olması için düzgün olmayan Bakhvalov şebeke olarak bilinen özel bir şebeke kullanacağız. N çift sayısı için $[0, T]$ aralığı, $[r_{p-1}, r_p]$ alt aralıklarından oluşmaktadır. Buradaki her bir $[r_{p-1}, r_p]$ aralıklarını da $[r_{p-1}, \sigma_p]$ ve $[\sigma_p, r_p]$ alt aralıklarına bölelim. Bu bölünen aralıklar Bakhvalov şebekede aşağıdaki doğru parçasında gösterildiği gibidir:



Şekil 5.2 $[0, T]$ aralığının Bakhvalov şebekedeki parçalanışı

Burada σ_p geçiş noktası,

$$\sigma_p = r_{p-1} + \min \left\{ \frac{r}{2}, -\beta^{-1} \gamma^{-1} \varepsilon \ln \varepsilon \right\}, \quad 0 < \gamma < 1 \quad (5.61)$$

şebekenin kalın ve ince kısımlarını birbirinde ayıran geçiş noktasıdır. Şebeke noktalar kümesi de aşağıdaki gibi verilebilir:

$$t_i \in [r_{p-1}, \sigma_p]: \sigma_p < r_{p-1} + \frac{r}{2} \text{ için}$$

$$t_i = r_{p-1} - \beta^{-1} \gamma^{-1} \varepsilon \ln \left[1 - (1 - \varepsilon) \frac{2(i - (p-1)N)}{N} \right], \quad (5.62)$$

$$(p-1)N + 1 \leq i \leq \frac{(2p-1)N}{2},$$

$t_i \in [r_{p-1}, \sigma_p]: \sigma_p = r_{p-1} + \frac{r}{2}$ için

$$t_i = r_{p-1} - \beta^{-1} \gamma^{-1} \varepsilon \ln \left[1 - \left(1 - e^{-\frac{\beta r_p}{2\varepsilon}} \right) \frac{2(i - (p-1)N)}{N} \right], \quad (5.63)$$

$$(p-1)N + 1 \leq i \leq \frac{(2p-1)N}{2},$$

$$t_i \in [\sigma_p, r_p]: t_i = \sigma_p + \left(i - (2p-1) \frac{N}{2} \right) \frac{2(r_p - \sigma_p)}{N}, \quad (5.64)$$

$$\frac{(2p-1)N}{2} + 1 \leq i \leq pN; \quad 1 \leq p \leq N.$$

Bakhvalov şebekede (5.61), (5.62), (5.63) ve (5.64) dikkate alınarak hata değerlendirmesi yapılacaktır.

5.10 Bakhvalov Şebekede Kalan Teriminin Değerlendirmesi

Lemma 5.6 Lemma 5.1'in şartları altında, (5.46)-(5.47) şemasının kalan terimi R_i için

$$\|R\|_{\infty, \omega_{N,p}} \leq CN^{-1}, \quad 1 \leq p \leq m \quad (5.65)$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat. R_i kalan terimi aşağıdaki gibidir:

$$|R_i| \leq C \left\{ h_i + \int_{t_{i-1}}^{t_i} [|u'(t)| + |u'(t-r)|] dt \right\}.$$

Burada (5.2) eşitsizliğini göz önüne aldığımızda aşağıdaki değerdendirmeyi buluruz:

$$|R_i| \leq C \left\{ h_i + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[\frac{(t - r_{p-1})^{p-1}}{\varepsilon^p} e^{\left(\frac{-\beta(t-r_{p-1})}{\varepsilon} \right)} + \frac{(t - r_{p-2})^{p-2}}{\varepsilon^{p-1}} e^{\left(\frac{-\beta(t-r_{p-2})}{\varepsilon} \right)} \right] dt \right\}. \quad (5.66)$$

$x^k e^x \leq C e^{-\gamma x}$, $0 < \gamma < 1$, $x \in [0, \infty)$, $k > 0$, eşitsizliğı (5.66) eşitsizliğine uygulanıp gerekli düzenlemeler yapıldığında (5.66)

$$|R_i| \leq C \left\{ h_i + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[e^{\left(\frac{-\beta\gamma(t-r_{p-1})}{\varepsilon} \right)} \right] dt \right\} \quad (5.67)$$

eşitsizliğine indirgenmiş olur. İlk olarak

$$\sigma_p < r_{p-1} + \frac{r}{2}$$

durumunu göz önünde bulunduralım. Buradan

$$\sigma_p = r_{p-1} - \beta^{-1} \gamma^{-1} \varepsilon \ln \varepsilon$$

olur. $[r_{p-1}, \sigma_p]$ sınır bölgesinde (5.67)'den aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$|R_i| \leq C \left\{ h_i + \beta^{-1} \gamma^{-1} \left[e^{\frac{-\beta\gamma(t_{i-1}-r_{p-1})}{\varepsilon}} - e^{\frac{-\beta\gamma(t_i-r_{p-1})}{\varepsilon}} \right] \right\}, \quad (5.68)$$

$$(p-1)N + 1 \leq i \leq \frac{(2p-1)N}{2}.$$

Burada

$$h_i = t_i - t_{i-1} = \beta^{-1}\gamma^{-1}\varepsilon \left\{ -\ln \left[1 - (1 - \varepsilon) \frac{2i}{N} \right] + \ln \left[1 - (1 - \varepsilon) \frac{2(i-1)}{N} \right] \right\}$$

olur ve daha sonra i 'ye göre ortalama değer teoremi uygulanırsa

$$h_i = \beta^{-1}\gamma^{-1}\varepsilon \frac{4(1 - \varepsilon)N^{-1}}{1 - i, 2(1 - \varepsilon)N^{-1}} \leq 4 \beta^{-1}\gamma^{-1}(1 - \varepsilon)N^{-1} \leq CN^{-1} \quad (5.69)$$

olur ve

$$e^{\frac{-\beta\gamma(t_{i-1}-r_{p-1})}{\varepsilon}} = e^{\frac{\beta\gamma \left[-\beta^{-1}\gamma^{-1}\varepsilon \ln \left[1 - (1 - \varepsilon) \frac{2(i-1)}{N} \right] \right]}{\varepsilon}} = \left[1 - (1 - \varepsilon) \frac{2(i-1)}{N} \right]$$

$$e^{\frac{-\beta\gamma(t_i-r_{p-1})}{\varepsilon}} = e^{\frac{\beta\gamma \left[-\beta^{-1}\gamma^{-1}\varepsilon \ln \left[1 - (1 - \varepsilon) \frac{2i}{N} \right] \right]}{\varepsilon}} = \left[1 - (1 - \varepsilon) \frac{2i}{N} \right]$$

eşitlikleri yazılabilir. Buradan

$$e^{\frac{-\beta\gamma(t_{i-1}-r_{p-1})}{\varepsilon}} - e^{\frac{-\beta\gamma(t_i-r_{p-1})}{\varepsilon}} = \left[1 - (1 - \varepsilon) \frac{2(i-1)}{N} \right] - \left[1 - (1 - \varepsilon) \frac{2i}{N} \right]$$

$$e^{\frac{-\beta\gamma(t_{i-1}-r_{p-1})}{\varepsilon}} - e^{\frac{-\beta\gamma(t_i-r_{p-1})}{\varepsilon}} \leq CN^{-1} \quad (5.70)$$

olur. Sonuç olarak (5.69) ve (5.70), (5.68) de dikkate alınır

$$|R_i| \leq CN^{-1}, \quad (p-1)N + 1 \leq i \leq \frac{(2p-1)N}{2} \quad (5.71)$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi de $[\sigma_p, r_p]$ bölgesine bakalım. (5.2)'den

$$|u'(t)| \leq C \left(\varepsilon^{-1} e^{\frac{-\beta\gamma(t-r_{p-1})}{\varepsilon}} \leq 1 \right)$$

alınabileceğinden

$$|R_i| \leq C h_i$$

olur. Buradan

$$|R_i| \leq C N^{-1}, \quad \frac{(2p-1)N}{2} + 1 \leq i \leq pN; \quad 1 \leq p \leq N \quad (5.72)$$

eşitsizliği yazılabilir. Şimdi de

$$\sigma_p = r_{p-1} + \frac{r}{2}$$

durumunu göz önünde bulunduralım. Bu durumda

$$\frac{r}{2} < -\beta^{-1}\gamma^{-1}\varepsilon \ln \varepsilon$$

olur. $[r_{p-1}, \sigma_p]$ sınır bölgesinde aşağıdaki eşitsizlikleri kullanacağız:

$$h_i = t_i - t_{i-1} = \beta^{-1}\gamma^{-1}\varepsilon \left\{ -\ln \left[1 - \left(1 - e^{-\frac{\beta r}{2\varepsilon}} \right) \frac{2i}{N} \right] + \ln \left[1 - \left(1 - e^{-\frac{\beta r}{2\varepsilon}} \right) \frac{2(i-1)}{N} \right] \right\}.$$

Burada i 'ye göre ortalama değer teoremini uyguladığımızda

$$h_i = \beta^{-1}\varepsilon \frac{4 \left(1 - e^{-\frac{\beta r}{2\varepsilon}} \right) N^{-1}}{1 - i \cdot 2 \left(1 - e^{-\frac{\beta r}{2\varepsilon}} \right) N^{-1}} \leq 4 \beta^{-1} \left(1 - e^{-\frac{\beta r}{2\varepsilon}} \right) N^{-1} \leq C N^{-1} \quad (5.73)$$

elde edilir ve ayrıca

$$e^{\frac{-\beta\gamma(t_{i-1}-r_{p-1})}{\varepsilon}} - e^{\frac{-\beta\gamma(t_i-r_{p-1})}{\varepsilon}} = 2 \left(1 - e^{-\frac{\beta r}{2\varepsilon}}\right) N^{-1} \leq CN^{-1} \quad (5.74)$$

eşitliği yazılabilir. Dolayısıyla (5.73) ve (5.74), (5.68)'de dikkate alınırsa

$$|R_i| \leq CN^{-1}, \quad (p-1)N + 1 \leq i \leq \frac{(2p-1)N}{2} \quad (5.75)$$

eşitsizliği elde edilir. Son olarak $[\sigma_p, r_p]$ bölgesine bakalım. (5.2) eşitsizliğinden

$$|u'(t)| \leq C \left(\varepsilon^{-1} e^{\frac{-\beta\gamma(t-r_{p-1})}{\varepsilon}} \leq 1 \right)$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$|R_i| \leq Ch_i$$

olur. Buradan da

$$|R_i| \leq CN^{-1}, \quad \frac{(2p-1)N}{2} + 1 \leq i \leq pN; \quad 1 \leq p \leq m \quad (5.76)$$

eşitsizliği yazılabilir. (5.71), (5.72), (5.73) ve (5.76) değerlendirmelerini beraber dikkate alındığında (5.65)'in ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 5.3 (1.1)-(1.2) probleminin çözümü u ve (5.46)-(5.47) probleminin çözümü y olsun. Bu durumda

$$\|y - u\|_{\infty, \bar{\omega}_{N_0}} \leq CN^{-1}$$

değerlendirmesi doğrudur.

İspat. Lemma 5.4 ve Lemma 5.6 birlikte dikkate alınırsa teoremin doğruluğu kolaylıkla görünür.

5.11 Nümerik Sonuçlar

Bu bölümde (1.1)-(1.2) lineer problemi için Çizelge 5.1’de Shishkin tipindeki parçalı düzgün şebeke üzerinde kurulmuş fark şeması ve Çizelge 5.2’de Bakhvalov tipindeki düzgün olmayan şebeke üzerine kurulmuş fark şeması için bazı nümerik sonuçlar sunulmuştur. Ayrıca nümerik sonuçlara ait grafik çizimleri yapılmıştır.

Örnek 5.1 Aşağıdaki test problemini ele alıyoruz.

$$\varepsilon \left[u(t) + \frac{1}{4} \tanh^2(t) u(t-1) \right]' + 32(t^2 + 8)u(t) - \frac{1}{8} e^{-2t} u(t-1) = 3t^2 + e^{-t}, 0 < t \leq 2,$$

$$u(t) = e^t, \quad -1 \leq t \leq 0.$$

Bu problemin kesin çözümü $u(t)$ bilinmiyor. Bu nedenle bizim $\omega_{N,p}$ şebeke üzerindeki maksimum hataları tahmin etmek için çift katlı şebeke prensibini kullanacağız (Doolan vd., 1980; Farrell vd., 2000). Burada kullanılan başlangıç tahmini

$$y_i^{(0)} = 1 - e^{-t_i}$$

olarak alınmıştır ve iterasyon sayısı n şu şekilde seçilmiştir:

$$\max_i |y_i^{(n)} - y_i^{(n-1)}| \leq 10^{-5}.$$

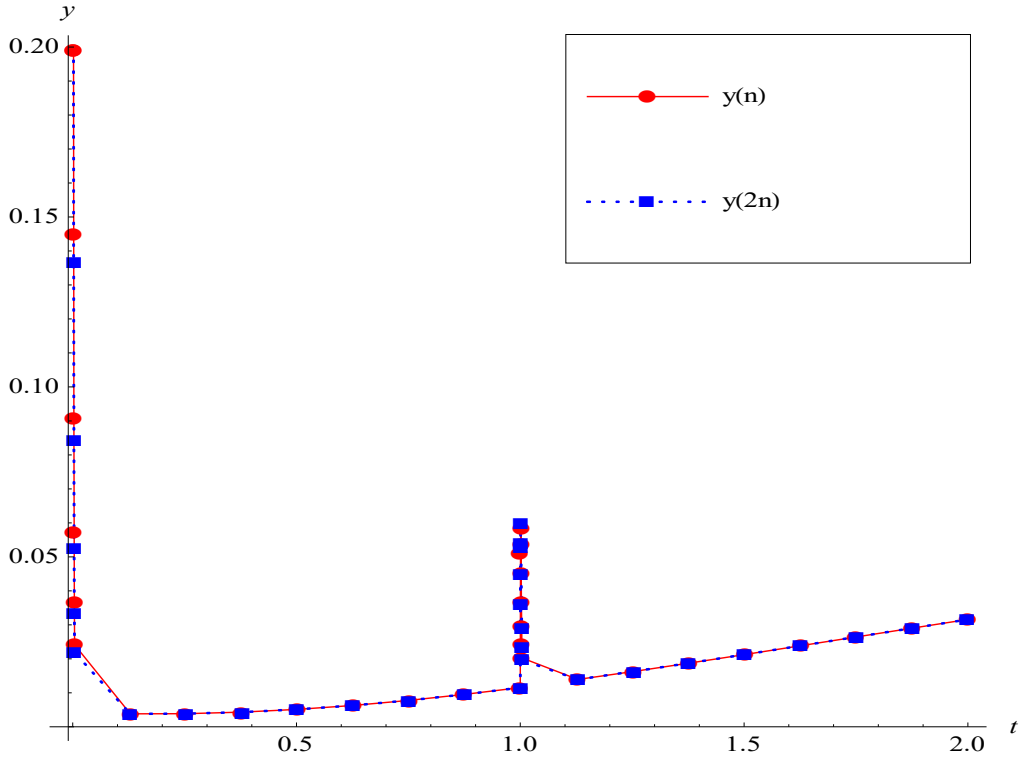
Ortaya çıkan $e^{\varepsilon N}$ hataları ve belirli ε ve N değerleri için $p^{\varepsilon, N}$ yakınsama dereceleri Çizelge 5.1 ve Çizelge 5.2’de listelenmiştir.

Bu kısımda, parçalı düzgün şebeke (Shishkin şebeke) üzerinde (1.1)-(1.2) problemine uygulanan (5.46)-(5.47) fark şeması için Örnek 5.1 üzerinden bazı nümerik

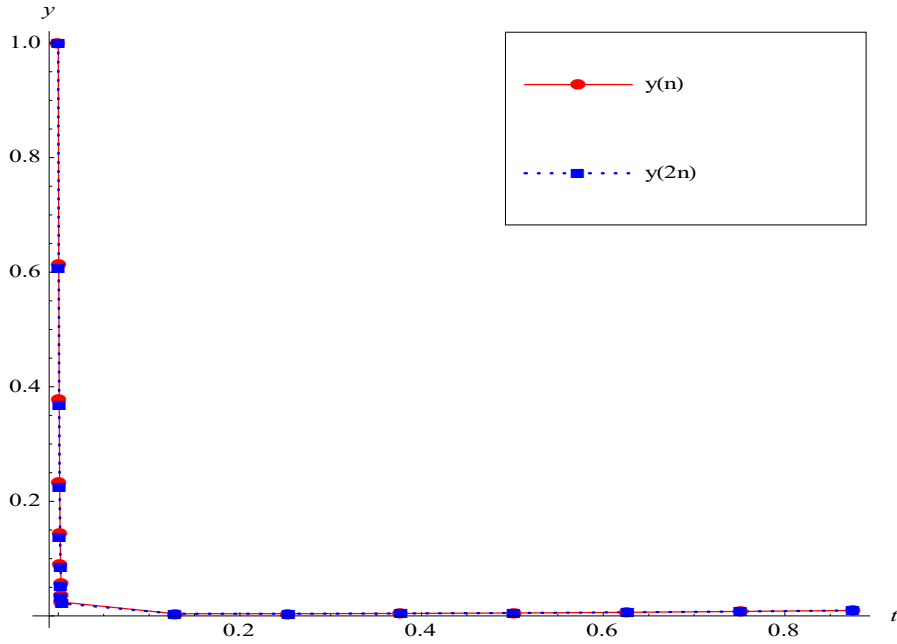
sonuçlar sunacağız. Ele alınan problem, $\varepsilon = 2^{-i}$, $i = 4, 8, \dots, 24$ ve $N = 32, 64, 128, 256, 512, 1024$ değerleri için hesaplanmaktadır. Elde edilen e^N hataları ve buna karşılık gelen uygun p^N değerleri Çizelge 5.1’de verilmiştir.

Çizelge 5.1 Örnek 5.1 için Shishkin şebekede ε ve N ’nin farklı değerleri için maksimum hatalar ve yakınsama oranları

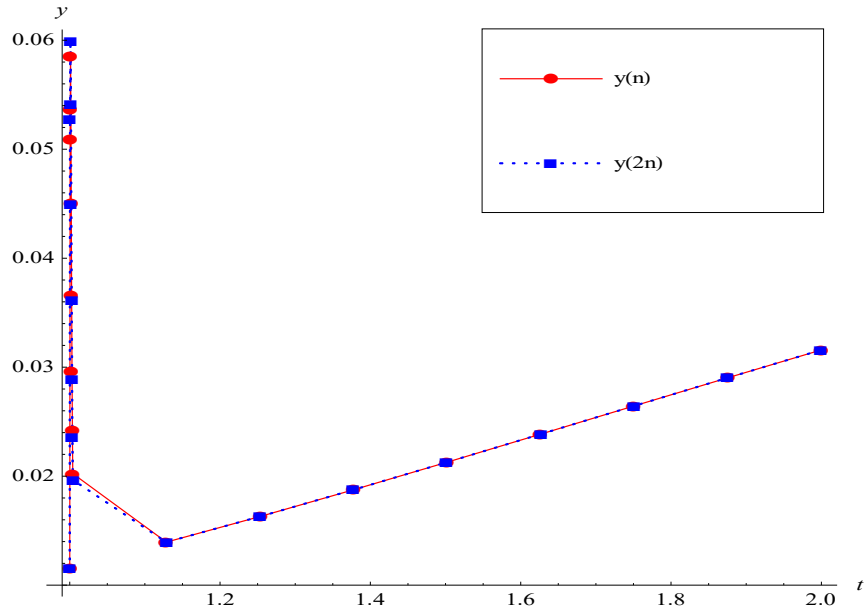
ε	$N = 32$	$N = 64$	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$	$N = 1024$
2^{-4}	0.0175036	0.0110168	0.0066281	0.0038630	0.0021985	0.0012296
	0.67	0.73	0.78	0.81	0.84	
2^{-8}	0.0175036	0.0110168	0.0066281	0.0038630	0.0021985	0.0012296
	0.67	0.73	0.78	0.81	0.84	
2^{-12}	0.0175036	0.0110168	0.0066281	0.0038630	0.0021985	0.0012296
	0.67	0.73	0.78	0.81	0.84	
2^{-16}	0.0175036	0.0110168	0.0066281	0.0038630	0.0021985	0.0012296
	0.67	0.73	0.78	0.81	0.84	
2^{-20}	0.0175036	0.0110168	0.0066281	0.0038630	0.0021985	0.0012296
	0.67	0.73	0.78	0.81	0.84	
2^{-24}	0.0175036	0.0110168	0.0066281	0.0038630	0.0021985	0.0012296
	0.67	0.73	0.78	0.81	0.84	
e^N	0.0175036	0.0110168	0.0066281	0.0038630	0.0021985	0.0012296
p^N	0.67	0.73	0.78	0.81	0.84	



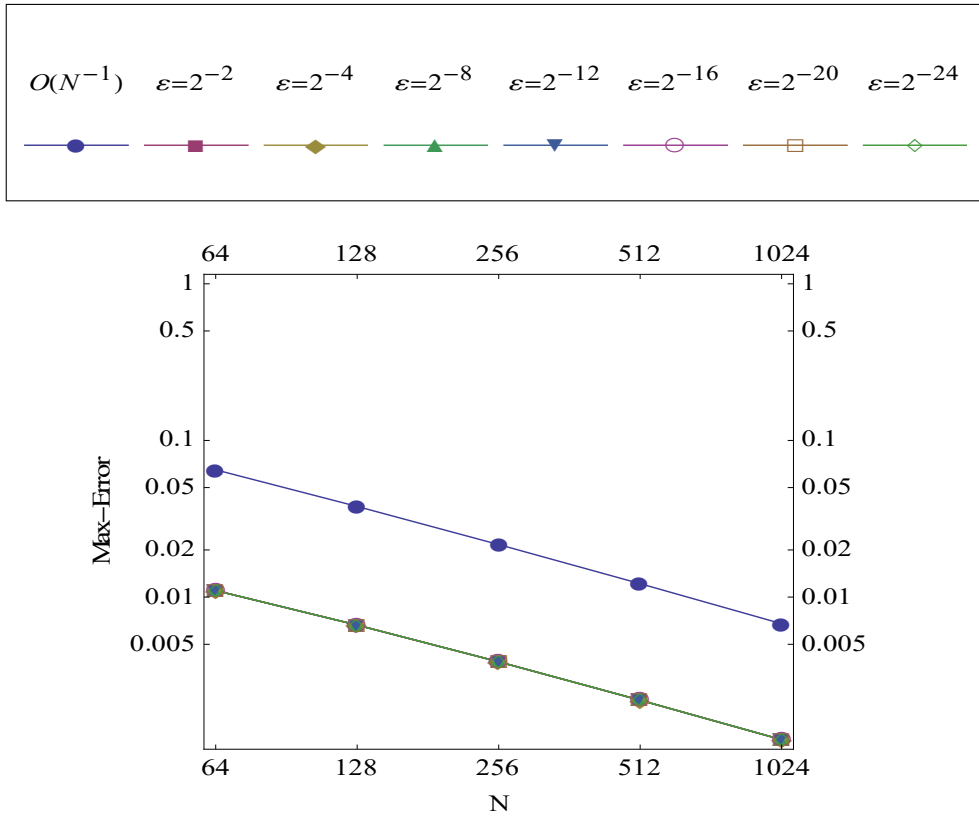
Şekil 5.3 $\varepsilon = 2^{-4}$ ve $N = 64$ için Örnek 5.1'in $[0, 2]$ aralığında Shishkin şebekedeki nümerik çözümü



Şekil 5.4 $\varepsilon = 2^{-4}$ ve $N = 64$ için Örnek 5.1'in $[0, 1]$ aralığında Shishkin şebekedeki nümerik çözümü



Şekil 5.5 $\varepsilon = 2^{-4}$ ve $N = 64$ için Örnek 5.1'in $[1,2]$ aralığında Shishkin şebekedeki nümerik çözümü

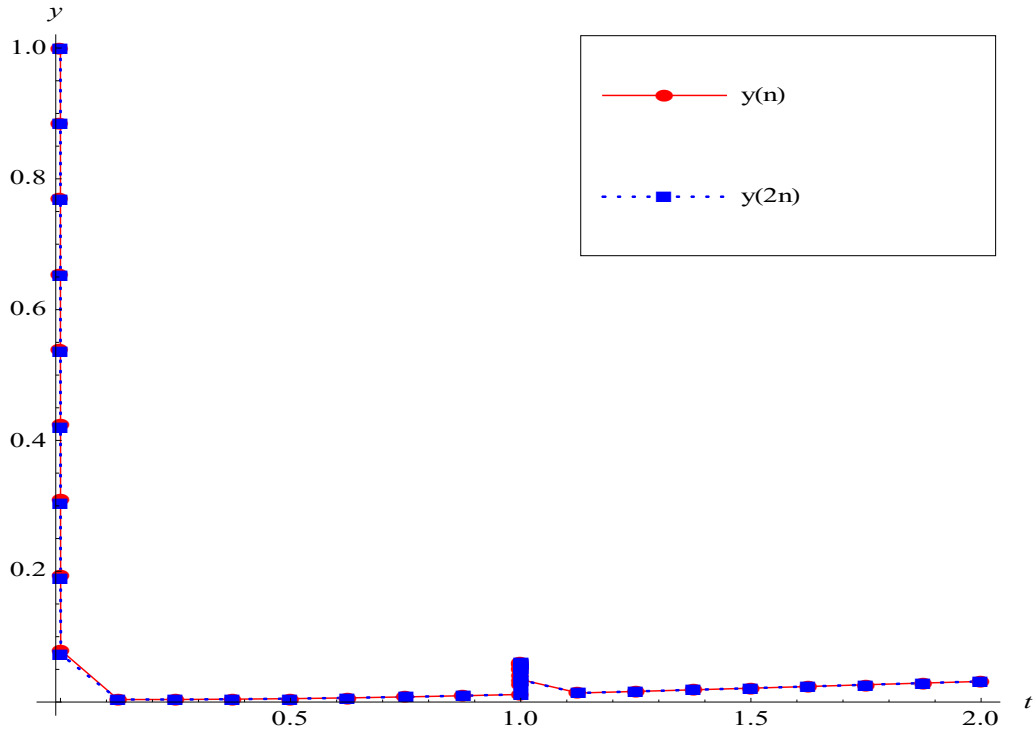


Şekil 5.6 Farklı ε ve N değerleri için Örnek 5.1'in Shishkin şebekedeki maksimum hata grafiği

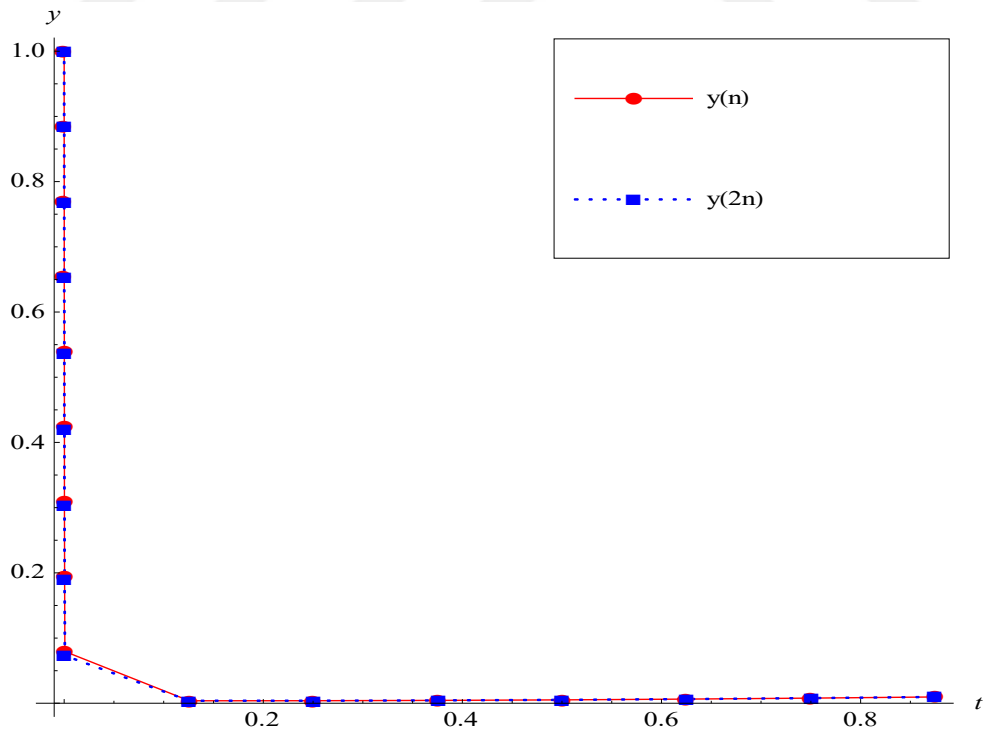
Burada da düzgün olmayan şebeke (Bakhvalov şebeke) üzerinde (1.1)-(1.2) problemine uygulanan (5.46)-(5.47) fark şeması için Örnek 5.1 üzerinden bazı nümerik sonuçlar sunacağız. Ele alınan problem, $\varepsilon = 2^{-i}$, $i = 8, \dots, 24, 28$ ve $N = 16, 32, 64, 128, 256, 512$ değerleri için hesaplanmaktadır. Ortaya çıkan e^N hataları ve buna karşılık gelen uygun p^N değerleri Çizelge 5.2’de verilmiştir.

Çizelge 5.2 Örnek 5.1 için Bakhvalov şebekede ε ve N ’nin farklı değerleri için maksimum hatalar ve yakınsama oranları

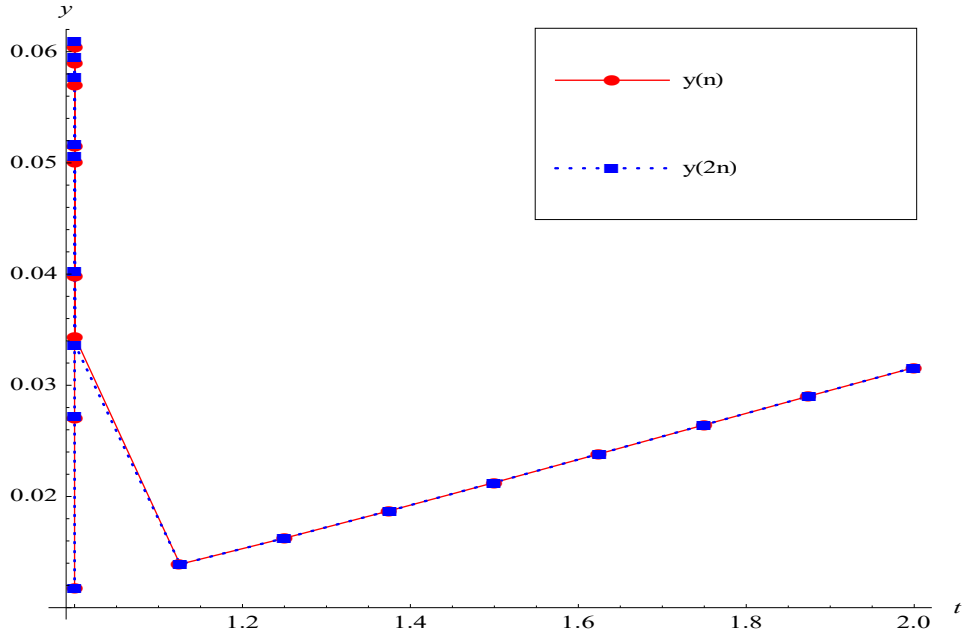
ε	$N = 16$	$N = 32$	$N = 64$	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$
2^{-8}	0.0219117	0.0123980	0.0066681	0.0035017	0.0018086	0.0009237
	0.82	0.89	0.93	0.95	0.97	
2^{-12}	0.0220092	0.0124257	0.0066968	0.0035139	0.0018151	0.0009271
	0.82	0.89	0.93	0.95	0.97	
2^{-16}	0.0220152	0.0124272	0.0066986	0.0035149	0.0018156	0.0009272
	0.82	0.89	0.93	0.95	0.97	
2^{-20}	0.0220156	0.0124273	0.0066987	0.0035149	0.0018156	0.0009272
	0.83	0.89	0.93	0.95	0.97	
2^{-24}	0.0220156	0.0124273	0.0066987	0.0035150	0.0018156	0.0009272
	0.83	0.89	0.93	0.95	0.97	
2^{-28}	0.0220156	0.0124273	0.0066987	0.0035150	0.0018156	0.0009272
	0.83	0.89	0.93	0.95	0.97	
e^N	0.0220156	0.0124273	0.0066987	0.0035150	0.0018156	0.0009272
p^N	0.83	0.89	0.93	0.95	0.97	



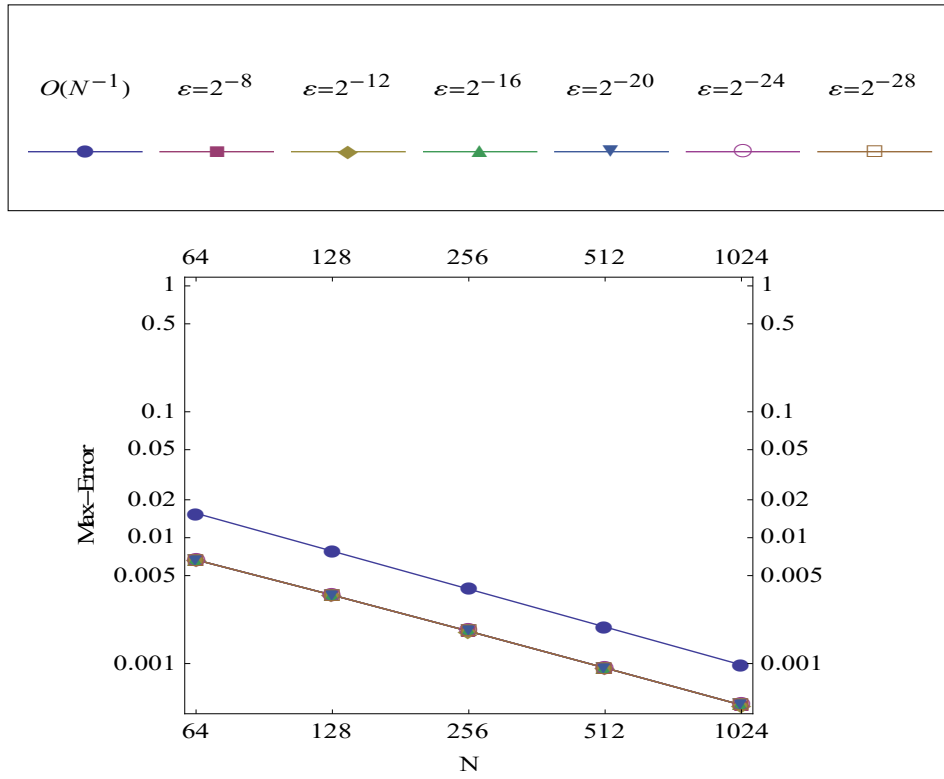
Şekil 5.7 $\varepsilon = 2^{-4}$ ve $N = 64$ için Örnek 5.1'in $[1,2]$ aralığında Bakhvalov şebekedeki nümerik çözümü



Şekil 5.8 $\varepsilon = 2^{-4}$ ve $N = 64$ için Örnek 5.1'in $[0,1]$ aralığında Bakhvalov şebekedeki nümerik çözümü



Şekil 5.9 $\varepsilon = 2^{-4}$ ve $N = 64$ için Örnek 5.1'in $[1,2]$ aralığında Bakhvalov şebekedeki nümerik çözümü



Şekil 5.10 Farklı ε ve N değerleri için Örnek 5.1'in Bakhvalov şebekedeki maksimum hata grafiği

5.12 Bölüm Sonu Değerlendirmesi

Bu bölümde birinci mertebeden lineer SPNDDE ele alındı. (1.1) ve (1.2) probleminin çözümü u ve u' için bazı değerlendirmeler yapıldı. Düzgün şebekede üstel katsayılı fark şeması kuruldu, fark şemasının kararlılık ve düzgün yakınsaklık analizi yapıldı. Düzgün şebekede kesin çözümün, yaklaşık çözüme $\varepsilon \leq h$ şartı altında birinci mertebeden düzgün yakınsak olduğu gösterildi. Bu ise pratik olmayan ağır bir şarttır. Bu değerlendirmenin iyileştirilemez olduğu birinci mertebeden singüler pertürbe bir problem üzerinde gösterilmiştir (Amirali ve Amirali, 2018). Düzgün olmayan şebeke için de klasik fark şeması kuruldu. Fark şemasının kararlılığı ve düzgün yakınsaklığı Shishkin ve Bakhvalov şebekelerde incelendi. Yakınsama hızı, Shishkin şebeke için $O(N^{-1} \ln N)$ ve Bakhvalov şebeke için $O(N^{-1})$ olduğu gösterildi. Daha sonra kesin çözümü olmayan bir örnek ele alınarak Shishkin şebeke ve Bakhvalov şebeke için nümerik sonuçlar incelendi ve grafik çizimleri yapıldı.



6. LİNEER OLMAYAN SİNGÜLER PERTÜRBE NEUTRAL TİP GECİKMELİ DİFERANSİYEL PROBLEM

Bu bölümde (1.3)-(1.4) problemi için Lemma 6.1’de bazı ön değerlendirmeler yapılacak ve daha sonra fark şeması kurulacaktır. Fark şemasının kararlılığı ve düzgün yakınsaklığı incelenecektir. Lemma 6.2’de hata fonksiyonu z_i ’nin, Lemma 6.3’te Shishkin şebekede kalan terim R_i ’nin ve Lemma 6.4’te Bakhvalov şebekede kalan terim R_i ’nin değerlendirmesi yapılacaktır. Daha sonra Teorem 6.1’de, Lemma 6.2 ve Lemma 6.3’ün birleşiminden Shishkin şebekede ve Teorem 6.2’de, Lemma 6.2 ve Lemma 6.4’ün birleşiminden Bakhvalov şebekede fark şemasının kararlılığı ve düzgün yakınsaklığı gösterilmiş olacaktır.

6.1 Bazı Ön Değerlendirmeler

Bu kısımda nümerik metodumuzu sunmadan önce (1.3)-(1.4) probleminin $u(t)$ çözümünün ve türevinin bazı özelliklerini vereceğiz. Uygun nümerik çözümün analizinde bu özelliklere ihtiyaç duyulacaktır.

Lemma 6.1 $a \in C^1(\bar{I})$, $f \in C^1(\bar{I} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ ve $\varphi \in C^1(I_0)$ olduğunu kabul edelim. O zaman (1.3)-(1.4) probleminin u çözümü ve türevi için aşağıdaki değerlendirmeler doğrudur:

$$\|u\|_{\infty, I_p} \leq C_p, \quad 1 \leq p \leq m, \quad (6.1)$$

$$|u'(t)| \leq C \left\{ 1 + \frac{(t-r_{p-1})^{p-1}}{\varepsilon^p} e^{\frac{-\mu(t-r_{p-1})}{\varepsilon}} \right\}, \quad 1 \leq p \leq m. \quad (6.2)$$

Burada

$$C_1 = (1 + 2\|a\|_{\infty, I_1})\|\varphi\|_{\infty, I_0} + \mu^{-1} \left\{ \|\tilde{f}\|_{\infty, I_1} + [M_2 + \|a\|_{\infty, I_1} M_1] \|\varphi\|_{\infty, I_0} \right\},$$

$$C_2 \equiv (1 + \|a\|_{\infty, I_2})C_1 + \|a\|_{\infty, I_2} \|\varphi\|_{\infty, I_0} + \mu^{-1} \left\{ \|\tilde{f}\|_{\infty, I_2} + [M_2 + \|a\|_{\infty, I_2} M_1] C_1 \right\},$$

$$C_3 \equiv (1 + \|a\|_{\infty, I_3})C_2 + \|a\|_{\infty, I_3}C_1 + \mu^{-1} \left\{ \|\tilde{f}\|_{\infty, I_3} + [M_2 + \|a\|_{\infty, I_3}M_1]C_2 \right\},$$

$$C_p \equiv (1 + \|a\|_{\infty, I_p})C_{p-1} + \|a\|_{\infty, I_p}C_{p-2} + \mu^{-1} \left\{ \|\tilde{f}\|_{\infty, I_p} + [M_2 + \|a\|_{\infty, I_p}M_1]C_{p-1} \right\}.$$

İspat. Lineer olmayan f terimi için Teorem 4.1 uygulanırsa

$$f(t, u(t), v(t)) - f(t, 0, 0) = \frac{\partial}{\partial u} f(t, \theta u(t), \theta v(t))u(t) + \frac{\partial}{\partial v} f(t, \theta u(t), \theta v(t))v(t)$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$\tilde{b}(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(t, \tilde{u}, \tilde{v}),$$

$$\tilde{c}(t) = \frac{\partial f}{\partial v}(t, \tilde{u}, \tilde{v}),$$

$$\tilde{f}(t) = -f(t, 0, 0),$$

$$\tilde{u} = \theta u(t), \quad \tilde{v} = \theta u(t - r), \quad 0 < \theta < 1$$

ifadeleri göz önünde bulundurulursa (1.3) denklemi aşağıdaki formda yazılabilir:

$$\varepsilon[u(t) + a(t)u(t - r)]' + \tilde{b}(t)u(t) + \tilde{c}(t)u(t - r) = \tilde{f}(t), \quad t \in I. \quad (6.3)$$

Burada uygun dönüşümle, (6.3) problemi

$$\varepsilon w'(t) + \tilde{b}(t)w(t) = H(t) \quad (6.4)$$

formunda yazılabilir. Burada

$$w(t) = u(t) + a(t)u(t - r)$$

ve

$$G(t) = \tilde{f}(t) - [\tilde{c}(t) - a(t)\tilde{b}(t)]u(t-r)$$

olur. (6.1) ifadesini değerlendirmek için tümevarım yntemini kullanıyoruz. (6.4) eşitliğinden aşağıdaki değerlendirmeyi yazabiliriz:

$$w(t) = w(r_{p-1})e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{r_{p-1}}^t \tilde{b}(s)ds} + \frac{1}{\varepsilon} \int_{r_{p-1}}^t G(\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^t \tilde{b}(s)ds} d\tau, \quad t \in I_p. \quad (6.5)$$

$w(t)$ ve $G(t)$ değerlerini (6.5)'te yerine yazarsak

$$\begin{aligned} u(t) &= -a(t)u(t-r) + [u(r_{p-1}) + a(r_{p-1})u(r_{p-1}-r)]e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{r_{p-1}}^t \tilde{b}(s)ds} \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} \int_{r_{p-1}}^t \{\tilde{f}(\tau) - [\tilde{c}(\tau) - a(\tau)\tilde{b}(\tau)]u(\tau-r)\}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^t \tilde{b}(s)ds} d\tau \\ &= -a(t)u(t-r) + [u(r_{p-1}) + a(r_{p-1})u(r_{p-1}-r)]e^{-\frac{\mu(t-r_{p-1})}{\varepsilon}} \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} \int_{r_{p-1}}^t \{\tilde{f}(\tau) - [\tilde{c}(\tau) - a(\tau)\tilde{b}(\tau)]u(\tau-r)\}e^{-\frac{\mu(t-\tau)}{\varepsilon}} d\tau \end{aligned} \quad (6.6)$$

eşitliğini elde ediyoruz. $p = 1$ için ($t \in I_1$)

$$\begin{aligned} |u(t)| &\leq |a(t)||u(t-r)| + [|\varphi(0)| + |a(0)||\varphi(-r)|]e^{-\frac{\mu t}{\varepsilon}} \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \{|\tilde{f}(\tau)| + [|\tilde{c}(\tau)| + |a(\tau)||\tilde{b}(\tau)|]|\varphi(\tau-r)|\}e^{-\frac{\mu(t-\tau)}{\varepsilon}} d\tau \end{aligned}$$

$$\|u\|_{\infty, I_1} \leq \|a\|_{\infty, I_1} \|\varphi\|_{\infty, I_0} + \|\varphi\|_{\infty, I_0} + \|a\|_{\infty, I_1} \|\varphi\|_{\infty, I_0}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \|\tilde{f}\|_{\infty, I_1} + [\|\tilde{c}\|_{\infty, I_1} + \|a\|_{\infty, I_1} \|\tilde{b}\|_{\infty, I_1}] \|\varphi\|_{\infty, I_0} \right\} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{\frac{-\mu(t-\tau)}{\varepsilon}} d\tau \\
& \leq \|a\|_{\infty, I_1} \|\varphi\|_{\infty, I_0} + \|\varphi\|_{\infty, I_0} + \|a\|_{\infty, I_1} \|\varphi\|_{\infty, I_0} \\
& + \left\{ \|\tilde{f}\|_{\infty, I_1} + \left(\|\tilde{c}\|_{\infty, I_1} + \|a\|_{\infty, I_1} \|\tilde{b}\|_{\infty, I_1} \right) \|\varphi\|_{\infty, I_0} \right\} \mu^{-1} e^{\frac{-\mu t}{\varepsilon}}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}
& \|u\|_{\infty, I_1} \leq (1 + 2\|a\|_{\infty, I_1}) \|\varphi\|_{\infty, I_0} \\
& + \mu^{-1} \left\{ \|\tilde{f}\|_{\infty, I_1} + [\|\tilde{c}\|_{\infty, I_1} + \|a\|_{\infty, I_1} \|\tilde{b}\|_{\infty, I_1}] \|\varphi\|_{\infty, I_0} \right\} \equiv C_1
\end{aligned}$$

ifadesi $p = 1$ için (6.1) eşitsizliğinin ispatıdır. Yine (6.6)'dan $p = 2$ için ($t \in I_2$)

$$\begin{aligned}
& |u(t)| \leq |a(t)| |u(t-r)| + [|u(r)| + |a(r)| |u(0)|] e^{\frac{-\mu(t-r)}{\varepsilon}} \\
& + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \{ |\tilde{f}(\tau)| + [\|\tilde{c}(\tau)\| + |a(\tau)| \|\tilde{b}(\tau)\|] |u(\tau-r)| \} e^{\frac{-\mu(t-\tau)}{\varepsilon}} d\tau
\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ediyoruz. Bu eşitsizlikten

$$\begin{aligned}
& \|u\|_{\infty, I_2} \leq \|a\|_{\infty, I_2} \|u\|_{\infty, I_1} + \|u\|_{\infty, I_1} + \|a\|_{\infty, I_2} \|\varphi\|_{\infty, I_0} \\
& + \left\{ \|\tilde{f}\|_{\infty, I_2} + [\|\tilde{c}\|_{\infty, I_2} + \|a\|_{\infty, I_2} \|\tilde{b}\|_{\infty, I_2}] \|u\|_{\infty, I_1} \right\} \frac{1}{\varepsilon} \int_r^t e^{\frac{-\mu(t-\tau)}{\varepsilon}} d\tau \\
& \leq (1 + \|a\|_{\infty, I_2}) C_1 + \|a\|_{\infty, I_2} \|\varphi\|_{\infty, I_0} \\
& + \left\{ \|\tilde{f}\|_{\infty, I_2} + [\|\tilde{c}\|_{\infty, I_2} + \|a\|_{\infty, I_2} \|\tilde{b}\|_{\infty, I_2}] C_1 \right\} \mu^{-1} \left(1 - e^{\frac{-\mu(t-r)}{\varepsilon}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \|u\|_{\infty, I_2} \leq (1 + \|a\|_{\infty, I_2}) C_1 + \|a\|_{\infty, I_2} \|\varphi\|_{\infty, I_0} \\
& + \mu^{-1} \left\{ \|\tilde{f}\|_{\infty, I_2} + [\|\tilde{c}\|_{\infty, I_2} + \|a\|_{\infty, I_2} \|\tilde{b}\|_{\infty, I_2}] C_1 \right\} \equiv C_2
\end{aligned}$$

yaklaşımı bulunur. Benzer şekilde $p = 3$ için ($t \in I_3$)

$$\begin{aligned} \|u\|_{\infty, I_3} &\leq (1 + \|a\|_{\infty, I_3})C_2 + \|a\|_{\infty, I_3}C_1 \\ &+ \mu^{-1} \left\{ \|\tilde{f}\|_{\infty, I_3} + \left[\|\tilde{c}\|_{\infty, I_3} + \|a\|_{\infty, I_3} \|\tilde{b}\|_{\infty, I_3} \right] C_2 \right\} \equiv C_3 \end{aligned}$$

değerlendirmesini elde ediyoruz. Daha sonra, $p = k$ için (6.1) eşitsizliğinin doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$$\begin{aligned} \|u\|_{\infty, I_k} &\leq (1 + \|a\|_{\infty, I_k})C_{k-1} + \|a\|_{\infty, I_k}C_{k-2} \\ &+ \beta^{-1} \left\{ \|\tilde{f}\|_{\infty, I_k} + \left[\|\tilde{c}\|_{\infty, I_k} + \|a\|_{\infty, I_k} \|\tilde{b}\|_{\infty, I_k} \right] C_{k-1} \right\} \equiv C_k \end{aligned}$$

eşitsizliği doğru olsun. Böylece $t \in I_{k+1}$ için değerlendirmenin doğru olduğunu gösterelim. (6.6) denklemden

$$\begin{aligned} \|u\|_{\infty, I_{k+1}} &\leq (1 + \|a\|_{\infty, I_{k+1}})C_k + \|a\|_{\infty, I_{k+1}}C_{k-1} \\ &+ \beta^{-1} \left\{ \|\tilde{f}\|_{\infty, I_{k+1}} + \left[\|\tilde{c}\|_{\infty, I_{k+1}} + \|a\|_{\infty, I_{k+1}} \|\tilde{b}\|_{\infty, I_{k+1}} \right] C_k \right\} \equiv C_{k+1} \end{aligned}$$

eşitsizliğini yazabiliyoruz. Dolayısıyla $p = k + 1$ için de (6.1) eşitsizliğinin doğruluğu ispatlanmış oldu. Böylece (6.1) eşitsizliğinin ispatı tamamlanır.

Şimdi ise (6.2) eşitsizliğini ispat edelim. (6.4)'ten bir kere türev alırsak aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\varepsilon w''(t) + \tilde{b}(t)w'(t) = G'(t) - \tilde{b}'(t)w(t) = H(t). \quad (6.7)$$

Burada $H(t)$ aşağıda verildiği gibidir:

$$\begin{aligned} H(t) &= \tilde{f}'(t) + [a'(t)\tilde{b}(t) - \tilde{c}'(t)]u(t-r) \\ &+ [a(t)\tilde{b}(t) - \tilde{c}(t)]u'(t-r) - \tilde{b}'(t)u(t). \end{aligned}$$

İspata geçmeden önce $H(t)$ için aşağıdaki değeriendirmeyi yapalım:

$$|H(t)| \leq |\tilde{f}'(t)| + [|a'(t)||\tilde{b}(t)| + |\tilde{c}'(t)|]|u(t-r)| \\ + [|a(t)||\tilde{b}(t)| + |\tilde{c}(t)|]|u'(t-r)| + |\tilde{b}'(t)||u(t)|.$$

Buradan

$$|H(t)| \leq C(1 + |u'(t-r)|) \quad (6.8)$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

(6.2) eşitsizliğinin ispatına devam edelim. (6.7) denkleminde aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz:

$$w'(t) = w'(r_{p-1})e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{r_{p-1}}^t \tilde{b}(s)ds} + \frac{1}{\varepsilon} \int_{r_{p-1}}^t H(\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^t \tilde{b}(s)ds} d\tau, \quad t \in I_p. \quad (6.9)$$

(6.9) bağıntısını daha açık yazarsak aşağıdaki değeriendirmeyi elde ediyoruz:

$$u'(t) = -a(t)u'(t-r) - a'(t)u(t-r) \\ + [u'(r_{p-1}) + a'(r_{p-1})u(r_{p-1}-r) + a(r_{p-1})u'(r_{p-1}-r)]e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{r_{p-1}}^t \tilde{b}(s)ds} \\ + \frac{1}{\varepsilon} \int_{r_{p-1}}^t H(\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^t \tilde{b}(s)ds} d\tau.$$

Buradan

$$\begin{aligned}
|u'(t)| &\leq |a(t)||u'(t-r)| + |a'(t)||u(t-r)| + |u'(r_{p-1})|e^{\frac{-\mu(t-r_{p-1})}{\varepsilon}} \\
&+ [|a(r_{p-1})||u'(r_{p-1}-r)| + |a'(r_{p-1})||u(r_{p-1}-r)|]e^{\frac{-\mu(t-r_{p-1})}{\varepsilon}} \\
&+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{r_{p-1}}^t |H(\tau)| e^{\frac{-\mu(t-\tau)}{\varepsilon}} d\tau
\end{aligned} \tag{6.10}$$

yazılabilir. Ayrıca, (6.3) denkleminde

$$\varepsilon[u'(t) + a(t)u'(t-r)] = -\varepsilon a'(t)u(t-r) - \tilde{b}(t)u(t) - \tilde{c}(t)u(t-r) + \tilde{f}(t)$$

olup $t = 0$ için

$$\begin{aligned}
|\varphi'(0)| + |a(0)||\varphi'(-r)| &\leq |a'(0)||\varphi(-r)| \\
+ \frac{|\tilde{b}(0)||\varphi(0)| + |\tilde{c}(0)||\varphi(-r)| + |\tilde{f}(0)|}{\varepsilon} &\leq \frac{C}{\varepsilon}
\end{aligned} \tag{6.11}$$

eşitsizliği yazılabilir. İlk olarak (6.10) eşitsizliğinden $p = 1$ için ($t \in I_1$),

$$\begin{aligned}
|u'(t)| &\leq |a(t)||\varphi'(t-r)| + |a'(t)||\varphi(t-r)| \\
&+ [|\varphi'(0)| + |a(0)||\varphi'(-r)| + |a'(0)||\varphi(-r)|]e^{\frac{-\mu t}{\varepsilon}} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t |H(\tau)| e^{\frac{-\mu(t-\tau)}{\varepsilon}} d\tau
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada (6.8) ve (6.11) eşitsizliğini de dikkate alırsak aşağıdaki değerlendirmeyi yazabiliriz:

$$|u'(t)| \leq C \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{\frac{-\mu}{\varepsilon}} \right). \tag{6.12}$$

Daha sonra $p = k$ için ($t \in I_k$) aşağıdaki eşitsizliğin doğru olduğunu kabul edelim.

$$|u'(t)| \leq C \left\{ 1 + \frac{(t-r_{k-1})^{k-1}}{\varepsilon^k} e^{\frac{-\mu(t-r_{k-1})}{\varepsilon}} \right\}. \tag{6.13}$$

Son olarak $p = k + 1$ için ($t \in I_{k+1}$), (6.2) eşitsizliğinin doğru olduğunu gösterebilirsek ispat tamamlanmış olacaktır. (6.10) eşitsizliği $p = k + 1$ için aşağıdaki formda yazılabilir:

$$\begin{aligned}
|u'(t)| &\leq |a(t)||u'(t-r)| + |a'(t)||u(t-r)| \\
&\quad + [|u'(r_k)| + |a(r_k)||u'(r_{k-1})|]e^{\frac{-\mu(t-r_k)}{\varepsilon}} \\
&\quad + |a'(r_k)||u(r_{k-1})|e^{\frac{-\mu(t-r_k)}{\varepsilon}} + \frac{1}{\varepsilon} \int_{r_k}^t |H(\tau)|e^{\frac{-\mu(t-\tau)}{\varepsilon}} d\tau.
\end{aligned} \tag{6.14}$$

Öncelikle (6.13) eşitsizliğinden $t = r_k$ alınırsa

$$\begin{aligned}
|u'(r_k)| &\leq C \left\{ 1 + \frac{(r_k - r_{k-1})^{k-1}}{\varepsilon^k} e^{\frac{-\mu(r_k - r_{k-1})}{\varepsilon}} \right\} \\
&\leq C \left\{ 1 + \frac{r^{k-1}}{\varepsilon^k} e^{\frac{-\mu r}{\varepsilon}} \right\}
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Burada $x^k e^x \leq C e^{-\gamma x}$, $0 < \gamma < 1$, $x \in [0, \infty)$, $k > 0$ eşitsizliği uygulanırsa

$$|u'(r_k)| \leq C, \quad k \geq 1 \tag{6.15}$$

yazılabilir. Benzer şekilde

$$|u'(r_{k-1})| \leq C, \quad k \geq 1 \tag{6.16}$$

olur. Ayrıca tekrardan (6.13) dikkate alınırsa $u'(t-r)$ için

$$|u'(t-r)| \leq C \left\{ 1 + \frac{(t-r-r_{k-1})^{k-1}}{\varepsilon^k} e^{\frac{-\mu(t-r-r_{k-1})}{\varepsilon}} \right\}$$

$$\leq C \left\{ 1 + \frac{(t-r_k)^{k-1}}{\varepsilon^k} e^{\frac{-\mu(t-r_k)}{\varepsilon}} \right\} \quad (6.17)$$

değerlendirmesi yapılabilir. Dolayısıyla

$$|H(t)| \leq C \left\{ 1 + \frac{(t-r_k)^{k-1}}{\varepsilon^k} e^{\frac{-\mu(t-r_k)}{\varepsilon}} \right\} \quad (6.18)$$

yazılabilir. Buradan (6.15), (6.16), (6.17) ve (6.18) eşitsizlikleri (6.14)'te dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} |u'(t)| &\leq C \left(1 + \frac{(t-r_k)^{k-1}}{\varepsilon^k} e^{\frac{-\mu(t-r_k)}{\varepsilon}} \right) + C e^{\frac{-\mu(t-r_k)}{\varepsilon}} \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} C \int_{r_k}^t \left(1 + \frac{(\tau-r_k)^{k-1}}{\varepsilon^k} e^{\frac{-\mu(\tau-r_k)}{\varepsilon}} \right) e^{\frac{-\mu(t-\tau)}{\varepsilon}} d\tau \\ &\leq C + C \frac{(t-r_k)^{k-1}}{\varepsilon^k} e^{\frac{-\mu(t-r_k)}{\varepsilon}} + C \frac{1}{\varepsilon} \mu^{-1} \varepsilon \left(1 - e^{\frac{-\mu(t-r_k)}{\varepsilon}} \right) + \frac{1}{\varepsilon} C e^{\frac{-\mu(t-r_k)}{\varepsilon}} \frac{(t-r_k)^k}{k \varepsilon^k} \\ &\leq C \left\{ 1 + \frac{(t-r_k)^k}{\varepsilon^{k+1}} e^{\frac{-\mu(t-r_k)}{\varepsilon}} \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu da (6.2) eşitsizliğinin ispatını verir.

6.2 Fark Şemasının Kurulması

Burada (1.3) probleminin fark yaklaşımı için aşağıdaki özdeşliği kullanıyoruz.

$$h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varepsilon [u(t) + a(t)u(t-r)]' dt + h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t, u(t), u(t-r)) dt = 0,$$

$$1 \leq i \leq N_0.$$

İkinci terime kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \varepsilon[u_{\bar{t},i} + a_{i-1}u_{\bar{t},i-N} + a_{\bar{t},i}u_{i-N}] + h_i^{-1}[f(t, u(t), u(t-r))(t - t_{i-1})]_{t_{i-1}}^{t_i} \\ & - h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t - t_{i-1}) \frac{d}{dt} f(t, u(t), u(t-r)) dt = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\varepsilon[u_{\bar{t},i} + a_{i-1}u_{\bar{t},i-N} + a_{\bar{t},i}u_{i-N}] + f(t_i, u_i, u_{i-N}) + R_i = 0 \quad (6.19)$$

fark yaklaşımı elde edilir ve kalan terim R_i aşağıda verildiği gibidir:

$$R_i = -h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t - t_{i-1}) \frac{d}{dt} f(t, u(t), u(t-r)) dt. \quad (6.20)$$

Daha sonra (6.19) eşitliğinden kalan terim R_i ihmal edilirse aşağıdaki fark şeması yazılabilir:

$$\varepsilon[y_{\bar{t},i} + a_{i-1}y_{\bar{t},i-N} + a_{\bar{t},i}y_{i-N}] + f(t_i, y_i, y_{i-N}) = 0, \quad 1 \leq i \leq N_0, \quad (6.21)$$

$$y_i = \varphi_i, \quad -N \leq i \leq 0. \quad (6.22)$$

6.3 Hata Fonksiyonunun Değerlendirmesi

Burada $z_i = y_i - u_i$, $1 \leq i \leq N_0$ hata fonksiyonu aşağıdaki fark probleminin çözümüdür.

$$\varepsilon[z_{\bar{t},i} + a_{i-1}z_{\bar{t},i-N} + a_{\bar{t},i}z_{i-N}] + f(t_i, y_i, y_{i-N}) - f(t_i, u_i, u_{i-N}) = R_i, \quad 1 \leq i \leq N_0, \quad (6.23)$$

$$z_i = 0, \quad -N \leq i \leq 0. \quad (6.24)$$

Lemma 6.2 (6.23)-(6.24) probleminin çözümü olan z_i hata fonksiyonu için aşağıdaki yaklaşım doğrudur.

$$\|z\|_{\infty, \omega_{N,p}} \leq C \sum_{k=1}^p \|R\|_{\infty, \omega_{N,k}}, \quad 1 \leq p \leq m.$$

İspat. (6.23) eşitliğinde f fonksiyonları için Teorem 4.1 uygulanırsa

$$\varepsilon [z_{\bar{t},i} + a_{i-1} z_{\bar{t},i-N} + a_{\bar{t},i} z_{i-N}] + \bar{b}_i z_i + \bar{c}_i z_{i-N} = R_i$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$\bar{b}_i = \frac{\partial f}{\partial u}(t_i, u_i + \tilde{\theta} z_i, u_{i-N} + \tilde{\theta} z_{i-N})$$

$$\bar{c}_i = \frac{\partial f}{\partial v}(t_i, u_i + \tilde{\theta} z_i, u_{i-N} + \tilde{\theta} z_{i-N}), \quad 0 < \tilde{\theta} < 1$$

olur. Dolayısıyla (6.23) için

$$\varepsilon z_{\bar{t},i} + \bar{b}_i z_i = -\varepsilon a_{i-1} z_{\bar{t},i-N} - \varepsilon a_{\bar{t},i} z_{i-N} - \bar{c}_i z_{i-N} + R_i \quad (6.25)$$

ifadesi yazılabilir. (6.25)'te

$$\ell z_i \equiv \varepsilon z_{\bar{t},i} + \bar{b}_i z_i, \quad (p-1)N < i \leq p$$

fark operatörü için maksimum prensibi uygulanırsa

$$\|z\|_{\infty, \omega_{N,p}} \leq |z_{p-1}| + \mu^{-1} \left\{ (3\varepsilon \|a\|_{\infty, \omega_{N,p}} + \|\bar{c}\|_{\infty, \omega_{N,p}}) \|z\|_{\infty, \omega_{N,p-1}} + \|R\|_{\infty, \omega_{N,p}} \right\}$$

$$\leq \left\{1 + \mu^{-1} \left(3\varepsilon \|a\|_{\infty, \omega_{N,p}} + \|\bar{c}\|_{\infty, \omega_{N,p}}\right)\right\} \|z\|_{\infty, \omega_{N,p-1}} + \mu^{-1} \|R\|_{\infty, \omega_{N,p}} \quad (6.26)$$

birinci mertebeden fark eşitsizliği elde edilir. (6.26) eşitsizliğinin çözümü için (6.39) formundaki birinci mertebeden fark eşitsizliğinin çözümü olan (6.40) eşitsizliğini dikkate alıp,

$$w_p = \|z\|_{\infty, \omega_{N,p}}, \mu = 1 + \mu^{-1} \left(3\varepsilon \|a\|_{\infty, \omega_{N,p}} + \|\bar{c}\|_{\infty, \omega_{N,p}}\right)$$

$$w_{p-1} = \|z\|_{\infty, \omega_{N,p-1}} \text{ ve } \psi_p = \mu^{-1} \|R\|_{\infty, \omega_{N,p}}$$

biçiminde seçim yaparsak (6.26) fark eşitsizliğinin çözümünü

$$\|z\|_{\infty, \omega_{N,p}} \leq \mu^{-1} \sum_{k=1}^p \left[1 + \mu^{-1} \left(3\varepsilon \|a\|_{\infty, \omega_{N,p}} + \|\bar{c}\|_{\infty, \omega_{N,p}}\right)\right]^{p-k} \|R\|_{\infty, \omega_{N,k}}$$

olarak bulabiliriz. Bu da Lemma 6.2'in ispatına varır.

6.4 Shishkin Şebekede Kalan Teriminin Değerlendirmesi

Lemma 6.3 Lemma 6.1'nin koşulları altında (6.21)-(6.22) fark şemasının kalan terimi R_i için

$$\|R\|_{\infty, \omega_{N,p}} \leq CN^{-1} \ln N, \quad 1 \leq p \leq m$$

değerlendirmesi doğrudur.

İspat. (6.20) denklemindeki R_i için herhangi bir şebeke üzerinde

$$|R_i| \leq h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t - t_{i-1}) \left| \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u} u'(t) + \frac{\partial f}{\partial v} u'(t - r) \right| dt, \quad 1 \leq i \leq N_0$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizlikte Lemma 6.1'in şartları dikkate alınırsa

$$|R_i| \leq C \left\{ h_i + \int_{t_{i-1}}^{t_i} (|u'(t)| + |u'(t-r)|) dt \right\}, \quad 1 \leq i \leq N_0$$

ifadesi yazılabilir. Şimdi de (6.2) dikkate alınırsa

$$|R_i| \leq C \left\{ h_i + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[\frac{(t-r_{p-1})^{p-1}}{\varepsilon^p} e^{\left(\frac{-\mu(t-r_{p-1})}{\varepsilon}\right)} + \frac{(t-r_{p-2})^{p-2}}{\varepsilon^{p-1}} e^{\left(\frac{-\mu(t-r_{p-2})}{\varepsilon}\right)} \right] dt \right\} \quad (6.27)$$

değerlendirmesi yazılabilir. Burada (6.27) ifadesi (5.56) ifadesine indirgendiği için ispatın devamı Lemma 5.5'deki adımlar takip edilerek ispat tamamlanır.

Teorem 6.1 (1.3)-(1.4) probleminin çözümü u ve (5.21)-(5.22) probleminin çözümü y olsun. Bu durumda aşağıdaki değerlendirme doğrudur:

$$\|y - u\|_{\infty, \bar{\omega}_{N_0}} \leq CN^{-1} \ln N.$$

İspat. Lemma 6.2 ve Lemma 6.3 beraber düşünülürse ispat tamamlanır.

6.5 Bakhvalov Şebekede Kalan Teriminin Değerlendirmesi

Lemma 6.4 Lemma 6.1 koşulları altında (6.21)-(6.22) şemasının kalan terimi R_i için aşağıda verilen eşitsizlik doğrudur:

$$\|R\|_{\infty, \omega_{N,p}} \leq CN^{-1}, \quad 1 \leq p \leq m.$$

İspat. Burada (6.27) ifadesi (5.66) ifadesine indirgendiğinden dolayı ispatın devamı için Lemma 5.6'daki adımlar takip edilerek tamamlanır.

Teorem 6.2 (1.3)-(1.4) probleminin çözümü u ve (6.21)-(6.22) probleminin çözümü y olsun. Bu durumda

$$\|y - u\|_{\infty, \bar{\omega}_{N_0}} \leq CN^{-1}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat. Lemma 6.2 ve Lemma 6.4 beraber dikkate alınırsa ispat tamamlanır.

6.6 Nümerik Sonuçlar

Bu bölümde (1.3)-(1.4) lineer olmayan problem için öncelikle probleme uygun algoritma oluşturulmuş, daha sonra Çizelge 6.1’de Shishkin tipindeki parçalı düzgün şebeke üzerinde kurulmuş fark şeması için ve Çizelge 6.2’de de Bakhvalov tipindeki düzgün olmayan şebeke üzerine kurulmuş fark şeması için bazı nümerik sonuçlar sunulmuştur. Ayrıca nümerik sonuçlara uygun grafik çizimleri de yapılmıştır.

6.6.1 Algoritma

(5.21)-(5.22) lineer olmayan fark problemini çözmek için aşağıdaki yarı lineerleştirme (quasi-linearizasyon) tekniğini kullanıyoruz.

$$y_i^{(n)} = y_i^{(n-1)} - \frac{\frac{\varepsilon}{h_i} \left(-y_{i-1}^{(n)} - a_{i-1} y_{i-N-1}^{(n)} + a_i y_{i-N}^{(n)} + y_i^{(n-1)} \right) + f(t_i, y_i^{(n-1)}, y_{i-N}^{(n)})}{\frac{\varepsilon}{h_i} + \frac{\partial f}{\partial y}(t_i, y_i^{(n-1)}, y_{i-N}^{(n)})}$$

$$y_i^{(n)} = \varphi_i$$

$i = 1, 2, \dots, N_0$; $n = 1, 2, \dots$ ve $y_i^{(0)}$ veriliyor.

Örnek 6.1 Bu bölümde teorik sonuçları destekleyen lineer olmayan bir örnek ele alacağız.

$$\varepsilon \left[u(t) + \frac{1}{4} \tanh^2(t) u(t-1) \right]' + u(t) + \tanh(u(t)) \\ + e^t + \frac{1}{2} \cosh(u(t-1)) = 0, \quad 0 < t \leq 2,$$

$$u(t) = 1, \quad -1 \leq t \leq 0.$$

Bu problemin kesin çözümü $u(t)$ bilinmiyor. Bu nedenle yine $\omega_{N,p}$ şebeke üzerindeki maksimum hataları tahmin etmek için çift katlı şebeke prensibini kullanacağız. Yani hesaplanan çözümleri bir şebeke üzerindeki çözümlerle karşılaştırıyoruz (Doolan vd., 1980; Farell vd., 2000). Burada kullanılan başlangıç tahmini

$$y_i^{(0)} = 1 - e^{-t_i}$$

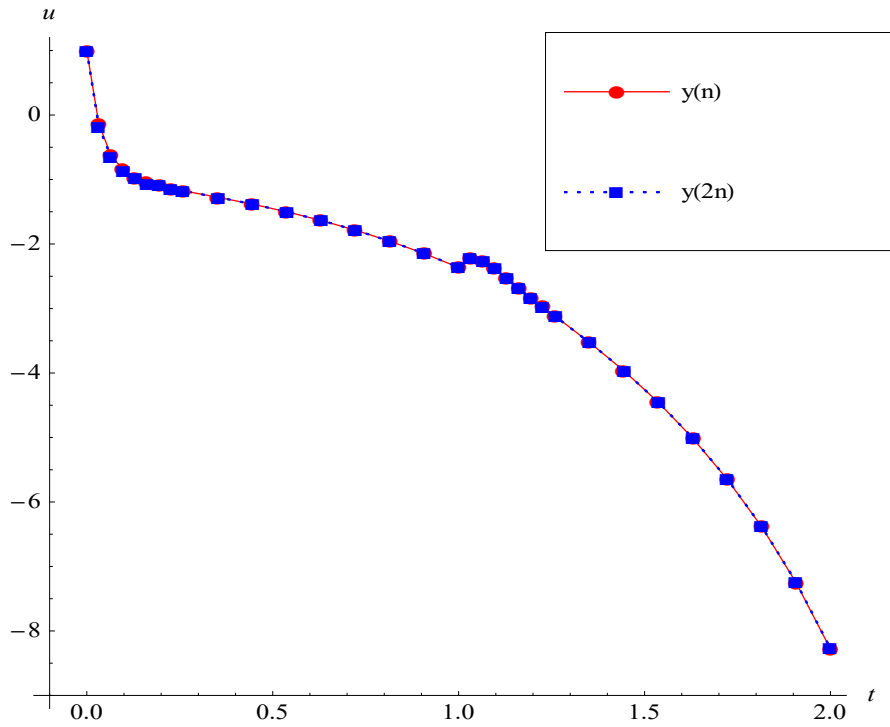
olarak alınmış ve iterasyon sayısı n şu şekilde seçilmiştir:

$$\max_i |y_i^{(n)} - y_i^{(n-1)}| \leq 10^{-5}.$$

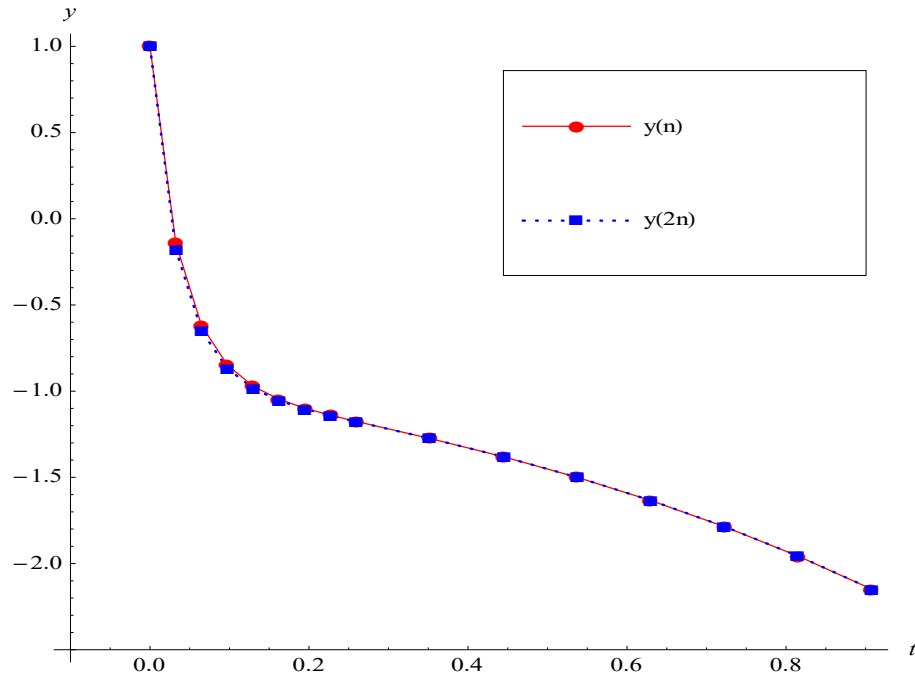
Bu kısımda, parçalı düzgün şebeke (Shishkin şebeke) üzerinde (1.3)-(1.4) problemine uygulanan (6.21)-(6.22) fark şeması için Örnek 6.1 üzerinden bazı nümerik sonuçlar sunacağız. Ele alınan problem, $\varepsilon = 2^{-i}$, $i = 4, 8, \dots, 24$ ve $N = 32, 64, 128, 256, 512, 1024$ değerleri için hesaplanmaktadır. Ortaya çıkan e^N hataları ve buna karşılık gelen uygun p^N değerleri Çizelge 6.1’de verilmiştir.

Çizelge 6.1 Örnek 6.1 için Shishkin şebekede ε ve N 'nin farklı değerleri için maksimum hatalar ve yakınsama oranları

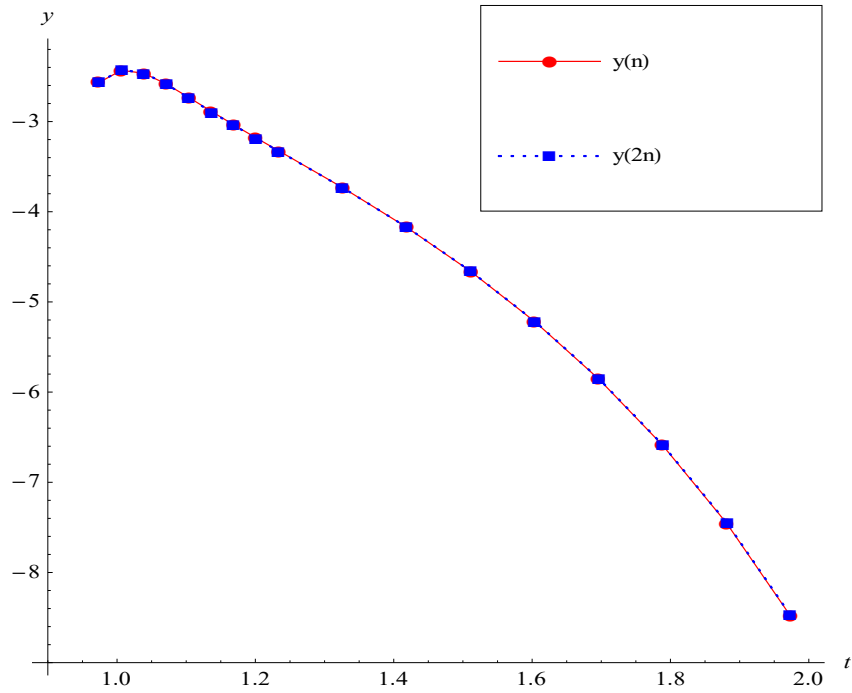
ε	$N = 32$	$N = 64$	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$	$N = 1024$
2^{-4}	0.0585140	0.0384984	0.0238415	0.0141404	0.0081353	0.0045794
0.60	0.69	0.75	0.80	0.83		
2^{-8}	0.0589737	0.0388002	0.0240287	0.0142515	0.0081992	0.0046153
0.60	0.69	0.75	0.80	0.83		
2^{-12}	0.0590024	0.0388190	0.0240403	0.0142584	0.0082032	0.0046176
0.60	0.69	0.75	0.80	0.83		
2^{-16}	0.0590042	0.0388202	0.0240411	0.0142588	0.0082034	0.0046177
0.60	0.69	0.75	0.80	0.83		
2^{-20}	0.0590043	0.0388203	0.0240411	0.0142588	0.0082034	0.0046177
0.60	0.69	0.75	0.80	0.83		
2^{-24}	0.0590043	0.0388203	0.0240411	0.0142588	0.0082034	0.0046177
0.60	0.69	0.75	0.80	0.83		
e^N	0.0590043	0.0388203	0.0240411	0.0142588	0.0082034	0.0046177
p^N	0.60	0.69	0.75	0.80	0.83	



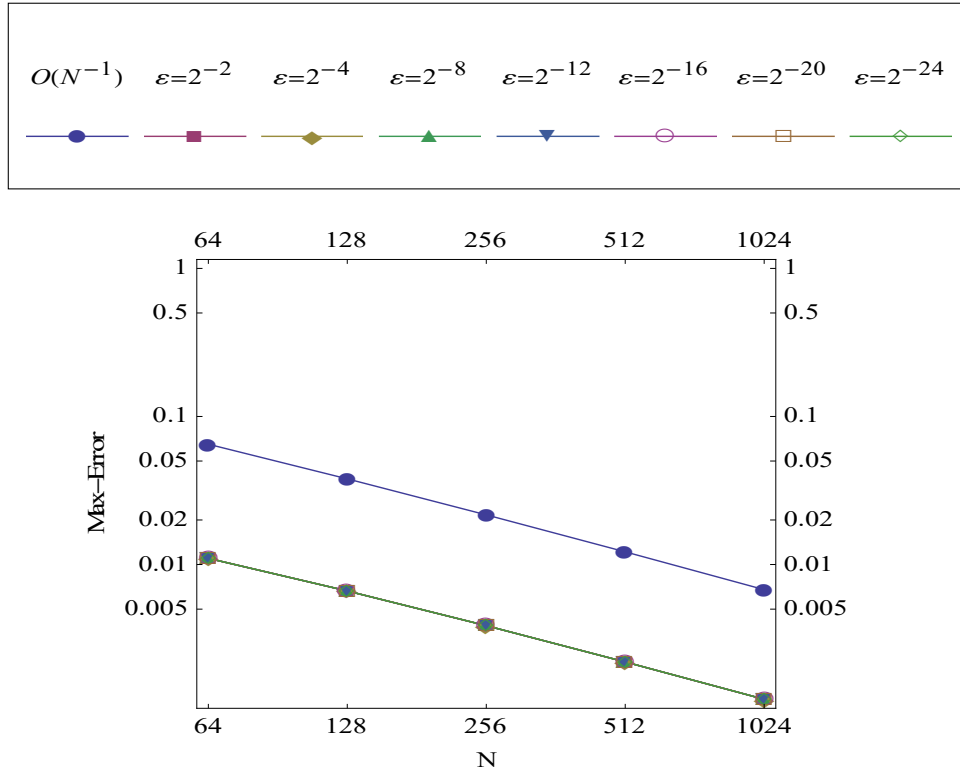
Şekil 6.1 $\varepsilon = 2^{-4}$ ve $N = 64$ için Örnek 6.1'in $[0,2]$ aralığında Shishkin şebekedeki nümerik çözümü



Şekil 6.2 $\varepsilon = 2^{-4}$ ve $N = 64$ için Örnek 6.1'in $[0,1]$ aralığında Shishkin şebekedeki nümerik çözümü



Şekil 6.3 $\varepsilon = 2^{-4}$ ve $N = 64$ için Örnek 6.1'in $[1,2]$ aralığında Shishkin şebekedeki nümerik çözümü

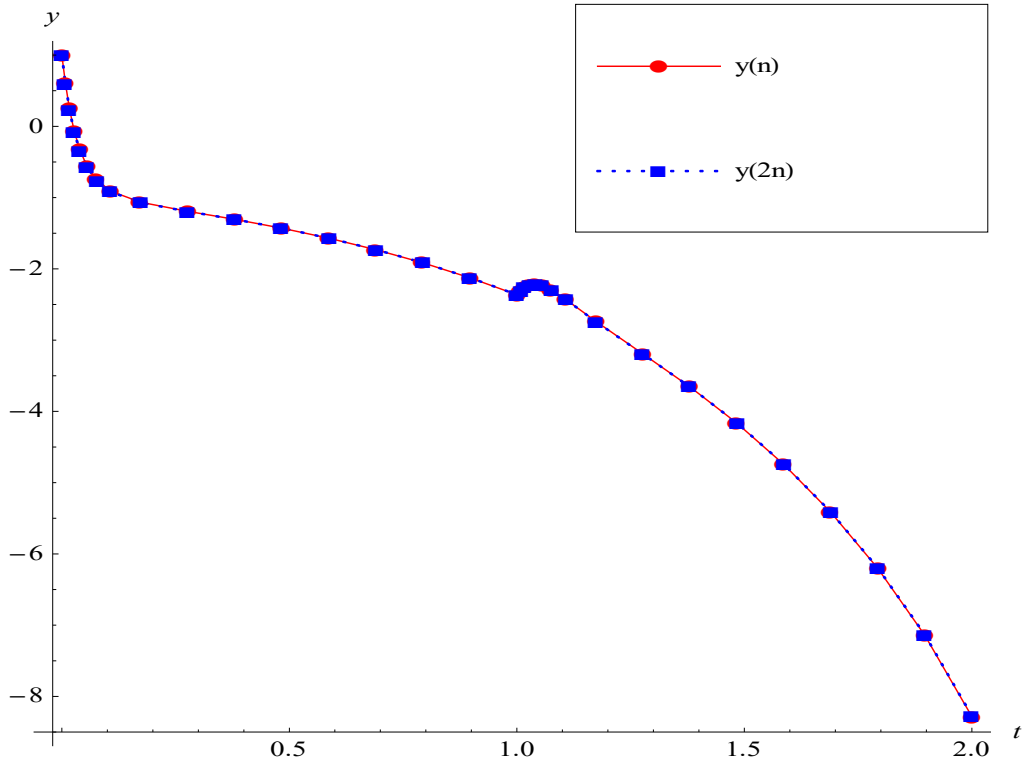


Şekil 6.4 Farklı ε ve N değerleri için Örnek 6.1'in Shishkin şebekedeki maksimum hata grafiği

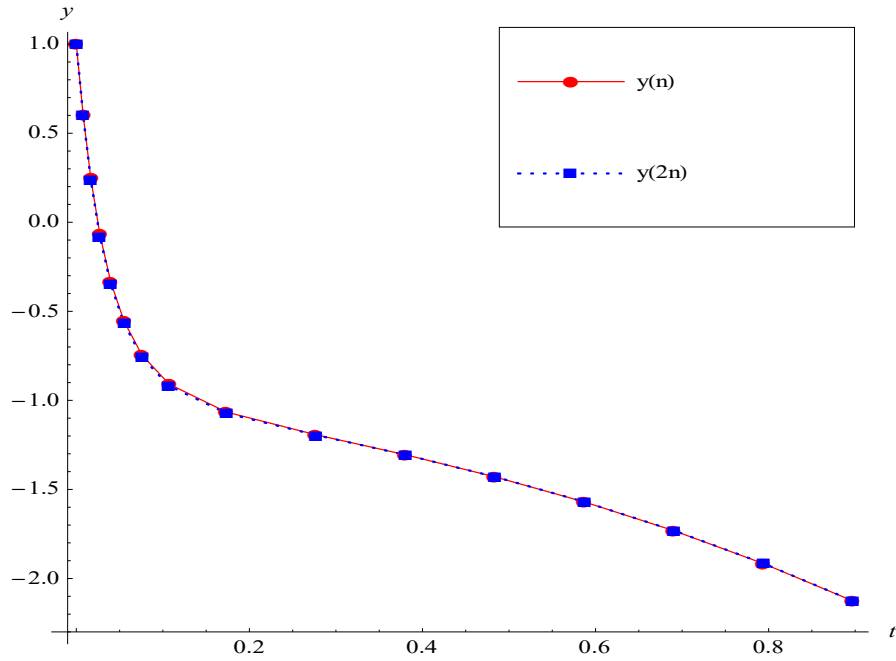
Bu kısımda, düzgün olmayan şebeke (Bakhvalov şebeke) üzerinde (1.3)-(1.4) problemine uygulanan (6.21)-(6.22) fark şeması için Örnek 6.1 üzerinden bazı nümerik sonuçlar sunacağız. Ele alınan problem, $\varepsilon = 2^{-i}$, $i = 4, 8, \dots, 24$ ve $N = 16, 32, 64, 128, 256, 512$ değerleri için hesaplanmaktadır. Ortaya çıkan e^N hataları ve buna karşılık gelen uygun p^N değerleri aşağıdaki Çizelge 6.2'de verilmiştir.

Çizelge 6.2 Örnek 6.1 için Bakhvalov şebekede ε ve N 'nin farklı değerleri için maksimum hatalar ve yakınsama oranları

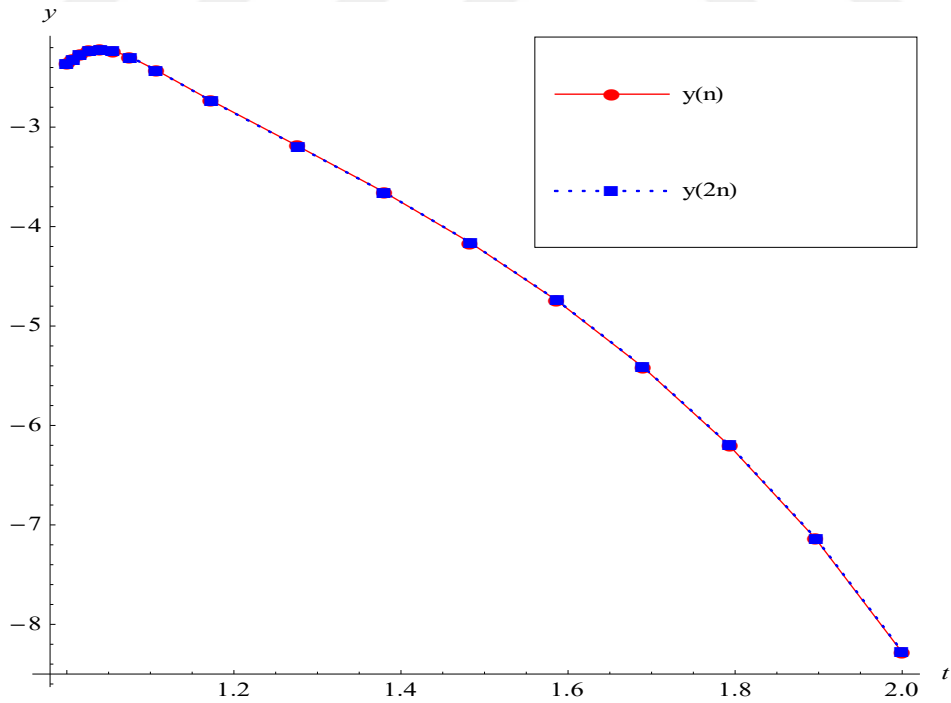
ε	$N = 16$	$N = 32$	$N = 64$	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$
2^{-4}	0.0460119	0.0251589	0.0131140	0.0066993	0.0033863	0.0017024
	0.87	0.94	0.97	0.98	0.99	
2^{-8}	0.0492397	0.0267977	0.0140078	0.0071654	0.0036243	0.0018227
	0.88	0.94	0.97	0.98	0.99	
2^{-12}	0.0494350	0.0269067	0.0140656	0.0071951	0.0036394	0.0018303
	0.88	0.94	0.97	0.98	0.99	
2^{-16}	0.0494471	0.0269135	0.0140692	0.0071970	0.0036403	0.0018308
	0.88	0.94	0.97	0.98	0.99	
2^{-20}	0.0494479	0.0269140	0.0140694	0.0071971	0.0036404	0.0018308
	0.88	0.94	0.97	0.98	0.99	
2^{-24}	0.0494479	0.0269140	0.0140694	0.0071971	0.0036404	0.0018308
	0.88	0.94	0.97	0.98	0.99	
e^N	0.0494479	0.0269140	0.0140694	0.0071971	0.0036404	0.0018308
p^N	0.88	0.94	0.97	0.98	0.99	



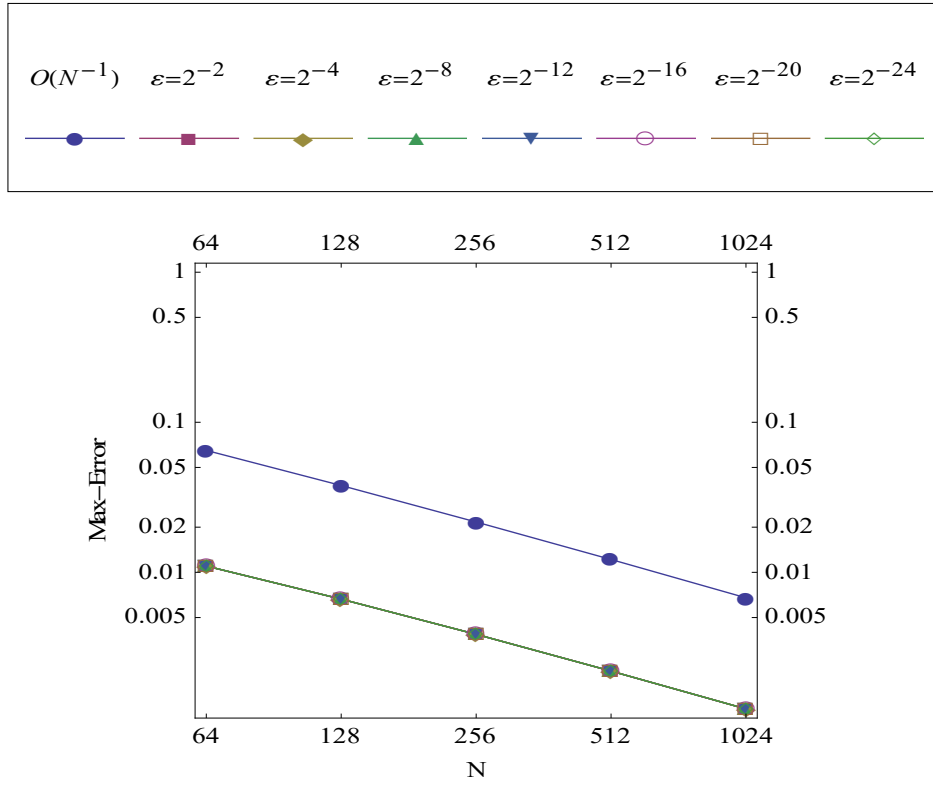
Şekil 6.5 $\varepsilon = 2^{-4}$ ve $N = 64$ için Örnek 6.1'in $[0,2]$ aralığında Bakhvalov şebekedeki nümerik çözümü



Şekil 6.6 $\varepsilon = 2^{-4}$ ve $N = 64$ için Örnek 6.1'in $[0,1]$ aralığında Bakhvalov şebekedeki nümerik çözümü



Şekil 6.7 $\varepsilon = 2^{-4}$ ve $N = 64$ için Örnek 6.1'in $[1,2]$ aralığında Bakhvalov şebekedeki nümerik çözümü



Şekil 6.8 Farklı ε ve N değerleri için Örnek 6.1'in Bakhvalov şebekedeki maksimum hata grafiği

6.7 Bölüm Sonu Değerlendirmesi

Bu bölümde birinci mertebeden lineer olmayan SPNDDE ele alındı. (1.3)-(1.4) problemin nümerik çözümü için u ve türevi için bazı değerlendirmeler yapıldı. Düzgün olmayan şebeke için klasik fark şeması kuruldu. Fark şemasının kararlılığı ve düzgün yakınsaklığı Shishkin ve Bakhvalov şebekelerde incelendi. Yakınsama hızı Shishkin şebeke için $O(N^{-1} \ln N)$ ve Bakhvalov şebeke için $O(N^{-1})$ olduğu gösterildi. Kesin çözümü olmayan bir örnek ele alınarak nümerik sonuçlar incelendi ve grafik çizimleri yapıldı.



7. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada popülasyon ekolojisi, biyoloji, fizik, tıp ve ekonomi gibi bilim ve mühendislikte geçen bazı süreçler için SPNDDEs için başlangıç değer problemlerinin sonlu fark metoduyla nümerik çözümleri incelendi. Bu problemlerin nümerik çözümü için uygun fark şemaları kuruldu. Bu fark şemaları için hata değerlendirmeleri, ε 'na göre düzgün yakınsaklıkları ve kararlılık analizleri yapıldı.

(1.1)-(1.2) problemi için ilk önce düzgün şebekede üstel katsayılı fark şeması kuruldu. Bu fark şeması $\varepsilon \leq h$ şartı altında ε 'na göre düzgün yakınsak olduğu ve yakınsama hızının $O(N^{-1})$ olduğu teorik olarak gösterildi. Bu şart ise pratik olmayan ağır bir şarttır ve pratik sonuçlar elde edemediğimiz için tablo ve grafik verilmemiştir. Bu değerlendirmenin iyileştirilemez olduğu birinci mertebeden singüler pertürbe bir problem üzerinde gösterilmiştir (Amirali ve Amirali, 2018). Daha sonra düzgün olmayan şebekede klasik fark şeması kuruldu. Bu fark şemasının ayırık maksimum normda ε 'a göre düzgün yakınsak olduğu gösterildi.

(1.3)-(1.4) problemi için de düzgün olmayan şebekede klasik fark şeması kuruldu ve fark şemasının ayırık maksimum normda ε 'a göre düzgün yakınsak olduğu gösterildi.

(1.1)-(1.2) ve (1.3)-(1.4) problemleri için teorik olarak gösterilen sonuçlar örneklerle desteklendi. Elde edilen nümerik sonuçlar teorik sonuçları destekler niteliktedir.

$\bar{I}$ aralığında t 'nin farklı değerleri için kurulan fark şemalarının farklı N ve ε değerleri için e^N maksimum hata sonuçları ve p^N yakınsaklık oranları tablolarda listelenmiş ve grafik çizimleri yapılmıştır. Bu tablo ve grafikler ε parametresine göre yakınsama hızlarının Shishkin (parçalı düzgün) şebekede $O(N^{-1} \ln N)$ ve Bakhvalov şebekede $O(N^{-1})$ olduğu görülmüştür. Bu verilere göre problemlerin yakınsama derecesi Shishkin şebeke için $p^N \cong 0.85$ ve Bakhvalov şebeke için $p^N \cong 1$ civarında olduğu görülmüştür. Bu ise elde edilen nümerik sonuçların teorik sonuçları destekler nitelikte olduğunu göstermektedir.



KAYNAKLAR

- Amirali, G. M., Amirali, I. G. (2018). *Nümerik analiz*. Seçkin: Ankara, Türkiye.
- Amirali, I., Acar, H. (2024). Stability inequalities and numerical solution for neutral Volterra delay integro-differential equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 436, 115343. doi: 10.1016/j.cam.2023.115343
- Amiraliyev, G. M., Cimen, E. (2010). Numerical method for a singularly perturbed convection–diffusion problem with delay. *Applied Mathematics and Computation*, 216(8), 2351–2359. doi:10.1016/j.amc.2010.03.080
- Amiraliyev, G. M., Erdoğan, F. (2007). Uniform numerical method for singularly perturbed delay differential equations. *Computers & Mathematics with Applications*, 53(8), 1251–1259. doi: 10.1016/j.camwa.2006.07.009
- Amiraliyev, G. M., Yapman, Ö., Kudu, M. (2019). A fitted approximate method for a Volterra delay-integro-differential equation with initial. *Hacettepe Journal of Mathematics & Statistics*, 48(5), 1417–1429. doi: 10.15672/HJMS.2018.582
- Amiraliyev, G. M., Yilmaz, B. (2014). Fitted difference method for a singularly perturbed initial value problem. *International Journal of Mathematics and Computation*, 22(1), 1–10.
- Amiraliyeva, I. G., Amiraliyev, G. M. (2009). Uniform difference method for parameterized singularly perturbed delay differential equations. *Numerical Algorithms*, 52(4), 509–521. doi:10.1007/s11075-009-9295-y
- Baker, C. T. H., Bocharov, G. A., Paul, C. A. H., Rihan, F. A. (1998). Modelling and analysis of time-lags in some basic patterns of cell proliferation. *Journal of Mathematical Biology*, 37, 341–371. doi: 10.1007/s002850050133
- Baker, C. T. H., Bocharov, G. A., Rihan, F. A. (2008). *Neutral delay differential equations in the modelling of cell growth*. Applied Mathematics Group Research Reports, University of Chester. <http://hdl.handle.net/10034/346421>
- Baker, C. T. H., Parmuzin, E. I. (2008). Initial function estimation for scalar neutral delay differential equations. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*, 2, 163–183. doi: 10.1515/RJNAMM.2008.010
- Baker, C. T. H., Paul, C. A. H. (2006). Discontinuous solutions of neutral delay differential equations. *Applied Numerical Mathematics*, 56(3), 284–304. doi: 10.1016/j.apnum.2005.04.009
- Balachandran, B., Nagy, T. K., Gilsinn, D. E. (2009). *Delay differential equations*. Springer: New York, USA.
- Bartoszewski, Z., Baranowska, A. (2015). Solving boundary value problems for second order singularly perturbed delay differential equations by ε -approximate fixed-point method. *Mathematical Modelling and Analysis*, 20(3), 369–381. doi: 10.3846/13926292.2015.1048759
- Bellen, A., Guglielmi, N. (2009). Solving neutral delay differential equations with state-dependent delays. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 229, 350–362. doi: 10.1016/j.cam.2008.04.015
- Bellen, A., Zennaro, M. (2003). *Numerical Methods for Delay Differential Equations*. Oxford University Press: Oxford, UK.
- Bellen, A., Maset, S., Zennaro, M., Guglielmi, N. (2009). Recent trends in the numerical solution of retarded functional differential equations. *Acta Numerica*, 18, 1–110. doi: 10.1017/S0962492906390010

- Belman, R., Cooke, K. L. (1963). *Differential difference equations*. Academic Press: New York, USA.
- Blakely, J. N., Corron, N. J. (2004). Experimental observation of delay-induced radio frequency chaos in a transmission line oscillator. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 14, 1035-1041. doi: 10.1063/1.1804092
- Boucekkine, R., Pintus, P. A. (2010). Is History a Blessing or a Curse ? International Borrowing without Commitment, Leapfrogging and Growth Reversals. Eriřim Tarihi: 15 Ekim 2023. Eriřim adresi: <https://shs.hal.science/halshs-00535592>.
- Brayton, R. K. (1967). Nonlinear oscillations in a distributed network. *Quarterly of Applied Mathematics*, 24(4), 289-301. doi: 10.1090/QAM/99914
- Chukwu, E. N. (1992). *Stability and time-optimal control of hereditary systems*. Academic Press: New York, USA.
- Cakir, M., Ekinici, Y., Cimen, E. (2022). A numerical approach for solving nonlinear Fredholm integro-differential equation with boundary layer. *Computational and Applied Mathematics*, 41: 259. doi: 10.1007/s40314-022-01933-z
- Cimen, E., Cakir, M. (2018). Convergence analysis of finite difference method for singularly perturbed nonlocal differential-difference problem. *Miscellaneous Mathematical Notes*, 19(2), 795-812. doi: 10.18514/MMN.2018.2302
- Cimen, E., Ekinici, Y. (2017). Numerical method for a neutral delay differential problem. *International Journal of Mathematics and Computations. Science*, 12(1), 1–11.
- Domoshnitsky, A., Levi, S., Kappel, R. H., Litsyn, E., Yavich, R. (2021). Stability of neutral delay differential equations with applications in a model of human balancing. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 16, 21. doi: 10.1051/mmnp/2021008
- Doolan, E. R., Miller, J. J. H., Schilders, W. H. A. (1980). *Uniform numerical methods for problems with initial and boundary layers*. Boole Press: Dublin, UK.
- Driver, R. D. (1977). *Ordinary and delay differential equations*. Springer-Verlag: New York, USA.
- Ekinici, Y. (2017). *Neutral delay diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri*, Yüksek lisans tezi. Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Van, Türkiye.
- El'sgolts, L. E., Norkin, S. B. (1973). *Introduction to the theory and application of differential equations, with deviating arguments*. Academic Press: New York, USA.
- Enright, W. H. Hayashi, H. (1998). Convergence analysis of the solution of retarded and neutral delay differential equations by continuous numerical methods. *Siam Journal on Numerical Analysis*, 35(2), 572-585. doi: 10.1137/S0036142996302049
- Erneux, T. (2009). *Applied delay differential equations*. Springer: New York, USA.
- Farell, P. A., Hegarty, A. F., Miller, J. J. H., O'Riordan, E., Shishkin, G. I. (2000). *Robust computational techniques for boundary layers*. Chapman Hall/CRC: New York, USA.
- Foley, C., Mackey, M. C. (2009). Dynamic hematological disease: a review. *Journal Mathematical Biology*, 58, 285-322. doi: 10.1007/s00285-008-0165-3
- Gan, S. (2009). Dissipativity of θ -methods for nonlinear delay differential equations of neutral type. *Applied Numerical Mathematics*, 59, 1354-1365. doi: 10.1016/j.apnum.2008.08.003

- Geng, F. Z., Qian, S. P. (2014). Piecewise reproducing kernel method for singularly perturbed delay initial value problems. *Applied Mathematics Letters*, 37, 67-71. doi: 10.1016/j.aml.2014.05.014
- Getto, P., Waurick, M. (2016). A differential equation with state-dependent delay from cell population biology. *Journal of Differential Equations*, 260(7), 6176-6200. doi: 10.1016/j.jde.2015.12.038
- Gopalsamy, K. (1992). ***Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics***. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, Netherlands.
- Guglielmi, M. Hairer, E. (2016). Path-regularization of linear neutral delay differential equations with several delays. *Journal of Computational Applied Mathematics*, 292, 785-794. doi: 10.1016/j.cam.2014.12.028
- Guo, S., Ma, W. (2016). Global behavior of delay differential equations model of HIV infection with apoptosis. *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B*, 21(1), 103-119. doi: 10.3934/dcdsb.2016.21.103
- Hadeler, K. P. (2008). Neutral delay equations from and for population Dynamics. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 11(11), 1-18. doi: 10.14232/ejqtde.2007.7.11
- Hairer, E., Norsett, S. P., Wanner, G. (2008). ***Solving ordinary differential equations I***. Springer: New York, USA.
- Halas, M., Anguelova, M. (2013). When retarded nonlinear time-delay systems admit an input-output representation of neutral type. *Automatica*, 49(2), 561-567. doi: 10.1016/j.automatica.2012.11.027
- Hale, J. (1977). ***Theory of functional differential equations***. Springer-Verlag: New York, USA.
- Huang, W. (2005). Transition layers for a singularly perturbed neutral delay differential equation. In D. P. Clemence and G. Tang (Ed.), ***Mathematical studies in nonlinear wave propagation*** (pp. 125-133). Contemporary Mathematics, 379. AMS: Providence, USA.
- Jackiewicz, Z. (1987). Existence and uniqueness of solutions of neutral delay-differential equations with state dependent delays. *Funkcialaj Ekvacioj*, 30, 9-17.
- Jamilla, J., Mendoza, R., Mezo, I. (2020). Solutions of neutral delay differential equations using a generalized Lambert W function. *Applied Mathematics and Computation*, 382, 125334. doi: 10.1016/j.amc.2020.125334
- Kadalbajoo, M. K., Reddy, Y. N. (1989). Asymptotic and Numerical Analysis of Singular Perturbation Problems: A Survey. *Applied Mathematics and Computation*, 30(3), 223-259. doi: 10.1016/0096-3003(89)90054-4
- Kadalbajoo, M. K., Sharma, K. K. (2004). Parameter uniform numerical method for a boundary-value problem for singularly perturbed nonlinear delay differential equation of neutral type. *International Journal of Computer Mathematics*, 81(7), 845-862. doi: 10.1080/00207160410001708823
- Kevorkian, J., Cole, J. D. (1981). ***Perturbation methods in applied mathematics***. Springer Verlag: New York, USA.
- Kolmanovskii, V., Myshkis, A. (1992). ***Applied theory of functional differential equations***. Kluwer Academic Publishers: Netherlands.
- Kolmanovskii, V., Myshkis, A. (1999). ***Introduction to the theory and applications of functional differential equations***. Kluwer Academic Publishers: Netherlands.
- Kuang, Y. (1993). ***Delay differential equations with applications in population dynamics***. Academic Press: New York, USA.

- Kuang, Y., Feldstein, A. (1991). Boundedness of solutions of a nonlinear nonautonomous neutral delay equation. *Journal Mathematical Analysis and Applications*, 156(1), 293-304. doi: 10.1016/0022-247X(91)90398-J
- Linß, T. (1985). *Layer-adapted meshes for reaction-convection-diffusion problems*. Springer Heidelberg Dordrecht: New York, USA.
- Liu, L. B., Chen, Y. (2014). Maksimum norm a posteriori error estimates for a singularly perturbed differential difference equation with small delay. *Applied Mathematics and Computation*, 227, 801-810. doi: 10.1016/j.amc.2013.10.085
- Liu, Z., Kang, S. M., Ume, J. S. (2010). Existence of bounded nonoscillatory solutions of first-order nonlinear neutral delay differential equations. *Computers and Mathematics with Applications*, 59(11), 3535-3547. doi: 10.1016/j.camwa.2010.03.047
- Liz, E., Röst, G. (2013). Global dynamics in a commodity market model. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 398(2), 707-714. doi: 10.1016/j.jmaa.2012.09.024
- Martina, B., Veronika, N. (2015). The use of functional differential equations in the model of the meat market with supply delay. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 213, 74-79. doi: 10.1016/j.sbspro.2015.11.406
- Miller, J. J. H., O'Riordan, E., Shishkin, G. I. (1996). *Fitted numerical methods for singular perturbation problems*. World Scientific: Singapore.
- Musayev, B., Koca, K., Mustafayev, N. (2006). *Teori ve çözümlü problemlerle analiz-III*. Seçkin: Ankara, Türkiye.
- Nayfeh, A. H. (1973). *Perturbation methods*. John Wiley & Sons: New York, USA.
- Nayfeh, A. H. (1993). *Introduction to perturbation techniques*. John Wiley & Sons: New York, USA.
- O'Malley, R. E. Jr. (1991). *Singular perturbations method for ordinary differential equations*. Springer-Verlag: New York, USA.
- O'Malley, R. E. (1974). *Introduction to Singular Perturbations*. Academic Press: New York, USA.
- Palaniswami, S. C. (1995). Existence of asymptotic solution of second order neutral differential equations with multiple delays. *International Journal of stochastic Analysis*, 8, 77-83. doi: 10.1155/S1048953395000074
- Podila, P. C., Kumar, K. (2019). A class of finite difference schemes for singularly perturbed delay differential equations of second order. *Turkish journal of Mathematics*, 43, 1061-1079. doi:10.3906/mat-1807-184
- Reddy, Y. N., Soujanya, GBSL., Phaneendra, K. (2012). Numerical integration method for singularly perturbed delay differential equations. *International Journal of Applied Science and Engineering*, 10(3), 249-261.
- Rihan, F. A. (2010). Adjoint sensitivity analysis of neutral delay differential models. *Journal Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics*, 5(1-2), 95-101.
- Rihan, F. A. (2021). *Delay differential equations and application to biology*. Springer: Singapore.
- Roos, H. G., Stynes, M., Tobiska, L. (1996). *Numerical methods for singularly perturbed differential equations*. Springer-Verlag: Berlin. doi: 10.1007/978-3-662-03206-0
- Samarskii, A. A. (2001). *Theory of difference schemes*. Monographs and textbooks

- in pure and applied mathematics. Marcel Dekker, New York, USA. doi: 10.1201/9780203908518
- Sedaghat, S., Nemati, S., Ordokhani, Y. (2015). Application of the hybrid functions to solve neutral delay functional differential equations. *International Journal of Computer Mathematics*, 94, 503-514. doi: 10.1080/00207160.2015.1114612
- Shishkin, G. I., Shishkina, L. P. (2009). ***Difference methods for singular perturbation problems***. Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics: New York, USA.
- Su, H., Li, W., Ding, X. (2013). Preservation of Hopf bifurcation for neutral delay-differential equations by θ -methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 248, 76-87. doi: 10.1016/j.cam.2013.01.020
- Tunç, C., Altun, Y. (2017). On the global stability of a neutral differential equation with variable time-lags. *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, 9(4), 31-41.
- Villasana, M., Radunskaya, A. (2003). A delay differential equation model for tumor growth. *Journal of Mathematical Biology*, 47, 270-294. doi: 10.1007/s00285-003-0211-0
- Wang, Q. (2015). Numerical oscillation of neutral logistic delay differential equation. *Applied Mathematics and Computation*, 258, 49-59. doi: 10.1016/j.amc.2015.01.113
- Wang, W. (2017). Uniform ultimate boundedness of numerical solutions to nonlinear neutral delay differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 309, 132-144. doi: 10.1016/j.cam.2016.06.027
- Wen, L., Liu, X., Yu, Y. (2015). Stability of Runge-Kutta methods for neutral delay differential equations. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 127027. doi: 10.1155/2015/127027
- Zeng, X., Xiong, Z., Wang, C. (2016). Hopf bifurcation for neutral-type neural network model with two delays. *Applied Mathematics and Computation*, 282, 17-31. doi: 10.1016/j.amc.2016.01.050
- Zhang, W., Feng, W., Yan, J., Song, J. (2005). Existence of nonoscillatory solutions of first-order linear neutral delay differential equations. *Computer and Mathematics with Applications*, 49(7-8), 1021-1027. doi: 10.1016/j.camwa.2004.12.006
- Zhao, J., Yi, Y., Xu, Y. (2020). Strong convergence and stability of the split-step theta method for highly nonlinear neutral stochastic delay integro differential equation. *Applied Numerical Mathematics*, 157, 385-404. doi: 10.1016/j.apnum.2020.06.013



ÖZ GEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Yılmaz EKİNCİ
E-posta Adresi :

Eğitim Bilgileri

Lisans :
Üniversite : Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi
Fakülte : Eğitim Fakültesi
Bölüm : Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği
Mezuniyet Yılı : 2014

Yüksek Lisans :
Üniversite : Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi
Enstitü : Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı : Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı
Mezuniyet Yılı : 2017

VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
LİSANSÜSTÜ TEZ ORJİNALLİK RAPORU

Tarih. 25/12/2023

Tez başlığı: SINIR KATLI NEUTRAL TİP GECİKMELİ DİFERANSİYEL PROBLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışmamın kapak sayfası, giriş, ana bölümler ve sonuç bölümlerinden oluşan toplam 76 (Yetmiş altı) sayfalık kısmına ilişkin, 06/12/2023 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından Turnitin adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre tezimin benzerlik oranı % 17 (On yedi) dir.

Uygulanan filtreler aşağıda verilmiştir:

- Kabul ve onay sayfası hariç,
- Teşekkür hariç,
- İçindekiler hariç,
- Simge ve kısaltmalar hariç,
- Gereç ve yöntemler hariç,
- Kaynakça hariç,
- Alıntılar hariç,
- Tezden çıkan yayınlar hariç,
- 7 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç (Limit match size to 7 words)

Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Lisansüstü Tez Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılmasına İlişkin Yönerge'yi inceledim ve bu yönergede belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini bilgilerinize arz ederim.

Tarih ve imza
25/12/2023

Adı soyadı: Yılmaz EKİNCİ

Öğrenci no: 18910001361

Anabilim dalı: Uygulamalı Matematik

Programı: Matematik

Statüsü: () Yüksek lisans (x) Doktora

DANIŞMAN

ENSTİTÜ ONAYI

UYGUNDUR

UYGUNDUR

