



ANKARA
HACI BAYRAM VELİ ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

İKİ DEĞİŞKENLİ BERNSTEIN KANTOROVICH
OPERATÖRLERİNİN ÜSTEL FORMU

HALİME ALTUNTAŞ

Tez Danışmanı
DOÇ. DR. KADİR KANAT

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

HAZİRAN 2024



İKİ DEĞİŞKENLİ BERNSTEIN KANTOROVICH
OPERATÖRLERİNİN ÜSTEL FORMU

HALİME ALTUNTAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

ANKARA HACI BAYRAM VELİ ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

HAZİRAN 2024

ETİK BEYAN

Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında; tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu, tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı, bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu, bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Halime Altuntaş

06.06.2024

TEZ ONAY SAYFASI

Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Halime ALTUNTAŞ tarafından hazırlanan İki Değişkenli Bernstein Kantorovich Operatörünün Üstel Formu Başlıklı tez çalışması 06/06/2024 tarih ve 13:00 saatinde yapılan tez savunma sınavında aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak **KABUL**

Kabul

Ret

Başkan:

Prof. Dr. İsmet YÜKSEL

Ankara Gazi Üniversitesi



Üye:

Doç. Dr. Kadir KANAT

Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi



Üye:

Dr. Öğr. Üyesi Melek SOFYALIOĞLU AKSOY

Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi



İKİ DEĞİŞKENLİ BERNSTEIN KANTOROVICH OPERATÖRLERİNİN ÜSTEL FORMU

(Yüksek Lisans Tezi)

HALİME ALTUNTAŞ
ANKARA HACI BAYRAM VELİ ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

Haziran 2024

ÖZET

Bu tez dokuz bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde giriş kısmı ve iki değişkenli Bernstein operatörü, ikinci bölümde temel kavramlar başlığı altında lineer pozitif operatörlerin tanımı, yakınsaklığı ve bazı temel tanımlar, üçüncü bölümde iki değişkenli Bernstein Kantorovich operatörü verilmiştir. Dördüncü bölümde Bernstein operatörünün üstel formu, beşinci bölümde ise Bernstein Kantorovich operatörünün üstel formu, altıncı bölümde iki değişkenli Bernstein operatörünün üstel formu verilmiştir. Yedinci bölümde iki değişkenli Bernstein Kantorovich operatörünün üstel formu tanıtılıp yaklaşım özellikleri ve Voronovskaya tip teorem verilmiştir. Sekizinci bölümde ise iki değişkenli Bernstein Kantorovich operatörünün üstel formunun verilen bir fonksiyona yakınsaması grafiklerle verilmiştir. Son bölümde ise yapılan çalışmalarla ilgili sonuçlara değinilmiştir.

Bilim Kodu : 20406
Anahtar Kelimeler : Lineer Pozitif Operatörler, Korovkin Teoremi, Bernstein Kantorovich Operatörler, Süreklilik Modülleri, Voronovskaya Tip Teoremler
Sayfa Adedi : 51
Tez Danışmanı : Doç. Dr. Kadir KANAT

APPROXIMATION BY BIVARIATE BERNSTEIN KANTOROVICH OPERATORS
THAT REPRODUCE EXPONENTIAL FUNCTIONS

(M.Sc. Thesis)

HALİME ALTUNTAŞ

ANKARA HACI BAYRAM VELİ UNIVERSITY THE INSTITUTE OF GRADUATE
STUDIES

June 2024

ABSTRACT

This thesis consist of eight chapters. In the first part, the introduction and the Bernstein operator in two variables is given, and in the second part, the basic concepts are given. In the third section the Bernstein Kantorovich operator in two variables is given. The exponential form of Bernstein operators is given in the fourth section. In the fifth chapter the exponential form of Bernstein Kantorovich operators is given. In the sixth section the exponential form of the Bernstein operator in two variables is examined. In the seventh section, the exponential form of the Bernstein Kantorovich operator in two variables is introduced, approximation properties and Voronovskaya type theorems are given. In the eighth chapter, the convergence of the exponential form of the two variable Bernstein Kantorovich operator to a given function is given graphically.

Science Code : 20406
Key Words : Linear Positive Operators, Korovkin Theorem, Bernstein Kantorovich Operators, Modulus of Continuity, Voronovskaya type theorems
Page Number : 51
Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Kadir KANAT

TEŞEKKÜR

Öncelikle bu tezi hazırlama sürecinde, lisans ve yüksek lisans eğitimlerim boyunca hem hayata dair hem de akademik bilgilerini bizlerle paylaşmaktan çekinmeyen, hiçbir durumda ve koşulda desteğini esirgemeyen, hep yanımda olan , öğrencisi olmaktan her zaman gurur duyacağım sayın danışmanım Doç. Dr. Kadir KANAT'a (Ankara Hacı bayram Veli Üniversitesi Polatlı Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü), lisans ve yüksek lisans eğitimlerimin her aşamasında yardım ve önerilerini benden esirgemeyen sayın hocam Dr. Öğr. Üyesi Melek SOFYALIOĞLU AKSOY'a (Ankara Hacı bayram Veli Üniversitesi Polatlı Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü), aynı zamanda Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi Polatlı Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümündeki tüm değerli hocalarıma ve hayatımın her döneminde olduğu gibi eğitim hayatım boyunca da beni destekleyen, varlıklarıyla daima yüzümü güldüren ve güç veren canım babam Fikret ALTUNTAŞ'a, canım annem Safiye ALTUNTAŞ'a, canım kardeşim Yunus ALTUNTAŞ'a ve her anımda güvenini ve desteğini hissettiğim can dostum Aybüke ERTAŞ'a teşekkür eder en içten sevgi ve saygılarımı sunarım.

HALİME ALTUNTAŞ

ANKARA, 2024

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	viii
TABLoların LİSTESİ.....	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	x
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. Lineer Pozitif Operatörler	3
3. İKİ DEĞİŞKENLİ BERNSTEIN KANTOROVICH OPERATÖRÜ	11
4. BERNSTEIN OPERATÖRÜNÜN ÜSTEL FORMU	15
5. BERNSTEIN KANTOROVICH OPERATÖRÜNÜN ÜSTEL FORMU	19
6. İKİ DEĞİŞKENLİ BERNSTEIN OPERATÖRLERİNİN ÜSTEL FORMU.....	23
7. İKİ DEĞİŞKENLİ BERNSTEIN KANTOROVICH OPERATÖRLERİNİN ÜSTEL FORMU	27
7.1. İki Değişkenli Bernstein Kantorovich Operatörünün Üstel Formunun Yaklaşım Özellikleri	37
7.1.1. İki Değişkenli Bernstein Kantorovich Operatörünün Üstel Formunun Süreklilik Modülü ile Yaklaşım Hızı.....	37
7.1.2. İki Değişkenli Bernstein Kantorovich Operatörünün Üstel Formu için Voronovskaya Tip Teorem	38
8. GRAFİK VE NÜMERİK ANALİZ	43
9. SONUÇ	45
KAYNAKLAR	47
ÖZGEÇMİŞ	51

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 8.1. $n = 20$ olmak üzere $\alpha \in \{0.5, 0.75, 1\}$ ve sabit $\beta = 2$ değerleri için $\tilde{K}_n^{\alpha, \beta}$ operatörünün f fonksiyonuna yaklaşımı	43
Şekil 8.2. $n = 20$ olmak üzere $\tilde{K}_{20}^{0.01, 0.2}(f; x, y)$, $\tilde{K}_{20}^{0.5, 0.3}(f; x, y)$ ve $\tilde{K}_{20}^{1, 0.4}(f; x, y)$ için $\tilde{K}_n^{\alpha, \beta}$ operatörünün f fonksiyonuna yaklaşımı	44



TABLÖLARIN LİSTESİ

Tablo	Sayfa
Tablo 8.1. Değişen n değerleri için sırasıyla $\alpha \in \{0.5, 0.75, 1\}$ ve sabit $\beta = 2$ değerleri için hata payı sayısal değerler tablosu	43
Tablo 8.2. Farklı n değerleri için sırasıyla $\beta \in \{0.5, 1, 1.5\}$ ve sabit $\alpha = 5$ değerleri için hata payı sayısal değerler tablosu.....	44



SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Kısaltmalar	Açıklamalar
S	Köşe koordinatları $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ olan üçgensel bölge
$S_{\alpha,\beta}^n$	Bir kenarı hareketli üçgensel bölge
$C[a, b]$	$[a, b]$ aralığında tanımlı ve sürekli fonksiyonların sınıfı
$C^k[a, b]$	k - mertebeden türevlenebilen sürekli fonksiyonlar uzayı
$C(S_{\alpha,\beta}^n)$	$S_{\alpha,\beta}^n$ bölgesi üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayı
T_n	Lineer pozitif operatör olan herhangi bir dizi
$B_n(f; x, y)$	İki Değişkenli Bernstein Operatörü
$K_n(f; x, y)$	İki Değişkenli Bernstein Kantorovich Operatörü
$B_n^{\alpha,\beta}(f; x, y)$	İki Değişkenli Bernstein Operatörlerinin Üstel Formu
$\tilde{K}_n^{\alpha,\beta}(f; x, y)$	İki Değişkenli Bernstein Kantorovich Operatörlerinin Üstel Formu
$\exp_{i,j}^{\alpha,\beta}(t, s)$	$e^{iat+j\beta s}$, $i \neq j$ $i, j = 0,1,2$ olacak şekilde test fonksiyonları
$\ f\ _{C[a,b]}$	$C[a, b]$ uzayında $\ f\ _{C[a,b]} = \max_{a \leq x \leq b} f(x) $ ile tanımlı norm
$\omega(f; \delta_1, \delta_2)$	R^2 nin kompakt alt kümesi üzerinde tanımlı tam süreklilik modülü
$\log_\alpha^\beta(\cdot)$	e^{at} fonksiyonunun $t = \frac{1}{\alpha} \log_e(\cdot)$ olacak şekilde ters fonksiyonu

1. GİRİŞ

Matematikte yaklaşım teorisi, fonksiyonların daha basit fonksiyonlarla en iyi şekilde nasıl tahmin edilebileceği ve bununla ortaya çıkan hataların niceliksel olarak karakterize edilmesi ile ilgilidir. Sadece matematikte değil, temel bilimler ve mühendislik bilimleri başta olmak üzere, diğer alanlardaki birçok bilimsel probleme ışık tutması, yaklaşım teorisinin günden güne öneminin artmasına neden olmuştur.

Yaklaşım teorisi, matematikte analizin harmonik analiz, fonksiyonel analiz, nümerik analiz, Fourier analizi gibi birçok dalıyla ilişkili olmasının yanı sıra; operatör teori, olasılık teorisi, sayılar teorisi, istatistik teorisi gibi diğer bilim dallarıyla da iç içedir. Buna ek olarak yaklaşım teorisi fizikte ve mühendislikte veri gösterimi, sinyal işleme, termografik görüntüleme, dalgacık analizi gibi birçok farklı konularda da kullanılmaktadır.

Alman matematikçi Karl Weierstrass tarafından verilen teoremlerle birlikte sürekli fonksiyonlara yaklaşım probleminin temeli atılmıştır. K. Weierstrass [Weierstrass, 1885], kapalı ve sonlu bir $[a, b]$ aralığında sürekli olan g fonksiyonuna bu aralıkta düzgün yakınsayan en az bir polinom dizisinin varlığını ispat etmiştir. 1912 yılında Rus matematikçi Bernstein [Bernstein, 1912], $g \in C[0,1]$, $x \in [0,1]$ ve $\eta \in \mathbb{N}$ için

$$B_\eta(g; x) = \sum_{\zeta=0}^{\eta} g\left(\frac{\zeta}{\eta}\right) \binom{\eta}{\zeta} x^\zeta (1-x)^{\eta-\zeta}$$

polinomlarını göstererek Weierstrass teoreminin kolay ve anlaşılır bir ispatını vermiştir. Bohman [Bohman, 1951] ve Korovkin [Korovkin, 1953] lineer pozitif operatörlerin sonlu aralıkta sürekli fonksiyona yaklaşımına ilişkin çok önemli teoremler vermişlerdir.

1953 yılında Paul Leo Butzer, karesel $K(x, y) = \{(x, y): 0 \leq x, y \leq 1\}$ bölgesi üzerinde iki değişkenli Bernstein operatörünü $f(x, y)$ fonksiyonu karesel bölgede sürekli ve sınırlı olmak üzere

$$B_{n,m}(f; x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m f\left(\frac{k}{n}, \frac{j}{m}\right) p_{n,k}(x) p_{m,j}(y)$$

şeklinde ifade etmiş, operatörün $f(x, y)$ fonksiyonuna düzgün yakınsaklığını

göstermiştir. [Butzer, 1953]. Burada $p_{n,i}(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}$ dir.

1963 yılında Dimitrie D. Stancu üçgensel bir S bölgesi üzerinde iki değişkenli Bernstein polinomlarını

$S \equiv \{(x, y) \in R^2; x, y \geq 0, x + y \leq 1\}$, $f \in C(S)$ ve $n \in N$ için

$$B_n(f; x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} f\left(\frac{k}{n}, \frac{j}{n}\right) p_{n,k,j}(x, y)$$

şeklinde tanımlamıştır [Stancu, 1963]. Yukarıda ki eşitlikte verilen $p_{n,k,j}$ ifadesi

$$p_{n,k,j} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} x^k y^j (1-x-y)^{n-k-j}$$

dir.

İki değişkenli Bernstein operatörleri ile ilgili çalışmalar [Ditzian, 1986], [Adel ve ark., 1995], [Morales ve ark., 2008], [Başcanbaz ve ark., 2016], [Bilgin ve ark., 2021], [Çiçek ve ark., 2022], [Gairola ve ark., 2022] de verilmiştir.

İki değişkenli Bernstein Kantorovich operatörü ile ilgili çalışmalar [Ditzian, 1990], [Acu ve ark., 2015], [Sharma ve ark., 2016], [Acar ve ark., 2018], [Altomare ve ark., 2018], [Acu ve ark., 2019], [Agrawal ve ark., 2022], [Aslan ve ark., 2022], [Gupta, 2023], [Gairola ve ark., 2023], [Aslan, 2023] ile verilmiştir.

Bernstein Kantorovich operatörlerinin üstel formunu 2018 yılında [Aral ve ark., 2018] de verilmiştir. İki değişkenli Bernstein Kantorovich operatörü ise [Pop ve Farcas, 2009] da verilmiştir.

Bu tezin ilk bölümünde lineer pozitif operatörler ile ilgili temel tanımlar, Korovkin teoremi ve süreklilik modülünün tanımı ve özellikleri incelenmiştir. Bununla birlikte tezin devamında Bernstein Kantorovich operatörlerinin üstel formuna ait yaklaşım sonuçları incelenecektir. Daha sonra iki değişkenli Bernstein Kantorovich operatörünün yaklaşım sonuçları verilecektir. Son olarak iki değişkenli Bernstein Kantorovich operatörünün üstel formunun yaklaşım sonuçları, süreklilik modülü, Voronovskaya tip teoremi ve verilen bir fonksiyona yakınsaması grafikler yardımı ile incelenecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Lineer Pozitif Operatörler

Tanım 2.1. Lineer normlu fonksiyon uzayları üzerinde tanımlı dönüşümlere operatör denir.

Tanım 2.2. X ve Y fonksiyon uzayları olmak üzere

$$T: X \rightarrow Y$$

şeklindeki T operatörünü göz önüne alalım. Eğer her $f, g \in X$ ve her $\theta, \gamma \in \mathbb{R}$ için

$$T(\theta f + \gamma g) = \theta T(f) + \gamma T(g)$$

koşulu sağlanıyor ise T operatörüne lineer operatör denir.

Tanım 2.3. f bir fonksiyon ve T bir operatör olmak üzere

$$f \geq 0 \text{ iken } T(f) \geq 0$$

sağlanıyor ise T operatörüne pozitif operatör denir.

Lemma 2.1. Lineer pozitif operatörler monoton artandır. Yani

$$g \leq f \Rightarrow T(g) \leq T(f)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat $g \leq f$ olsun. $f - g \geq 0$ olacağından ve T operatörü pozitif olduğundan

$$T(f - g) \geq 0 \tag{2.1}$$

dir. T operatörünün lineerlik özelliğinden

$$T(f - g) = T(f) - T(g)$$

olup (2.1)' den ispat tamamlanır.

Lemma 2.2. T bir lineer pozitif operatör ise

$$|T(g)| \leq T(|g|)$$

sağlanır.

İspat Herhangi bir f fonksiyonu için

$$-|f| \leq f \leq |f| \tag{2.2}$$

gerçeklenir.

Lemma 2.1. ve (2.2)' den

$$T(-|f|) \leq T(f) \leq T(|f|) \quad (2.3)$$

bulunur. T lineer olduğundan

$$T(-|f|) = -T(|f|)$$

dir. Bu ifadenin (2.3)' de kullanılmasıyla

$$-T(|f|) \leq T(f) \leq T(|f|)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Tanım 2.4. Bir $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli tüm reel değerli fonksiyonlardan oluşan kümeye $C[a, b]$ fonksiyon uzayı denir. $C[a, b]$ uzayındaki norm $f \in C[a, b]$ olmak üzere

$$\|f\|_{C[a,b]} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.5. $\eta \in \mathbb{N}$ olmak üzere $f_\eta: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanan (f_η) dizisine fonksiyon dizisi denir.

Tanım 2.6. $\eta \in \mathbb{N}$ olmak üzere $T_\eta: X \rightarrow Y$, $T_\eta(f; x) = (T_\eta(f))(x)$ şeklinde tanımlanan (T_η) dizisine operatör dizisi denir.

Tanım 2.7. Her $x \in [a, b]$ için

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \|f_\eta - f\| = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \max_{a \leq x \leq b} |f_\eta(x) - f(x)| = 0$$

koşulu sağlanıyorsa (f_η) fonksiyonlar dizisi f fonksiyonuna $C[a, b]$ normunda düzgün yakınsaktır denir ve

$$f_\eta(x) \Rightarrow f(x)$$

notasyonu ile gösterilir.

Tanım 2.8. $\psi_{\eta,k}(x) = T_\eta((t-x)^k; x)$, $\{k = 0, 1, 2, \dots\}$ (2.4)

ile tanımlanan ifadeler (T_η) operatör dizisinin k -yıncı merkezi momentleri denir [Lorentz, 1953].

Teorem 2.1. $f \in C[a, b]$ ve tüm reel düzlemde sınırlı

$$|f(x)| \leq M_f \quad (2.5)$$

olsun. $x \in [0, 1]$ için $0 \leq \alpha_{k,n} \leq 1$ olmak üzere

$$T(f; x) = \sum_{k=0}^n f(\alpha_{k,n}) p_{n,k}(x), \quad p_{n,k}(x) \geq 0$$

pozitif lineer operatör dizisinin $T_n(f; x) \Rightarrow f(x)$ olması için gerekli ve yeterli koşullar;

- i. $T_\eta(1; x) \Rightarrow 1$
- ii. $T_\eta(t; x) \Rightarrow x$
- iii. $T_\eta(t^2; x) \Rightarrow x^2$

dır. 1953 yılında P.P. Korovkin aşağıdaki teoremi ispatlayarak, Bohman'ın koşullarının genel durumda da gerçekleştiğini göstermiştir.

Teorem 2.2.

$T: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ ile tanımlı L_n pozitif lineer operatör dizisi Teorem 2.1'in koşulları gerçekleşiyorsa $L_n(f; x)$, $[a, b]$ de f ye düzgün yakınsar. Yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{C[a,b]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

dır.

İspat Kabul edelim ki, $f \in C[a, b]$ olsun. Sürekli fonksiyonların tanımından her pozitif ε sayısına karşılık öyle bir δ bulabiliriz ki, $|t - x| \leq \delta$ için

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon$$

olur. (2.5) ve üçgen eşitsizliğinden

$$|f(t) - f(x)| \leq |f(t)| + |f(x)| \leq 2M_f \quad (2.6)$$

yazılabilir. Eğer $|t - x| > \delta$ ise $\frac{|t-x|}{\delta} > 1$ olacağından

$$\frac{(t-x)^2}{\delta^2} > 1 \quad (2.7)$$

bulunur. (2.6) ve (2.7) den

$$|f(t) - f(x)| \leq 2M_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

yazılabilir.

O halde $|t - x| \leq \delta$ için

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon$$

ve $|t - x| > \delta$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq 2M_f \frac{(t - x)^2}{\delta^2}$$

olur. Dolayısıyla her $x, t \in [a, b]$ için

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon + 2M_f \frac{(t - x)^2}{\delta^2} \quad (2.8)$$

gerçeklenir. (i), (ii), (iii) koşullarını sağlayan (T_η) operatör dizisinin

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \|T_\eta(f) - f\|_{C[a,b]} = 0$$

eşitliğini sağladığı gösterilirse ispat tamamlanmış olur. Operatörün lineerlik özelliğinden ve üçgen eşitsizliğinden dolayı

$$\begin{aligned} |T_\eta(f(t); x) - f(x)| &= |T_\eta(f(t); x) - f(x) + T_\eta(f(x); x) - T_\eta(f(x); x)| \\ &= |T_\eta(f(t); x) - T_\eta(f(x); x) + T_\eta(f(x); x) - f(x)| \\ &= |T_\eta(f(t) - f(x); x) + f(x)(T_\eta(1; x) - 1)| \end{aligned}$$

ve

$$|T_\eta(f(t); x) - f(x)| \leq |T_\eta(f(t) - f(x); x)| + |f(x)| |T_\eta(1; x) - 1|$$

yazılabilir. Lemma 2.2.' den

$$|T_\eta(f(t); x) - f(x)| \leq T_\eta(|f(t) - f(x)|; x) + |f(x)| |T_\eta(1; x) - 1|$$

olup (2.5)' den

$$|T_\eta(f(t); x) - f(x)| \leq T_\eta(|f(t) - f(x)|; x) + M_f |T_\eta(1; x) - 1|$$

yazabiliriz.

(T_η) monoton artan olduğundan (2.8)' den

$$\begin{aligned}
& |T_\eta(f(t); x) - f(x)| \\
& \leq T_\eta\left(\varepsilon + 2\frac{M_f}{\delta^2}(t-x)^2; x\right) + M_f|T_\eta(1; x) - 1|
\end{aligned} \tag{2.9}$$

elde edilir.

Diğer taraftan (T_η) lineer olduğundan

$$\begin{aligned}
T_\eta\left(\varepsilon + 2\frac{M_f}{\delta^2}(t-x)^2; x\right) &= T_\eta(\varepsilon; x) + T_\eta\left(2\frac{M_f}{\delta^2}(t-x)^2; x\right) \\
&= \varepsilon T_\eta(1; x) + 2\frac{M_f}{\delta^2}T_\eta(t^2 - 2xt + x^2; x), \\
T_\eta\left(\varepsilon + 2\frac{M_f}{\delta^2}(t-x)^2; x\right) &= \varepsilon T_\eta(1; x) + 2\frac{M_f}{\delta^2}\{T_\eta(t^2; x) - x^2 - x^2 + 2x^2 \\
&\quad - 2xT_\eta(t; x) + x^2T_\eta(1; x)\} \\
&= \varepsilon T_\eta(1; x) + 2\frac{M_f}{\delta^2}\{T_\eta(t^2; x) - x^2 + 2x^2 \\
&\quad - 2xT_\eta(t; x) + x^2T_\eta(1; x) - x^2\} \\
&= \varepsilon T_\eta(1; x) + 2\frac{M_f}{\delta^2}\{(T_\eta(t^2; x) - x^2) \\
&\quad + 2x(x - T_\eta(t; x)) + x^2(T_\eta(1; x) - 1)\}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu son ifade (2.9)' da kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& |T_\eta(f(t); x) - f(x)| \leq \varepsilon T_\eta(1; x) \\
& \quad + 2\frac{M_f}{\delta^2}\{(T_\eta(t^2; x) - x^2) + 2x(x - T_\eta(t; x)) \\
& \quad + x^2(T_\eta(1; x) - 1)\} \\
& \quad + M_f|T_\eta(1; x) - 1|
\end{aligned} \tag{2.10}$$

elde edilir.

(i), (ii), (iii) koşullarının (2.10)' da kullanılmasıyla

$$\|T_\eta(f) - f\| = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \left\{ \max_{a \leq x \leq b} |T_\eta(f; x) - f(x)| \right\} = 0$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Tanım 2.9. $f \in C[a, b]$ olsun. $\forall \delta > 0$ için

$$\omega(f; \delta) = \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |t-x| \leq \delta}} |f(t) - f(x)| \quad (2.11)$$

ile tanımlanan $\omega(f; \delta)$ ifadesine f fonksiyonunun süreklilik modülü denir [Altomare ve ark., 1994].

Süreklilik modülü aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- i. $\omega(f; \delta) \geq 0$,
- ii. $\delta_1 \leq \delta_2$ ise, o zaman $\omega(f; \delta_1) \leq \omega(f; \delta_2)$,
- iii. $\mu \in \mathbb{N}$ için $\omega(f; \mu\delta) = \mu\omega(f; \delta)$,
- iv. $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $\omega(f; \lambda\delta) \leq (1 + \lambda)\omega(f; \delta)$,
- v. $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f; \delta) = 0$,
- vi. $\omega(f; |t - x|) \geq |f(t) - f(x)|$,
- vii. $|f(t) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta}\right) \omega(f; \delta)$.

İspat

- i. Süreklilik modülü, tanımı gereğince bir mutlak değerin supremumu olduğundan ispat açıktır.
- ii. $\delta_1 \leq \delta_2$ için $|t - x| \leq \delta_2$ bölgesinin $|t - x| \leq \delta_1$ bölgesinden daha büyük olduğu açıktır. Bölge büyüdükçe alınan supremum büyüyeceğinden ispat tamamlanır.
- iii. Süreklilik modülünün tanımından dolayı

$$\omega(f; \mu\delta) = \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |t-x| \leq \mu\delta}} |f(t) - f(x)|$$

yazılabilir. Burada

$$|t - x| \leq \mu\delta \Rightarrow x - \mu\delta \leq t \leq x + \mu\delta$$

olup, $t = x + \mu h$ seçimiyle $|h| \leq \delta$ ve

$$\omega(f; \mu\delta) = \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |h| \leq \delta}} |f(x + \mu h) - f(x)|$$

şeklinde yazılabilir.

Diğer yandan

$$\sup_{\substack{x,t \in [a,b] \\ |h| \leq \delta}} |f(x + \mu h) - f(x)| = \sup_{\substack{x,t \in [a,b] \\ |h| \leq \delta}} \left| \sum_{\zeta=0}^{\mu-1} [f(x + (\zeta + 1)h) - f(x + \zeta h)] \right|$$

olup eşitliğin sağ tarafına üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{x,t \in [a,b] \\ |h| \leq \delta}} |f(x + \mu h) - f(x)| &\leq \sum_{\zeta=0}^{\mu-1} \sup_{\substack{x,t \in [a,b] \\ |h| \leq \delta}} |f(x + (\zeta + 1)h) - f(x + \zeta h)| \\ &\leq \omega(f; \delta) + \cdots + \omega(f; \delta) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\omega(f; \mu\delta) \leq \mu\omega(f; \delta)$$

elde edilir.

iv. $\lambda \in \mathbb{R}^+$ sayısının tam kısmı $[\lambda]$ ile gösterilirse

$$[\lambda] \leq \lambda < [\lambda] + 1$$

eşitsizliklerinin yazılabileceği açıktır. O halde bu eşitsizlikleri ve $\omega(f; \delta)$ ' nın azalmayan fonksiyon olmasını kullanarak

$$\omega(f; \lambda\delta) \leq \omega(f; ([\lambda] + 1)\delta)$$

eşitsizliği yazılabilir. $[\lambda]$ pozitif bir tam sayı olduğundan üstteki eşitsizliğin sağ tarafına (iii) özelliği uygulanabilir. Bu durumda

$$\omega(f; ([\lambda] + 1)\delta) \leq ([\lambda] + 1)\omega(f; \delta)$$

eşitsizliği elde edilir.

Ayrıca her $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için

$$[\lambda] + 1 \leq \lambda + 1$$

olduğundan

$$\omega(f; ([\lambda] + 1)\delta) \leq (\lambda + 1)\omega(f; \delta)$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç olarak

$$\omega(f; \lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\omega(f; \delta)$$

yazılır. Böylece ispat tamamlanır.

- v. $|t - x| \leq \delta$ eşitsizliğindeki δ ' nın sıfıra yaklaşması $t \rightarrow x$ olması anlamına gelir. f

fonksiyonu sürekli olduğundan süreklilik tanımına göre $t \rightarrow x$ için $|f(t) - f(x)| \rightarrow 0$ olduğundan ispat açıktır.

- vi. $\omega(f; \delta)$ ifadesinde $\delta = |t - x|$ seçilirse

$$\omega(f; |t - x|) = \sup_{x \in [a, b]} |f(t) - f(x)|$$

elde edilir. O halde $|f(t) - f(x)|$ ' lerin supremumu $\omega(f; |t - x|)$ olacağından ispat aşıkardır.

- vii. (vi) özelliğinden

$$|f(t) - f(x)| \leq \omega\left(f; \frac{|t - x|}{\delta} \delta\right)$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikte (iv) özelliği kullanılırsa

$$|f(t) - f(x)| \leq \left(\frac{|t - x|}{\delta} + 1\right) \omega(f; \delta)$$

bulunur. İspat tamamlanır.

Tanım 2.10. (Tam Süreklilik Modülü) $D = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ sınırlı bölge ve $\mathcal{C}(D) := \{f | f: D \rightarrow \mathbb{R}, \forall (x, y) \in D \text{ için } f \text{ sürekli}\}$ olmak üzere her $f \in \mathcal{C}(D)$ ve $\delta > 0$ için

$$\omega(f; \delta) = \sup_{\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \leq \delta} \{|f(t, s) - f(x, y)|; t, x \in [a, b], s, y \in [c, d]\}$$

veya

$$\omega(f; \delta_1, \delta_2) = \sup_{\substack{|t-x| \leq \delta_1 \\ |s-y| \leq \delta_2}} \{|f(t, s) - f(x, y)|; t, x \in [a, b], s, y \in [c, d]\}$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun D bölgesi üzerindeki tam süreklilik modülü denir.

Burada $\delta \in \left(0, \sqrt{(b-a)^2 + (d-c)^2}\right)$ dir [Anastassiou ve Gal, 2000].

3. İKİ DEĞİŞKENLİ BERNSTEIN KANTOROVICH OPERATÖRÜ

İki değişkenli Bernstein Kantorovich operatörlerini 2009 yılında Pop ve Farcas aşağıdaki şekilde tanımlamıştır.

$L_1([0,1] \times [0,1])$ ağırlıklı uzayında $n \in \mathbb{N}$, $f \in L_1([0,1] \times [0,1])$, $K_n: L_1([0,1] \times [0,1]) \rightarrow C([0,1] \times [0,1])$ ve $(x, y) \in [0,1]$ için

$$K_n(f; x, y) = (n+1)^2 \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} p_{n,k,j}(x, y) \int_{\frac{j}{n+1}}^{\frac{j+1}{n+1}} \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t, s) dt ds, \quad k, j \geq 0$$

şeklinde verilir [Pop ve Farcas, 2009]. Burada,

$$p_{n,k,j}(x, y) = \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} x^k y^j (1-x-y)^{n-k-j}$$

dir.

Lemma 3.1. $K_n(f; x, y)$ operatörü için,

- i) $K_n(1; x, y) = 1$,
- ii) $K_n(t; x, y) = \frac{2nx+1}{2(n+1)}$,
- iii) $K_n(s; x, y) = \frac{2yn+1}{2(n+1)}$,
- iv) $K_n(t^2; x, y) = \frac{3x^2n(n-1)+6nx+1}{3(n+1)^2}$,
- v) $K_n(s^2; x, y) = \frac{3y^2n(n-1)+6ny+1}{3(n+1)^2}$

dir.

İspat

- i) $f(t, s) = 1$ için,

$$\begin{aligned} K_n(1; x, y) &= (n+1)^2 \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} p_{n,k,j}(x, y) \int_{\frac{j}{n+1}}^{\frac{j+1}{n+1}} \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} dt ds \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} p_{n,k,j}(x, y) = 1 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

ii) $f(t, s) = t$ için,

$$\begin{aligned}
K_n(t; x, y) &= (n+1)^2 \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} p_{n,k,j}(x, y) \int_{\frac{j}{n+1}}^{\frac{j+1}{n+1}} \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} t \, dt \, ds \\
&= \frac{1}{2(n+1)} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} p_{n,k,j}(x, y) (2k+1) \\
&= \frac{1}{2(n+1)} \left(\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} x^k y^j (1-x \right. \\
&\quad \left. - y)^{n-k-j} 2k \right) + \frac{1}{2(n+1)} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} p_{n,k,j}(x, y) \\
&= \frac{1}{2(n+1)} \left(2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} k + \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} p_{n,k,j}(x, y) \right) \\
&= \frac{1}{2(n+1)} \left(2 \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} x^k (1-x)^{n-k} + 1 \right) \\
&= \frac{1}{2(n+1)} \left(2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-k-1)! k!} x^{k+1} (1-x)^{n-k-1} + 1 \right) \\
&= \frac{1}{2(n+1)} \left(2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n(n-1)!}{(n-k-1)! k!} x^{k+1} (1-x)^{n-k-1} + 1 \right) \\
&= \frac{2nx+1}{2(n+1)}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

iii) $f(t, s) = s$ için,

$$K_n(s; x, y) = (n+1)^2 \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} p_{n,k,j}(x, y) \int_{\frac{j}{n+1}}^{\frac{j+1}{n+1}} \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} s \, dt \, ds$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2(n+1)} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} x^k y^j (1-x-y)^{n-k-j} (2j \\
&\quad + 1) \\
&= \frac{1}{2(n+1)} \sum_{k=0}^n 2 \binom{n}{k} x^k \sum_{j=0}^{n-k} \frac{j(n-k)!}{(n-k-j)! j!} y^j (1-x-y)^{n-k-j} \\
&\quad + \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{2(n+1)} \sum_{k=0}^n 2 \binom{n}{k} x^k \sum_{j=1}^{n-k} \frac{(n-k)!}{(n-k-j)! (j-1)!} y^j (1-x-y)^{n-k-j} \\
&\quad + \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{2(n+1)} \sum_{k=0}^n 2 \binom{n}{k} x^k \sum_{j=0}^{n-k-1} \frac{(n-k)!}{(n-k-j-1)! j!} y^{j+1} (1-x-y)^{n-k-j-1} \\
&\quad - y)^{n-k-j-1} + \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{2yn+1}{2(n+1)}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

iv) $f(t, s) = t^2$ için,

$$\begin{aligned}
K_n(t^2; x, y) &= (n+1)^2 \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} p_{n,k,j}(x, y) \int_{\frac{j}{n+1}}^{\frac{j+1}{n+1}} \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} t^2 dt ds \\
&= \frac{1}{3(n+1)^2} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} p_{n,k,j}(x, y) (3k^2 + 3k + 1) \\
&= \frac{1}{3(n+1)^2} \left(\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} 3k^2 p_{n,k,j}(x, y) + \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} 3k p_{n,k,j}(x, y) \right) \\
&\quad + \frac{1}{3(n+1)^2} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} p_{n,k,j}(x, y) \\
&= \frac{1}{3(n+1)^2} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3k^2 x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3k x^k (1-x)^{n-k} + 1 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3(n+1)^2} \left(\sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)! k!} 3k^2 x^k (1-x)^{n-k} \right) \\
&\quad + \frac{1}{3(n+1)^2} \left(\sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)! k!} 3k x^k (1-x)^{n-k} + 1 \right) \\
&= \frac{1}{3(n+1)^2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{n!}{(n-k)! (k-1)!} 3k x^k (1-x)^{n-k} + 3nx \right. \\
&\quad \left. + 1 \right) \\
&= \frac{1}{3(n+1)^2} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-k-1)! k!} 3(k+1) x^{k+1} (1-x)^{n-k-1} + 6nx + 4 \right) \\
&= \frac{1}{3(n+1)^2} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-k-1)! k!} 3k x^{k+1} (1-x)^{n-k-1} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-k-1)! k!} 3x^{k+1} (1-x)^{n-k-1} + 3nx + 1 \right) \\
&= \frac{1}{3(n+1)^2} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n!}{(n-k-1)! (k-1)!} 3x^{k+1} (1-x)^{n-k-1} + 6nx + 1 \right) \\
&= \frac{1}{3(n+1)^2} \left(\sum_{k=0}^{n-2} \frac{n!}{(n-k-2)! k!} 3x^{k+2} (1-x)^{n-k-2} + 9nx + 4 \right) \\
&= \frac{3x^2 n(n-1) + 6nx + 1}{3(n+1)^2}
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Lemma 3.2. $K_n(f; x, y)$ operatörü için,

- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n(t; x, y) = x$
- ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n(s; x, y) = y$
- iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n(t^2; x, y) = x^2$
- iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n(s^2; x, y) = y^2$

limitleri gerçekleşir.

4. BERNSTEIN OPERATÖRÜNÜN ÜSTEL FORMU

Bernstein operatörünün üstel formu [Aral ve ark., 2018] tarafından, $x \in [0,1]$, $f \in C[0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ için,

$$G_n f(x) = G_n(f; x) = \sum_{k=0}^n e^{-\alpha \left(\frac{k}{n} - x\right)} p_{n,k}(a_n(x)) f\left(\frac{k}{n}\right),$$

şeklinde tanımlanmıştır. Eşitlikte verilen $p_{n,k}(a_n(x))$ ifadesi

$$p_{n,k}(a_n(x)) = \binom{n}{k} (a_n(x))^k (1 - a_n(x))^{n-k}$$

dır. Burada

$$a_n(x) = \frac{e^{\alpha x/n} - 1}{e^{\alpha/n} - 1}$$

dir.

Aral ve arkadaşları [Aral ve ark., 2018] Bernstein operatörünün üstel formu ile klasik Bernstein operatörünü

$$G_n f(x) = \exp_\alpha(x) B_n\left(\frac{f}{\exp_\alpha(x)}; a_n(x)\right)$$

olarak ilişkilendirmişlerdir ve burada üstel fonksiyon $\exp_\alpha(x) = e^{\alpha x}$ dir.

Lemma 4.1. $G_n(f; x)$ operatörü için

- i. $G_n(1; x) = e^{\alpha(x-1)} \left(e^{\frac{\alpha}{n}} + 1 - e^{\frac{\alpha x}{n}} \right)^n,$
- ii. $G_n(e^{\alpha t}; x) = e^{\alpha x},$
- iii. $G_n(e^{2\alpha t}; x) = e^{2\alpha x},$
- iv. $G_n(e^{3\alpha t}; x) = e^{\alpha x} \left(e^{\frac{\alpha(x+1)}{n}} + e^{\frac{\alpha x}{n}} - e^{\frac{\alpha}{n}} \right)^n,$
- v. $G_n(e^{4\alpha t}; x) = e^{\alpha x} \left(e^{\frac{\alpha(x+2)}{n}} + e^{\frac{\alpha(x+1)}{n}} + e^{\frac{\alpha x}{n}} - e^{\frac{\alpha}{n}} - e^{\frac{2\alpha}{n}} \right)^n$

eşitlikleri gerçekleşir.

İspat

- i. $f(t) = 1$ için,

$$\begin{aligned}
G_n(1; x) &= \sum_{k=0}^n e^{-\alpha\left(\frac{k}{n}-x\right)} p_{n,k}(a_n(x)) \\
&= \sum_{k=0}^n e^{-\alpha\left(\frac{k}{n}-x\right)} \binom{n}{k} (a_n(x))^k (1 - a_n(x))^{n-k} \\
&= e^{\alpha x} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(a_n(x) e^{-\frac{\alpha}{n}}\right)^k (1 - a_n(x))^{n-k} \\
&= e^{\alpha x} \left(a_n(x) e^{-\frac{\alpha}{n}} + 1 - a_n(x)\right)^n \\
&= e^{\alpha x} \left(a_n(x) \left(e^{-\frac{\alpha}{n}} - 1\right) + 1\right)^n \\
&= e^{\alpha x} \left(\left(\frac{e^{\frac{\alpha x}{n}} - 1}{\frac{\alpha}{e^{\frac{\alpha}{n}}} - 1}\right) \left(e^{-\frac{\alpha}{n}} - 1\right) + 1\right)^n \\
&= e^{\alpha x} \left(\left(\frac{1 - e^{\frac{\alpha x}{n}}}{\frac{\alpha}{e^{\frac{\alpha}{n}}}}\right) + 1\right)^n \\
&= e^{\alpha(x-1)} \left(e^{\frac{\alpha}{n}} + 1 - e^{\frac{\alpha x}{n}}\right)^n
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

ii. $f(t) = e^{\alpha t}$ olsun,

$$\begin{aligned}
G_n(e^{\alpha t}; x) &= e^{\alpha x} \sum_{k=0}^n e^{\frac{-\alpha k}{n}} e^{\frac{\alpha k}{n}} p_{n,k}(a_n(x)) \\
&= e^{\alpha x} \sum_{k=0}^n p_{n,k}(a_n(x)) \\
&= e^{\alpha x}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

iii. $f(t) = e^{2\alpha t}$ olsun,

$$\begin{aligned}
G_n(e^{2\alpha t}; x) &= e^{\alpha x} \sum_{k=0}^n e^{\frac{-\alpha k}{n}} e^{\frac{2\alpha k}{n}} p_{n,k}(a_n(x)) \\
&= e^{\alpha x} \sum_{k=0}^n e^{\frac{\alpha k}{n}} p_{n,k}(a_n(x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{\alpha x} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(a_n(x) e^{\frac{\alpha}{n}} \right)^k (1 - a_n(x))^{n-k} \\
&= e^{\alpha x} \left(a_n(x) \left(e^{\frac{\alpha}{n}} - 1 \right) + 1 \right)^n \\
&= e^{\alpha x} \left(\left(\frac{e^{\frac{\alpha x}{n}} - 1}{e^{\frac{\alpha}{n}} - 1} \right) \left(e^{\frac{\alpha}{n}} - 1 \right) + 1 \right)^n \\
&= e^{2\alpha x}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.



5. BERNSTEIN KANTOROVICH OPERATÖRÜNÜN ÜSTEL FORMU

Bernstein Kantorovich operatörünün üstel formu [Aral ve ark., 2019] tarafından,

$n \in \mathbb{N}, \alpha, \mu > 0$ ve $x \in [0,1]$, $\tilde{K}_n: C[0,1] \rightarrow [0,1]$, $f \in C[0,1]$ için

$$\begin{aligned} \tilde{K}_n(f; x) &= a'_{n+1}(x)(n \\ &+ 1)e^{\mu x} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_{n+1}(x))^k (1 - a_{n+1}(x))^{n-k} \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} e^{-\mu t} f(t) dt \end{aligned}$$

olarak tanıtıldı. Burada $a'_{n+1}(x) = \frac{\mu}{n+1} \frac{e^{\mu x+1/n+1}}{e^{\mu/n+1}-1}$ ile verilir.

Lemma 5.1. $\tilde{K}_n(f; x)$ operatörü için

- i. $\tilde{K}_n(1; x) = e^{\frac{\mu(x-n-1)}{n+1}} e^{\mu x} \left(e^{\frac{\mu}{n+1}} + 1 - e^{\frac{\mu x}{n+1}} \right)^n,$
- ii. $\tilde{K}_n(e^{\mu t}; x) = \frac{\mu}{n+1} \frac{e^{\mu x/(n+1)}}{\left(e^{\frac{\mu}{n+1}} - 1 \right)} e^{\mu x},$
- iii. $\tilde{K}_n(e^{2\mu t}; x) = e^{2\mu x},$
- iv. $\tilde{K}_n(e^{3\mu t}; x) = \frac{1}{2} e^{\mu x + \frac{\mu x}{n+1}} \left(1 + e^{\frac{\mu}{n+1}} \right) \left(-e^{\frac{\mu}{n+1}} + e^{\frac{\mu x}{n+1}} + e^{\frac{\mu}{n+1} + \frac{\mu x}{n+1}} \right)^n,$
- v. $\tilde{K}_n(e^{4\mu t}; x) = \frac{1}{3} e^{\mu x + \frac{\mu x}{n+1}} \left(1 + e^{\frac{\mu}{n+1}} + e^{\frac{2\mu}{n+1}} \right) \\ \times \left(-e^{\frac{\mu}{n+1}} - e^{\frac{2\mu}{n+1}} + e^{\frac{\mu x}{n+1}} + e^{\frac{2\mu}{n+1} + \frac{\mu x}{n+1}} + e^{\frac{\mu}{n+1} + \frac{\mu x}{n+1}} \right)^n$

eşitlikleri sağlanır.

İspat

- i. $f(t, s) = 1$ için,

$$\begin{aligned} \tilde{K}_n(1; x) &= a'_{n+1}(x)(n \\ &+ 1)e^{\mu x} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_{n+1}(x))^k (1 - a_{n+1}(x))^{n-k} \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} e^{-\mu t} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a'_{n+1}(x)(n \\
&\quad + 1)e^{\mu x} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_{n+1}(x))^k (1 \\
&\quad - a_{n+1}(x))^{n-k} \left(\frac{e^{\frac{-\mu(k+1)}{n+1}} - e^{\frac{-\mu k}{n+1}}}{-\mu} \right) \\
&= a'_{n+1}(x)(n \\
&\quad + 1)e^{\mu x} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_{n+1}(x))^k (1 - a_{n+1}(x))^{n-k} e^{\frac{-\mu k}{n+1}} \left(\frac{1 - e^{\frac{-\mu}{n+1}}}{\mu} \right) \\
&= e^{\frac{\mu(x-1)}{n+1}} e^{\mu x} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(a_{n+1}(x) e^{-\frac{\mu}{n+1}} \right)^k (1 - a_{n+1}(x))^{n-k} \\
&= e^{\frac{\mu(x-n-1)}{n+1}} e^{\mu x} \left(e^{\frac{\mu}{n+1}} + 1 - e^{\frac{\mu x}{n+1}} \right)^n
\end{aligned}$$

bulunur.

ii. $f(t, s) = e^{\mu t}$ için,

$$\tilde{K}_n(e^{\mu t}; x) = a'_{n+1}(x)$$

$$\begin{aligned}
&\times (n \\
&\quad + 1)e^{\mu x} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_{n+1}(x))^k (1 \\
&\quad - a_{n+1}(x))^{n-k} \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} dt \\
&= a'_{n+1}(x) e^{\mu x} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_{n+1}(x))^k (1 - a_{n+1}(x))^{n-k} \\
&= \frac{\mu}{n+1} \frac{e^{\mu x/(n+1)}}{\left(e^{\frac{\mu}{n+1}} - 1 \right)} e^{\mu x}
\end{aligned}$$

elde edilir.

iii. $f(t, s) = e^{2\mu t}$ için,

$$\begin{aligned}
\tilde{K}_n(e^{2\mu t}; x) &= a'_{n+1}(x)(n+1) \\
&\times e^{\mu x} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_{n+1}(x))^k (1 - a_{n+1}(x))^{n-k} \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} e^{\mu t} dt \\
&= a'_{n+1}(x)(n+1) \\
&\times e^{\mu x} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_{n+1}(x))^k (1 - a_{n+1}(x))^{n-k} \left(\frac{e^{\frac{\mu(k+1)}{n+1}} - e^{\frac{\mu k}{n+1}}}{\mu} \right) \\
&= a'_{n+1}(x)(n+1) \\
&\times e^{\mu x} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_{n+1}(x))^k (1 - a_{n+1}(x))^{n-k} e^{\frac{\mu k}{n+1}} \left(\frac{e^{\frac{\mu}{n+1}} - 1}{\mu} \right) \\
&= e^{\mu x/(n+1)} e^{\mu x} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(a_{n+1}(x) e^{\frac{\mu}{n+1}} \right)^k (1 - a_{n+1}(x))^{n-k} \\
&= e^{2\mu x}
\end{aligned}$$

olup, ispat tamamlanır.



6. İKİ DEĞİŞKENLİ BERNSTEIN OPERATÖRLERİNİN ÜSTEL FORMU

İki değişkenli Bernstein operatörlerinin üstel formu [Aral ve ark., 2021] tarafından

$S_{\alpha,\beta} \equiv \{(x, y) \in R^2; x, y \geq 0, r_n(\alpha, x) + r_n(\beta, y) \leq 1\}$ ve her $n \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta > 0$ ve $C(S_{\alpha,\beta})$ için

$$B_n^{\alpha,\beta} f(x, y) := \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-k} f\left(\frac{k}{n}, \frac{l}{n}\right) p_{n,k,l}^{\alpha,\beta}(x, y)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Eşitlikte verilen $p_{n,k,l}^{\alpha,\beta}(x, y)$ ifadesi

$$p_{n,k,l}^{\alpha,\beta}(x, y) = \binom{n}{k} \binom{n-k}{l} r_n(\alpha, x)^k r_n(\beta, y)^l (1 - r_n(\alpha, x) - r_n(\beta, y))^{n-k-l}$$

dir.

Burada $0 \leq r_n(\alpha, x) \leq x$ ve $0 \leq r_n(\beta, y) \leq y$ dir. $\alpha, \beta > 0$ sabit reel parametreleri olmak üzere üstel fonksiyon $\exp_{i,j}^{\alpha,\beta}(t_1, t_2) := e^{i\alpha t_1} + e^{j\beta t_2}$ şeklinde ifade edilmiştir.

Lemma 6.1. $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ ve $n > 1$ için $B_n^{\alpha,\beta} f(x, y)$ operatörünün momentleri

- i. $B_n^{\alpha,\beta} \exp_{0,0}^{\alpha,\beta}(x, y) = 1,$
- ii. $B_n^{\alpha,\beta} \exp_{1,0}^{\alpha,\beta}(x, y) = e^{\alpha x},$
- iii. $B_n^{\alpha,\beta} \exp_{0,1}^{\alpha,\beta}(x, y) = e^{\beta y},$
- iv. $B_n^{\alpha,\beta} \exp_{2,0}^{\alpha,\beta}(x, y) = \left(\left(e^{\frac{\alpha}{n}} + 1 \right) \left(e^{\frac{\alpha x}{n}} - 1 \right) + 1 \right)^n,$
- v. $B_n^{\alpha,\beta} \exp_{0,2}^{\alpha,\beta}(x, y) = \left(\left(e^{\frac{\beta}{n}} + 1 \right) \left(e^{\frac{\beta y}{n}} - 1 \right) + 1 \right)^n$

şeklinde elde edilmiştir.

İspat

- i. $B_n^{\alpha,\beta}(\exp_{0,0}^{\alpha,\beta}; x, y) = B_n^{\alpha,\beta}(1; x, y)$ olduğundan

$$\begin{aligned} & B_n^{\alpha,\beta}(\exp_{0,0}^{\alpha,\beta}; x, y) \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{l} r_n(\alpha, x)^k r_n(\beta, y)^l (1 - r_n(\alpha, x) - r_n(\beta, y))^{n-k-l} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r_n(\alpha, x)^k (1 - r_n(\alpha, x))^{n-k} \\
&= (r_n(\alpha, x) + 1 - r_n(\alpha, x))^n \\
&= 1
\end{aligned}$$

dir.

ii. $B_n^{\alpha, \beta}(\exp_{1,0}^{\alpha, \beta}; x, y) = B_n^{\alpha, \beta}(e^{\alpha t}; x, y)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
B_n^{\alpha, \beta}(\exp_{1,0}^{\alpha, \beta}; x, y) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(e^{\frac{\alpha}{n}} r_n(\alpha, x) \right)^k (1 - r_n(\alpha, x))^{n-k} \\
&= \left(e^{\frac{\alpha}{n}} r_n(\alpha, x) + 1 - r_n(\alpha, x) \right)^n = \left((r_n(\alpha, x)) \left(e^{\frac{\alpha}{n}} - 1 \right) + 1 \right)^n \\
&= \left(e^{\frac{\alpha x}{n}} \right)^n \\
&= e^{\alpha x}
\end{aligned}$$

dir.

iii. $B_n^{\alpha, \beta}(\exp_{0,1}^{\alpha, \beta}; x, y) = B_n^{\alpha, \beta}(e^{\beta s}; x, y)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
B_n^{\alpha, \beta}(\exp_{0,1}^{\alpha, \beta}; x, y) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r_n(\alpha, x)^k \sum_{l=0}^{n-k} \binom{n-k}{l} \left(e^{\frac{\beta}{n}} r_n(\beta, y) \right)^l \\
&\quad \times (1 - r_n(\alpha, x) - r_n(\beta, y))^{n-k-l} \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r_n(\alpha, x)^k \left(e^{\frac{\beta}{n}} r_n(\beta, y) + 1 - r_n(\alpha, x) - r_n(\beta, y) \right)^{n-k} \\
&= \left(r_n(\alpha, x) + 1 - r_n(\alpha, x) + e^{\frac{\beta}{n}} r_n(\beta, y) - r_n(\beta, y) \right)^n \\
&= \left(1 + e^{\frac{\beta}{n}} r_n(\beta, y) - r_n(\beta, y) \right)^n \\
&= e^{\beta y}
\end{aligned}$$

dir.

iv. $B_n^{\alpha, \beta}(\exp_{2,0}^{\alpha, \beta}; x, y) = B_n^{\alpha, \beta}(e^{2\alpha t}; x, y)$ olduğundan

$$B_n^{\alpha, \beta}(\exp_{2,0}^{\alpha, \beta}; x, y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(e^{\frac{2\alpha}{n}} r_n(\alpha, x) \right)^k (1 - r_n(\alpha, x))^{n-k}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(e^{\frac{2\alpha}{n}} r_n(\alpha, x) + 1 - r_n(\alpha, x) \right)^n \\
&= \left((r_n(\alpha, x)) \left(e^{\frac{2\alpha}{n}} - 1 \right) + 1 \right)^n \\
&= \left(e^{\frac{\alpha}{n}(x+1)} + e^{\frac{\alpha}{n}x} - e^{\frac{\alpha}{n}} \right)^n
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{\alpha}{n}(x+1)} + e^{\frac{\alpha}{n}x} - e^{\frac{\alpha}{n}} \right)^n = e^{2\alpha x}$ dir.

v. $B_n^{\alpha, \beta}(\exp_{0,2}^{\alpha, \beta}; x, y) = B_n^{\alpha, \beta}(e^{2\beta s}; x, y)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
B_n^{\alpha, \beta}(\exp_{0,2}^{\alpha, \beta}; x, y) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r_n(\alpha, x)^k \sum_{l=0}^{n-k} \binom{n-k}{l} \left(e^{\frac{2\beta}{n}} r_n(\beta, y) \right)^l \\
&\quad \times (1 - r_n(\alpha, x) - r_n(\beta, y))^{n-k-l} \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r_n(\alpha, x)^k \left(e^{\frac{2\beta}{n}} r_n(\beta, y) + 1 - r_n(\alpha, x) - r_n(\beta, y) \right)^{n-k} \\
&= \left(r_n(\alpha, x) + e^{\frac{2\beta}{n}} r_n(\beta, y) + 1 - r_n(\alpha, x) - r_n(\beta, y) \right)^n \\
&= \left(e^{\frac{2\beta}{n}} r_n(\beta, y) + 1 - r_n(\beta, y) \right)^n \\
&= \left((r_n(\beta, y)) \left(e^{\frac{2\beta}{n}} - 1 \right) + 1 \right)^n \\
&= \left(e^{\frac{\beta}{n}(y+1)} + e^{\frac{\beta}{n}y} - e^{\frac{\beta}{n}} \right)^n
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{\beta}{n}(y+1)} + e^{\frac{\beta}{n}y} - e^{\frac{\beta}{n}} \right)^n = e^{2\beta y}$ dir.



7. İKİ DEĞİŞKENLİ BERNSTEIN KANTOROVICH OPERATÖRLERİNİN ÜSTEL FORMU

Bu bölümde, iki değişkenli Bernstein Kantorovich operatörünün üstel formu ve yaklaşım özellikleri verilecektir.

İki değişkenli Bernstein Kantorovich operatörünün üstel formu,

$S_{\alpha,\beta} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x, y \geq 0, a_n(\alpha, x) + a_n(\beta, y) \leq 1\} \subset S, n \in \mathbb{N}$ ve $\alpha, \beta > 0$ için

$$\tilde{K}_n^{\alpha,\beta}(f; x, y) = a'_{n+1}(\alpha, x) a'_{n+1}(\beta, y) (n+1)^2$$

$$\times e^{\alpha x + \beta y} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} p_{n,k,j}(a_{n+1}(\alpha, x), a_{n+1}(\beta, y)) \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} \int_{\frac{j}{n+1}}^{\frac{j+1}{n+1}} e^{-at - \beta s} f(t, s) ds dt$$

olarak tanımlanır. Eşitlikte verilen

$$\begin{aligned} p_{n,k,j}(a_{n+1}(\alpha, x), a_{n+1}(\beta, y)) \\ = \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} (a_{n+1}(\alpha, x))^k (a_{n+1}(\beta, y))^j \\ \times (1 - a_{n+1}(\alpha, x) - a_{n+1}(\beta, y))^{n-k-j} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} a_{n+1}(\alpha, x) &= \frac{e^{\alpha x/n+1} - 1}{e^{\alpha/n+1} - 1}, \quad a_{n+1}(\beta, y) = \frac{e^{\beta y/n+1} - 1}{e^{\beta/n+1} - 1} \\ a'_{n+1}(\alpha, x) &= \frac{\alpha e^{\alpha x/n+1}}{(n+1)(e^{\alpha/n+1} - 1)} \quad \text{ve} \quad a'_{n+1}(\beta, y) = \frac{\beta e^{\beta y/n+1}}{(n+1)(e^{\beta/n+1} - 1)} \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada üstel fonksiyon $\exp_{i,j}^{\alpha,\beta}(t, s) := e^{iat} + e^{j\beta s}$ olarak tanımlanır.

Lemma 7.1. $x, y \in ([0,1] \times [0,1])$ için $\tilde{K}_n^{\alpha,\beta}(f; x, y)$ operatöründe aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\begin{aligned} \text{i.} \quad \tilde{K}_n^{\alpha,\beta}(1; x, y) &= e^{\frac{(\alpha x + \beta y)(n+2) - \alpha - \beta}{n+1}} \left(e^{\frac{-\alpha}{n+1}} \left(1 - e^{\frac{\alpha x}{n+1}} \right) + e^{\frac{-\beta}{n+1}} \left(1 - e^{\frac{\beta y}{n+1}} \right) + \right. \\ &\quad \left. e^{\frac{\beta}{n+1}} \right)^n, \end{aligned}$$

- ii. $\tilde{K}_n^{\alpha,\beta}(e^{at}; x, y) = \frac{\alpha e^{\frac{(\alpha x + \beta y)(n+2) - \beta}{n+1}}}{\left(\frac{\alpha}{e^{n+1}-1}\right)(n+1)} \left(e^{\frac{-\beta}{n+1}} \left(1 - e^{\frac{\beta y}{n+1}} + e^{\frac{\beta}{n+1}} \right) \right)^n,$
- iii. $\tilde{K}_n^{\alpha,\beta}(e^{\beta s}; x, y) = \frac{\beta e^{\frac{(\alpha x + \beta y)(n+2) - \alpha}{n+1}}}{\left(\frac{\beta}{e^{n+1}-1}\right)(n+1)} \left(e^{\frac{-\alpha}{n+1}} \left(1 - e^{\frac{\alpha x}{n+1}} + e^{\frac{\alpha}{n+1}} \right) \right)^n,$
- iv. $\tilde{K}_n^{\alpha,\beta}(e^{2at}; x, y) = e^{\frac{(\alpha x + \beta y)(n+2) - \beta}{n+1}} \left(e^{\frac{\alpha x}{n+1}} - e^{\frac{-\beta}{n+1}} \left(e^{\frac{\beta y}{n+1}} - 1 \right) \right)^n,$
- v. $\tilde{K}_n^{\alpha,\beta}(e^{2\beta s}; x, y) = e^{\frac{(\alpha x + \beta y)(n+2) - \alpha}{n+1}} \left(e^{\frac{\beta y}{n+1}} - e^{\frac{-\alpha}{n+1}} \left(e^{\frac{\alpha x}{n+1}} - 1 \right) \right)^n,$
- vi. $\tilde{K}_n^{\alpha,\beta}(e^{3at}; x, y) = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{\alpha}{n+1}} + 1 \right) e^{\frac{\alpha x + \beta y - \beta}{n+1}} e^{\alpha x + \beta y} \left(e^{\frac{\alpha x}{n+1}} \left(e^{\frac{\alpha}{n+1}} + 1 \right) - e^{\frac{-\beta}{n+1}} \left(e^{\frac{\beta y}{n+1}} - 1 \right) - e^{\frac{\alpha}{n+1}} \right)^n,$
- vii. $\tilde{K}_n^{\alpha,\beta}(e^{4at}; x, y) = \frac{1}{3} \left(1 + e^{\frac{\alpha}{n+1}} + e^{\frac{2\alpha}{n+1}} \right) e^{\frac{\alpha x + \beta y - \beta}{n+1}} e^{\alpha x + \beta y} \left(e^{\frac{\alpha x}{n+1}} \left(e^{\frac{2\alpha}{n+1}} + e^{\frac{\alpha}{n+1}} + 1 \right) - e^{\frac{\alpha}{n+1}} \left(e^{\frac{\alpha}{n+1}} + 1 \right) - e^{\frac{-\beta}{n+1}} \left(e^{\frac{\beta y}{n+1}} - 1 \right) \right)^n,$
- viii. $\tilde{K}_n^{\alpha,\beta}(e^{at+\beta s}; x, y) = \frac{\alpha \beta e^{\frac{\alpha x + \beta y}{n+1}} e^{\alpha x + \beta y}}{(n+1)^2 \left(\frac{\alpha}{e^{n+1}-1} \right) \left(\frac{\beta}{e^{n+1}-1} \right)}.$

İspat $\tilde{K}_n^{\alpha,\beta}(f; x, y)$ operatöründe

- i. $f(t, s) = 1$ için

$$\begin{aligned} & \tilde{K}_n^{\alpha,\beta}(1; x, y) \\ &= \frac{\alpha \beta}{(n+1)^2} \frac{e^{\frac{\alpha x}{n+1}}}{\left(e^{\frac{\alpha}{n+1}} - 1 \right)} \frac{e^{\frac{\beta y}{n+1}}}{\left(e^{\frac{\beta}{n+1}} - 1 \right)} (n+1)^2 e^{\alpha x + \beta y} \\ & \times \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} p_{n,k,j}(a_{n+1}(\alpha, x), a_{n+1}(\beta, y)) \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} \int_{\frac{j}{n+1}}^{\frac{j+1}{n+1}} e^{-at-\beta s} ds dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left(e^{\frac{-\alpha}{n+1}} - 1\right)\left(e^{\frac{-\beta}{n+1}} - 1\right)}{\alpha\beta} a'_{n+1}(\alpha, x) a'_{n+1}(\beta, y) (n+1)^2 e^{\alpha x + \beta y} \\
&\times \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(a_{n+1}(\alpha, x) e^{\frac{-\alpha}{n+1}}\right)^k \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} \left(a_{n+1}(\beta, y) e^{\frac{-\beta}{n+1}}\right)^j \\
&\times \left(1 - a_{n+1}(\alpha, x) - a_{n+1}(\beta, y)\right)^{n-k-j} \\
&= \frac{\left(e^{\frac{-\alpha}{n+1}} - 1\right)\left(e^{\frac{-\beta}{n+1}} - 1\right)}{\alpha\beta} a'_{n+1}(\alpha, x) a'_{n+1}(\beta, y) (n+1)^2 e^{\alpha x + \beta y} \\
&\times \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(a_{n+1}(\alpha, x) e^{\frac{-\alpha}{n+1}}\right)^k \left(a_{n+1}(\beta, y) e^{\frac{-\beta}{n+1}} + 1 - a_{n+1}(\alpha, x) - a_{n+1}(\beta, y)\right)^{n-k} \\
&= e^{\frac{\alpha x - \alpha + \beta y - \beta}{n+1}} e^{\alpha x + \beta y} \left(e^{\frac{-\alpha}{n+1}} - e^{\frac{\alpha x - \alpha}{n+1}} + e^{\frac{-\beta}{n+1}} - e^{\frac{\beta y - \beta}{n+1}} + 1\right)^n
\end{aligned}$$

bulunur.

ii. $f(t, s) = e^{\alpha t}$ için

$$\begin{aligned}
&\tilde{K}_n^{\alpha, \beta}(e^{\alpha t}; x, y) \\
&= a'_{n+1}(\alpha, x) a'_{n+1}(\beta, y) (n+1)^2 e^{\alpha x + \beta y} \\
&\times \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} \left(a_{n+1}(\alpha, x)\right)^k \left(a_{n+1}(\beta, y)\right)^j \\
&\times \left(1 - a_{n+1}(\alpha, x) - a_{n+1}(\beta, y)\right)^{n-k-j} \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} \int_{\frac{j}{n+1}}^{\frac{j+1}{n+1}} e^{-\beta s} ds dt \\
&= a'_{n+1}(\alpha, x) a'_{n+1}(\beta, y) (n+1)^2 e^{\alpha x + \beta y} \\
&\times \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} \left(a_{n+1}(\alpha, x)\right)^k \left(a_{n+1}(\beta, y)\right)^j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times (1 - a_{n+1}(\alpha, x) \\
& - a_{n+1}(\beta, y))^{n-k-j} \frac{1}{n+1} \frac{(e^{\frac{-\beta(j+1)}{n+1}} - e^{\frac{-\beta j}{n+1}})}{-\beta} \\
& = \frac{(e^{\frac{-\beta}{n+1}} - 1)}{-\beta(n+1)} a'_{n+1}(\alpha, x) a'_{n+1}(\beta, y) (n+1)^2 e^{\alpha x + \beta y} \\
& \times \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} (a_{n+1}(\alpha, x))^k (a_{n+1}(\beta, y))^j \\
& \times (1 - a_{n+1}(\alpha, x) - a_{n+1}(\beta, y))^{n-k-j} \\
& = \frac{\alpha e^{\frac{(\alpha x + \beta y)(n+2) - \beta}{n+1}}}{(e^{\frac{-\beta}{n+1}} - 1)(n+1)} \left(e^{\frac{-\beta}{n+1}} \left(1 - e^{\frac{\beta y}{n+1}} + e^{\frac{\beta}{n+1}} \right) \right)^n
\end{aligned}$$

bulunur.

iii. $f(t, s) = e^{\beta s}$ için

$$\begin{aligned}
\tilde{K}_n^{\alpha, \beta}(e^{\beta s}; x, y) &= a'_{n+1}(\alpha, x) a'_{n+1}(\beta, y) (n+1)^2 e^{\alpha x + \beta y} \\
& \times \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} (a_{n+1}(\alpha, x))^k (a_{n+1}(\beta, y))^j \\
& \times (1 - a_{n+1}(\alpha, x) - a_{n+1}(\beta, y))^{n-k-j} \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} \int_{\frac{j}{n+1}}^{\frac{j+1}{n+1}} e^{-\alpha t} ds dt \\
& = a'_{n+1}(\alpha, x) a'_{n+1}(\beta, y) (n+1)^2 e^{\alpha x + \beta y} \\
& \times \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} (a_{n+1}(\alpha, x))^k (a_{n+1}(\beta, y))^j \\
& \times (1 - a_{n+1}(\alpha, x) \\
& - a_{n+1}(\beta, y))^{n-k-j} \frac{1}{n+1} \frac{(e^{\frac{-\alpha(k+1)}{n+1}} - e^{\frac{-\alpha k}{n+1}})}{-\alpha} \\
& = \frac{(e^{\frac{-\alpha}{n+1}} - 1)}{-\alpha(n+1)} a'_{n+1}(\alpha, x) a'_{n+1}(\beta, y) (n+1)^2 e^{\alpha x + \beta y} \\
& \times \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} (a_{n+1}(\alpha, x))^k (a_{n+1}(\beta, y))^j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times (1 - a_{n+1}(\alpha, x) - a_{n+1}(\beta, y))^{n-k-j} \\
& = \frac{\beta e^{\frac{(\alpha x + \beta y)(n+2) - \alpha}{n+1}}}{(e^{\frac{\beta}{n+1}} - 1)(n+1)} \left(e^{\frac{-\alpha}{n+1}} \left(1 - e^{\frac{\alpha x}{n+1}} + e^{\frac{\alpha}{n+1}} \right) \right)^n
\end{aligned}$$

bulunur.

iv. $f(t, s) = e^{2\alpha t}$ için

$$\begin{aligned}
\tilde{K}_n^{\alpha, \beta}(e^{2\alpha t}; x, y) &= a'_{n+1}(\alpha, x) a'_{n+1}(\beta, y) (n+1)^2 e^{\alpha x + \beta y} \\
&\times \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} (a_{n+1}(\alpha, x))^k (a_{n+1}(\beta, y))^j \\
&\times (1 - a_{n+1}(\alpha, x) - a_{n+1}(\beta, y))^{n-k-j} \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} \int_{\frac{j}{n+1}}^{\frac{j+1}{n+1}} e^{\alpha t - \beta s} ds dt \\
&= a'_{n+1}(\alpha, x) a'_{n+1}(\beta, y) (n+1)^2 e^{\alpha x + \beta y} \\
&\times \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} (a_{n+1}(\alpha, x))^k (a_{n+1}(\beta, y))^j \\
&\times (1 - a_{n+1}(\alpha, x) - a_{n+1}(\beta, y))^{n-k-j} \\
&\times e^{\frac{\alpha k}{n+1} \frac{(e^{\frac{\alpha}{n+1}} - 1)}{\alpha}} e^{\frac{-\beta j}{n+1} \frac{(e^{\frac{-\beta}{n+1}} - 1)}{-\beta}} \\
&= \frac{\left(e^{\frac{\alpha}{n+1}} - 1 \right) \left(e^{\frac{-\beta}{n+1}} - 1 \right)}{-\alpha \beta} a'_{n+1}(\alpha, x) a'_{n+1}(\beta, y) (n+1)^2 e^{\alpha x + \beta y} \\
&\times \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} (a_{n+1}(\alpha, x))^k (a_{n+1}(\beta, y))^j \\
&\times (1 - a_{n+1}(\alpha, x) - a_{n+1}(\beta, y))^{n-k-j} \\
&= e^{\frac{(\alpha x + \beta y)(n+2) - \beta}{n+1}} \left(e^{\frac{\alpha x}{n+1}} - e^{\frac{-\beta}{n+1}} \left(e^{\frac{\beta y}{n+1}} - 1 \right) \right)^n
\end{aligned}$$

bulunur.

v. $f(t, s) = e^{2\beta s}$ için

$$\begin{aligned}
& \tilde{K}_n^{\alpha, \beta}(e^{2\beta s}; x, y) \\
&= a'_{n+1}(\alpha, x) a'_{n+1}(\beta, y) (n+1)^2 e^{\alpha x + \beta y} \\
&\quad \times \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} (a_{n+1}(\alpha, x))^k (a_{n+1}(\beta, y))^j \\
&\quad \times (1 - a_{n+1}(\alpha, x) - a_{n+1}(\beta, y))^{n-k-j} \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} \int_{\frac{j}{n+1}}^{\frac{j+1}{n+1}} e^{-at + \beta s} ds dt \\
&= a'_{n+1}(\alpha, x) a'_{n+1}(\beta, y) (n+1)^2 e^{\alpha x + \beta y} \\
&\quad \times \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} (a_{n+1}(\alpha, x))^k (a_{n+1}(\beta, y))^j \\
&\quad \times (1 - a_{n+1}(\alpha, x) - a_{n+1}(\beta, y))^{n-k-j} \\
&\quad \times e^{\frac{-\alpha k}{n+1} \frac{(e^{\frac{-\alpha}{n+1}} - 1)}{-\alpha}} e^{\frac{\beta j}{n+1} \frac{(e^{\frac{-\beta}{n+1}} - 1)}{\beta}} \\
&= \frac{(e^{\frac{-\alpha}{n+1}} - 1)(e^{\frac{\beta}{n+1}} - 1)}{-\alpha \beta} a'_{n+1}(\alpha, x) a'_{n+1}(\beta, y) \\
&\quad \times (n+1)^2 e^{\alpha x + \beta y} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} (a_{n+1}(\alpha, x))^k \\
&\quad \times (a_{n+1}(\beta, y))^j (1 - a_{n+1}(\alpha, x) - a_{n+1}(\beta, y))^{n-k-j} \\
&= e^{\frac{(\alpha x + \beta y)(n+2) - \alpha}{n+1}} \left(e^{\frac{\beta y}{n+1}} - e^{\frac{-\alpha}{n+1}} (e^{\frac{\alpha x}{n+1}} - 1) \right)^n
\end{aligned}$$

bulunur.

vi. $f(t, s) = e^{3\alpha t}$ için

$$\begin{aligned}
& \tilde{K}_n^{\alpha, \beta}(e^{3\alpha t}; x, y) \\
&= a'_{n+1}(\alpha, x) a'_{n+1}(\beta, y) (n+1)^2 e^{\alpha x + \beta y} \\
&\quad \times \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} (a_{n+1}(\alpha, x))^k (a_{n+1}(\beta, y))^j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times (1 - a_{n+1}(\alpha, x) \\
& - a_{n+1}(\beta, y))^{n-k-j} \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} \int_{\frac{j}{n+1}}^{\frac{j+1}{n+1}} e^{2\alpha t - \beta s} ds dt \\
& = a'_{n+1}(\alpha, x) a'_{n+1}(\beta, y) (n+1)^2 e^{\alpha x + \beta y} \\
& \times \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} (a_{n+1}(\alpha, x))^k (a_{n+1}(\beta, y))^j \\
& \times (1 - a_{n+1}(\alpha, x) - a_{n+1}(\beta, y))^{n-k-j} e^{\frac{\alpha k}{n+1}} \left(e^{\frac{\alpha}{n+1}} - 1 \right) \\
& \times \frac{e^{\frac{2\alpha k}{n+1}} (e^{\frac{2\alpha}{n+1}} - 1) e^{\frac{-\beta j}{n+1}} (e^{\frac{-\beta}{n+1}} - 1)}{2\alpha \quad -\beta} \\
& = \frac{\left(e^{\frac{2\alpha}{n+1}} - 1 \right) \left(e^{\frac{-\beta}{n+1}} - 1 \right)}{-2\alpha\beta} a'_{n+1}(\alpha, x) a'_{n+1}(\beta, y) \\
& \times (n+1)^2 e^{\alpha x + \beta y} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} (a_{n+1}(\alpha, x))^k \\
& \times (a_{n+1}(\beta, y))^j (1 - a_{n+1}(\alpha, x) - a_{n+1}(\beta, y))^{n-k-j} \\
& = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{\alpha}{n+1}} + 1 \right) e^{\frac{\alpha x + \beta y - \beta}{n+1}} e^{\alpha x + \beta y} \\
& \times \left(e^{\frac{\alpha x}{n+1}} \left(e^{\frac{\alpha}{n+1}} + 1 \right) - e^{\frac{-\beta}{n+1}} \left(e^{\frac{\beta y}{n+1}} - 1 \right) - e^{\frac{\alpha}{n+1}} \right)^n
\end{aligned}$$

bulunur.

vii. $f(t, s) = e^{4\alpha t}$ için

$$\begin{aligned}
& \tilde{K}_n^{\alpha, \beta}(e^{4\alpha t}; x, y) \\
& = a'_{n+1}(\alpha, x) a'_{n+1}(\beta, y) (n+1)^2 e^{\alpha x + \beta y} \\
& \times \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} (a_{n+1}(\alpha, x))^k (a_{n+1}(\beta, y))^j (1 - a_{n+1}(\alpha, x) \\
& - a_{n+1}(\beta, y))^{n-k-j} \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} \int_{\frac{j}{n+1}}^{\frac{j+1}{n+1}} e^{3\alpha t - \beta s} ds dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left(e^{\frac{3\alpha}{n+1}} - 1\right)\left(e^{\frac{-\beta}{n+1}} - 1\right)}{-3\alpha\beta} a'_{n+1}(\alpha, x) a'_{n+1}(\beta, y) (n+1)^2 e^{\alpha x + \beta y} \\
&\times \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} (a_{n+1}(\alpha, x))^k (a_{n+1}(\beta, y))^j \\
&\times (1 - a_{n+1}(\alpha, x) - a_{n+1}(\beta, y))^{n-k-j} \\
&= \frac{1}{3} \left(1 + e^{\frac{\alpha}{n+1}} + e^{\frac{2\alpha}{n+1}}\right) e^{\frac{\alpha x + \beta y - \beta}{n+1}} e^{\alpha x + \beta y} \\
&\times \left(e^{\frac{\alpha x}{n+1}} \left(e^{\frac{2\alpha}{n+1}} + e^{\frac{\alpha}{n+1}} + 1\right) - e^{\frac{\alpha}{n+1}} \left(e^{\frac{\alpha}{n+1}} + 1\right) - e^{\frac{-\beta}{n+1}} \left(e^{\frac{\beta y}{n+1}} - 1\right)\right)^n
\end{aligned}$$

bulunur.

viii. $f(t, s) = e^{at + \beta s}$ için

$$\begin{aligned}
&\tilde{K}_n^{\alpha, \beta}(e^{at + \beta s}; x, y) \\
&= a'_{n+1}(\alpha, x) a'_{n+1}(\beta, y) (n+1)^2 e^{\alpha x + \beta y} \\
&\times \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} (a_{n+1}(\alpha, x))^k (a_{n+1}(\beta, y))^j \\
&\times (1 - a_{n+1}(\alpha, x) - a_{n+1}(\beta, y))^{n-k-j} \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} \int_{\frac{j}{n+1}}^{\frac{j+1}{n+1}} ds dt \\
&= a'_{n+1}(\alpha, x) a'_{n+1}(\beta, y) (n+1)^2 e^{\alpha x + \beta y} \\
&\times \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} (a_{n+1}(\alpha, x))^k (a_{n+1}(\beta, y))^j \\
&\times (1 - a_{n+1}(\alpha, x) - a_{n+1}(\beta, y))^{n-k-j} \frac{1}{(n+1)^2} \\
&= \frac{\alpha \beta e^{\frac{\alpha x + \beta y}{n+1}} e^{\alpha x + \beta y}}{(n+1)^2 \left(e^{\frac{\alpha}{n+1}} - 1\right) \left(e^{\frac{\beta}{n+1}} - 1\right)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma 7.2. $x, y \in ([0,1] \times [0,1])$ ve $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ için $\tilde{K}_n^{\alpha, \beta}(f; x, y)$ operatörünün $n \rightarrow \infty$ iken limitleri

- i. $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{K}_n^{\alpha, \beta}(1; x, y) = 1,$
- ii. $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{K}_n^{\alpha, \beta}(e^{\alpha t}; x, y) = e^{\alpha x},$
- iii. $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{K}_n^{\alpha, \beta}(e^{\beta s}; x, y) = e^{\beta y},$
- iv. $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{K}_n^{\alpha, \beta}(e^{2\alpha t} + e^{2\beta s}; x, y) = e^{2\alpha x} + e^{2\beta y}$

dir.

Teorem 7.1. $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ ve $f \in C(S_{\alpha, \beta})$ için $n \rightarrow \infty$ iken

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \tilde{K}_n^{\alpha, \beta}(\exp_{i,j}^{\alpha, \beta}; x, y) - \exp_{i,j}^{\alpha, \beta}; x, y \right\|_{C(S_{\alpha, \beta})} \Rightarrow 0$$

dır.

İspat Teorem 2.1. den ve Lemma 7.2. den

$f(t, s) = 1$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \tilde{K}_n^{\alpha, \beta}(1; x, y) - 1 \right\| = 0$$

olduğundan

$$\tilde{K}_n^{\alpha, \beta}(1; x, y) \Rightarrow 1$$

dir. Bununla birlikte

$f(t, s) = e^{\alpha t}$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \tilde{K}_n^{\alpha, \beta}(e^{\alpha t}; x, y) - e^{\alpha x} \right\| = 0$$

olduğundan

$$\tilde{K}_n^{\alpha, \beta}(e^{\alpha t}; x, y) \Rightarrow e^{\alpha x}$$

dir. $f(t, s) = e^{\beta s}$ seçildiğinde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \tilde{K}_n^{\alpha, \beta}(e^{\beta s}; x, y) - e^{\beta y} \right\| = 0$$

$$\tilde{K}_n^{\alpha,\beta}(e^{\beta s}; x, y) \rightrightarrows e^{\beta y}$$

dir. Son olarak $f(t, s) = e^{2\alpha t} + e^{2\beta s}$ seçildiğinde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \tilde{K}_n^{\alpha,\beta}(e^{2\alpha t} + e^{2\beta s}; x, y) - (e^{2\alpha x} + e^{2\beta y}) \right\| = 0$$

bulunduğundan

$$\tilde{K}_n^{\alpha,\beta}(e^{2\alpha t} + e^{2\beta s}; x, y) \rightrightarrows e^{2\alpha x} + e^{2\beta y}$$

elde edilir. Böylece Teorem 2.1. den

$$\tilde{K}_n^{\alpha,\beta}(\exp_{i,j}^{\alpha,\beta}; x, y) \rightrightarrows \exp_{i,j}^{\alpha,\beta}(x, y)$$

olur ve ispat tamamlanır.

Lemma 7.3. Her $(x, y) \in S_{\alpha,\beta}$ için $\tilde{K}_n^{\alpha,\beta}(f; x, y)$ operatörünün merkezi momentlerinin limitleri

- i. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\tilde{K}_n^{\alpha,\beta}(1; x, y) - 1 \right) = \alpha^2(-1+x)x + \beta(-1+(2+\beta)y - \beta y^2) - \alpha(1+x(-2+\beta y)),$
- ii. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\tilde{K}_n^{\alpha,\beta}(e^{\alpha t} - e^{\alpha x}; x, y) \right) = \frac{1}{2} \alpha e^{\alpha x} (1 + 2\alpha x^2 - 2x(1 + \alpha - \beta y)),$
- iii. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\tilde{K}_n^{\alpha,\beta}(e^{\beta s} - e^{\beta y}; x, y) \right) = \frac{1}{2} \beta e^{\beta y} (1 + 2\beta y^2 - 2y(1 + \beta - \alpha x)),$
- iv. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\tilde{K}_n^{\alpha,\beta}((e^{\alpha t} - e^{\alpha x})^2; x, y) \right) = -\alpha^2 e^{2\alpha x} (-1+x)x,$
- v. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\tilde{K}_n^{\alpha,\beta}((e^{\beta s} - e^{\beta y})^2; x, y) \right) = -\beta^2 e^{2\beta y} (-1+y)y,$
- vi. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\tilde{K}_n^{\alpha,\beta}((e^{\alpha t} - e^{\alpha x})^4; x, y) \right) = 3\alpha^4 e^{4\alpha x} (-1+x)^2 x^2,$
- vii. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\tilde{K}_n^{\alpha,\beta}((e^{\beta s} - e^{\beta y})^4; x, y) \right) = 3\beta^4 e^{4\beta y} (-1+y)^2 y^2,$
- viii. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\tilde{K}_n^{\alpha,\beta}((e^{\alpha t} - e^{\alpha x})(e^{\beta s} - e^{\beta y}); x, y) \right) = -\alpha\beta x y e^{\alpha x + \beta y}$

olarak elde edilir.

7.1. İki Değişkenli Bernstein Kantorovich Operatörünün Üstel Formunun Yaklaşım Özellikleri

Bu kısımda $\tilde{K}_n^{\alpha,\beta}(f; x, y)$ operatörünün yaklaşım hızı süreklilik modülü ve Voronovskaya tip teorem ile verilecektir.

7.1.1. İki Değişkenli Bernstein Kantorovich Operatörünün Üstel Formunun Süreklilik Modülü ile Yaklaşım Hızı

Teorem 7.1.1.1. $f \in C(S_{\alpha,\beta})$ olmak üzere

$$\left| \tilde{K}_n^{\alpha,\beta}(f; x, y) - f(x, y) \right| \leq \left(1 + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} \right) \omega(f, \delta)$$

olur. Burada,

$$\begin{aligned} \delta^2 = & e^{\frac{(\alpha x + \beta y)(n+2) - \beta}{n+1}} \left(e^{\frac{\alpha x}{n+1}} - e^{\frac{-\beta}{n+1}} \left(e^{\frac{\beta y}{n+1}} - 1 \right) \right)^n + e^{\frac{(\alpha x + \beta y)(n+2) - \alpha - \beta}{n+1}} \left(e^{\frac{-\alpha}{n+1}} \left(1 - \right. \right. \\ & \left. \left. e^{\frac{\alpha x}{n+1}} \right) + e^{\frac{-\beta}{n+1}} \left(1 - e^{\frac{\beta y}{n+1}} \right) + 1 \right)^n (e^{2\alpha x} + e^{2\beta y}) + e^{\frac{(\alpha x + \beta y)(n+2) - \alpha}{n+1}} \left(e^{\frac{-\alpha}{n+1}} \left(1 - e^{\frac{\alpha x}{n+1}} \right) + \right. \\ & \left. e^{\frac{\beta y}{n+1}} \right)^n - \frac{2}{n+1} \left[\frac{\alpha e^{\frac{\alpha x(3+2n) + \beta y(n+2) - \beta}{n+1}}}{e^{\frac{\alpha}{n+1} - 1}} \left(e^{\frac{-\beta}{n+1}} \left(1 - e^{\frac{\beta y}{n+1}} + e^{\frac{\beta}{n+1}} \right) \right)^n + \right. \\ & \left. \frac{\beta e^{\frac{\alpha x(2+n) + \beta y(3+2n) - \alpha}{n+1}}}{e^{\frac{\beta}{n+1} - 1}} \left(e^{\frac{-\alpha}{n+1}} \left(1 - e^{\frac{\alpha x}{n+1}} + e^{\frac{\alpha}{n+1}} \right) \right)^n \right] \end{aligned}$$

dır.

İspat Her $(t, s), (x, y) \in S_{\alpha,\beta} \subset [0,1] \times [0,1]$ için tam süreklilik modülü

$$\omega(f, \delta) = \sup_{\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \leq \delta} |f(t, s) - f(x, y)|$$

şeklinde dir. Buradan

$$\begin{aligned} |f(t, s) - f(x, y)| & \leq \omega \left(f, \sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right) \\ & \leq \left(1 + \frac{(t-x)^2 + (s-y)^2}{\delta^2} \right) \omega(f, \delta) \end{aligned}$$

yazılabilir. $\tilde{K}_n^{\alpha,\beta} f$ operatörü lineer olduğundan

$$\left| \tilde{K}_n^{\alpha,\beta}(f; x, y) - f(x, y) \right| \leq \tilde{K}_n^{\alpha,\beta}(|f(t, s) - f(x, y)|; x, y)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \tilde{K}_n^{\alpha,\beta} \left(\left(1 + \frac{(t-x)^2 + (s-y)^2}{\delta^2} \right); x, y \right) \omega(f, \delta) \\
&\leq \left(1 + \frac{\tilde{K}_n^{\alpha,\beta} ((t-x)^2 + (s-y)^2; x, y)}{\delta^2} \right) \omega(f, \delta)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada test fonksiyonları $\exp_{i,j}^{\alpha,\beta}(t, s) = e^{i\alpha t + j\beta s}$ şeklinde olduğundan ve ortalama değer teoremi kullanılarak,

$$\begin{aligned}
&|\tilde{K}_n^{\alpha,\beta}(f; x, y) - f(x, y)| \\
&\leq \left\{ 1 + \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} \right) \frac{\tilde{K}_n^{\alpha,\beta} ((e^{\alpha t} - e^{\alpha x})^2 + (e^{\beta s} - e^{\beta y})^2; x, y)}{\delta^2} \right\} \\
&\quad \times \omega(f, \delta)
\end{aligned}$$

olur. Son eşitsizlikte

$$\delta^2 = \tilde{K}_n^{\alpha,\beta} ((e^{\alpha t} - e^{\alpha x})^2 + (e^{\beta s} - e^{\beta y})^2; x, y)$$

seçilerek,

$$|\tilde{K}_n^{\alpha,\beta}(f; x, y) - f(x, y)| \leq \left(1 + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} \right) \omega(f, \delta)$$

elde edilir.

7.1.2. İki Değişkenli Bernstein Kantorovich Operatörünün Üstel Formu için Voronovskaya Tip Teorem

Teorem 7.1.2.1. $f \in C^2(S)$ olmak üzere her $(x, y) \in S_{\alpha,\beta}$ için

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\tilde{K}_n^{\alpha,\beta}(f; x, y) - f(x, y) \right) \\
&= f(x, y) \alpha^2 (-1 + x)x + \beta (-1 + (2 + \beta)y - \beta y^2) \\
&\quad - \alpha (1 + x(-2 + \beta y)) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \frac{1}{2} (1 + 2\alpha x^2 - 2x(1 + \alpha - \beta y)) \\
&\quad + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \frac{1}{2} (1 + 2\beta y^2 - 2y(1 + \beta - \alpha x))
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} \left\{ \left(-\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right) x(x-1) - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y \partial x} 2xy \right. \\ \left. + \left(-\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} + \beta \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) y(y-1) \right\}$$

eşitliği gerçekleşir.

İspat Öncelikle bazı gösterimlerden bahsedelim. $\exp_{i,j}^{\alpha,\beta}(t, s) = e^{iat+j\beta s}$ fonksiyonunun sırasıyla birinci ve ikinci değişkene göre ters fonksiyonları $\log_{\alpha}^{\beta}(t, \cdot)$ ve $\log_{\beta}^{\alpha}(\cdot, s)$ ile göstereceğiz. Gösterimsel olarak ifade edilecek olursa $\exp_{1,0}^{\alpha,\beta}(t, s) = e^{\alpha t}$ fonksiyonunun ters fonksiyonu $\frac{1}{\alpha} \log_e(\cdot)$ şeklinde ve $\exp_{0,1}^{\alpha,\beta}(t, s) = e^{\beta s}$ fonksiyonunun ters fonksiyonu $\frac{1}{\beta} \log_e(\cdot)$ şeklindedir. O zaman

$$\begin{aligned} (\log_{\alpha}^{\beta}, \log_{\beta}^{\alpha})(e^{\alpha t}, e^{\beta s}) &= \left(\frac{1}{\alpha} \log_e e^{\alpha x}, \frac{1}{\beta} \log_e e^{\beta y} \right) \\ &= (x, y) \end{aligned}$$

dır.

Burada, $(x, y) \in S_{\alpha,\beta}$ olmak üzere Taylor açılımından

$$\begin{aligned} f(t, s) &= f(x, y) + (e^{\alpha t} - e^{\alpha x}) \left[\frac{\partial}{\partial x} f(\log_{\alpha}^{\beta}, \cdot) \right] |_{(e^{\alpha x}, e^{\beta y})} \\ &\quad + (e^{\beta s} - e^{\beta y}) \left[\frac{\partial}{\partial y} f(\cdot, \log_{\beta}^{\alpha}) \right] |_{(e^{\alpha x}, e^{\beta y})} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ (e^{\alpha t} - e^{\alpha x})^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(\log_{\alpha}^{\beta}, \cdot) \right] |_{(e^{\alpha x}, e^{\beta y})} \right. \\ &\quad + (e^{\beta s} - e^{\beta y})^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(\cdot, \log_{\beta}^{\alpha}) \right] |_{(e^{\alpha x}, e^{\beta y})} \\ &\quad + 2(e^{\alpha t} - e^{\alpha x})(e^{\beta s} - e^{\beta y}) \left[\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(\log_{\alpha}^{\beta}, \log_{\beta}^{\alpha}) \right] |_{(e^{\alpha x}, e^{\beta y})} \Big\} \\ &\quad + R(t, s, x, y) \left((e^{\alpha t} - e^{\alpha x})^2 + (e^{\beta s} - e^{\beta y})^2 \right) \end{aligned} \quad (7.1)$$

olur. Burada $(t, s) \rightarrow (x, y)$ iken $R(t, s, x, y) \rightarrow 0$ dır. (7.1)' denkleminde

$\tilde{K}_n^{\alpha,\beta}(f(t, s); x, y)$ operatörünü uygulayarak;

$$\begin{aligned}
& \tilde{K}_n^{\alpha,\beta}(f(t,s);x,y) \\
&= \tilde{K}_n^{\alpha,\beta}(f(x,y);x,y) \\
&+ \tilde{K}_n^{\alpha,\beta}((e^{\alpha t} - e^{\alpha x});x,y) \left[\frac{\partial}{\partial x} f(\log_\alpha^\beta, \cdot) \right] |_{(e^{\alpha x}, e^{\beta y})} \\
&+ \tilde{K}_n^{\alpha,\beta}((e^{\beta s} - e^{\beta y});x,y) \left[\frac{\partial}{\partial y} f(\cdot, \log_\beta^\alpha) \right] |_{(e^{\alpha x}, e^{\beta y})} \\
&+ \frac{1}{2} \left\{ \tilde{K}_n^{\alpha,\beta}((e^{\alpha t} - e^{\alpha x})^2; x, y) \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(\log_\alpha^\beta, \cdot) \right] |_{(e^{\alpha x}, e^{\beta y})} \right. \\
&+ \tilde{K}_n^{\alpha,\beta}((e^{\beta s} - e^{\beta y})^2; x, y) \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(\cdot, \log_\beta^\alpha) \right] |_{(e^{\alpha x}, e^{\beta y})} \\
&+ 2\tilde{K}_n^{\alpha,\beta}((e^{\alpha t} - e^{\alpha x})(e^{\beta s} - e^{\beta y}); x, y) \left[\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(\log_\alpha^\beta, \log_\beta^\alpha) \right] |_{(e^{\alpha x}, e^{\beta y})} \Big\} \\
&\quad + \tilde{K}_n^{\alpha,\beta} \left(R(t,s,x,y) \left((e^{\alpha t} - e^{\alpha x})^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (e^{\beta s} - e^{\beta y})^2 \right); x, y \right) \tag{7.2}
\end{aligned}$$

bulunur. (7.2)' denkleminde,

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\partial f(\log_\alpha^\beta, \cdot)}{\partial x} \right] |_{(e^{\alpha x}, e^{\beta y})} = \frac{e^{-\alpha x}}{\alpha} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\
& \left[\frac{\partial^2 f(\log_\alpha^\beta, \cdot)}{\partial x^2} \right] |_{(e^{\alpha x}, e^{\beta y})} = e^{-2\alpha x} \left(\frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right) \\
& \left[\frac{\partial^2 f(\log_\alpha^\beta, \log_\beta^\alpha)}{\partial y \partial x} \right] |_{(e^{\alpha x}, e^{\beta y})} = \frac{e^{-(\alpha x + \beta y)}}{\alpha \beta} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}
\end{aligned}$$

eşitlikleri yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\tilde{K}_n^{\alpha,\beta}(f(t,s);x,y) &= \tilde{K}_n^{\alpha,\beta}(f(x,y);x,y) + \tilde{K}_n^{\alpha,\beta}((e^{\alpha t} - e^{\alpha x});x,y) \frac{e^{-\alpha x}}{\alpha} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\
&+ \tilde{K}_n^{\alpha,\beta}((e^{\beta s} - e^{\beta y});x,y) \frac{e^{-\beta y}}{\beta} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \left\{ \tilde{K}_n^{\alpha, \beta} ((e^{\alpha t} - e^{\alpha x})^2; x, y) e^{-2\alpha x} \left(\frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right) \right. \\
& + \tilde{K}_n^{\alpha, \beta} ((e^{\beta s} - e^{\beta y})^2; x, y) e^{-2\beta y} \left(\frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} - \frac{1}{\beta} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) \\
& + 2 \tilde{K}_n^{\alpha, \beta} ((e^{\alpha t} - e^{\alpha x})(e^{\beta s} - e^{\beta y}); x, y) \frac{e^{-(\alpha x + \beta y)}}{\alpha \beta} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \Big\} \\
& + \tilde{K}_n^{\alpha, \beta} (R(t, s, x, y) ((e^{\alpha t} - e^{\alpha x})^2 + (e^{\beta s} - e^{\beta y})^2); x, y) \quad (7.3)
\end{aligned}$$

elde edilir. (7.3)' te eşitliğin her iki yanına limit uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\tilde{K}_n^{\alpha, \beta} (f(t, s); x, y) - f(x, y) \right) \\
& = f(x, y) \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\tilde{K}_n^{\alpha, \beta} (1; x, y) - 1 \right) \\
& + \frac{e^{-\alpha x}}{\alpha} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \lim_{n \rightarrow \infty} n \tilde{K}_n^{\alpha, \beta} ((e^{\alpha t} - e^{\alpha x}); x, y) \\
& + \frac{e^{-\beta y}}{\beta} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \lim_{n \rightarrow \infty} n \tilde{K}_n^{\alpha, \beta} ((e^{\beta s} - e^{\beta y}); x, y) \\
& + \frac{1}{2} \left\{ e^{-2\alpha x} \left(\frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \right. \right. \\
& - \left. \frac{1}{\alpha} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right) \lim_{n \rightarrow \infty} n \tilde{K}_n^{\alpha, \beta} ((e^{\alpha t} - e^{\alpha x})^2; x, y) \\
& + e^{-2\beta y} \left(\frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \right. \\
& - \left. \frac{1}{\beta} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) \lim_{n \rightarrow \infty} n \tilde{K}_n^{\alpha, \beta} ((e^{\beta s} - e^{\beta y})^2; x, y) \\
& + 2 \frac{e^{-(\alpha x + \beta y)}}{\alpha \beta} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} \lim_{n \rightarrow \infty} n \tilde{K}_n^{\alpha, \beta} ((e^{\alpha t} - e^{\alpha x})(e^{\beta s} \\
& - e^{\beta y}); x, y) \Big\}
\end{aligned}$$

olur. Lemma 7.3' de verilen eşitlikler kullanılarak,

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\tilde{K}_n^{\alpha, \beta} (f(t, s); x, y) - f(x, y) \right) \\
& = f(x, y) \alpha^2 (-1 + x)x + \beta (-1 + (2 + \beta)y - \beta y^2) - \alpha (1 + x(-2 + \beta y)) \\
& + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{1}{2} (1 + 2\alpha x^2 - 2x(1 + \alpha - \beta y)) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \frac{1}{2} (1 + 2\beta y^2 - 2y(1 + \beta - \alpha x)) \\
& + \frac{1}{2} \left\{ \left(-\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right) x(x-1) - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y \partial x} 2xy \right. \\
& \quad \left. + \left(-\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} + \beta \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) y(y-1) \right\}
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

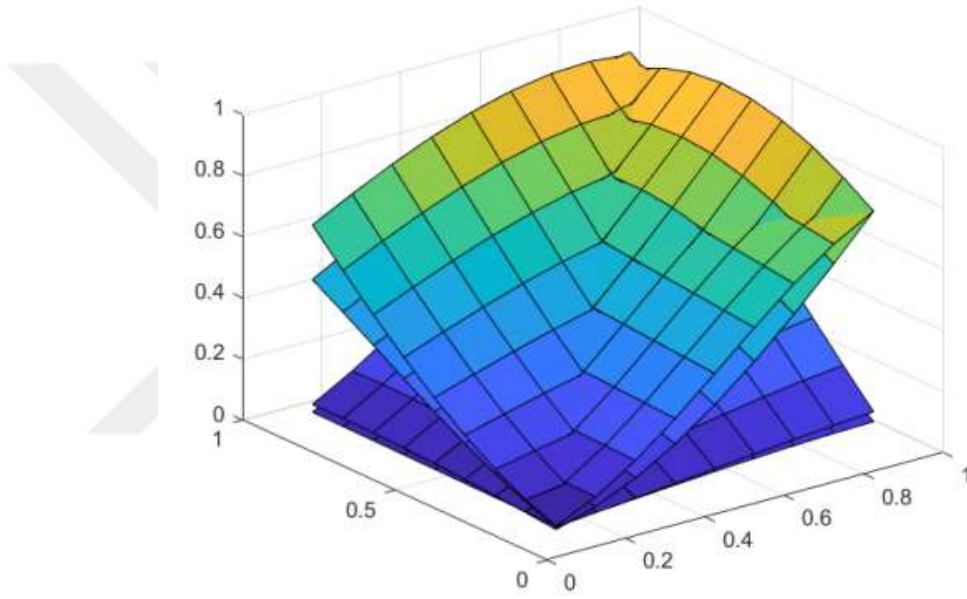


8. GRAFİK VE NÜMERİK ANALİZ

Bu bölümde f fonksiyonu için yaklaşım modellemesini gösteren iki değişkenli Bernstein Kantorovich operatörünün üstel formunun grafik ve nümerik analizleri verilmektedir.

Örnek 8.1.

$f(x, y) = \frac{\sin(x) \cos(y)}{x+y}$ fonksiyonu için her $x, y \in [0.1, 0.9]$, $\alpha \in \{0.5, 0.75, 1\}$ ve sabit $\beta = 2, n = 20$ için $\tilde{K}_n^{\alpha, \beta}$ operatörünün f fonksiyonuna yaklaşımı Şekil 8.1. ile gösterilmiştir.



Şekil 8.1. α 'nın farklı değerleri ve $\beta = 2$ seçimi için $\tilde{K}_n^{\alpha, \beta}$ operatörünün f fonksiyonuna yaklaşımını gösteren grafik.

Ayrıca Tablo 8.1. ve Tablo 8.2' de farklı α, β , ve n değerleri için $\tilde{K}_n^{\alpha, \beta}$ operatörü ile f fonksiyonu arasındaki hata payı gösterilmiştir.

α	β	$\ \tilde{K}_5^{\alpha, \beta}(f) - f\ $	$\ \tilde{K}_8^{\alpha, \beta}(f) - f\ $	$\ \tilde{K}_{10}^{\alpha, \beta}(f) - f\ $	$\ \tilde{K}_{12}^{\alpha, \beta}(f) - f\ $	$\ \tilde{K}_{15}^{\alpha, \beta}(f) - f\ $
0.5	2	0.7896	0.6460	0.6130	0.5964	0.5786
0.75	2	0.7747	0.6369	0.6050	0.5895	0.5738
1	2	0.7600	0.6291	0.5985	0.5838	0.5780

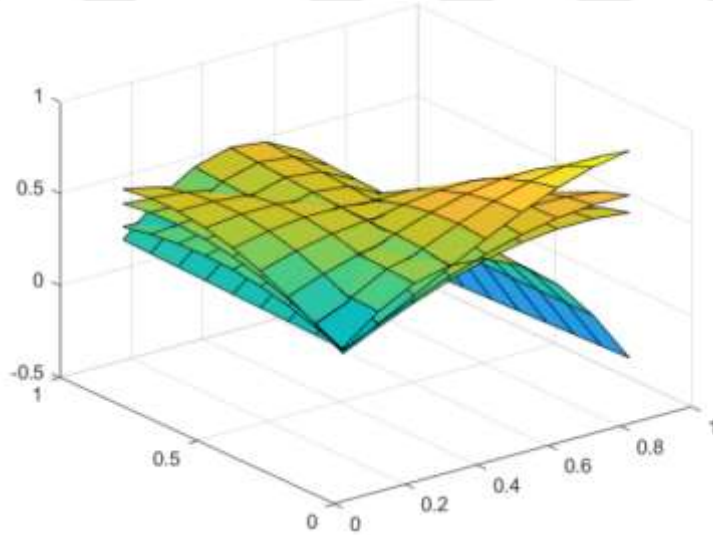
Tablo 8.1. $\alpha \in \{0.5, 0.75, 1\}$ ve $\beta = 2$ değerleri için $\tilde{K}_n^{\alpha, \beta}$ operatörü ile f fonksiyonu arasındaki hata payı gösterilmiştir.

β	α	$\ \tilde{K}_5^{\alpha,\beta}(f) - f\ $	$\ \tilde{K}_8^{\alpha,\beta}(f) - f\ $	$\ \tilde{K}_{10}^{\alpha,\beta}(f) - f\ $	$\ \tilde{K}_{12}^{\alpha,\beta}(f) - f\ $	$\ \tilde{K}_{15}^{\alpha,\beta}(f) - f\ $
0.5	5	0.5443	0.3445	0.2868	0.2547	0.2285
1	5	0.5674	0.4295	0.4122	0.4086	0.4066
1.5	5	0.7364	0.5997	0.5778	0.5663	0.5571

Tablo 8.2. $\beta \in \{0.5, 1, 1.5\}$ ve $\alpha = 5$ değerleri için $\tilde{K}_n^{\alpha,\beta}$ operatörü ile f fonksiyonu arasındaki hata payı gösterilmiştir.

Örnek 8.2.

$f(x, y) = \frac{\cos(x+y)}{x+y}$ olsun. $\tilde{K}_{20}^{0.01,0.2}(f; x, y)$, $\tilde{K}_{20}^{0.5,0.3}(f; x, y)$ ve $\tilde{K}_{20}^{1,0.4}(f; x, y)$ için $\tilde{K}_n^{\alpha,\beta}$ operatörünün f fonksiyonuna yaklaşımı Şekil 8.2. ile gösterilir.



Şekil 8.2. $n = 20$ ve α, β 'nin farklı değerleri için $\tilde{K}_n^{\alpha,\beta}$ operatörünün f fonksiyonuna yaklaşımını gösteren grafik.

9. SONUÇ

Bu çalışmada iki değişkenli Bernstein Kantorovich operatörlerinin üstel formunu oluşturduk. Daha sonra $C(S_{\alpha,\beta})$ üzerinde tanımlanan fonksiyonlar için süreklilik modülü ile yakınsama oranını hesapladık. Ayrıca Voronovskaya tip asimptotik teoremi inceledik. Son olarak iki değişkenli Bernstein Kantorovich operatörlerinin farklı n, α ve β değerleri için hata tabloları ve grafikleri verilmiştir.





KAYNAKLAR

- Acar, T., Aral A., S. A. Mohiuddine. (2018). "Approximation by bivariate (p, q)-Bernstein-Kantorovich operators", *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science*, 42, 655-662.
- Acu, A. M., P. Agrawal, D. Kumar. (2019). "Approximation properties of modified q-Bernstein-Kantorovich operators", *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 68(2), 2170-2197.
- Acu, Ana Maria, Carmen Violeta Muraru. (2015). "Approximation properties of bivariate extension of q-Bernstein-Schurer-Kantorovich operators", *Results in Mathematics*, 67, 265-279.
- Adell, Jose A., Jesús, Delacal, Miguel Sanmiguel. (1995). "On the property of monotonic convergence for multivariate Bernstein-type operators", *Journal of Approximation Theory*, 80.1, 132-137.
- Agrawal, Purshottam Narain, Behar Baxhaku, Sompal Singh. (2022). "Approximation Degree of Bivariate Generalized λ -Bernstein-Kantorovich Type Operators", *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 43.12, 1484-1509.
- Altomare, F., Campiti, M. (1994). "Korovkin-Type Approximation Theory and its Applications", *De Gruyter Series Studies in Mathematics*, Vol. 17, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 266-274.
- Altomare F., M. C. Montano, V. Leonessa, Ioan, R.(2018). "Elliptic differential operators and positive semigroups associated with generalized Kantorovich operators", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 458(1), 153-173.
- Anastassiou, G. A., Gal, S. G. (2000). "Approximation theory: moduli of continuity and global smoothness preservation", *Springer Science & Business Media*.
- Aslan R., İzgi A. (2022). "Some Approximation Results by Bivariate Bernstein-Kantorovich Type Operators on a Triangular Domain", *Kyungpook Mathematical Journal*, 62(3), 467-484.
- Aslan, R.(2023) . "Approximation properties of univariate and bivariate new class λ -Bernstein-Kantorovich operators and its associated GBS operators", *Computational and Applied Mathematics*, 42.1, 34.
- Aral, A., Daniel C. M., Pedro, G. (2018). "Bernstein-type operators that reproduce exponential functions", *J. Math. Inequal*, 12.3, 861-872.

- Aral, A., Diana O., Ioan R. (2019). "On approximation by some Bernstein–Kantorovich exponential-type polynomials", *Periodica Mathematica Hungarica*, 79, 236-254.
- Başcanbaz-Tunca, G., İnce-İlarslan H., Erençin A. (2016). "Bivariate Bernstein type operators", *Applied Mathematics and Computation*, 273, 543-552.
- Bernstein, S.N. (1912). "Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités", *Commun. Kharkov Math. Soc.*, 13(2), 1–2.
- Bilgin, N. G., Eren M. (2021). "A generalization of two dimensional Bernstein-Stancu operators", *Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 6.2, 130-142.
- Bohman, H. (1951). "On approximation of continuous and analytic functions", *Arkiv för Matematik*, 2(3), 43-56.
- Bozkurt, K., Özşarç F., Aral A.(2021). "Bivariate Bernstein polynomials that reproduce exponential functions", *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 70.1, 541-554.
- Butzer, Paul L. (1953). "On two-dimensional Bernstein polynomials", *Canadian Journal of Mathematics* 5, 107-113.
- Cardenas-Morales D., F. J. Munoz-Delgado, F. J. (2008). "Improving certain Bernstein-type approximation processes", *Mathematics and Computers in Simulation*, 77-2(3), 170.
- Çiçek, H., İzgi, A. (2022). "Approximation by modified bivariate Bernstein-Durrmeyer and GBS bivariate Bernstein-Durrmeyer operators on a triangular region", *Fundamental Journal of Mathematics and Applications*, 5.2, 135-144.
- Ditzian, Z.. (1986). "Inverse theorems for multidimensional Bernstein operators", *Pacific Journal of Mathematics*, 121.2, 293-319.
- Ditzian Z., X. Zhou, (1990). "Kantorovich–Bernstein polynomials", *Constructive Approximation*, 6(4), 421-435.
- Gairola, A. R., Maindola, S., Rathour, L., Mishra, L. N., Mishra, V. N. (2022) "Better uniform approximation by new Bivariate Bernstein Operators", *International Journal of Analysis and Applications*, 20, 60.
- Gairola A.R., N. Bisht, L. Rathour, L.N. Mishra, V.N. Mishra. (2023). "Order of approximation by a new univariate Kantorovich Type Operator", *International Journal of Analysis and Applications*, 21, 1-17. Article No. 106.
- Gupta V., (2023). "Higher–Order Bernstein–Kantorovich Operators", *Proceedings of the National Academy of Sciences, India Section A: Physical Sciences*, 1-10.
- Korovkin, P.P. (1953). "On convergence of linear operators in the space of continuous functions (Russian)", *Dokl Akad Nauk SSSR (N.S.)*, 90, 961-964 .

- Lorentz, G.G. (1953). "Bernstein polynomials", *University of Toronto Press, Mathematical Expositions*, 10-130.
- Pop, O. T., M. D. Fărcaș. (2009). "About the bivariate operators of Kantorovich Type", *Acta Mathematica Universitatis Comenianae New Series*, 78(1), 43-52.
- Sharma, P., Mishra, V. N. (2016). "Bivariate generalization of q-Bernstein-Kantorovich type operator", *Cogent Mathematics*, 3.1, 1160587.
- Stancu, D. D. (1963). "A method for obtaining polynomials of Bernstein type of two Variables", *The American Mathematical Monthly*, 70.3, 260-264.
- Weierstrass, K. (1885). "Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen", *Sitzungsberichte der Akademie zu Berlin*, 633–639, 789–805.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : Altuntaş, Halime
Uyruğu : T.C.

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek lisans	Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi	Devam ediyor
Lisans	Gazi Üniversitesi	2021
Lise	Türk Eğitim Vakfı Anadolu Lisesi	2016

Yabancı Dil

İngilizce, Almanca

Yayınlar

1. Kanat, K., Sofyalıoğlu Aksoy, M. , Altuntaş, H. Approximation by Bivariate Bernstein-Kantorovich Operators that Reproduce Exponential Functions. (In Press)
2. Kanat, K., Sofyalıoğlu Aksoy, M. , Altuntaş, H. Approximation by Chlodowsky-Type of Szász Operators Including the Appell Polynomials of Class A^2 . (In Press)

Uluslararası Bildiriler

4th International Conference on Mathematics and its Applications in Science and Engineering (ICMASE-2023), Sözlü Sunum, Bükreş, Romanya, 2023.



