

T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**P-KONVEKS VE S-P- KONVEKS FONKSİYONLAR
İÇİN YENİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Öğrencinin Adı Soyadı : Aykut KILIÇ

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih :

Enstitü Anabilim Dalı : Matematik

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Sercan TURHAN

Nisan 2024
GİRESUN

T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**P-KONVEKS VE S-P-KONVEKS FONKSİYONLAR
İÇİN YENİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Aykut KILIÇ

Enstitü Anabilim Dalı : Matematik

Bu tez 29/04/2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

**Prof. Dr.
Selahattin MADEN
Jüri Başkanı**

**Doç. Dr.
Sercan TURHAN
Üye**

**Doç. Dr.
Oğuz OĞUR
Üye**

**Prof. Dr.
Bahadır KOZ
Enstitü Müdürü**

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Aykut KILIÇ

29/04/2024

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans ders döneminde ve tez çalışmamın hazırlanması süresince gösterdiği türlü destek ve yardımından dolayı çok değerli danışman hocam Doç. Dr. Sercan TURHAN' a, tez çalışmamda katkılarından dolayı değerli hocam Prof. Dr. İmdat İŞCAN'a ve ders aldığım matematik bölümü öğretim üyelerine en içten dileklerimle teşekkür ederim. Tez çalışması boyunca desteklerini esirgemeyen aileme ve tüm arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	I
İÇİNDEKİLER	II
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	III
ŞEKİLLER LİSTESİ	IV
ÖZET	V
SUMMARY	VI
BÖLÜM 1. GİRİŞ	1
BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI	5
2.1. Konveks Fonksiyonlarla İlgili Temel Tanım ve Özellikler	5
2.2. Farklı Türden Bazı Konveks Fonksiyon Sınıfları ve Temel Tanımlar	10
2.3. Bazı Önemli Eşitsizlikler	11
BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM	13
3.1. Harmonik Konveks Fonksiyonlarla İlgili Yeni İntegral Eşitsizlikleri	13
BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI	20
BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ	85
ÖZGEÇMİŞ	89

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\beta(\kappa, \varphi)$: κ, φ Pozitif Reel Sayılarının Beta Fonksiyonu

${}_2F_1$: Hipergeometrik Fonksiyon

I : $\mathbb{R}$ 'de Bir Aralık

$L[u, v]$: $[u, v]$ Aralığında İntegrallenebilir Fonksiyonlar Kümesi

$\mathbb{R}$: Reel Sayılar Kümesi

$\mathbb{R}^n$: n boyutlu Öklid uzayı

$\mathbb{R}_0^+$: $[0, \infty)$ Aralığı

$\mathbb{Q}$: Rasyonel Sayılar Kümesi

w' : w Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi

w'' : w Fonksiyonunun İkinci Mertebeden Türevi

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1.	Konveks Kümeler	5
Şekil 2.2.	Konveks Olmayan Kümeler	5
Şekil 2.3.	Bir Aralıktaki konveks fonksiyon	6



P- KONVEKS VE S-P- KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN YENİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

ÖZET

Bu tezde, p-konveks ve ikinci anlamda s-p-konveks fonksiyonlar ile ilişkin teoremler ve sonuçlar verildi. Birinci bölümde eşitsizlik teorisi, konveks fonksiyonların tarihsel gelişimi ve konvekslik teorisine ilişkin bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde, tez için gerekli olan temel kavramlar, tanımlar ve teoremler verilmiş olup; aynı zamanda konveks fonksiyonların sınıfları arasındaki ilişkilere de yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, tezin bulgular bölümüne fikir veren lemma ve teoremler yer almaktadır. Dördüncü bölümde, p-konveks ve ikinci anlamda s-p-konveks fonksiyonlar için yeni eşitsizlikler verilerek sonuçlar elde edilmiştir. Çalışmada elde edilen eşitsizliklerin literatür ile örtüştüğü gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: P-Konveks Fonksiyon, İkinci Anlamda S-P- Konveks Fonksiyon, İntegral Eşitsizliği, Hipergeometrik Fonksiyon, Beta Fonksiyonu

NEW INTEGRAL INEQUALITIES FOR P-CONVEX AND S-P-CONVEX FUNCTIONS

SUMMARY

In this thesis, theorems and results related to p -convex and s - p -functions in the second sense are given. In the first chapter, inequality theory, historical development of convex functions and convexity theory are given. In the second chapter, the basic concepts, definitions, and theorems necessary for the thesis have been provided, and the relationships among the classes of convex functions are also addressed. In the third chapter, lemmas and theorems that give ideas for the results section of the thesis are given. In the fourth chapter, new inequalities for p -convex and s - p -convex functions in the second sense are given and results are obtained. It is shown that the inequalities obtained in the study coincide with the literature.

Keywords: P -Convex Function, S - P -Convex Function In The Second Sense, Integral Inequality, Hypergeometric Function, Beta Function

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Matematikte eşitsizlik, iki veya daha fazla matematiksel ifadenin karşılaştırılmasıyla elde edilen bir ilişkidir. Eşitsizlikler, eşitlik olmadığını veya iki değerin birbirine göre durumlarını belirten matematiksel ifadelerdir. Genellikle " $<$ " (küçüktür), " $>$ " (büyüktür), " $\leq$ " (küçük eşittir), " $\geq$ " (büyük eşittir) gibi sembollerle ifade edilirler. Matematiksel eşitsizliklerin matematiğin çeşitli dallarından yanında fiziksel bilimler mühendislik ve diğer alanlardaki gelişmelere faydası son yıllarda iyice ortaya çıkmıştır. Yirminci yüzyıl matematiği, matematiksel eşitsizliklerin gücünü keşfetti ve bu da çok sayıda yeni sonuç ve problemin yanı sıra matematiğin yeni alanlarının ortaya çıkmasına zemin hazırladı. Bu gelişmelerin ardından sadece yeni bir matematik değil, aynı zamanda yeni bir bakış açısı ve bununla birlikte zor görünen sonuçların basit yeni kanıtları da ortaya konmuştur.

Eşitsizlik teorisi, matematiksel analiz ve çeşitli uygulamalarını etkileyen birçok çalışmaya konu olmuş ve bu alanda birçok önemli eser kaleme alınmıştır. Bu eserlerin ilki ve temel kaynak kabul edilen 1934 yılında yayınlanan Hardy, Littlewood ve Pólya'nın "Inequalities" kitabıdır [10]. Bu kitapta okuyucular çok çeşitli klasik ve yeni eşitsizlikler, problemler, sonuçlar, ispat yöntemleri ve uygulamalar bulabilirler. E. F. Beckenbach ve R. Bellman, 1934-1960 yılları arasında yapılan birçok yeni eşitsizlik çalışmasını derleyerek "Inequalities" adlı eseri kaleme aldılar [6]. Ardından, 1970 yılında Mitrinovic, tüm yeni eşitsizlikleri "Analytic Inequalities" adlı kitapta topladı [19]. Bu çalışmaların ardından, 1993 yılında Mitrinović, Pecarić ve Fink, genel bir bakış açısı sunan "Classi-

cal and New Inequalities in Analysis" adlı kitabı yayınladılar [20]. Bu kitaplar, birçok matematikçi üzerinde etki bırakmış ve daha sonraki zamanlarda bu alanda pek çok araştırma gerçekleştirilmiştir.

Son yıllarda, matematiksel eşitsizlikler üzerine önemli çalışmalar yapan araştırmacılar arasında Sever S. Dragomir, V. Lakshmikantham ve Ravi P. Agarwal gibi araştırmacılar bulunmaktadır. Bu araştırmacılar, eşitsizlik konusunun hem teorik hem de uygulamalı yönlerini kapsayan çeşitli kitaplar, makaleler yayınlamışlardır. Bu çalışmalar, matematiksel eşitsizliklerin derinlemesine anlaşılması ve çeşitli bilim dallarında kullanılması için önemli bir katkı sağlamaktadır.

Eşitsizlik teorisinin gelişmesinde belirgin bir etkisi olan kavramlardan biri konveks fonksiyonlar matematiksel analizin ve uygulamaların temel taşlarından biridir. Bu fonksiyonlar, eşitsizlik problemlerinin çözümünde ve matematiksel modellemelerde geniş bir kullanım alanına sahiptir, aynı zamanda birçok alanda derinlemesine araştırmalarıyla da dikkat çeker. Örnek olarak, tıbbi olarak uygulanan tedavi planlamasında ve sağlık verilerinin analizinde konveks optimizasyon teknikleri kullanılmaktadır. Endüstriyel süreçler, üretim ve lojistik, kaynak yönetimine ve verimliliğin artırılmasına yardımcı olan konvekslik ilkelerine göre yönetilir. Malzeme biliminde yapıların dayanıklılığının değerlendirilmesinde, mühendislik projelerinde yapısal analizlerde ve mimari tasarımlarda konvekslik prensipleri büyük önem taşır. Fiziksel sistemlerin modellenmesinde ve optik alanında konvekslik kavramı da önemli bir rol oynar.

Matematiksel konvekslik fikri antik Yunan'da bilinmekteydi. Öklid (MÖ 325-270), Arşimet (MÖ 287-212), Pergalı Apollonius (MÖ 262-190), İskenderiyeli Heron (MS 10-70), Batlamyus (MS 100-160) ve diğer matematikçilerin geometri ve optik üzerine çalışmalarında mevcuttur. Konveks fonksiyonların tarihi çok eski zamanlara dayan-

masına rağmen, modern anlamdaki başlangıcı genellikle 19. yüzyılın sonları olarak kabul edilebilir. "Konvekslik" kavramından ilk olarak 1883 yılında Charles Hermite tarafından bahsedilmesine rağmen konveks fonksiyonların sistemli olarak çalışılması 1905-1906 yıllarında J.L.W.V. Jensen ile birlikte başlanmıştır. A. W. Roberts ve D. E. Varberg tarafından 1973 yılında kaleme alınan "Convex Functions" adlı kitap [25], konveks fonksiyonları ayrıntılı bir şekilde ele almıştır. Sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizliklere içeren "Convex Functions: Inequalities" isimli kitap 1987 yılında Pečarić tarafından yayımlanmıştır. Konveks fonksiyonlar ve ilgili eşitsizlikler için mevcut olan diğer kitaplar şunlardır: ([21], [24]).

Matematikçilerin, çalışmalarını yürüttükleri birçok konvekslik türü vardır. Tezimizde ele alacağımız konulardan biri, p -konvekslik; diğeri ise ikinci anlamda $s - p$ -konveksliktir.

İlk olarak p -konvekslik K. Zhang ve J. Wan tarafından tanımlanmıştır [28]. Bu tanım p -konveks kümeler üzerinde tanımlanmış fonksiyonları kapsayan genel bir tanımdır. Belirli bir aralıkta tanımlanmış fonksiyonlara odaklanan daha spesifik bir tanımlı İşçan tarafından yapılmıştır [13]. Tezimizde İşçan tarafından tanımlanan p -konvekslik kullanılacaktır. p -konveksliği kullanarak İşçan arkadaşları tarafından Ostrowski , Hermite-Hadamard ve Hermite-Hadamard-Fejér tipi yeni eşitsizlikler oluşturulmuştur ([13], [14], [16]).

Bilal ve Khan , $(s; r)$ -konvekslik kavramını kullanarak, Hermite-Hadamard eşitsizliğine ilişkin p -konveks fonksiyonlarla ilgili genelleştirilmiş sonuçlar elde etmiştir [7].

Sezer ve arkadaşları p -konveks fonksiyonların temel özellikleri ve bazı işlemsel özellikleri sunmuş ve farklı p değerleri için p -konveks fonksiyonlar arasındaki ilişkiler elde

etmiştir [26].

Arshad ve Khan , 1.ve 2. türde s-p-konveksliği tanımlayarak 1.ve 2. türde s-p-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejér tipi eşitsizliklerin p-konveksliği üzerine genelleştirmiştir [2].

Gauss-Jacobi türü genelleştirilmiş karekök formülü, Eşitlik (1.1)'de belirtilmiştir:

$$\int_u^v (\varkappa - u)^p (v - \varkappa)^q w(\varkappa) d\varkappa = \sum_{k=0}^{\omega} B_{\omega,k} w(\gamma_k) + \mathfrak{R}_m[w] \quad (1.1)$$

Burada belirli $B_{\omega,k}$, γ_k ve geriye kalan terim $\mathfrak{R}_m[w]$ değerleri için geçerlidir [27].

Çalışmamızda (1.1) eşitliğinin sol tarafını kullanarak yeni integral eşitsizliği oluşturduk.

(1.1) eşitsizliğinin sol tarafını kullanarak yapılan bazı çalışmalar şu şekildedir:

Liu ,mutlak değerin bir kuvveti p -konveks olduğunda fonksiyonlar için

$\int_a^b (x-a)^p (b-x)^q f(x) dx$ integralinin Euler Beta fonksiyonunu içeren bazı eşitsizlikler oluşturmuştur [18].

İşçan ve arkadaşları mutlak değerinin belirli kuvvetleri harmonik olarak konveks olan fonksiyonlar kümesi için $\int_a^b (x-a)^p (b-x)^q f(x) dx$ integralinin Euler Beta fonksiyonu ve Hipergeometrik fonksiyonunu içeren bazı eşitsizlikler oluşturmuştur [12].

Özdemir ve arkadaşları (1.1)'in sol tarafına ilişkin bazı integral eşitsizliklerini bazı konvekslik türleri aracılığıyla kurmuşlardır [23].

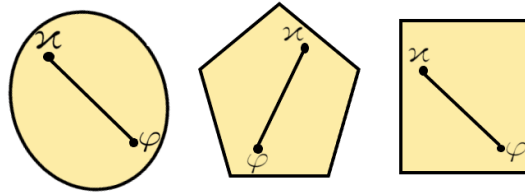
BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

2.1. Konveks Fonksiyonlarla İlgili Temel Tanım ve Özellikler

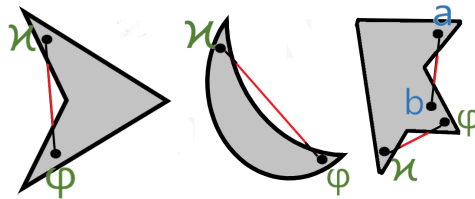
Tanım 2.1. Konveks Küme: L bir lineer uzay ve $G \subseteq L$ olmak üzere $\forall \varkappa, \varphi \in G$ için

$$H = \{v \in L : v = \theta \varkappa + (1 - \theta)\varphi, \quad 0 \leq \theta \leq 1\} \subseteq G$$

ise G kümesi konveks küme olarak adlandırılır. Eğer $v \in H$ ise $v = \theta \varkappa + (1 - \theta)\varphi$ eşitliğindeki $\varkappa$ ve φ 'nin katsayıları için $\theta + (1 - \theta) = 1$ bağıntısı daima sağlanır. Dolayısıyla konveks küme tanımında $\theta, 1 - \theta$ ifadesi yerine $\theta + q = 1$ koşulunu sağlayan ve negatif olmayan θ, q reel sayıları seçilebilir. Geometrik bakımdan H kümesi uç noktaları $\varkappa$ ve φ olan bir doğru parçasıdır. Dolayısıyla doğal olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını içeren kümedir [4].



Şekil 2.1. Konveks Kümeler



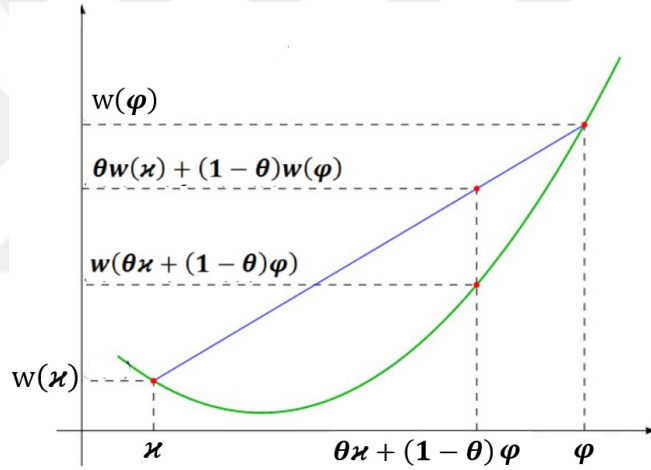
Şekil 2.2. Konveks Olmayan Kümeler

Tanım 2.2. Konveks Fonksiyon: I bir $\mathbb{R}$ aralığı olsun ve $w : I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

O zaman her $\varkappa, \varphi \in I$ ve her $\theta \in [0, 1]$ için

$$w(\theta \varkappa + (1 - \theta)\varphi) \leq \theta w(\varkappa) + (1 - \theta)w(\varphi) \quad (2.1)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, w konveks fonksiyon olarak adlandırılır. Eğer (2.1)'deki eşitsizlik $\varkappa \neq \varphi$ ve $\theta \in (0, 1)$ için kesin ise bu durumda w fonksiyonuna kesin konveks fonksiyon denir. Eğer (2.1)'deki eşitsizlik tersine çevrilirse, w fonksiyonun konveks olduğu söylenir. Eğer tüm $\varkappa \neq \varphi$ ve $\theta \in (0, 1)$ için kesinse, o zaman w fonksiyonun kesin konveks olduğu söylenir [24].



Şekil 2.3. Bir Aralıktaki konveks fonksiyon

Geometrik anlamda $\theta \varkappa + (1 - \theta)\varphi$ noktasında, w fonksiyonunun eğri üzerinde aldığı değer, $(\varkappa, w(\varkappa))$ ve $(\varphi, w(\varphi))$ noktalarını birleştiren doğru parçasının üzerinde aldığı değerden her zaman daha küçüktür; yani bu iki noktayı birleştiren kiriş her zaman eğrinin $[\varkappa, \varphi]$ aralığında kalan kısmının üstündedir.

Aşağıdaki kriterler konveks fonksiyon tanımına eşdeğerdir.

i. I aralığı üzerinde w fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart herhangi bir $c \in I$ olmak üzere $\frac{w(\varkappa) - w(c)}{\varkappa - c}$ fonksiyonu I aralığında artan olmasıdır.

ii. $w : (u, v) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart her $c, \varkappa \in (u, v)$ için

$$w(\varkappa) - w(c) = \int_c^\varkappa g(\theta) d\theta$$

olacak biçimde bir $g : (u, v) \rightarrow \mathbb{R}$ artan fonksiyonunun olmasıdır.

iii. w diferensiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere, w fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart w' fonksiyonunun artan olmasıdır.

iv. w'' , (u, v) aralığında olsun. Bu durumda w fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart $w'' \geq 0$ olmasıdır.

v. $w : (u, v) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart her $\varkappa_0 \in (u, v)$ için w fonksiyonunun en az bir destek doğrusuna sahip olmasıdır. Yani $\forall \varkappa \in (u, v)$ için

$$w(\varkappa) \geq w(\varkappa_0) + \zeta(\varkappa - \varkappa_0)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Bu eşitsizlikte ζ değişkeni $\varkappa_0$ 'a bağlıdır ve eğer w' var ise $\zeta = w'(\varkappa_0)$ yada $w'_-(\varkappa_0) \neq w'_+(\varkappa_0)$ ise $\zeta \in [w'_-(\varkappa_0), w'_+(\varkappa_0)]$ dir.

vi. $w : (u, v) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart; grafik üzerinde seçilen üç ayrı P, M, S noktalarını birleştiren kirişler için

$$\text{eğim}_{PM} \leq \text{eğim}_{PS} \leq \text{eğim}_{MS}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır [24].

Tanım 2.3. (Artan ve Azalan Fonksiyonlar): w, I aralığında tanımlı bir fonksiyon ve $\varkappa_1, \varkappa_2$ de I 'da iki nokta olsun. O zaman

a. $\varkappa_2 > \varkappa_1$ için $w(\varkappa_2) > w(\varkappa_1)$ oluyorsa w fonksiyonu I 'da artandır,

b. $\varkappa_2 > \varkappa_1$ için $w(\varkappa_2) < w(\varkappa_1)$ oluyorsa w fonksiyonu I 'da azalandır,

c. $\varkappa_2 > \varkappa_1$ için $w(\varkappa_2) \geq w(\varkappa_1)$ oluyorsa w fonksiyonu I 'da azalmayandır,

d. $\varkappa_2 > \varkappa_1$ için $w(\varkappa_2) \leq w(\varkappa_1)$ oluyorsa w fonksiyonu I 'da artmayandır, denir [1].

Teorem 2.4. J açık bir aralık ve $J \subseteq I$ olmak üzere w, I üzerinde sürekli ve J üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. O zaman

- a. Her $x \in J$ için $w'(x) > 0$ ise w fonksiyonu I 'da artandır.
- b. Her $x \in J$ için $w'(x) < 0$ ise w fonksiyonu I 'da azalandır,
- c. Her $x \in J$ için $w'(x) \geq 0$ ise w fonksiyonu I 'da azalmayandır,
- d. Her $x \in J$ için $w'(x) \leq 0$ ise w fonksiyonu I 'da artmayandır [1].

Aşağıda konveks fonksiyonların türevleri ile artanlık (azalanlık) arasındaki ilişkiyi içeren sonuç ve teoremler verilmiştir.

Sonuç 2.5. w, g konveks fonksiyonlar ve g aynı zamanda artan ise $g \circ w$ fonksiyonu konvektir [25].

Teorem 2.6. $w : I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks (kesin konveks) bir fonksiyon ise $f'_+(\alpha)$ ve $f'_-(\alpha)$ var ve bu fonksiyonlar I° 'de artandır (kesin artandır) [24].

Teorem 2.7. w fonksiyonu (u, v) aralığında diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda w fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart w' 'nin artan (kesin artan) olmasıdır [24].

Teorem 2.8. w fonksiyonunun I açık aralığında ikinci türevi varsa, w fonksiyonunun bu aralık üzerinde konveks (kesin konveks) olması için gerek ve yeter şart $x \in I$ için

$$w''(x) \geq (>) 0$$

olmasıdır [24].

Tanım 2.9. (Süreklilik): $w : K \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in K$ ve $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. Eğer

$$x \in K \text{ ve } |x - x_0| < \delta \text{ için } |w(x) - w(x_0)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ sayısı varsa w fonksiyonu x_0 'da süreklidir denir [5].

Tanım 2.10. (Lipschitz Şartı): $w : K \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$|w(\varkappa) - w(\varphi)| \leq M|\varkappa - \varphi|$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa, w fonksiyonu K kümesinde Lipschitz şartını sağlıyor denir [6].

Sonuç 2.11. $w, K \subseteq \mathbb{R}$ kümesinde Lipschitz şartını sağlıyorsa w, K kümesinde düzgün süreklidir [5].

Tanım 2.12. (Düzgün Süreklilik): $w : K \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \varkappa_0 \in K$ ve $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. $\varkappa \in K$ ve $|\varkappa_1 - \varkappa_2| < \delta$ şartını sağlayan $\forall \varkappa_1, \varkappa_2 \in K$ için $|w(\varkappa_1) - w(\varkappa_2)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa w fonksiyonu K kümesinde düzgün süreklidir denir [5].

Teorem 2.13. *Eğer w fonksiyonu $[u, v]$ aralığında konveks ise:*

- a. $w, (u, v)$ aralığında süreklidir.
- b. $w, [u, v]$ aralığında sınırlıdır [3].

Tanım 2.14. (Beta Fonksiyonu): $\varkappa, \varphi > 0$ için

$$\beta(\varkappa, \varphi) = \int_0^1 \theta^{\varkappa-1} (1 - \theta)^{\varphi-1} d\theta$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon beta fonksiyonu olarak tanımlanır [9].

Beta fonksiyonunun

- i. $\beta(\varkappa + 1, \varphi) = \frac{\varkappa}{\varkappa + \varphi} \beta(\varkappa, \varphi), \quad \varkappa, \varphi \in (0, \infty)$
- ii. $\beta(1, \varphi) = \frac{1}{\varphi}$
- iii. $\beta(\varkappa, \varphi) = \int_0^1 \theta^{\varkappa-1} (1 - \theta)^{\varphi-1} d\theta = \int_0^\infty \frac{\theta^{\varkappa-1}}{(1 + \theta)^{\varkappa+\varphi}}, \quad \varkappa, \varphi > 0$

$$\text{iv. } \beta(\varkappa, \varphi) = \frac{\Gamma(\varkappa)\Gamma(\varphi)}{\Gamma(\varkappa + \varphi)}, \quad \varkappa, \varphi > 0$$

$$\text{v. } \beta(\varkappa, \varphi) = \beta(\varphi, \varkappa)$$

koşulları sağladığı kolayca görülebilir [15].

Tanım 2.15. (Hipergeometrik Fonksiyon): $c > v > 0, |z| < 1$ için,

$${}_2F_1(u, v; c; z) = \frac{1}{\beta(v, c-v)} \int_0^1 \theta^{v-1} (1-\theta)^{c-v-1} (1-z\theta)^{-u} d\theta$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona Hipergeometrik fonksiyon denir [17].

Tanım 2.16. (Harmonik Konveks Fonksiyon): I gerçel sayılar kümesindeki bir aralık olsun. $w : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu harmonik konveks ise, her $\varkappa, \varphi \in I$ ve $\theta \in [0, 1]$ için

$$w\left(\frac{\varkappa\varphi}{\theta\varkappa + (1-\theta)\varphi}\right) \leq \theta w(\varphi) + (1-\theta)w(\varkappa) \quad (2.2)$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer (2.2) eşitsizliği tersine çevrilirse, w fonksiyonuna harmonik konkav denir [11].

Tanım 2.17. (Gauss-Jacobi Türü Genelleştirilmiş Karekök Formülü): Gauss-Jacobi türü genelleştirilmiş karekök formülü, aşağıdaki formülle verilir:

$$\int_u^v (\varkappa - u)^p (v - \varkappa)^q w(\varkappa) d\varkappa = \sum_{k=0}^{\omega} B_{\omega,k} w(\gamma_k) + \mathfrak{R}_m[w]$$

Burada belirli $B_{\omega,k}$, γ_k ve artakalan terim $\mathfrak{R}_m[w]$ değerleri için geçerlidir [27].

2.2. Farklı Türden Bazı Konveks Fonksiyon Sınıfları ve Temel Tanımlar

Tanım 2.18. (İkinci Anlamda s -Konveks Fonksiyon): $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ve $0 < s \leq 1$ olsun. $\alpha + \beta = 1$ olmak üzere her $u, v \in \mathbb{R}_0^+$ ve her $\alpha, \beta \geq 0$ için

$$w(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s w(u) + \beta^s w(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa w fonksiyonuna ikinci anlamda s –konveks fonksiyon denir [8].

Tanım 2.19. (p- konvekslik): $I \subset (0, \infty)$ gerçek bir aralık ve $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olsun. Eğer her $\varkappa, \varphi \in I$ ve $\theta \in [0, 1]$ için

$$w\left([\theta \varkappa^p + (1 - \theta)\varphi^p]^{1/p}\right) \leq \theta w(\varkappa) + (1 - \theta)w(\varphi)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $w : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna p –konveks fonksiyon denir [13].

Tanım 2.19’da $I \subset (0, \infty)$ olmak üzere $p = 1$ alındığında p –konvekslik klasik konveksliğe, $p = -1$ alındığında konvekslik p –konvekslik harmonik konveksliğe indirgendir.

Tanım 2.20. (İkinci anlamda s-p-konvekslik): $s \in [0, 1]$ ve $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olsun. $w : I \subset (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu, eğer her $\varkappa, \varphi \in I$ ve $\theta \in [0, 1]$ için

$$w\left([\theta \varkappa^p + (1 - \theta)\varphi^p]^{\frac{1}{p}}\right) \leq \theta^s w(\varkappa) + (1 - \theta)^s w(\varphi),$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, ikinci anlamda $s - p$ –konveks fonksiyonu olarak adlandırılır [2]. Tanım 2.20 ’de $I \subset (0, \infty)$ olmak üzere $p = 1$ ve $s = 1$ alınır ise konvekslik tanımı, $p = -1$ ve $s = 1$ alınır ise harmonik konvekslik tanımı, $p = 1$ alınır ise ikinci anlamda s –konveksliğin tanımı, $s = 1$ alınır ise p –konveksliğin tanımı elde edilir.

2.3. Bazı Önemli Eşitsizlikler

Teorem 2.21. (Üçgen Eşitsizliği): Her $\varkappa, \varphi$ reel sayıları için

$$i. |\varkappa + \varphi| \leq |\varkappa| + |\varphi|,$$

$$ii. ||\varkappa| - |\varphi|| \leq |\varkappa + \varphi|,$$

$$iii. |x_1 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + \cdots + |x_n|$$

eşitsizlikleri sağlanır [20].

Teorem 2.22. (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu): $w, [u, v]$ aralığında tanımlı reel değerli sürekli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\left| \int_u^v w(x) dx \right| \leq \int_u^v |w(x)| dx \quad (u < v)$$

eşitsizliği geçerlidir [20].

Teorem 2.23. (İntegrallenebilir Fonksiyonlar için Hölder Eşitsizliği): w ve h fonksiyonları $[u, v]$ aralığında tanımlı reel değerli fonksiyonlar, $\omega > 1$ ve $\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\eta} = 1$ olsun. Eğer $|w|^\omega$ ve $|h|^\eta$ fonksiyonları $[u, v]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise bu takdirde

$$\int_u^v |w(x)h(x)| dx \leq \left(\int_u^v |w(x)|^\omega dx \right)^{1/\omega} \left(\int_u^v |h(x)|^\eta dx \right)^{1/\eta}$$

eşitsizliği sağlanır [20].

Sonuç 2.24. (Power Mean Eşitsizliği): w ve h fonksiyonları $[u, v]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilir iki fonksiyon olsun. Eğer $\eta \geq 1$ için $|w|$ ve $|h|^\eta$ fonksiyonları $[u, v]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise bu takdirde

$$\int_u^v |w(x)h(x)| dx \leq \left(\int_u^v |w(x)| dx \right)^{1-\frac{1}{\eta}} \left(\int_u^v |w(x)||h(x)|^\eta dx \right)^{\frac{1}{\eta}}$$

eşitsizliği sağlanır [20].

BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Harmonik Konveks Fonksiyonlarla İlgili Yeni İntegral Eşitsizlikleri

Bu bölümde, mutlak değerinin belirli kuvvetleri harmonik olarak konveks olan fonksiyonlar sınıfı için $\int_u^v (\varkappa - u)^\omega (v - \varkappa)^\eta w(\varkappa) d\varkappa$ integralinin Euler Beta fonksiyonu ve Hipergeometrik fonksiyonunu içeren bazı teoremlere yer verilmiştir. Bu bölümde verilen sonuçlar İşcan İ. ve arkadaşlarının [12] çalışmasından alınmıştır.

Aşağıdaki lemma, harmonik konveks fonksiyonlarla ilgili bazı yeni integral eşitsizliklerinin bulunmasında kullanılacaktır.

Lemma 3.1. $w : [u, v] \subseteq (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $w \in L[u, v]$ özelliğini sağlayan bir fonksiyon olsun ve $\omega, \eta > 0$ için

$$\begin{aligned} & \int_u^v (\varkappa - u)^\omega (v - \varkappa)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\ &= u^{\omega+1} v^{\eta+1} (v - u)^{\omega+\eta+1} \int_0^1 \frac{\theta^\omega (1 - \theta)^\eta}{A_\theta^{\omega+\eta+2}} w\left(\frac{uv}{A_\theta}\right) d\theta \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Burada $A_\theta = \theta u + (1 - \theta)v$ şeklindedir. Lemma 3.1’de $\omega = \eta$ alınırsa,

$$\begin{aligned} & \int_u^v (\varkappa - u)^\omega (v - \varkappa)^\omega w(\varkappa) d\varkappa \\ &= (uv)^{\omega+1} (v - u)^{2\omega+1} \int_0^1 \frac{\theta^\omega (1 - \theta)^\omega}{A_\theta^{2\omega+2}} w\left(\frac{uv}{A_\theta}\right) d\theta \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. Değişken değiştirilerek istenen sonuç kolayca elde edilir. □

Teorem 3.2. $w : [u, v] \subseteq (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $w \in L[u, v]$ olan bir fonksiyon olsun. Eğer w , $[u, v]$ üzerinde harmonik olarak konveks ve $\omega, \eta > 0$ ise

$$\begin{aligned} & \int_u^v (\varkappa - u)^\omega (v - \varkappa)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\ & \leq \left(\frac{u}{v}\right)^{\omega+1} (v-u)^{\omega+\eta+1} \left[w(u) \beta(\omega+1, \eta+2) {}_2F_1 \left(\omega+\eta+2, \omega+1; \omega+\eta+3; 1-\frac{u}{v} \right) \right. \\ & \quad \left. + w(v) \beta(\omega+2, \eta+1) {}_2F_1 \left(\omega+\eta+2, \omega+2; \omega+\eta+3; 1-\frac{u}{v} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.1)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $A_\theta = \theta u + (1-\theta)v$ olsun. w , $[u, v]$ üzerinde harmonik konveks olduğundan, her $\theta \in [0, 1]$ için lemma 3.1 kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \int_u^v (\varkappa - u)^\omega (v - \varkappa)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\ & \leq u^{\omega+1} v^{\eta+1} (v-u)^{\omega+\eta+1} \int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^\eta}{A_\theta^{\omega+\eta+2}} [\theta w(v) + (1-\theta)w(u)] d\theta \\ & = u^{\omega+1} v^{\eta+1} (v-u)^{\omega+\eta+1} \left[w(u) \int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^{\eta+1}}{A_\theta^{\omega+\eta+2}} d\theta + w(v) \int_0^1 \frac{\theta^{\omega+1} (1-\theta)^\eta}{A_\theta^{\omega+\eta+2}} d\theta \right] \end{aligned} \quad (3.2)$$

eşitsizliği elde edilir.

(3.2)'de

$$\int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^{\eta+1}}{A_\theta^{\omega+\eta+2}} d\theta = \frac{\beta(\omega+1, \eta+2)}{v^{\omega+\eta+2}} {}_2F_1 \left(\omega+\eta+2, \omega+1; \omega+\eta+3; 1-\frac{u}{v} \right) \quad (3.3)$$

ve

$$\int_0^1 \frac{\theta^{\omega+1} (1-\theta)^\eta}{A_\theta^{\omega+\eta+2}} d\theta = \frac{\beta(\omega+2, \eta+1)}{v^{\omega+\eta+2}} {}_2F_1 \left(\omega+\eta+2, \omega+2; \omega+\eta+3; 1-\frac{u}{v} \right). \quad (3.4)$$

(3.3) ve (3.4) eşitlikleri (3.2) eşitsizliğinde yerine konulduğunda, gerekli sonuç elde edilir. İspat tamamlanır. $\square$

Sonuç 3.3. Teorem 3.1’de $\omega = \eta$ alınırsa (3.1) eşitsizliği

$$\begin{aligned} & \int_u^v (\varkappa - u)^\omega (v - \varkappa)^\omega w(\varkappa) d\varkappa \\ & \leq \left(\frac{u}{v}\right)^{\omega+1} (v-u)^{2\omega+1} \beta(\omega+1, \omega+2) \left[w(u) {}_2F_1\left(2\omega+2, \omega+1; 2\omega+3; 1-\frac{u}{v}\right) \right. \\ & \quad \left. + w(v) {}_2F_1\left(2\omega+2, \omega+2; 2\omega+3; 1-\frac{u}{v}\right) \right] \end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 3.4. $w : [u, v] \subseteq (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $w \in L[u, v]$ ve $\zeta \geq 1$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun. Ayrıca $|w|^\zeta$ fonksiyonu $[u, v]$ üzerinde harmonik konveks olsun ve $\omega, \eta > 0$ olsun.

Bu durumda

$$\begin{aligned} & \int_u^v (\varkappa - u)^\omega (v - \varkappa)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\ & \leq \left(\frac{u}{v}\right)^{\omega+1} (v-u)^{\omega+\eta+1} \left(\beta(\omega+1, \eta+2) {}_2F_1\left(\omega+\eta+2, \omega+1; \omega+\eta+2; 1-\frac{u}{v}\right) \right)^{1-1/\zeta} \\ & \quad \times \left[|w(u)|^\zeta \beta(\omega+1, \eta+2) {}_2F_1\left(\omega+\eta+2, \omega+1; \omega+\eta+3; 1-\frac{u}{v}\right) \right. \\ & \quad \left. + |w(v)|^\zeta \beta(\omega+2, \eta+1) {}_2F_1\left(\omega+\eta+2, \omega+2; \omega+\eta+3; 1-\frac{u}{v}\right) \right]^{1/\zeta} \end{aligned} \quad (3.5)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $A_\theta = \theta u + (1-\theta)v$ olsun. $|w|^\zeta$, $[u, v]$ üzerinde harmonik konveks olduğundan, her $\theta \in [0, 1]$ için

$$\left| w\left(\frac{uv}{A_\theta}\right) \right|^\zeta \leq \theta |w(v)|^\zeta + (1-\theta) |w(u)|^\zeta$$

eşitsizliği vardır. Lemma (3.1)’i kullanılarak, power mean integral eşitsizliği ile

$$\begin{aligned} & \int_u^v (\varkappa - u)^\omega (v - \varkappa)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\ & \leq u^{\omega+1} v^{\eta+1} (v-u)^{\omega+\eta+1} \int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^\eta}{A_\theta^{\omega+\eta+2}} \left| w\left(\frac{uv}{A_\theta}\right) \right| d\theta \\ & \leq u^{\omega+1} v^{\eta+1} (v-u)^{\omega+\eta+1} \left(\int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^\eta}{A_\theta^{\omega+\eta+2}} d\theta \right)^{1-1/\zeta} \left(\int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^\eta}{A_\theta^{\omega+\eta+2}} \left| w\left(\frac{uv}{A_\theta}\right) \right|^\zeta d\theta \right)^{1/\zeta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq u^{\omega+1} v^{\eta+1} (v-u)^{\omega+\eta+1} \left(\int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^\eta}{A_\theta^{\omega+\eta+2}} d\theta \right)^{1-1/\zeta} \left[\int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^\eta}{A_t^{\omega+\eta+2}} \right. \\
&\quad \times \left. \left(\theta |w(v)|^\zeta + (1-\theta) |w(u)|^\zeta \right) dt \right]^{1/\zeta} \\
&\leq \left(\frac{u}{v} \right)^{\omega+1} (v-u)^{\omega+\eta+1} \left(\beta(\omega+1, \eta+1) {}_2F_1 \left(\omega+\eta+2, \omega+1; \omega+\eta+2; 1-\frac{u}{v} \right) \right)^{1-1/\zeta} \\
&\quad \times \left[|w(u)|^\zeta \beta(\omega+1, \eta+2) {}_2F_1 \left(\omega+\eta+2, \omega+1; \omega+\eta+3; 1-\frac{u}{v} \right) \right. \\
&\quad \left. + |w(v)|^\zeta \beta(\omega+2, \eta+1) {}_2F_1 \left(\omega+\eta+2, \omega+2; \omega+\eta+3; 1-\frac{u}{v} \right) \right]^{1/\zeta}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. □

Sonuç 3.5. Teorem 3.4'te $\omega = \eta$ alınırsa (3.5) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
&\int_u^v (\varkappa - u)^\omega (v - \varkappa)^\omega w(\varkappa) d\varkappa \\
&\leq \left(\frac{u}{v} \right)^{\omega+1} (v-u)^{2\omega+1} \beta(\omega+1, \omega+2) \left({}_2F_1 \left(2\omega+2, \omega+1; 2\omega+2; 1-\frac{u}{v} \right) \right)^{1-1/\zeta} \\
&\quad \times \left[|w(u)|^\zeta {}_2F_1 \left(2\omega+2, \omega+1; 2\omega+3; 1-\frac{u}{v} \right) \right. \\
&\quad \left. + |w(v)|^\zeta {}_2F_1 \left(2\omega+2, \omega+2; 2\omega+3; 1-\frac{u}{v} \right) \right]^{1/\zeta}
\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 3.6. $w : [u, v] \subseteq (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ve $\zeta > 1$ olmak üzere, $w \in L[u, v]$ ve $|w|^\zeta$ fonksiyonu

$[u, v]$ üzerinde harmonik konveks ve $\omega, \eta > 0$ ise,

$$\begin{aligned}
&\int_u^v (\varkappa - u)^\omega (v - \varkappa)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \tag{3.6} \\
&\leq \left(\frac{u}{v} \right)^{\omega+1} (v-u)^{\omega+\eta+1} \beta^{1/\vartheta}(\omega\vartheta+1, \eta\vartheta) \\
&\quad \times {}_2F_1^{1/\vartheta} \left((\omega+\eta+2)\vartheta, \omega\vartheta+1, (\omega+\eta)\vartheta+1, 1-\frac{u}{v} \right) \left(\frac{|w(u)|^\zeta + |w(v)|^\zeta}{2} \right)^{1/\zeta}
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikte $1/\zeta + 1/\vartheta = 1$ ' dir.

İspat. $A_t = ta + (1 - \theta)v$ olsun. Lemma 3.1, $|w|^\zeta$ 'nin harmonik konveksliği ve Hölder integral eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \int_u^v (\varkappa - u)^\omega (v - \varkappa)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\
& \leq u^{\omega+1} v^{\eta+1} (v - u)^{\omega+\eta+1} \int_0^1 \frac{\theta^\omega (1 - \theta)^\eta}{A_\theta^{\omega+\eta+2}} \left| w\left(\frac{uv}{A_\theta}\right) \right| d\theta \\
& \leq u^{\omega+1} v^{\eta+1} (v - u)^{\omega+\eta+1} \left(\int_0^1 \frac{\theta^{\omega\vartheta} (1 - \theta)^{\eta\vartheta}}{A_\theta^{(\omega+\eta+2)\vartheta}} d\theta \right)^{1/\vartheta} \left(\int_0^1 \left| w\left(\frac{uv}{A_\theta}\right) \right|^\zeta d\theta \right)^{1/\zeta} \\
& \leq u^{\omega+1} v^{\eta+1} (v - u)^{\omega+\eta+1} \left(\int_0^1 \frac{\theta^{\omega\vartheta} (1 - \theta)^{\eta\vartheta}}{A_\theta^{(\omega+\eta+2)\vartheta}} d\theta \right)^{1/\vartheta} \left(\int_0^1 [\theta |w(v)|^\zeta + (1 - \theta) |w(u)|^\zeta] d\theta \right)^{1/\zeta} \\
& \leq \left(\frac{u}{v}\right)^{\omega+1} (v - u)^{\omega+\eta+1} \beta^{1/\vartheta}(\omega\vartheta + 1, \eta\vartheta) \\
& \quad \times {}_2F_1^{1/\vartheta} \left((\omega + \eta + 2)\vartheta, \omega\vartheta + 1, (\omega + \eta)\vartheta + 1, 1 - \frac{u}{v} \right) \left(\frac{|w(u)|^\zeta + |w(v)|^\zeta}{2} \right)^{1/\zeta}
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Sonuç 3.7. Teorem 3.6'da $\omega = \eta$ alınırsa (3.6) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
& \int_u^v (\varkappa - u)^\omega (v - \varkappa)^\omega w(\varkappa) d\varkappa \\
& \leq \left(\frac{u}{v}\right)^{\omega+1} (v - u)^{2\omega+1} \beta^{1/\vartheta}(\omega\vartheta + 1, \omega\vartheta) {}_2F_1^{1/\vartheta} \left((2\omega + 2)\vartheta, \omega\vartheta + 1, 2\omega\vartheta + 1, 1 - \frac{u}{v} \right) \\
& \quad \times \left(\frac{|w(u)|^\zeta + |w(v)|^\zeta}{2} \right)^{1/\zeta}
\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 3.8. $w : [u, v] \subseteq (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $w \in L[u, v]$ ve $\zeta > 1$ olan bir fonksiyon olsun.

$|w|^\zeta$ 'nin $[u, v]$ üzerinde harmonik konveks ve $\omega, \eta > 0$ ise

$$\begin{aligned}
& \int_u^v (\varkappa - u)^\omega (v - \varkappa)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\
& \leq \left(\frac{u}{v}\right)^{\omega+1} (v - u)^{\omega+\eta+1} \beta^{1/\vartheta}(\omega\vartheta + 1, \eta\vartheta + 1) \left[{}_2F_1 \left((\omega + \eta + 2)\zeta, 1; 2; 1 - \frac{u}{v} \right) \frac{|w(u)|^\zeta}{2} \right. \\
& \quad \left. + {}_2F_1 \left((\omega + \eta + 2)\zeta, 2; 3; 1 - \frac{u}{v} \right) \frac{|w(v)|^\zeta}{2} \right]^{1/\zeta}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikte $1/\zeta + 1/\vartheta = 1$ 'dir.

İspat. $A_\theta = \theta u + (1 - \theta)v$ olsun. Lemma 3.1 , $|w|^\zeta$ 'nın harmonik konveksliği ve Hölder integral eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \int_u^v (\varkappa - u)^\omega (v - \varkappa)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\
& \leq u^{\omega+1} v^{\eta+1} (v - u)^{\omega+\eta+1} \int_0^1 \frac{\theta^\omega (1 - \theta)^\eta}{A_\theta^{\omega+\eta+2}} \left| w\left(\frac{uv}{A_\theta}\right) \right| d\theta \\
& \leq u^{\omega+1} v^{\eta+1} (v - u)^{\omega+\eta+1} \left(\int_0^1 \theta^{\omega\vartheta} (1 - \theta)^{\eta\vartheta} d\theta \right)^{1/\vartheta} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \frac{1}{A_\theta^{(\omega+\eta+2)\zeta}} \left| w\left(\frac{uv}{A_\theta}\right) \right|^\zeta d\theta \right)^{1/\zeta} \\
& \leq u^{\omega+1} v^{\eta+1} (v - u)^{\omega+\eta+1} \beta^{1/\vartheta} (\omega\vartheta + 1, \eta\vartheta + 1) \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \frac{[\theta |w(v)|^\zeta + (1 - \theta) |w(u)|^\zeta]}{A_\theta^{(\omega+\eta+2)\zeta}} d\theta \right)^{1/\zeta} \\
& \leq \left(\frac{u}{v}\right)^{\omega+1} (v - u)^{\omega+\eta+1} \beta^{1/\vartheta} (\omega\vartheta + 1, \eta\vartheta + 1) \left[{}_2F_1\left((\omega + \eta + 2)\zeta, 1; 2; 1 - \frac{u}{v}\right) \frac{|w(u)|^\zeta}{2} \right. \\
& \quad \left. + {}_2F_1\left((\omega + \eta + 2)\zeta, 2; 3; 1 - \frac{u}{v}\right) \frac{|w(v)|^\zeta}{2} \right]^{1/\zeta}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. □

Sonuç 3.9. Teorem 3.8'de $\omega = \eta$ alınırsa (3.7) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
& \int_u^v (\varkappa - u)^\omega (v - \varkappa)^\omega w(\varkappa) d\varkappa \\
& \leq \left(\frac{u}{v}\right)^{\omega+1} (v - u)^{2\omega+1} \beta^{1/\vartheta} (\omega\vartheta + 1, \omega\vartheta + 1) \left[{}_2F_1\left((2\omega + 2)\zeta, 1; 2; 1 - \frac{u}{v}\right) \frac{|w(u)|^\zeta}{2} \right. \\
& \quad \left. + {}_2F_1\left(2(\omega + 1)\zeta, 2; 3; 1 - \frac{u}{v}\right) \frac{|w(v)|^\zeta}{2} \right]^{1/\zeta}
\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 3.10. $w : [u, v] \subseteq (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $w \in L[u, v]$ ve $\zeta > 1$ sağlayan bir fonksiyon olsun.

Eğer $|w|^\zeta$, $[u, v]$ üzerinde harmonik konveks ve $\omega, \eta > 0$ ise

$$\begin{aligned}
& \int_u^v (\varkappa - u)^\omega (v - \varkappa)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\
& \leq \left(\frac{u}{v}\right)^{\omega+1} (v-u)^{\omega+\eta+1} {}_2F_1^{1/\vartheta} \left((\omega + \eta + 2)\vartheta, 1; 2; 1 - \frac{u}{v} \right) \\
& \times \left[\beta(\omega\zeta + 1, \eta\zeta + 2) |w(u)|^\zeta + \beta(\omega\zeta + 2, \eta\zeta + 1) |w(v)|^\zeta \right]^{1/\zeta}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikte $1/\zeta + 1/\vartheta = 1$ 'dir

İspat. $A_t = ta + (1 - \theta)v$ olsun. Lemma 3.1 ve $|w|^\zeta$ 'nin harmonik konveksliği kullanılarak Hölder integral eşitsizliği ile

$$\begin{aligned}
& \int_u^v (\varkappa - u)^\omega (v - \varkappa)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\
& \leq u^{\omega+1} v^{\eta+1} (v-u)^{\omega+\eta+1} \int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^\eta}{A_t^{\omega+\eta+2}} \left| w\left(\frac{uv}{A_t}\right) \right| d\theta \\
& \leq u^{\omega+1} v^{\eta+1} (v-u)^{\omega+\eta+1} \left(\int_0^1 \frac{1}{A_t^{(\omega+\eta+2)\vartheta}} d\theta \right)^{1/\vartheta} \left(\int_0^1 \theta^{\omega\zeta} (1-\theta)^{\eta\zeta} \left| w\left(\frac{uv}{A_t}\right) \right|^\zeta d\theta \right)^{1/\zeta} \\
& \leq \left(\frac{u}{v}\right)^{\omega+1} (v-u)^{\omega+\eta+1} {}_2F_1^{1/\vartheta} \left((\omega + \eta + 2)\vartheta, 1; 2; 1 - \frac{u}{v} \right) \\
& \times \left(\int_0^1 \theta^{\omega\zeta} (1-\theta)^{\eta\zeta} \left[\theta |w(v)|^\zeta + (1-\theta) |w(u)|^\zeta \right] d\theta \right)^{1/\zeta} \\
& \leq \left(\frac{u}{v}\right)^{\omega+1} (v-u)^{\omega+\eta+1} {}_2F_1^{1/\vartheta} \left((\omega + \eta + 2)\vartheta, 1; 2; 1 - \frac{u}{v} \right) \\
& \times \left[\beta(\omega\zeta + 1, \eta\zeta + 2) |w(u)|^\zeta + \beta(\omega\zeta + 2, \eta\zeta + 1) |w(v)|^\zeta \right]^{1/\zeta}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

eşitsizliği elde edilir. □

Sonuç 3.11. Teorem 3.10'da, $\omega = \eta$ alınırsa (3.8) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
& \int_u^v (\varkappa - u)^\omega (v - \varkappa)^\omega w(\varkappa) d\varkappa \\
& \leq \left(\frac{u}{v}\right)^{\omega+1} (v-u)^{2\omega+1} {}_2F_1^{1/\vartheta} \left(2(\omega + 1)\vartheta, 1; 2; 1 - \frac{u}{v} \right) \\
& \times \left[\beta(\omega\zeta + 1, \omega\zeta + 2) |w(u)|^\zeta + \beta(\omega\zeta + 2, \omega\zeta + 1) |w(v)|^\zeta \right]^{1/\zeta}
\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, mutlak değerinin belirli kuvvetleri p -konveks ve ikinci anlamda s - p -konveks olan fonksiyonlar sınıfı için $\int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa) d\varkappa$ ve $\int_u^v \frac{(\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa)}{\varkappa^{(\omega+\eta)p}} d\varkappa$ integrallerinin Euler Beta fonksiyonu ve Hipergeometrik fonksiyon içeren bazı teoremlere ve sonuçlara yer verilmiştir. Aşağıdaki lemmalar, p -konveks ve ikinci anlamda s - p -fonksiyonlarla ilgili bazı yeni integral eşitsizliklerinin bulunmasında kullanılacaktır.

Lemma 4.1. $w : [u, v] \subseteq [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, [u, v]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun.

$\omega, \eta > 0, p > 0$ ise

$$\begin{aligned} & \int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\ &= \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \int_0^1 \frac{(1-\theta)^\omega \theta^\eta w\left((\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{1/p}\right)}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \end{aligned} \quad (4.1)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $\varkappa = (\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{1/p}$ alınıp değişken dönüşümü yapılarak istenilen sonuç elde edilir. □

Sonuç 4.2. Lemma 4.1 'de $\omega = \eta$ alınırsa (4.1) eşitliği

$$\begin{aligned} & \int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\omega w(\varkappa) d\varkappa \\ &= \frac{(v^p - u^p)^{2\omega+1}}{p} \int_0^1 \frac{(1-\theta)^\omega \theta^\omega w\left((\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{1/p}\right)}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \end{aligned}$$

eşitliğine dönüşür.

Sonuç 4.3. Lemma 4.1 'de $p = 1$ alınırsa (4.1) eşitliği bilinen (bkz.[23],64)

$$\begin{aligned} & \int_u^v (\varkappa - u)^\omega (v - \varkappa)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\ &= (v - u)^{\omega+\eta+1} \int_0^1 (1 - \theta)^\omega \theta^\eta w((\theta u + (1 - \theta)v)) d\theta \end{aligned}$$

eşitliğe dönüşür.

Lemma 4.4. $w : [u, v] \subseteq [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $[u, v]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun.

$\omega, \eta > 0, p < 0$ ise

$$\begin{aligned} & \int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\ &= \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \int_0^1 \frac{\theta^\omega (1 - \theta)^\eta w\left((\theta v^p + (1 - \theta)u^p)^{1/p}\right)}{(\theta v^p + (1 - \theta)u^p)^{\frac{p-1}{p}}} d\theta \end{aligned} \quad (4.2)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $\varkappa = (\theta v^p + (1 - \theta)u^p)^{1/p}$ alınıp değişken dönüşümü yapılarak istenilen sonuç elde edilir. □

Sonuç 4.5. Lemma 4.4 'te $\omega = \eta$ alınırsa (4.2) eşitliği

$$\begin{aligned} & \int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\omega w(\varkappa) d\varkappa \\ &= \frac{(v^p - u^p)^{2\omega+1}}{p} \int_0^1 \frac{\theta^\omega (1 - \theta)^\omega w\left((\theta v^p + (1 - \theta)u^p)^{1/p}\right)}{(\theta v^p + (1 - \theta)u^p)^{\frac{p-1}{p}}} d\theta \end{aligned}$$

eşitliğine dönüşür.

Sonuç 4.6. Lemma 4.4 'te $p = -1$ alınırsa (4.2) eşitliği

$$\int_u^v \frac{(\varkappa - u)^\omega (v - \varkappa)^\eta w(\varkappa)}{\varkappa^{\omega+\eta}} d\varkappa = \frac{(u - v)^{\omega+\eta+1}}{u^{\eta-1} v^{\omega-1}} \int_0^1 \frac{\theta^\omega (1 - \theta)^\eta w\left(\frac{uv}{\theta u + (1 - \theta)v}\right)}{(\theta u + (1 - \theta)v)^2} d\theta$$

eşitliğine dönüşür.

Teorem 4.7. $w : [u, v] \subseteq [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $[u, v]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun.

$\omega, \eta > 0, p > 0$ olmak üzere $w, [u, v]$ aralığında p -konveks ise

$$\begin{aligned}
& \int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{pv^{p-1}} \left[w(u) \beta(\eta+2, \omega+1) {}_2F_1 \left(\frac{p-1}{p}, \eta+2; \eta+\omega+3; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \right. \\
& \quad \left. + w(v) \beta(\eta+1, \omega+2) {}_2F_1 \left(\frac{p-1}{p}, \eta+1; \eta+\omega+3; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.3}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Her $\theta \in [0, 1]$ için $w, [u, v]$ 'de p -konveks olmak üzere Lemma 4.1 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\
& = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \int_0^1 \frac{(1-\theta)^\omega \theta^\eta w((\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{1/p})}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \int_0^1 \frac{(1-\theta)^\omega \theta^\eta [\theta w(u) + (1-\theta)w(v)]}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \\
& = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \int_0^1 \frac{(1-\theta)^\omega \theta^\eta [\theta w(u) + (1-\theta)w(v)]}{(v^p (1 - (1 - \frac{u^p}{v^p}) \theta))^{\frac{p-1}{p}}} d\theta \\
& = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left[w(u) \int_0^1 \frac{(1-\theta)^\omega \theta^{\eta+1}}{v^{p-1} (1 - (1 - \frac{u^p}{v^p}) \theta)^{\frac{p-1}{p}}} d\theta \right. \\
& \quad \left. + w(v) \int_0^1 \frac{(1-\theta)^{\omega+1} \theta^\eta}{v^{p-1} (1 - (1 - \frac{u^p}{v^p}) \theta)^{\frac{p-1}{p}}} d\theta \right] \\
& = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{pv^{p-1}} \left[w(u) \int_0^1 \frac{(1-\theta)^\omega \theta^{\eta+1}}{(1 - (1 - \frac{u^p}{v^p}) \theta)^{\frac{p-1}{p}}} d\theta \right. \\
& \quad \left. + w(v) \int_0^1 \frac{(1-\theta)^{\omega+1} \theta^\eta}{(1 - (1 - \frac{u^p}{v^p}) \theta)^{\frac{p-1}{p}}} d\theta \right]
\end{aligned} \tag{4.4}$$

eşitsizliği elde edilir.

$$\int_0^1 \frac{(1-\theta)^\omega \theta^{\eta+1}}{\left(1 - \left(1 - \frac{u^p}{v^p}\right)\right)^{\frac{p-1}{p}}} d\theta = \beta(\eta+2, \omega+1) {}_2F_1\left(\frac{p-1}{p}, \eta+2, \eta+\omega+3; 1 - \frac{u^p}{v^p}\right) \quad (4.5)$$

ve

$$\int_0^1 \frac{(1-\theta)^{\omega+1} \theta^\eta}{\left(1 - \left(1 - \frac{u^p}{v^p}\right)\right)^{\frac{p-1}{p}}} d\theta = \beta(\eta+1, \omega+2) {}_2F_1\left(\frac{p-1}{p}, \eta+1, \eta+\omega+3; 1 - \frac{u^p}{v^p}\right) \quad (4.6)$$

(4.5) ve (4.6) eşitlikleri (4.4)'de yerine yazılarak gerekli sonuç elde edilir ve ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 4.8. Teorem 4.7'de $\omega = \eta$ alınırsa (4.3) eşitsizliği

$$\begin{aligned} & \int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\omega w(\varkappa) d\varkappa \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{2\omega+1}}{pv^{p-1}} \left[w(u) \beta(\omega+2, \omega+1) {}_2F_1\left(\frac{p-1}{p}, \omega+2, 2\omega+3; 1 - \frac{u^p}{v^p}\right) \right. \\ & \quad \left. + w(v) \beta(\omega+1, \omega+2) {}_2F_1\left(\frac{p-1}{p}, \omega+1, 2\omega+3; 1 - \frac{u^p}{v^p}\right) \right] \end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.9. Teorem 4.7'de $p = 1$ alınırsa (4.3) eşitsizliği

$$\int_u^v (\varkappa - u)^\omega (v - \varkappa)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \leq (v - u)^{\omega+\eta+1} [w(u) \beta(\eta+2, \omega+1) + w(v) \beta(\eta+1, \omega+2)]$$

eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 4.10. $w : [u, v] \subseteq [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $[u, v]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun.

$\omega, \eta > 0, p < 0$ olmak üzere $w, [u, v]$ aralığında p -konveks ise

$$\begin{aligned} & \int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \quad (4.7) \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{pu^{p-1}} \left[w(v) \beta(\omega+2, \eta+1) {}_2F_1\left(\frac{p-1}{p}, \omega+2; \eta+\omega+3; 1 - \frac{v^p}{u^p}\right) \right. \\ & \quad \left. + w(u) \beta(\omega+1, \eta+2) {}_2F_1\left(\frac{p-1}{p}, \omega+1; \eta+\omega+3; 1 - \frac{v^p}{u^p}\right) \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Her $\theta \in [0, 1]$ için w , $[u, v]$ 'de p -konveks olmak üzere Lemma 4.4 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\
&= \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^\eta w\left((\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{1/p}\right)}{(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \\
&\leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^\eta [\theta w(v) + (1-\theta)w(u)]}{(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \\
&= \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^\eta [\theta w(v) + (1-\theta)w(u)]}{\left(u^p \left(1 - \left(1 - \frac{v^p}{u^p}\right) \theta\right)\right)^{\frac{p-1}{p}}} d\theta \\
&= \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left[w(v) \int_0^1 \frac{\theta^{\omega+1} (1-\theta)^\eta}{\left(u^p \left(1 - \left(1 - \frac{v^p}{u^p}\right) \theta\right)\right)^{\frac{p-1}{p}}} d\theta \right. \\
&\quad \left. + w(u) \int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^{\eta+1}}{(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \right] \\
&= \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{pu^{p-1}} \left[w(v) \int_0^1 \frac{\theta^{\omega+1} (1-\theta)^\eta}{\left(1 - \left(1 - \frac{v^p}{u^p}\right) \theta\right)^{\frac{p-1}{p}}} d\theta \right. \\
&\quad \left. + w(u) \int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^{\eta+1}}{\left(1 - \left(1 - \frac{v^p}{u^p}\right) \theta\right)^{\frac{p-1}{p}}} d\theta \right] \tag{4.8}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

$$\int_0^1 \frac{\theta^{\omega+1} (1-\theta)^\eta}{\left(1 - \left(1 - \frac{v^p}{u^p}\right) \theta\right)^{\frac{p-1}{p}}} d\theta = \beta(\omega+2, \eta+1) {}_2F_1\left(\frac{p-1}{p}, \omega+2, \eta+\omega+3; 1 - \frac{v^p}{u^p}\right), \tag{4.9}$$

ve

$$\int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^{\eta+1}}{\left(1 - \left(1 - \frac{v^p}{u^p}\right) \theta\right)^{\frac{p-1}{p}}} d\theta = \beta(\omega+1, \eta+2) {}_2F_1\left(\frac{p-1}{p}, \omega+1, \eta+\omega+3; 1 - \frac{v^p}{u^p}\right) \tag{4.10}$$

olmak üzere (4.9) ve (4.10) eşitlikleri (4.8)'de yerine yazılarak gerekli sonuç elde edilir.

İspat tamamlanır. $\square$

Sonuç 4.11. Teorem 4.10’da $\omega = \eta$ alınırsa (4.7) eşitsizliği

$$\begin{aligned} & \int_u^v (\mathcal{K}^p - u^p)^\omega (v^p - \mathcal{K}^p)^\omega w(\mathcal{K}) d\mathcal{K} \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{2\omega+1}}{pu^{p-1}} \left[w(v) \beta(\omega+2, \omega+1) {}_2F_1 \left(\frac{p-1}{p}, \omega+2, 2\omega+3; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \right. \\ & \quad \left. + w(u) \beta(\omega+1, \omega+2) {}_2F_1 \left(\frac{p-1}{p}, \omega+1, 2\omega+3; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \right] \end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.12. Teorem 4.10’da $p = -1$ alınırsa (4.7) eşitsizliği

$$\begin{aligned} & \int_u^v \frac{(\mathcal{K} - u)^\omega (v - \mathcal{K})^\eta w(\mathcal{K})}{\mathcal{K}^{\omega+\eta}} d\mathcal{K} \\ & \leq \frac{(u - v)^{\omega+\eta+1}}{u^{\eta-1} v^{\omega+1}} \left[w(v) \beta(\omega+2, \eta+1) {}_2F_1 \left(2, \omega+2, \eta + \omega + 3; 1 - \frac{u}{v} \right) \right. \\ & \quad \left. + w(u) \beta(\omega+1, \eta+2) {}_2F_1 \left(2, \omega+1, \eta + \omega + 3; 1 - \frac{u}{v} \right) \right] \end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 4.13. $w : [u, v] \subseteq [0, \infty) \rightarrow R$ sürekli bir fonksiyon ve $\zeta \geq 1$ olmak üzere eğer

$|w|^\zeta, [u, v]$ üzerinde p – konveks ve $\omega, \eta > 0, p > 0$ ise

$$\begin{aligned} & \int_u^v (\mathcal{K}^p - u^p)^\omega (v^p - \mathcal{K}^p)^\eta w(\mathcal{K}) d\mathcal{K} \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{pv^{p-1}} \left(\beta(\eta+1, \omega+1) {}_2F_1 \left(\frac{p-1}{p}, \eta+1, \omega + \eta + 2; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \right)^{1-\frac{1}{\zeta}} \\ & \quad \times \left[|w(u)|^\zeta \beta(\eta+2, \omega+1) {}_2F_1 \left(\frac{p-1}{p}, \eta+2, \eta + \omega + 3; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \right. \\ & \quad \left. + |w(v)|^\zeta \beta(\eta+1, \omega+2) {}_2F_1 \left(\frac{p-1}{p}, \eta+1, \eta + \omega + 3; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \right]^{\frac{1}{\zeta}} \end{aligned} \tag{4.11}$$

eşitsizliği sağlar.

İspat. $|w|^\zeta, [u, v]$ Üzerinde p – konveks olduğundan , her $\theta \in [0, 1]$ için Lemma 4.1 ve power mean integral eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \int_0^1 \frac{(1-\theta)^\omega \theta^\eta \left| w \left((\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{1/p} \right) \right|}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{(1-\theta)^\omega \theta^\eta}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \right)^{1-\frac{1}{\zeta}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \frac{(1-\theta)^\omega \theta^\eta \left| w \left((\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{1/p} \right) \right|^\zeta}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{(1-\theta)^\omega \theta^\eta}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \right)^{1-\frac{1}{\zeta}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \frac{(1-\theta)^\omega \theta^\eta \left(\theta |w(u)|^\zeta + (1-\theta) |w(v)|^\zeta \right)}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{(1-\theta)^\omega \theta^\eta}{v^{p-1} \left(1 - \left(1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \theta \right)^{\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \right)^{1-\frac{1}{\zeta}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \frac{(1-\theta)^\omega \theta^\eta \left(\theta |w(u)|^\zeta + (1-\theta) |w(v)|^\zeta \right)}{v^{p-1} \left(1 - \left(1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \theta \right)^{\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p v^{p-1}} \left(\beta(\eta+1, \omega+1) F_1 \left(\frac{p-1}{p}, \eta+1, \omega+\eta+2; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \right)^{1-\frac{1}{\zeta}} \\
& \quad \times \left[|w(u)|^\zeta \beta(\eta+2, \omega+1) {}_2F_1 \left(\frac{p-1}{p}, \eta+2, \eta+\omega+3; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \right. \\
& \quad \left. + |w(v)|^\zeta \beta(\eta+1, \omega+2) {}_2F_1 \left(\frac{p-1}{p}, \eta+1, \eta+\omega+3; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \right]^{\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 4.14. Teorem 4.13'te $\omega = \eta$ alınırsa (4.11) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
& \int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\omega w(\varkappa) d\varkappa \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{2\omega+1}}{p v^{p-1}} \left(\beta(\omega+1, \omega+1) F_1 \left(\frac{p-1}{p}, \omega+1, 2\omega+2; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \right)^{1-\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \beta(\omega + 2, \omega + 1) \left[|w(u)|^\zeta {}_2F_1 \left(\frac{p-1}{p}, \omega + 2, 2\omega + 3; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \right. \\ & \left. + |w(v)|^\zeta {}_2F_1 \left(\frac{p-1}{p}, \omega + 1, 2\omega + 3; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \right]^{\frac{1}{\zeta}} \end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.15. Teorem 4.13'te $p = 1$ alınırsa (4.11) eşitsizliği

$$\begin{aligned} & \int_u^v (\varkappa - u)^\omega (v - \varkappa)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\ & \leq (v - u)^{\omega + \eta + 1} \beta(\eta + 1, \omega + 1)^{1 - \frac{1}{\zeta}} \left[|w(u)|^\zeta \beta(\eta + 2, \omega + 1) \right. \\ & \left. + |w(v)|^\zeta \beta(\eta + 1, \omega + 2) \right]^{\frac{1}{\zeta}} \end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 4.16. $w : [u, v] \subseteq [0, \infty) \rightarrow R$ sürekli bir fonksiyon ve $\zeta \geq 1$ olmak üzere eğer

$|w|^\zeta, [u, v]$ üzerinde p -konveks ve $\omega, \eta > 0, p < 0$ ise

$$\begin{aligned} & \int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega + \eta + 1}}{pu^{p-1}} \left(\beta(\omega + 1, \eta + 1) {}_2F_1 \left(\frac{p-1}{p}, \omega + 1, \omega + \eta + 2; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \right)^{1 - \frac{1}{\zeta}} \\ & \times \left[|w(v)|^\zeta \beta(\omega + 2, \eta + 1) {}_2F_1 \left(\frac{p-1}{p}, \omega + 2, \omega + \eta + 3; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \right. \\ & \left. + |w(u)|^\zeta \beta(\omega + 1, \eta + 2) {}_2F_1 \left(\frac{p-1}{p}, \omega + 1, \omega + \eta + 3; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \right]^{\frac{1}{\zeta}} \end{aligned} \quad (4.12)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $|w|^\zeta, [u, v]$ Üzerinde p -konveks olduğundan, her $\theta \in [0, 1]$ için Lemma 4.4 ve

power mean integral eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega + \eta + 1}}{p} \int_0^1 \frac{\theta^\omega (1 - \theta)^\eta |w((\theta v^p + (1 - \theta)u^p)^{1/p})|}{(\theta v^p + (1 - \theta)u^p)^{\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^\eta}{(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \right)^{1-\frac{1}{\zeta}} \\
&\quad \times \left(\int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^\eta |w((\theta v^p + (1-\theta)u^p))|^\zeta}{(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
&\leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^\eta}{(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \right)^{1-\frac{1}{\zeta}} \\
&\quad \times \left(\int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^\eta \left(\theta |w(v)|^\zeta + (1-\theta) |w(u)|^\zeta \right)}{(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
&= \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^\eta}{u^{p-1} \left(1 - \left(1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \theta \right)^{\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \right)^{1-\frac{1}{\zeta}} \\
&\quad \times \left(\int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^\eta \left(\theta |w(v)|^\zeta + (1-\theta) |w(u)|^\zeta \right)}{u^{p-1} \left(1 - \left(1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \theta \right)^{\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
&= \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p u^{p-1}} \left(\beta(\omega+1, \eta+1) {}_2F_1 \left(\frac{p-1}{p}, \omega+1, \omega+\eta+2; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \right)^{1-\frac{1}{\zeta}} \\
&\quad \times \left[|w(v)|^\zeta \beta(\omega+2, \eta+1) {}_2F_1 \left(\frac{p-1}{p}, \omega+2, \omega+\eta+3; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \right. \\
&\quad \left. + |w(u)|^\zeta \beta(\omega+1, \eta+2) {}_2F_1 \left(\frac{p-1}{p}, \omega+1, \omega+\eta+3; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \right]^{\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 4.17. Teorem 4.16’da $p = -1$ alınrsa (4.12) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
&\int_u^v \frac{(\varkappa - u)^\omega (v - \varkappa)^\eta w(\varkappa)}{\varkappa^{\omega+\eta}} d\varkappa \\
&\leq \frac{(u-v)^{\omega+\eta+1}}{u^{\eta-1} v^{\omega+1}} \left(\beta(\omega+1, \eta+1) F_1 \left(2, \omega+1; \omega+\eta+2; 1 - \frac{v}{u} \right) \right)^{1-\frac{1}{\zeta}} \\
&\quad \times \left[|w(v)|^\zeta \beta(\omega+2, \eta+1) {}_2F_1 \left(2, \omega+2; \omega+\eta+3; 1 - \frac{v}{u} \right) \right. \\
&\quad \left. + |w(u)|^\zeta \beta(\omega+1, \eta+2) {}_2F_1 \left(2, \omega+1; \omega+\eta+3; 1 - \frac{v}{u} \right) \right]^{\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.18. Teorem 4.16’da $\omega = \eta$ alınırsa (4.12) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
& \int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\omega w(\varkappa) d\varkappa \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{2\omega}}{pu^{p-1}} \left(\beta(\omega + 1, \omega + 1) F_1 \left(\frac{p-1}{p}, \omega + 1; 2\omega + 2; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \right)^{1 - \frac{1}{\zeta}} \\
& \quad \times \left[|w(v)|^\zeta \beta(\omega + 2, \omega + 1) {}_2F_1 \left(\frac{p-1}{p}, \omega + 2; 2\omega + 3; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \right. \\
& \quad \left. + |w(u)|^\zeta \beta(\omega + 1, \omega + 2) {}_2F_1 \left(\frac{p-1}{p}, \omega + 1; 2\omega + 3; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \right]^{\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 4.19. $w : [u, v] \subseteq [0, \infty) \rightarrow R$ sürekli bir fonksiyon ve $\vartheta, \zeta > 1$ olmak üzere eğer

$|w|^\zeta, [u, v]$ üzerinde p -konveks ve $\omega, \eta > 0, p > 0$ ise

$$\begin{aligned}
& \int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega + \eta + 1}}{pv^{p-1}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}}(\vartheta\eta + 1, \omega\vartheta + 1) \\
& \quad \times {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\left(\frac{p-1}{p} \right) \vartheta, \eta\vartheta + 1; (\omega + \eta)\vartheta + 2; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \left(\frac{|w(u)|^\zeta + |w(v)|^\zeta}{2} \right)^{1/\zeta}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikte $1/\zeta + 1/\vartheta = 1$ ’dir.

İspat. Lemma 4.1’i ve $|w|^\zeta$ ’nin p -konveksliğini Hölder integral eşitsizliği ile kullanarak

$$\begin{aligned}
& \int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega + \eta + 1}}{p} \int_0^1 \frac{(1 - \theta)^\omega \theta^\eta}{(\theta u^p + (1 - \theta)v^p)^{\frac{(p-1)}{p}}} \left| w \left((\theta u^p + (1 - \theta)v^p)^{1/p} \right) \right| d\theta \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega + \eta + 1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{(1 - \theta)^{\omega\vartheta} \theta^{\eta\vartheta}}{(\theta u^p + (1 - \theta)v^p)^{\frac{(p-1)\vartheta}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \left| w \left((\theta u^p + (1 - \theta)v^p)^{1/p} \right) \right|^\zeta d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{(1-\theta)^{\omega\vartheta} \theta^{\eta\vartheta}}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\frac{(p-1)\vartheta}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\
&\times \left(\int_0^1 \left(\theta |w(u)|^\zeta + (1-\theta) |w(v)|^\zeta \right) d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
&= \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{(1-\theta)^{\omega\vartheta} \theta^{\eta\vartheta}}{v^{(p-1)\vartheta} \left(1 - \left(1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \theta \right)^{\frac{(p-1)\vartheta}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\
&\times \left(\int_0^1 \left(\theta |w(u)|^\zeta + (1-\theta) |w(v)|^\zeta \right) d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
&= \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p v^{p-1}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}} (\eta\vartheta + 1, \omega\vartheta + 1) \\
&\times {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\left(\frac{p-1}{p} \right) \vartheta, \eta\vartheta + 1, (\omega + \eta)\vartheta + 2; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \left(\frac{|w(u)|^\zeta + |w(v)|^\zeta}{2} \right)^{1/\zeta}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. İspat tamamlanır. $\square$

Sonuç 4.20. Teorem 4.19’da $\omega = \eta$ alınırsa (4.13) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
&\int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\omega w(\varkappa) d\varkappa \\
&\leq \frac{(v^p - u^p)^{2\omega+1}}{p v^{p-1}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}} (\omega\vartheta + 1, \omega\vartheta + 1) {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\left(\frac{p-1}{p} \right) \vartheta, \omega\vartheta + 1, 2\omega\vartheta + 2; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \\
&\times \left(\frac{|w(u)|^\zeta + |w(v)|^\zeta}{2} \right)^{1/\zeta}
\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.21. Teorem 4.19’da $p = 1$ ise (4.13) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
&\int_u^v (\varkappa - u)^\omega (v - \varkappa)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\
&\leq (v - u)^{\omega+\eta+1} \beta^{\frac{1}{\vartheta}} (\eta\vartheta + 1, \omega\vartheta + 1) \left(\frac{|w(u)|^\zeta + |w(v)|^\zeta}{2} \right)^{1/\zeta}
\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 4.22. $w : [u, v] \subseteq [0, \infty) \rightarrow R$ sürekli bir fonksiyon ve $\vartheta, \zeta > 1$ olmak üzere eğer

$|w|^\zeta, [u, v]$ üzerinde p konveks ve $\omega, \eta > 0, p < 0$ ise

$$\begin{aligned} & \int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p v^{p-1}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}}(\omega\vartheta + 1, \eta\vartheta + 1) \\ & \times {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}}\left(\left(\frac{p-1}{p}\right)\vartheta, \omega\vartheta + 1, (\omega + \eta)\vartheta + 2; 1 - \frac{v^p}{u^p}\right) \left(\frac{|w(v)|^\zeta + |w(u)|^\zeta}{2}\right)^{1/\zeta} \end{aligned} \quad (4.14)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikte $1/\zeta + 1/\vartheta = 1$ 'dir.

İspat. $|w|^\zeta, [u, v]$ aralığında p -konveks olduğundan, her $\theta \in [0, 1]$ için Lemma 4.4 ve Hölder integral eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^\eta}{(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{\frac{(p-1)\vartheta}{p}}} \left| w\left((\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{1/p}\right) \right| d\theta \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{\theta^{\omega\vartheta} (1-\theta)^{\eta\vartheta}}{(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{\frac{(p-1)\vartheta}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\ & \times \left(\int_0^1 \left| w\left((\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{1/p}\right) \right|^\zeta d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{\theta^{\omega\vartheta} (1-\theta)^{\eta\vartheta}}{(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{\frac{(p-1)\vartheta}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\ & \times \left(\int_0^1 \left(\theta |w(v)|^\zeta + (1-\theta) |w(u)|^\zeta \right) d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\ & = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{\theta^{\omega\vartheta} (1-\theta)^{\eta\vartheta}}{u^{(p-1)\vartheta} \left(1 - \left(1 - \frac{v^p}{u^p}\right)\theta\right)^{\frac{(p-1)\vartheta}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\ & \times \left(\int_0^1 \left(\theta |w(v)|^\zeta + (1-\theta) |w(u)|^\zeta \right) d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p u^{p-1}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}}(\omega\vartheta+1, \eta\vartheta+1) \\
&\times {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}}\left(\left(\frac{p-1}{p}\right)\vartheta, \omega\vartheta+1, (\omega+\eta)\vartheta+2; 1 - \frac{v^p}{u^p}\right) \left(\frac{|w(v)|^\zeta + |w(u)|^\zeta}{2}\right)^{1/\zeta}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. İspat tamamlanır. $\square$

Sonuç 4.23. Teorem 4.22’de $\omega = \eta$ alınırsa (4.14) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
&\int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\omega w(\varkappa) d\varkappa \\
&\leq \frac{(v^p - u^p)^{2\omega}}{p v^{p-1}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}}(\omega\vartheta+1, \omega\vartheta+1) {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}}\left(\left(\frac{p-1}{p}\right)\vartheta, \omega\vartheta+1, 2\omega\vartheta+2; 1 - \frac{v^p}{u^p}\right) \\
&\times \left(\frac{|w(v)|^\zeta + |w(u)|^\zeta}{2}\right)^{1/\zeta}
\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.24. Teorem 4.22’de $p = -1$ alınırsa (4.14) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
&\int_u^v \frac{(\varkappa - u)^\omega (v - \varkappa)^\eta w(\varkappa)}{\varkappa^{\omega+\eta}} d\varkappa \\
&\leq \frac{(u - v)^{\omega+\eta+1}}{u^{\eta-1} v^{\omega+1}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}}(\omega\vartheta+1, \eta\vartheta+1) {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}}\left(2\vartheta, \omega\vartheta+1, (\omega+\eta)\vartheta+2; 1 - \frac{u}{v}\right) \\
&\times \left(\frac{|w(v)|^\zeta + |w(u)|^\zeta}{2}\right)^{1/\zeta}
\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 4.25. $w : [u, v] \subseteq [0, \infty) \rightarrow R$ sürekli bir fonksiyon ve $\zeta > 1$ olmak üzere eğer

$|w|^\zeta, [u, v]$ üzerinde p -konveks ve $\omega, \eta > 0, p > 0$ ise

$$\begin{aligned}
&\int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\
&\leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p v^{p-1}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}}(\eta\vartheta+1, \omega\vartheta+1) \left[{}_2F_1\left(\left(\frac{p-1}{p}\right)\zeta, 2; 3; 1 - \frac{u^p}{v^p}\right) \frac{|w(u)|^\zeta}{2} \right. \\
&\left. + {}_2F_1\left(\omega + \eta + \frac{(p-1)}{p}\zeta, 1; 3; 1 - \frac{u^p}{v^p}\right) \frac{|w(v)|^\zeta}{2} \right]^{\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikte $1/\zeta + 1/\vartheta = 1$ 'dir.

İspat. $|w|^\zeta, [u, v]$ aralığında p -konveks olduğunda, her $\theta \in [0, 1]$ için Lemma 4.1 ve Hölder integral eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \int_0^1 \frac{(1-\theta)^\omega \theta^\eta}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\frac{(p-1)}{p}}} \left| w((\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{1/p}) \right| d\theta \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 (1-\theta)^{\omega\vartheta} \theta^{\eta\vartheta} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \frac{1}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\frac{(p-1)\zeta}{p}}} \left| w(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{1/p} \right|^\zeta d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 (1-\theta)^{\omega\vartheta} \theta^{\eta\vartheta} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\int_0^1 \frac{(\theta |w(u)|^\zeta + (1-\theta)|w(v)|^\zeta)}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\frac{(p-1)\zeta}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 (1-\theta)^{\omega\vartheta} \theta^{\eta\vartheta} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\int_0^1 \frac{(\theta |w(u)|^\zeta + (1-\theta)|w(v)|^\zeta)}{v^{(p-1)\zeta} (1 - (1 - \frac{u^p}{v^p})\theta)^{\frac{(p-1)\zeta}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{pv^{p-1}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}} (\eta\vartheta + 1, \omega\vartheta + 1) \left[{}_2F_1 \left(\left(\frac{p-1}{p} \right) \zeta, 2; 3; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \frac{|w(u)|^\zeta}{2} \right. \\
& \quad \left. + {}_2F_1 \left(\omega + \eta + \frac{(p-1)}{p} \zeta, 1; 3; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \frac{|w(v)|^\zeta}{2} \right]^{\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 4.26. Teorem 4.25'te $\omega = \eta$ alınırsa (4.15) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
& \int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\omega w(\varkappa) dx \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{2\omega+1}}{pv^{p-1}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}} (\omega\vartheta + 1, \omega\vartheta + 1) \left[{}_2F_1 \left(\frac{(p-1)\zeta}{p}, 2; 3; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \frac{|w(u)|^\zeta}{2} \right. \\
& \quad \left. + {}_2F_1 \left(\frac{(p-1)\zeta}{p}, 1; 3; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \frac{|w(v)|^\zeta}{2} \right]^{\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.27. Teorem 4.25'te $p = 1$ alınırsa (4.15) eşitsizliği

$$\begin{aligned} & \int_u^v (\varkappa - u)^\omega (v - \varkappa)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\ & \leq (v - u)^{\omega+\eta+1} \beta^{\frac{1}{\vartheta}} (\eta \vartheta + 1, \omega \vartheta + 1) \left[\frac{|w(u)|^\zeta + |w(v)|^\zeta}{2} \right] \end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 4.28. $w : [u, v] \subseteq [0, \infty) \rightarrow R$ sürekli bir fonksiyon ve $\zeta > 1$ olmak üzere eğer

$|w|^\zeta, [u, v]$ üzerinde p -konveks ve $\omega, \eta > 0, p < 0$ ise

$$\begin{aligned} & \int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p u^{p-1}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}} (\omega \vartheta + 1, \eta \vartheta + 1) \left[{}_2F_1 \left(\left(\frac{p-1}{p} \right) \zeta, 2; 3; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \frac{|w(v)|^\zeta}{2} \right. \\ & \quad \left. + {}_2F_1 \left(\left(\frac{p-1}{p} \right) \zeta, 1; 3; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \frac{|w(u)|^\zeta}{2} \right]^{\frac{1}{\zeta}} \end{aligned} \quad (4.16)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikte $1/\zeta + 1/\vartheta = 1$ 'dir

İspat. $|w|^\zeta, [u, v]$ aralığında p -konveks olduğundan, her $\theta \in [0, 1]$ için Lemma 4.4 ve

Hölder integral eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^\eta}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\frac{(p-1)}{p}}} \left| w \left((\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{1/p} \right) \right| d\theta \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \theta^{\omega \vartheta} (1-\theta)^{\eta \vartheta} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\ & \quad \times \left(\int_0^1 \frac{1}{(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{\frac{(p-1)\zeta}{p}}} \left| w(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{1/p} \right|^\zeta d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\ & = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \theta^{\omega \vartheta} (1-\theta)^{\eta \vartheta} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\int_0^1 \frac{(\theta |w(v)|^\zeta + (1-\theta) |w(u)|^\zeta)}{(\theta v^p + (1-\theta) u^p)^{\frac{(p-1)\zeta}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \theta^{\omega\vartheta} (1-\theta)^{\eta\vartheta} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\
& \times \left(\int_0^1 \frac{(\theta |w(v)|^\zeta + (1-\theta) |w(u)|^\zeta)}{u^{(p-1)\zeta} \left(1 - \left(1 - \frac{v^p}{u^p}\right) \theta\right)^{\frac{(p-1)\zeta}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p u^{p-1}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}}(\omega\vartheta + 1, \eta\vartheta + 1) \left[{}_2F_1 \left(\frac{(p-1)\zeta}{p}, 2; 3; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \frac{|w(v)|^\zeta}{2} \right. \\
& \quad \left. + {}_2F_1 \left(\frac{(p-1)\zeta}{p}, 1; 3; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \frac{|w(u)|^\zeta}{2} \right]^{\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 4.29. Teorem 4.28’de $\omega = \eta$ ise (4.16) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
& \int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\omega w(\varkappa) d\varkappa \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{2\omega+1}}{p u^{p-1}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}}(\omega\vartheta + 1, \omega\vartheta + 1) \left[{}_2F_1 \left(\frac{(p-1)\zeta}{p}, 2; 3; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \frac{|w(v)|^\zeta}{2} \right. \\
& \quad \left. + {}_2F_1 \left(\frac{(p-1)\zeta}{p}, 1; 3; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \frac{|w(u)|^\zeta}{2} \right]^{\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.30. Teorem 4.28’de $p = -1$ ise (4.16) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
& \int_u^v \frac{(\varkappa - u)^\omega (v - \varkappa)^\eta w(\varkappa)}{\varkappa^{\omega+\eta}} d\varkappa \\
& \leq \frac{(u - v)^{\omega+\eta+1}}{u^{\eta-1} v^{\omega+1}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}}(\omega\vartheta + 1, \eta\vartheta + 1) \left[{}_2F_1 \left(2\zeta, 2; 3; 1 - \frac{u}{v} \right) \frac{|w(v)|^\zeta}{2} \right. \\
& \quad \left. + {}_2F_1 \left(2\zeta, 1; 3; 1 - \frac{u}{v} \right) \frac{|w(u)|^\zeta}{2} \right]^{\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 4.31. $w : [u, v] \subseteq [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $\zeta > 1$ olmak üzere eğer

$|w|^\zeta, [u, v]$ üzerinde p -konveks ve $\omega, \eta > 0, p > 0$ ise

$$\begin{aligned} & \int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{pv^{p-1}} {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\frac{p-1}{p} \vartheta, 1, 2; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \left[\beta(\eta\zeta + 2, \omega\zeta + 1) |w(u)|^\zeta \right. \\ & \quad \left. + \beta(\eta\zeta + 1, \omega\zeta + 2) |w(v)|^\zeta \right]^{\frac{1}{\zeta}} \end{aligned} \quad (4.17)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikte $1/\zeta + 1/\vartheta = 1$ 'dir.

İspat. $|w|^\zeta, [u, v]$ aralığında p -konveks olduğundan, her $\theta \in [0, 1]$ için Lemma 4.1 ve

Hölder integral eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \int_0^1 \frac{(1-\theta)^\omega \theta^\eta}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\frac{(p-1)\vartheta}{p}}} \left| w \left((\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{1/p} \right) \right| d\theta \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{1}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\frac{(p-1)\vartheta}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\ & \quad \times \left(\int_0^1 (1-\theta)^{\omega\zeta} \theta^{\eta\zeta} \left| w \left((\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{1/p} \right) \right|^\zeta d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{1}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\frac{(p-1)\vartheta}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\ & \quad \times \left(\int_0^1 (1-\theta)^{\omega\zeta} \theta^{\eta\zeta} \left(\theta |w(u)|^\zeta + (1-\theta) |w(v)|^\zeta \right) d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\ & = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{1}{v^{(p-1)\vartheta} \left(1 - \left(1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \theta \right)^{\frac{(p-1)\vartheta}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\ & \quad \times \left(\int_0^1 (1-\theta)^{\omega\zeta} \theta^{\eta\zeta} \left(\theta |w(u)|^\zeta + (1-\theta) |w(v)|^\zeta \right) d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\ & = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{pv^{p-1}} {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\frac{(p-1)\vartheta}{p}, 1, 2; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \\ & \quad \times \left[\beta(\eta\zeta + 2, \omega\zeta + 1) |w(u)|^\zeta + \beta(\eta\zeta + 1, \omega\zeta + 2) |w(v)|^\zeta \right]^{\frac{1}{\zeta}} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. İspat tamamlanır. $\square$

Sonuç 4.32. Teorem 4.31’de $\omega = \eta$ alınırsa (4.17) eşitsizliği

$$\begin{aligned} & \int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\omega w(\varkappa) d\varkappa \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{2\omega+1}}{pv^{p-1}} {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\frac{(p-1)\vartheta}{p}, 1, 2; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \left[\beta(\omega\zeta + 2, \omega\zeta + 1) \left(|w(u)|^\zeta + |w(v)|^\zeta \right) \right]^{\frac{1}{\zeta}} \end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.33. Teorem 4.31’de $p = 1$ alınırsa (4.17) eşitsizliği

$$\begin{aligned} & \int_u^v (\varkappa - u)^\omega (v - \varkappa)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\ & \leq (v - u)^{\omega+\eta+1} \left[\beta(\eta\zeta + 2, \omega\zeta + 1) |w(u)|^\zeta + \beta(\eta\zeta + 1, \omega\zeta + 2) |w(v)|^\zeta \right]^{\frac{1}{\zeta}} \end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 4.34. $w : [u, v] \subseteq [0, \infty) \rightarrow R$ sürekli bir fonksiyon ve $\zeta > 1$ olmak üzere eğer $|w|^\zeta, [u, v]$ üzerinde p -konveks ve $\omega, \eta > 0, p < 0$ ise

$$\begin{aligned} & \int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{pu^{p-1}} {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\frac{(p-1)\vartheta}{p}, 1, 2; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \left[\beta(\omega\zeta + 2, \eta\zeta + 1) |w(v)|^\zeta \right. \\ & \quad \left. + \beta(\omega\zeta + 1, \eta\zeta + 2) |w(u)|^\zeta \right]^{\frac{1}{\zeta}} \end{aligned} \tag{4.18}$$

eşitsizliği elde edilir: Bu eşitsizlikte $1/\zeta + 1/\vartheta = 1$ ’dir.

İspat. $|w|^\zeta, [u, v]$ aralığında p -konveks olduğundan, her $\theta \in [0, 1]$ için Lemma 4.4 ve

Hölder integral eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^\eta}{(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{\frac{(p-1)}{p}}} \left| w \left((\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{1/p} \right) \right| d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{1}{(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{\frac{(p-1)\vartheta}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\
&\times \left(\int_0^1 \theta^{\omega\zeta} (1-\theta)^{\eta\zeta} \left| w \left((\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{1/p} \right) \right|^\zeta d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
&\leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{1}{(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{\frac{(p-1)\vartheta}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\
&\times \left(\int_0^1 \theta^{\omega\zeta} (1-\theta)^{\eta\zeta} \left(\theta |w(v)|^\zeta + (1-\theta) |w(u)|^\zeta \right) d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
&= \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{1}{u^{(p-1)\vartheta} \left(1 - \left(1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \theta \right)^{\frac{(p-1)\vartheta}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\
&\times \left(\int_0^1 \theta^{\omega\zeta} (1-\theta)^{\eta\zeta} \left(\theta |w(v)|^\zeta + (1-\theta) |w(u)|^\zeta \right) d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
&= \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p u^{p-1}} {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\frac{p-1}{p} \vartheta, 1; 2; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \\
&\times \left[\beta(\omega\zeta + 2, \eta\zeta + 1) |w(v)|^\zeta + \beta(\omega\zeta + 1, \eta\zeta + 2) |w(u)|^\zeta \right]^{\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. İspat tamamlanır. $\square$

Sonuç 4.35. Teorem 4.34'te $\omega = \eta$ alınırsa (4.18) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
&\int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\omega w(\varkappa) d\varkappa \\
&\leq \frac{(v^p - u^p)^{2\omega+1}}{p u^{p-1}} {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\frac{(p-1)\vartheta}{p}, 1; 2; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \left[\beta(\omega\zeta + 2, \omega\zeta + 1) |w(v)|^\zeta \right. \\
&\quad \left. + \beta(\omega\zeta + 1, \eta\zeta + 2) |w(u)|^\zeta \right]^{\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.36. Teorem 4.34'te $p = -1$ alınırsa (4.18) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
&\int_u^v \frac{(\varkappa - u)^\omega (v - \varkappa)^\eta w(\varkappa)}{\varkappa^{\omega+\eta}} d\varkappa \\
&\leq \frac{(u - v)^{\omega+\eta+1}}{u^{\eta-1} v^{\omega+1}} {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left(2\vartheta, 1; 2; 1 - \frac{u}{v} \right) \left[\beta(\omega\zeta + 2, \eta\zeta + 1) |w(v)|^\zeta \right. \\
&\quad \left. + \beta(\omega\zeta + 1, \eta\zeta + 2) |w(u)|^\zeta \right]^{\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 4.37. $w : [u, v] \subseteq [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $\zeta \geq 1$ olmak üzere eğer

$|w|^\zeta, [u, v]$ üzerinde $s - p -$ konveks ve $\omega, \eta > 0, p > 0, s \in [0, 1]$ ise

$$\begin{aligned}
& \int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p v^{p-1}} \left(\beta(\eta+1, \omega+1) {}_2F_1 \left(\frac{p-1}{p}, \eta+1; \omega+\eta+2; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \right)^{1-\frac{1}{\zeta}} \\
& \times \left[|w(u)|^\zeta \beta(\eta+s+1, \omega+1) {}_2F_1 \left(\frac{p-1}{p}, \eta+s+1; \omega+\eta+s+2; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \right. \\
& \left. + |w(v)|^\zeta \beta(\eta+1, \omega+s+1) {}_2F_1 \left(\frac{p-1}{p}, \eta+1; \omega+\eta+s+2; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \right]^{\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned} \tag{4.19}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $|w|^\zeta, [u, v]$ üzerinde ikinci anlamda $s - p -$ konveks olduğundan, her $\theta \in [0, 1]$

için Lemma 4.1 ve power mean integral eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \int_0^1 \frac{(1-\theta)^\omega \theta^\eta \left| w \left((\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{1/p} \right) \right|}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{(1-\theta)^\omega \theta^\eta}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \right)^{1-\frac{1}{\zeta}} \\
& \times \left(\int_0^1 \frac{(1-\theta)^\omega \theta^\eta \left| w \left((\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{1/p} \right) \right|^\zeta}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{(1-\theta)^\omega \theta^\eta}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \right)^{1-\frac{1}{\zeta}} \\
& \times \left(\int_0^1 \frac{(1-\theta)^\omega \theta^\eta \left(|\theta^s w(u)|^\zeta + (1-\theta)^s |w(v)|^\zeta \right)}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{(1-\theta)^\omega \theta^\eta}{v^{p-1} \left(1 - \left(1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \theta \right)^{\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \right)^{1-\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\int_0^1 \frac{(1-\theta)^\omega \theta^\eta (\theta^s |w(u)|^\zeta + (1-\theta)^s |w(v)|^\zeta)}{v^{p-1} \left(1 - \left(1 - \frac{u^p}{v^p}\right) \theta\right)^{\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p v^{p-1}} \left(\beta(\eta+1, \omega+1) F_1 \left(\frac{p-1}{p}, \eta+1; \omega+\eta+2; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \right)^{1-\frac{1}{\zeta}} \\
& \times \left[|w(u)|^\zeta \beta(\eta+s+1, \omega+1) {}_2F_1 \left(\frac{p-1}{p}, \eta+s+1; \omega+\eta+s+2; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \right. \\
& \left. + |w(v)|^\zeta \beta(\eta+1, \omega+s+1) {}_2F_1 \left(\frac{p-1}{p}, \eta+1; \eta+\omega+s+2; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \right]^{\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 4.38. Teorem 4.37’de $\omega = \eta$ alınırsa (4.19) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
& \int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\omega w(\varkappa) d\varkappa \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{2\omega+1}}{p v^{p-1}} \left(\beta(\omega+1, \omega+1) F_1 \left(\frac{p-1}{p}, \omega+1, 2\omega+2; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \right)^{1-\frac{1}{\zeta}} \\
& \times \beta(\omega+s+1, \omega+1) \left[|w(u)|^\zeta F_1 \left(\frac{p-1}{p}, \omega+s+1, 2\omega+s+2; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \right. \\
& \left. + |w(v)|^\zeta F_1 \left(\frac{p-1}{p}, \omega+1, 2\omega+s+2; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \right]^{\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.39. Teorem 4.37’de $p = 1$ alınırsa (4.19) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
& \int_u^v (\varkappa - u)^\omega (v - \varkappa)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\
& \leq (v^p - u^p)^{\omega+\eta+1} (\beta(\eta+1, \omega+1))^{1-\frac{1}{\zeta}} \left[|w(u)|^\zeta \beta(\eta+s+1, \omega+1) \right. \\
& \left. + |w(v)|^\zeta \beta(\eta+1, \omega+s+1) \right]^{\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 4.40. $w : [u, v] \subseteq [0, \infty) \rightarrow R$ sürekli bir fonksiyon ve $\zeta \geq 1$ olmak üzere eğer

$|w|^\zeta, [u, v]$ üzerinde $s - p$ konveks ve $\omega, \eta > 0, p < 0, s \in [0, 1]$ ise

$$\begin{aligned}
& \int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{pu^{p-1}} \left(\beta(\omega+1, \eta+1) {}_2F_1 \left(\frac{p-1}{p}, \omega+1; \omega+\eta+2; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \right)^{1-\frac{1}{\zeta}} \\
& \times \left[|w(v)|^\zeta \beta(\omega+s+1, \eta+1) {}_2F_1 \left(\frac{p-1}{p}, \omega+s+1; \omega+\eta+s+2; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \right. \\
& \left. + |w(u)|^\zeta \beta(\omega+1, \eta+s+1) {}_2F_1 \left(\frac{p-1}{p}, \omega+1; \omega+\eta+s+2; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \right]^{\frac{1}{\zeta}} \quad (4.20)
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $|w|^\zeta, [u, v]$ üzerinde ikinci anlamda $s-p$ -konveks olduğundan, her $\theta \in [0, 1]$

için lemma 4.4 ve power mean integral eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^\eta \left| w \left((\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{1/p} \right) \right|}{(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^\eta}{((\theta v^p + (1-\theta)u^p))^{\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \right)^{1-\frac{1}{\zeta}} \\
& \times \left(\int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^\eta \left| w \left((\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{1/p} \right) \right|^\zeta}{((\theta v^p + (1-\theta)u^p))^{\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^\eta}{((\theta v^p + (1-\theta)u^p))^{\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \right)^{1-\frac{1}{\zeta}} \\
& \times \left(\int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^\eta \left(\theta^s |w(v)|^\zeta + (1-\theta)^s |w(u)|^\zeta \right)}{(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^\eta}{u^{p-1} \left(1 - \left(1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \theta \right)^{\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \right)^{1-\frac{1}{\zeta}} \\
& \times \left(\int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^\eta \left(\theta^s |w(v)|^\zeta + (1-\theta)^s |w(u)|^\zeta \right)}{u^{p-1} \left(1 - \left(1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \theta \right)^{\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{pu^{p-1}} \left(\beta(\omega+1, \eta+1) {}_2F_1 \left(\frac{p-1}{p}, \omega+1; \omega+\eta+2; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \right)^{1-\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned}$$

$$\times \left[|w(v)|^\zeta \beta(\omega + s + 1, \eta + 1) {}_2F_1 \left(\frac{p-1}{p}, \omega + s + 1; \omega + \eta + s + 2; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) + |w(u)|^\zeta \beta(\omega + 1, \eta + s + 1) {}_2F_1 \left(\frac{p-1}{p}, \omega + 1; \omega + \eta + s + 2; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \right]^{\frac{1}{\zeta}}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 4.41. Teorem 4.40'da $\omega = \eta$ alınırsa (4.20) eşitsizliği

$$\begin{aligned} & \int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\omega w(\varkappa) d\varkappa \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{2\omega+1}}{p u^{p-1}} \left(\beta(\omega + 1, \omega + 1) {}_2F_1 \left(\frac{p-1}{p}, \omega + 1; 2\omega + 2; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \right)^{1-\frac{1}{\zeta}} \\ & \times \left[|w(v)|^\zeta \beta(\omega + s + 1, \omega + 1) {}_2F_1 \left(\frac{p-1}{p}, \omega + s + 1; 2\omega + s + 2; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) + |w(u)|^\zeta \beta(\omega + 1, \omega + s + 1) {}_2F_1 \left(\frac{p-1}{p}, \omega + 1; 2\omega + s + 2; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \right]^{\frac{1}{\zeta}} \end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.42. Teorem 4.40'da $p = -1$ alınırsa (4.20) eşitsizliği

$$\begin{aligned} & \int_u^v \frac{(\varkappa - u)^\omega (v - \varkappa)^\eta w(\varkappa)}{\varkappa^{\omega+\eta}} d\varkappa \\ & \leq \frac{(u - v)^{\omega+\eta+1}}{u^{\eta-1} v^{\omega+1}} \left(\beta(\omega + 1, \eta + 1) {}_2F_1 \left(2, \omega + 1; \omega + \eta + 2; 1 - \frac{u}{v} \right) \right)^{1-\frac{1}{\zeta}} \\ & \left[|w(v)|^\zeta \beta(\omega + s + 1, \eta + 1) {}_2F_1 \left(2, \omega + s + 1; \omega + \eta + s + 2; 1 - \frac{u}{v} \right) + |w(u)|^\zeta \beta(\omega + 1, \eta + s + 1) {}_2F_1 \left(2, \omega + 1; \omega + \eta + s + 2; 1 - \frac{u}{v} \right) \right]^{\frac{1}{\zeta}} \end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 4.43. $w : [u, v] \subseteq [0, \infty) \rightarrow R$ sürekli bir fonksiyon ve $\zeta > 1$ olmak üzere eğer

$|w|^\zeta, [u, v]$ üzerinde ikinci anlamda $s - p$ -konveks ve $\omega, \eta > 0, p > 0, s \in [0, 1]$ ise

$$\begin{aligned} & \int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p v^{p-1}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}}(\vartheta \eta + 1, \omega \vartheta + 1) \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\times {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\frac{(p-1)\vartheta}{p}, \eta\vartheta + 1; (\omega + \eta)\vartheta + 2; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \left(\frac{|w(u)|^\zeta + |w(v)|^\zeta}{s+1} \right)^{1/\zeta}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikte $1/\zeta + 1/\vartheta = 1$ 'dir.

İspat. Lemma 4.1'i , $|w|^\zeta$ 'nın Hölder integral eşitsizliğini ve ikinci anlamda $s - p -$ konveksliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \int_0^1 \frac{(1-\theta)^\omega \theta^\eta}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\frac{(p-1)\vartheta}{p}}} \left| w \left((\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{1/p} \right) \right| d\theta \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{(1-\theta)^{\omega\vartheta} \theta^{\eta\vartheta}}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\frac{(p-1)\vartheta}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\int_0^1 \left| w \left((\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{1/p} \right) \right|^\zeta d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{(1-\theta)^{\omega\vartheta} \theta^{\eta\vartheta}}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\frac{(p-1)\vartheta}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\ & \times \left(\int_0^1 \left(\theta^s |w(u)|^\zeta + (1-\theta)^s |w(v)|^\zeta \right) d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\ & = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{(1-\theta)^{\omega\vartheta} \theta^{\eta\vartheta}}{v^{p-1} \left(1 - \left(1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \theta \right)^{\frac{(p-1)\vartheta}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\ & \times \left(\int_0^1 \left(\theta^s |w(u)|^\zeta + (1-\theta)^s |w(v)|^\zeta \right) d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\ & = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p v^{p-1}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}} (\vartheta\eta + 1, \omega\vartheta + 1) {}_2F_1 \left(\frac{(p-1)\vartheta}{p}, \eta\vartheta + 1; (\omega + \eta)\vartheta + 2; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\ & \times \left(\frac{|w(u)|^\zeta + |w(v)|^\zeta}{s+1} \right)^{1/\zeta} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. İspat tamamlanır. □

Sonuç 4.44. Teorem 4.43'te $\omega = \eta$ alınırsa (4.21) eşitsizliği

$$\begin{aligned} & \int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\omega w(\varkappa) d\varkappa \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{2\omega+1}}{p v^{p-1}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}} (\omega\vartheta + 1, \omega\vartheta + 1) {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\frac{(p-1)\vartheta}{p}, \omega\vartheta + 1; 2\omega\vartheta + 2; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \\ & \times \left(\frac{|w(u)|^\zeta + |w(v)|^\zeta}{s+1} \right)^{1/\zeta} \end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.45. Teorem 4.43'te $p = 1$ ise (4.21) eşitsizliği

$$\int_u^v (\varkappa - u)^\omega (v - \varkappa)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \leq (v - u)^{\omega + \eta + 1} \beta^{\frac{1}{\vartheta}}(\eta \vartheta + 1, \omega \vartheta + 1) \left(\frac{|w(u)|^\zeta + |w(v)|^\zeta}{s + 1} \right)^{1/\zeta}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 4.46. $w : [u, v] \subseteq [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $\zeta > 1$ olmak üzere eğer

$|w|^\zeta, [u, v]$ üzerinde ikinci anlamda $s - p$ -konveks ve $\omega, \eta > 0, p < 0, s \in [0, 1]$ ise

$$\begin{aligned} & \int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega + \eta + 1}}{p u^{p-1}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}}(\omega \vartheta + 1, \eta \vartheta + 1) \\ & \times {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\left(\frac{p-1}{p} \right) \vartheta, \omega \vartheta + 1; (\omega + \eta) \vartheta + 2; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \left(\frac{|w(v)|^\zeta + |w(u)|^\zeta}{s + 1} \right)^{1/\zeta} \end{aligned} \quad (4.22)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikte $1/\zeta + 1/\vartheta = 1$ 'dir.

İspat. Lemma (4.5) 'i , $|w|^\zeta$ 'nın Hölder integral eşitsizliği ve ikinci anlamda $s - p$ -konveksliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega + \eta + 1}}{p} \int_0^1 \frac{\theta^\omega (1 - \theta)^\eta}{(\theta v^p + (1 - \theta) u^p)^{\frac{(p-1)}{p}}} \left| w \left((\theta v^p + (1 - \theta) u^p)^{1/p} \right) \right| d\theta \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega + \eta + 1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{\theta^{\omega \vartheta} (1 - \theta)^{\eta \vartheta}}{(\theta v^p + (1 - \theta) u^p)^{\frac{(p-1)\vartheta}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\ & \times \left(\int_0^1 \left| w \left((\theta v^p + (1 - \theta) u^p)^{1/p} \right) \right|^\zeta d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega + \eta + 1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{\theta^{\omega \vartheta} (1 - \theta)^{\eta \vartheta}}{(\theta v^p + (1 - \theta) u^p)^{\frac{(p-1)\vartheta}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\ & \times \left(\int_0^1 \left(\theta^s |w(v)|^\zeta + (1 - \theta)^s |w(u)|^\zeta \right) d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{\theta^{\omega\vartheta}(1-\theta)^{\eta\vartheta}}{u^{(p-1)\vartheta} \left(1 - \left(1 - \frac{v^p}{u^p}\right)\theta\right)} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\
&\times \left(\int_0^1 \left(\theta^s |w(v)|^\zeta + (1-\theta)^s |w(u)|^\zeta \right) d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
&= \frac{v^p - u^p}{pu^{p-1}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}} (\omega\vartheta + 1, \eta\vartheta + 1) {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\frac{(p-1)\vartheta}{p}, \omega\vartheta + 1; (\omega + \eta)\vartheta + 2; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \\
&\times \left(\frac{|w(v)|^\zeta + |w(u)|^\zeta}{s+1} \right)^{1/\zeta}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. İspat tamamlanır. $\square$

Sonuç 4.47. Teorem 4.46’da $\omega = \eta$ alınırsa (4.22) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
&\int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\omega w(\varkappa) d\varkappa \\
&\leq \frac{(v^p - u^p)^{2\omega+1}}{pu^{p-1}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}} (\omega\vartheta + 1, \omega\vartheta + 1) {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\frac{(p-1)\vartheta}{p}, \omega\vartheta + 1; 2\omega\vartheta + 2; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \\
&\times \left(\frac{|w(v)|^\zeta + |w(u)|^\zeta}{s+1} \right)^{1/\zeta}
\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.48. Teorem 4.46’da $p = -1$ alınırsa (4.22) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
&\int_u^v \frac{(\varkappa - u)^\omega (v - \varkappa)^\eta w(\varkappa)}{\varkappa^{\omega+\eta}} d\varkappa \\
&\leq \frac{(u - v)^{\omega+\eta+1}}{u\eta^{-1}v^{\omega+1}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}} (\omega\vartheta + 1, \eta\vartheta + 1) {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left(2\vartheta, \omega\vartheta + 1; (\omega + \eta)\vartheta + 2; 1 - \frac{u}{v} \right) \\
&\times \left(\frac{|w(v)|^\zeta + |w(u)|^\zeta}{s+1} \right)^{1/\zeta}
\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 4.49. $w : [u, v] \subseteq [0, \infty) \rightarrow R$ sürekli bir fonksiyon ve $\zeta > 1$ olmak üzere eğer

$|w|^\zeta, [u, v]$ üzerinde ikinci anlamda $s - p -$ konveks ve $\omega, \eta > 0, p > 0, s \in [0, 1]$ ise

$$\begin{aligned}
& \int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{pv^{p-1}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}}(\eta\vartheta+1, \omega\vartheta+1) \left[{}_2F_1\left(\frac{(p-1)\zeta}{p}, s+1; s+2; 1 - \frac{u^p}{v^p}\right) \frac{|w(u)|^\zeta}{s+1} \right. \\
& \quad \left. + {}_2F_1\left(\frac{(p-1)\zeta}{p}, 1; s+1; 1 - \frac{u^p}{v^p}\right) \frac{|w(v)|^\zeta}{s+1} \right]^{\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned} \tag{4.23}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikte $1/\zeta + 1/\vartheta = 1$ 'dir.

İspat. Lemma 4.1 , $|w|^\zeta$ 'nın Hölder integral eşitsizliği ve ikinci anlamda $s-p-$ konveksliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \int_u^v (\varkappa - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \int_0^1 \frac{(1-\theta)^\omega \theta^\eta}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\frac{(p-1)}{p}}} \left| w\left((\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{1/p}\right) \right| d\theta \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 (1-\theta)^{\omega\vartheta} \theta^{\eta\vartheta} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \frac{1}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\frac{(p-1)\zeta}{p}}} \left| w(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{1/p} \right| d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 (1-\theta)^{\omega\vartheta} \theta^{\eta\vartheta} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\int_0^1 \frac{(\theta^s |w(u)|^\zeta + (1-\theta)^s |w(v)|^\zeta)}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\frac{(p-1)\zeta}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 (1-\theta)^{\omega\vartheta} \theta^{\eta\vartheta} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \frac{(\theta^s |w(u)|^\zeta + (1-\theta)^s |w(v)|^\zeta)}{v^{(p-1)\zeta} \left(1 - \left(1 - \frac{u^p}{v^p}\right)\theta\right)^{\frac{(p-1)\zeta}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{pv^{p-1}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}}(\eta\vartheta+1, \omega\vartheta+1) \left[{}_2F_1\left(\frac{(p-1)\zeta}{p}, s+1; s+2; 1 - \frac{u^p}{v^p}\right) \frac{|w(u)|^\zeta}{s+1} \right. \\
& \quad \left. + {}_2F_1\left(\frac{(p-1)\zeta}{p}, 1; s+2; 1 - \frac{u^p}{v^p}\right) \frac{|w(v)|^\zeta}{s+1} \right]^{\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 4.50. Teorem 4.49’da $\omega = \eta$ alınırsa (4.23) eşitsizliği

$$\begin{aligned} & \int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\omega w(\varkappa) d\varkappa \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{2\omega+1}}{pv^{p-1}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}}(\omega\vartheta + 1, \omega\vartheta + 1) \left[{}_2F_1\left(\frac{(p-1)\zeta}{p}, s+1; s+2; 1 - \frac{u^p}{v^p}\right) \frac{|w(u)|^\zeta}{s+1} \right. \\ & \quad \left. + {}_2F_1\left(\frac{(p-1)\zeta}{p}, 1; s+1; 1 - \frac{u^p}{v^p}\right) \frac{|w(v)|^\zeta}{s+1} \right]^{\frac{1}{\zeta}} \end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.51. Teorem 4.49’da $p = 1$ alınırsa (4.23) eşitsizliği

$$\begin{aligned} & \int_u^v (\varkappa - u)^\omega (v - \varkappa)^\omega w(\varkappa) d\varkappa \\ & \leq (v - u)^{\omega+1} \beta^{\frac{1}{\vartheta}}(\omega\vartheta + 1, \omega\vartheta + 1) \left[\frac{|w(u)|^\zeta}{s+1} + \frac{|w(v)|^\zeta}{s+1} \right]^{\frac{1}{\zeta}} \end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 4.52. $w : [u, v] \subseteq [0, \infty) \rightarrow R$ sürekli bir fonksiyon ve $\zeta > 1$ olmak üzere eğer

$|w|^\zeta, [u, v]$ üzerinde ikinci anlamda $s - p$ -konveks ve $\omega, \eta > 0, p < 0, s \in [0, 1]$ ise

$$\begin{aligned} & \int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{pu^{p-1}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}}(\omega\vartheta + 1, \eta\vartheta + 1) \left[{}_2F_1\left(\frac{(p-1)\zeta}{p}, s+1; s+2; 1 - \frac{v^p}{u^p}\right) \frac{|w(v)|^\zeta}{s+1} \right. \\ & \quad \left. + {}_2F_1\left(\frac{(p-1)\zeta}{p}, 1; s+1; 1 - \frac{v^p}{u^p}\right) \frac{|w(u)|^\zeta}{s+1} \right]^{\frac{1}{\zeta}} \end{aligned} \tag{4.24}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikte $1/\zeta + 1/\vartheta = 1$ ’dir.

İspat. Lemma 4.4 ve $|w|^\zeta$ ’nın Hölder integral eşitsizliği ile ikinci anlamda $s - p$ -konveksliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
& \int_v^u (\varkappa - v^p)^\eta (u^p - \varkappa^p)^\omega w(\varkappa) d\varkappa \\
& \leq \frac{(u^p - v^p)^{\eta+\omega+1}}{p} \int_0^1 \frac{(1-\theta)^\eta \theta^\omega}{(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{\frac{(p-1)}{p}}} \left| w\left((\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{1/p}\right) \right| d\theta \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \theta^{\omega\vartheta} (1-\theta)^{\eta\vartheta} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \frac{1}{(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{\frac{(p-1)\zeta}{p}}} \left| w(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{1/p} \right| d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& \leq \frac{(u^p - v^p)^{\eta+\omega+1}}{p} \left(\int_0^1 \theta^{\omega\vartheta} (1-\theta)^{\eta\vartheta} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \frac{\theta^s |w(v)|^\zeta + (1-\theta)^s |w(u)|^\zeta}{(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{\frac{(p-1)\zeta}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& = \frac{(u^p - v^p)^{\eta+\omega+1}}{p} \left(\int_0^1 \theta^{\omega\vartheta} (1-\theta)^{\eta\vartheta} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \frac{(\theta^s |w(v)|^\zeta + (1-\theta)^s |w(u)|^\zeta)}{u^{(p-1)\zeta} (1 - (1 - \frac{v^p}{u^p}) \theta)^{\frac{(p-1)\zeta}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{pu^{p-1}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}} (\omega\vartheta + 1, \eta\vartheta + 1) \left[{}_2F_1 \left(\frac{(p-1)\zeta}{p}, s+1; s+2; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \frac{|w(v)|^\zeta}{s+1} \right. \\
& \quad \left. + {}_2F_1 \left(\frac{(p-1)\zeta}{p}, 1; s+2; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \frac{|w(u)|^\zeta}{s+1} \right]^{\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. İspat tamamlanır. $\square$

Sonuç 4.53. Teorem 4.52’de $\omega = \eta$ alınırsa (4.24) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
& \int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\omega w(\varkappa) d\varkappa \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{2\omega+1}}{pu^{p-1}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}} (\omega\vartheta + 1, \omega\vartheta + 1) \left[{}_2F_1 \left(\frac{(p-1)\zeta}{p}, s+1; s+2; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \frac{|w(v)|^\zeta}{s+1} \right. \\
& \quad \left. + {}_2F_1 \left(\frac{(p-1)\zeta}{p}, 1; s+1; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \frac{|w(u)|^\zeta}{s+1} \right]^{\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.54. Teorem 4.52’de $p = -1$ alınırsa (4.24) eşitsizliği

$$\begin{aligned} & \int_u^v \frac{(\varkappa - u)^\omega (v - \varkappa)^\eta w(\varkappa)}{\varkappa^{\omega+\eta}} d\varkappa \\ & \leq \frac{(u - v)^{\omega+\eta+1}}{u^{\eta-1} v^{\omega+1}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}} (\omega \vartheta + 1, \eta \vartheta + 1) \left[{}_2F_1 \left(2\zeta, s+1; s+2; 1 - \frac{u}{v} \right) \frac{|w(v)|^\zeta}{s+1} \right. \\ & \quad \left. + {}_2F_1 \left(\left(2\zeta, 1; s+1; 1 - \frac{u}{v} \right) \frac{|w(u)|^\zeta}{s+1} \right) \right]^{\frac{1}{\zeta}} \end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 4.55. $w : [u, v] \subseteq [0, \infty) \rightarrow R$ sürekli bir fonksiyon ve $\zeta > 1$ olmak üzere eğer

$|w|^\zeta, [u, v]$ üzerinde ikinci anlamda $s - p -$ konveks ve $\omega, \eta > 0, p > 0, s \in [0, 1]$ ise

$$\begin{aligned} & \int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p v^{p-1}} {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\frac{(p-1)\vartheta}{p}, 1, 2; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \left(\beta(\eta \vartheta + s + 1, \omega \vartheta + 1) |w(u)|^\zeta \right. \\ & \quad \left. + \beta(\eta \vartheta + 1, \omega \vartheta + s + 1) |w(v)|^\zeta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \end{aligned} \quad (4.25)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikte $1/\zeta + 1/\vartheta = 1$ ’dir.

İspat. Lemma 4.1 ve $|w|^\zeta$ ’nin Hölder integral eşitsizliği ile $s - p -$ konveksliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \int_0^1 \frac{(1-\theta)^\omega \theta^\eta}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\frac{(p-1)\vartheta}{p}}} \left| w \left((\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{1/p} \right) \right| d\theta \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{1}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\frac{(p-1)\vartheta}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\ & \quad \times \left(\int_0^1 (1-\theta)^\omega \theta^\eta \left| w \left((\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{1/p} \right) \right|^\zeta d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{1}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\frac{(p-1)\vartheta}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\
&\times \left(\int_0^1 (1-\theta)^{\omega\zeta} \theta^{\eta\zeta} \left(\theta^s |w(u)|^\zeta + (1-\theta)^s |w(v)|^\zeta \right) d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
&= \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{1}{v^{(p-1)\vartheta} \left(1 - \left(1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \theta \right)^{\frac{(p-1)\vartheta}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\
&\times \left(\int_0^1 (1-\theta)^{\omega\zeta} \theta^{\eta\zeta} \left(\theta^s |w(u)|^\zeta + (1-\theta)^s |w(v)|^\zeta \right) d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
&= \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p v^{p-1}} {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\frac{(p-1)\vartheta}{p}, 1, 2; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \left[\beta(\eta\zeta + s + 1, \omega\zeta + 1) |w(u)|^\zeta \right. \\
&\quad \left. + \beta(\eta\zeta + 1, \omega\zeta + s + 1) |w(v)|^\zeta \right]^{\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 4.56. Teorem 4.55'te $\omega = \eta$ alınırsa (4.25) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
&\int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\omega w(\varkappa) d\varkappa \\
&= \frac{(v^p - u^p)^{2\omega+1}}{p v^{p-1}} \\
&\times {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\frac{(p-1)\vartheta}{p}, 1, 2; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \left[\beta(\omega\zeta + s + 1, \omega\zeta + 1) \left(|w(u)|^\zeta + |w(v)|^\zeta \right) \right]^{\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.57. Teorem 4.55'te $p = 1$ alınırsa (4.25) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
&\int_u^v (\varkappa - u)^\omega (v - \varkappa)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\
&\leq (v - u)^{\omega+\eta+1} \left(\beta(\eta\zeta + s + 1, \omega\zeta + 1) |w(u)|^\zeta + \beta(\eta\zeta + 1, \omega\zeta + s + 1) |w(v)|^\zeta \right)^{\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 4.58. $w : [u, v] \subseteq [0, \infty) \rightarrow R$ sürekli bir fonksiyon ve $\zeta > 1$ olmak üzere eğer

$|w|^\zeta, [u, v]$ üzerinde ikinci anlamda $s - p$ -konveks ve $\omega, \eta > 0, p < 0, s \in [0, 1]$ ise

$$\begin{aligned}
& \int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{pu^{p-1}} {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\frac{(p-1)\vartheta}{p}, 1; 2; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \left[\beta(\omega\zeta + s + 1, \eta\zeta + 1) |w(v)|^\zeta \right. \\
& \quad \left. + \beta(\omega\zeta + 1, \eta\zeta + s + 1) |w(u)|^\zeta \right]^{\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned} \tag{4.26}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikte $1/\zeta + 1/\vartheta = 1$ 'dir.

İspat. Lemma 4.4 ve $|w|^\zeta$ 'nın Hölder integral eşitsizliği ile $s - p -$ konveksliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
& \int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^\eta}{(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{\frac{(p-1)}{p}}} \left| w \left((\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{1/p} \right) \right| d\theta \\
& = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{1}{(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{\frac{(p-1)v}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \theta^{\omega\zeta} (1-\theta)^{\eta\zeta} \left| w \left((\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{1/p} \right) \right|^\zeta d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{1}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\frac{(p-1)\vartheta}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \theta^{\omega\zeta} (1-\theta)^{\eta\zeta} \left(\theta^s |w(v)|^\zeta + (1-\theta)^s |w(u)|^\zeta \right) d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{1}{u^{(p-1)\vartheta} \left(1 - \left(1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \theta \right)^{\frac{(p-1)\vartheta}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \theta^{\omega\zeta} (1-\theta)^{\eta\zeta} \left(\theta^s |w(v)|^\zeta + (1-\theta)^s |w(u)|^\zeta \right) d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{pu^{p-1}} {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\frac{(p-1)\vartheta}{p}, 1; 2; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \left[\beta(\omega\zeta + s + 1, \eta\zeta + 1) |w(v)|^\zeta \right. \\
& \quad \left. + \beta(\omega\zeta + 1, \eta\zeta + s + 1) |w(u)|^\zeta \right]^{\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

Sonuç 4.59. Teorem 4.58’de $\omega = \eta$ alınırsa (4.26) eşitsizliği

$$\begin{aligned} & \int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\omega w(\varkappa) d\varkappa \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{2\omega+1}}{p u^{p-1}} {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\frac{(p-1)\vartheta}{p}, 1; 2; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \left[\beta(\omega\zeta + s + 1, \omega\zeta + 1) |w(v)|^\zeta \right. \\ & \quad \left. + \beta(\omega\zeta + 1, \omega\zeta + s + 1) |w(u)|^\zeta \right]^{\frac{1}{\zeta}} \end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.60. Teorem 4.58’de $p = -1$ alınırsa (4.26) eşitsizliği

$$\begin{aligned} & \int_u^v \frac{(\varkappa - u)^\omega (v - \varkappa)^\eta w(\varkappa)}{\varkappa^{\omega+\eta}} d\varkappa \\ & \leq \frac{(u - v)^{\omega+\eta+1}}{u^{\eta-1} v^{\omega+1}} {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left(2\vartheta, 1; 2; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \left[\beta(\omega\zeta + s + 1, \eta\zeta + 1) |w(v)|^\zeta \right. \\ & \quad \left. + \beta(\omega\zeta + 1, \eta\zeta + s + 1) |w(u)|^\zeta \right] \end{aligned} \quad (4.27)$$

eşitsizliğine dönüşür.

Lemma 4.61. $w : [u, v] \subseteq [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $[u, v]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun.

$\omega, \eta > 0, p < 0$ ise

$$\begin{aligned} & \int_u^v \frac{(\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa)}{\varkappa^{(\omega+\eta)p}} d\varkappa \\ & = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^\eta w \left((\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{1/p} \right)}{(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{\omega+\eta+\frac{p-1}{p}}} d\theta \end{aligned} \quad (4.28)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $\varkappa = (\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{1/p}$ alınıp değişken dönüşümü yapılarak istenilen sonuç elde edilir. □

Sonuç 4.62. Lemma 4.61’de $\omega = \eta$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \int_u^v \frac{(\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\omega w(\varkappa)}{\varkappa^{2\omega p}} d\varkappa \\
&= \frac{(v^p - u^p)^{2\omega+1}}{p} \int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^\eta w\left((\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{1/p}\right)}{(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{2\omega + \frac{p-1}{p}}} d\theta
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Sonuç 4.63. Lemma 4.61’de $p = -1$ alınırsa (3.1) eşitliği elde edilir.

Lemma 4.64. $w : [u, v] \subseteq [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $[u, v]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun.

$\omega, \eta > 0, p > 0$ ise

$$\begin{aligned}
& \int_u^v \frac{(\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa)}{\varkappa^{(\omega+\eta)p}} d\varkappa \\
&= \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \int_0^1 \frac{(1-\theta)^\omega \theta^\eta w\left((\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{1/p}\right)}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\omega+\eta + \frac{(p-1)}{p}}} d\theta
\end{aligned} \tag{4.29}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $\varkappa = (\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{1/p}$ alınıp değişken dönüşümü yapılarak istenilen sonuç elde edilir. □

Sonuç 4.65. Lemma 4.64 ’te $\omega = \eta$ alınırsa (4.29) eşitliği

$$\begin{aligned}
& \int_u^v \frac{(\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\omega w(\varkappa)}{\varkappa^{2\omega p}} d\varkappa \\
&= \frac{(v^p - u^p)^{2\omega+1}}{p} \int_0^1 \frac{(1-\theta)^\omega \theta^\omega w\left((\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{1/p}\right)}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{2\omega + \frac{(p-1)}{p}}} d\theta
\end{aligned}$$

eşitliğine dönüşür.

Sonuç 4.66. Lemma 4.64 ’te $p = 1$ alınırsa (4.29) eşitliği

$$\int_u^v \frac{(\varkappa - u)^\omega (v - \varkappa)^\eta w(\varkappa)}{\varkappa^{\omega+\eta}} d\varkappa = (v - u)^{\omega+\eta+1} \int_0^1 \frac{(1-\theta)^\omega \theta^\eta w(\theta u + (1-\theta)v)}{(\theta u + (1-\theta)v)^{\omega+\eta}} d\theta$$

eşitliğine dönüşür.

Teorem 4.67. $w : [u, v] \subseteq [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $[u, v]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun.

$\omega, \eta > 0, p < 0$ olmak üzere $w, [u, v]$ aralığında p -konveks ise

$$\begin{aligned} & \int_u^v \frac{(x^p - u^p)^\omega (v^p - x^p)^\eta w(x)}{x^{(\omega+\eta)p}} dx \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{pu^{(\omega+\eta+1)p-1}} \left[w(v) \beta(\omega+2, \eta+1) {}_2F_1 \left(\omega+\eta+\frac{p-1}{p}, \omega+2; \eta+\omega+3; 1-\frac{v^p}{u^p} \right) \right. \\ & \quad \left. + w(u) \beta(\omega+1, \eta+2) {}_2F_1 \left(\omega+\eta+\frac{p-1}{p}, \omega+1; \eta+\omega+3; 1-\frac{v^p}{u^p} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.30)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Her $\theta \in [0, 1]$ ve $w, [u, v]$ 'de p -konveks olmak üzere Lemma 4.61 kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \int_u^v \frac{(x^p - u^p)^\omega (v^p - x^p)^\eta w(x)}{x^{(\omega+\eta)p}} dx \\ & = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^\eta f\left((\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{1/p}\right)}{(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{\omega+\eta+\frac{p-1}{p}}} d\theta \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^\eta [\theta w(v) + (1-\theta)w(u)]}{(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{\omega+\eta+\frac{p-1}{p}}} d\theta \\ & = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^\eta [\theta w(v) + (1-\theta)w(u)]}{(u^p (1 - (1 - \frac{v^p}{u^p}) \theta))^{\omega+\eta+\frac{p-1}{p}}} d\theta \\ & = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left[w(v) \int_0^1 \frac{\theta^{\omega+1} (1-\theta)^\eta}{(u^p (1 - (1 - \frac{v^p}{u^p}) \theta))^{\omega+\eta+\frac{p-1}{p}}} d\theta \right. \\ & \quad \left. + w(u) \int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^{\eta+1}}{(u^p (1 - (1 - \frac{v^p}{u^p}) \theta))^{\omega+\eta+\frac{p-1}{p}}} d\theta \right] \\ & = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{pu^{(\omega+\eta+1)p-1}} \left[w(v) \int_0^1 \frac{\theta^{\omega+1} (1-\theta)^\eta}{(1 - (1 - \frac{v^p}{u^p}) \theta)^{\omega+\eta+\frac{p-1}{p}}} d\theta \right. \\ & \quad \left. + w(u) \int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^{\eta+1}}{(1 - (1 - \frac{v^p}{u^p}) \theta)^{\omega+\eta+\frac{p-1}{p}}} d\theta \right] \end{aligned} \quad (4.31)$$

eşitsizliği elde edilir.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\theta^{\omega+1}(1-\theta)^\eta}{\left(1 - \left(1 - \frac{v^p}{u^p}\right)\theta\right)^{\frac{p-1}{p}}} d\theta &= \beta(\omega+2, \eta+1) \\ &\times {}_2F_1\left(\omega+\eta+\frac{p-1}{p}, \omega+2; \eta+\omega+3; 1 - \frac{v^p}{u^p}\right) \end{aligned} \quad (4.32)$$

ve

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\theta^\omega(1-\theta)^{\eta+1}}{\left(1 - \left(1 - \frac{v^p}{u^p}\right)\theta\right)^{\frac{p-1}{p}}} d\theta &= \beta(\omega+1, \eta+2) \\ &\times {}_2F_1\left(\omega+\eta+\frac{p-1}{p}, \omega+1; \eta+\omega+3; 1 - \frac{v^p}{u^p}\right) \end{aligned} \quad (4.33)$$

(4.32) ve (4.33) eşitlikleri (4.31)'de yerine konulduğunda gerekli sonuç elde edilir ve ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 4.68. Teorem 4.67'de $\omega = \eta$ alınırsa (4.30) eşitsizliği

$$\begin{aligned} &\int_u^v \frac{(\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\omega w(\varkappa)}{\varkappa^{2\omega p}} d\varkappa \\ &\leq \frac{(v^p - u^p)^{2\omega+1}}{pu^{(2\omega+1)p-1}} \left[w(v)\beta(\omega+2, \omega+1) {}_2F_1\left(2\omega+\frac{p-1}{p}, \omega+2; 2\omega+3; 1 - \frac{v^p}{u^p}\right) \right. \\ &\quad \left. + w(u)\beta(\omega+1, \omega+2) {}_2F_1\left(2\omega+\frac{p-1}{p}, \omega+1; 2\omega+3; 1 - \frac{v^p}{u^p}\right) \right] \end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.69. Teorem 4.67'de $p = -1$ alınırsa (3.1) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.70. $w : [u, v] \subseteq [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $[u, v]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. $0 \leq u < v < \infty$ ve $\omega, \eta > 0, p > 0$ olmak üzere $w, [u, v]$ aralığında p -konveks ise

$$\begin{aligned} &\int_u^v \frac{(\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa)}{\varkappa^{(\omega+\eta)p}} d\varkappa \\ &\leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{pv^{(\omega+\eta+1)p-1}} \left[w(u)\beta(\eta+2, \omega+1) {}_2F_1\left(\omega+\eta+\frac{(p-1)}{p}, \eta+2; \eta+\omega+3; 1 - \frac{u^p}{v^p}\right) \right. \\ &\quad \left. + w(v)\beta(\eta+1, \omega+2) {}_2F_1\left(\omega+\eta+\frac{(p-1)}{p}, \eta+1; \eta+\omega+3; 1 - \frac{u^p}{v^p}\right) \right] \end{aligned} \quad (4.34)$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Her $\theta \in [0, 1]$ için $w, [u, v]$ 'de p -konveks olmak üzere Lemma 4.64 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \int_u^v \frac{(x^p - u^p)^\omega (v^p - x^p)^\eta w(x)}{x^{(\omega+\eta)p}} dx \\
&= \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \int_0^1 \frac{(1-\theta)^\omega \theta^\eta w\left((\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{1/p}\right)}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \\
&\leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \int_0^1 \frac{(1-\theta)^\omega \theta^\eta [\theta w(u) + (1-\theta)w(v)]}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \\
&= \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \int_0^1 \frac{(1-\theta)^\omega \theta^\eta [\theta w(u) + (1-\theta)w(v)]}{(v^p (1 - (1 - \frac{u^p}{v^p}) \theta))^{\omega+\eta+\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \\
&= \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left[w(u) \int_0^1 \frac{(1-\theta)^\omega \theta^{\eta+1}}{v^{(\omega+\eta+1)p-1} (1 - (1 - \frac{u^p}{v^p}) \theta)^{\omega+\eta+\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \right. \\
&\quad \left. + w(v) \int_0^1 \frac{(1-\theta)^{\omega+1} \theta^\eta}{v^{(\omega+\eta+1)p-1} (1 - (1 - \frac{u^p}{v^p}) \theta)^{\omega+\eta+\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \right] \\
&= \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p v^{(\omega+\eta+1)p-1}} \left[w(u) \int_0^1 \frac{(1-\theta)^\omega \theta^{\eta+1}}{(1 - (1 - \frac{u^p}{v^p}) \theta)^{\omega+\eta+\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \right. \\
&\quad \left. + w(v) \int_0^1 \frac{(1-\theta)^{\omega+1} \theta^\eta}{(1 - (1 - \frac{u^p}{v^p}) \theta)^{\omega+\eta+\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \right] \tag{4.35}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \frac{(1-\theta)^\omega \theta^{\eta+1}}{(1 - (1 - \frac{u^p}{v^p}) \theta)^{\omega+\eta+\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \\
&= \beta(\eta+2, \omega+1) {}_2F_1 \left(\omega+\eta+\frac{(p-1)}{p}, \eta+2; \eta+\omega+3; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \tag{4.36}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \frac{(1-\theta)^{\omega+1} \theta^\eta}{(1 - (1 - \frac{u^p}{v^p}) \theta)^{\omega+\eta+\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \\
&= \beta(\eta+1, \omega+2) {}_2F_1 \left(\omega+\eta+\frac{(p-1)}{p}, \eta+1; \eta+\omega+3; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \tag{4.37}
\end{aligned}$$

(4.36) ve (4.37) eşitlikleri (4.35)'de yerine yazılarak gerekli sonuç elde edilir. $\square$

Sonuç 4.71. Teorem 4.70’te $\omega = \eta$ alınırsa (4.34) eşitlisizliği

$$\begin{aligned} & \int_u^v \frac{(\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa)}{\varkappa^{2\omega p}} d\varkappa \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{2\omega+1}}{p^{(\omega+\eta+1)p-1}} \left[w(u) \beta(\omega+2, \omega+1) {}_2F_1 \left(2\omega + \frac{(p-1)}{p}, \omega+2; 2\omega+3; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \right. \\ & \quad \left. + w(v) \beta(\omega+1, \omega+2) {}_2F_1 \left(2\omega + \frac{(p-1)}{p}, \omega+1; 2\omega+3; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \right] \end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.72. Teorem 4.70’te $p = 1$ alınırsa (4.34) eşitlisizliği

$$\begin{aligned} & \int_u^v \frac{(\varkappa - u)^\omega (v - \varkappa)^\eta w(\varkappa)}{\varkappa^{\omega+\eta}} d\varkappa \\ & \leq \frac{(v-u)^{\omega+\eta+1}}{v^{\omega+\eta}} [w(u) \beta(\eta+2, \omega+1) + w(v) \beta(\eta+1, \omega+2)] \end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 4.73. $w : [u, v] \subseteq [0, \infty) \rightarrow R$ sürekli bir fonksiyon ve $\zeta \geq 1$ olmak üzere eğer

$|w|^\zeta, [u, v]$ üzerinde p -konveks ve $\omega, \eta > 0, p < 0$ ise

$$\begin{aligned} & \int_u^v \frac{(\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa)}{\varkappa^{(\omega+\eta)p}} d\varkappa \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{pu^{(\omega+\eta+1)p-1}} \left(\beta(\omega+1, \eta+1) {}_2F_1 \left(\omega + \eta + \frac{p-1}{p}, \omega+1, \omega + \eta + 2; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \right)^{1-\frac{1}{\zeta}} \\ & \quad \times \left[|w(v)|^\zeta \beta(\omega+2, \eta+1) {}_2F_1 \left(\omega + \eta + \frac{p-1}{p}, \omega+2; \omega + \eta + 3; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \right. \\ & \quad \left. + |w(u)|^\zeta \beta(\omega+1, \eta+2) {}_2F_1 \left(\omega + \eta + \frac{p-1}{p}, \omega+1; \omega + \eta + 3; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \right]^{\frac{1}{\zeta}} \end{aligned} \quad (4.38)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $|w|^\zeta, [u, v]$ üzerinde p -konveks olduğundan, her $\theta \in [0, 1]$ için Lemma 4.61 ve

power mean integral eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \int_u^v \frac{(v^p - u^p)^\omega (v^p - \mathcal{X}^p)^\eta w(\mathcal{X})}{\mathcal{X}^{(\omega+\eta)p}} d\mathcal{X} \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^\eta \left| w\left((\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{1/p}\right) \right|}{(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{\omega+\eta+\frac{p-1}{p}}} d\theta \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^\eta}{(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{\omega+\eta+\frac{p-1}{p}}} d\theta \right)^{1-\frac{1}{\zeta}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^\eta \left| w\left((\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{1/p}\right) \right|^\zeta}{(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{\omega+\eta+\frac{p-1}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^\eta}{(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{\omega+\eta+\frac{p-1}{p}}} d\theta \right)^{1-\frac{1}{\zeta}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \frac{(\theta |w(v)|^\zeta + (1-\theta) |w(u)|^\zeta)}{(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{\omega+\eta+\frac{p-1}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^\eta}{u^{(\eta+\omega+1)p-1} \left(1 - \left(1 - \frac{v^p}{u^p}\right) \theta\right)^{\omega+\eta+\frac{p-1}{p}}} d\theta \right)^{1-\frac{1}{\zeta}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^\eta (\theta |w(v)|^\zeta + (1-\theta) |w(u)|^\zeta)}{u^{(\eta+\omega+1)p-1} \left(1 - \left(1 - \frac{v^p}{u^p}\right) \theta\right)^{\omega+\eta+\frac{p-1}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{pu^{(\omega+\eta+1)p-1}} \left(\beta(\omega+1, \eta+1) F_1 \left(\omega+\eta+\frac{p-1}{p}, \omega+1; \omega+\eta+2; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \right)^{1-\frac{1}{\zeta}} \\
& \quad \times \left[|w(v)|^\zeta \beta(\omega+2, \eta+1) {}_2F_1 \left(\omega+\eta+\frac{p-1}{p}, \omega+2, \omega+\eta+3; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \right. \\
& \quad \left. + |w(u)|^\zeta \beta(\omega+1, \eta+2) {}_2F_1 \left(\omega+\eta+\frac{p-1}{p}, \omega+1, \omega+\eta+3; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \right]^{\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır $\square$

Sonuç 4.74. Teorem 4.73'te $\omega = \eta$ alınırsa (4.38) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
& \int_u^v \frac{(v^p - u^p)^\omega (v^p - \mathcal{X}^p)^\omega w(\mathcal{X})}{\mathcal{X}^{2\omega p}} d\mathcal{X} \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{2\omega+1}}{pu^{(2\omega+1)p-1}} \left(\beta(\omega+1, \omega+1) {}_2F_1 \left(2\omega+\frac{p-1}{p}, \omega+1; 2\omega+2; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \right)^{1-\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left[|w(v)|^\zeta \beta(\omega+2, \omega+1)_2F_1 \left(2\omega + \frac{p-1}{p}, \omega+2; 2\omega+3; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \right. \\ & \left. + |w(u)|^\zeta \beta(\omega+1, \omega+2)_2F_1 \left(2\omega + \frac{p-1}{p}, \omega+1; 2\omega+3; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \right]^{\frac{1}{\zeta}} \end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.75. Teorem 4.73'te $p=-1$ alınırsa, (4.38) eşitsizliği (3.5) eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 4.76. $w : [u, v] \subseteq [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $\zeta \geq 1$ olmak üzere eğer $|w|^\zeta, [u, v]$ üzerinde p -konveks ve $\omega, \eta > 0, p > 0$ ise

$$\begin{aligned} & \int_u^v \frac{(\mathcal{K}^p - u^p)^\omega (v^p - \mathcal{K}^p)^\eta w(\mathcal{K})}{\mathcal{K}^{(\omega+\eta)p}} d\mathcal{K} \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p v^{(\omega+\eta)p-1}} \left(\beta(\eta+1, \omega+1)_2F_1 \left(\omega + \eta + \frac{(p-1)}{p}, \eta+1; \omega + \eta + 2; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \right)^{1-\frac{1}{\zeta}} \\ & \times \left[|w(u)|^\zeta \beta(\eta+2, \omega+1)_2F_1 \left(\omega + \eta + \frac{(p-1)}{p}, \eta+2; \eta + \omega + 3; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \right. \\ & \left. + |w(v)|^\zeta \beta(\eta+1, \omega+2)_2F_1 \left(\omega + \eta + \frac{(p-1)}{p}, \eta+1; \eta + \omega + 3; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \right]^{\frac{1}{\zeta}} \end{aligned} \quad (4.39)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $|w|^\zeta, [u, v]$ Üzerinde p -konveks olduğundan, her $\theta \in [0, 1]$ için Lemma 4.64 ve power mean integral eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \int_u^v \frac{(\mathcal{K}^p - u^p)^\omega (v^p - \mathcal{K}^p)^\eta w(\mathcal{K})}{\mathcal{K}^{(\omega+\eta)p}} d\mathcal{K} \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \int_0^1 \frac{(1-\theta)^\omega \theta^\eta \left| w \left((\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{1/p} \right) \right|}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\omega+\eta+\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{(1-\theta)^\omega \theta^\eta}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\omega+\eta+\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \right)^{1-\frac{1}{\zeta}} \\ & \times \left(\int_0^1 \frac{(1-\theta)^\omega \theta^\eta \left| w \left((\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{1/p} \right) \right|^\zeta}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\omega+\eta+\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{(1-\theta)^{\omega}\theta^{\eta}}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\omega+\eta\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \right)^{1-\frac{1}{\zeta}} \\
&\times \left(\int_0^1 \frac{(1-\theta)^{\omega}\theta^{\eta} \left(\theta|w(u)|^{\zeta} + (1-\theta)|w(v)|^{\zeta} \right)}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\omega+\eta\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
&= \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{(1-\theta)^{\omega}\theta^{\eta}}{v^{(\omega+\eta)p-1} \left(1 - \left(1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \theta \right)^{\omega+\eta\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \right)^{1-\frac{1}{\zeta}} \\
&\times \left(\int_0^1 \frac{(1-\theta)^{\omega}\theta^{\eta} \left(\theta|w(u)|^{\zeta} + (1-\theta)|w(v)|^{\zeta} \right)}{v^{(\omega+\eta)p-1} \left(1 - \left(1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \theta \right)^{\omega+\eta\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
&= \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{pv^{(\omega+\eta)p-1}} \left(\beta(\eta+1, \omega+1) F_1 \left(\omega+\eta+\frac{(p-1)}{p}, \eta+1; \omega+\eta+2; 1-\frac{u^p}{v^p} \right) \right)^{1-\frac{1}{\zeta}} \\
&\times \left[|w(u)|^{\zeta} \beta(\eta+2, \omega+1) {}_2F_1 \left(\omega+\eta+\frac{(p-1)}{p}, \eta+2; \eta+\omega+3; 1-\frac{u^p}{v^p} \right) \right. \\
&\left. + |w(v)|^{\zeta} \beta(\eta+1, \omega+2) {}_2F_1 \left(\omega+\eta+\frac{(p-1)}{p}, \eta+1; \eta+\omega+3; 1-\frac{u^p}{v^p} \right) \right]^{\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 4.77. Teorem 4.76'da $\omega = \eta$ alınırsa (4.39) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
&\int_u^v \frac{(\varkappa^p - u^p)^{\omega} (v^p - \varkappa^p)^{\omega} w(\varkappa)}{\varkappa^{2\omega p}} d\varkappa \\
&\leq \frac{(v^p - u^p)^{2\omega+1}}{pv^{p-1}} \left(\beta(\omega+1, \omega+1) F_1 \left(\omega+\eta+\frac{(p-1)}{p}, \omega+1; 2\omega+2; 1-\frac{u^p}{v^p} \right) \right)^{1-\frac{1}{\zeta}} \\
&\times \beta(\omega+2, \omega+1) \left[|w(u)|^{\zeta} F_1 \left(\omega+\eta+\frac{(p-1)}{p}, \omega+2; 2\omega+3; 1-\frac{u^p}{v^p} \right) \right. \\
&\left. + |w(v)|^{\zeta} F_1 \left(\omega+\eta+\frac{(p-1)}{p}, \omega+1; 2\omega+3; 1-\frac{u^p}{v^p} \right) \right]^{\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.78. Teorem 4.76'da $p = 1$ alınırsa (4.39) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
&\int_u^v \frac{(\varkappa^p - u^p)^{\omega} (v^p - \varkappa^p)^{\eta} w(\varkappa)}{\varkappa^{\omega+\eta}} d\varkappa \\
&\leq (v-u)^{\omega+\eta+1} \beta(\eta+1, \omega+1)^{1-\frac{1}{\zeta}} \left[|w(u)|^{\zeta} \beta(\eta+2, \omega+1) + |w(v)|^{\zeta} \beta(\eta+1, \omega+2) \right]^{\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 4.79. $w : [u, v] \subseteq [0, \infty) \rightarrow R$ sürekli bir fonksiyon ve $\vartheta, \zeta > 1$ olmak üzere eğer

$|w|^\zeta, [u, v]$ üzerinde p -konveks ve $\eta, \omega > 0, p < 0$ ise

$$\begin{aligned} & \int_u^v \frac{(v^p - u^p)^\omega (v^p - x^p)^\eta w(x)}{x^{(\omega+\eta)p}} dx \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p u^{(\omega+\eta+1)p-1}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}}(\vartheta \omega + 1, \eta \vartheta + 1) \\ & \times {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\left(\omega + \eta + \frac{p-1}{p} \right) \vartheta, \omega \vartheta + 1; (\eta + \omega) \vartheta + 2; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \left(\frac{|w(v)|^\zeta + |w(u)|^\zeta}{2} \right)^{1/\zeta} \end{aligned} \quad (4.40)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikte $1/\zeta + 1/\vartheta = 1$ 'dir.

İspat. $|w|^\zeta, [u, v]$ aralığında p -konveks olduğundan, her $\theta \in [0, 1]$ için Lemma 4.61

ve Hölder integral eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \int_u^v \frac{(v^p - u^p)^\omega (v^p - x^p)^\eta w(x)}{x^{(\omega+\eta)p}} dx \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^\eta}{(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{\omega+\eta+\frac{p-1}{p}}} \left| w \left((\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{1/p} \right) \right| d\theta \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{\theta^{\omega \vartheta} (1-\theta)^{\eta \vartheta}}{(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{(\omega+\eta+\frac{p-1}{p}) \vartheta}} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\ & \times \left(\int_0^1 \left| w \left((\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{\frac{1}{p}} \right) \right|^\zeta d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{\theta^{\omega \vartheta} (1-\theta)^{\eta \vartheta}}{(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{(\omega+\eta+\frac{p-1}{p}) \vartheta}} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\ & \times \left(\int_0^1 \left(\theta |w(v)|^\zeta + (1-\theta) |w(u)|^\zeta \right) d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\ & = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{\theta^{\omega \vartheta} (1-\theta)^{\eta \vartheta}}{u^{((\omega+\eta+1)p-1) \vartheta} \left(1 - \left(1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \theta \right)^{(\omega+\eta+\frac{p-1}{p}) \vartheta}} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\int_0^1 \left(\theta |w(v)|^\zeta + (1-\theta) |w(u)|^\zeta \right) d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{pu^{(\omega+\eta+1)p-1}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}}(\omega\vartheta+1, \eta\vartheta+1) \\
& \times {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\left(\omega + \eta + \frac{p-1}{p} \right) \vartheta, \omega\vartheta+1; (\eta+\omega)\vartheta+2; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \left(\frac{|w(v)|^\zeta + |w(u)|^\zeta}{2} \right)^{1/\zeta}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. İspat tamamlanır. $\square$

Sonuç 4.80. Teorem 4.79’da $\eta = \omega$ alınırsa (4.40) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
& \int_u^v \frac{(x^p - u^p)^\omega (v^p - x^p)^\omega w(x)}{x^{2mp}} dx \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{2\omega+1}}{pu^{(\omega+\eta+1)p-1}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}}(\omega\vartheta+1, \omega\vartheta+1) {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\left(2\omega + \frac{p-1}{p} \right) \vartheta, \omega\vartheta+1; 2\omega\vartheta+2; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \\
& \times \left(\frac{|w(v)|^\zeta + |w(u)|^\zeta}{2} \right)^{1/\zeta}
\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür

Sonuç 4.81. Teorem 4.79’da $p = -1$ ise (4.40) eşitsizliği (3.6) eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 4.82. $w : [u, v] \subseteq [0, \infty) \rightarrow R$ sürekli bir fonksiyon ve $\vartheta, \zeta > 1$ olmak üzere eğer

$|w|^\zeta, [u, v]$ üzerinde p -konveks ve $\omega, \eta > 0, p > 0$ ise

$$\begin{aligned}
& \int_u^v \frac{(x^p - u^p)^\omega (v^p - x^p)^\eta w(x)}{x^{(\omega+\eta)p}} dx \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{pv^{(\omega+\eta+1)p-1}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}}(\vartheta\eta+1, \omega\vartheta+1) \\
& \times {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\left(\omega + \eta + \frac{p-1}{p} \right) \vartheta, \eta\vartheta+1; (\omega+\eta)\vartheta+2; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \left(\frac{|w(u)|^\zeta + |w(v)|^\zeta}{2} \right)^{1/\zeta}
\end{aligned} \tag{4.41}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikte $1/\zeta + 1/\vartheta = 1$ ’dir.

İspat. Lemma 4.1’i ve $|w|^\zeta$ ’nin Hölder integral eşitsizliği ile p -konveksliğini kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \int_u^v \frac{(\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa)}{\varkappa^{(\omega+\eta)p}} d\varkappa \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \int_0^1 \frac{(1-\theta)^\omega \theta^\eta}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\frac{(p-1)}{p}}} \left| w\left((\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{1/p}\right) \right| d\theta \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{(1-\theta)^{\omega\vartheta} \theta^{\eta\vartheta}}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\frac{(p-1)\vartheta}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \left| w\left((\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\frac{1}{p}}\right) \right|^\zeta d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{(1-\theta)^{\omega\vartheta} \theta^{\eta\vartheta}}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\frac{(p-1)\vartheta}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \left(\theta |w(u)|^\zeta + (1-\theta) |w(v)|^\zeta \right) d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{(1-\theta)^{\omega\vartheta} \theta^{\eta\vartheta}}{v^{((\omega+\eta+1)p-1)\vartheta} \left(1 - \left(1 - \frac{vp}{up}\right)\theta\right)^{(\omega+\eta+\frac{p-1}{p})\vartheta}} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \left(\theta |w(u)|^\zeta + (1-\theta) |w(v)|^\zeta \right) d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{pv^{(\omega+\eta+1)p-1}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}}(\eta\vartheta+1, \omega\vartheta+1) \\
& \quad \times {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\left(\omega + \eta + \frac{(p-1)}{p} \right) \vartheta, \eta\vartheta+1; (\omega+\eta)\vartheta+2; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \left(\frac{|w(u)|^\zeta + |w(v)|^\zeta}{2} \right)^{1/\zeta}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. İspat tamamlanır. $\square$

Sonuç 4.83. Teorem 4.82’de $\omega = \eta$ alınırsa (4.41) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
& \int_u^v \frac{(\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\omega w(\varkappa)}{\varkappa^{2\omega p}} d\varkappa \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{2\omega+1}}{pv^{((2\omega+1)p-1)}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}}(\omega\vartheta+1, \omega\vartheta+1) \\
& \quad \times {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\left(\omega + \eta + \frac{(p-1)}{p} \right) \vartheta, \omega\vartheta+1; 2\omega\vartheta+2; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \left(\frac{|w(u)|^\zeta + |w(v)|^\zeta}{2} \right)^{1/\zeta}
\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.84. Teorem 4.82’de $p = 1$ alırsa (4.41) eşitsizliği

$$\begin{aligned} & \int_u^v \frac{(x-u)^\omega (v-x)^\eta w(x)}{x^{\omega+\eta}} dx \\ & \leq \frac{(v-u)^{\omega+\eta+1}}{v^{\omega+\eta}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}} (\eta\vartheta+1, \omega\vartheta+1) {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left((\omega+\eta)\vartheta, \eta\vartheta+1; (\omega+\eta)\vartheta+2; 1-\frac{u}{v} \right)^{1/\zeta} \\ & \quad \times \left(\frac{|w(u)|^\zeta + |w(v)|^\zeta}{2} \right)^{1/\zeta} \end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 4.85. $w : [u, v] \subseteq [0, \infty) \rightarrow R$ sürekli bir fonksiyon ve $\zeta > 1$ olmak üzere eğer

$|w|^\zeta, [u, v]$ üzerinde p -konveks ve $\eta, \omega > 0, p < 0$ ise

$$\begin{aligned} & \int_u^v \frac{(x^p - u^p)^\omega (v^p - x^p)^\eta w(x)}{x^{(\omega+\eta)p}} dx \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{pu^{(\omega+\eta+1)p-1}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}} (\omega\vartheta+1, \eta\vartheta+1) \left[{}_2F_1 \left(\left(\omega + \eta + \frac{p-1}{p} \right) \zeta, 2; 3; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \frac{|w(v)|^\zeta}{2} \right. \\ & \quad \left. + {}_2F_1 \left(\left(\omega + \eta + \frac{p-1}{p} \right) \zeta, 1; 3; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \frac{|w(u)|^\zeta}{2} \right] \end{aligned} \quad (4.42)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikte $1/\zeta + 1/\vartheta = 1$ ’dir.

İspat. $|w|^\zeta, [u, v]$ aralığında p -konveks olduğundan, her $\theta \in [0, 1]$ için Lemma 4.61

ve Hölder integral eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \int_u^v \frac{(x^p - u^p)^\omega (v^p - x^p)^\eta w(x)}{x^{(\omega+\eta)p}} dx \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^\eta}{(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{\omega+\eta+\frac{p-1}{p}}} \left| w \left((\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{1/p} \right) \right| d\theta \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \theta^{\omega\vartheta} (1-\theta)^{\eta\vartheta} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\ & \quad \times \left(\int_0^1 \frac{1}{(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{(\omega+\eta+\frac{p-1}{p})\zeta}} \left| w \left((\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{1/p} \right) \right|^\zeta d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\ & = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \theta^{\omega\vartheta} (1-\theta)^{\eta\vartheta} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\int_0^1 \frac{\left(\theta |w(v)|^\zeta + (1-\theta) |w(u)|^\zeta \right)}{(\theta v^p + (1-\theta) u^p)^{(\omega+\eta+\frac{p-1}{p})\zeta}} d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \theta^{\omega\vartheta} (1-\theta)^{\eta\vartheta} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\
& \times \left(\int_0^1 \frac{\left(\theta |w(v)|^\zeta + (1-\theta) |w(u)|^\zeta \right)}{u^{(\omega+\eta+1)p-1} \zeta \left(1 - \left(1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \theta \right)^{(\omega+\eta+\frac{p-1}{p})\zeta}} d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{pu^{(\omega+\eta+1)p-1}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}}(\omega\vartheta+1, \eta\vartheta+1) \left[{}_2F_1 \left(\left(\omega + \eta + \frac{p-1}{p} \right) \zeta, 2; 3; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \frac{|w(v)|^\zeta}{2} \right. \\
& \quad \left. + {}_2F_1 \left(\left(\omega + \eta + \frac{p-1}{p} \right) \zeta, 1; 3; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \frac{|w(u)|^\zeta}{2} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 4.86. Teorem 4.85'te $\omega = \eta$ alınırsa (4.42) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
& \int_u^v \frac{(x^p - u^p)^\omega (v^p - x^p)^\omega w(x)}{x^{2mp}} dx \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{2\omega+1}}{pu^{(2\omega+1)p-1}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}}(\omega\vartheta+1, \omega\vartheta+1) \left[{}_2F_1 \left(\left(2\omega + \frac{p-1}{p} \right) \zeta, 2; 3; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \frac{|w(v)|^\zeta}{2} \right. \\
& \quad \left. + {}_2F_1 \left(\left(2\omega + \frac{p-1}{p} \right) \zeta, 1; 3; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \frac{|w(u)|^\zeta}{2} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.87. Teorem 4.85'te $p=-1$ alınırsa, (4.42) eşitsizliği (3.8) eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 4.88. $w : [u, v] \subseteq [0, \infty) \rightarrow R$ sürekli bir fonksiyon ve $\zeta > 1$ olmak üzere eğer

$|w|^\zeta, [u, v]$ üzerinde p -konveks ve $\omega, \eta > 0, p > 0$ ise

$$\begin{aligned}
& \int_u^v \frac{(x^p - u^p)^\omega (v^p - x^p)^\eta w(x)}{x^{(\omega+\eta)p}} dx \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{pv^{((\omega+\eta+1)p-1)}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}}(\eta\vartheta+1, \omega\vartheta+1) \left[{}_2F_1 \left(\left(\omega + \eta + \frac{(p-1)}{p} \right) \zeta, 2; 3; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \frac{|w(u)|^\zeta}{2} \right. \\
& \quad \left. + {}_2F_1 \left(\left(\omega + \eta + \frac{(p-1)}{p} \right) \zeta, 1; 3; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \frac{|w(v)|^\zeta}{2} \right]^{\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned} \tag{4.43}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikte $1/\zeta + 1/\vartheta = 1$ 'dir.

İspat. $|w|^\zeta, [u, v]$ aralığında p -konveks olduğundan, her $\theta \in [0, 1]$ için Lemma 4.64

ve Hölder integral eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \int_u^v \frac{(\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa)}{\varkappa^{\omega+\eta}} d\varkappa \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \int_0^1 \frac{(1-\theta)^\omega \theta^\eta}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\omega+\eta+\frac{(p-1)}{p}}} \left| w((\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{1/p}) \right| d\theta \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left[\left(\int_0^1 (1-\theta)^\omega \theta^\eta d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \right. \\
& \quad \times \left. \left(\int_0^1 \frac{1}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{(\omega+\eta+\frac{(p-1)}{p})\zeta}} \left| w((\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{1/p}) \right|^\zeta d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \right] \\
& = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 (1-\theta)^\omega \theta^\eta d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \frac{(\theta |w(u)|^\zeta + (1-\theta) |w(v)|^\zeta)}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)} d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 (1-\theta)^\omega \theta^\eta d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \frac{(\theta |w(u)|^\zeta + (1-\theta) |w(v)|^\zeta)}{p v^{((\omega+\eta+1)p-1)\zeta} (1 - (1 - \frac{u^p}{v^p}) \theta)^{(\omega+\eta+\frac{(p-1)}{p})\zeta}} d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p v^{((\omega+\eta+1)p-1)\zeta}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}} (\eta \vartheta + 1, \omega \vartheta + 1) \\
& \quad \times \left[{}_2F_1 \left(\left(\omega + \eta + \frac{(p-1)}{p} \right) \zeta, 2; 3; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \frac{|w(u)|^\zeta}{2} \right. \\
& \quad \left. + {}_2F_1 \left(\left(\omega + \eta + \frac{(p-1)}{p} \right) \zeta, 1; 3; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \frac{|w(v)|^\zeta}{2} \right]^{\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

Sonuç 4.89. Teorem 4.88’de $\omega = \eta$ alınırsa (4.43) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
& \int_u^v \frac{(\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\omega w(\varkappa)}{\varkappa^{2\omega p}} d\varkappa \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{2\omega+1}}{p((2\omega+1)p-1)} \beta^{\frac{1}{\vartheta}} (\omega\vartheta + 1, \omega\vartheta + 1) \left[{}_2F_1 \left(\left(2\omega + \frac{(p-1)}{p} \right) \zeta, 2; 3; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \frac{|w(u)|^\zeta}{2} \right. \\
& \quad \left. + {}_2F_1 \left(\left(2\omega + \frac{(p-1)}{p} \right) \zeta, 1; 3; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \frac{|w(v)|^\zeta}{2} \right]^{\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.90. Teorem 4.88’de $p = 1$ alınırsa (4.43) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
& \int_u^v \frac{(\varkappa - u)^\omega (v - \varkappa)^\eta w(\varkappa)}{\varkappa^{\omega+\eta}} d\varkappa \\
& \leq \frac{(v - u)^{\omega+\eta+1}}{v^{\omega+\eta}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}} (\eta\vartheta + 1, \omega\vartheta + 1) \left[{}_2F_1 \left((\omega + \eta)\zeta, 2; 3; 1 - \frac{u}{v} \right) \frac{|w(u)|^\zeta}{2} \right. \\
& \quad \left. + {}_2F_1 \left((\omega + \eta)\zeta, 1; 3; 1 - \frac{u}{v} \right) \frac{|w(v)|^\zeta}{2} \right]^{\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 4.91. $w : [u, v] \subseteq [0, \infty) \rightarrow R$ sürekli bir fonksiyon ve $\zeta > 1$ olmak üzere eğer

$|w|^\zeta, [u, v]$ üzerinde p –konveks ve $\eta, \omega > 0, p < 0$ ise

$$\begin{aligned}
& \int_u^v \frac{(\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa)}{\varkappa^{(\omega+\eta)p}} d\varkappa \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{pu^{(\omega+\eta+1)p-1}} {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left((\omega + \eta + \frac{p-1}{p})\vartheta, 1, 2; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \left[\beta(\omega\zeta + 2, \eta\zeta + 1) |w(v)|^\zeta \right. \\
& \quad \left. + \beta(\omega\zeta + 1, \eta\zeta + 2) |w(u)|^\zeta \right]^{\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned} \tag{4.44}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikte $1/\zeta + 1/\vartheta = 1$ ’dir.

İspat. $|w|^\zeta, [u, v]$ aralığında p –konveks olduğundan, her $\theta \in [0, 1]$ için Lemma 4.61

ve Hölder integral eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \int_u^v \frac{(x^p - u^p)^\omega (v^p - x^p)^\eta w(x)}{x^{\omega+\eta)p}} dx \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^\eta}{(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{\omega+\eta+\frac{p-1}{p}}} \left| w((\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{1/p}) \right| d\theta \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{1}{(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{((\omega+\eta+\frac{p-1}{p})\vartheta)}} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 (1-\theta)^\eta \theta^{\omega\zeta} \left| w((\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{1/p}) \right|^\zeta d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{1}{(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{((\omega+\eta+\frac{p-1}{p})\vartheta)}} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 (1-\theta)^\eta \theta^{\omega\zeta} \left(\theta |w(v)|^\zeta + (1-\theta) |w(u)|^\zeta \right) d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{1}{u^{(\eta+\omega+1)p-1} \left(1 - \left(1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \theta \right)^{((\omega+\eta+\frac{p-1}{p})\vartheta)}} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 (1-\theta)^\eta \theta^{\omega\zeta} \left(\theta |w(v)|^\zeta + (1-\theta) |w(u)|^\zeta \right) d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p u^{(\omega+\eta+1)p-1}} {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\left(\omega + \eta + \frac{p-1}{p} \right) \vartheta, 1; 2; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \\
& \quad \times \left[\beta(\omega\zeta + 2, \eta\zeta + 1) |w(v)|^\zeta + \beta(\omega\zeta + 1, \eta\zeta + 2) |w(u)|^\zeta \right]^{\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. İspat tamamlanır. $\square$

Sonuç 4.92. Teorem 4.91’de $\omega = \eta$ alınırsa (4.44) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
& \int_u^v \frac{(x^p - u^p)^\omega (v^p - x^p)^\omega w(x)}{x^{2mp}} dx \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{2\omega+1}}{p u^{(2\omega+1)p-1}} {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\left(2\omega + \frac{p-1}{p} \right) \vartheta, 1; 2; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \left[\beta(\omega\zeta + 2, \omega\zeta + 1) |w(v)|^\zeta \right. \\
& \quad \left. + \beta(\omega\zeta + 1, \omega\zeta + 2) |w(u)|^\zeta \right]^{\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.93. Teorem (4.91)’de $p=-1$ alınırsa (4.44) eşitsizliği (3.8) eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 4.94. $w : [u, v] \subseteq [0, \infty) \rightarrow R$ sürekli bir fonksiyon ve $\zeta > 1$ olmak üzere eğer

$|w|^\zeta, [u, v]$ üzerinde p -konveks ve $\omega, \eta > 0, p > 0$ ise

$$\begin{aligned}
& \int_u^v \frac{(x^p - u^p)^\omega (v^p - x^p)^\eta w(x)}{x^{(\omega+\eta)p}} dx \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{pv^{(\omega+\eta+1)p-1}} {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\left(\omega + \eta + \frac{p-1}{p} \right) \vartheta, 1; 2; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \left[\beta(\eta\zeta + 2, \omega\zeta + 1) |w(u)|^\zeta \right. \\
& \quad \left. + \beta(\eta\zeta + 1, \omega\zeta + 2) |w(v)|^\zeta \right]^{\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned} \tag{4.45}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikte $1/\zeta + 1/\vartheta = 1$ 'dir.

İspat. $|w|^\zeta, [u, v]$ aralığında p -konveks olduğundan, her $\theta \in [0, 1]$ için Lemma 4.64

ve Hölder integral eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \int_u^v \frac{(x^p - u^p)^\omega (v^p - x^p)^\eta w(x)}{x^{(\omega+\eta)p}} dx \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \int_0^1 \frac{(1-\theta)^\omega \theta^\eta}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\frac{(p-1)}{p}}} \left| w \left((\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{1/p} \right) \right| d\theta \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{1}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{(\omega+\eta+\frac{p-1}{p})\vartheta}} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 (1-\theta)^{\omega\zeta} \theta^{\eta\zeta} \left| w \left((\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{1/p} \right) \right|^\zeta d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{1}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{(\omega+\eta+\frac{p-1}{p})\vartheta}} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 (1-\theta)^{\omega\zeta} \theta^{\eta\zeta} \left(\theta |w(u)|^\zeta + (1-\theta) |w(v)|^\zeta \right) d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{1}{v^{((\omega+\eta+1)p-1)\vartheta} \left(1 - \left(1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \theta \right)^{(\omega+\eta+\frac{p-1}{p})\vartheta}} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 (1-\theta)^{\omega\zeta} \theta^{\eta\zeta} \left(\theta |w(u)|^\zeta + (1-\theta) |w(v)|^\zeta \right) d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{pv^{((\omega+\eta+1)p-1)}} {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\left(\omega + \eta + \frac{p-1}{p} \right) \vartheta, 1; 2; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \\
& \quad \times \left[\beta(\eta\zeta + 2, \omega\zeta + 1) |w(u)|^\zeta + \beta(\eta\zeta + 1, \omega\zeta + 2) |w(v)|^\zeta \right]^{\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. İspat tamamlanır. $\square$

Sonuç 4.95. Teorem 4.94'te $\omega = \eta$ alınırsa (4.45) eşitsizliği

$$\begin{aligned} & \int_u^v \frac{(\mathcal{K}^p - u^p)^\omega (v^p - \mathcal{K}^p)^\eta w(\mathcal{K})}{\mathcal{K}^{2\omega p}} d\mathcal{K} \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{2\omega+1}}{pv^{(2\omega+1)p-1}} {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\left(2\omega + \frac{p-1}{p} \right) \vartheta, 1, 2; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \left[\beta(\omega\zeta + 2, \omega\zeta + 1) |w(u)|^\zeta \right. \\ & \quad \left. + \beta(\omega\zeta + 1, \omega\zeta + 2) |w(v)|^\zeta \right]^{\frac{1}{\zeta}} \end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.96. Teorem 4.94'te $p = 1$ alınırsa (4.45) eşitsizliği

$$\begin{aligned} & \int_u^v \frac{(\mathcal{K} - u)^\omega (v - \mathcal{K})^\eta w(\mathcal{K})}{\mathcal{K}^{\omega+\eta}} d\mathcal{K} \\ & \leq \frac{(v - u)^{\omega+\eta+1}}{v^{\omega+\eta}} {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left((\omega + \eta) \vartheta, 1, 2; 1 - \frac{u}{v} \right) \left[\beta(\eta\zeta + 2, \omega\zeta + 1) |w(u)|^\zeta \right. \\ & \quad \left. + \beta(\eta\zeta + 1, \omega\zeta + 2) |w(v)|^\zeta \right]^{\frac{1}{\zeta}} \end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 4.97. $w : [u, v] \subseteq [0, \infty) \rightarrow R$ sürekli bir fonksiyon ve $\zeta \geq 1$ olmak üzere eğer

$|w|^\zeta, [u, v]$ üzerinde $s - p -$ konveks ve $\eta, \omega > 0, p < 0, s \in [0, 1]$ ise

$$\begin{aligned} & \int_u^v \frac{(\mathcal{K}^p - u^p)^\omega (v^p - \mathcal{K}^p)^\eta w(\mathcal{K})}{\mathcal{K}^{(\omega+\eta)p}} d\mathcal{K} \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{pv^{(\omega+\eta+1)p-1}} \left(\beta(\omega + 1, \eta + 1) {}_2F_1 \left(\omega + \eta + \frac{p-1}{p}, \omega + 1; \omega + \eta + 2; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \right)^{1-\frac{1}{\zeta}} \\ & \quad \times \left[|w(v)|^\zeta \beta(\omega + s + 1, \eta + 1) {}_2F_1 \left(\omega + \eta + \frac{p-1}{p}, \omega + s + 1; \omega + \eta + s + 2; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \right. \\ & \quad \left. + |w(u)|^\zeta \beta(\omega + 1, \eta + s + 1) {}_2F_1 \left(\omega + \eta + \frac{p-1}{p}, \omega + 1; \omega + \eta + s + 2; 1 - \frac{v^p}{v^p} \right) \right]^{\frac{1}{\zeta}} \end{aligned} \tag{4.46}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $|w|^\zeta, [u, v]$ üzerinde ikinci anlamda $s - p -$ konveks olduğundan, her $\theta \in [0, 1]$

için Lemma 4.61'i ve power mean integral eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \int_u^v \frac{(v^p - u^p)^\omega (v^p - \mathcal{X}^p)^\eta w(\mathcal{X})}{\mathcal{X}^{(\omega+\eta)p}} d\mathcal{X} \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\eta+\omega+1}}{p} \int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^\eta \left| w \left((\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{1/p} \right) \right|}{(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{\omega+\eta+\frac{p-1}{p}}} d\theta \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^\eta}{(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{\omega+\eta+\frac{p-1}{p}}} d\theta \right)^{1-\frac{1}{\zeta}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^\eta \left| w \left((\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{1/p} \right) \right|^\zeta}{(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{\omega+\eta+\frac{p-1}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\eta+\omega+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^\eta}{(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{\omega+\eta+\frac{p-1}{p}}} d\theta \right)^{1-\frac{1}{\zeta}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^\eta \left(|\theta^s w(v)|^\zeta + (1-\theta)^s |w(u)|^\zeta \right)}{(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{\omega+\eta+\frac{p-1}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^\eta}{u^{(\eta+\omega+1)p-1} \left(1 - \left(1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \theta \right)^{\omega+\eta+\frac{p-1}{p}}} d\theta \right)^{1-\frac{1}{\zeta}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^\eta \left(\theta^s |w(v)|^\zeta + (1-\theta)^s |w(u)|^\zeta \right)}{u^{(\eta+\omega+1)p-1} \left(1 - \left(1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \theta \right)^{\omega+\eta+\frac{p-1}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{pu^{(\omega+\eta+1)p-1}} \left(\beta(\omega+1, \eta+1) F_1 \left(\omega+\eta+\frac{p-1}{p}, \omega+1; \omega+\eta+2; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \right)^{1-\frac{1}{\zeta}} \\
& \quad \times \left[|w(v)|^\zeta \beta(\omega+s+1, \eta+1) {}_2F_1 \left(\omega+\eta+\frac{p-1}{p}, \omega+s+1; \omega+\eta+s+2; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \right. \\
& \quad \left. + |w(u)|^\zeta \beta(\omega+1, \eta+s+1) {}_2F_1 \left(\omega+\eta+\frac{p-1}{p}, \omega+1; \omega+\eta+s+2; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \right]^{\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 4.98. Teorem 4.97’de $\omega = \eta$ alınırsa (4.46) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
& \int_u^v \frac{(v^p - u^p)^\omega (v^p - \mathcal{X}^p)^\omega w(\mathcal{X})}{\mathcal{X}^{2mp}} d\mathcal{X} \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{2\omega+1}}{pu^{(2\omega+1)p-1}} \left(\beta(\omega+1, \omega+1) {}_2F_1 \left(2\omega+\frac{p-1}{p}, \omega+1; 2\omega+2; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \right)^{1-\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left[|w(v)|^\zeta \beta(\omega + s + 1, \omega + 1) {}_2F_1 \left(2\omega + \frac{p-1}{p}, \omega + s + 1; 2\omega + s + 2; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \right. \\ & \left. + |w(u)|^\zeta \beta(\omega + 1, \omega + s + 1) {}_2F_1 \left(2\omega + \frac{p-1}{p}, \omega + 1; 2\omega + s + 2; 1 - \frac{v^p}{b_p} \right) \right]^{\frac{1}{\zeta}} \end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.99. Teorem 4.97’de $p = -1$ alınırsa (4.46) eşitsizliği

$$\begin{aligned} & \int_u^v (\varkappa - u)^\omega (v - \varkappa)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\ & \leq \left(\frac{u}{v} \right)^{\omega+1} (v - u)^{\omega+\eta+1} \left(\beta(\omega + 1, \eta + 1) {}_2F_1 \left(\omega + \eta + 2, \omega + 1; \omega + \eta + 2; 1 - \frac{u}{v} \right) \right)^{1-\frac{1}{\zeta}} \\ & \times \left[|w(v)|^\zeta \beta(\omega + s + 1, \eta + 1) {}_2F_1 \left(\omega + \eta + 2, \omega + s + 1; \omega + \eta + s + 2; 1 - \frac{u}{v} \right) \right. \\ & \left. + |w(u)|^\zeta \beta(\omega + 1, \eta + s + 1) {}_2F_1 \left(\omega + \eta + 2, \omega + 1; \omega + \eta + s + 2; 1 - \frac{u}{v} \right) \right]^{\frac{1}{\zeta}} \end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 4.100. $w : [u, v] \subseteq [0, \infty) \rightarrow R$ sürekli bir fonksiyon ve $\zeta \geq 1$ olmak üzere eğer

$|w|^\zeta, [u, v]$ üzerinde $s - p -$ konveks ve $\omega, \eta > 0, p > 0, s \in [0, 1]$ ise

$$\begin{aligned} & \int_u^v \frac{(\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa)}{\varkappa^{(\omega+\eta)p}} d\varkappa \tag{4.47} \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p v^{((\omega+\eta+1)p-1)}} \left(\beta(\eta + 1, \omega + 1) {}_2F_1 \left(\omega + \eta + \frac{(p-1)}{p}, \eta + 1; \omega + \eta + 2; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \right)^{1-\frac{1}{\zeta}} \\ & \times \left[|w(u)|^\zeta \beta(\eta + s + 1, \omega + 1) {}_2F_1 \left(\omega + \eta + \frac{(p-1)}{p}, \eta + s + 1; \omega + \eta + s + 2; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \right. \\ & \left. + |w(v)|^\zeta \beta(\eta + 1, \omega + s + 1) {}_2F_1 \left(\omega + \eta + \frac{(p-1)}{p}, \eta + 1; \eta + \omega + s + 2; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \right]^{\frac{1}{\zeta}} \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $|w|^\zeta, [u, v]$ üzerinde ikinci anlamda $s - p -$ konveks olduğundan, her $\theta \in [0, 1]$

için Lemma 4.64 ve power mean integral eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \int_u^v \frac{(\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa)}{\varkappa^{(\omega+\eta)p}} d\varkappa \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \int_0^1 \frac{(1-\theta)^\omega \theta^\eta \left| w\left((\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{1/p}\right) \right|}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\omega+\eta+\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{(1-\theta)^\omega \theta^\eta}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\omega+\eta+\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \right)^{1-\frac{1}{\zeta}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \frac{(1-\theta)^\omega \theta^\eta \left| w\left((\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{1/p}\right) \right|^\zeta}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\omega+\eta+\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{(1-\theta)^\omega \theta^\eta}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\omega+\eta+\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \right)^{1-\frac{1}{\zeta}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \frac{(1-\theta)^\omega \theta^\eta \left(|\theta^s w(u)|^\zeta + (1-\theta)^s |w(v)|^\zeta \right)}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\omega+\eta+\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{(1-\theta)^\omega \theta^\eta}{v^{(\omega+\eta)p-1} \left(1 - \left(1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \theta \right)^{\omega+\eta+\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \right)^{1-\frac{1}{\zeta}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \frac{(1-\theta)^\omega \theta^\eta \left(t^s |w(u)|^\zeta + (1-\theta)^s |w(v)|^\zeta \right)}{v^{(\omega+\eta)p-1} \left(1 - \left(1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \theta \right)^{\omega+\eta+\frac{(p-1)}{p}}} d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p v^{((\omega+\eta+1)p-1)}} \left(\beta(\eta+1, \omega+1) F_1 \left(\omega + \eta + \frac{(p-1)}{p}, \eta+1; \omega + \eta + 2; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \right)^{1-\frac{1}{\zeta}} \\
& \quad \times \left[|w(u)|^\zeta \beta(\eta+s+1, \omega+1) {}_2F_1 \left(\omega + \eta + \frac{(p-1)}{p}, \eta+s+1; \omega + \eta + s + 2; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \right. \\
& \quad \left. + |w(v)|^\zeta \beta(\eta+1, \omega+s+1) {}_2F_1 \left(\omega + \eta + \frac{(p-1)}{p}, \eta+1; \eta + \omega + s + 2; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \right]^{\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 4.101. Teorem 4.100'de $\omega = \eta$ alınırsa (4.47) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
& \int_u^v \frac{(\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\omega w(\varkappa)}{\varkappa^{2\omega p}} d\varkappa \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{2\omega+1}}{p v^{(2\omega+1)p-1}} \left(\beta(\omega+1, \omega+1) F_1 \left(2\omega + \frac{(p-1)}{p}, \omega+1; 2\omega+2; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \right)^{1-\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \beta(\omega + s + 1, \omega + 1) \left[|w(u)|^\zeta F_1 \left(2\omega + \frac{(p-1)}{p}, \omega + s + 1; 2\omega + s + 2; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \right. \\ & \left. + |w(v)|^\zeta F_1 \left(2\omega + \frac{(p-1)}{p}, \omega + 1; 2\omega + s + 2; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \right]^{\frac{1}{\zeta}} \end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.102. Teorem 4.100'de $p = 1$ alınırsa (4.47) eşitsizliği

$$\begin{aligned} & \int_u^v \frac{(\varkappa - u)^\omega (v - \varkappa)^\eta w(\varkappa)}{\varkappa^{\omega+\eta}} d\varkappa \\ & \leq \frac{(v-u)^{\omega+\eta+1}}{v^{\omega+\eta}} \left(\beta(\eta + 1, \omega + 1) {}_2F_1 \left(\omega + \eta, \eta + 1; \omega + \eta + 2; 1 - \frac{u}{v} \right) \right)^{1-\frac{1}{\zeta}} \\ & \times \left[|w(u)|^\zeta \beta(\eta + s + 1, \omega + 1) {}_2F_1 \left(\omega + \eta, \eta + s + 1; \omega + \eta + s + 2; 1 - \frac{u}{v} \right) \right. \\ & \left. + |w(v)|^\zeta \beta(\eta + 1, \omega + s + 1) {}_2F_1 \left(\omega + \eta, \eta + 1; \omega + \eta + s + 2; 1 - \frac{u}{v} \right) \right]^{\frac{1}{\zeta}} \end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 4.103. $w : [u, v] \subseteq [0, \infty) \rightarrow R$ sürekli bir fonksiyon ve $\zeta > 1$ olmak üzere eğer

$|w|^\zeta, [u, v]$ üzerinde ikinci anlamda $s - p$ -konveks ve $\omega, \eta > 0, p < 0, s \in [0, 1]$ ise

$$\begin{aligned} & \int_u^v \frac{(\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa)}{\varkappa^{(\omega+\eta)p}} d\varkappa \tag{4.48} \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{pu^{(\omega+\eta+1)p-1}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}}(\omega\vartheta + 1, \eta\vartheta + 1) \\ & \times {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\left(\omega + \eta + \frac{p-1}{p} \right) \vartheta, \omega\vartheta + 1; (\omega + \eta)\vartheta + 2; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \left(\frac{|w(v)|^\zeta + |w(u)|^\zeta}{s+1} \right)^{1/\zeta} \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikte $1/\zeta + 1/\vartheta = 1$ 'dir.

İspat. $|w|^\zeta, [u, v]$ üzerinde ikinci anlamda $s - p$ - konveks olduğundan, her $\theta \in [0, 1]$

için Lemma 4.61 ve Hölder integral eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \int_u^v \frac{(\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa)}{\varkappa^{(\omega+\eta)p}} d\varkappa \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^\eta}{(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{(\omega+\eta+\frac{p-1}{p})}} \left| w \left((\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{1/p} \right) \right| d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{\theta^{\omega\vartheta} (1-\theta)^{\vartheta\eta}}{(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{\left(\omega+\eta+\frac{p-1}{p}\right)}} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\
&\times \left(\int_0^1 \left| w \left((\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{\frac{1}{p}} \right) \right|^\zeta d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
&\leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{\theta^{\omega\vartheta} (1-\theta)^{\vartheta\eta}}{(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{\left(\omega+\eta+\frac{p-1}{p}\right)\vartheta}} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\
&\times \left(\int_0^1 \left(\theta^s |w(v)|^\zeta + (1-\theta)^s |w(u)|^\zeta \right) d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
&= \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{\theta^{\omega\vartheta} (1-\theta)^{\vartheta\eta}}{u^{((\omega+\eta+1)p-1)\vartheta} \left(1 - \left(1 - \frac{v^p}{u^p}\right)\theta\right)^{\left(\omega+\eta+\frac{p-1}{p}\right)\vartheta}} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\
&\times \left(\int_0^1 \left(\theta^s |w(v)|^\zeta + (1-\theta)^s |w(u)|^\zeta \right) d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
&= \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{pu^{(\omega+\eta+1)p-1}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}}(\omega\vartheta+1, \eta\vartheta+1) \\
&\times {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\left(\omega + \eta + \frac{p-1}{p} \right) \vartheta, \omega\vartheta+1; (\omega+\eta)\vartheta+2; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \left(\frac{|w(v)|^\zeta + |w(u)|^\zeta}{s+1} \right)^{1/\zeta}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. İspat tamamlanır. $\square$

Sonuç 4.104. Teorem 4.103'te $\omega = \eta$ alınırsa (4.48) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
&\int_u^v \frac{(\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\omega w(\varkappa)}{\varkappa^{2\omega p}} d\varkappa \\
&\leq \frac{(v^p - u^p)^{2\omega+1}}{pu^{(2\omega+1)p-1}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}}(\omega\vartheta+1, \omega\vartheta+1) \\
&\times {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\left(\omega + \eta + \frac{p-1}{p} \right) \vartheta, \omega\vartheta+1; 2\omega\vartheta+2; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \left(\frac{|w(v)|^\zeta + |w(u)|^\zeta}{s+1} \right)^{1/\zeta}
\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.105. Teorem 4.103'te $p = -1$ alınırsa (4.48) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
&\int_u^v (\varkappa - u)^\omega (v - \varkappa)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\
&\leq \left(\frac{u}{v} \right)^{\omega+1} (v - u)^{\omega+\eta+1} \beta^{\frac{1}{\vartheta}}(\vartheta\omega+1, \eta\vartheta+1)
\end{aligned}$$

$$\times {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left((\omega + \eta + 2)\vartheta, \omega\vartheta + 1; (\eta + \omega)\vartheta + 2; 1 - \frac{u}{v} \right) \left(\frac{|w(v)|^\zeta + |w(u)|^\zeta}{s+1} \right)^{1/\zeta}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 4.106. $w : [u, v] \subseteq [0, \infty) \rightarrow R$ sürekli bir fonksiyon ve $\zeta > 1$ olmak üzere eğer $|w|^\zeta, [u, v]$ üzerinde ikinci anlamda $s - p$ -konveks ve $\omega, \eta > 0, p > 0, s \in [0, 1]$ ise

$$\begin{aligned} & \int_u^v \frac{(\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa)}{\varkappa^{(\omega+\eta)p}} d\varkappa \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{pv^{(\omega+\eta+1)p-1}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}}(\vartheta\eta + 1, \omega\vartheta + 1) \\ & \times {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left((\omega + \eta + \frac{p-1}{p})\vartheta, \eta\vartheta + 1; (\omega + \eta)\vartheta + 2; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \left(\frac{|w(u)|^\zeta + |w(v)|^\zeta}{s+1} \right)^{1/\zeta} \end{aligned} \quad (4.49)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $|w|^\zeta, [u, v]$ üzerinde ikinci anlamda $s - p$ -konveks olduğundan, her $\theta \in [0, 1]$ için Lemma 4.64 ve Hölder integral eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \int_u^v \frac{(\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa)}{\varkappa^{(\omega+\eta)p}} d\varkappa \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \int_0^1 \frac{(1-\theta)^{\omega\theta\eta}}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{(\omega+\eta+\frac{p-1}{p})}} \left| w \left((\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{1/p} \right) \right| d\theta \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{(1-\theta)^{\omega\vartheta\theta\eta\vartheta}}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{(\omega+\eta+\frac{p-1}{p})\vartheta}} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\ & \times \left(\int_0^1 \left| w \left((\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\frac{1}{p}} \right) \right|^\zeta d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{(1-\theta)^{\omega\vartheta\theta\eta\vartheta}}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{(\omega+\eta+\frac{p-1}{p})\vartheta}} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\ & \times \left(\int_0^1 \left(\theta^s |w(u)|^\zeta + (1-\theta)^s |w(v)|^\zeta \right) d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\ & = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{(1-\theta)^{\omega\vartheta\theta\eta\vartheta}}{v^{((\omega+\eta+1)p-1)\vartheta} \left(1 - \left(1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \theta \right)^{(\omega+\eta+\frac{p-1}{p})\vartheta}} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\int_0^1 \left(\theta^s |w(u)|^\zeta + (1-\theta)^s |w(v)|^\zeta \right) d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{pv^{((\omega+\eta+1)p-1)\vartheta}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}}(\vartheta\eta+1, \omega\vartheta+1) \\
& \times {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\left(\omega + \eta + \frac{p-1}{p} \right) \vartheta, \eta\vartheta+1; (\omega+\eta)\vartheta+2; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \left(\frac{|w(u)|^\zeta + |w(v)|^\zeta}{s+1} \right)^{1/\zeta}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. İspat tamamlanır. $\square$

Sonuç 4.107. Teorem 4.106'da $\omega = \eta$ alınırsa (4.49) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
& \int_u^v \frac{(x^p - u^p)^\omega (v^p - x^p)^\omega w(x)}{x^{\omega(\eta+1)p}} dx \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{2\omega+1}}{pv^{(2\omega+1)p-1}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}}(\omega\vartheta+1, \omega\vartheta+1) \\
& \times {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\left(2\omega + \frac{p-1}{p} \right) \vartheta, \omega\vartheta+1; 2\omega\vartheta+2; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \left(\frac{|w(u)|^\zeta + |w(v)|^\zeta}{s+1} \right)^{1/\zeta}
\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.108. Teorem 4.106'da $p = 1$ alınırsa (4.49) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
& \int_u^v \frac{(x-u)^\omega (v-x)^\eta w(x)}{x^{\omega(\eta+1)}} dx \\
& \leq \frac{(v-u)^{\omega+\eta+1}}{v^{\omega(\eta+1)}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}}(\vartheta\eta+1, \omega\vartheta+1) {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left((\omega+\eta)\vartheta, \eta\vartheta+1; (\omega+\eta)\vartheta+2; 1 - \frac{u}{v} \right) \\
& \times \left(\frac{|w(u)|^\zeta + |w(v)|^\zeta}{s+1} \right)^{1/\zeta}
\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 4.109. $w : [u, v] \subseteq [0, \infty) \rightarrow R$ sürekli bir fonksiyon ve $\zeta > 1$ olmak üzere eğer

$|w|^\zeta, [u, v]$ üzerinde ikinci anlamda $s-p$ -konveks ve $\eta, \omega > 0, p < 0, s \in [0, 1]$ ise

$$\begin{aligned}
& \int_u^v \frac{(x^p - u^p)^\omega (v^p - x^p)^\eta w(x)}{x^{\omega(\eta+1)p}} dx \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{pu^{(\omega+\eta+1)p-1}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}}(\omega\vartheta+1, \eta\vartheta+1)
\end{aligned} \tag{4.50}$$

$$\begin{aligned} & \times \left[{}_2F_1 \left(\left(\omega + \eta + \frac{p-1}{p} \right) \zeta, s+1; s+2; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \frac{|w(v)|^\zeta}{s+1} \right. \\ & \left. + {}_2F_1 \left(\left(\omega + \eta + \frac{p-1}{p} \right) \zeta, 1; s+1; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \frac{|w(u)|^\zeta}{s+1} \right]^{\frac{1}{\zeta}} \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikte $1/\zeta + 1/\vartheta = 1$ 'dir.

İspat. $|w|^\zeta, [u, v]$ üzerinde ikinci anlamda $s - p -$ konveks olduğundan , her $\theta \in [0, 1]$

için Lemma 4.61 ve Hölder integral eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & \int_u^v \frac{(v^p - u^p)^\omega (v^p - x^p)^\eta w(x)}{x^{\omega+\eta} p} dx \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^\eta}{(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{\omega+\eta+\frac{p-1}{p}}} \left| w \left((\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{1/p} \right) \right| d\theta \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \theta^{\omega\vartheta} (1-\theta)^{\eta\vartheta} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\ & \times \left(\int_0^1 \frac{1}{(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{(\omega+\eta+\frac{p-1}{p})\zeta}} \left| w \left((\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{1/p} \right) \right|^\zeta d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\ & \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \theta^{\omega\vartheta} (1-\theta)^{\eta\vartheta} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\int_0^1 \frac{(\theta^s |w(v)|^\zeta + (1-\theta)^s |w(u)|^\zeta)}{(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{(\omega+\eta+\frac{p-1}{p})\zeta}} d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\ & = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \theta^{\omega\vartheta} (1-\theta)^{\eta\vartheta} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\ & \times \left(\int_0^1 \frac{(\theta^s |w(v)|^\zeta + (1-\theta)^s |w(u)|^\zeta)}{u^{((\eta+\omega+1)p-1)\zeta} \left(1 - \left(1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \theta \right)^{(\omega+\eta+\frac{p-1}{p})\zeta}} d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\ & = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p u^{(\omega+\eta+1)p-1}} \beta_{\frac{1}{w}}^{\frac{1}{w}}(\omega\vartheta + 1, \eta\vartheta + 1) \\ & \times \left[{}_2F_1 \left(\left(\omega + \eta + \frac{p-1}{p} \right) \zeta, s+1; s+2; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \frac{|w(v)|^\zeta}{s+1} \right. \\ & \left. + {}_2F_1 \left(\left(\omega + \eta + \frac{p-1}{p} \right) \zeta, 1; s+2; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \frac{|w(u)|^\zeta}{s+1} \right]^{\frac{1}{\zeta}} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

Sonuç 4.110. Teorem 4.109’da $\omega = \eta$ alınırsa (4.50) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
& \int_u^v \frac{(\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\omega w(\varkappa)}{\varkappa^{2mp}} d\varkappa \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{2m+1}}{pu^{(2m+1)p-1}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}}(\omega\vartheta + 1, \omega\vartheta + 1) \\
& \times \left[{}_2F_1 \left(\left(2\omega + \frac{p-1}{p} \right) \zeta, s+1; s+2; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \frac{|w(v)|^\zeta}{s+1} \right. \\
& \left. + {}_2F_1 \left(\left(2\omega + \frac{p-1}{p} \right) \zeta, 1; s+1; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \frac{|w(u)|^\zeta}{s+1} \right]^{\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.111. Teorem 4.109’da $p = -1$ alınırsa (4.50) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
& \int_u^v (\varkappa - u)^\omega (v - \varkappa)^\eta w(\varkappa) d\varkappa \\
& \leq \left(\frac{u}{v} \right)^{\omega+1} (v - u)^{\omega+\eta+1} \beta^{\frac{1}{\vartheta}}(\omega\vartheta + 1, \eta\vartheta + 1) \\
& \times \left[{}_2F_1 \left((\omega + \eta + 2)\zeta, s+1; s+2; 1 - \frac{u}{v} \right) \frac{|w(v)|^\zeta}{s+1} \right. \\
& \left. + {}_2F_1 \left((\omega + \eta + 2)\zeta, 1; s+1; 1 - \frac{u}{v} \right) \frac{|w(u)|^\zeta}{s+1} \right]^{\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 4.112. $w : [u, v] \subseteq [0, \infty) \rightarrow R$ sürekli bir fonksiyon ve $\zeta > 1$ olmak üzere eğer

$|w|^\zeta, [u, v]$ üzerinde ikinci anlamda $s - p$ -konveks ve $\omega, \eta > 0, p > 0, s \in [0, 1]$ ise

$$\begin{aligned}
& \int_u^v \frac{(\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa)}{\varkappa^{(\omega+\eta)p}} d\varkappa \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{pv^{(\omega+\eta+1)p-1}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}}(\eta\vartheta + 1, \omega\vartheta + 1) \\
& \times \left[{}_2F_1 \left(\left(\omega + \eta + \frac{p-1}{p} \right) \zeta, s+1; s+2; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \frac{|w(u)|^\zeta}{s+1} \right. \\
& \left. + {}_2F_1 \left(\left(\omega + \eta + \frac{p-1}{p} \right) \zeta, 1; s+1; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \frac{|w(v)|^\zeta}{s+1} \right]^{\frac{1}{\zeta}} \quad (4.51)
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: $|w|^\zeta, [u, v]$ üzerinde ikinci anlamda $s - p$ - konveks olduğundan, her $\theta \in [0, 1]$

için Lemma 4.64 ve Hölder integral eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \int_u^v \frac{(v^p - u^p)^\omega (v^p - \kappa^p)^\omega w(\kappa)}{\kappa^{(\omega+\eta)p}} d\kappa \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \int_0^1 \frac{(1-\theta)^\omega \theta^\eta}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\omega+\eta+\frac{(p-1)}{p}}} \left| w((\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{1/p}) \right| d\theta \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 (1-\theta)^{\omega\vartheta} \theta^{\eta\vartheta} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \frac{1}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{(\omega+\eta+\frac{(p-1)}{p})\zeta}} \left| w((\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{1/p}) \right|^\zeta d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 (1-\theta)^{\omega\vartheta} \theta^{\eta\vartheta} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \frac{(\theta^s |w(u)|^\zeta + (1-\theta)^s |w(v)|^\zeta)}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{(\omega+\eta+\frac{(p-1)}{p})\zeta}} d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 (1-\theta)^{\omega\vartheta} \theta^{\eta\vartheta} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \frac{(\theta^s |w(u)|^\zeta + (1-\theta)^s |w(v)|^\zeta)}{v^{((\omega+\eta+1)p-1)\zeta} (1 - (1 - \frac{u^p}{v^p})\theta)^{(\omega+\eta+\frac{(p-1)}{p})\zeta}} d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p^{(\omega+\eta+1)p-1}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}}(\eta\vartheta + 1, \omega\vartheta + 1) \\
& \quad \times \left[{}_2F_1 \left(\left(\omega + \eta + \frac{(p-1)}{p} \right) \zeta, s+1; s+2; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \frac{|w(u)|^\zeta}{s+1} \right. \\
& \quad \left. + {}_2F_1 \left(\omega + \eta + \frac{(p-1)}{p} \right) \zeta, 1; s+2; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \frac{|w(v)|^\zeta}{s+1} \right]^\zeta
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. İspat tamamlanır.

Sonuç 4.113. Teorem 4.112’de $\omega = \eta$ alınırsa (4.51) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
& \int_u^v \frac{(\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\omega w(\varkappa)}{\varkappa^{2\omega p}} d\varkappa \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{2\omega+1}}{p v^{(2\omega+1)p-1}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}}(\omega\vartheta + 1, \omega\vartheta + 1) \\
& \quad \times \left[{}_2F_1 \left(\left(2\omega + \frac{p-1}{p} \right) \zeta, s+1; s+2; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \frac{|w(u)|^\zeta}{s+1} \right. \\
& \quad \left. + {}_2F_1 \left(\left(2\omega + \frac{p-1}{p} \right) \zeta, 1; s+1; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \frac{|w(v)|^\zeta}{s+1} \right]^{\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.114. Teorem 4.112’de $p = 1$ alınırsa (4.51) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
& \int_u^v \frac{(\varkappa - u)^\omega (v - \varkappa)^\eta w(\varkappa)}{\varkappa^{\omega+\eta}} d\varkappa \\
& \leq \frac{(v - u)^{\omega+\eta+1}}{v^{(\omega+\eta)}} \beta^{\frac{1}{\vartheta}}(\eta\vartheta + 1, \omega\vartheta + 1) \left[{}_2F_1 \left((\omega + \eta)\zeta, s+1; s+2; 1 - \frac{u}{v} \right) \frac{|w(u)|^\zeta}{s+1} \right. \\
& \quad \left. + {}_2F_1 \left((\omega + \eta)\zeta, 1; s+1; 1 - \frac{u}{v} \right) \frac{|w(v)|^\zeta}{s+1} \right]^{\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 4.115. $w : [u, v] \subseteq [0, \infty) \rightarrow R$ sürekli bir fonksiyon ve $\zeta > 1$ olmak üzere eğer

$|w|^\zeta, [u, v]$ üzerinde ikinci anlamda $s - p$ -konveks ve $\eta, \omega > 0, p < 0, s \in [0, 1]$ ise

$$\begin{aligned}
& \int_u^v \frac{(\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa)}{\varkappa^{(\omega+\eta)p}} d\varkappa \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p u^{(\omega+\eta+1)p-1}} {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\left(\omega + \eta + \frac{p-1}{p} \right) \vartheta, 1; 2; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \\
& \quad \times \left[\beta(\omega\vartheta + s + 1, \eta\vartheta + 1) |w(v)|^\zeta + \beta(\omega\vartheta + 1, \eta\vartheta + s + 1) |w(u)|^\zeta \right]^{\frac{1}{\zeta}} \tag{4.52}
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikte $1/\zeta + 1/\vartheta = 1$ ’dir.

İspat. Lemma 4.61 ve $|w|^\zeta$ ’nin Hölder integral eşitsizliği ile $s - p$ - konveksliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
& \int_u^v \frac{(\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa)}{\varkappa^{(\omega+\eta)p}} d\varkappa \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \int_0^1 \frac{\theta^\omega (1-\theta)^\eta}{(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{\omega+\eta+\frac{p-1}{p}}} \left| w\left((\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{1/p}\right) \right| d\theta \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{1}{(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{(\omega+\eta+\frac{p-1}{p})\vartheta}} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \theta^{\omega\zeta} (1-\theta)^{\eta\zeta} \left| w\left((\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{1/p}\right) \right|^\zeta d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{1}{(\theta v^p + (1-\theta)u^p)^{(\omega+\eta+\frac{p-1}{p})\vartheta}} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \theta^{\omega\zeta} (1-\theta)^{\eta\zeta} \left(\theta^s |w(v)|^\zeta + (1-\theta)^s |w(u)|^\zeta \right) d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{1}{u^{((\eta+\omega+1)p-1)\vartheta} \left(1 - \left(1 - \frac{v^p}{u^p}\right)\theta\right)^{(\omega+\eta+\frac{p-1}{p})\vartheta}} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \theta^{\omega\zeta} (1-\theta)^{\eta\zeta} \left(\theta^s |w(v)|^\zeta + (1-\theta)^s |w(u)|^\zeta \right) d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{pu^{(\omega+\eta+1)p-1}} {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\left(\omega + \eta + \frac{p-1}{p} \right) \vartheta, 1, 2; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \\
& \quad \left[\beta(\omega\zeta + s + 1, \eta\zeta + 1) |w(v)|^\zeta + \beta(\omega\zeta + 1, \eta\zeta + s + 1) |w(u)|^\zeta \right]^{\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 4.116. Teorem 4.115’de $\omega = \eta$ alınırsa (4.52) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
& \int_u^v \frac{(\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\omega w(\varkappa)}{\varkappa^{2mp}} d\varkappa \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{2\omega+1}}{pu^{(2\omega+1)p-1}} {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\left(2\omega + \frac{p-1}{p} \right) \vartheta, 1, 2; 1 - \frac{v^p}{u^p} \right) \left[\beta(\omega\vartheta + s + 1, \omega\vartheta + 1) |w(v)|^\zeta \right. \\
& \quad \left. + \beta(\omega\vartheta + 1, \omega\vartheta + s + 1) |w(u)|^\zeta \right]^{\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.117. Teorem 4.115’de $p = -1$ alınırsa (4.52) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
& \int_u^v (\mathcal{K} - u)^\omega (v - \mathcal{K})^\eta w(\mathcal{K}) d\mathcal{K} \\
& \leq \left(\frac{u}{v}\right)^{\omega+1} (v - u)^{\omega+\eta+1} {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left((\omega + \eta + 2)\vartheta, 1, 2; 1 - \frac{u}{v} \right) \left(\beta(\omega\vartheta + s + 1, \eta\vartheta + 1) |w(v)|^\zeta \right. \\
& \quad \left. + \beta(\omega\vartheta + 1, \eta\vartheta + s + 1) |w(u)|^\zeta \right)^{\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 4.118. $w : [u, v] \subseteq [0, \infty) \rightarrow R$ sürekli bir fonksiyon ve $\zeta > 1$ olmak üzere eğer

$|w|^\zeta, [u, v]$ üzerinde ikinci anlamda $s - p -$ konveks ve $\omega, \eta > 0, p > 0, s \in [0, 1]$ ise

$$\begin{aligned}
& \int_u^v \frac{(\mathcal{K}^p - u^p)^\omega (v^p - \mathcal{K}^p)^\eta w(\mathcal{K})}{\mathcal{K}^{(\omega+\eta)p}} d\mathcal{K} \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p v^{(\omega+\eta+1)p-1}} {}_2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\left(\omega + \eta + \frac{p-1}{p} \right) \vartheta, 1, 2; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \\
& \quad \times \left[\beta(\eta\zeta + s + 1, \omega\zeta + 1) |w(u)|^\zeta \beta(\eta\zeta + 1, \omega\zeta + s + 1) |w(v)|^\zeta \right]^{\frac{1}{\zeta}} \quad (4.53)
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikte $1/\zeta + 1/\vartheta = 1$ 'dir.

İspat. $|w|^\zeta, [u, v]$ üzerinde ikinci anlamda $s - p -$ konveks olduğundan, her $\theta \in [0, 1]$

için Lemma 4.64 ve Hölder integral eşitsizliğini kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \int_u^v \frac{(\mathcal{K}^p - u^p)^\omega (v^p - \mathcal{K}^p)^\eta w(\mathcal{K})}{\mathcal{K}^{(\omega+\eta)p}} d\mathcal{K} \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \int_0^1 \frac{(1-\theta)^\omega \theta^\eta}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{\omega+\eta+\frac{(p-1)}{p}}} \left| w((\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{1/p}) \right| d\theta \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{1}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{(\omega+\eta+\frac{(p-1)}{p})\vartheta}} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 (1-\theta)^{\omega\zeta} \theta^{\eta\zeta} \left| w((\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{1/p}) \right|^\zeta d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{1}{(\theta u^p + (1-\theta)v^p)^{(\omega+\eta+\frac{(p-1)}{p})\vartheta}} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\int_0^1 (1-\theta)^{\omega\zeta} \theta^{\eta\zeta} \left(\theta^s |w(u)|^\zeta + (1-\theta)^s |w(v)|^\zeta \right) d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{p} \left(\int_0^1 \frac{1}{v^{(\omega+\eta+1)p-1} \vartheta \left(1 - \left(1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \theta \right)^{(\omega+\eta+\frac{p-1}{p})\vartheta}} d\theta \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \\
& \times \left(\int_0^1 (1-\theta)^{\omega\zeta} \theta^{\eta\zeta} \left(\theta^s |w(u)|^\zeta + (1-\theta)^s |w(v)|^\zeta \right) d\theta \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& = \frac{(v^p - u^p)^{\omega+\eta+1}}{pv^{(\omega+\eta+1)p-1}} 2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\left(\omega + \eta + \frac{p-1}{p} \right) \vartheta, 1, 2; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \left[\beta(\eta\zeta + s + 1, \omega\zeta + 1) |w(u)|^\zeta \right. \\
& \left. + \beta(\eta\zeta + 1, \omega\zeta + s + 1) |w(v)|^\zeta \right]^{\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 4.119. Teorem 4.118’de $\omega = \eta$ alınırsa (4.53) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
& \int_u^v \frac{(x^p - u^p)^\omega (v^p - x^p)^\omega w(x)}{x^{2\omega p}} dx \\
& \leq \frac{(v^p - u^p)^{2\omega+1}}{pv^{(2\omega+1)p-1}} 2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left(\left(2\omega + \frac{p-1}{p} \right) \vartheta, 1, 2; 1 - \frac{u^p}{v^p} \right) \left[\beta(\omega\zeta + s + 1, \omega\zeta + 1) |w(u)|^\zeta \right. \\
& \left. + \beta(\omega\zeta + 1, \omega\zeta + s + 1) |w(v)|^\zeta \right]^{\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.120. Teorem 4.118’de $p = 1$ alınırsa (4.53) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
& \int_u^v \frac{(x-u)^\omega (v-x)^\eta w(x)}{x^{\omega+\eta}} dx \\
& \leq \frac{(v-u)^{\omega+\eta+1}}{\vartheta^{\omega+\eta}} 2F_1^{\frac{1}{\vartheta}} \left((\omega + \eta) \vartheta, 1, 2; 1 - \frac{u}{v} \right) \left[\beta(\eta\zeta + s + 1, \omega\zeta + 1) |w(u)|^\zeta \right. \\
& \left. + \beta(\eta\zeta + 1, \omega\zeta + s + 1) |w(v)|^\zeta \right]^{\frac{1}{\zeta}}
\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Tezimizde, mutlak değerinin belirli kuvvetleri p -konveks ve $s-p$ -konveks olan fonksiyonlar sınıfı için $\int_u^v (\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa) d\varkappa$ ve $\int_u^v \frac{(\varkappa^p - u^p)^\omega (v^p - \varkappa^p)^\eta w(\varkappa)}{\varkappa^{(\omega+\eta)p}} d\varkappa$ integrallerinin Euler Beta fonksiyonu ve Hipergeometrik fonksiyon içeren bazı teoremler ve sonuçlar elde ettik. Elde edilen bu sonuçların bazıları literatürde yeni olup bazıları ise literatürde daha önce elde edilmiş sonuçlara indirgenmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] Adams, R. A., & Essex, C. (2010). *Calculus: A Complete Course*. Toronto, Ontario: Pearson Canada Inc.
- [2] Arshad, A., & Khan, A. R. (2019). Hermite-Hadamard-Fejer type integral inequality for s-p-convex functions of several kinds. *Transylvanian Journal of Mathematics and Mechanics*, 11(2), 25-40.
- [3] Azpeitia, A. G. (1994). Convex functions and Hadamard inequality. *Revista Colombiana de Matematicas*, 28, 7-12.
- [4] Bayraktar, M. (2000). *Fonksiyonel Analiz*. Ankara: Koza Yayıncılık.
- [5] Bayraktar, M. (2010). *Analiz*. Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık.
- [6] Beckenbach, E. F., & Bellman, R. (1961). *Inequalities*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-64971-4>
- [7] Bilal, M., & Khan, A. (2021). New generalized Hermite-Hadamard type inequalities for p-convex functions in the mixed kind. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 14, 863-880. <https://doi.org/10.29020/nybg.ejpam.v14i3.4015>
- [8] Breckner, W. W. (1978). Stetigkeitsaussagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer Funktionen in topologischen linearen Räumen. *Publications de l'Institut Mathematique*, 13-20.

- [9] Dragomir, S. S., & Pearce, C. E. M. (2000). *Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications*. RGMIA Monographs, Victoria University.
- [10] Hardy, G. H., Littlewood, J. E., & Polya, G. (1952). *Inequalities* (2nd ed.). Cambridge University Press.
- [11] İşcan, İ. (2014). Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 43(6), 935-942.
- [12] İşcan, İ., Aydın, M., & Dikmenoğlu, S. (2015). New integral inequalities via harmonically convex functions. *Mathematics and Statistics*, 3, 134-140.
- [13] İşcan, İ. (2016). Ostrowski type inequalities for p -convex functions. *New Trends in Mathematical Science*, 4, 140-140. <https://doi.org/10.20852/ntmsci.2016318838>
- [14] İşcan, İ. (2014). Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 43(6), 935-942.
- [15] Jeffrey, A., & Dai, H.-H. (2008). *Handbook of Mathematical Formulas and Integrals*. Oxford: Academic Press.
- [16] Kunt, M., & İşcan, İ. (2017). On new Hermite-Hadamard-Fejer type inequalities for p -convex functions via fractional integrals. *Communication in Mathematical Modeling and Applications*, 2(1), 1-15.
- [17] Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., & Trujillo, J. J. (2006). *Theory and applications of fractional differential equations* (Vol. 204). Elsevier Science B.V., Amsterdam. [https://doi.org/10.1016/S0304-0208\(06\)80001-0](https://doi.org/10.1016/S0304-0208(06)80001-0)
- [18] Liu, W. (2014). New integral inequalities involving beta function via P -convexity. *Miskolc Mathematical Notes*, 15, 585-591.

- [19] Mitrinović, D. S. (1970). *Analytic inequalities*. Berlin: Springer-Verlag.
- [20] Mitrinović, D. S., Pečarić, J. E., & Fink, A. M. (1993). *Classical and new inequalities in analysis*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- [21] Niculescu, C. P. (2003). Convexity according to means. *Mathematical Inequalities and Applications*, 6(4), 571-579. <http://dx.doi.org/10.7153/mia-06-53>
- [22] Orlicz, W. (1961). A note on modular spaces I. *Bulletin of the Academy of Polish Sciences. Series: Mathematics, Astronomy and Physics*, 9, 157-162.
- [23] Özdemir, M. E., Set, E., & Alomari, M. (2011). Integral inequalities via several kinds of convexity. *Creative Mathematics and Informatics*, 20(1), 62-73.
- [24] Pečarić, J., Proschan, F., & Tong, Y. L. (1992). *Convex functions, partial orderings and statistical applications*. Academic Press, Inc.
- [25] Roberts, A. W., & Varberg, D. E. (1973). *Convex functions*. New York: Academic Press.
- [26] Sezer, S., Eken, Z., Tinaztepe, G., & Adilov, G. (2021). p-Convex functions and some of their properties. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 42(4), 443-459.
- [27] Stancu, D. D., Coman, G., & Blaga, P. (2002). *Analiză numerică și teoria aproximării* (Vol. 2). Cluj-Napoca: Presa Universitară Clujeană.
- [28] Zhang, K. S., & Wan, J. P. (2007). p-Convex functions and their properties. *Pure and Applied Mathematics*, 1(23), 130-133.

ÖZGEÇMİŞ

Aykut KILIÇ ilk ve orta öğrenimini Espiye’de, lise öğrenimini ise Keşap’ta tamamladı. 2008 yılında Giresun Anadolu Öğretmen Lisesi’nden mezun oldu. 2009 yılında başladığı Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi İlköğretim Matematik Bölümü’nü 2013 yılında bitirdi. 2013 yılında Şehit Enver Şahin Ortaokulu’nda Matematik Öğretmeni olarak çalışmaya başladı. 2021 yılında Giresun Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı.