



T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HEMEN HEMEN SUPRA B -SÜREKLİLİK
VE SUPRA STRONG β -Ç-AÇIK KÜMELER

FATMA TALAS
198214002003

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Ocak-2024
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL VE ONAYI

Fatma TALAS tarafından hazırlanan “ Hemen Hemen Supra b-Süreklilik ve Supra Strong β - ζ -Açık Kümeler ” adlı tez çalışması, 31/08 /2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Başkan

Doç. Dr. Özlem ACAR

.....

Danışman

Prof. Dr. Aynur KESKİN KAYMAKCI

.....

Üye

Dr. Öğr. Üyesi Zehra GÜZEL ERGÜL

.....

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Ömer Faruk YÜKSEL
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Fatma TALAS

Tarih: 07.08.2023

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HEMEN HEMEN SUPRA B-SÜREKLİLİK VE SUPRA STRONG β - ζ -AÇIK KÜMELER

Fatma TALAS

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Aynur KESKİN KAYMAKCI

2024, 39 Sayfa

Jüri
Prof. Dr. Aynur KESKİN KAYMAKCI

Tez, üç temel bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm; supra topolojik uzaylarla ilgili temel bilgileri içermektedir. Böylece; diğer bölümler için gerekli alt yapı oluşturulacaktır.

İkinci bölüm; supra topoloji kavramından daha genel ideal supra topoloji kavramı ile ilgilidir. Ayrıca; temel düzeyde bu kavrama ait gerekli tüm kavram ve ifadeler de bulunmaktadır. Üstelik; anlaşılabilirlik açısından örnekleri de barındırmaktadır.

Son bölüm; iki kısımdan oluşur. İlki, supra b-açık kümeler yardımıyla tanımlanan hemen hemen sürekli fonksiyon ve bu fonksiyonun özelliklerini içermektedir. İkincisi ise; ideal supra topolojik uzaylarda tanımladığımız ve özelliklerini incelediğimiz supra strong β - ζ -açık küme kavramı ile ilgilidir.

Anahtar Kelimeler: Supra b-açık küme, hemen hemen supra b-süreklilik, supra strong β - ζ -açık küme, ideal supra topolojik uzay

ABSTRACT

MS THESIS

ALMOST SUPRA B-CONTINUITY AND SUPRA STRONG β - ζ - OPEN SETS

Fatma TALAS

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE / DOCTOR OF PHILOSOPHY
IN MECHANICAL ENGINEERING

Advisor: Prof. Dr. Aynur KESKİN KAYMAKCI

2024, 39 Pages

Jury

Advisor: Prof. Dr. Aynur KESKİN KAYMAKCI

The thesis consists of three main components.

First part; it contains basic information about supra topological spaces. Like this; necessary infrastructure will be created for other sections.

Second part; It is related to the more general concept of ideal supra topology than the concept of supra topology. Moreover; at the basic level, there are all necessary concepts and expressions of this concept. Besides; it also includes examples for clarity.

Last part; consists of two parts. The first includes the almost continuous function and its properties defined with the help of supra b-open sets. The second is; It is related to the concept of supra strong β - ζ -open set, which we define in ideal supra topological spaces and examine its properties.

Keywords: Supra b-open set, almost supra b-continuity, supra strong β - ζ -open set, ideal supra topological space.

ÖNSÖZ

Bu çalışma Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Üyesi Prof. Dr. Aynur KESKİN KAYMAKCI yönetiminde yapılarak Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Tez aşaması boyunca, hiçbir yardımını esirgemeyen saygı değer hocam Prof. Dr. Aynur KESKİN KAYMAKCI' ya çalışmalarım için verdiği destek ve teşvikten dolayı, her zorlukta yanımda olan ve beni tüm çalışmalarımda cesaretlendiren canım annem Şerife TALAS ile babam Mehmet TALAS ve sevgileriyle hep yanımda olan kızım Elif Naz' ıma, oğlum Murat Mehmet'ime teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Fatma TALAS
KONYA-2024

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1.GİRİŞ	1
1.1. Amaç ve Kapsam	1
1.2. Kaynak Araştırması	2
2. SUPRA TOPOLOJİK UZAYLAR.....	6
3. İDEAL SUPRA TOPOLOJİK UZAY	12
4. HEMEN HEMEN SUPRA B-SÜREKLİ FONKSİYONLAR VE SUPRA STRONG β - ζ AÇIK KÜMELER.....	16
4.1. Hemen Hemen Supra B-Süreklİ Fonksiyonlar	16
4.2. Supra Strong B- ζ Açık Kümeler	29
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	36
5.1. Sonuçlar	36
5.2.Öneriler	36
KAYNAKLAR	37
ÖZGEÇMİŞ	39

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\in$	: Ait
$\notin$	: Ait Değil
$=$	: Eşit
$\neq$	: Eşit Değil
$\Rightarrow$	: Gerek Şart
$\Leftarrow$	: Yeter Şart
$\emptyset$	: Boş Küme
X	: Evrensel Küme
$A \subseteq B$	: B kümesi, A kümesini kapsar
$A \cap B$	: A kesişim B
$A \cup B$	: A birleşim B
ζ	: İdeal
θ	: Topolojik yapı
(X, θ)	: Topolojik uzay
$\text{int}(A)$	: A kümesinin içi
$\text{cl}(A)$	: A kümesinin kapanışı
(X, θ, ζ)	: İdeal topolojik uzay
cl^*	: Kuratowski kapanış işlemi
(X, ρ)	: Supra topolojik uzay
(X, ρ, ζ)	: İdeal supra topolojik uzay
$\text{RO}(Y)$	: (Y, σ) deki tüm regüler açık kümelerin ailesi
$\text{RO}(X)$	: (X, θ) deki tüm regüler açık kümelerin ailesi
$\alpha(X)$	: (X, θ) deki tüm α -açık kümelerin ailesi
$\text{SO}(X)$	: (X, θ) deki tüm semi -açık kümelerin ailesi
$\text{PO}(X)$	: (X, θ) deki tüm pre -açık kümelerin ailesi
$\beta\text{O}(X)$	: (X, θ) deki tüm β -açık kümelerin ailesi
$\text{BO}(X)$	: (X, θ) deki tüm b-açık kümelerin ailesi
$\text{SRO}(X)$	: (X, ρ) deki tüm supra regüler açık kümelerin ailesi
$\text{Sa}(X)$	: (X, ρ) deki tüm supra α -açık kümelerin ailesi
$\text{SSO}(X)$	: (X, ρ) deki tüm supra semi açık kümelerin ailesi
$\text{SPO}(X)$	: (X, ρ) deki tüm supra pre-açık kümelerin ailesi
$\text{S}\beta\text{O}(X)$	: (X, ρ) deki tüm supra β -açık kümelerin ailesi

- $SBO(X)$: (X, ρ) deki tüm supra b-açık kümelerin ailesi
 $SP_{\zeta}(X, \rho)$: (X, ρ, ζ) deki tüm ideal supra pre-açık kümelerin ailesi.
 $S\beta_{\zeta}(X, \rho)$: (X, ρ, ζ) deki tüm ideal supra β -açık kümelerin ailesi.
 $SB_{\zeta}(X, \rho)$: (X, ρ, ζ) deki tüm ideal supra b-açık kümelerin ailesi.
 $SS_{\zeta}(X, \rho)$: (X, ρ, ζ) deki tüm ideal supra semi açık kümelerin ailesi.



1.GİRİŞ

Topolojik uzaylardaki küme çeşitleri ve ilgili fonksiyonlar; veri analizi, bilgi sistemleri, dijital topoloji gibi bilim ve teknolojinin bazı alanlarında kullanılmaktadır. Topolojik uzaydan daha zayıf olan supra topolojik uzaylardaki küme çeşitleri ve fonksiyonlar için de benzer yaklaşımlar söz konusudur. Bu nedenle; b-açık küme ile ilgili hemen hemen süreklilik kavramı tanımlanıp, özellikleri incelenecektir. Ayrıca, supra topolojik uzayların bir genellemesi olan ideal supra topolojik uzaylarda; supra strong β - ζ açık küme tanıtılacaktır. Bu kümenin sağladığı temel özellikler incelenecektir.

Genel topoloji; matematiğin dallarında olduğu kadar dijital topoloji, bilgi sistemleri vs. uygulamalı bilimlerin pekçok alanında önemlidir. Bu nedenle; çalışmalardan hariç genelleştirmeleri de yapıldı. İlk önce, genelleştirilmiş topolojiler olarak adlandırılan bu topolojiler arasında; supra topoloji (Mashour, Allam, Mahmoud ve Khedr, 1983) kavramı, verildi. Topolojik uzayların daha zayıf hali olan supra topolojik uzay kavramı tanıtılmış ve süreklilik, ayırma aksiyomları gibi bazı topolojik kavramlar supra topolojik uzaylara genelleştirildi. (Mashour, Allam, Mahmoud ve Khedr, 1983) supra topolojinin elemanları olarak adlandırılan supra açık kümelerin bazı zayıf çeşitlerinin tanıtılıp, özelliklerinin verildiği pek çok çalışma ((Devi, Sampathkumar ve Caldas, 2008), (Sayed, 2010), (Al-Shami, 2017), (Sayed ve Noiri, 2010), (Jafari ve Tahiliani, 2013)) yapıldı. Supra kompaktlık ve çeşitleri (Al-Shami, 2016) de ele alındı. Zayıf supra açık kümelerle ilgili süreklilik ve kompaktlık pekçok yazar tarafından tanıtılmış ve özellikleri incelendi ((Al-Shami, 2017), (Al-Shami, 2018), (Al-Shami, Asaad ve El-Gayar, 2020), (J. M. Mustafa, 2013)). Ayrıca ilgili kümelere ait limit noktası kavramları ve ayırma aksiyomları da çalışıldı ((Al-Shami, Asaad ve El-Bably, 2020), (Al-Shami, Abo-Tabl, Asaad ve Araheth, 2020), (El-Shafei, Zakari ve Al-Shami, 2020)).

İdeal kavramı, ilk olarak Kuratowski (Kuratowski, 1966) ve Vaidyanathswamy (Vaidyanathswamy, 1960) tarafından tanıtıldı. Topoloji ile birlikte kullanılarak; ideal topoloji (Jankovic ve Hamlett, 1990) kavramı ve supra topoloji ile birlikte kullanılarak; ideal supra topoloji (Modak ve Mistry, 2012) kavramı tanımlandı. İdeal topolojik uzaylar ve ideal supra topolojik uzaylardaki çalışmalar, yıllardır devam etti ((Keskin ve Noiri, 2003), (Keskin ve Noiri, 2005), (Kandil, Tantawy, Sheikh ve Hazza, 2015), (Latif, 2018) ve (Sangeetha ve Chacko, 2019)).

1.1. Amaç ve Kapsam

Genelleştirilmiş topolojik uzaylardan birisi de, supra topolojik uzaylardır. Tezde; supra b-açık küme için, hemen hemen b-süreklilik tanıtılacak ve bu fonksiyon çeşidinin özellikleri incelenecektir. Ayrıca; ideal ile birlikte kullanılarak elde edilen supra ideal topolojik uzaylarda, supra strong β - ζ -açık küme ve tümleyeni olan supra strong β - ζ -kapalı küme kavramları tanıtılacaktır. Bu kümelere ait temel özellikler verilecektir. Ayrıca; supra sürekli fonksiyon çeşitlerini ele alıp, sürekli fonksiyon çeşitleri arasında karşılaştırmaları da vereceğiz. İlgili küme çeşitleri ile ayırma aksiyomları tanımları verilip, özellikleri de incelenecektir.

1.2. Kaynak Araştırması

Kaynak araştırması bölümünde, supra topolojik uzay, ideal topolojik uzay ve ideal supra topolojik uzaylar ile ilgili matematikçilerin yaptığı literatürdeki çalışmaları inceleyeceğiz.

(*A. S. Mashhour, A. A. Allam, F. S. Mahmoud ve F. H. Khedr, 1983*), “On supra topological spaces” isimli çalışmasında topolojik uzaylardan daha zayıf olan supra topolojik uzay kavramı tanımlandı ve özellikleri ile karakterizasyonları elde edildi.

(*Andrijevic D., 1996*), “On b-open sets” isimli çalışmasında topolojik uzayda b-açık küme özellikleri verildi.

(*A. Keskin and T. Noiri, 2009*), “Almost b-continuous functions” isimli çalışmasında topolojik uzayda hemen hemen b-süreklilik kavramını ve özellikleri elde edildi.

(*Arockoni, I. and Trianata Pricilla, M., 2011*), “ On supra generalized b-Closed sets” isimli çalışmasında supra topolojik uzaylarda b-kapalı kümelerin genelleştirilmiş tanım ve özellikleri elde edildi.

(*A. Kandil , O. A. Tantawy, S. A. El-Sheikh, S. A. Hazza, 2015*), “ New supra topologies from old via ideals” isimli çalışmasında idealler ve önceki supra topoloji kavramı yardımıyla yeni supra topoloji elde edildi.

(*Carnahan D., 1972*), “ Locally nearly-compact spaces” isimli çalışmasında uzayların local nearly kompaktlığını incelendi ve özellikleri verildi.

(*Carnahan D., 1973*), “ Some properties related to compactness in topological spaces” isimli çalışmasında topolojik uzayda kompaktlıkla ilgili bazı özellikler verildi.

(*D. Jankovic and T. R. Hamlett, 1990*), “New topologies from old via ideals”, isimli çalışmasında yeni topolojik uzay kavramı ve özelliklerini ele aldı. Topolojik uzay üzerinde idealden bahsederek ideal topolojik uzay kavramı tanımlandı.

(*E. Hayashi, 1964*), “ Topologies defined by local properties” isimli çalışmasında topolojik uzayda local özellikleri elde edildi.

(*E. Hatir, A. Keskin and T. Noiri, 2002*), “On decomposition of continuity via idealization” isimli çalışmasında ideal topolojik uzayda sürekliliğin özellikleri elde edildi.

(*E. Hatir, A. Keskin and T. Noiri, 2003*), “On a new decomposition of continuity via idealization” isimli çalışmasında ideal topolojik uzayda sürekliliğin özellikleri elde edildi.

(*E. Hatir, A. Keskin and T. Noiri, 2005*), “ A note on strong β -I-sets and strongly β -I-continuous functions” isimli çalışmasında ideal topolojik uzayda strong β -I-kümelerin tanımı ve diğer kümelerle ilişkisi,; strong β -I-sürekli fonksiyon özellikleri elde edildi.

(Ekici E., 2005), “Generalization of perfectly continuous, regular set-connected and Clopen functions” isimli çalışmasında mükemmel sürekliliği genelleştirmiş, düzenli bağlantılı kümeleri ve Clopen fonksiyonlar kavramları ve özellikleri elde edildi.

(J. Dontchev, 1966), “On pre-I-open sets and decomposition of I-continuity” isimli çalışmasında pre-I-açık kümeler ve I-sürekliliğin ayrıştırılmasının özellikleri verildi.

(J. M. Mustafa, 2013), “Supra b-compact and supra b-Lindelöf spaces” isimli çalışmasında supra topolojik uzaylarda supra b- kompakt ve supra b-lindelöf uzayların özellikleri verildi.

(Jasim and Zaben, 2015), “On ideal supra topological space” isimli çalışmasında ideal supra topolojik uzay kavramı ve özellikleri verildi.

(K. Kuratowski, 1966), “Topology” isimli çalışmasında topolojik uzayların tanımını ve özellikleri elde edildi.

(Mashour, A.S., Allam, A. A., Mahmoud, F. S. and Khedr, F. H., 1983), “On supra topological spaces” isimli çalışmasında topolojik uzaydan daha zayıf olan supra topolojik uzay kavramı ve özellikleri elde edildi.

(M. V. Sangeetha and B.Chacko, 2019), “On supra ideal topological space via R-I-open sets” isimli çalışmasında supra topolojik uzay kavramından daha zayıf olan ideal supra topolojik uzay aracılığıyla R-I açık kümeler kavramı tanımlandı.

(M. E. El-Shafei, A. H. Zakari and T.M.Al-Shami, 2020), “Some applications of supra preopen sets” isimli çalışmasında supra pre açık kümelerin bazı uygulamaları ve özellikleri verildi..

(Noiri T., 1988), “Almost α - continuous functions” isimli çalışmasında hemen hemen α -süreklili fonksiyonları elde edildi.

(Nasef AA and Noiri T., 1997), “Some weak forms of almost continuity” isimli çalışmasında hemen hemen sürekliliğin bazı zayıf çeşitleri ele alındı.

(O.R.Sayed, 2010), “Supra pre-open sets and supra pre-continuity on topological spaces” isimli çalışmasında supra pre-açık kümeler ve supra pre süreklilik kavramı tanımlandı, özellikleri ve karakterizasyonları verildi.

(O. R. Sayed ve T. Noiri, 2010), “On supra b-open sets and supra b-continuity on topological spaces” isimli çalışmasında supra topolojik uzayda b-açık kümeler kavramı tanımlandı, özellikleri ve karakterizasyonları; supra topolojik uzayda b-süreklili fonksiyon kavramı verildi.

(R. Vaidyanathaswamy, 1960), “Set topology” isimli çalışmasında topolojik uzaydaki küme çeşitleri tanımları ve özellikleri verildi.

(R.Devi, S.Sampathkumar ve M.Caldas, 2008), “On supra α -open sets and $S\alpha$ -continuous functions” isimli çalışmasında supra topolojik uzayda α -açık kümeler kavramı ve $S\alpha$ -süreklili fonksiyon kavramları tanımlandı ve özellikleri verildi.

(Ravi, O., Ramkumar, G. and Kamaraj, M., 2012), “ On supra β -open sets and supra β -continuity on topological spaces” isimli çalışmasında supra β -açık kümeler ve supra β -sürekli fonksiyon kavramları verildi.

(R. M. Latif, 2018), “Supra- I -compactness and supra I -connectedness” isimli çalışmasında ideal supra topolojik uzayda kompaktlık ve bağıllık kavramı ve özellikleri ele edildi.

(Singal MK. and Singal AR., 1968), “ Almost continuous maps” isimli çalışmasında hemen hemen sürekli fonksiyonlar arasındaki ilişki verildi.

(Singal MK. and Mathur A., 1969), “On nearly compact spaces” isimli çalışmasında topolojik uzayda nearly kompaktlığı incelendi.

(Sayed, O. R. and Noiri, 2010), “ Supra pre-open sets and supra pre-continuity on topological spaces” isimli çalışmasında topolojik uzayda supra pre-açık kümeler ve supra pre-süreklilik kavramları verildi.

(Sayed, O. R. and Noiri, T., 2010), “ On supra b-open sets and supra b-continuity on topological spaces” isimli çalışmasında supra topolojik uzayda supra b-açık küme ve supra b-süreklilik kavramları elde edildi.

(S. Modak and S. Mistry, 2012), “Ideal on supra topological space” isimli çalışmasında ideal kavramını topolojik uzaydan daha zayıf supra topolojik uzayda tanımlandı. Özellikleri ve küme çeşitleri elde edildi.

(S. Jafari ve S. Tahiliani, 2013), “ Supra β -open sets and supra β -continuity on topological spaces” isimli çalışmasında supra β -açık kümeler kavramı tanımlandı, özellikleri ve karakterizasyonları; supra topolojik uzayda β - sürekli fonksiyon kavramı verildi.

(T.M Al-shami, 2016), “Supra results related to supra topological spaces” isimli çalışmasında supra topolojik uzaylar ile ilgili yapılan çalışmalardan elde ettiği sonuçları verildi.

(T.M.Al-Shami,2017), “ On supra semi open sets and some applications on topological spaces” isimli çalışmasında supra topolojik uzayda semi açık kümeler kavramı tanımlandı ve yapılan uygulamalar açıklandı.

(T.M.Al-Shami, 2017), “ Utilizing supra α -open sets to generate new types of supra compact and supra Lindelöf spaces” isimli çalışmasında supra α -açık kümeleri kullanarak supra topolojik uzayda kompaktlık ve Lindelöf uzaylarının yeni özellikleri ve türleri elde edildi.

(T.M.Al-Shami,2018), “ Supra semi –compactness via supra topological spaces” isimli çalışmasında supra topolojik uzaylar üzerinden supra semi kompaktlık kavramı verildi.

(T.M.Al-Shami, B. A.Asaad ve M. A. El-Gayar, 2020), “ Various types of supra pre-compact and supra pre-Lindelöf spaces” isimli çalışmasında supra topolojik uzaylarda supra pre-kompakt ve supra pre-Lindelöf uzayların özellikleri verildi.

(T.M.Al-Shami, B. A.Asaad ve M. K. El-Bably, 2020), “Weak types of limit points and separation axioms on supra topological spaces” isimli çalışmasında supra topolojik uzaylarda limit sınır noktası türleri ve ayırma aksiyomları türleri verildi.

(T.M.Al-Shami, E. A. Abo-Tabl, B. A.Asaad ve M. A. Arahel, 2020), “ Limit points and separation axioms with respect to supra semi-open sets ” isimli çalışmasında limit noktaları ve ayırma aksiyomları, supra semi açık kümelerin özellikleri verildi.

(Velicko N., 1968), “ H-Closed topological spaces” isimli çalışmasında topolojik uzayda H-kapalılık kavramı verildi.



2. SUPRA TOPOLOJİK UZAYLAR

(Mashour, Allam, Mahmoud ve Khedr, 1983), topolojik uzaydan daha zayıf olan supra topolojik uzay kavramını tanımladılar. Üstelik; supra topolojide de topolojide olduğu gibi, küme çeşitleri ve fonksiyonlar için benzer yaklaşımlar söz konusu olduğunu gösterdiler. Bu bölümde; tezin diğer bölümlerinde yardımcı olacak supra topolojik uzaylar ile ilgili bazı temel kavramlar ve özellikler ele alınacaktır.

Tanım 2.1. (Mashour, Allam, Mahmoud ve Khedr, 1983) $\rho \subset \wp(X)$ ailesi, eğer aşağıdaki iki şartı sağlarsa; bu durumda ρ ailesine, **X üzerinde supra topoloji** denir.

(i) $X \in \rho$,

(ii) Her $i \in I$ için, $R_i \in \rho$ iken; $(\bigcup_{i \in I} R_i) \in \rho$.

Ayrıca; $\rho(X, \rho)$ ikilisi de, **supra topolojik uzay** kısaca **s-uzay** olarak adlandırılır. $P \in \rho$ ise; P ye, **supra açık küme** ve $(X-P)$ ye ise; **supra kapalı küme** denir. Tez boyunca; supra açık küme ve supra kapalı küme kavramlarının yerine, sırasıyla; **s-açık küme** ve **s-kapalı küme** kavramlarını kullanacağız.

Tanım 2.2. (Mashour, Allam, Mahmoud ve Khedr, 1983) (X, θ) uzayı ile ρ , s-topolojisi verilsin. Eğer $\theta \subseteq \rho$ ise; ρ , **θ topolojisine bağlıdır** denir.

Tanım 2.3. (Mashour, Allam, Mahmoud ve Khedr, 1983) (X, ρ) s-uzayı ile bir $P \subseteq X$ kümesi verildiğinde; **P nin supra içi**, P nin bütün s-açık alt kümelerinin bileşimi ve benzer şekilde; **P nin supra kapanışı**, P yi kapsayan bütün s-kapalı kümelerin kesişimi olup, aşağıdaki gibi gösterilirler:

$$\text{int}^\rho(P) = \bigcup \{ T : T \subseteq P, T \in \rho \},$$

$$\text{cl}^\rho(P) = \bigcap \{ Z : P \subseteq Z, (X-Z) \in \rho \}.$$

Tezimizde; supra iç ve supra kapanış yerine sırasıyla; **s-iç** ve **s-kapanış** kavramlarını kullanacağız.

Önermelerin ve teoremlerin ispatlarında yardımcı olması açısından kümelerin s-içi ve s-kapanışı ile ilgili özellikler aşağıdaki gibi verildi:

Önerme 2.4. (Mashour, Allam, Mahmoud ve Khedr, 1983) (X, ρ) s-uzayı ile $P, R \subseteq X$ kümeleri verildiğinde; aşağıdaki özellikler sağlanır:

(i) $\text{int}^\rho(P)$, s-açık ve $\text{cl}^\rho(P)$, s-kapalı kümedir.

(ii) P , s-açık kümedir $\Leftrightarrow P = \text{int}^\rho(P)$.

(iii) P , s-kapalı kümedir. $\Leftrightarrow P = \text{cl}^\rho(P)$.

(iv) Eğer $P \subseteq R$ ise, $\text{int}^\rho(P) \subseteq \text{int}^\rho(R)$.

(v) Eğer $P \subseteq R$ ise, $\text{cl}^\rho(P) \subseteq \text{cl}^\rho(R)$.

(vi) $\text{int}^\rho(\text{int}^\rho(P)) = \text{int}^\rho(P)$.

(vii) $\text{cl}^\rho(\text{cl}^\rho(P)) = \text{cl}^\rho(P)$.

(viii) $(\text{int}^\rho(P) \cup \text{int}^\rho(R)) \subseteq \text{int}^\rho(P \cup R)$.

(ix) $(\text{cl}^\rho(P) \cup \text{cl}^\rho(R)) \subseteq \text{cl}^\rho(P \cup R)$.

- (x) $\text{int}^p(P \cap R) \subseteq (\text{int}^p(P) \cap \text{int}^p(R))$.
- (xi) $\text{cl}^p(P \cap R) \subseteq (\text{cl}^p(P) \cap \text{cl}^p(R))$.
- (xii) $\text{int}^p(X - P) = (X - \text{cl}^p(P))$.
- (xiii) $\text{cl}^p(X - P) = (X - \text{int}^p(P))$.
- (xiv) $\text{cl}^p(\text{int}^p(\text{cl}^p(\text{int}^p(P)))) = \text{cl}^p(\text{int}^p(P))$.
- (xv) $\text{int}^p(P) \subseteq P \subseteq \text{cl}^p(R)$.

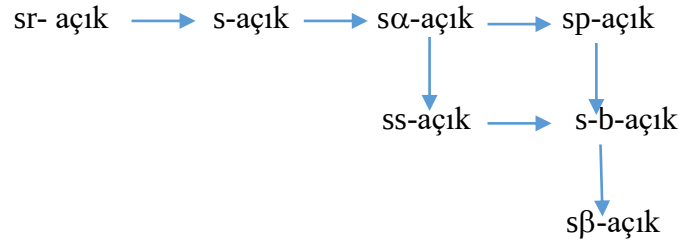
S-uzaylarda açık küme çeşitleri, Tanım 2.5 deki gibi verildi.

Tanım 2.5. Herhangi bir (X, ρ) s-uzayı ve $P \subseteq X$ verilsin. Eğer

- (i) $P \subseteq \text{int}^p(\text{cl}^p(\text{int}^p(P)))$ ise; P ye, **s- α -açık** (Devi, 2008),
- (ii) $P \subseteq \text{cl}^p(\text{int}^p(P))$ ise; P ye, **s-semi açık** (Sayed ve Noiri, 2010),
- (iii) $P \subseteq \text{int}^p(\text{cl}^p(P))$ ise; P ye, **s-pre-açık** (Sayed, 2010),
- (iv) $P \subseteq \text{cl}^p(\text{int}^p(P)) \cup \text{int}^p(\text{cl}^p(P))$ ise; P ye, **s-b-açık** (Sayed ve Noiri, 2010),
- (v) $P \subseteq \text{cl}^p(\text{int}^p(\text{cl}^p(P)))$ ise; P ye, **s- β -açık** (Ravi et al., 2012),
- (vi) $P = \text{int}^p(\text{cl}^p(P))$ ise; P ye, **s-regüler açık küme** (Trinita Pricilla ve Arockiarani, 2011) denir.

(X, ρ) s-uzayındaki tüm s- α -açık (s-semi açık, s-pre açık, s-b-açık, s- β -açık, s-regüler açık) kümeler ailesi, $s\alpha(X, \rho)$ ($ss(X, \rho)$, $sp(X, \rho)$, $sp(X, \rho)$, $s\beta(X, \rho)$, $sr(X, \rho)$) şeklinde gösterilirler. Ayrıca; s- α -açık (s-semi açık, s-pre açık, s-b-açık, s- β -açık, s-regüler açık) küme yerine, $s\alpha$ -açık (ss -açık, sp -açık, sb -açık, $s\beta$ -açık, sr -açık) küme ifadeleri kullanılacaktır.

Tanımlar ile ilgili geçişler, (T.M.Al-shami, 2017) tarafından aşağıdaki gibi verildi.



Şekil 1

Tezimizin diğer bölümlerinde yardımcı olması için s-topolojik uzayda s-b-açık kümelerin özellikleri ve diğer açık kümeler ile ilişkileri aşağıdaki teoremler ve örneklerle ele alındı.

Teorem 2.6. (Sayed ve Noiri, 2010) Her ss -açık küme, sb -açıktır.

İspat: P , (X, ρ) s-uzayında ss -açık bir küme olsun. İlgili tanımdan $P \subseteq \text{cl}^p(\text{int}^p(P))$ geçerlidir ve $P \subseteq \text{cl}^p(\text{int}^p(P)) \cup \text{int}^p(\text{cl}^p(P))$ sağlanır. O halde; $P \subseteq X$, sb -açıktır.

Teoremin tersinin genelde doğru olmadığı aşağıdaki gibi verildi.

Örnek 2.7. (Sayed ve Noiri, 2010) $X = \{p, q, r\}$ kümesi ve üzerindeki $\rho = \{X, \emptyset, \{p\}, \{p, q\}, \{q, r\}\}$ s-topolojisi ile birlikte (X, ρ) s-uzayı verilsin. Bu durumda; $P = \{p, r\} \subseteq X$, sb-açık kümedir fakat ss-açık değildir.

Teorem 2.8. (Sayed ve Noiri, 2010) Her α -açık küme, ss-açıktır.

İspat: (X, ρ) s-uzayında herhangi bir α -açık küme P olsun. O halde; $P \subseteq \text{int}^\rho (\text{cl}^\rho (\text{int}^\rho (P)))$ ve dolayısıyla $P \subseteq \text{cl}^\rho (\text{int}^\rho (P))$ geçerlidir ki, bu da $P \subseteq X$ nin ss-açık olduğunu gösterir.

Teoremin tersi, genelde doğru değildir.

Örnek 2.9. (Sayed ve Noiri, 2010) $X = \{u, v, w, y\}$ ve $\rho = \{X, \emptyset, \{u\}, \{v\}, \{u, v\}\}$ olmak üzere; (X, ρ) s-uzayı verilsin. $P = \{u, v\} \subseteq X$, ss-açık olmasına rağmen; α -açık değildir.

Uyarı 2.10. (Sayed ve Noiri, 2010) sb-açık kümelerin herhangi bileşimi, sb-açık olmasına rağmen; iki sb-açık kümenin kesişimi, sb-açık olmayabilir. Örnek 2.7 deki s-uzayında; $P = \{p, r\}$ ve $R = \{q, r\}$, sb-açık kümedirler. Ancak; bu kümelerin kesişimi olan $T = P \cap R = \{p, r\} \cap \{q, r\} = \{r\}$, sb-açık küme değildir.

Önerme 2.11. (Sayed ve Noiri, 2010) α -açık bir küme ile sb-açık bir kümenin kesişimi de, sb-açıktır.

Tanım 2.12. (X, ρ) bir s-uzayı ile $R \subseteq X$ verilsin. Eğer

- (i) $\text{cl}^\rho (\text{int}^\rho (\text{cl}^\rho (R))) \subseteq R$ iken; R ye, **s- α -kapalı** (Devi, 2008),
- (ii) $\text{int}^\rho (\text{cl}^\rho (R)) \subseteq R$ iken; R ye, **s-semi kapalı** (Sayed ve Noiri, 2010),
- (iii) $\text{cl}^\rho (\text{int}^\rho (R)) \subseteq R$ iken; R ye, **s-pre kapalı** (Sayed, 2010)
- (iv) $\text{cl}^\rho (\text{int}^\rho (R)) \cap \text{int}^\rho (\text{cl}^\rho (R)) \subseteq R$ iken; R ye, **s-b-kapalı** (Sayed ve Noiri, 2010)
- (v) $\text{int}^\rho (\text{cl}^\rho (\text{int}^\rho (R))) \subseteq R$ iken; R ye, **s- β -kapalı** (Ravi, 2012),
- (vi) $\text{cl}^\rho (\text{int}^\rho (R)) = R$ iken; R ye, **s-regüler kapalı küme** (Trinita Pricilla ve Arockiarani, 2011) denir.

Ayrıca; s- α -kapalı (s-semi kapalı, s-pre kapalı, s-b-kapalı, s- β -kapalı, s-regüler kapalı) küme yerine, α -kapalı (ss-kapalı, sp-kapalı, sb-kapalı, s β -kapalı, sr-kapalı) küme ifadeleri kullanılacaktır.

Teorem 2.13. (Sayed ve Noiri, 2010) (X, ρ) s-uzayında aşağıdakiler geçerlidir:

- (i) sb-kapalı kümelerin keyfi kesişimi, sb-kapalıdır.
- (ii) sb-kapalı kümelerin sonlu bileşimi, sb-kapalı olmayabilir.

İspat: i) İspat, Sonuç 2.10 dan elde edilir.

ii) Örnek 2.7 de; $\{p\}$ ve $\{q\}$, sb-kapalı olmalarına rağmen; bu kümelerin bileşimi; $\{p, q\}$, sb-kapalı değildir.

Tanım 2.14. (X, ρ) s-uzayı ile $P \subseteq X$ kümesi verilsin. P içindeki bütün α -açık (ss-açık, sp-açık, sb-açık, $s\beta$ -açık) kümelerin bileşimi; **P nin α -içi** (Devi, 2008) (sırasıyla; **ss-içi** (Sayed ve Noiri, 2010), **sp-içi** (Sayed, 2010), **sb-içi** (Sayed ve Noiri, 2010), **$s\beta$ -içi** (Ravi et al., 2012) olarak adlandırılır ve $\alpha \text{int}^\rho(P)$ (sırasıyla; $\text{sint}^\rho(P)$, $\text{pint}^\rho(P)$, $\text{bint}^\rho(P)$, $\beta \text{int}^\rho(P)$) şeklinde gösterilir.

Tanım 2.15. (X, ρ) s-uzayı ile $P \subseteq X$ verilsin. P yi kapsayan bütün α -kapalı (ss-kapalı, sp-kapalı, sb-kapalı, $s\beta$ -kapalı) kümelerin kesişimi, **P nin α -kapanışı** (Devi, 2008) (**ss-kapanışı** (Sayed ve Noiri, 2010), **sp-kapanışı** (Sayed, 2010), **sb-kapanışı** (Sayed ve Noiri, 2010), **$s\beta$ -kapanışı** (Ravi, 2012) olarak adlandırılır ve $\alpha \text{cl}^\rho(P)$ (sırasıyla; $\text{scl}^\rho(P)$, $\text{pcl}^\rho(P)$, $\text{bcl}^\rho(P)$, $\beta \text{cl}^\rho(P)$) şeklinde gösterilir.

bint^ρ ve bcl^ρ operatörleri ile ilgili özellikler, aşağıdaki gibidir:

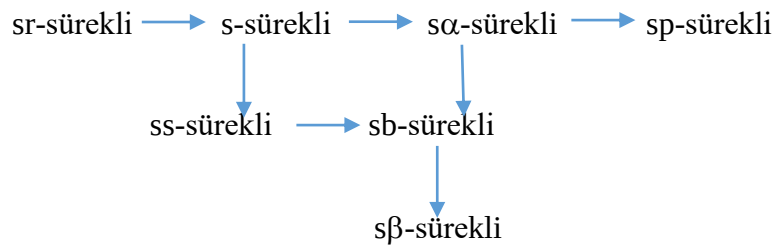
Teorem 2.16. (Sayed ve Noiri, 2010) (X, ρ) s-uzayı ile herhangi $P, R \subseteq X$ verildiğinde; aşağıdaki özellikler sağlanır:

- (i) $\text{bint}^\rho(P) \subseteq P \subseteq \text{bcl}^\rho(P)$.
- (ii) $P = \text{bcl}^\rho(P) \Leftrightarrow P$, sb-kapalıdır.
- (iii) $P = \text{bint}^\rho(P) \Leftrightarrow P$, sb-açıktır.
- (iv) $(X - \text{bint}^\rho(P)) = \text{bcl}^\rho(X - P)$.
- (v) $(X - \text{bcl}^\rho(P)) = \text{bint}^\rho(X - P)$.
- (vi) $(\text{bint}^\rho(P) \cup \text{bint}^\rho(R)) \subseteq \text{bint}^\rho(P \cup R)$.
- (vii) $\text{bcl}^\rho(P \cap R) \subseteq (\text{bcl}^\rho(P) \cap \text{bcl}^\rho(R))$.

Tanım 2.17. (X, θ) ve (Y, σ) uzayları, θ ve σ topolojilerine bağlı ρ ve ω , s-topolojileri ile bir $g: (X, \theta) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu verildiğinde; eğer her $Z \in \sigma$ için,

- (i) $g^{-1}(Z) \in \rho$ ise; g ye, **S-sürekli** (Mashhour, 1983),
- (ii) $g^{-1}(Z) \in \alpha(X, \rho)$ ise; g ye, **s- α -sürekli** (Devi, 2008),
- (iii) $g^{-1}(Z) \in \text{ss}(X, \rho)$ ise; g ye, **s-semi sürekli** (Sayed ve Noiri 2010),
- (iv) $g^{-1}(Z) \in \text{sp}(X, \rho)$ ise; g ye, **s-pre sürekli** (Sayed 2010),
- (v) $g^{-1}(Z) \in \text{sb}(X, \rho)$ ise; g ye, **s-b-sürekli** (Sayed ve Noiri, 2010),
- (vi) $g^{-1}(Z) \in \text{s}\beta(X, \rho)$ is; g ye, **s- β -sürekli** (Ravi, 2012),
- (vii) $g^{-1}(Z) \in \text{sr}(X, \rho)$ ise; g ye, **s-regüler sürekli fonksiyon** (Arockiarani ve Trinita Pricilla, 2011) denir.

Tezde; S-sürekli (s- α -sürekli, s-semi sürekli, s-pre sürekli, s-b-sürekli, s- β -sürekli, s-regüler sürekli) fonksiyon yerine; s-sürekli (α -sürekli, ss-sürekli, sp-sürekli, sb-sürekli, $s\beta$ -sürekli, sr-sürekli) fonksiyon kavramı kullanılacaktır.



Şekil 2

Teorem 2.18. (Sayed ve Noiri, 2010) Her sürekli fonksiyon sb-sürekli dir.

İspat: $g: (X, \theta) \rightarrow (Y, \sigma)$, sürekli bir fonksiyon olsun. Her $Z \in \sigma$ için, $f^{-1}(Z) \in \theta$ sağlanır. ρ, θ ya bağlı olduğundan; $\theta \subseteq \rho$ geçerlidir. O halde; $f^{-1}(Z) \in \rho$ olur. Böylece; her $Z \in \sigma$ için, $f^{-1}(Z) \in \rho$ yani; f nin supra b-sürekli olduğu elde edilir.

Teoremin tersinin doğru olmadığını gösteren örnek aşağıdaki gibidir:

Örnek 2.20. (Sayed ve Noiri, 2010) $X = \{p, q, r, s\}$ kümesi üzerinde; $\theta = \{X, \emptyset, \{p, q\}\}$ topolojisi ve θ ya bağlı $\rho = \{X, \emptyset, \{p, r\}, \{q, s\}, \{p, r, s\}\}$ s-topolojisi verilsin. $g(p) = g(s) = p$, $g(q) = r$ ve $g(r) = q$ şeklinde tanımlanan $g: (X, \theta) \rightarrow (X, \theta)$ fonksiyonu sb-sürekli dir fakat sürekli değildir. Çünkü; $\{p, q\} \in \theta$ için, $g^{-1}(\{p, q\}) = \{p, r\} \in sb(X, \rho)$ ancak, $g^{-1}(\{p, q\}) = \{p, r\} \notin \theta$ geçerlidir.

Aşağıdaki örnek, sb-sürekli bir fonksiyonun s-semi sürekli olması gerekmediğini göstermektedir.

Örnek 2.21. (Sayed ve Noiri, 2010) $X = \{p, q, r, s\}$ ile bu küme üzerinde tanımlanan $\theta = \{X, \emptyset, \{p, r\}, \{q, s\}\}$ topolojisi ve $\rho = \{X, \emptyset, \{p, q\}, \{r, s\}, \{p, r, s\}\}$ s-topolojisi verilsin. Ayrıca; $Y = \{x, y, z\}$ ile $\sigma = \{Y, \emptyset, \{z\}\}$ topolojisi verilsin. O halde; $g(p) = y$, $g(q) = z$, $g(r) = z$, $g(s) = x$ şeklinde tanımlanan $g: (X, \theta) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu, sb-sürekli dir fakat s-semi sürekli değildir. Gerçekten; $\{z\} \in \sigma$ için, $g^{-1}(\{z\}) = \{q, r\} \in sb(X, \rho)$ ancak $g^{-1}(\{z\}) = \{q, r\} \notin \theta$.

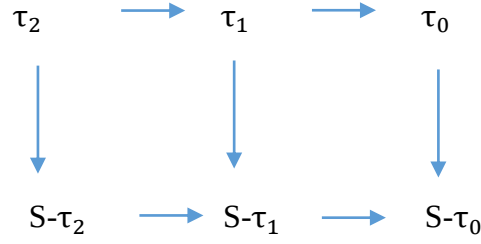
Tanım 2.22. (Sayed ve Noiri, 2010) (X, θ) ve (Y, σ) uzayları, θ ve σ topolojilerine bağlı ρ ve ω , s-topolojileri ile $g: (X, \theta) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu verilsin. Eğer

- (i) her $C \in \theta$ için, $g(C) \in SB(Y, \omega)$ ise; g ye, **supra b-açık**,
- (ii) her $D \subseteq Y$ kapalı kümesi için, $g(D) \subseteq Y$ sb-kapalı küme ise; g ye, **supra b-kapalı fonksiyon** denir. Tezde; supra b-açık ve subra b-kapalı fonksiyon yerine, sırasıyla; **sb-açık** ve **sb-kapalı fonksiyon** kavramlarını kullanacağız.

Tanım 2.23. (Mashour, Allam, Mahmoud ve Khedr, 1983) (X, θ) uzayı ve X kümesi üzerinde tanımlı θ ile bağlantılı ρ , s-topolojisi verilsin.

- (i) Eğer X deki her farklı nokta çifti u ve v için; $u \in P$, $v \notin P$ veya $v \in R$, $u \notin R$ olacak şekilde $P, R \in \rho$ varsa; (X, ρ) na, **S- θ_0 uzay** denir.
- (ii) Eğer X deki her farklı nokta çifti u ve v için; $u \in P$, $v \notin P$ ve $v \in R$, $u \notin R$ olacak şekilde $P, R \in \rho$ varsa; (X, ρ) na, **S- θ_1 uzay** denir.
- iii) Eğer X deki her farklı nokta çifti u ve v için; $u \in P$, $v \in R$ ve $P \cap R = \emptyset$ olacak şekilde $P, R \in \rho$ varsa; (X, ρ) na, **S- θ_2 uzay** denir.

Açık ve s-açık kümelerle ilgili üç temel ayırma aksiyomu aralarındaki ilişkiler, (Mashour, Allam, Mahmoud ve Khedr, 1983) tarafından aşağıdaki gibi verildi.



Şekil 3

Lemma 2.24. (El-Atik, 1997) A ve X_0 kümeleri (X, τ) uzayının iki alt kümesi olsun. Eğer $A \in BO(X)$ ve $X_0 \in \tau^\alpha$ ise; $(A \cap X_0) \in BO(X)$ dır.

Lemma 2.25. (Andrijevic D., 1996) A ve B , (X, τ) uzayının herhangi iki alt kümesi olsun. Eğer $A \in \tau$ ve $B \in BO(X)$ ise; $(A \cap B) \in BO(X)$ olur.

Topolojik uzaylarda verilen bu lemmaları supra topolojik uzaya aşağıdaki iki lemma ile taşıdık.

Lemma 2.26. A ve X_0 kümeleri (X, ρ) s- uzayının herhangi iki alt kümesi olsun. Eğer $A \in SBO(X)$ ve $X_0 \in \tau^{s\alpha}$ olduğunda $(A \cap X_0) \in SBO(X)$ dır.

Lemma 2.27. A ve B , (X, ρ) s-uzayının herhangi iki alt kümesi olsun. Eğer $A \in \rho$ ve $B \in SBO(X)$ ise; $(A \cap B) \in SBO(X)$ olur.

3. İDEAL SUPRA TOPOLOJİK UZAY

Bu bölümde; tezin diğer bölümlerinde yardımcı olacak ideal supra topolojik uzaylar ile ilgili bazı temel tanımlar ve teoremler ele alındı.

Tanım 3.1. (Kuratowski, 1966) Boş olmayan bir X kümesi için, $\zeta \subseteq \wp(X)$ ailesi verildiğinde; eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa; ζ ailesine, **X üzerinde bir ideal** denir.

- (i) $\emptyset \in \zeta$.
- (ii) $P \in \zeta$ ve $R \subseteq P$ iken, $R \in \zeta$.
- (iii) $P, R \in \zeta$ iken, $(P \cup R) \in \zeta$.

Tanım 3.2. (Hayashi, 1964) (X, θ) uzayı ve X üzerinde ζ ideali verilsin. Her $P \subseteq X$ için,

$$P^*(\zeta, \theta) = \{u \in X : \text{her } Z \in \theta(u) \text{ için, } (Z \cap P) \notin \zeta\}$$

şeklinde tanımlanan $()^*$: $\wp(X) \rightarrow \wp(X)$ fonksiyonuna, **ζ ve θ ye bağlı lokal fonksiyon** denir. $P^*(\zeta, \theta)$ ye ise; **P nin ζ ve θ ye bağlı lokal fonksiyonu** olarak adlandırılır. $P^*(\zeta, \theta)$ yerine, kısaca $P^*(\zeta)$ veya P^* kullanılır.

Lemma 3.3. (Jankovic, Hamlett, 1990) (X, θ) uzayı, X üzerinde ζ ve ξ idealleri ile $P, R \subseteq X$ verilsin. Aşağıdaki özellikler geçerlidir:

- (i) Eğer $P \subseteq R$ ise; $P^* \subseteq R^*$;
- (ii) $P^* = \text{cl}(P^*) \subseteq \text{cl}(P)$;
- (iii) $(P^*)^* \subseteq P^*$;
- (iv) $(P \cup R)^* = (P^* \cup R^*)$;
- (v) $(P \cap R)^* \subseteq (P^* \cap R^*)$;
- (vi) $(P - R)^* = (P^* - R^*)$;
- (vii) Eğer $T \in \theta$ ise; $(T \cap P^*) \subseteq (T \cap P)^*$;
- (viii) Eğer $\zeta \subseteq \xi$ ise; $P^*(\xi) \subseteq P^*(\zeta)$;
- (ix) $P^*(\zeta \cap \xi) \subseteq (P^*(\zeta) \cap P^*(\xi))$;
- (x) $(P^*(\zeta) \cup P^*(\xi)) \subseteq P^*(\zeta \cup \xi)$.

Tanım 3.4. (Jankovic ve Hamlet, 1990) (X, θ) uzayı ve X üzerinde ζ ideali verilsin. (X, θ, ζ) üçlüsüne, **ideal topolojik uzay** denir.

Tez boyunca kısaca; **ideal uzay** kavramını kullanacağız.

Tanım 3.5. (Jankovic ve Hamlet, 1990) (X, θ, ζ) ideal uzayı verilsin. Bu durumda; her $P \subseteq X$ için $\text{cl}^*(P) = P \cup P^*(\zeta, \theta)$ şeklinde tanımlanan $\text{cl}^*: \wp(X) \rightarrow \wp(X)$ fonksiyonu, bir **Kuratowski Kapanış Operatörüdür**. Yani;

- (i) $\text{cl}^*(\emptyset) = \emptyset$,
- (ii) $\text{cl}^*(P \cup R) = \text{cl}^*(P) \cup \text{cl}^*(R)$,
- (iii) $P \subseteq \text{cl}^*(P)$,
- (iv) $\text{cl}^*(\text{cl}^*(P)) = \text{cl}^*(P)$.

Tanım 3.6. (Jankovic ve Hamlet, 1990) (X, θ, ζ) ideal uzayı ile birlikte $P \subseteq X$ verilsin. $\theta^*(\zeta) = \{P \subseteq X : (X-P) = \text{cl}^*((X-P))\}$ şeklinde tanımlanan aile, **X üzerinde bir topolojidir** ve üstelik; $\theta \subseteq \theta^*(\zeta)$ geçerlidir.

S-uzayında benzer şekilde lokal fonksiyon kavramı aşağıdaki gibi tanımlandı:

Tanım 3.7. (Modak ve Mistry, 2012) (X, ρ) s-uzayı ile X üzerinde ζ ideali verilsin. Her $P \subseteq X$ için, $(P)^{* \rho}(\zeta, \rho) = \{u \in X : \text{her } T \in \rho(u) \text{ için, } (T \cap P) \notin \zeta\}$ ($\exists \rho(u) = \{T \in \rho : u \in T\}$) şeklinde tanımlanan $()^{* \rho} : \wp(X) \rightarrow \wp(X)$ fonksiyonuna, **ζ ve ρ ya bağlı lokal fonksiyon** denir. Bu durumda $(P)^{* \rho}(\zeta, \rho)$ ise; **P nin ζ ve ρ ya bağlı lokal fonksiyonu** olarak adlandırılır. Kısaca; $P^{* \rho}$ gösterimini kullanacağız.

Aşağıdaki teoremden ρ -lokal fonksiyonun özellikleri verilmiştir.

Teorem 3.8. (Modak ve Mistry, 2012) (X, ρ) s-uzayı, X üzerinde ζ ve ξ idealleri ile $P, R \subseteq X$ verilsin. Aşağıdaki özellikler geçerlidir:

- (i) $\emptyset^{* \rho} = \emptyset$,
- (ii) Eğer $P \subseteq R$ ise; $P^{* \rho} \subseteq R^{* \rho}$;
- (iii) $P^{* \rho} \subseteq \text{cl}(P)$;
- (iv) $P^{* \rho}$, kapalı bir kümedir.
- (v) $(P^{* \rho})^{* \rho} \subseteq P^{* \rho}$;
- (vi) $(P \cup R)^{* \rho} \subseteq (P^{* \rho} \cup R^{* \rho})$;
- (vii) $(P \cap R)^{* \rho} \subseteq (P^{* \rho} \cap R^{* \rho})$;
- (viii) Eğer $S \in \zeta$ ise; $(P \cup S)^{* \rho} = P^{* \rho} = (P - S)^{* \rho}$;
- (ix) Eğer $T \in \rho$ ise; $T \cap (T \cap P)^{* \rho} \subseteq (T \cap P^{* \rho})$;
- (x) Eğer $\zeta \subseteq \xi$ ise; $P^{* \rho}(\xi) \subseteq P^{* \rho}(\zeta)$.

Aşağıdaki örnek, $(P^{* \rho} \cup R^{* \rho}) = (P \cup R)^{* \rho}$ eşitliğinin genel olarak geçerli olmadığını göstermektedir.

Örnek 3.9. (Modak ve Mistry, 2012) $X = \{p, q, s, t\}$ kümesi ile $\zeta = \{\emptyset, \{s\}\}$ ideali ve $\rho = \{X, \emptyset, \{p\}, \{q\}, \{p, q\}, \{p, s\}, \{p, t\}, \{q, s\}, \{q, t\}, \{p, q, s\}, \{p, q, t\}, \{p, s, t\}, \{q, s, t\}\}$ s-topolojisinden oluşan (X, ρ, ζ) ideal s-uzayı verilsin. $P = \{p, s\}$, $R = \{q, s\} \subseteq X$ için, $P^{* \rho} = \{p\}$ ve $R^{* \rho} = \{q\}$ olması nedeniyle; $(P^{* \rho} \cup R^{* \rho}) = \{p, q\}$ elde edilir. Üstelik; $(P \cup R)^{* \rho} = \{p, q, s\}^{* \rho} = \{p, q, s, t\}$ bulunur. Böylece; $(P^{* \rho} \cup R^{* \rho}) \neq (P \cup R)^{* \rho}$ geçerlidir. Bu nedenle; s-lokal fonksiyon yardımıyla bir kapanış operatörü, dolayısıyla topoloji tanımlanamaz.

Tanım 3.10. (Modak ve Mistry, 2012) (X, ρ) s-uzayı ile X üzerinde ζ ideali verilsin. (X, ρ, ζ) , **ideal supra topolojik uzay** olarak adlandırılır. Kısaca; **ideal s-uzay** kavramını kullanacağız.

Tanım 3.11 (Modak ve Mistry, 2012) (X, ρ, ζ) ideal s-uzayı verilsin. $cl^{*\rho}(P) = P \cup P^{*\rho}(\zeta, \theta)$ şeklinde tanımlanan $cl^{*\rho}: \wp(X) \rightarrow \wp(X)$ fonksiyonu, bir **s-kapanış operatörüdür**. Yani;

- (i) $cl^{*\rho}(\emptyset) = \emptyset$,
- (ii) $cl^{*\rho}(P \cup R) \subseteq (cl^{*\rho}(P) \cup cl^{*\rho}(R))$,
- (iii) $P \subseteq cl^{*\rho}(P)$,
- (iv) $cl^{*\rho}(cl^{*\rho}(P)) = cl^{*\rho}(P)$.

Tanım 3.12. (Modak ve Mistry, 2012) (X, ρ, ζ) ideal s-uzayı ile birlikte $P \subseteq X$ verilsin. $\rho^*(\zeta) = \{P \subseteq X: (X-P) = cl^{*\rho}((X-P))\}$ şeklinde tanımlanan aile, **X üzerinde s-topolojidir** ve üstelik; $\rho \subseteq \rho^*(\zeta)$ geçerlidir.

İdeal s-uzaylarındaki bazı açık küme çeşitleri, aşağıdaki gibi verildi:

Tanım 3.13. (Jasim ve Zaben, 2015) (X, ρ, ζ) ideal s-uzayı ile $P \subseteq X$ verilsin. Eğer

- (i) $P \subseteq int^{\rho}(P^{*\rho})$ ise; P ye, **ρ -s-açık**,
 - (ii) $P \subseteq int^{\rho}(cl^{*\rho}(int^{\rho}(P)))$ ise; P ye, **α - ρ -s-açık**,
 - (iii) $P \subseteq int^{\rho}(cl^{*\rho}(P))$ ise; P ye, **pre- ρ -s-açık**,
 - (iv) $P \subseteq cl^{*\rho}(int^{\rho}(P))$ ise; P ye, **semi- ρ -s-açık**,
 - (v) $P \subseteq (cl^{*\rho}(int^{\rho}(P)) \cup int^{\rho}(cl^{*\rho}(P)))$ ise; P ye, **b- ρ -s-açık küme** denir.
- Tezimizde; ρ -s-açık (α - ρ -s-açık, pre- ρ -s-açık, semi- ρ -s-açık, b- ρ -s-açık küme) yerine, ρ s-açık ($\alpha\rho$ s-açık, $pre\rho$ s-açık, $sem\rho$ s-açık, $b\rho$ s-açık küme) kavramlarını kullanacağız.

Önerme 3.14. (Jasim ve Zaben, 2015) Her $sem\rho$ s-açık küme, $b\rho$ s-açıktır.

İspat: (X, ρ, ζ) ideal s-uzayı ile $sem\rho$ s-açık bir $P \subseteq X$ verilsin. O halde; $P \subseteq cl^{*\rho}(int^{\rho}(P))$ ve dolayısıyla; $P \subseteq cl^{*\rho}(int^{\rho}(P)) \cup int^{\rho}(cl^{*\rho}(P))$ sağlanır. Böylece P, $b\rho$ s-açık bir kümedir.

Önermenin tersinin doğru olmadığını gösteren örnek, aşağıdaki gibi verildi.

Örnek 3.15. (Jasim ve Zaben, 2015) $X = \{k, l, m, n\}$, $\rho = \{X, \emptyset, \{k, l\}, \{l\}, \{k, l, n\}\}$ ve $\zeta = \{\emptyset, \{l\}\}$ olmak üzere; elde edilen (X, ρ, ζ) ideal s-uzayında, $P = \{l, n\} \subseteq X$ $b\rho$ s-açık kümedir fakat $sem\rho$ s-açık değildir. Gerçekten; $int^{\rho}(cl^{*\rho}(P)) \cup cl^{*\rho}(int^{\rho}(P)) = int^{\rho}(\{l, n\}^{*\rho} \cup \{l, n\}) \cup cl^{*\rho}(int^{\rho}(\{l, n\})) = int^{\rho}(X) \cup (\{l\}^{*\rho} \cup \{l\}) = X \cup \{l\} = X \supseteq P$ olur ki; böylece P nin $b\rho$ s-açık küme olduğu elde edilir. Ayrıca; $cl^{*\rho}(int^{\rho}(P)) = cl^{*\rho}(int^{\rho}(\{l, n\})) = \{l\}^{*\rho} \cup \{l\} = \emptyset \cup \{l\} = \{l\}$ ve $P \not\subseteq cl^{*\rho}(int^{\rho}(P))$ geçerlidir. O halde; P, $sem\rho$ s-açık değildir.

Önerme 3.16. (Jasim ve Zaben, 2015) Her $b\rho$ s-açık küme, bs -açıktır.

İspat: (X, ρ, ζ) ideal s-uzayı ile $P \subseteq X$ verilsin. Eğer P, $b\rho$ s-açık bir küme ise; bu durumda $P \subseteq int^{\rho}(cl^{*\rho}(P)) \cup cl^{*\rho}(int^{\rho}(P))$ sağlanır. $\zeta \subseteq \zeta^{*\rho}$ olduğu için, $cl^{*\rho}(P) \subseteq cl^{\rho}(P)$ geçerli

olduğundan; $P \subseteq \text{int}^p(\text{cl}^{*p}(P)) \cup \text{cl}^{*p}(\text{int}^p(P)) \subseteq \text{int}^p(\text{cl}^p(P)) \cup \text{cl}^p(\text{int}^p(P))$ ve böylece $P \subseteq \text{int}^p(\text{cl}^p(P)) \cup \text{cl}^p(\text{int}^p(P))$ elde edilir. Bu ise; P nin bs-açık olduğunu gösterir.

Önerme 3.17. (Jasim ve Zaben, 2015) Her preps-açık küme, bps-açıktır.

İspat: (X, ρ, ς) ideal s-uzayı ile $P \subseteq X$ verilsin. Eğer P , preps-açık bir küme ise; $P \subseteq \text{int}^p(\text{cl}^{*p}(P))$ sağlanır. Bileşim işlemi tanımı kullanılarak; $P \subseteq \text{int}^p(\text{cl}^{*p}(P)) \subseteq \text{int}^p(\text{cl}^{*p}(P)) \cup \text{cl}^{*p}(\text{int}^p(P))$ ve böylece $P \subseteq \text{int}^p(\text{cl}^{*p}(P)) \cup \text{cl}^{*p}(\text{int}^p(P))$ elde edilir. Bu ise; P nin bps-açık olduğunu gösterir.

Önermenin tersinin doğru olmadığını gösteren örnek aşağıda verildi.

Örnek 3.18. (Jasim ve Zaben, 2015) $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $\rho = \{X, \emptyset, \{2\}, \{3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$ ve $\varsigma = \{\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{3, 4\}\}$ ile verilen (X, ρ, ς) ideal s-uzayında; $P = \{1, 2\} \subseteq X$, bps-açık kümedir fakat preps-açık değildir.

Önerme 3.19. (Jasim ve Zaben, 2015) Her α ps-açık küme, semips-açıktır.

İspat: (X, ρ, ς) ideal s-uzayı ile α ps-açık bir $P \subseteq X$ verilsin. O halde; $P \subseteq \text{int}^p(\text{cl}^{*p}(\text{int}^p(P)))$ geçerlidir. $P \subseteq \text{int}^p(\text{cl}^{*p}(\text{int}^p(P))) \subseteq (\text{cl}^{*p}(\text{int}^p(P)))$, cl^{*p} operatörü tanımından elde edilir. Böylece $P \subseteq (\text{cl}^{*p}(\text{int}^p(P)))$ sağlanır. O halde; $P \subseteq X$, semips-açıktır.

Önermenin tersinin doğru olmadığını gösteren örnek aşağıda verildi.

Örnek 3.20. (Jasim ve Zaben, 2015) $X = \{k, l, m, n\}$, $\rho = \{X, \emptyset, \{k\}, \{k, l\}, \{l\}\}$ ve $\varsigma = \{\emptyset, \{m\}\}$ ile elde edilen (X, ρ, ς) ideal s-uzayında; $P = \{l, m\} \subseteq X$, semips-açık kümedir fakat α ps-açık değildir.

Önerme 3.21. (Jasim ve Zaben, 2015) Her α ps-açık küme, preps-açıktır.

İspat: (X, ρ, ς) ideal s-uzayı ile α ps-açık bir $P \subseteq X$ verilsin. O halde; $P \subseteq \text{int}^p(\text{cl}^{*p}(\text{int}^p(P)))$ sağlanır. Dolayısıyla; int operatörü tanımı gereği, $P \subseteq \text{int}^p(\text{cl}^{*p}(\text{int}^p(P))) \subseteq \text{int}^p(\text{cl}^{*p}(P))$ elde edilir. Böylece; $P \subseteq \text{int}^p(\text{cl}^{*p}(P))$ olur ki, bu da P nin preps-açık olduğunu gösterir.

4. HEMEN HEMEN SUPRA B-SÜREKLİ FONKSİYONLAR VE SUPRA STRONG β - ζ AÇIK KÜMELER

Bu bölüm, iki kısımdan oluşmaktadır.

4.1. Hemen Hemen Supra B-Süreklili Fonksiyonlar

Keskin ve Noiri, 2009; b-açık kümeler yardımıyla hemen hemen sürekli fonksiyon çeşidi tanımladılar ve bu fonksiyonun çeşitli özelliklerini elde ettiler. Bu bölümde; topolojik uzaylardan daha zayıf olan s-uzaylarda hemen hemen supra b-süreklilik kavramını verip, inceleyeceğiz.

Tanım 4.1.1. (Keskin ve Noiri, 2009) (X, θ) ve (Y, σ) uzaylar ve $f : (X, \theta) \rightarrow (Y, \sigma)$ tanımlanan f fonksiyonunda her $x \in X$ ve $f(x)$ i içeren her W regüler açık kümesi için $f(K) \subseteq W$ olacak şekilde x noktasını kapsayan bir K b-açık kümesi var ise; bu taktirde f fonksiyonuna, **hemen hemen b-süreklidir** denir.

Tanım 4.1.2. (Keskin ve Noiri, 2009) (X, θ) ve (Y, σ) uzaylar ve $f : (X, \theta) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu verilsin. Eğer

(i) Her $W \in RO(Y)$ için, $f^{-1}(W) \in RO(X)$ ise; f ye, **hemen hemen R-fonksiyon**(Carnahan, 1973)

(ii) Her $W \in RO(Y)$ için, $f^{-1}(W) \in \tau$ ise; f ye, **hemen hemen sürekli fonksiyon**(Singal ve Singal, 1968)

(iii) Her $W \in RO(Y)$ için, $f^{-1}(W) \in \alpha(X)$ ise; f ye, **hemen hemen α -süreklili fonksiyon** (Noiri, 1988)

(iv) Her $W \in RO(Y)$ için, $f^{-1}(W) \in SO(X)$ ise; f ye, **hemen hemen semi sürekli fonksiyon** (Munshi, 1981)

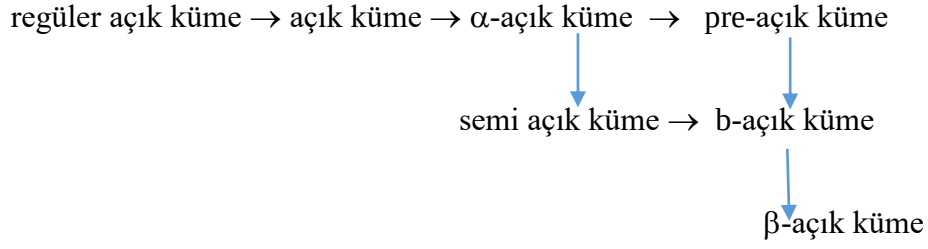
(v) Her $W \in RO(Y)$ için, $f^{-1}(W) \in PO(X)$ ise; f ye, **hemen hemen pre-süreklili fonksiyon**(Nasef ve Noiri, 1997)

(vi) Her $W \in RO(Y)$ için, $f^{-1}(W) \in \beta O(X)$ ise; f ye, **hemen hemen β -süreklili fonksiyon** (Nasef ve Noiri, 1997)

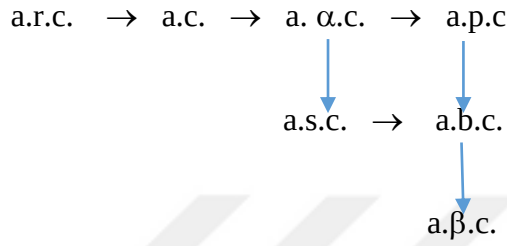
(vii) Her $W \in RO(Y)$ için, $f^{-1}(W) \in BO(X)$ ise; f ye, **hemen hemen b-süreklili fonksiyon** (Keskin ve Noiri, 2009) denir.

Yukarıda bahsedilen fonksiyonlar için sırasıyla a.r.c., a.c., a. α .c., a.s.c., a.p.c., a. β .c., a.b.c. kısaltmaları kullanacağız.

Şekil 4 ve Şekil 5, sırasıyla; (Dontchev ve Przemki, 1996) ve (Nasef ve Noiri, 1997) tarafından verildi.



ŞEKİL 4



ŞEKİL 5

Önerme 4.1.3. (Keskin ve Noiri, 2009) $f : (X, \theta) \rightarrow (Y, \sigma)$ tanımlanan bir f fonksiyonu verilsin. Bu durumda; aşağıdaki özellikler geçerlidir:

- (i) f fonksiyonu, a.p.c. ise; f , a.b.c. dir.
- (ii) f fonksiyonu, a.s.c. ise; f , a.b.c. dir.
- (iii) f fonksiyonu, a.b.c. ise; f , a.β.c. dir.

İspat: Önermenin ispatı Tanım 4.1.1, Şekil 4 ve Şekil 5 ten açıktır.

Önermenin tersinin var olmadığını gösteren örnekler verildi.

Örnek4.1.4. (Keskin ve Noiri, 2009) $X = \{p, q, r, s\}$ kümesi ile bu küme üzerinde tanımlanan $\sigma = \{X, \emptyset, \{p\}, \{q\}, \{r\}, \{p, q\}, \{p, r\}, \{q, r\}, \{p, q, r\}\}$ ve $\theta = \{X, \emptyset, \{p\}, \{q\}, \{p, q\}\}$ topolojileri verilsin. Bu durumda; $f(p) = f(r) = q$, $f(s) = f(q) = s$ şeklinde tanımlanan $f : (X, \theta) \rightarrow (X, \sigma)$ fonksiyonu, a.s.c. ve a.b.c. olmasına rağmen; a.p.c. değildir. Gerçekten; $V = \{q\} \in RO(X, \sigma)$ için, $f^{-1}(\{q\}) = \{p, s\}$ kümesi (X, θ) da pre açık küme değildir. Bu nedenle; f , a.p.c. fonksiyon değildir.

Örnek 4.1.5. (Keskin ve Noiri, 2009) $X = \{p, q, s, t\}$; $\sigma = \{\emptyset, X, \{p\}, \{q, s\}, \{p, q, s\}\}$ ve $\theta = \{\emptyset, X, \{s\}, \{p, t\}, \{p, s, t\}\}$ uzaylarında; $f : (X, \theta) \rightarrow (X, \sigma)$ fonksiyonu $f(p) = f(q) = f(s) = p$; $f(t) = t$ ile tanımlansın. $V = \{p\}$ kümesi f fonksiyonunda a.p.c ve a.b.c fakat a.s.c değildir.

$V = \{p\} \in RO(X, \sigma)$ iken $f^{-1}(\{p\}) = \{p, q, s\}$ kümesi (X, θ) da semi açık değildir. Bundan dolayı f , a.s.c değildir.

Örnek 4.1.6. (Keskin ve Noiri, 2009) $X=\{p,q,s,t\}$ kümesi üzerinde $\theta=\{X,\emptyset,\{s\},\{p,t\},\{p,s,t\}\}$ ve $\sigma=\{X,\emptyset,\{p\},\{q,s\},\{p,q,s\}\}$ tanımlanmak üzere; $f(p)=f(q)=p$ ve $f(s)=f(t)=t$ şeklinde tanımlanan bir $f:(X,\theta)\rightarrow(X,\sigma)$ fonksiyonu verilsin. f fonksiyonu, a.β.c. olmasına rağmen; a.b.c değildir. Gerçekten; $V=\{p\}\in RO(X,\sigma)$ için, $f^{-1}(\{p\})=\{p,q\}\subseteq X$ kümesi (X,θ) da b-açık bir küme değildir. Bu nedenle f fonksiyonu, a.b.c. değildir.

Literatürdeki bu bilgilere dayanarak hemen hemen supra b-sürekli fonksiyon ve özelliklerinin tanımlarını verdik.

Tanım 4.1.7. (X,θ) ve (Y,σ) iki uzay, θ topolojisi ρ s-topolojisine bağlı olsun. $f:(X,\theta)\rightarrow(Y,\sigma)$ tanımlanan f fonksiyonunda her $x\in X$ ve $f(x)$ noktasını kapsayan her $W\in RO(Y)$ için, $f(K)\subseteq W$ olacak şekilde x noktasını kapsayan bir $K\subseteq X$ s-b-açık kümesi var ise; bu taktirde f fonksiyonuna, **hemen hemen s-b-sürekli** denir.

Tanım 4.1.8. (X,θ) ve (Y,σ) , iki topolojik uzay ve θ topolojisi, ρ s-topolojisine bağlı olmak üzere; $f:(X,\theta)\rightarrow(Y,\sigma)$ fonksiyonu verilsin. Eğer

- (i) Her $W\in RO(Y)$ için $f^{-1}(W)\in SRO(X)$ ise; f ye, **hemen hemen s-R-fonksiyon**
- (ii) Her $W\in RO(Y)$ için $f^{-1}(W)\in \rho$ ise; f ye, **hemen hemen s-sürekli fonksiyon**
- (iii) Her $W\in RO(Y)$ için $f^{-1}(W)\in Sa(X)$ ise; f ye, **hemen hemen s- α -sürekli fonksiyon**
- (iv) Her $W\in RO(Y)$ için $f^{-1}(W)\in SSO(X)$ ise; f ye, **hemen hemen s-semi sürekli fonksiyon**
- (v) Her $W\in RO(Y)$ için $f^{-1}(W)\in SPO(X)$ ise; f ye, **hemen hemen s-pre-sürekli fonksiyon**
- (vi) Her $W\in RO(Y)$ için $f^{-1}(W)\in S\beta O(X)$ ise; f ye, **hemen hemen s- β -sürekli fonksiyon**
- (vii) Her $W\in RO(Y)$ için $f^{-1}(W)\in SBO(X)$ ise; f ye, **hemen hemen s-B-sürekli fonksiyon** denir.

Yukarıda tanımları verilen fonksiyonlar için sırasıyla; a.s.r.c., a.s.c., a.s. α .c., a.s.s.c., a.s.p.c., a.s. β .c. ve a.s.b.c. kısaltmaları kullanacağız.

Önerme 4.1.9. (X,θ) ve (Y,σ) , iki topolojik uzay ve ρ, θ ya bağlı herhangi bir s-topolojisi olmak üzere; $f:(X,\theta)\rightarrow(Y,\sigma)$ fonksiyonu verilsin. Eğer f , hemen hemen s-regüler sürekli bir fonksiyon ise; f , hemen hemen supra sürekli fonksiyondur.

İspat: Herhangi bir $W\in RO(Y)$ alınsın. f , hemen hemen s-regüler fonksiyon olduğu için $f^{-1}(W)\in SRO(X)$ elde edilir. Şekil 1 deki ilişkiye göre; her s-regüler açık küme, s-açık

küme olduğundan; $f^{-1}(W) \in \rho$ olur. Bu durum, her $W \in RO(Y)$ için de sağlanır. O halde; f , hemen hemen s -sürekli bir fonksiyondur.

Önermenin tersinin doğru olmadığını gösteren bir örnek verelim.

Örnek 4.1.10. $X = \{k, l, m, n\}$ kümesi ile üzerinde $\theta = \{X, \emptyset, \{k, l\}, \{l\}\}$ topolojisi ve ρ , θ ya bağlı herhangi bir s -topolojisi olmak üzere; $\rho = \{X, \emptyset, \{k, l\}, \{l\}, \{m, n\}, \{l, m, n\}\}$ s -topolojisi ve $Y = \{x, y, z\}$ kümesi ile üzerinde $\sigma = \{Y, \emptyset, \{z\}, \{x, y\}\}$ topolojisi verilsin. $f(k) = f(m) = x$, $f(l) = z$ ve $f(n) = y$ şeklinde bir $f: (X, \theta) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda; f fonksiyonu, a.s.c. olmasına rağmen; a.s.r.c. değildir. $W = \{z\} \subseteq Y$ için $\text{int}(\text{Cl}\{z\}) = \{z\} \in RO(Y)$ olup, $f^{-1}(\text{int}(\text{Cl}(W))) = f^{-1}(\{z\}) = \{l\}$ ve $\text{int}^{\rho}(f^{-1}(\text{int}(\text{Cl}(W)))) = \text{int}^{\rho}(\{l\}) = \{1\} \in SO(X)$ elde edilir. Bu ise; f fonksiyonunun hemen hemen s -sürekli bir fonksiyon olduğunu gösterir. Üstelik; $\text{int}^{\rho}(\text{Cl}^{\rho}(\{l\})) = \text{int}^{\rho}(\{k, l\}) = \{k, l\}$ ve dolayısıyla $f^{-1}(\{z\}) = \{l\} \neq \text{int}^{\rho}(\text{Cl}^{\rho}\{l\}) = \{k, l\}$ elde edilir. O halde; f , hemen hemen regüler sürekli bir fonksiyon değildir.

Önerme 4.1.11. (X, θ) ve (Y, σ) , iki topolojik uzay ve ρ , θ ya bağlı herhangi bir s -topolojisi olmak üzere; $f: (X, \theta) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu verilsin. Eğer f , hemen hemen s -sürekli bir fonksiyon ise; f , hemen hemen s - α -sürekli fonksiyondur.

İspat: Herhangi bir $W \in RO(Y)$ için, $f^{-1}(W) \in \rho$ olduğundan; f , hemen hemen s -sürekli bir fonksiyondur. $f^{-1}(W) \in \rho$ olduğundan; $f^{-1}(W) = \text{int}^{\rho}(f^{-1}(W))$ elde edilir. Dolayısıyla; $f^{-1}(W) = \text{int}^{\rho}(f^{-1}(W)) \subseteq \text{Cl}^{\rho}(\text{int}^{\rho}(f^{-1}(W)))$ ve $\text{int}^{\rho}(\text{int}^{\rho}(f^{-1}(W))) \subseteq \text{int}^{\rho}(\text{Cl}^{\rho}(\text{int}^{\rho}(f^{-1}(W))))$ ile birlikte $\text{int}^{\rho}(f^{-1}(W)) \subseteq \text{int}^{\rho}(\text{Cl}^{\rho}(\text{int}^{\rho}(f^{-1}(W))))$ ve $f^{-1}(W) \subseteq \text{int}^{\rho}(\text{Cl}^{\rho}(\text{int}^{\rho}(f^{-1}(W))))$ bulunur ki; böylece f fonksiyonu, hemen hemen s - α -süreklidir.

Önermenin tersinin doğru olmadığını gösteren bir örnek verelim.

Örnek 4.1.12. $X = \{k, l, m, n\}$ kümesi ile üzerinde $\theta = \{X, \emptyset, \{l\}, \{k, l\}\}$ topolojisi ve ρ , θ ya bağlı herhangi bir s -topolojisi olmak üzere; $\rho = \{X, \emptyset, \{l\}, \{k, l\}, \{m, n\}, \{k, l, m\}\}$ s -topolojisi ve $Y = \{x, y, z\}$ kümesi ile üzerinde $\sigma = \{Y, \emptyset, \{x, y\}, \{z\}\}$ topolojisi verilsin. $f(k) = z = f(l)$, $f(m) = x$ ve $f(n) = y$ şeklinde bir $f: (X, \theta) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda f fonksiyonu, a.s. α .c. olmasına rağmen; a.s.c. değildir. Gerçekten; $V = \{z\}$ kümesi için, $\text{int}(\text{Cl}\{z\}) = \{z\} \in RO(Y)$ olup, buradan $f^{-1}(\{z\}) = \{k, l, n\}$ ve $\text{int}^{\rho}(\text{Cl}^{\rho}(\text{int}^{\rho}(\{k, l, n\}))) = X$ elde edilir. Böylece $f^{-1}(\{z\}) = \{k, l, n\} \subseteq \text{int}^{\rho}(\text{Cl}^{\rho}(\text{int}^{\rho}(\{k, l, n\}))) = X$ olduğundan; f , hemen hemen s - α -sürekli bir fonksiyondur. Ancak $f^{-1}(\{z\}) = \{k, l, n\} \notin \rho$ olduğundan hemen hemen s -sürekli fonksiyon değildir.

Önerme 4.1.13. (X, θ) ve (Y, σ) , iki topolojik uzay ve ρ , θ ya bağlı herhangi bir s -topolojisi olmak üzere; $f: (X, \theta) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu verilsin. Eğer f , hemen hemen s - α -sürekli bir fonksiyon ise; f , hemen hemen s -pre sürekli fonksiyondur.

İspat: Her bir $W \in RO(Y)$ için, $f^{-1}(W) \subseteq \text{int}^p(\text{Cl}^p(\text{int}^p(f^{-1}(W))))$ olduğundan; f fonksiyonu hemen hemen supra α -süreklidir. $\text{int}^p(f^{-1}(W)) \subseteq f^{-1}(W)$ ve $\text{Cl}^p(\text{int}^p(f^{-1}(W))) \subseteq \text{Cl}^p(f^{-1}(W))$ dolayısıyla $\text{int}^p(\text{Cl}^p(\text{int}^p(f^{-1}(W)))) \subseteq \text{int}^p(\text{Cl}^p(f^{-1}(W)))$ olduğundan; f , hemen hemen s -pre-sürekl bir fonksiyondur.

Önermenin tersinin genelde doğru olmadığını gösteren bir örnek verelim.

Örnek 4.1.14. $X = \{k, l, m, n\}$ kümesi ile üzerinde $\theta = \{X, \emptyset, \{k\}, \{l\}, \{k, l\}\}$ topolojisi ve ρ , θ ya bağlı herhangi bir s -topolojisi olmak üzere; $\rho = \{X, \emptyset, \{k\}, \{l\}, \{k, l\}, \{m, n\}, \{k, m, n\}, \{l, m, n\}\}$ s -topolojisi ve $Y = \{x, y, z\}$ kümesi ile üzerinde $\sigma = \{Y, \emptyset, \{x\}, \{y, z\}\}$ topolojisi verilsin. $f(k) = f(m) = x$, $f(l) = y$ ve $f(n) = z$ şeklinde bir $f : (X, \theta) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda f fonksiyonu, a.s. α .c. olmasına rağmen; a.s.c. değildir. Gerçekten; $W = \{x\} \subseteq Y$ kümesi için, $\text{int}(\text{cl}\{x\}) = \{x\} \in RO(Y)$ ve $f^{-1}(\{x\}) = \{k, m\}$ ve $\text{int}^p(\text{Cl}^p(\{k, m\})) = \{k, m, n\}$ ve dolayısıyla $\{k, m\} \subseteq \text{int}^p(\text{Cl}^p(\{k, m\}))$ olduğundan; f , hemen hemen s -pre sürekl bir fonksiyondur. Fakat, $\text{int}^p(\text{Cl}^p(\text{int}^p(\{k, m\}))) = \{k\}$ ve $f^{-1}(W) \not\subseteq \text{int}^p(\text{Cl}^p(\text{int}^p(f^{-1}(W))))$ olup bu durumda f , hemen hemen s - α -sürekl bir fonksiyon değildir.

Önerme 4.1.15. (X, θ) ve (Y, σ) , iki topolojik uzay ve ρ , θ ya bağlı herhangi bir s -topolojisi olmak üzere; $f : (X, \theta) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu verilsin. Eğer f , hemen hemen s -semi sürekl bir fonksiyon ise; aynı zamanda f , hemen hemen s -b sürekl bir fonksiyondur.

İspat: Her $W \in RO(Y)$ için, $f^{-1}(W) \subseteq \text{Cl}^p(\text{int}^p(f^{-1}(W)))$ olduğundan; f , hemen hemen s -semi-sürekl bir fonksiyondur. $\text{Cl}^p(\text{int}^p(f^{-1}(W))) \subseteq \text{int}^p(\text{Cl}^p(f^{-1}(W))) \cup \text{Cl}^p(\text{int}^p(f^{-1}(W)))$, birleşim işlemi tanımından geçerlidir. O halde; $f^{-1}(W) \subseteq \text{int}^p(\text{Cl}^p(f^{-1}(W))) \cup \text{Cl}^p(\text{int}^p(f^{-1}(W)))$ sağlanır ve dolayısıyla; $f^{-1}(W) \subseteq X$, s -b açık kümedir. Böylece f , hemen hemen s -b sürekl bir fonksiyondur.

Önermenin tersinin doğru olmadığını gösteren bir örnek verelim.

Örnek 4.1.16. $X = \{k, l, m, n\}$ kümesi ile üzerinde $\theta = \{X, \emptyset, \{k\}, \{l\}, \{k, l\}\}$ topolojisi ve ρ , θ ya bağlı herhangi bir s -topolojisi olmak üzere; $\rho = \{X, \emptyset, \{k\}, \{l\}, \{k, l\}, \{m, n\}, \{k, l, m\}, \{l, m, n\}\}$ s -topolojisi ve $Y = \{x, y, z\}$ kümesi ile üzerinde $\sigma = \{Y, \emptyset, \{x\}, \{y, z\}\}$ topolojisi verilsin. $f(k) = f(m) = x$, $f(l) = y$ ve $f(n) = z$ şeklinde bir $f : (X, \theta) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda f fonksiyonu, a.s.b.c. olmasına rağmen; a.s.s.c değildir. Gerçekten; her $W \in RO(Y)$ için, $f^{-1}(W) \subseteq \text{int}^p(\text{Cl}^p(f^{-1}(W))) \cup \text{Cl}^p(\text{int}^p(f^{-1}(W)))$ olduğundan; f fonksiyonu, hemen hemen s -b süreklidir. Ancak $W = \{x\} \subseteq Y$ kümesi için, $\text{int}(\text{cl}(W)) = \text{int}(\text{cl}(\{x\})) = \{x\} = W$ yani; $W \in RO(Y)$ geçerlidir. $f^{-1}(W) = f^{-1}(\{x\}) = \{a, c\}$ ve $\text{Cl}^p(\text{int}^p(f^{-1}(W))) = \text{Cl}^p(\text{int}^p(\{a, c\})) = \{a\}$ olup, $f^{-1}(W) = \{a, c\} \not\subseteq \{a\} = \text{Cl}^p(\text{int}^p(f^{-1}(W)))$ elde edilir. Bu ise; $f^{-1}(W) \subseteq X$ nin s -semi açık küme olmadığını gösterir. O halde; f , hemen hemen s -semi sürekl değildir.

Önerme 4.1.17. (X, θ) ve (Y, σ) , iki topolojik uzay ve ρ, θ ya bağlı herhangi bir s-topolojisi olmak üzere; $f: (X, \theta) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu verilsin. Eğer f , hemen hemen s- α -süreklili bir fonksiyon ise; aynı zamanda f , hemen hemen s-semi süreklili bir fonksiyondur.

İspat: Her $W \in RO(Y)$ için, $f^{-1}(W) \subseteq \text{int}^\rho(\text{Cl}^\rho(\text{int}^\rho(f^{-1}(W))))$ olduğundan; f , hemen hemen s- α -süreklili bir fonksiyondur. Ayrıca; $f^{-1}(W) \subseteq \text{int}^\rho(\text{Cl}^\rho(\text{int}^\rho(f^{-1}(W)))) \subseteq \text{Cl}^\rho(\text{int}^\rho(f^{-1}(W)))$ ve böylece $f^{-1}(W) \subseteq \text{Cl}^\rho(\text{int}^\rho(f^{-1}(W)))$ elde edilir yani; $f^{-1}(W) \subseteq X$, s-semi açık küme olur. Böylece f , hemen hemen s-semi süreklili bir fonksiyondur.

Önermenin tersinin doğru olmadığını gösteren bir örnek verelim.

Örnek 4.1.18. $X = \{k, l, m, n\}$ kümesi ile üzerinde $\theta = \{X, \emptyset, \{l\}, \{k, l\}\}$ topolojisi ve ρ, θ ya bağlı herhangi bir s-topolojisi olmak üzere; $\rho = \{X, \emptyset, \{l\}, \{k, l\}, \{k, m\}, \{k, l, m\}\}$ s-topolojisi ve $Y = \{x, y, z\}$ kümesi ile üzerinde $\sigma = \{Y, \emptyset, \{x, y\}, \{z\}\}$ topolojisi verilsin. $f(l) = x$, $f(n) = y$ ve $f(k) = f(m) = z$ şeklinde bir $f: (X, \theta) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda f fonksiyonu, a.s.s.c. olmasına rağmen; a.s.a.c. değildir. Her $W \in RO(Y)$ için, $f^{-1}(W) \subseteq \text{Cl}^\rho(\text{int}^\rho(f^{-1}(W)))$ olduğundan; f fonksiyonu, hemen hemen s-semi süreklili. Ancak $W = \{x, y\} \subseteq Y$ kümesi için; $\text{int}(\text{Cl}(\{x, y\})) = \{x, y\}$ olduğundan; $W \in RO(Y)$ elde edilir. Bu durumda; $f^{-1}(W) = f^{-1}(\{x, y\}) = \{l, n\}$ ve dolayısıyla $\text{Cl}^\rho(\text{int}^\rho(f^{-1}(W))) = \text{Cl}^\rho(\text{int}^\rho(\{l, n\})) = \{l, n\}$ bulunur ki; sonuçta $f^{-1}(W) \subseteq \text{int}^\rho(\text{Cl}^\rho(f^{-1}(W)))$ sağlanır. Fakat $\text{int}^\rho(\text{Cl}^\rho(\text{int}^\rho(\{l, n\}))) = \{l\}$ ve $\{l, n\} \not\subseteq \{l\} = \text{int}^\rho(\text{Cl}^\rho(\text{int}^\rho(\{l, n\})))$ olduğundan; $f^{-1}(W) \not\subseteq \text{int}^\rho(\text{Cl}^\rho(\text{int}^\rho(f^{-1}(W))))$ bulunur. Bu da, $f^{-1}(W) \subseteq X$ in s- α -açık bir küme olmadığını gösterir. Sonuç olarak; f , hemen hemen s- α -süreklili bir fonksiyon değildir.

Önerme 4.1.19. (X, θ) ve (Y, σ) , iki topolojik uzay ve ρ, θ ya bağlı herhangi bir s-topolojisi olmak üzere; $f: (X, \theta) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu verilsin. Eğer f , hemen hemen s-pre-süreklili bir fonksiyon ise; aynı zamanda f , hemen hemen s-b süreklili bir fonksiyondur.

İspat: Her $W \in RO(Y)$ için, $f^{-1}(W) \subseteq \text{int}^\rho(\text{Cl}^\rho(f^{-1}(W)))$ olduğundan; f , hemen hemen s-pre-süreklili bir fonksiyondur. $\text{int}^\rho(\text{Cl}^\rho(f^{-1}(W))) \subseteq \text{int}^\rho(\text{Cl}^\rho(f^{-1}(W))) \cup \text{Cl}^\rho(\text{int}^\rho(f^{-1}(W)))$ geçerli olduğundan; sonuç olarak $f^{-1}(W) \subseteq \text{int}^\rho(\text{Cl}^\rho(f^{-1}(W))) \cup \text{Cl}^\rho(\text{int}^\rho(f^{-1}(W)))$ elde edilir. O halde f , hemen hemen s-b süreklili bir fonksiyondur.

Önermenin tersinin doğru olmadığını gösteren bir örnek verelim.

Örnek 4.1.20. $X = \{k, l, m, n\}$ kümesi ile üzerinde $\theta = \{X, \emptyset, \{l\}, \{k, l\}\}$ topolojisi ve ρ, θ ya bağlı herhangi bir s-topolojisi olmak üzere; $\rho = \{X, \emptyset, \{l\}, \{k, l\}, \{m\}, \{l, m\}, \{k, l, m\}\}$ s-topolojisi ve $Y = \{x, y, z\}$ kümesi ile üzerinde $\sigma = \{Y, \emptyset, \{x, y\}, \{z\}\}$ topolojisi verilsin. $f(k) = x$, $f(l) = y$ ve $f(m) = f(n) = z$ şeklinde bir $f: (X, \theta) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda f fonksiyonu, a.s.s.c. ve a.s.b.c. olmasına rağmen; a.s.p.c. değildir. Gerçekten; $W = \{z\} \subseteq Y$ kümesi için, $\text{int}(\text{Cl}(\{z\})) = \{z\} \in RO(Y)$ geçerlidir. $f^{-1}(W) = f^{-1}(\{z\}) = \{m, n\}$, $\text{Cl}^\rho(\text{int}^\rho(\{m, n\})) = \{m, n\}$ ve $f^{-1}(\text{Cl}^\rho(\text{int}^\rho(W))) = f^{-1}(\{z\}) = \{m, n\} \subseteq \text{Cl}^\rho(f^{-1}(\{z\})) = \text{Cl}^\rho(\text{int}^\rho(\{m, n\}))$ olduğundan; $f^{-1}(W) \subseteq \text{Cl}^\rho(\text{int}^\rho(f^{-1}(W)))$ elde edilir. Dolayısıyla;

$f^{-1}(W) \subseteq X$, hemen hemen s-semi açıktır. Önerme 4.1.15' e göre Hemen hemen s-semi açık olduğu için hemen hemen s-b-açıktır. Dolayısıyla; f , hemen hemen s-b sürekli bir fonksiyondur. Üstelik; $W = \{z\} \in RO(Y)$ için, $\text{int}^p(\text{Cl}^p(\{m,n\})) = \{m\}$ ve $\{m,n\} \not\subseteq \text{int}^p(\text{Cl}^p(\{m,n\}))$ ve dolayısıyla; $f^{-1}(W) \not\subseteq \text{int}^p(\text{Cl}^p(\{m,n\}))$ sağlanır ki; bu da $f^{-1}(W)$ nin hemen hemen s-pre açık olmadığını gösterir. O halde; f fonksiyonu, hemen hemen s-pre sürekli değildir.

Önerme 4.1.21. (X, θ) ve (Y, σ) , iki topolojik uzay ve ρ, θ ya bağlı herhangi bir s-topolojisi bağlı olmak üzere; $f : (X, \theta) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu verilsin. Eğer f , hemen hemen s-b sürekli bir fonksiyon ise; aynı zamanda f , hemen hemen s- β sürekli bir fonksiyondur.

İspat: Her $W \in RO(Y)$ için, $f^{-1}(W) \subseteq \text{int}^p(\text{Cl}^p(f^{-1}(W))) \cup \text{Cl}^p(\text{int}^p(f^{-1}(W)))$ olduğundan; f , hemen hemen s-b-sürekli bir fonksiyondur. Cl^p kapanış işlemi olduğundan; tanımı gereği

$\text{int}^p(\text{Cl}^p(f^{-1}(W))) \cup \text{Cl}^p(\text{int}^p(f^{-1}(W))) \subseteq \text{Cl}^p[\text{int}^p(\text{Cl}^p(f^{-1}(W))) \cup \text{Cl}^p(\text{int}^p(f^{-1}(W)))]$
(1) sağlanır. Üstelik; Cl^p kapanış işlemi olduğu için, sırasıyla;

$$\text{Cl}^p[\text{int}^p(\text{Cl}^p(f^{-1}(W))) \cup \text{Cl}^p(\text{int}^p(f^{-1}(W)))] = \text{Cl}^p[\text{int}^p(\text{Cl}^p(f^{-1}(W)))] \cup \text{Cl}^p[\text{Cl}^p(\text{int}^p(f^{-1}(W)))]$$

ve $\text{Cl}^p[\text{Cl}^p(\text{int}^p(f^{-1}(W)))] = \text{Cl}^p(\text{int}^p(f^{-1}(W)))$ sağlanır. Ayrıca; $f^{-1}(W) \subseteq \text{Cl}^p(f^{-1}(W))$ olduğundan (1) bağıntısı, sırasıyla;

$$\text{int}^p(\text{Cl}^p(f^{-1}(W))) \cup \text{Cl}^p(\text{int}^p(f^{-1}(W))) \subseteq \text{Cl}^p[\text{int}^p(\text{Cl}^p(f^{-1}(W)))] \cup \text{Cl}^p(\text{int}^p(f^{-1}(W)))$$

(2)

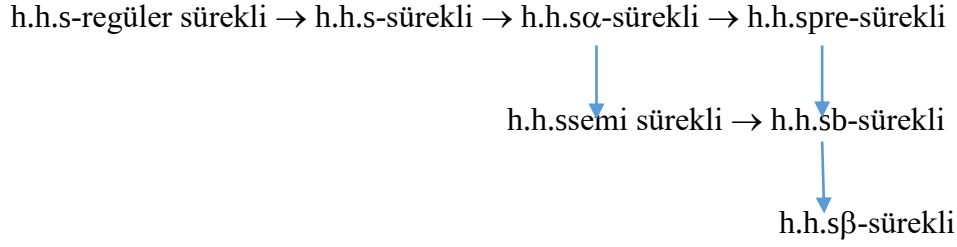
ve

$$\text{int}^p(\text{Cl}^p(f^{-1}(W))) \cup \text{Cl}^p(\text{int}^p(f^{-1}(W))) \subseteq \text{Cl}^p(\text{int}^p(\text{Cl}^p(f^{-1}(W)))) \quad (3)$$

şekline dönüşür. s-b açık küme tanımıyla (3) kullanılarak; $f^{-1}(W) \subseteq \text{Cl}^p(\text{int}^p(\text{Cl}^p(f^{-1}(W))))$ elde edilir. Bu ise; $f^{-1}(W) \subseteq X$ in s- β açık küme olduğunu gösterir. O halde; f fonksiyonu, hemen hemen s- β sürekli dir.

Önermenin tersinin doğru olmadığını gösteren bir örnek verelim.

Örnek 4.1.22. $X = \{k, l, m, n\}$ kümesi ile üzerinde $\theta = \{X, \emptyset, \{m\}, \{k, n\}, \{k, m, n\}\}$ topolojisi ve ρ, θ ya bağlı herhangi bir s-topolojisi olmak üzere; $\rho = \{X, \emptyset, \{k\}, \{l, m\}, \{k, l, m\}\}$ s-topolojisi ve $X = \{k, l, m, n\}$ kümesi ile üzerinde $\sigma = \{X, \emptyset, \{k\}, \{l, m\}, \{k, l, m\}\}$ topolojisi verilsin. $f(k) = f(l) = k$, $f(m) = l$ ve $f(n) = n$ şeklinde bir $f : (X, \theta) \rightarrow (X, \sigma)$ fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda f fonksiyonu, a.s.b.c. olmasına rağmen; a.s.s.c değildir. Gerçekten; her $W \in RO(X)$ için, $f^{-1}(W) \subseteq \text{Cl}^p(\text{int}^p(\text{Cl}^p(f^{-1}(W))))$ olduğundan; f , hemen hemen s- β sürekli fonksiyondur. Ancak; $W = \{k\} \in RO(X, \sigma)$ için, $f^{-1}(W) = f^{-1}(\{k\}) = \{k, l\}$, s-b açık bir küme değildir. O halde; f , s-b sürekli bir fonksiyon değildir.



ŞEKİL 6

Yukarıdaki önerme ve örnekler yardımıyla Şekil 6 verildi.

Teorem 4.1.23. (X, θ) ve (Y, σ) , iki topolojik uzay ve ρ, θ ya bağlı herhangi bir s -topolojisi olmak üzere tanımlanan bir $f: (X, \theta) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu için, aşağıdaki özellikler eşdeğerdir:

- (i) f fonksiyonu, hemen hemen s -b sürekli.
- (ii) $f(x)$ noktasını içeren her $V \in \text{RO}(Y, \sigma)$ için, $f(U) \subseteq \text{int}^\rho(\text{Cl}^\rho(V))$ olacak şekilde x noktasını içeren en az bir $U \in \text{SBO}(X)$ vardır.
- (iii) Her $F \in \text{RC}(Y)$ için, $f^{-1}(F) \in \text{SBC}(X)$.
- (iv) Her $V \in \text{RO}(Y)$ için, $f^{-1}(F) \in \text{SBO}(X)$.

İspat: İspat, Teorem 4.1.7 gereği açıktır.

Teorem 4.1.24. (X, θ) ve (Y, σ) , iki topolojik uzay ve ρ, θ ya bağlı herhangi bir s -topolojisi olmak üzere tanımlanan bir $f: (X, \theta) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu için, aşağıdaki özellikler eşdeğerdir:

- (i) f , $h.h.sb$ sürekli.
- (ii) Her $D \subseteq X$ için, $f(b\text{Cl}^\rho(D)) \subseteq \delta\text{-Cl}(f(D))$.
- (iii) Her $T \subseteq Y$ için, $b\text{Cl}^\rho(f^{-1}(T)) \subseteq f^{-1}(\delta\text{-Cl}(T))$.
- (iv) Her $F \in \delta\text{C}(Y)$ için, $f^{-1}(F) \in \text{SBC}(X, \rho)$.
- (v) Her $W \in \delta\text{O}(Y)$ için, $f^{-1}(W) \in \text{SBO}(X, \rho)$.

İspat (i) $\Rightarrow$ (ii). Her $D \subseteq X$ için, $\delta\text{-Cl}(f(D)) \subseteq Y$ δ -kapalı bir kümedir. Dolayısıyla; tanım gereği, $\delta\text{-Cl}(f(D)) = \bigcap \{ (F_\alpha) : (F_\alpha) \in \text{RC}(Y, \sigma), \alpha \in \nabla \}$ (∇ indis kümesidir.) geçerlidir. Teorem 4.1.23 kullanılarak; $D \subseteq f^{-1}(\delta\text{-Cl}^\rho(f(D))) = \bigcap \{ f^{-1}(F_\alpha) : \alpha \in \nabla \} \in \text{SBC}(X, \rho)$ ve $b\text{Cl}^\rho(D) \subseteq f^{-1}(\delta\text{-Cl}(f(D)))$ elde edilir. Böylece $f(b\text{Cl}^\rho(D)) \subseteq \delta\text{-Cl}(f(D))$ sağlanır.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Her $T \subseteq Y$ için, $f(b\text{Cl}^\rho(f^{-1}(T))) \subseteq \delta\text{-Cl}^\rho(f(f^{-1}(T))) \subseteq f^{-1}(\delta\text{-Cl}^\rho(T))$ olduğundan; sonuçta $f(b\text{Cl}^\rho(f^{-1}(T))) \subseteq f^{-1}(\delta\text{-Cl}^\rho(T))$ sağlanır.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). $F \subseteq Y$, δ -kapalı bir küme olsun. Bu durumda; $b\text{Cl}^\rho(f^{-1}(F)) \subseteq f^{-1}(\delta\text{-Cl}^\rho(F)) = f^{-1}(F)$ ve dolayısıyla $b\text{Cl}^\rho(f^{-1}(F)) \subseteq f^{-1}(F)$ sağlanır. O halde; $f^{-1}(F) \subseteq X$, s -b-kapalı bir kümedir.

(iv)⇒(v). $W \subseteq Y$, δ -açık bir küme olsun. O halde; $(Y-W)$ kümesi, δ -kapalıdır. Hipotez gereği (iv) kullanılarak, $(f^{-1}(Y-W) = (X-f^{-1}(W))) \in \text{SBC}(X, \rho)$ ve dolayısıyla $f^{-1}(W) \in \text{SBO}(X)$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

(v)⇒(vi). $W \subseteq Y$, regular açık bir küme olsun. O halde; $W \in \delta O(Y)$ olup, bu durumda hipotez gereği (v) kullanılarak, $f^{-1}(W) \in \text{SBO}(X)$ elde edilir. Bu ise; Teorem 4.8 gereği, f fonksiyonunun a.s.b.c. olduğunu gösterir.

Teorem 4.1.25. $f : (X, \theta) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu, θ ya bağlı s-topolojisi ρ ve her $x \in X$ için, $g(x) = (x, f(x))$ şeklinde tanımlanan $g : (X, \theta) \rightarrow (X \times Y, \theta \times \sigma)$ grafik fonksiyonu verilsin. Eğer g fonksiyonu, h.h.s.b-süreklidir ise; f fonksiyonu da, h.h.s.b-süreklidir.

İspat : $x \in X$ ve V , $f(x) \in Y$ noktasını içeren herhangi bir regüler açık küme olsun. Bu durumda; $g(x) = (x, f(x)) \in (X \times V) \in \text{RO}(X \times Y)$ sağlanır. g , h.h.s.b-süreklidir olduğundan; $g(U) \subseteq (X \times V)$ olacak şekilde $x \in X$ noktasını içeren bir $U \subseteq X$, s-b-açık kümesi vardır. Böylece $f(U) \subseteq V$ elde edilir ki; bu da f fonksiyonunun h.h.s.b-süreklidir olduğunu gösterir.

Teorem 4.1.26 $f : (X, \theta) \rightarrow (Y, \sigma)$ ve $g : (Y, \sigma) \rightarrow (Z, \psi)$ iki fonksiyon verilsin. ρ , θ ya bağlı s-topolojisi olmak üzere; $\text{gof} : (X, \theta) \rightarrow (Z, \psi)$ bileşke fonksiyonu, aşağıdaki özellikleri sağlar:

- (i)** f fonksiyonu, hemen hemen b-süreklidir ve g fonksiyonu, R-süreklidir ise; gof fonksiyonu, hemen hemen s-b-süreklidir.
- (ii)** f fonksiyonu, hemen hemen b-süreklidir ve g fonksiyonu, δ -süreklidir ise; gof fonksiyonu, hemen hemen s-b-süreklidir.

Tanım 4.1.27. (Ekici, 2005) (X, θ) uzayındaki farklı herhangi iki $x, y \in X$ nokta çifti için, $x \in W$, $y \notin W$ ve $y \in T$, $x \notin T$ olacak şekilde $W, T \in \text{RO}(X)$ var ise; (X, θ) uzayına, **r- θ_1** uzayı denir.

Tanım 4.1.28. (X, θ) uzayı ile θ ya bağlı s-topolojisi ρ verilsin. Eğer X deki herhangi farklı x ve y nokta çifti için, $x \in W$, $y \notin W$ ve $y \in T$, $x \notin T$ olacak şekilde $W, T \in \text{sb}(X, \rho)$ varsa; bu durumda (X, ρ) uzayına, **S-b- θ_1** uzayı denir.

Teorem 4.1.29. $f : (X, \theta) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu ve θ ya bağlı s-topolojisi ρ verilsin. Eğer f , birebir bir fonksiyon ve (Y, σ) , $r-\theta_1$ uzay ise; bu durumda (X, θ) , $\text{sb}-\theta_1$ uzayıdır.

İspat : (Y, σ) , $r-\theta_1$ uzay olsun. O halde; $x \neq y$ olacak şekilde herhangi $x, y \in X$ için, $f(x) \in V$, $f(y) \notin V$, $f(x) \notin W$, $f(y) \in W$ olacak şekilde $V, W \in \text{RO}(Y)$ vardır. f fonksiyonu, h.h.s.b-süreklidir olduğundan; $x \in U$, $y \in T$, $f(U) \subseteq V$ ve $f(T) \subseteq W$ olacak şekilde $U, T \in \text{SBO}(X, \mu)$ vardır. Üstelik; $y \notin U$ ve $x \notin T$ geçerlidir. Bu ise; (X, ρ) nın $\text{sb}-\theta_1$ uzay olduğunu gösterir.

Tanım 4.1.30. (X, ρ) s-uzayındaki farklı $x, y \in X$ nokta çifti için, $x \in W$, $y \in T$ ve $W \cap T = \emptyset$ olacak şekilde $W, T \in \text{SBO}(X, \rho)$ varsa; bu durumda (X, ρ) uzayına, **sb- θ_2 uzayı** denir.

Teorem 4.1.31. $f : (X, \theta) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu ve θ ile ilgili herhangi bir ρ s-topolojisi verilsin. Eğer f , birebir ve h.h.s.b sürekli bir fonksiyon ve (Y, σ) , θ_2 -uzayı ise; (X, θ) , sb- θ_2 uzayıdır.

İspat : $x \neq y$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ nokta çifti için, $f(x) \in U$, $f(y) \in T$ ve $U \cap T = \emptyset$ olacak şekilde $U, T \in \sigma$ vardır. f fonksiyonu, h.h.s.b-sürekli olduğundan; $x \in K$, $y \in M$, $f(K) \subseteq \text{int}(\text{Cl}(U))$ ve $f(M) \subseteq \text{int}(\text{Cl}(T))$ olacak şekilde $K, M \in \text{SBO}(X, \mu)$ vardır. Üstelik, $U \cap T = \emptyset$ olduğundan; $\text{int}(\text{Cl}(U)) \cap \text{int}(\text{Cl}(T)) = \emptyset$ ve dolayısıyla $K \cap M = \emptyset$ elde edilir. Böylece (X, μ) , sb- θ_2 uzayı olur.

Teorem 4.1.32. $f : (X, \theta) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu ve θ ya bağlı s-topolojisi ρ verilsin. Eğer f ve g , h.h.s.b. sürekli ve (Y, σ) , θ_2 uzayı ise; bu durumda $\Delta = \{x \in X : f(x) = g(x)\} \subseteq X$, s-b-kapalıdır.

İspat: $f(U) \subseteq \text{cl}(K)$ olacak şekilde $x \in X$ noktasını kapsayan bir $U \in \theta$ vardır. g fonksiyonu, h.h.s.b-sürekli olduğundan ; $g(V) \subseteq \text{int}(\text{cl}(M))$ olacak şekilde $M \in \text{SBO}(X, \rho)$ vardır. En az bir $x \in V$ vardır, $T = U \cap V$ alınırsa; Lemma 2.27 gereği $T \in \text{SBO}(X, \rho)$, $x \in T$ ve $T \cap \Delta = \emptyset$ olur. Böylece $x \notin \text{Cl}_b^\rho(\Delta)$ olur ki; bu da $\Delta \subseteq X$, s.b-kapalı olduğunu gösterir.

Tanım 4.1.33. Herhangi bir (X, ρ) s-uzayı verilsin. Eğer X , ayrık iki s-b-açık kümenin birleşimi olarak yazılamıyorsa; (X, ρ) na, **sb-bağlantılı uzay** denir.

Teorem 4.1.34. $f : (X, \theta) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu ve θ ya bağlı s-topolojisi ρ verilsin. Eğer f , h.h.s.b-sürekli ve örten bir fonksiyon ve (X, ρ) , sb-bağlantılı ise; (Y, σ) , bağlantılıdır.

İspat: (Y, σ) bağlantılı olmasın. O halde; $K \cap M = \emptyset$ ve $K \cup M = Y$ olacak şekilde boştan farklı $K, M \in \sigma$ vardır. $R = \text{int}(\text{Cl}(K))$ ve $W = \text{int}(\text{Cl}(M))$ olmak üzere; $R \cup W = Y$ olacak şekilde ayrık boştan farklı $R, W \in \text{RO}(Y, \sigma)$ vardır. Hipotez gereği f , h.h.s.b-sürekli bir fonksiyon olduğundan; $f^{-1}(R)$, $f^{-1}(W) \in \text{SBO}(X, \rho)$ bulunur. Üstelik; f fonksiyonu, örten olduğundan; $X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(R) \cup f^{-1}(W)$ ve $f^{-1}(R) \cap f^{-1}(W) = \emptyset$ sağlanır. Dolayısıyla (X, ρ) , sb-bağlantılı değildir ki; bu hipotezle çelişir. O halde; (Y, σ) , bağlantılıdır.

Tanım 4.1.35. Herhangi bir $f : (X, \theta) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu ile birlikte θ ya bağlı s-topolojisi, ρ ve f nin $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ grafik fonksiyonu verilsin. Eğer her $(x, y) \in ((X \times Y) - G(f))$ için, $(U \times V) \cap G(f) = \emptyset$ olacak şekilde $x \in X$ noktasını içeren bir $U \in \text{SBO}(X, \rho)$ ve $y \in Y$ noktasını içeren bir $V \in \text{RO}(Y, \sigma)$ varsa; bu durumda $G(f)$ grafik fonksiyonuna, **kuvvetli h.h.s.b-kapalı** denir.

Lemma 4.1.36. $f : (X, \theta) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu ile birlikte θ ya bağılı s-topolojisi ρ verilsin. f fonksiyonunun kuvvetli h.h.s.b-kapalı grafiğe sahip olması için gerek ve yeter şart $f(x) \neq y$ olacak şekilde her $x \in X$ ve her $y \in Y$ için, $f(U) \cap V = \emptyset$ olacak şekilde x noktasını içeren bir $U \in \text{SBO}(X, \rho)$ ve y noktasını içeren bir $V \in \text{RO}(Y, \sigma)$ var olmasıdır.

Teorem 4.1.37. $f : (X, \theta) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu ve θ ya bağılı s-topolojisi ρ verilsin. Eğer f , weakly sürekli bir fonksiyon ve (Y, σ) , θ_2 -uzay ise; $G(f)$, kuvvetli h.h.b-kapalıdır.

İspat: $(x, y) \in ((X \times Y) - G(f))$ olsun. Bu durumda $y \neq f(x)$ sağlanır. (Y, σ) , θ_2 -uzayı olduğundan; $y \in K_1$, $f(x) \in K_2$ ve $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ olacak şekilde $K_1, K_2 \in \sigma$ vardır. Üstelik; $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ olduğundan; $\text{int}(\text{Cl}(K_1)) \cap \text{int}(\text{Cl}(K_2)) = \emptyset$ sağlanır. Hipotez gereği; f fonksiyonu, weakly sürekli olduğundan; $f(U) \subseteq \text{Cl}(K_2)$ olacak şekilde x noktasını içeren bir $U \in \theta$ vardır. Böylece $f(U) \cap \text{int}(\text{Cl}(K_1)) = \emptyset$ sağlanır ki; bu durumda Lemma 4.1.36. gereği $G(f)$, kuvvetli h.h.s.b-kapalı olur.

Teorem 4.1.38. $f : (X, \theta) \rightarrow (Y, \sigma)$, kuvvetli h.h.s.b-kapalı $G(f)$ grafiğine sahip herhangi bir fonksiyon olmak üzere; eğer f fonksiyonu, birebir ise; (X, θ) , sb- θ_1 -uzayıdır.

İspat: $x \neq y$ olacak şekilde $x, y \in X$ alınsın. Bu durumda; $(x, f(y)) \in ((X \times Y) - G(f))$ sağlanır. $G(f)$, kuvvetli h.h.s.b-kapalı olduğundan; Lemma 4.1.36 gereği, $f(U) \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $x \in X$ noktasını içeren bir $U \in \text{SBO}(X, \mu)$ ve $f(y)$ noktasını içeren bir $V \in \text{RO}(Y, \sigma)$ vardır. Dolayısıyla; $U \cap f^{-1}(V) = \emptyset$ ve $y \notin U$ sağlanır. Böylece (X, μ) , sb- θ_1 -uzayıdır.

Tanım 4.1.39. $f : (X, \theta) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu ile X kümesi üzerinde tanımlı θ ya bağılı s-topolojisi ρ ve Y kümesi üzerinde tanımlı σ ya bağılı s-topolojisi ϕ verilsin. Eğer her $U \in \text{SBO}(X, \rho)$ için, $f(U) \in \text{SBO}(Y, \sigma)$ ise; bu durumda f fonksiyonuna, **supra b*-açık (s.b*-açık) fonksiyon** denir.

Teorem 4.1.40. Herhangi bir kuvvetli h.h.s.b-kapalı $G(f)$ grafiğine sahip $f : (X, \theta) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu ve θ ya bağılı s-topolojisi ρ verilsin. Eğer f , s.b*-açık ve örten bir fonksiyon ise; (Y, ϕ) , sb- θ_2 -uzayıdır.

İspat: $y \neq z$ olacak şekilde $y, z \in Y$ alınsın. f , örten bir fonksiyon olduğundan; bu durumda $f(x) = y$ ve $(x, z) \in ((X \times Y) - G(f))$ sağlanır. $G(f)$, kuvvetli h.h.s.b-kapalı olduğundan; Tanım 4.1.35 gereği, $(U \times V) \cap G(f) = \emptyset$ olacak şekilde $x \in X$ noktasını içeren bir $U \in \text{SBO}(X, \rho)$ ve z noktasını içeren bir $V \in \text{RO}(Y, \phi)$ vardır. O halde; Lemma 4.1.36 gereği, $f(U) \cap V = \emptyset$ geçerlidir. f fonksiyonu, s.b*-açık olduğundan; $f(U) \in \text{SBO}(Y, \phi)$, $f(x) = y$ noktasını içerir. Böylece (Y, ϕ) , sb- θ_2 uzayıdır.

Tanım 4.1.41. (Singal, Singal, Mathur, 1969) (X, θ) topolojik uzayı verilsin. Eğer X in her regüler açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa; (X, θ) uzayına, **nearly kompakt uzay** denir.

Tanım 4.1.42. (X, ρ) s-uzayı verilsin. Eğer X in her s.b-açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa; (X, ρ) s-uzayına, **supra b-kompakt** (kısaca **s.b-kompakt**) **uzay** denir.

Tanım 4.1.43. (J. M. Mustafa, 2013) (X, ρ) s-uzayı ile $A \subseteq X$ kümesi verilsin. Eğer $A \subseteq \bigcup \{T_\alpha: \alpha \in \Delta\}$ olacak şekildeki X in sb-açık alt kümelerinin her $\{T_\alpha: \alpha \in \Delta\}$ ailesi için, $A \subseteq \bigcup \{T_\alpha: \alpha \in \Delta_0\}$ olacak şekilde sonlu bir $\Delta_0 \subseteq \Delta$ indis kümesi varsa; bu takdirde A ya, **sb-kompakt küme** denir.

Tanım 4.1.44. (Carnahan, 1972) (X, θ) topolojik uzayı ve $A \subseteq X$ kümesi verilsin. A nın X deki tüm regüler açık kümelerden oluşan her örtüsü için, sonlu bir alt örtüsü varsa; bu durumda; A ya, **N-kapalı küme** denir.

Teorem 4.1.45. $f : (X, \theta) \rightarrow (Y, \sigma)$, h.h.s.b sürekli bir fonksiyon ve $K \subseteq X$, sb-kompakt bir küme ise; bu durumda $f(K) \subseteq Y$ kümesi N-kapalıdır.

İspat: $\{T_\alpha: \alpha \in \Delta\}$, $f(K) \subseteq Y$ için regüler açık kümelerden oluşan bir örtü olsun. f , h.h.s.b.c. bir fonksiyon olduğundan; $\{f^{-1}(T_\alpha): \alpha \in \Delta\}$, X in s.b-açık kümelerinden oluşur ve $K \subseteq X$ için bir örtüdür. K , s.b-kompakt bir küme olduğundan; $K \subseteq \bigcup \{f^{-1}(T_\alpha): \alpha \in \Delta_0\}$ olacak şekilde sonlu bir $\Delta_0 \subseteq \Delta$ indis kümesi vardır. Buradan $f(K) \subseteq \bigcup \{T_\alpha: \alpha \in \Delta_0\}$ elde edilir ki; bu ise $f(K) \subseteq Y$ kümesinin N-kapalı olduğunu gösterir.

Sonuç 4.1.46. $f : (X, \theta) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu, h.h.s.b sürekli, örten fonksiyonu ile θ ya bağlı s-topolojisi ρ verilsin. Eğer (X, μ) , s.b-kompakt ise; (Y, σ) , nearly kompakt uzaydır.

Son olarak aşağıdaki teoremleri verelim.

Teorem 4.1.47. $f : (X, \theta) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu $(\rho, \theta$ ya bağlı s-topolojisi) kuvvetli h.h.s.b-kapalı grafiğe sahip bir fonksiyon ise; X 'e göre sb-kompakt olan her $K \subset X$ için, $f(K) \subset Y$; δ -kapalıdır.

İspat: $y \notin f(K)$ olsun. O halde; $(x, y) \in ((X \times Y) - G(f))$ sağlanır. $G(f)$, kuvvetli h.h.b-kapalı grafik fonksiyonu olduğundan; $f(T_x) \cap V_x = \emptyset$ olacak şekilde x noktasını içeren bir $T_x \in SBO(X, \mu)$ ve y noktasını içeren bir $V_x \in RO(Y, \sigma)$ vardır. $\{T_x: x \in K\}$, $K \subseteq X$ için X in sb-açık alt kümelerinden oluşan bir örtüsüdür. $K \subseteq X$, sb-kompakt bir küme olduğundan; $K \subseteq \{T_x: x \in K_0\}$ olacak şekilde sonlu bir $K_0 \subseteq K$ kümesi vardır. $W = \bigcap \{V_x: x \in K_0\}$ olsun. Bu durumda W , $y \in Y$ noktasını içeren bir regüler açık kümedir. $(f(K) \cap W) \subseteq (\bigcup \{f(T_x): x \in K_0\} \cap W) \subseteq \bigcup \{f(T_x) \cap W: x \in K_0\} = \emptyset$ sağlanır. Böylece $y \notin (\delta\text{-Cl}(f(K)))$ elde edilir. Sonuç olarak; $f(K) \subseteq Y$, δ -kapalı kümedir.

Lemma 4.1.48. (H. Velicko, 1968) (X, θ) topolojik uzayı ile herhangi bir $K \subseteq X$ verilsin. Bu durumda aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

- (i) $\delta\text{-Cl}(f(K)) = \bigcap \{F : F, \delta\text{-kapalı ve } K \subseteq F\}$
- (ii) $F, \delta\text{-kapalı kümedir.} \Leftrightarrow (X-F), \delta\text{-açık kümedir.}$
- (iii) $F, \delta\text{-açık kümedir.} \Leftrightarrow \text{Her } x \in F \text{ için, } x \in W \subseteq F \text{ olacak şekilde en az bir } W \in \text{RO}(X, \theta) \text{ vardır.}$

Teorem 4.1.49. θ ya bağlı s-topolojisi ρ ile birlikte herhangi bir $f : (X, \theta) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu verilsin. Eğer $f, h.h.s.b\text{-süreklili}$ bir fonksiyon ve $R \in \theta$ ise; $f|_R : (R, P_R) \rightarrow (Y, \sigma)$ kısıtlanmış fonksiyonu da, h.h.s.b-süreklili.

İspat: Herhangi bir $Z \in \text{RO}(Y, \sigma)$ alınsın. Bu durumda; Teorem 4.1.1 gereği, $f^{-1}(Z) \in \text{sb}(X, \rho)$ sağlanır. O halde; Lemma 2.26 kullanılarak, $(f|_R)^{-1}(Z) = (f^{-1}(Z) \cap R) \in \text{sb}(R, P_R)$ elde edilir. Sonuç olarak; Teorem 4.1.1 ile birlikte $f|_R$ kısıtlanmış fonksiyonunun h.h.s.b-süreklili olduğu bulunur.

Teorem 4.1.50. θ ya bağlı s-topolojisi ρ ile birlikte herhangi bir $f : (X, \theta) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu verilsin. Eğer $f, h.h.s.b$ süreklili bir fonksiyon ve $R \in \alpha(X, \theta)$ ise; $f|_R : (R, P_R) \rightarrow (Y, \sigma)$ kısıtlanmış fonksiyonu da, h.h.s.b-süreklili.

İspat: İspat, Teorem 4.1.49 ispatına benzer şekilde Lemma 2.26. kullanılarak elde edilir.

$\text{Sb}(X, \rho)$ bir s-topolojidir. $\sigma_s, (Y, \sigma)$ deki regüler açık kümelerin birleşimi şeklinde olup; σ nın semi regülerizasyonu olarak adlandırılır.

Teorem 4.1.51. $f : (X, \theta) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu (ρ, θ ya bağlı s-topolojisi) verilsin. Aşağıdaki özellikler eşdeğerdir:

- (i) $f : (X, \rho) \rightarrow (Y, \sigma)$ h.h.s.b-süreklili.
- (ii) $f : (X, \rho) \rightarrow (Y, \sigma_s)$ s.b süreklili.
- (iii) $f : (X, \text{Sb}(X, \rho)) \rightarrow (Y, \sigma)$ h.h.süreklili.
- (iv) $f : (X, \text{Sb}(X, \rho)) \rightarrow (Y, \sigma_s)$ süreklili.

Tanım 4.1.52. (Keskin ve Noiri, 2009) Her $U \in \theta$ ve $x \in U$ için, $x \in V \subseteq U$ olacak şekilde bir $V \in \text{RO}(X, \theta)$ varsa; (X, θ) uzayına, **semi regüler uzay** denir.

Teorem 4.1.53. θ ya bağlı $\rho, s\text{-topolojisi}$ ile birlikte herhangi bir $f : (X, \theta) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu verilsin. Eğer $f, h.h.s.b\text{-süreklili}$ bir fonksiyon ve (Y, σ) , semi regüler uzay ise; bu durumda f fonksiyonu, sb-süreklili.

İspat: $x \in X$ ve $x \in \sigma_{f(x)}$ olsun. Hipotez gereği, (Y, σ) semi regüler uzay olduğundan; $f(x) \in (G \cap V)$ olacak şekilde bir $G \in \text{RO}(Y, \sigma)$ vardır. $f, h.h.s.b\text{-süreklili}$ bir fonksiyon olduğundan; $x \in U$ ve $f(U) \subseteq G$ olacak şekilde en az bir $U \in \text{SB}(X, \rho)$ vardır.

4.2. Supra Strong B- ζ Açık Kümeler

(Hatir, Keskin ve Noiri, 2003) ve (Hatir, Keskin ve Noiri, 2005) İdeal topolojik uzaylarda strong β - ζ açık kümeler kavramı ve özelliklerini incelemişler. Bu kısımda topolojik uzaylardan daha zayıf olan s-topolojide strong β - ζ açık kümeler kavramını ve bazı özelliklerini vereceğiz. S-strong β - ζ açık kümeler kavramına ait özellikleri vermeden önce; tezde gerekli olacak olan ve literatürde yeralan strong β - ζ açık kümeler kavramını ve özelliklerini hatırlayalım.

Tanım 4.2.1. (X, θ, ζ) ideal uzayı ile herhangi bir $T \subseteq X$ kümesi verilsin. Eğer

- (i) $T \subseteq \text{int}(T^*)$ ise; T ye, **ζ -açık küme** (Monsef, Loshien, Nosef, 1992)
- (ii) $T \subseteq \text{cl}(\text{int}(T^*))$ ise; T ye, **hemen hemen ζ -açık küme** (Monsef, Mahmoud, Nosef, 1999)
- (iii) $T \subseteq \text{int}(\text{cl}^*(T))$ ise; T ye, **pre ζ -açık küme** (Dontchev, 1996)
- (iv) $T \subseteq \text{cl}^*(\text{int}(T))$ ise; T ye, **semi ζ -açık küme** (Hatir ve Noiri, 2002)
- (v) $T \subseteq \text{cl}(\text{int}(\text{cl}^*(T)))$ ise; T ye, **β - ζ -açık küme** (Hatir ve Noiri, 2002)
- (vi) $T \subseteq \text{int}(\text{cl}^*(\text{int}(T)))$ ise; T ye, **α - ζ -açık küme** (Hatir ve Noiri, 2002)
- (vii) $T \subseteq \text{cl}^*(\text{int}(\text{cl}^*(T)))$ ise; T ye, **strong β - ζ açık küme** (Hatir, Keskin ve Noiri, 2003)
- (viii) $T \subseteq \text{cl}^*(\text{int}(T^*))$ ise; T ye, **hemen hemen ζ -açık küme** (Hatir, Keskin ve Noiri, 2003) denir.

Açık kümeler arasındaki ilişkileri aşağıdaki önerme ile verdiler.

Önerme 4.2.2. (X, θ, ζ) ideal uzayı ile herhangi bir $T \subseteq X$ kümesi verildiğinde; aşağıdaki özellikler geçerlidir:

- (i) Eğer $T \in p\zeta(X, \theta)$ ise; $T \in s\beta\zeta(X, \theta)$.
- (ii) Eğer $T \in s\beta\zeta(X, \theta)$ ise; $T \in \beta\zeta(X, \theta)$.
- (iii) Eğer $T \in \beta\zeta(X, \theta)$ ise; $T \in \beta O(X, \theta)$.
- (iv) Eğer $T \in s\zeta(X, \theta)$ ise; $T \in s\beta\zeta(X, \theta, \zeta)$.

İspat: (i) $T \in p\zeta(X, \theta)$ olsun. O halde; $T \subseteq \text{int}(\text{cl}^*(T))$ sağlanır. Her $T \subseteq X$ için, $\text{int}(T) \subseteq T$ ve $T \subseteq \text{cl}^*(T)$ geçerli olduğundan; $T \subseteq \text{int}(\text{cl}^*(T)) \subseteq \text{cl}^*(\text{int}(\text{cl}^*(T)))$ ve $T \subseteq \text{cl}^*(\text{int}(\text{cl}^*(T)))$ elde edilir. Bu ise, $T \in s\beta\zeta(X, \theta)$ olduğunu gösterir.

(ii) $T \in s\beta\zeta(X, \theta)$ olsun. O halde; $T \subseteq \text{cl}^*(\text{int}(\text{cl}^*(T)))$ sağlanır. Diğer taraftan; her $T \subseteq X$ için, $\text{cl}^*(T) \subseteq \text{cl}(T)$ geçerli olduğundan; $T \subseteq \text{cl}^*(\text{int}(\text{cl}^*(T))) \subseteq \text{cl}(\text{int}(\text{cl}^*(T)))$ sağlanır ve böylece $T \subseteq \text{cl}(\text{int}(\text{cl}^*(T)))$ elde edilir. Bu ise; $T \in \beta\zeta(X, \theta)$ olduğunu gösterir.

(iii) $T \in \beta\zeta(X, \theta)$ olsun. O halde; $T \subseteq \text{cl}(\text{int}(\text{cl}^*(T)))$ sağlanır. Diğer taraftan; her $T \subseteq X$ için, $\text{cl}^*(T) \subseteq \text{cl}(T)$ geçerli olduğundan; $T \subseteq \text{cl}(\text{int}(\text{cl}^*(T))) \subseteq \text{cl}(\text{int}(\text{cl}(T)))$ elde edilir. Böylece $T \subseteq \text{cl}(\text{int}(\text{cl}(T)))$ sağlanır ve $T \in \beta O(X, \theta)$ elde edilir.

(iv) $T \in s\zeta(X, \theta)$ olsun. O halde; $T \subseteq cl^*(int(T))$ geçerlidir. Ayrıca; her $T \subseteq X$ için, $T \subseteq cl^*(T)$ sağlandığından; $T \subseteq cl^*(int(T)) \subseteq Cl^*(int(cl^*(T)))$ ve dolayısıyla $T \subseteq cl^*(int(cl^*(T)))$ elde edilir. Bu ise; $T \in s\beta\zeta(X, \theta)$ olduğunu gösterir.

Önerme 4.2.3. (X, θ, ζ) ideal uzayındaki herhangi bir $T \subseteq X$ kümesi için, aşağıdaki özellikler geçerlidir:

- (i) Eğer T , ζ -açık ise; T , hemen hemen strong ζ -açık kümedir.
- (ii) Eğer T , hemen hemen strong ζ -açık ise; T , hemen hemen ζ -açık kümedir.
- (iii) Eğer T , hemen hemen strong ζ -açık ise; T , strong β - ζ -açık kümedir.

İspat: (i) $T \subseteq X$, herhangi bir ζ -açık bir küme olsun. O halde; $T \subseteq int(T^*)$ geçerlidir. Her $T \subseteq X$ için, $T \subseteq cl^*(T)$ sağlandığından; $T \subseteq int(T^*) \subseteq cl^*(int(T^*))$ ve $T \subseteq cl^*(int(T^*))$ elde edilir. Bu ise; $T \subseteq X$ kümesinin hemen hemen strong ζ -açık olduğunu gösterir.

(ii) $T \subseteq X$, herhangi bir hemen hemen strong ζ -açık bir küme olsun. O halde; $T \subseteq cl^*(int(T^*))$ sağlanır. Her $T \subseteq X$ için, $cl^*(T) \subseteq cl(T)$ geçerli olduğundan; $T \subseteq cl^*(int(T^*)) \subseteq cl(int(T^*))$ elde edilir. Böylece $T \subseteq X$ kümesi, hemen hemen ζ -açıktır.

(iii) $T \subseteq X$, herhangi bir hemen hemen strong ζ -açık bir küme olsun. O halde; $T \subseteq cl^*(int(T^*))$ sağlanır. Ayrıca; her $T \subseteq X$ için, $cl^*(T) = (T \cup T^*)$ şeklindeki cl^* kapanış operatörü tanımı gereği; birleşim işlemi tanımı ile birlikte $T \subseteq cl^*(T)$, $int(T^*) \subseteq int(cl^*(T))$ ve dolayısıyla $cl^*(int(T^*)) \subseteq cl^*(int(cl^*(T)))$ sağlanır. Sonuç olarak; $T \subseteq cl^*(int(T^*)) \subseteq cl^*(int(cl^*(T)))$ ve $T \subseteq cl^*(int(cl^*(T)))$ elde edilir. O halde; $T \subseteq X$ kümesi, strong β - ζ açıktır.

Örnek 4.2.4. (Hatir, Keskin ve Noiri, 2005) $(\mathfrak{R}, \theta)$ alışılmış uzayı ile $\mathfrak{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde tanımlı herhangi bir ζ ideali verilsin. Q rasyonel sayılar kümesi, pre- ζ açık olmasına rağmen; semi açık değildir.

Örnek 4.2.5. (Keskin ve Noiri, 2005) $X = \{k, l, m, n\}$ kümesi ile birlikte üzerinde tanımlanan $\theta = \{X, \emptyset, \{k\}, \{m\}, \{k, m\}\}$ topolojisi ve $\zeta = \{\emptyset, \{k\}\}$ ideali verilsin. Bu durumda elde edilen (X, θ, ζ) ideal uzayında; $T = \{m, n\} \subseteq X$ kümesi, semi- ζ açık olmasına rağmen; pre- ζ açık değildir. $T = \{m, n\} \subseteq X$ kümesi için, $cl^*(int(T)) = cl^*(\{m\}) = \{m\} \cup (\{m\})^* = \{l, m, n\}$ ve dolayısıyla $T = \{m, n\} \subseteq \{l, m, n\} = cl^*(int(T))$ olduğundan; sonuç olarak $T \subseteq cl^*(int(T))$ elde edilir ki; bu ise $T = \{m, n\} \subseteq X$ kümesinin semi ζ -açık olduğunu gösterir. Ancak; $T^* = \{l, m, n\}$, $cl^*(T) = T \cup T^* = \{b, c, d\}$ ve $int(cl^*(T)) = \{c\}$ olduğundan; $T = \{m, n\} \not\subseteq int(cl^*(T))$ sağlanır. O halde; $T = \{m, n\} \subseteq X$ kümesi, pre ζ -açık değildir.

Örnek 4.2.6. (Hatir, Keskin ve Noiri, 2005) $X = \{k, l, m, n\}$, $\theta = \{X, \emptyset, \{n\}, \{k, m\}, \{k, m, n\}\}$ ve $\zeta = \{\emptyset, \{m\}, \{n\}, \{m, n\}\}$ olmak üzere; (X, θ, ζ) ideal topolojik uzayı ile birlikte $T = \{l, n\} \subseteq X$ verilsin. $T \subseteq X$ kümesi, semi açık olmasına rağmen; strong β - ζ açık değildir. Gerçekten; $T = \{l, n\}$, $int(T) = \{n\}$ ve $cl(int(T)) = \{l, n\} = T \subseteq T$ olduğundan; T ,

semi açık kümedir. Ancak; $T = \{l, n\}$ ve $T^* = \{l\}$ olduğundan; $cl^*(T) = T \cup T^* = \{l, n\}$ ve dolayısıyla $int(cl^*(T)) = \{n\}$ elde edilir. Ayrıca $\{n\} \in \zeta$ olduğundan; $(\{n\})^* = \emptyset$ ile birlikte $[int(cl^*(T))]^* = (\{n\})^* = \emptyset$ geçerlidir. O halde; $cl^*(int(cl^*(T))) = int(cl^*(T)) \cup [int(cl^*(T))]^* = \{n\} \cup \emptyset = \{n\}$ ve $\{l, n\} \not\subseteq \{n\}$ ile birlikte $T = \{l, n\} \not\subseteq cl^*(int(cl^*(T)))$ elde edilir. Bu ise; $T \subseteq X$ kümesinin strong β - ζ açık olmadığını gösterir.

Örnek 4.2.7. (Hatir, Keskin ve Noiri, 2005) $X = \{k, l, m, n\}$, $\theta = \{X, \emptyset, \{n\}, \{k, m\}, \{k, m, n\}\}$ ve $\zeta = \{\emptyset, \{m\}, \{n\}, \{m, n\}\}$ olacak şekilde (X, θ, ζ) ideal topolojik uzayı ile $T = \{k, m, n\} \subseteq X$ kümesi verilsin. T kümesi, pre ζ -açık olmasına rağmen; hemen hemen ζ -açık değildir. $T = \{k, m, n\} \subseteq X$ kümesi için $T^* = \{k, l, m\}$, $int(T^*) = \{k, m\}$ ve $cl(int(T^*)) = \{k, l, m\}$ geçerlidir. Dolayısıyla; $T = \{k, m, n\} \not\subseteq \{k, l, m\} = cl(int(T^*))$ elde edilir. Bu, $T = \{k, m, n\} \subseteq X$ kümesinin hemen hemen ζ -açık olmadığını gösterir.

Örnek 4.2.8. (Hatir, Keskin ve Noiri, 2005) $X = \{k, l, m, n\}$, $\theta = \{X, \emptyset, \{n\}, \{k, m\}, \{k, m, n\}\}$ ve $\zeta = \{\emptyset, \{m\}, \{n\}, \{m, n\}\}$ ile birlikte (X, θ, ζ) ideal topolojik uzayı verilsin. Bu durumda; $T = \{k, l\} \subseteq X$ kümesi, hemen hemen strong ζ -açık olmasına rağmen; pre ζ -açık değildir. T kümesi için, $T^* = \{k, l, m\}$ ve $int(T^*) = \{k, m\}$ olduğundan; $cl^*(T) = T \cup T^* = \{k, l, m\}$ elde edilir. Ayrıca $int(cl^*(T)) = \{k, m\}$ ve $(int(cl^*(T)))^* = \{k, l, m\}$ olduğundan; cl^* kapanış operatörü tanımından $cl^*(int(cl^*(T))) = int(cl^*(T)) \cup (int(cl^*(T)))^* = \{k, m\} \cup \{k, l, m\} = \{k, l, m\}$ yani; $cl^*(int(cl^*(T))) = \{k, l, m\}$ elde edilir. Böylece $T \subseteq cl^*(int(cl^*(T)))$ sağlanır ve bu da, $T = \{k, l\} \subseteq X$ kümesinin hemen hemen strong ζ -açık olduğunu gösterir. Diğer taraftan; $\{k, l\} \not\subseteq \{k, m\}$ olup, bu durumda $T \not\subseteq int(cl^*(T))$ sağlanır. O halde; $T = \{k, l\} \subseteq X$ kümesi, pre ζ -açık değildir.

Örnek 4.2.9. (Hatir, Keskin ve Noiri, 2005) $X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi ile üzerinde tanımlanan $\theta = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ topolojisi ve $\zeta = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ ideali verilsin. Bu durumda elde edilen (X, θ, ζ) ideal uzayında $T = \{a, d, e\} \subseteq X$ kümesi, hemen hemen ζ -açık olmasına rağmen; strong β - ζ -açık değildir. $T = \{a, d, e\} \subseteq X$ kümesi için, $T^* = \{a, b, d, e\}$ ve $int(T^*) = \{a, b\}$ olduğundan; sonuçta $cl(int(T^*)) = cl(\{a, b\}) = \{a, b, d, e\}$ elde edilir. Dolayısıyla $T = \{a, d, e\} \subseteq \{a, b, d, e\} = cl(int(T^*))$ sağlanır ki; bu da $T = \{a, d, e\} \subseteq X$ kümesinin hemen hemen ζ -açık olduğunu gösterir. Diğer taraftan $int(T^*) = \{a, b\} \in \zeta$ olduğundan; $(int(T^*))^* = \emptyset$ ve $cl^*(int(T^*)) = int(T^*) \cup (int(T^*))^* = int(T^*) = \{a, b\}$ yani; $cl^*(int(T^*)) = \{a, b\}$ elde edilir. $T^* = \{a, b, d, e\}$ ve $cl^*(T) = T \cup T^* = \{a, b, d, e\}$ olduğundan; $int(cl^*(T)) = \{a, b\} = int(T^*)$ ve dolayısıyla $cl^*(int(cl^*(T))) = cl^*(int(T^*)) = \{a, b\}$ geçerlidir. Ancak; $\{a, d, e\} \not\subseteq \{a, b\}$ olup, bu durumda; $T = \{a, d, e\} \not\subseteq \{a, b\} = cl^*(int(cl^*(T)))$ yani, $T \not\subseteq cl^*(int(cl^*(T)))$ elde edilir. O halde; $T = \{a, d, e\}$ kümesi, strong β - ζ -açık değildir.

İdeal uzayda incelediğimiz strong β - ζ açık kümeleri ideal s-uzaya taşıyalım.

Tanım 4.2.10. (X, ρ, ζ) ideal s-uzayı ile birlikte herhangi bir $T \subseteq X$ kümesi verilsin. Eğer
(i) $T \subseteq cl^{\rho*}(int^{\rho}(cl^{\rho*}(T)))$ ise; T ye, **s-strong β - ζ -açık küme**,
(ii) $T \subseteq cl_{\mu}^*(int_{\mu}(T^*))$ ise; T ye, **hemen hemen s- ζ -açık küme** denir.

(X, ρ, ζ) ideal s-uzayındaki tüm s-strong β - ζ -açık kümeler ve hemen hemen s- ζ -açık kümeler ailesi, sırasıyla; $ss\beta\zeta(X, \rho)$ ve $ass\zeta(X, \rho)$ şeklinde gösterilir.

Önerme 4.2.13. (X, ρ, ζ) ideal s-uzayı ile birlikte herhangi bir $T \subseteq X$ kümesi verilsin. Eğer T kümesi, s- pre- ζ açık ise; T aynı zamanda s-strong β - ζ -açıktır.

İspat: $T \subseteq X$ kümesi, s-pre - ζ -açık olsun. O halde; $T \subseteq (\text{int}^\rho(\text{cl}^{\rho^*}(T)))$ sağlanır. Her $T \subseteq X$ için, $T \subseteq \text{cl}^{\rho^*}(T)$ geçerli olduğundan; $\text{int}^\rho(\text{cl}^{\rho^*}(T)) \subseteq \text{cl}^{\rho^*}(\text{int}^\rho(\text{cl}^{\rho^*}(T)))$ ve doğal olarak, $T \subseteq \text{int}^\rho(\text{cl}^{\rho^*}(T)) \subseteq \text{cl}^{\rho^*}(\text{int}^\rho(\text{cl}^{\rho^*}(T)))$ yani; $T \subseteq \text{cl}^{\rho^*}(\text{int}^\rho(\text{cl}^{\rho^*}(T)))$ elde edilir. Bu ise; T nin

s- strong β - ζ -açık bir küme olduğunu gösterir.

Önermenin tersinin genelde doğru olmadığını bir örnekle gösterelim.

Örnek 4.2.14. $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi, $\rho = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ s-topolojisi ve $\zeta = \{\emptyset, \{a\}\}$ ideali ile birlikte elde edilen ideal s-uzayı verilsin. $T = \{b, c\} \subseteq X$ kümesi, s-strong β - ζ -açık olmasına rağmen; s-pre - ζ -açık değildir. Gerçekten; $T = \{b, c\} \subseteq X$ kümesi ele alındığında, $\text{cl}^{\rho^*}(\text{int}^\rho(\text{cl}^{\rho^*}(\{b, c\}))) = \text{cl}^{\rho^*}(\text{int}^\rho(\{b, c, d\})) = \text{cl}^{\rho^*}(\{b\}) = \{b, c, d\}$ bulunur. Böylece T kümesi, $T \subseteq \text{cl}^{\rho^*}(\text{int}^\rho(\text{cl}^{\rho^*}(T)))$ bağıntısını sağlar yani; T , s-strong β - ζ -açık bir kümedir. Diğer taraftan; $\text{int}^\rho(\text{cl}^{\rho^*}(\{b, c\})) = (\text{int}^\rho(\{b, c, d\})) = \{b\}$ ve $T = \{b, c\} \not\subseteq \{b\} = \text{int}^\rho(\text{cl}^{\rho^*}(T))$ olduğundan; $T = \{b, c\} \subseteq X$, s-pre - ζ açık bir küme değildir.

Önerme 4.2.15. (X, ρ, ζ) ideal s-uzayı ile birlikte herhangi bir $T \subseteq X$ kümesi verilsin. Eğer T kümesi, s-strong β - ζ açık küme ise; T aynı zamanda s- β - ζ -açıktır.

İspat: $T \subseteq X$ kümesi, s-strong β - ζ -açık olsun. O halde; $T \subseteq \text{cl}^{\rho^*}(\text{int}^\rho(\text{cl}^{\rho^*}(T)))$ sağlanır. Her $T \subseteq X$ için, $\text{cl}^{\rho^*}(T) \subseteq \text{cl}^\rho(T)$ geçerli olduğundan; $\text{cl}^{\rho^*}(\text{int}^\rho(\text{cl}^{\rho^*}(T))) \subseteq \text{cl}^\rho(\text{int}^\rho(\text{cl}^{\rho^*}(T)))$ ve dolayısıyla $T \subseteq \text{cl}^{\rho^*}(\text{int}^\rho(\text{cl}^{\rho^*}(T))) \subseteq \text{cl}^\rho(\text{int}^\rho(\text{cl}^{\rho^*}(T)))$ yani; $T \subseteq \text{cl}^\rho(\text{int}^\rho(\text{cl}^{\rho^*}(T)))$ elde edilir. Bu ise; T nin s-strong β - ζ -açık bir küme olduğunu gösterir.

Önermenin tersinin doğru olmadığını bir örnekle gösterelim.

Örnek 4.2.16. (X, ρ, ζ) ideal s-uzayı $X = \{a, b, c, d\}$, $\rho = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ ve $\zeta = \{\emptyset, \{a\}\}$ şeklinde verilsin. Bu uzaydaki $T = \{a, c\}$, s- β - ζ açık küme olmasına rağmen; s-strong β - ζ -açık bir küme değildir. Gerçekten; $\text{cl}^\rho(\text{int}^\rho(\text{cl}^{\rho^*}(\{a, c\}))) = \text{cl}^\rho(\text{int}^\rho(\{a, c, d\})) = \text{cl}^\rho(\{a\}) = \{a, c, d\}$ olup, bu durumda $T = \{a, c\} \subseteq \text{cl}^\rho(\text{int}^\rho(\text{cl}^{\rho^*}(\{a, c\}))) = \text{cl}^\rho(\text{int}^\rho(\text{cl}^{\rho^*}(T)))$ ve dolayısıyla $T \subseteq \text{cl}^\rho(\text{int}^\rho(\text{cl}^{\rho^*}(T)))$ elde edilir. Bu ise; $T = \{a, c\} \subseteq X$ kümesinin s- β - ζ -açık olduğunu gösterir. Ancak $\text{cl}^{\rho^*}(\text{int}^\rho(\text{cl}^{\rho^*}(\{a, c\}))) = \text{cl}^{\rho^*}(\text{int}^\rho(\{a, c, d\})) = \text{cl}^{\rho^*}(\{a\}) = \{a\}$ olduğundan; bu durumda $T = \{a, c\} \not\subseteq \{a\} = \text{cl}^{\rho^*}(\text{int}^\rho(\text{cl}^{\rho^*}(\{a, c\}))) =$

$cl^p(int^p(cl^p(T)))$ yani, $T \not\subseteq cl^p(int^p(cl^p(T)))$ sağlanır. Böylece $T = \{a, c\}$ kümesinin s -strong β - ζ açık olmadığı elde edilir.

Önerme 4.2.17. (X, ρ, ζ) ideal s -uzayı ile birlikte herhangi bir $T \subseteq X$ kümesi verilsin. Eğer T kümesi, s - β - ζ -açık küme ise; T aynı zamanda s - β -açıktır.

İspat: $T \subseteq X$ kümesi, s - β - ζ -açık olsun. O halde; $T \subseteq cl^p(int^p(cl^p(T)))$ sağlanır. Her $T \subseteq X$ için, $cl^p(T) \subseteq cl^p(T)$ geçerli olduğundan; $cl^p(int^p(cl^p(T))) \subseteq cl^p(int^p(cl^p(T)))$ ve dolayısıyla $T \subseteq cl^p(int^p(cl^p(T))) \subseteq cl^p(int^p(cl^p(T)))$ yani; $T \subseteq cl^p(int^p(cl^p(T)))$ elde edilir. Bu ise; T nin s - β -açık bir küme olduğunu gösterir.

Önermenin tersinin doğru olmadığını bir örnekle gösterelim.

Örnek 4.2.18. $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi, $\rho = \{X, \emptyset, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{c, d\}\}$ s -topolojisi ve $\zeta = \{\emptyset, \{a\}\}$ ideali ile birlikte elde edilen ideal s -uzayı verilsin. Bu uzaydaki $T = \{a, d\}$ kümesi, s - β -açık olmasına rağmen; s - β - ζ -açık değildir. T için, $cl^p(int^p(cl^p(\{a, d\}))) = cl^p(int^p(X)) = cl^p(X) = X$ olduğundan; $T \subseteq cl^p(int^p(cl^p(T)))$ elde edilir. Bu ise; T nin s - β - ζ açık küme olduğunu gösterir. Ancak, $cl^p(int^p(cl^p(\{a, d\}))) = cl^p(int^p(\{a, d\})) = cl^p(\emptyset) = \emptyset$ ve $\{a, d\} \not\subseteq \emptyset$ olup, bu durumda $T = \{a, d\} \not\subseteq \emptyset = cl^p(int^p(cl^p(\{a, d\}))) = cl^p(int^p(cl^p(T)))$ elde edilir. O halde; T , s - β - ζ -açık bir küme değildir.

Önerme 4.2.19. (X, ρ, ζ) ideal s -uzayı ile birlikte herhangi bir $T \subseteq X$ kümesi verilsin. Eğer T kümesi, s -semi- ζ -açık küme ise; T aynı zamanda s -strong β - ζ -açıktır.

İspat: $T \subseteq X$ kümesi, s -semi- ζ -açık olsun. O halde; $T \subseteq cl^p(int^p(T))$ sağlanır. Her $T \subseteq X$ için, $T \subseteq cl^p(T)$ geçerli olduğundan; $cl^p(int^p(T)) \subseteq cl^p(int^p(cl^p(T)))$ ve doğal olarak $T \subseteq cl^p(int^p(T)) \subseteq cl^p(int^p(cl^p(T)))$ yani; $T \subseteq cl^p(int^p(cl^p(T)))$ elde edilir. Bu ise; T nin s -strong β - ζ açık bir küme olduğunu gösterir.

Önermenin tersinin doğru olmadığını bir örnekle gösterelim.

Örnek 4.2.20. $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi, $\rho = \{X, \emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}\}$ s -topolojisi ve $\zeta = \{\emptyset, \{c\}\}$ ideali ile birlikte elde edilen ideal s -uzayı verilsin. $T = \{a\}$ kümesi, s - β -açık olmasına rağmen; s - β - ζ -açık değildir. $cl^p(int^p(cl^p(\{a\}))) = cl^p(int^p(\{a, b\})) = cl^p(\{a, b\}) = \{a, b\}$ olduğundan; kolaylıkla $T = \{a\} \subseteq cl^p(int^p(cl^p(\{a\}))) = cl^p(int^p(cl^p(T)))$ yani, $T \subseteq cl^p(int^p(cl^p(T)))$ elde edilir. Bu ise; T nin s - β -açık bir küme olduğunu gösterir. Ancak, $cl^p(int^p(\{a\})) = cl^p(\emptyset) = \emptyset$ ve $\{a\} \not\subseteq \emptyset$ olduğundan; $T = \{a\} \not\subseteq \emptyset = cl^p(int^p(\{a\})) = cl^p(int^p(T))$ yani; $T \not\subseteq cl^p(int^p(T))$ elde edilir. Böylece T , s -semi- ζ -açık bir küme değildir.

Önerme 4.2.21. (X, ρ, ζ) ideal s -uzayı ile birlikte herhangi bir $T \subseteq X$ kümesi verilsin. Eğer T kümesi, s - ζ -açık küme ise; T aynı zamanda hemen hemen s -strong ζ -açıktır.

İspat: $T \subseteq X$ kümesi, s - ζ açık olsun. O halde; $T \subseteq (\text{int}^p(T^*))$ sağlanır. Her $T \subseteq X$ için, $T \subseteq \text{cl}^{p*}(T)$ geçerli olduğundan; $\text{int}^p(T^*) \subseteq \text{cl}^{p*}(\text{int}^p(T^*))$ ve $T \subseteq (\text{int}^p(T^*)) \subseteq \text{cl}^{p*}(\text{int}^p(T^*))$ elde edilir. Böylece $T \subseteq \text{cl}^{p*}(\text{int}^p(T^*))$ sağlanır ki; bu, T nin hemen hemen s -strong- ζ açık küme olduğunu gösterir.

Önermenin tersinin doğru olmadığını bir örnekle gösterelim.

Örnek 4.2.22. $X=\{a,b,c,d\}$ kümesi, $\rho=\{X,\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ s -topolojisi ve $\zeta=\{\emptyset,\{a\}\}$ ideali ile birlikte elde edilen ideal s -uzayı verilsin. $T=\{b,c\}$, hemen hemen s -strong- ζ açık bir küme olmasına rağmen; s - ζ -açık bir küme değildir. Gerçekten; $T=\{b,c\} \subseteq X$ için, $\text{cl}^{p*}(\text{int}^p(\{b,c\}^*)) = \text{cl}^{p*}(\text{int}^p(\{b,c,d\})) = \text{cl}^{p*}(\{b\}) = \{b,c,d\}$ ve $T=\{b,c\} \subseteq \{b,c,d\} = \text{cl}^{p*}(\text{int}^p(T))$ olduğundan; $T \subseteq \text{cl}^{p*}(\text{int}^p(T^*))$ elde edilir. Bu ise; T nin hemen hemen s -strong- ζ açık bir küme olduğunu gösterir. Ancak, $(\text{int}^p(T^*)) = (\text{int}^p(\{b,c\}^*)) = \{b\}$ ve $T=\{b,c\} \not\subseteq \{b\} = (\text{int}^p(T^*))$ yani; $T \not\subseteq (\text{int}^p(T^*))$ elde edilir. O halde; T , s - ζ -açık bir küme değildir.

Önerme 4.2.23. (X,ρ, ζ) ideal s -uzayı ile birlikte herhangi bir $T \subseteq X$ kümesi verilsin. Eğer T , hemen hemen s -strong ζ -açık bir küme ise; T aynı zamanda hemen hemen s - ζ açık kümedir.

İspat: $T \subseteq X$ kümesi, hemen hemen s -strong- ζ açık olsun. O halde; $T \subseteq \text{cl}^{p*}(\text{int}^p(T^*))$ sağlanır. Her $T \subseteq X$ için, $\text{cl}^{p*}(T) \subseteq \text{cl}(T)$ geçerli olduğundan; $\text{cl}^{p*}(\text{int}^p(T^*)) \subseteq \text{cl}^p(\text{int}^p(T^*))$ ve dolayısıyla $T \subseteq \text{cl}^{p*}(\text{int}^p(T^*)) \subseteq \text{cl}^p(\text{int}^p(T^*))$ elde edilir. Böylece $T \subseteq \text{cl}^p(\text{int}^p(T^*))$ sağlanır ki; bu, T nin hemen hemen s - ζ -açık küme olduğunu gösterir.

Önermenin tersinin doğru olmadığını bir örnekle gösterelim.

Örnek 4.2.24. $X=\{k,l,m,n\}$ kümesi, $\rho=\{X,\emptyset,\{l\},\{k,l,m\},\{l,m\}\}$ s -topolojisi ve $\zeta=\{\emptyset,\{l\}\}$ ideali ile birlikte elde edilen ideal s -uzayı verilsin. $T=\{k,l\}$, hemen hemen s -strong- ζ açık bir küme olmasına rağmen; s - ζ -açık bir küme değildir. Gerçekten; $T=\{k,l\} \subseteq X$ kümesi için, $\text{cl}^p(\text{int}^p(\{k,l\}^*)) = \text{cl}^p(\text{int}^p(\{k,n\})) = \text{cl}^p(\{l,m\}) = \{k,l,n\}$ olduğundan; $T \subseteq \text{cl}^{p*}(\text{int}^p(T^*))$ elde edilir. O halde; T , hemen hemen s - ζ açık kümedir. $\text{cl}^{p*}(\text{int}^p(T^*)) = \text{cl}^{p*}(\{l,m\}) = \{m,n\}$ ve $\{k,l\} \not\subseteq \{m,n\}$ olduğundan; $T \not\subseteq \text{cl}^{p*}(\text{int}^p(T^*))$ elde edilir. Böylece; T , hemen hemen s -strong- ζ açık bir küme değildir.

Önerme 4.2.25. (X,ρ, ζ) ideal s -uzayı ile birlikte herhangi bir $T \subseteq X$ kümesi verilsin. Eğer T , hemen hemen s -strong ζ -açık bir küme ise; T aynı zamanda s -strong β - ζ açık kümedir.

İspat: $T \subseteq X$ kümesi, hemen hemen s -strong- ζ açık olsun. O halde; $T \subseteq \text{cl}^{p*}(\text{int}^p(T^*))$ sağlanır. Her $T \subseteq X$ için, $T^* \subseteq \text{cl}^*(T)$ geçerli olduğundan; $\text{int}^p(T^*) \subseteq \text{int}^p(\text{cl}^{p*}(T))$ ve doğal

olarak; $cl^{\rho^*}(int^{\rho}(T^*)) \subseteq cl^{\rho^*}(int^{\rho}(cl^{\rho^*}(T)))$ elde edilir. Sonuç olarak; $T \subseteq cl^{\rho^*}(int^{\rho}(cl^{\rho^*}(T)))$ sağlanır ki; bu, T nin s -strong β - ζ açık küme olduğunu gösterir.

Önermenin tersinin doğru olmadığını bir örnekle gösterelim.

Örnek 4.2.26. $X=\{k,l,m,n\}$ kümesi, $\rho=\{X,\emptyset,\{k,l\},\{k\},\{m\},\{k,m\},\{k,l,m\}\}$ s -topolojisi ve $\zeta=\{\emptyset,\{k\}\}$ ideali ile birlikte elde edilen ideal s -uzayı verilsin. $T=\{k,m\}$, s -strong β - ζ açık bir küme olmasına rağmen; hemen hemen s -strong- ζ açık küme değildir. Gerçekten; $T=\{k,m\} \subseteq X$ için, $cl^{\rho^*}(int^{\rho}(cl^{\rho^*}(\{k,m\})))=cl^{\rho^*}(int^{\rho}(\{k,m,n\}))=cl^{\rho^*}(\{k,m\})=\{k,m,n\}$ ve $\{k,m\} \subseteq \{k,m,n\}$ geçerli olduğundan; $T \subseteq cl^{\rho^*}(int^{\rho}(cl^{\rho^*}(T)))$ elde edilir. Bu ise; T nin, s -strong β - ζ açık bir küme olduğunu gösterir. $cl^{\rho^*}(int^{\rho}(T^*))=cl^{\rho^*}(int^{\rho}(\{k,m\}^*))=cl^{\rho^*}(int^{\rho}(\{m,n\}))=cl^{\rho^*}(\{m,n\})=\{m,n\}$ ve $\{k,m\} \not\subseteq \{m,n\}$ olduğundan; $T \not\subseteq cl^{\rho^*}(int^{\rho}(T^*))$ elde edilir. Böylece; T , hemen hemen s -strong- ζ açık bir küme değildir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Bu tez çalışmasında; öncelikle (Keskin ve Noiri, 2009) tarafından verilen hemen hemen b -süreklilik kavramını supra topolojik uzaylara aktaracağız. Supra topolojik uzaylar, topolojik uzayların bir genellemesi olduğundan; iki uzayda söz konusu sürekliliğin benzer ve farklı özelliklerini elde ettik. Daha sonra ise; ideal topolojik uzaylardaki strong β - ζ -açık kümeler (Hatir, Keskin ve Noiri, 2003) ve (Hatir, Keskin ve Noiri, 2005) kavramını, ideal supra topolojik uzaylara genelleştirilip, hangi özellikleri sağlayıp sağlamadığını araştırdık.

5.2.Öneriler

Çalışmamızda hemen hemen supra b -süreklilik fonksiyonlarda hemen hemen supra b -açık küme kavramı tanıtıldı, diğer açık kümelerle ilişkileri verildi. Bu kavram yardımıyla; hemen hemen supra b -süreklilik fonksiyon kavramı tanıtıldı ve diğer sürekli fonksiyonlarla ilişkileri verildi. Bu özellikler kullanılarak; hemen hemen b -süreklilik fonksiyonlarda bağlantılılık, kompaktlık ve ayırma aksiyomları gibi konular üzerinde çalışıldı. Daha sonra supra strong β - ζ -açık kümeler kavramı ve diğer kümeler ile ilişkisi verildi.

Bu özellikler kullanılarak supra strong β - ζ -açık kümelerde süreklilik, kompaktlık, bağlantılılık ve ayırma aksiyomları gibi konular üzerinde çalışılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] T. M. Al-shami, Supra results related to supra topological spaces, Journal of Advanced Studies in Topology, 7(4)(2016), 283-294.
- [2] T. M. Al-Shami, On supra semi open sets and some applications on topological spaces, Journal of Advanced Studies in Topology, 8(2)(2017), 144-153.
- [3] T. M. Al-Shami, Utilizing supra α -open sets to generate new types of supra compact and supra Lindelöf spaces, Facta Universitatis (Nis) Se. Math. Inform., 32(1)(2017), 151-162.
- [4] T. M. Al-Shami, Supra semi-compactness via supra topological spaces, Journal of Taibah University for Science, 12(3)(2018), 338-343.
- [5] T. M. Al-Shami, B. A. Asaad and M. A. El-Gayar, Various types of supra pre-compact and supra pre-Lindelöf spaces, Missouri J. of Math. Sci., 32(1)(2020), 1-20.
- [6] T. M. Al-Shami, B. A. Asaad and M. K. El-Bably, Weak types of limit points and separation axioms on supra topological spaces, Adv. Math. Sci. Journal, 9(10)(2020), 8017-8036.
- [7] T. M. Al-Shami, E. A. Abo-Tabl, B. A. Asaad and M. A. Arahet, Limit points and separation axioms with respect to supra semi-open sets, European Journal of Pure and Applied Mathematics, 13(3)(2020), 427-443.
- [8] I. Arockoni and M. Triniata Pricilla, On supra generalized b-Closed sets, Antarctica Journal of Mathematics, 8. (2011).
- [9] El Atik AA. A study on some types of mappings on topological spaces. M. Sc. Thesis, Egypt, Tanta University, 1997.
- [10] Carnahan D., Locally nearly-compact spaces. Boll. Un. Mat. Ital. 1972;(4)6:146-53.
- [11] Carnahan D., Some properties related to compactness in topological spaces. Ph. D. Thesis, Univ. Arkansas, 1973.
- [12] Andrijevic D. On b-open sets. Mat. Vesnik 1996; 48:59-64.
- [13] R. Devi, S. Sampathkumar and M. Caldas, On supra α -open sets and $S\alpha$ -continuous functions, General Mathematics, 16(2)(2008), 77-84.
- [14] J. Dontchev, On Pre- I -open sets and a decomposition of I -continuity, Banyan Math. J., 2(1966).
- [15] E. Ekici, Generalization of perfectly continuous, regular set-connected and Clopen functions. Acta Math. Hungar. 2005; 107 (3): 193-206.
- [16] M. E. El-Shafei, A. H. Zakari and T. M. Al-Shami, Some applications of supra preopen sets, Hindawi Journal of Mathematics, Vol. 2020, Article ID 9634206.
- [17] E. Hatir and T. Noiri, On decomposition of continuity via idealization, Acta Math. Hungar., 96 (2002), 341-349.
- [18] E. Hatir, A. Keskin and T. Noiri, On a new decomposition of continuity via idealization, JP Jour. Geometry & Topology, 3(1)(2003), 53-64.
- [19] E. Hatir, A. Keskin and T. Noiri, A note on strong β - I -sets and strongly β - I -continuous functions, Acta Mathematica Hungarica, 108(1)(2005), 87-94.
- [20] E. Hayashi, Topologies defined by local properties, Math. Ann., 156(1964) 205-215.
- [21] S. Jafari and S. Tahiliani, Supra β -open sets and supra β -continuity on topological spaces, Annales Univ. Sci. Budapest., 56 (2013), 1-9.
- [22] Taha H. Jasim, Reem H. Zaben, On ideal supra topological space, Tikrit Journal of Pure Science 20 (4) (2015) 1813-1662
- [23] D. Jankovic and T. R. Hamlett, New topologies from old via ideals, Amer. Math. Monthly, 97 (1990), 295-310.

- [24] A. Kandil , O. A.Tantawy, S. A. El-Sheikh, S. A. Hazza, New supra topologies from old via ideals, Journal of New Theory, 4 (2015), 1-5.
- [25] A. Keskin and T. Noiri, Almost b-continuous functions, Chaos, Solitons & Fractals, 41(1)(2009), 72-81.
- [26] K. Kuratowski, Topology, Vol. I, Academic Press, New York, 1966.
- [27] R. M. Latif, Supra- I -compactness and supra I -connectedness, International Journal of Mathematics Trends and Technology(IJMTT), 53(7)(2018), 525-538.
- [28] A. S. Mashhour, A. A. Allam, F. S. Mahmoud and F. H. Khedr, On supra topological spaces, Indian J. Pure Appl. Math., 14(4)(1983), 502-510.
- [29] S. Modak and S. Mistry, Ideal on supra topological space, International Journal of Math. Analysis, 6(1)(2012), 1-10.
- [30] B. M. Munshi and D. S. Bassan, Almost semi- continuous mappings. Math. Student 49(1981), 239-48.
- [31] J. M. Mustafa, Supra b-compact and supra b-Lindelöf spaces, Journal of Mathematics and Applications(JMA), 36 (2013), 79-83.
- [32] A. A. Nasef and T. Noiri, Some weak forms of almost continuity. Acta Math. Hungar. 1997; 74:211-19.
- [33] T. Noiri, Almost α -continuous functions. Kyungpook Math. J., 28(1988),71-77.
- [34] M. V. Sangeetha and B. Chacko, On supra ideal topological space via R- I -open sets, Malaya Journal of Matematik, 5(1)(2019), 433-440.
- [35] O. R. Sayed, Supra pre-open sets and supra pre-continuity on topological spaces, Series Mathematics and Information, 20 (2010), 79-88.
- [36] O. R. Sayed and T. Noiri, On supra b-open sets and supra b-continuity on topological spaces, European Journal of Pure and Applied Mathematics, 3(2)(2010), 295-302.
- [37] M. K. Singal and A. R. Singal, Almost-continuous mappings, Yokohama Math. J., 16 (1968), 63-73.
- [38] M. K. Singal and A. Mathur, On nearly compact spaces, Boll. Un. Mat. Ital., (4)2 (1969), 702-710.
- [39] O. Ravi, G. Ramkumar and M. Kamaraj, 2012, On supra β -open sets and supra β -continuity on topological spaces, International Mathematical Forum (in press)
- [40] R. Vaidyanathaswamy, Set topology, Chelsea Publishing Company, 1960.
- [41] N. Velicko, H-Closed topological spaces. Amer. Math. Soc. Transl. 1968; 78:103-18.