

T.C.
EGE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

SEZGİSEL BULANIK NÖRMLÜ UZAYLARDA BAZI
TOPLANABİLME METODLARI İÇİN TAUBER TİP
TEOREMLER HAKKINDA

SİNEM AKSİN

Danışman: Prof. Dr. İbrahim ÇANAK

Matematik Anabilim Dalı
Matematik Yüksek Lisans Programı

İzmir

2024

Sinem AKSIN tarafından YÜKSEK LİSANS tezi olarak sunulan “**Sezgisel bulanık normlu uzaylarda bazı toplanabilme metodları için Tauber tip teoremler hakkında**” başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi’nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve **2024** tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri üyeleri

İmza

Jüri Başkanı : Prof. Dr. Adnan MELEKOĞLU

Raportör Üye: Prof. Dr. Özgür EGE

Üye : Prof. Dr. İbrahim ÇANAK

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

EÜ Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Sezgisel bulanık normlu uzaylarda bazı toplanabilme metodları için Tauber tip teoremler hakkında” başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

05/04/2024

İmzası

Sinem Aksın

ÖZET

SEZGİSEL BULANIK NORMLU UZAYLARDA BAZI
TOPLANABİLME METODLARI İÇİN TAUBER TİP
TEOREMLER HAKKINDA

AKSIN, Sinem

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. İbrahim ÇANAK

2024, 52 sayfa

Bu çalışma esas olarak beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, sezgisel bulanık normlu uzay ile ilişkin 20. yüzyılın başlarından günümüze kadar uzanan yakın tarihi hakkında bazı temel kavramlara ve teoremlere yer verilmiştir.

İkinci bölümde, sezgisel bulanık normlu uzayda Cesàro toplanabilme metodu için bazı Tauber tipi koşullar incelenmiş ve bu koşullara ilişkin bazı sonuçlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, sezgisel bulanık normlu uzayda logaritmik toplanabilme metodu için bazı Tauber tipi koşullar incelenmiş ve bu koşullara ilişkin bazı sonuçlar verilmiştir. Ek olarak, sezgisel bulanık normlu uzayda Cesàro toplanabilme metodu ile logaritmik toplanabilme metodunun karşılaştırılmasına değinilmiştir.

Dördüncü bölümde, sezgisel bulanık normlu uzayda istatistiksel Cesàro toplanabilme için bazı Tauber tipi koşullar incelenmiş ve bu koşullara ilişkin bazı sonuçlar verilmiştir.

Son bölümde, tez süresince yapılan tüm çalışmalar özetlenmiştir, bu çalışmalar neticesinde ortaya çıkan sonuçlardan kısaca bahsedilmiştir.

Anahtar sözcükler: sezgisel bulanık normlu uzay, logaritmik toplanabilme, Cesàro toplanabilme, istatistiksel yakınsaklık, Cesàro istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel yavaş salınımlılık, Tauber teoremleri ve koşulları, yavaş salınımlılık.

ABSTRACT**ON TAUBERIAN THEOREMS FOR SOME SUMMABILITY
METHODS IN INTUITIONISTIC FUZZY NORMED SPACES**

AKSIN, Sinem

MSc. in Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. İbrahim ÇANAK

2024, 52 pages

This thesis essentially consists of five chapters.

In the first chapter, some basic concepts and theorems about the intuitionistic fuzzy normed space and its recent history from the beginning of the 20th century to the present are given.

In the second chapter, some Tauberian type conditions for the Cesàro summability method in intuitionistic fuzzy normed space are examined and some results related to these conditions are given.

In the third chapter, some Tauberian conditions are examined and some results related to these conditions are given for logarithmic summation method in intuitionistic fuzzy normed space. In addition, the comparison of Cesàro summability method and logarithmic summation method in intuitionistic fuzzy normed space is mentioned.

In the fourth chapter, some Tauberian conditions for statistical Cesàro summability in intuitionistic fuzzy normed space are examined and some results related to these conditions are given.

In the last section, all the studies carried out during the thesis are summarized and the results of these studies are briefly mentioned.

Key words: intuitionistic fuzzy normed space, logarithmic summability, Cesàro summability, statistical convergence, Cesàro statistical convergence, statistical slow oscillation, Tauberian theorems and conditions, slow oscillation.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇ KAPAK	ii
KABUL VE ONAY SAYFASI	iii
ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI	v
ÖZET	vii
ABSTRACT	ix
İÇİNDEKİLER	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xiii
1 GİRİŞ	1
2 TEMEL TANIM ve TEOREMLER	2
3 Sezgisel Bulanık Normlu Uzayında Cesàro Toplanabilme Metodu .	5
4 Sezgisel Bulanık Normlu Uzayında Logaritmik Toplanabilme Me- todu	17
5 Sezgisel Bulanık Normlu Uzayında İstatistiksel Yakınsaklık	28
6 Sezgisel Bulanık Normlu Uzayında İstatistiksel Cesàro Toplana- bilme Metodu için Tauber Tipi Teoremler	39
SONUÇ	48
KAYNAKLAR DİZİNİ	50
TEŞEKKÜR	51
ÖZGEÇMİŞ	52

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
$\mathbb{N}^0$	Negatif olmayan tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{K}$	Reel ya da kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	Reel sayılar kümesi
$\delta(K)$	K kümesinin doğal yoğunluğu
λ_μ	$\lambda\mu$ çarpımının tam kısmı
(V, μ, ν)	Sezgisel bulanık normlu uzay
(μ, ν)	Normlu uzay

1 GİRİŞ

1965'te Zadeh, klasik küme teorisinin genelleştirilmesi olarak bulanık küme teorisi kavramını tanıttı. Bulanık küme kavramı konusuna göre araştırmacılar bu fikirden yararlanmışlardır. Son yıllarda, bu teori çok çeşitli disiplinlerdeki yazarlardan daha fazla ilgi gördü. Amaç, bulanıklık kavramını neredeyse tüm teknoloji ve bilimlerde teorikten pratiğe farklı bir duruma sahip bireysel çalışmalara uygulamaktır. Araştırmacılar, örüntü tanıma, yapay zeka, bilgisayar bilimi, finans, karar teorisi ve borsa, nükleer bilim, tarım, coğrafya, biyotıp, istatistik vb. alanlarda bu teorinin çeşitli ve sayısız uygulamalarını elde ettiler. Saf matematikte, çeşitli yazarlar bulanıklığı geniş bir uygulama yelpazesinde kullanmışlardır. Matloka (1986), bir bulanık gerçek sayılar dizisinin adi yakınsaklığı kavramını başlattı ve bulanık sayıların yakınsak ve sınırlı dizilerini ve bazı özelliklerini inceledi. Nanda (1989), bu diziler için bazı temel şeyleri araştırdı ve bulanık gerçek sayıların tüm yakınsak dizilerinin tam bir metrik uzay oluşturduğunu gösterdi. Dahası, Nuray ve Savaş (1995), bulanık gerçek sayılar dizisinin yakınsaklık kavramını, istatistiksel yakınsaklık kavramına genişletti. Sezgisel bulanık kümelerin ardından, Park (2004) sezgisel bulanık metriği tanıttı ve Saadati ve Park (2006), sezgisel bulanık norm (kısaca IFN) uzayları kavramını daha fazla analiz etti. 2008 yılında Lael ve Nourouzi sezgisel bulanık norm uzayını tanımlamış ve bazı temel teoremleri incelemiştir (Lael ve Nourouzi, 2008). Esi ve Açıkgöz (2014), bulanık sayıların neredeyse A-istatistiksel yakınsamasını analiz etti. Savaş (2000), bulanık sayıların dizisi üzerinde çalışmıştır. Alaba ve Norahun (2019), sözde tümlenmiş yarı kafeslerin bulanık ideallerini ve bulanık filtrelerini inceledi. Bunlara ek olarak, IFN uzaylarındaki diziler için istatistiksel yakınsama tanımlanmış ve bazı önemli sonuçlar elde edilmiştir Karakuş (2018).

2 TEMEL TANIM ve TEOREMLER

Tanım 2.1. (Lael and Nourouzi, 2008) Eğer V bir reel vektör uzayı ve μ, ν her $x, y \in V$ ve $s, t \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki koşulları sağlayan $V \times \mathbb{R}$ de bulanık kümeler ise (V, μ, ν) sezgisel bulanık normlu uzay olarak adlandırılır:

- (a) Her pozitif olmayan s reel sayısı için $\mu(x, s) = 0$,
- (b) Her $s \in \mathbb{R}^+$ için $\mu(x, s) = 1$ koşulunun gerçekleşmesi için gerek yeter koşul $x = \theta$ olmasıdır,
- (c) Her $s \in \mathbb{R}^+$ ve $c \neq 0$ için $\mu(cx, s) = \mu\left(x, \frac{s}{|c|}\right)$,
- (d) $\mu(x + y, s + t) \geq \min\{\mu(x, s), \mu(y, t)\}$,
- (e) $\lim_{s \rightarrow \infty} \mu(x, s) = 1$ ve $\lim_{s \rightarrow 0} \mu(x, s) = 0$,
- (f) Her negatif olmayan s reel sayısı için $\nu(x, s) = 1$,
- (g) Her $s \in \mathbb{R}^+$ için $\nu(x, s) = 0$ koşulunun gerçekleşmesi için gerek ve yeter koşul $x = \theta$ olmasıdır,
- (h) Her $s \in \mathbb{R}^+$ ve $c \neq 0$ için $\nu(cx, s) = \nu\left(x, \frac{s}{|c|}\right)$,
- (i) $\max\{\nu(x, s), \nu(y, t)\} \geq \nu(x + y, s + t)$,
- (j) $\lim_{s \rightarrow \infty} \nu(x, s) = 0$ ve $\lim_{s \rightarrow 0} \nu(x, s) = 1$.

Örnek 2.1. $(V, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olsun ve aşağıdaki şekilde tanımlanan μ_0, ν_0 $V \times \mathbb{R}$ de bulanık kümeler olsun:

$$\mu_0(u, s) = \begin{cases} \frac{s}{s + \|u\|}, & \text{eğer } s > 0, \\ 0, & \text{eğer } s \leq 0 \end{cases} \quad \text{ve} \quad \nu_0(u, s) = \begin{cases} \frac{\|u\|}{s + \|u\|}, & \text{eğer } s > 0, \\ 1, & \text{eğer } s \leq 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

O halde (μ, ν) bulanık normdur.

Teorem 2.1. (Lael and Nourouzi, 2008) (V, μ, ν) bir sezgisel bulanık normlu uzay olsun.

Her $s > 0$ için $\mu(x, s) > 0$ ise $x = 0$

koşulunun gerçekleştiğini varsayalım. $\alpha \in (0, 1)$ için $\|x\|_\alpha = \inf\{s > 0 : \mu(x, s) > \alpha \text{ ve } \nu(x, s) < 1-\alpha\}$ olarak tanımlansın. O halde $\{\|x\|_\alpha : \alpha \in (0, 1)\}$, V üzerinde bir artan norm ailesidir. Dolayısıyla bu normlar V üzerinde (V, μ, ν) sezgisel bulanık normlu uzayına karşılık gelen V üzerindeki α - normlar olarak adlandırılır.

Tanım 2.2. (Lael and Nourouzi, 2008) (x_m) dizisi (V, μ, ν) sezgisel bulanık normlu uzayında bir dizi olsun ve $m \in \mathbb{N}$ sonlu olsun. Her bir $s > 0$ ve $\varepsilon \in (0, 1)$ için,

$$\mu(x_m - x, s) > 1 - \varepsilon \text{ ve } \nu(x_m - x, s) < \varepsilon, \text{ her } m \geq m_0$$

koşulunu sağlayan bir $m_0 \in \mathbb{N}$ varsa, (x_m) dizisinin $x \in V$ değerine yakınsak olduğu söylenir ve $x_m \rightarrow x$ ile gösterilir.

Tanım 2.3. (x_m) dizisi (V, μ, ν) sezgisel bulanık normlu uzayında bir dizi olsun. Her bir $s > 0$ ve $\varepsilon \in (0, 1)$ için,

$$\mu(x_k - x_m, s) > 1 - \varepsilon \text{ ve } \nu(x_k - x_m, s) < \varepsilon, \text{ } k, m \geq m_0$$

koşulunu sağlayan bir $m_0 \in \mathbb{N}$ varsa, (x_m) dizisi bir Cauchy dizisi olarak adlandırılır.

Tanım 2.4. (x_m) dizisi (V, μ, ν) sezgisel bulanık normlu uzayında bir dizi olsun. $s > 0$ ve $p \in \mathbb{N}$ için,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mu(x_{m+p} - x_m, s) = 1 \text{ ve } \lim_{m \rightarrow \infty} \nu(x_{m+p} - x_m, s) = 0$$

koşulu gerçekleşiyorsa bir (x_m) dizisi bir G-Cauchy dizisidir.

Bu tanımlardan hareketle, $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu(x_{m+1} - x_m, s) = 1$ ve $\lim_{m \rightarrow \infty} \nu(x_{m+1} - x_m, s) = 0$ ifadelerine denktir.

Her yakınsak dizinin bir Cauchy dizisi ve her Cauchy dizisinin bir sezgisel bulanık normlu uzayında G-Cauchy dir.

Bir sonraki tanımda, sezgisel bulanık normlu uzayda sınırlılık ve q-sınırlılık kavramları verilecektir.

Tanım 2.5. (Efe and Alaca, 2007) (V, μ, ν) uzayı bir sezgisel bulanık normlu uzay ve A kümesi V kümesinin herhangi bir alt kümesi olsun.

(i) Her $x \in A$ için $\mu(x, s_0) > 1 - r$ ve $\nu(x, s_0) < r$ koşullarını sağlayacak şekilde bir $r \in (0, 1)$ ve $s_0 > 0$ varsa, A kümesinin sınırlı olduğu söylenir.

(ii)

$$\phi_A(s) = \inf\{\mu(x, s) : x \in A\},$$

$$\psi_A(s) = \sup\{\nu(x, s) : x \in A\}$$

şeklinde tanımlanan $\phi_A(s)$ ve $\psi_A(s)$ kümeleri için, $\lim_{s \rightarrow \infty} \phi_A(s) = 1$ ve $\lim_{s \rightarrow \infty} \psi_A(s) = 0$ ise A kümesi q -sınırlı olarak adlandırılır.

Bir (x_m) dizisi (V, μ, ν) sezgisel bulanık normlu uzayında sınırlı olması için gerek ve yeter koşul her pozitif m tam sayısı için $\mu(x_m, s_0) > 1 - r$ ve $\nu(x_m, s_0) < r$ olacak şekilde öyle bir $s_0 > 0$ ve $r \in (0, 1)$ bulunmasıdır ve q -sınırlı olması için gerek ve yeter koşul

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \inf_{m \in \mathbb{N}} \mu(x_m, s) = 1 \text{ ve } \lim_{s \rightarrow \infty} \sup_{m \in \mathbb{N}} \nu(x_m, s) = 0 \quad (2.2)$$

koşullarının gerçekleşmesidir.

3 Sezgisel Bulanık Normlu Uzayında Cesàro Toplanabilme Metodu

Şimdi sezgisel bulanık normlu uzayda, Cesàro metodu ve bu metoda ilişkin Tauber tipi teoremleri vereceğiz.

Tanım 3.1. (Talo and Yavuz, 2021) (x_m) , (V, μ, ν) sezgisel bulanık normlu uzayında bir dizi olsun. (x_m) dizisinin aritmetik ortalaması,

$$\sigma_m = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m x_k, \quad m \in \mathbb{N} \quad (3.1)$$

olarak tanımlanır. Eğer

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_m = a \quad (3.2)$$

ise o zaman (x_m) dizisinin sonlu bir a değerine Cesàro toplanabilir olduğu söylenir.

Cesàro toplanabilme metodunun sezgisel bulanık normlu uzayında regüler olduğunu gösterelim.

Teorem 3.1. (Talo and Yavuz, 2021) (x_m) , (V, μ, ν) sezgisel bulanık normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer (x_m) dizisi sonlu bir $a \in V$ değerine yakınsıyorsa, o halde (x_m) dizisi a değerine Cesàro toplanabildir.

Kanıt. (x_m) , (V, μ, ν) sezgisel bulanık normlu uzayında bir dizi ve (x_m) dizisinin $a \in V$ ye yakınsak olduğunu varsayalım ve $s > 0$ sabit olsun. O zaman, verilen $\varepsilon > 0$ için,

- $m > m_0$ için $\mu(x_m - l, \frac{s}{2}) > 1 - \varepsilon$ ve $\nu(x_m - l, \frac{s}{2}) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $m_0 \in \mathbb{N}$ değeri vardır.

- $m > m_1$ için,

$$\mu \left(\sum_{k=0}^{m_0} (x_k - l), \frac{(m+1)s}{2} \right) > 1 - \varepsilon$$

$$\nu \left(\sum_{k=0}^{m_0} (x_k - l), \frac{(m+1)s}{2} \right) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $m_1 \in \mathbb{N}$ değeri vardır.

Buradan yola çıkılarak, $m > m_1$ değeri için,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mu \left(\sum_{k=0}^{m_0} (x_k - l), \frac{(m+1)s}{2} \right) = 1$$

ve

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \nu \left(\sum_{k=0}^{m_0} (x_k - l), \frac{(m+1)s}{2} \right) = 0$$

limitine ulaşılır.

O halde, $m > \max\{m_0, m_1\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} & \mu \left(\frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m x_k - l, s \right) \\ &= \mu \left(\frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m (x_k - l), s \right) \\ &= \mu \left(\sum_{k=0}^m (x_k - l), (m+1)s \right) \\ &= \mu \left(\sum_{k=0}^{m_0} (x_k - l) + \sum_{k=m_0+1}^m (x_k - l), \frac{(m+1)s}{2} + \frac{(m+1)s}{2} \right) \\ &\geq \min \left\{ \mu \left(\sum_{k=0}^{m_0} (x_k - l), \frac{(m+1)s}{2} \right), \mu \left(\sum_{k=m_0+1}^m (x_k - l), \frac{(m+1)s}{2} \right) \right\} \\ &\geq \min \left\{ \mu \left(\sum_{k=0}^{m_0} (x_k - l), \frac{(m+1)s}{2} \right), \mu \left(\sum_{k=m_0+1}^m (x_k - l), \frac{(m-m_0)s}{2} \right) \right\} \\ &\geq \min \left\{ \mu \left(\sum_{k=0}^{m_0} (x_k - l), \frac{(m+1)s}{2} \right), \mu(x_{m_0+1}, \frac{s}{2}), \mu(x_{m_0+2}, \frac{s}{2}), \dots, \right. \\ &\quad \left. \mu(x_m, l, \frac{s}{2}) \right\} \\ &> 1 - \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir ve benzer bir süreç izlenerek,

$$\begin{aligned} & \nu \left(\frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m x_k - l, s \right) \\ &< \max \left\{ \nu \left(\sum_{k=0}^{m_0} (x_k - l), \frac{(m+1)s}{2} \right), \nu(x_{m_0+1}, \frac{s}{2}), \nu(x_{m_0+2}, \frac{s}{2}), \dots, \right. \\ &\quad \left. \nu(x_m - l, \frac{s}{2}) \right\} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak, (x_m) dizisi bir a değerine Cesàro toplanabilir. $\square$

Fakat bu önermenin tersi doğru değildir. Bir örnek ile açıklayalım.

Örnek 3.1. (Talo and Yavuz, 2021) $(\mathbb{R}, \mu_0, \nu_0)$ uzayı sezgisel bulanık norm uzayı olmak üzere, bu uzaya ait bir (x_m) dizisi $(x_m) = ((-1)^{m+1})$ olarak tanımlansın. O halde (σ_{2m}) dizisinin limiti incelenirse,

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \mu_0(\sigma_{2m}, s) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \mu_0\left(-\frac{1}{2m+1}, s\right) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{s}{s + \left|-\frac{1}{2m+1}\right|} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \nu_0(\sigma_{2m}, s) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \nu_0\left(-\frac{1}{2m+1}, s\right) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\left|-\frac{1}{2m+1}\right|}{\left|-\frac{1}{2m+1}\right| + s} = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan yola çıkılarak, (σ_{2m}) dizisi 0 değerine yakınsar. Diğer taraftan, (σ_{2m+1}) dizisinin limiti incelenirse,

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \mu_0(\sigma_{2m+1}, s) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \mu_0(0, s) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{s}{s + 0} = 1, \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \nu_0(\sigma_{2m+1}, s) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \nu_0(0, s) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{0}{0 + s} = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde (σ_{2m+1}) dizisi 0 değerine yakınsar. O halde (x_m) dizisi 0 değerine Cesàro toplanabilir. Fakat (x_{2m}) dizisi (-1) değerine ve (x_{2m+1}) dizisi 1 değerine yakınsadığı için (x_m) dizisi yakınsak değildir. O halde (x_{2m}) dizisi incelenirse,

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \mu_0(x_{2m} - (-1), s) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \mu_0(-1 - (-1), s) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mu_0(0, s) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{s}{s + 0} = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \nu_0(x_{2m} - (-1), s) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \nu_0(-1 - (-1), s) = \lim_{m \rightarrow \infty} \nu_0(0, s) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{0}{0 + s} = 0 \end{aligned}$$

elde edilir ve x_{2m+1} dizisi incelenirse,

$$\begin{aligned}\lim_{m \rightarrow \infty} \mu_0(x_{2m+1} - 1, s) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \mu_0(1 - 1, s) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mu_0(0, s) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{s}{s + 0} = 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{m \rightarrow \infty} \nu_0(x_{2m+1} - 1, s) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \nu_0(1 - 1, s) = \lim_{m \rightarrow \infty} \nu_0(0, s) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{0}{0 + s} = 0\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla (x_m) dizisi yakınsak değildir. Bu noktada bazı lemma-lara ihtiyaç duyulur.

Lemma 3.1. (Talo and Başar, 2018) $\langle \lambda \rangle$, her $\lambda > 0$ için $\langle \lambda \rangle = \lambda - \lfloor \lambda \rfloor$ olarak tanımlansın. O zaman aşağıdaki koşullar sağlanır:

(i) $\lambda > 1$ sağlanıyorsa $m \geq \langle \lambda \rangle^{-1}$ olmak üzere her bir $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ için $\lambda_m > m$ bulunur.

(ii) $0 < \lambda < 1$ sağlanıyorsa $\lambda_m = \lfloor \lambda_m \rfloor$ olmak üzere her bir $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ için $\lambda_m < m$ bulunur.

Lemma 3.2. (Talo and Başar, 2018) Aşağıdaki koşullar sağlanır:

(i) $\lambda > 1$ ise her bir $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ için $m \geq (3\lambda - 1)/\lambda(\lambda - 1)$ olmak üzere,

$$\frac{\lambda}{\lambda - 1} < \frac{\lambda_m + 1}{\lambda_m - m} < \frac{2\lambda}{\lambda - 1}. \quad (3.3)$$

(ii) $0 < \lambda < 1$ ise her bir $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ için $m > \lambda^{-1}$ olmak üzere,

$$0 < \frac{\lambda_m + 1}{m - \lambda_m} < \frac{2\lambda}{1 - \lambda}. \quad (3.4)$$

olduğu kolayca görülür.

Şimdi temel sonuçları verelim.

Teorem 3.2. (Talo and Yavuz, 2021) (x_m) dizisi sezgisel bulanık normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer (x_m) dizisi $a \in V$ değerine Cesàro toplanabilir ise o halde (x_m) dizisinin a değerine yakınsak olması için gerek ve yeter koşul her $s > 0$ değeri için,

$$\sup_{\lambda > 1} \liminf_{m \rightarrow \infty} \mu \left(\frac{1}{\lambda_m - m} \sum_{k=m+1}^{\lambda_m} (x_k - x_m), s \right) = 1 \quad (3.5)$$

ve

$$\inf_{\lambda > 1} \limsup_{m \rightarrow \infty} \nu \left(\frac{1}{\lambda_m - m} \sum_{k=m+1}^{\lambda_m} (x_k - x_m), s \right) = 0 \quad (3.6)$$

koşullarının sağlanmasıdır.

Kanıt. (x_m) dizisi (V, μ, ν) sezgisel bulanık normlu uzayında bir dizi ve $a \in V$ değerine Cesàro toplanabilir olsun.

(Gereklik) (x_m) dizisi a değerine yakınsak olsun ve $s > 0$ sabit olsun. Lemma 3.1 yardımıyla herhangi keyfi bir $\lambda > 1$ ve $m \geq \lfloor \lambda \rfloor^{-1}$ için $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ olmak üzere,

$$x_m - \sigma_m = \frac{\lambda_m + 1}{\lambda_m - m} (\sigma_{\lambda_m} - \sigma_m) - \frac{1}{\lambda_m - m} \sum_{k=m+1}^{\lambda_m} (x_k - x_m) \quad (3.7)$$

eşitliği bulunur. Lemma 3.2 yardımıyla $m \geq (3\lambda - 1)/\lambda(\lambda - 1)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \mu \left(\frac{\lambda_m + 1}{\lambda_m - m} (\sigma_{\lambda_m} - \sigma_m), s \right) &= \mu \left(\sigma_{\lambda_m} - \sigma_m, \frac{s}{\frac{\lambda_m + 1}{\lambda_m - m}} \right) \\ &\geq \mu \left(\sigma_{\lambda_m} - \sigma_m, \frac{s}{\frac{2\lambda}{\lambda - 1}} \right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \nu \left(\frac{\lambda_m + 1}{\lambda_m - m} (\sigma_{\lambda_m} - \sigma_m), s \right) &= \nu \left(\sigma_{\lambda_m} - \sigma_m, \frac{s}{\frac{\lambda_m + 1}{\lambda_m - m}} \right) \\ &\leq \nu \left(\sigma_{\lambda_m} - \sigma_m, \frac{s}{\frac{2\lambda}{\lambda - 1}} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. (σ_m) dizisi bir Cauchy dizisi olduğu için,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mu \left(\frac{\lambda_m + 1}{\lambda_m - m} (\sigma_{\lambda_m} - \sigma_m), s \right) = 1$$

ve

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \nu \left(\frac{\lambda_m + 1}{\lambda_m - m} (\sigma_{\lambda_m} - \sigma_m), s \right) = 0,$$

denklemleri elde edilir. Dolayısıyla $\frac{\lambda_m + 1}{\lambda_m - m} (\sigma_{\lambda_m} - \sigma_m)$ terimi 0 değerine yakınsadığı bulunur. (3.7) eşitliği ve hipotezler göz önünde bulunurularsa,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mu \left(\frac{1}{\lambda_m - m} \sum_{k=m+1}^{\lambda_m} (x_k - x_m), s \right) = 1$$

ve

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \nu \left(\frac{1}{\lambda_m - m} \sum_{k=m+1}^{\lambda_m} (x_k - x_m), s \right) = 0.$$

sonucuna varılır. Dolayısıyla (3.5) ve (3.6) koşullarının sağlandığı kanıtlanır.

(Yeterlilik) (3.5) ve (3.6) koşullarının sağlandığını varsayalım ve $s > 0$ sabit olsun. O zaman verilen $\varepsilon > 0$ için,

- $m > m_0$ için

$$\mu \left(\frac{1}{\lambda_m - m} \sum_{k=m+1}^{\lambda_m} (x_k - x_m), \frac{s}{3} \right) > 1 - \varepsilon$$

ve

$$\nu \left(\frac{1}{\lambda_m - m} \sum_{k=m+1}^{\lambda_m} (x_k - x_m), \frac{s}{3} \right) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\lambda > 1$ ve $m_0 \in \mathbb{N}$ değeri vardır.

- $m > m_1$ için $\mu \left(\sigma_m - a, \frac{s}{3} \right) > 1 - \varepsilon$ ve $\nu \left(\sigma_m - a, \frac{s}{3} \right) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $m_1 \in \mathbb{N}$ değeri vardır.
- $\frac{\lambda_m + 1}{\lambda_m - m} (\sigma_{\lambda_m} - \sigma_m)$ ifadesi 0 değerine yakınsar. Buradan hareketle,

$$\mu \left(\frac{\lambda_m + 1}{\lambda_m - m} (\sigma_{\lambda_m} - \sigma_m), \frac{s}{3} \right) > 1 - \varepsilon$$

ve

$$\nu \left(\frac{\lambda_m + 1}{\lambda_m - m} (\sigma_{\lambda_m} - \sigma_m), \frac{s}{3} \right) < \varepsilon$$

koşulları sağlanacak şekilde bir $m_2 \in \mathbb{N}$ değeri vardır.

O halde $m > \min \{m_0, m_1, m_2\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \mu(x_m - a, s) &= \mu(x_m - \sigma_m + \sigma_m - a, s) \\ &= \mu \left(\frac{\lambda_m + 1}{\lambda_m - m} (\sigma_{\lambda_m} - \sigma_m) - \frac{1}{\lambda_m - m} \sum_{k=m+1}^{\lambda_m} (x_k - x_m) + \sigma_m - a, s \right) \\ &\geq \min \left\{ \mu \left(\frac{\lambda_m + 1}{\lambda_m - m} (\sigma_{\lambda_m} - \sigma_m), \frac{s}{3} \right), \right. \\ &\quad \left. \mu \left(\frac{1}{\lambda_m - m} \sum_{k=m+1}^{\lambda_m} (x_k - x_m), \frac{s}{3} \right), \mu \left(\sigma_m - a, \frac{s}{3} \right) \right\} \\ &> 1 - \varepsilon \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \nu(x_n - a, s) &< \max \left\{ \nu \left(\frac{\lambda_m + 1}{\lambda_m - m} (\sigma_{\lambda_m} - \sigma_m), \frac{s}{3} \right), \right. \\ &\quad \left. \nu \left(\frac{1}{\lambda_m - m} \sum_{k=m+1}^{\lambda_m} (x_k - x_m), \frac{s}{3} \right), \nu \left(\sigma_m - a, \frac{s}{3} \right) \right\} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, (x_m) dizisinin a değerine yakınsak olduğu gösterilmiş olur. $\square$

- $0 < \lambda < 1$ değeri için de incelenirse,

$$x_m - \sigma_m = \frac{\lambda_m + 1}{m - \lambda_m} (\sigma_m - \sigma_{\lambda_m}) + \frac{1}{m - \lambda_m} \sum_{k=\lambda_m+1}^m (x_k - x_k)$$

eşitliği elde edilir ve benzer bir süreç izlenerek yapılabilir.

Teorem 3.3. (Talo and Yavuz, 2021) (x_m) , (V, μ, ν) sezgisel bulanık normlu uzayında bir dizi olsun. (x_m) dizisi $a \in \varepsilon$ değerine Cesàro toplanabilirse o halde (x_m) dizinin a değerine yakınsak olması için gerek ve yeter koşul,

$$\sup_{0 < \lambda < 1} \liminf_{m \rightarrow \infty} \mu \left(\frac{1}{m - \lambda_m} \sum_{k=\lambda_m+1}^m (x_m - x_k), s \right) = 1$$

ve

$$\inf_{0 < \lambda < 1} \limsup_{m \rightarrow \infty} \nu \left(\frac{1}{m - \lambda_m} \sum_{k=\lambda_m+1}^m (x_m - x_k), s \right) = 0.$$

koşullarının sağlanmasıdır.

Tanım 3.2. (Talo and Yavuz, 2021) $s > 0$ olmak üzere,

$$\sup_{\lambda > 1} \liminf_{m \rightarrow \infty} \min_{m < k \leq \lambda_m} \mu(x_k - x_m, s) = 1 \quad (3.8)$$

ve

$$\inf_{\lambda > 1} \limsup_{m \rightarrow \infty} \max_{m < k \leq \lambda_m} \nu(x_k - x_m, s) = 0 \quad (3.9)$$

koşulları sağlanıyorsa ise (x_m) dizisi sezgisel bulanık normlu uzayında yavaş salınımlı olarak adlandırılır.

Buna ek olarak, (x_m) dizisinin yavaş salınımlı olması için gerek ve yeter

koşullar her $s > 0$ ve $\varepsilon \in (0, 1)$ için $\lambda > 1$, s ve ε değerine bağlı olmak üzere,

$$\mu(x_k - x_m, s) > 1 - \varepsilon \text{ ve } \nu(x_k - x_m, s) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $m_0 \in \mathbb{N}$ değerinin olmasıdır.

Teorem 3.4. (Talo and Yavuz, 2021) (x_m) , (V, μ, ν) sezgisel bulanık normlu uzayında bir dizi olsun. Her $s > 0$ için yavaş salınımlının (3.8) ve (3.9) koşulları sırasıyla,

$$\sup_{0 < \lambda < 1} \liminf_{m \rightarrow \infty} \min_{\lambda_m < k \leq m} \mu(x_k - x_m, s) = 1 \quad (3.10)$$

ve

$$\inf_{0 < \lambda < 1} \limsup_{m \rightarrow \infty} \max_{\lambda_m < k \leq m} \nu(x_k - x_m, s) = 0 \quad (3.11)$$

koşullarına denktir.

Örnek 3.2. (Talo and Yavuz, 2021) (x_m) dizisi $(\mathbb{R}, \mu_0, \nu_0)$ sezgisel bulanık normlu uzayında bir dizi olsun ve μ_0 ve ν_0 fuzzy bulanık kümeleri Örnek 2.1 de verildiği şekilde tanımlansın. O zaman $x_m = \sum_{f=1}^m \frac{1}{f}$ şeklinde tanımlanan (x_m) dizisi $(\mathbb{R}, \mu_0, \nu_0)$ uzayında yavaş salınımlı bir dizidir. Bunun için, $s > 0$ sabit olsun. Verilen $\varepsilon \in (0, 1)$ için $\lambda = \frac{s\varepsilon}{1-\varepsilon} + 1$ olarak alınsın. O zaman $1 < m < k < \lambda_m$ olmak üzere,

$$\mu_0(x_k - x_m, s) = \frac{s}{s + |x_k - x_m|} > \frac{s}{s + \frac{s\varepsilon}{1-\varepsilon}} = 1 - \varepsilon$$

ve

$$\nu_0(x_k - x_m, s) = \frac{|x_k - x_m|}{|x_k - x_m| + s} < \frac{\frac{s\varepsilon}{1-\varepsilon}}{\frac{s\varepsilon}{1-\varepsilon} + s} = \varepsilon$$

bulunur. Burada,

$$|x_k - x_m| = \sum_{f=m+1}^k \frac{1}{f} < \frac{k-m}{m} = \frac{k}{m} - 1 < \lambda - 1 = \frac{s\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

eşitliği sağlandığından (x_m) dizisi $(\mathbb{R}, \mu_0, \nu_0)$ sezgisel bulanık normlu uzayında yavaş salınımlıdır.

Teorem 3.5. (Talo and Yavuz, 2021) $(V, \|\cdot\|)$ normlu uzay olsun ve Örnek 2.1 deki gibi tanımlanan (V, μ_0, ν_0) uzayı sezgisel bulanık normlu uzay olsun. Bir (x_m) dizisi $(V, \|\cdot\|)$ uzayında yavaş salınımlı olması için gerek ve yeter koşul (x_m) dizisinin (V, μ_0, ν_0) de yavaş salınımlı olmasıdır.

Cauchy $\implies$ Yavaş Salınımlı $\implies$ G-Cauchy ilişkisini söylemek mümkündür.

Örnek 3.3. (Talo and Yavuz, 2021) Örnek 2.1 deki gibi tanımlanan μ_0, ν_0 fuzzy kümeleri aracılığıyla oluşturulan $(\mathbb{R}, \mu_0, \nu_0)$ sezgisel bulanık normlu uzayında ele alalım. Burada, (x_m) dizisi $x_m = \sum_{k=1}^m \frac{1}{\sqrt{k}}$ olarak tanımlansın. Öyleyse (x_m) dizisi G-Cauchy dir. Fakat yavaş salınımlı değildir. Diğer taraftan, (y_m) dizisi $y_m = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k}$ olarak tanımlansın. O halde (y_m) dizisi yavaş salınımlıdır ama bir Cauchy dizi değildir.

Teorem 3.6. (Talo and Yavuz, 2021) (V, μ, ν) koşulunu sağlayan sezgisel bulanık normlu uzay olsun ve (x_m) dizisi bu uzayda q -sınırlı bir dizi olsun. (x_m) dizisinin (V, μ, ν) de yavaş salınımlı olması için gerek ve yeter koşul (x_m) dizisinin her bir $\alpha \in (0, 1)$ için $(V, \|\cdot\|)$ uzayında yavaş salınımlı olmasıdır.

Teorem 3.7. (Talo and Yavuz, 2021) (x_m) , (V, μ, ν) sezgisel bulanık normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer (x_m) dizisi yavaş salınımlı ise o zaman (3.8) ve (3.9) koşulları sağlanır.

Kanıt. (x_m) , (V, μ, ν) sezgisel bulanık normlu uzayında yavaş salınımlı bir dizi olsun. $s > 0$ sabit olsun. O zaman verilen $\varepsilon \in (0, 1)$ için $\lambda > 1$ olmak üzere $m_0 \leq m < k \leq \lambda_m$ iken,

$$\mu(x_k - x_m, s) > 1 - \varepsilon \quad \text{ve} \quad \nu(x_k - x_m, s) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $m_0 \in \mathbb{N}$ değeri vardır. Bu durumda, $m_0 \leq m < k \leq \lambda_m$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} & \mu \left(\frac{1}{\lambda_m - m} \sum_{k=m+1}^{\lambda_m} (x_k - x_m), s \right) \\ &= \mu \left(\sum_{k=m+1}^{\lambda_m} (x_k - x_m), (\lambda_m - m) s \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \min \{ \mu(x_{m+1} - x_m, s), \mu(x_{m+2} - x_m, s), \mu(x_{\lambda_m} - x_m, s) \} \\
&> 1 - \varepsilon
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\nu \left(\frac{1}{\lambda_m - m} \sum_{k=m+1}^{\lambda_m} (x_k - x_m), s \right) \\
&= \nu \left(\sum_{k=m+1}^{\lambda_m} (x_k - x_m), (\lambda_m - m) s \right) \\
&\leq \max \{ \nu(x_{m+1} - x_m, s), \nu(x_{m+2} - x_m, s), \dots, \nu(x_{\lambda_m} - x_m, s) \} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, (3.5) ve (3.6) koşulları sağlanır. $\square$

Teorem 3.8. (Talo and Yavuz, 2021) (x_m) , (V, μ, ν) sezgisel bulanık normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer (x_m) dizisi $a \in V$ değerine Cesàro toplanabilir ve yavaş salınımlı ise o halde (x_m) dizisi a değerine yakınsar.

Teorem 3.9. (Talo and Yavuz, 2021) (x_m) , (V, μ, ν) sezgisel bulanık normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer $\{m(x_m - x_{m-1})\}$ dizisi q -sınırlı ise o halde (x_m) dizisi yavaş salınımlıdır.

Kanıt. $\varepsilon \in (0, 1)$ verilsin. $\{m(x_m - x_{m-1})\}$ dizisi q -sınırlı olduğundan, her $s > M_\varepsilon$ için,

$$\begin{aligned}
t > M_\varepsilon &\Rightarrow \inf_{m \in \mathbb{N}} \mu(m(x_m - x_{m-1}), s) > 1 - \varepsilon \\
&\text{ve } \sup_{m \in \mathbb{N}} \nu(m(x_m - x_{m-1}), s) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

olacak şekilde bir $M_\varepsilon > 0$ vardır.

Buradan hareketle, her bir $s > 0$ için, $\lambda < 1 + \frac{s}{M_\varepsilon}$ alırsak ve $m_0 < m < k \leq \lambda_m$ iken,

$$\begin{aligned}
\mu(x_k - x_m, s) &= \mu \left(\sum_{f=m+1}^k (x_f - x_{f-1}), s \right) \\
&\geq \min_{m+1 \leq f \leq k} \mu \left((x_f - x_{f-1}), \frac{s}{k - m} \right) \\
&= \min_{m+1 \leq f \leq k} \mu \left(f(x_f - x_{f-1}), \frac{fs}{k - m} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \min_{m+1 \leq f \leq k} \mu \left(f(x_f - x_{f-1}), \frac{ms}{k-m} \right) \\
&\geq \min_{m+1 \leq f \leq k} \mu \left(f(x_f - x_{f-1}), \frac{s}{\frac{k}{m} - 1} \right) \\
&\geq \min_{m+1 \leq f \leq k} \mu \left(f(x_f - x_{f-1}), \frac{t}{\lambda - 1} \right) \\
&\geq \inf_{m \in \mathbb{N}} \mu \left(m(x_m - x_{m-1}), \frac{s}{\lambda - 1} \right) \\
&> 1 - \varepsilon
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
\nu(x_k - x_m, s) &= \nu \left(\sum_{f=m+1}^k (x_f - x_{f-1}), s \right) \\
&\leq \sup_{m \in \mathbb{N}} \nu \left(m(x_m - x_{m-1}), \frac{s}{\lambda - 1} \right) \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla, (x_m) dizisi yavaş salınımlıdır. $\square$

(Talo and Yavuz, 2021) Teorem (3.9) da bahsedilen duruma bir örnek vermek için, Örnek 2.1 i düşünelim.

Örnek 3.4. (Talo and Yavuz, 2021) $[0, 1]$ kümesi üzerinde tanımlanan tüm sürekli fonksiyonların kümesi $C[0, 1]$ olsun. Ayrıca, $\|f\| = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ olarak tanımlansın ve $\|\cdot\|$ normunu $C[0, 1]$ de norm alalım. $(C[0, 1], \mu_0, \nu_0)$ sezgisel bulanık normlu uzayını düşünelim. $\{f_m(x) = x^{n+1}\}$ olarak tanımlansın ve $\{f_m\}$ dizisi $(C[0, 1], \mu_0, \nu_0)$ sezgisel bulanık normlu uzayında olsun. Ayrıca, $\{m(f_m - f_{m-1})\}$ dizisi q -sınırlıdır. Öyleyse,

$$\begin{aligned}
\lim_{s \rightarrow \infty} \inf_{m \in \mathbb{N}} \mu_0(m(f_m - f_{m-1}), s) &= \lim_{s \rightarrow \infty} \inf_{m \in \mathbb{N}} \frac{s}{s + \|m(f_m - f_{m-1})\|} \\
&= \lim_{s \rightarrow \infty} \inf_{m \in \mathbb{N}} \frac{s}{s + \max_{x \in [0, 1]} |m(f_m(x) - f_{m-1}(x))|} \\
&= \lim_{s \rightarrow \infty} \inf_{m \in \mathbb{N}} \frac{s}{s + \max_{x \in [0, 1]} |m(x^m - x^{m+1})|} \\
&= \lim_{s \rightarrow \infty} \inf_{m \in \mathbb{N}} \frac{s}{s + \left(\frac{m}{m+1}\right)^{m+1}} \\
&= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{s + 1/e} = 1
\end{aligned}$$

ve

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sup_{m \in \mathbb{N}} \nu_0(m(f_m - f_{m-1}), s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \sup_{m \in \mathbb{N}} \frac{\|m(f_m - f_{m-1})\|}{s + \|m(f_m - f_{m-1})\|} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1/e}{s + 1/e} = 0.$$

elde edilir. Dolayısıyla, Teorem (3.9) yardımıyla $\{f_m\}$ dizisinin yavaş salınımı olduğu görülür.

Teorem 3.10. (Talo and Yavuz, 2021) (x_m) (V, μ, v) sezgisel bulanık normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer (x_m) dizisi $a \in V$ değerine Cesàro toplanabilir ve $\{m(x_m - x_{m-1})\}$ dizisi q -sınırlı ise o halde (x_m) dizisi a değerine yakınsar.



4 Sezgisel Bulanık Normlu Uzayında Logaritmik Toplanabilme Metodu

Tanım 4.1. (Yavuz, 2020) (x_m) , (V, μ, ν) sezgisel bulanık normlu uzayında bir dizi olarak alalım. (x_m) dizisinin (τ_m) logaritmik anlamı,

$$\tau_m = \frac{1}{\ell_m} \sum_{k=1}^m \frac{x_k}{k} \quad \ell_m = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k}$$

olarak tanımlanır. Eğer,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \tau_m = a$$

ise, (x_m) dizisinin $a \in V$ değerine logaritmik toplanabilir olduğu söylenir.

Logaritmik toplanabilme metodunun sezgisel bulanık normlu uzayda regüler olduğunu gösterelim.

Teorem 4.1. (Yavuz, 2020) (x_m) , (V, μ, ν) sezgisel bulanık normlu uzayında bir dizi olarak alalım. Eğer (x_m) dizisi $a \in V$ değerine yakınsıyorsa o halde (x_m) dizisi a değerine logaritmik toplanabilirdir.

Kanıt. (x_m) dizisi $a \in V$ değerine yakınsak olsun ve $s > 0$ sabit olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ için,

- $m > m_0$ için $\mu(x_m - a, \frac{s}{2}) > 1 - \varepsilon$ ve $\nu(x_m - a, \frac{s}{2}) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $m_0 \in \mathbb{N}$ değeri vardır.
- $m > m_1$ için,

$$\mu\left(\sum_{k=1}^{m_0} \frac{x_k - a}{k}, \frac{\ell_m s}{2}\right) > 1 - \varepsilon \quad \text{ve} \quad \nu\left(\sum_{k=1}^{m_0} \frac{x_k - a}{k}, \frac{\ell_m s}{2}\right) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $m_1 \in \mathbb{N}$ değeri vardır. Diğer bir ifadeyle,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mu\left(\sum_{k=1}^{m_0} \frac{x_k - a}{k}, \frac{\ell_m s}{2}\right) = 1 \quad \text{ve} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \nu\left(\sum_{k=1}^{m_0} \frac{x_k - a}{k}, \frac{\ell_m s}{2}\right) = 0.$$

olduğu söylenebilir. Dolayısıyla, $m > \min\{m_0, m_1\}$ iken,

$$\begin{aligned}
\mu\left(\frac{1}{\ell_m} \sum_{k=1}^m \frac{x_k}{k} - a, s\right) &= \mu\left(\frac{1}{\ell_m} \sum_{k=1}^m \frac{x_k - a}{k}, s\right) = \mu\left(\sum_{k=1}^m \frac{x_k - a}{k}, \ell_m s\right) \\
&\geq \min\left\{\mu\left(\sum_{k=1}^{m_0} \frac{x_k - a}{k}, \frac{\ell_m s}{2}\right), \mu\left(\sum_{k=m_0+1}^m \frac{x_k - a}{k}, \frac{\ell_m s}{2}\right)\right\} \\
&\geq \min\left\{\mu\left(\sum_{k=1}^{m_0} \frac{x_k - a}{k}, \frac{\ell_m s}{2}\right), \right. \\
&\quad \left.\mu\left(\sum_{k=m_0+1}^m \frac{x_k - a}{k}, \frac{(\ell_m - \ell_{m_0}) s}{2}\right)\right\} \\
&\geq \min\left\{\mu\left(\sum_{k=1}^{m_0} \frac{x_k - a}{k}, \frac{\ell_m s}{2}\right), \mu\left(\frac{x_{m_0+1} - a}{m_0 + 1}, \frac{s}{2(m_0 + 1)}\right), \right. \\
&\quad \left.\dots, \mu\left(\frac{x_m - a}{m}, \frac{s}{2m}\right)\right\} \\
&= \min\left\{\mu\left(\sum_{k=1}^{m_0} \frac{x_k - a}{k}, \frac{\ell_m s}{2}\right), \mu\left(x_{m_0+1} - a, \frac{s}{2}\right), \right. \\
&\quad \left.\dots, \mu\left(x_m - a, \frac{s}{2}\right)\right\} \\
&> 1 - \varepsilon
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\nu\left(\frac{1}{\ell_m} \sum_{k=1}^m \frac{x_k}{k} - a, s\right) &< \max\left\{\nu\left(\sum_{k=1}^{m_0} \frac{x_k - a}{k}, \frac{\ell_m s}{2}\right), \nu\left(x_{m_0+1} - a, \frac{s}{2}\right), \right. \\
&\quad \left.\dots, \nu\left(x_m - a, \frac{s}{2}\right)\right\} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak, (x_m) dizisi a değerine logaritmik toplanabilir. $\square$

(Yavuz, 2020) Ancak bu önermenin tersi doğru olmayabilir. O halde bir örnek ile açıklayalım.

Örnek 4.1. (Yavuz, 2020) Örnek 2.1 deki gibi tanımlanan μ_0 ve ν_0 fuzzy kümeleriyle birlikte, bir sezgisel bulanık normlu uzay teşkil eden $\mathbb{R}, \mu_0, \nu_0$ uzayında bir $(x_m) = ((-1)^m)$ dizisi alalım. (x_m) dizisi 0 değerine logaritmik toplanabilir ama yakınsak değildir.

Teorem 4.2. (Yavuz, 2020) (x_m) , (V, μ, ν) sezgisel bulanık normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer (x_m) dizisi $a \in V$ değerine logaritmik toplanabilir ise o halde (x_m) dizisinin a değerine yakınsak olması için gerek ve yeter koşul her bir $s > 0$ için,

$$\sup_{\lambda > 1} \liminf_{m \rightarrow \infty} \mu \left(\frac{1}{\ell_{\lfloor m^\lambda \rfloor} - \ell_m} \sum_{k=m+1}^{\lfloor m^\lambda \rfloor} \frac{x_k - x_m}{k}, s \right) = 1 \quad (4.1)$$

ve

$$\inf_{\lambda > 1} \limsup_{m \rightarrow \infty} \nu \left(\frac{1}{\ell_{\lfloor m^\lambda \rfloor} - \ell_m} \sum_{k=m+1}^{\lfloor m^\lambda \rfloor} \frac{x_k - x_m}{k}, s \right) = 0. \quad (4.2)$$

koşullarının sağlanmasıdır.

Kanıt. (Gereklilik) (x_m) dizisi a değerine yakınsak olsun. $\lfloor m^\lambda \rfloor > m$ olmak üzere yeterince büyük her m ve her $\lambda > 1$ için,

$$x_m - \tau_m = \frac{\ell_{\lfloor m^\lambda \rfloor}}{\ell_{\lfloor m^\lambda \rfloor} - \ell_m} (\tau_{\lfloor m^\lambda \rfloor} - \tau_m) - \frac{1}{\ell_{\lfloor m^\lambda \rfloor} - \ell_m} \sum_{k=m+1}^{\lfloor m^\lambda \rfloor} \frac{x_k - x_m}{k}. \quad (4.3)$$

eşitliği vardır. Bu durumda (τ_m) dizisi Cauchy dizisi olduğu için

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mu (\tau_{\lfloor m^\lambda \rfloor} - \tau_m, s) = 1 \quad \text{ve} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \nu (\tau_{\lfloor m^\lambda \rfloor} - \tau_m, s) = 0$$

gerçeklenir. Dolayısıyla yeterince büyük her m için

$$\frac{\ell_{\lfloor m^\lambda \rfloor}}{\ell_{\lfloor m^\lambda \rfloor} - \ell_m} \leq \frac{2\lambda}{\lambda - 1}$$

sağlandığından,

$$\begin{aligned} & \mu \left(\frac{\ell_{\lfloor m^\lambda \rfloor}}{\ell_{\lfloor m^\lambda \rfloor} - \ell_m} (\tau_{\lfloor m^\lambda \rfloor} - \tau_m), s \right) \\ &= \mu \left(\tau_{\lfloor m^\lambda \rfloor} - \tau_m, \frac{s}{\frac{\ell_{\lfloor m^\lambda \rfloor}}{\ell_{\lfloor m^\lambda \rfloor} - \ell_m}} \right) \geq \mu \left(\tau_{\lfloor m^\lambda \rfloor} - \tau_m, \frac{s}{\frac{2\lambda}{\lambda-1}} \right) \end{aligned}$$

ve

$$\nu \left(\frac{\ell_{\lfloor m^\lambda \rfloor}}{\ell_{\lfloor m^\lambda \rfloor} - \ell_m} (\tau_{\lfloor m^\lambda \rfloor} - \tau_m), s \right)$$

$$= \nu \left(\tau_{\lfloor m^\lambda \rfloor} - \tau_m, \frac{s}{\ell_{\lfloor m^\lambda \rfloor} - \ell_m} \right) \leq \nu \left(\tau_{\lfloor m^\lambda \rfloor} - \tau_m, \frac{s}{\frac{2\lambda}{\lambda-1}} \right)$$

bulunur. Diğer bir ifadeyle, $\frac{\ell_{\lfloor m^\lambda \rfloor}}{\ell_{\lfloor m^\lambda \rfloor} - \ell_m} (\tau_{\lfloor m^\lambda \rfloor} - \tau_m)$ terimi 0 değerine yakınsar.

(4.3) eşitliğini kullanarak,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mu \left(\frac{1}{\ell_{\lfloor m^\lambda \rfloor} - \ell_m} \sum_{k=m+1}^{\lfloor m^\lambda \rfloor} \frac{x_k - x_m}{k}, s \right) = 1$$

ve

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \nu \left(\frac{1}{\ell_{\lfloor m^\lambda \rfloor} - \ell_m} \sum_{k=m+1}^{\lfloor m^\lambda \rfloor} \frac{x_k - x_m}{k}, s \right) = 0$$

sonucuna varılır. Bu limitlerin (4.1) ve (4.2) koşullarını gerektirdiği kolayca görülür.

(Yeterlilik) (4.1) ve (4.2) koşulları sağlansın. $s > 0$ sabit olmak üzere, verilen her $\varepsilon > 0$ için,

- $m > m_0$ için,

$$\mu \left(\frac{1}{\ell_{\lfloor m^\lambda \rfloor} - \ell_m} \sum_{k=m+1}^{\lfloor m^\lambda \rfloor} \frac{x_k - x_m}{k}, \frac{s}{3} \right) > 1 - \varepsilon$$

ve

$$\nu \left(\frac{1}{\ell_{\lfloor m^\lambda \rfloor} - \ell_m} \sum_{k=m+1}^{\lfloor m^\lambda \rfloor} \frac{x_k - x_m}{k}, \frac{s}{3} \right) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\lambda > 1$ ve $m_0 \in \mathbb{N}$ değerleri vardır.

- $m > m_1$ için $\mu \left(\tau_m - a, \frac{s}{3} \right) > 1 - \varepsilon$ ve $\nu \left(\tau_m - a, \frac{s}{3} \right) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $m_1 \in \mathbb{N}$ değeri vardır.
- $\frac{\ell_{\lfloor m^\lambda \rfloor}}{\ell_{\lfloor m^\lambda \rfloor} - \ell_m} (\tau_{\lfloor m^\lambda \rfloor} - \tau_m)$ terimi 0 değerine yakınsadığından dolayı $m > m_2$ için,

$$\mu \left(\frac{1}{\ell_{\lfloor m^\lambda \rfloor} - \ell_m} \sum_{k=m+1}^{\lfloor m^\lambda \rfloor} \frac{x_k - x_m}{k}, \frac{s}{3} \right) > 1 - \varepsilon$$

ve

$$\nu \left(\frac{1}{\ell_{\lfloor m^\lambda \rfloor} - \ell_m} \sum_{k=m+1}^{\lfloor m^\lambda \rfloor} \frac{x_k - x_m}{k}, \frac{s}{3} \right) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $m_2 \in \mathbb{N}$ değeri vardır.

Dolayısıyla (4.3) eşitliği yardımıyla ve $m > \min \{m_0, m_1, m_2\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} & \mu(x_m - a, s) \\ &= \mu(x_m - \tau_m + \tau_m - a, s) \\ &= \mu \left(\frac{\ell_{\lfloor m^\lambda \rfloor}}{\ell_{\lfloor m^\lambda \rfloor} - \ell_m} (\tau_{\lfloor m^\lambda \rfloor} - \tau_m) - \frac{1}{\ell_{\lfloor m^\lambda \rfloor} - \ell_m} \sum_{k=m+1}^{\lfloor m^\lambda \rfloor} \frac{x_k - x_m}{k} + \tau_m - a, s \right) \\ &\geq \min \left\{ \mu \left(\frac{\ell_{\lfloor m^\lambda \rfloor}}{\ell_{\lfloor m^\lambda \rfloor} - \ell_m} (\tau_{\lfloor m^\lambda \rfloor} - \tau_m), \frac{s}{3} \right), \mu \left(\frac{1}{\ell_{\lfloor m^\lambda \rfloor} - \ell_m} \sum_{k=m+1}^{\lfloor m^\lambda \rfloor} \frac{x_k - x_m}{k}, \frac{s}{3} \right), \right. \\ &\quad \left. \mu \left(\tau_m - a, \frac{s}{3} \right) \right\} \\ &> 1 - \varepsilon \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \nu(x_m - a, s) \\ &< \max \left\{ \nu \left(\frac{\ell_{\lfloor m^\lambda \rfloor}}{\ell_{\lfloor m^\lambda \rfloor} - \ell_m} (\tau_{\lfloor m^\lambda \rfloor} - \tau_m), \frac{s}{3} \right), \nu \left(\frac{1}{\ell_{\lfloor m^\lambda \rfloor} - \ell_m} \sum_{k=m+1}^{\lfloor m^\lambda \rfloor} \frac{x_k - x_m}{k}, \frac{s}{3} \right), \right. \\ &\quad \left. \nu \left(\tau_m - a, \frac{s}{3} \right) \right\} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak, (x_m) dizisi a değerine yakınsar. $\square$

Teorem 4.3. (Yavuz, 2020) (x_m) , (V, μ, ν) sezgisel bulanık normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer (x_m) dizisi $a \in V$ değerine logaritmik toplanabilir ise o halde (x_m) dizisinin a değerine yakınsak olması için gerek ve yeter koşul her bir $s > 0$ için,

$$\sup_{0 < \lambda < 1} \liminf_{m \rightarrow \infty} \mu \left(\frac{1}{\ell_m - \ell_{\lfloor m^\lambda \rfloor}} \sum_{k=\lfloor m^\lambda \rfloor+1}^m \frac{x_m - x_k}{k}, s \right) = 1$$

ve

$$\inf_{0 < \lambda < 1} \limsup_{m \rightarrow \infty} \nu \left(\frac{1}{\ell_m - \ell_{\lfloor m^\lambda \rfloor}} \sum_{k=\lfloor m^\lambda \rfloor + 1}^m \frac{x_m - x_k}{k}, s \right) = 0$$

koşullarının sağlanmasıdır.

Kanıt.

$$x_m - \tau_m = \frac{\ell_{\lfloor m^\lambda \rfloor}}{\ell_m - \ell_{\lfloor m^\lambda \rfloor}} \left(\tau_m - \tau_{\lfloor m^\lambda \rfloor} \right) + \frac{1}{\ell_m - \ell_{\lfloor m^\lambda \rfloor}} \sum_{k=\lfloor m^\lambda \rfloor + 1}^m \frac{x_m - x_k}{k} \quad (0 < \lambda < 1)$$

eşitliğini kullanarak Teorem 4.2 nin ispatına benzer bir süreç izlenerek yapılabilir. $\square$

Tanım 4.2. (Yavuz, 2020) (x_m) , (V, μ, ν) sezgisel bulanık normlu uzayında bir dizi olsun. $s > 0$ için,

$$\sup_{\lambda > 1} \liminf_{m \rightarrow \infty} \min_{m < k \leq \lfloor m^\lambda \rfloor} \mu(x_k - x_m, s) = 1$$

ve

$$\inf_{\lambda > 1} \limsup_{m \rightarrow \infty} \max_{m < k \leq \lfloor m^\lambda \rfloor} \nu(x_k - x_m, s) = 0,$$

koşulları sağlanıyorsa (x_m) dizisi sezgisel bulanık normlu uzayında logaritmik toplanabilmeye göre yavaş salınımlı olarak adlandırılır.

Eğer her bir $s > 0$ ve her $\varepsilon > 0$ için $m_0 \leq m < k \leq \lfloor m^\lambda \rfloor$ iken

$$\mu(x_k - x_m, s) > 1 - \varepsilon \quad \text{ve} \quad \nu(x_k - x_m, s) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\lambda > 1$ ve $m_0 \in \mathbb{N}$ varsa, (x_m) dizisi sezgisel bulanık normlu uzayında logaritmik toplanabilmeye göre yavaş salınımlı bir dizi olarak adlandırılır.

Teorem 4.4. (Yavuz, 2020) (x_m) , sezgisel bulanık normlu uzayında bir dizi olsun. $s > 0$ için (??) ve (4.4) koşulları sırasıyla

$$\sup_{0 < \lambda < 1} \liminf_{m \rightarrow \infty} \min_{\lfloor m^\lambda \rfloor < k \leq m} \mu(x_k - x_m, s) = 1$$

ve

$$\sup_{0 < \lambda < 1} \liminf_{m \rightarrow \infty} \min_{\lfloor m^\lambda \rfloor < k \leq m} \mu(x_k - x_m, s) = 1$$

koşullarına denktir.

Örnek 4.2. (Yavuz, 2020) Örnek 2.1 deki gibi tanımları verilen μ_0 ve ν_0 vulanık kümeleriyle birlikte, bir sezgisel bulanık normlu uzay teşkil eden $(\mathbb{R}, \mu_0, \nu_0)$ uzayında bir $x_m = \sum_{f=1}^m \frac{1}{f}$ dizisini alalım. O zaman, bu dizi logaritmik toplanabilmeye göre yavaş salınımlı bir dizidir.

$t > 0$ sabit olsun. Verilen $\varepsilon > 0$ için $\lambda = e^{\frac{s\varepsilon}{1-\varepsilon}}$ seçilsin. Bunun için, $1 < m < k \leq \lfloor m^\lambda \rfloor$ olmak üzere, $|x_k - x_m| = \sum_{f=m+1}^k \frac{1}{f \ln f} < \int_m^k \frac{du}{u \ln u} \leq \ln \left(\frac{\ln k}{\ln m} \right) \leq \ln \lambda = \frac{s\varepsilon}{1-\varepsilon}$ eşitliği elde edilir. Buradan hareketle,

$$\mu_0(x_k - x_m, s) = \frac{s}{s + |x_k - x_m|} > \frac{s}{s + \frac{s\varepsilon}{1-\varepsilon}} = 1 - \varepsilon$$

ve

$$\nu_0(x_k - x_m, s) = \frac{|x_k - x_m|}{|x_k - x_m| + s} < \frac{\frac{s\varepsilon}{1-\varepsilon}}{\frac{s\varepsilon}{1-\varepsilon} + s} = \varepsilon$$

olur.

Teorem 4.5. (Yavuz, 2020) (x_m) , (V, μ, ν) sezgisel bulanık normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer (x_m) dizisi logaritmik toplanabilmeye göre yavaş salınımlı ise o halde (4.1) ve (4.2) koşulları sağlanır.

Kanıt. (x_m) dizisinin logaritmik toplanabilmeye göre yavaş salınımlı olduğunu varsayalım. $s > 0$ sabit olsun. $\varepsilon > 0$ için,

$$\mu(x_k - x_m, s) > 1 - \varepsilon \text{ ve } \nu(x_k - x_m, s) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\lambda > 1$ ve $m_0 \in \mathbb{N}$ değerleri vardır. Dolayısıyla $m_0 \leq m < k \leq \lfloor m^\lambda \rfloor$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} & \mu \left(\frac{1}{\ell_{\lfloor m^\lambda \rfloor} - \ell_m} \sum_{k=m+1}^{\lfloor m^\lambda \rfloor} \frac{x_k - x_m}{k}, s \right) \\ &= \mu \left(\sum_{k=m+1}^{\lfloor m^\lambda \rfloor} \frac{x_k - x_m}{k}, (\ell_{\lfloor m^\lambda \rfloor} - \ell_m) s \right) \\ &\geq \min \left\{ \mu \left(\frac{x_{m+1} - x_m}{m+1}, \frac{s}{m+1} \right), \dots, \mu \left(\frac{u_{\lfloor m^\lambda \rfloor} - x_m}{\lfloor m^\lambda \rfloor}, \frac{s}{\lfloor m^\lambda \rfloor} \right) \right\} \\ &= \min \left\{ \mu(x_{m+1} - x_m, s), \dots, \mu(u_{\lfloor m^\lambda \rfloor} - x_m, s) \right\} \\ &> 1 - \varepsilon \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \nu \left(\frac{1}{\ell_{\lfloor m^\lambda \rfloor} - \ell_m} \sum_{k=m+1}^{\lfloor m^\lambda \rfloor} \frac{x_k - x_m}{k}, s \right) \\ & \leq \max \left\{ \nu(x_{m+1} - x_m, s), \dots, \nu(u_{\lfloor m^\lambda \rfloor} - x_m, s) \right\} \\ & < \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

Teorem 4.6. (Yavuz, 2020) (x_m) , (V, μ, ν) sezgisel bulanık normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer (x_m) dizisi logaritmik toplanabilmeye göre yavaş salınımlı ve $a \in V$ değerine logaritmik toplanabiliyorsa o halde (x_m) dizisi a değerine yakınsar.

Teorem 4.7. (Yavuz, 2020) (x_m) , (V, μ, ν) sezgisel bulanık normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer $\{m \ln m(x_m - x_{m-1})\}$ dizisi q -sınırlı ise o halde (x_m) dizisi logaritmik toplanabilmeye göre yavaş salınımlıdır.

Kanıt. $\{m \ln m(x_m - x_{m-1})\}$ dizisi q -sınırlı olsun. q -sınırlılık tanımından hareketle, $s > M_\varepsilon$ olmak üzere,

$$\inf_{m \in \mathbb{N}} \mu(m \ln m(x_m - x_{m-1}), s) > 1 - \varepsilon$$

ve

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \nu(m \ln m(x_m - x_{m-1}), s) < \varepsilon$$

koşullarını sağlayan bir $M_\varepsilon > 0$ değeri vardır.

Her $s > 0$ için $\lambda < 1 + \frac{s}{M_\varepsilon}$ seçilsin. O zaman $m_0 < m < k \leq \lfloor m^\lambda \rfloor$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\mu(x_k - x_m, s) &= \mu\left(\sum_{f=m+1}^k (x_f - x_{f-1}), s\right) \\
&\geq \min_{m+1 \leq f \leq k} \mu\left(x_f - x_{f-1}, \frac{s}{f(\ell_k - \ell_m)}\right) \\
&= \min_{m+1 \leq f \leq k} \mu\left(f \ln f (x_f - x_{f-1}), \frac{s \ln f}{\ell_k - \ell_m}\right) \\
&\geq \min_{m+1 \leq f \leq k} \mu\left(f \ln f (x_f - x_{f-1}), \frac{s \ln m}{\ell_k - \ell_m}\right) \\
&\geq \min_{m+1 \leq f \leq k} \mu\left(f \ln f (x_f - x_{f-1}), \frac{s}{\frac{s}{\ln m} - 1}\right) \\
&\geq \min_{m+1 \leq f \leq k} \mu\left(f \ln f (x_f - x_{f-1}), \frac{s}{\lambda - 1}\right) \\
&\geq \inf_{m \in \mathbb{N}} \mu\left(m \ln m (x_m - x_{m-1}), \frac{s}{\lambda - 1}\right) \\
&> 1 - \varepsilon
\end{aligned}$$

ve

$$\nu(x_k - x_m, s) < \sup_{m \in \mathbb{N}} \nu\left(m \ln m (x_m - x_{m-1}), \frac{s}{\lambda - 1}\right) < \varepsilon$$

elde edilir. Dolayısıyla (x_m) dizisi logaritmik toplanabilmeye göre yavaş salınımlıdır. $\square$

Teorem 4.8. (Yavuz, 2020) (x_m) , (V, μ, ν) sezgisel bulanık normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer (x_m) dizisi $a \in \mathbb{N}$ değerine Cesàro toplanabilirse, o halde (x_m) dizisi a değerine logaritmik toplanabilirdir.

Kanıt. (x_m) dizisi $a \in V$ değerine Cesàro toplanabilir olsun. O zaman $\sigma_0 = 0$ olmak üzere (x_m) dizisinin Cesàro ortalamasını temsil eden (σ_m) dizisi a değerine yakınsadığından, Teorem 4.1 yardımıyla bu dizinin aynı değere logaritmik toplanabilir olduğu söylenir. Diğer bir ifadeyle a değerine yakınsaktır.

O halde $s > 0$ sabit olsun ve verilen her $\varepsilon > 0$ için,

- $m > m_0$ için $\mu(\sigma_m - a, \frac{s}{2}) > 1 - \varepsilon$ ve $\nu(\sigma_m - a, \frac{s}{2}) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $m_0 \in \mathbb{N}$ değeri vardır.

- $m > m_1$ için,

$$\mu \left(\frac{1}{\ell_m} \sum_{k=1}^m \frac{\sigma_{k-1}}{k} - a, \frac{s}{2} \right) > 1 - \varepsilon \quad \text{ve} \quad \nu \left(\frac{1}{\ell_m} \sum_{k=1}^m \frac{\sigma_{k-1}}{k} - a, \frac{s}{2} \right) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $m_1 \in \mathbb{N}$ değeri vardır.

- $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu \left(a, \frac{(\ell_m - 1)s}{2} \right) = 1$ ve $\lim_{m \rightarrow \infty} \nu \left(a, \frac{(\ell_m - 1)s}{2} \right) = 0$ olduğundan dolayı, $m > m_2$ için $\mu \left(a, \frac{(\ell_m - 1)s}{2} \right) > 1 - \varepsilon$ ve $\nu \left(a, \frac{(\ell_m - 1)s}{2} \right) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $m_2 \in \mathbb{N}$ değeri vardır.

Dolayısıyla $n > \min\{m_0, m_1, m_2\}$ olduğunda,

$$\begin{aligned} & \mu(\tau_m - a, s) \\ &= \mu \left(\frac{\sigma_m}{\ell_m} + \frac{1}{\ell_m} \sum_{k=1}^m \frac{\sigma_{k-1}}{k} - a, t \right) \\ &\geq \min \left\{ \mu \left(\frac{\sigma_m}{\ell_m}, \frac{s}{2} \right), \mu \left(\frac{1}{\ell_m} \sum_{k=1}^m \frac{\sigma_{k-1}}{k} - a, \frac{s}{2} \right) \right\} \\ &= \min \left\{ \mu \left(\sigma_m, \frac{\ell_m s}{2} \right), \mu \left(\frac{1}{\ell_m} \sum_{k=1}^m \frac{\sigma_{k-1}}{k} - a, \frac{s}{2} \right) \right\} \\ &\geq \min \left\{ \mu \left(\sigma_m - a, \frac{s}{2} \right), \mu \left(a, \frac{(\ell_m - 1)s}{2} \right), \mu \left(\frac{1}{\ell_m} \sum_{k=1}^m \frac{\sigma_{k-1}}{k} - a, \frac{s}{2} \right) \right\} \\ &> 1 - \varepsilon \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \nu(\tau_m - a, s) \\ &\leq \max \left\{ \nu \left(\sigma_m - a, \frac{s}{2} \right), \nu \left(a, \frac{(\ell_m - 1)s}{2} \right), \nu \left(\frac{1}{\ell_m} \sum_{k=1}^m \frac{\sigma_{k-1}}{k} - a, \frac{s}{2} \right) \right\} < \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak,, (x_m) dizisi a değerine logaritmik toplanabildir. $\square$

Örnek 4.3. (Yavuz, 2020) Örnek 2.1 deki gibi tanımları verilen μ_0 ve ν_0 vulanık kümeleriyle birlikte, bir sezgisel bulanık normlu uzay teşkil eden $(\mathbb{R}, \mu_0, \nu_0)$ uzayında bir $(x_m) = ((-1)^m)$ dizisini alalım. O halde her $s > 0$ için, bu dizinin logaritmik toplanabilme olup olmadığını inceleyelim.

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \mu_0(\tau_{2m+1}, s) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \mu_0 \left(-\frac{1}{\ell_{2m+1}}, s \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{s}{s + \left| -\frac{1}{\ell_{2m+1}} \right|} = 1, \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \nu_0(\tau_{2m+1}, s) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \nu_0 \left(-\frac{1}{\ell_{2m+1}}, s \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\left| -\frac{1}{\ell_{2m+1}} \right|}{\left| -\frac{1}{\ell_{2m+1}} \right| + s} = 0 \end{aligned}$$

elde edilir ve buradan hareketle (τ_{2m+1}) dizisinin 0 değerine yakınsadığı elde edilir. (τ_{2m}) dizisi için incelenirse,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mu_0(\tau_{2m}, s) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mu_0(0, s) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{s}{s+0} = 1$$

ve

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \nu_0(\tau_{2m}, s) = \lim_{m \rightarrow \infty} \nu_0(0, s) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{0}{0+s} = 0$$

elde edilir ve bu da (τ_{2m}) dizisinin 0 değerine yakınsadığı anlamına gelir. Dolayısıyla $\lim_{m \rightarrow \infty} \tau_m = 0$ ile ifade edilir. Bu yüzden (x_m) dizisi 0 değerine logaritmik toplanabiliridir. Fakat (x_m) dizisi Cesàro toplanabilir değildir. O halde,

$$\begin{aligned} & \lim_{m \rightarrow \infty} \mu_0(\sigma_{2m}, s) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \mu_0\left(\frac{m(m+1)}{2m+1}, s\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{s}{s + \left|\frac{m(m+1)}{2m+1}\right|} = 0, \\ & \lim_{m \rightarrow \infty} \nu_0(\sigma_{2m}, s) = \lim_{m \rightarrow \infty} \nu_0\left(\frac{m(m+1)}{2m+1}, s\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\left|\frac{m(m+1)}{2m+1}\right|}{s + \left|\frac{m(m+1)}{2m+1}\right|} = 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\ln m(\tau_m - a)$ dizisinin 0 değerine yakınsak olduğuna dair bir koşul eklenirse, o zaman

$$\begin{aligned} & \mu(\sigma_m - a, s) \\ &= \mu\left(\ell_m(\tau_m - a) - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m-1} \ell_k(\tau_k - a), s\right) \\ &\geq \min\left\{\mu\left(\ell_m(\tau_m - a), \frac{s}{2}\right), \mu\left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m-1} \ell_k(\tau_k - a), \frac{s}{2}\right)\right\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \nu(\sigma_m - a, s) \\ &\leq \max\left\{\nu\left(\ell_m(\tau_m - a), \frac{s}{2}\right), \nu\left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m-1} \ell_k(\tau_k - a), \frac{s}{2}\right)\right\} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

sonucuna varılır. Buradan hareketle, $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu(\sigma_m - a) = 1$ ve $\lim_{m \rightarrow \infty} \nu(\sigma_m - a) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla (σ_m) dizisinin a değerine yakınsadığı söylenebilir.

Sonuç olarak, sezgisel bulanık normlu uzayda logaritmik toplanabilme metodu Cesàro toplanabilme metodundan güçlüdür.

5 Sezgisel Bulanık Normlu Uzayında İstatistiksel Yakınsaklık

$K \subset \mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir alt kümesi ve $K_m = \{k \leq m : k \in K\}$ olsun. Eğer $\left(\frac{|K_m|}{m+1}\right)$ dizisinin limiti varsa K kümesinin asimptotik yoğunluğa sahip olduğu söylenir. K kümesinin asimptotik yoğunluğu

$$\delta(K) := \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m+1} |\{k \leq m : k \in K\}|$$

olarak tanımlanır. Eğer $\epsilon > 0$ için ,

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : |x_k - a| \geq \epsilon\}) = 0$$

ise (x_m) dizisinin a değerine istatistiksel olarak yakınsak olduğu söylenir ve $st - \lim_{m \rightarrow \infty} x_m = a$ olarak gösterilir.

Tanım 5.1. (Karakuş et al., 2008) (x_m) dizisi (V, μ, ν) sezgisel bulanık normlu uzayında bir dizi olsun. Her $\epsilon > 0$ ve $s > 0$ için,

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : \mu(x_k - a, s) \leq 1 - \epsilon \text{ veya } \nu(x_k - a, s) \geq \epsilon\}) = 0,$$

ya da denk olarak,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m+1} |\{k \leq m : \mu(x_k - a, s) \leq 1 - \epsilon \text{ ya da } \nu(x_k - a, s) \geq \epsilon\}| = 0$$

ise, o zaman (x_m) dizisi $a \in V$ değerine sezgisel bulanık (μ, ν) normuna göre istatistiksel yakınsaktır, denir ve $st_{\mu, \nu} - \lim_{m \rightarrow \infty} x_m = a$ olarak gösterilir.

Buradaki a , sezgisel bulanık (μ, ν) normuna göre istatistiksel değeridir.

Lemma 5.1. (Karakuş et al., 2008) $x = (x_m)$, (V, μ, ν) sezgisel bulanık normlu uzayında bir dizi olsun. Her $\epsilon > 0$ ve $s > 0$ için, aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

- (i) $st_{\mu, \nu} - \lim_{m \rightarrow \infty} x_m = a$.
- (ii) $\delta(\{m \in \mathbb{N} : \mu(x_m - a, s) \leq 1 - \epsilon\}) = \delta(\{m \in \mathbb{N} : \nu(x_m - a, s) \geq \epsilon\}) = 0$.
- (iii) $\delta(\{m \in \mathbb{N} : \mu(x_m - a, s) > 1 - \epsilon \text{ ve } \nu(x_m - a, s) < \epsilon\}) = 1$.
- (iv) $\delta(\{m \in \mathbb{N} : \mu(x_m - a, s) > 1 - \epsilon\}) = \delta(\{m \in \mathbb{N} : \nu(x_m - a, s) < \epsilon\}) = 1$.

(v) $st - \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(x_m - a, s) = 1$ ve $st - \lim_{m \rightarrow \infty} \nu(x_m - a, s) = 0$.

Eğer (x_m) dizisi sezgisel bulanık (μ, ν) normuna göre istatistiksel yakınsak ise $st_{\mu, \nu}$ -limit tektir. Ayrıca $st_{\mu, \nu} - \lim_{m \rightarrow \infty} x_m = a$ için $(\mu, \nu) - \lim_{m \rightarrow \infty} x_m = a$ gereklidir.

Şimdi (V, μ, ν) de Cesàro ve istatistiksel Cesàro toplanabilme metodunu tanımlayalım.

Tanım 5.2. (Onder et al., 2023) $x = (x_m)$, (V, μ, ν) sezgisel bulanık normlu uzayında bir dizi olsun. (x_m) dizisinin aritmetik ortalaması ya da birinci dereceden Cesàro ortalaması,

$$\sigma_m = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m x_k, \quad m = 1, 2, \dots$$

olarak tanımlanır. Eğer $(\mu, \nu) - \lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_m = a$ ise, (x_m) dizisinin sezgisel bulanık (μ, ν) normuna göre $a \in V$ değerine Cesàro toplanabilir olduğu söylenir. Ayrıca, $st_{\mu, \nu} - \lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_m = a$ ise, (x_m) dizisi sezgisel bulanık (μ, ν) normuna göre $a \in V$ değerine Cesàro toplanabilir.

Teorem 5.1. (Onder et al., 2023) $x = (x_m)$, (V, μ, ν) sezgisel bulanık normlu uzayında q -sınırlı olsun. Eğer (x_m) dizisi sezgisel bulanık (μ, ν) normuna göre $a \in V$ değerine istatistiksel olarak yakınsıyorsa, o halde (x_m) dizisi sezgisel bulanık (μ, ν) normuna göre $a \in V$ değerine Cesàro toplanabilir.

Kanıt. (x_m) dizisinin q -sınırlı ve $st_{\mu, \nu} - \lim_{m \rightarrow \infty} x_m = a$ olduğunu varsayalım. O zaman, verilen her $\epsilon > 0$, $s > 2M_\epsilon$ için,

$$\inf_{m \in \mathbb{N}} \mu(x_m, s) > 1 - \epsilon \quad \text{ve} \quad \sup_{m \in \mathbb{N}} \nu(x_m, s) < \epsilon$$

olacak şekilde bir $M_\epsilon, M'_\epsilon > 0$ sabitleri vardır ve her $s > 2M'_\epsilon$ için $\inf_{m \in \mathbb{N}} \mu(a, s/2) > 1 - \epsilon$ ve $\sup_{m \in \mathbb{N}} \nu(a, s/2) < \epsilon$ olduğu kolayca görülmektedir. Öyleyse $s > \min\{2M_\epsilon, 2M'_\epsilon\}$ için

$$\begin{aligned} \inf_{m \in \mathbb{N}} \mu(x_m - a, s) &\geq \min \left\{ \inf_{m \in \mathbb{N}} \mu \left(x_m, \frac{s}{2} \right), \inf_{m \in \mathbb{N}} \mu \left(a, \frac{s}{2} \right) \right\} > 1 - \epsilon \\ \sup_{m \in \mathbb{N}} \nu(x_m - a, s) &\leq \max \left\{ \sup_{m \in \mathbb{N}} \nu \left(x_m, \frac{s}{2} \right), \sup_{m \in \mathbb{N}} \nu \left(a, \frac{s}{2} \right) \right\} < \epsilon \end{aligned}$$

koşulları sağlanmalıdır. $st_{\mu,\nu} - \lim_{m \rightarrow \infty} x_m = a$ olduğu için Lemma 5.1 yardımıyla, $K_{\mu,u}(\epsilon, s) = \{m \leq M : \mu(x_m - a, s) \leq 1 - \epsilon\}$ ve $K_{\nu,u}(\epsilon, s) = \{m \leq M : \nu(x_m - a, s) \geq \epsilon\}$ olmak üzere,

$$\delta(K_{\mu,u}(\epsilon, s)) = \delta(K_{\nu,u}(\epsilon, s)) = 0$$

elde edilir. $|E| + |G| = m + 1 = |E'| + |G'|$ olacak şekilde $E = \{k \in \mathbb{N} : k \in K_{\mu,u}(\epsilon, s)\}$, $G = \{k \in \mathbb{N} : k \in K_{\mu,u}^c(\epsilon, s)\}$ kümeleri ile $E' = \{k \in \mathbb{N} : k \in K_{\nu,u}(\epsilon, s)\}$, $G' = \{k \in \mathbb{N} : k \in K_{\nu,u}^c(\epsilon, s)\}$ kümeleri tanımlansın. Burada, $E \cap G = \emptyset = E' \cap G'$ olduğu kolayca görülebilir. O halde, her $s > \min\{2M_\epsilon, 2M'_\epsilon\} > 0$ ve $m \geq m_0$ için

$$\begin{aligned} \mu(\sigma_m - a, s) &= \mu\left(\frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m (x_k - a), s\right) \\ &= \mu\left(\sum_{k \in K_{\mu,u}} (x_k - a) + \sum_{k \in K_{\mu,u}^c} (x_k - a), (m+1)s\right) \\ &\geq \min\left\{\mu\left(\sum_{k \in K_{\mu,u}} (x_k - a), |E|s\right), \mu\left(\sum_{k \in K_{\mu,u}^c} (x_k - a), |G|s\right)\right\} \\ &\geq \min\left\{\min_{k \in K_{\mu,u}} \mu(x_k - a, s), \min_{k \in K_{\mu,u}^c} \mu(x_k - a, s)\right\} \\ &\geq \min\left\{\inf_{k \in \mathbb{N}} \mu(x_k - a, s), \min_{k \in K_{\mu,u}^c} \mu(x_k - a, s)\right\} \\ &> \min\{1 - \epsilon, 1 - \epsilon\} \\ &= 1 - \epsilon \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \nu(\sigma_m - a, s) &\leq \max\left\{\max_{k \in K_{\nu,u}} \nu(x_k - a, s), \max_{k \in K_{\nu,u}^c} \nu(x_k - a, s)\right\} \\ &\leq \max\left\{\sup_{k \in \mathbb{N}} \nu(x_k - a, s), \max_{k \in K_{\nu,u}^c} \nu(x_k - a, s)\right\} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

olacak şekilde bir $m_0 \in \mathbb{N}$ değeri vardır. O halde,

$$\{m \in \mathbb{N} : \mu(\sigma_m - a, s) \leq 1 - \epsilon \text{ ya da } \nu(\sigma_m - a, s) \geq \epsilon\}$$

kümesinin sonlu sayıda terime sahip olmasını gerektirir. Doğal sayılar kümesinin sonlu herhangi bir alt kümesinin doğal yoğunluğu 0 olduğundan

$$\{m \in \mathbb{N} : \mu(\sigma_m - a, s) \leq 1 - \epsilon \text{ ya da } \nu(\sigma_m - a, s) \geq \epsilon\}$$

kolayca görülmektedir. Sonuç olarak, (x_m) dizisinin (μ, ν) sezgisel bulanık (μ, ν) normuna göre $a \in V$ değerine istatistiksel Cesàro toplanabilir olduğu söylenir. $\square$

Örnek 5.1. (Altundağ and Kamber, 2018) Örnek 2.1 de tanımları verilen μ_0, ν_0 bulanık kümeleriyle birlikte, bir sezgisel bulanık normlu uzay teşkil eden $(\mathbb{R}, \mu_0, \nu_0)$ uzayında bir (x_m) dizisini,

$$x_m = \begin{cases} 1 + (-1)^m + m^2, & \text{if } m = k^2, k \in \mathbb{N}, \\ 1 + (-1)^m - (m-1)^2, & \text{if } m = k^2 + 1, k \in \mathbb{N}, \\ 1 + (-1)^m, & \text{aksi takdirde.} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. (x_m) dizisi sezgisel bulanık (μ_0, ν_0) norma göre 1 değerine istatistiksel Cesàro toplanabilir olduğu görülmektedir. Fakat (x_m) dizisi sezgisel bulanık (μ_0, ν_0) normuna göre istatistiksel yakınsak ya da q -sınırlı değildir. Bununla birlikte, (x_m) dizisi sezgisel bulanık (μ_0, ν_0) normuna göre Cesàro toplanabilir ya da yakınsak da değildir.

Lemma 5.2. (Onder et al., 2023) $(x_m), (\omega_m)$ (V, μ, ν) sezgisel bulanık normlu uzayında iki dizi olsun. Eğer (x_m) ve (ω_m) dizileri sezgisel bulanık (μ, ν) normuna göre $a_1, a_2 \in V$ değerlerine istatistiksel yakınsıyorsa;

$$st_{\mu, \nu} - \lim_{m \rightarrow \infty} x_m = a_1 \quad \text{ve} \quad st_{\mu, \nu} - \lim_{m \rightarrow \infty} \omega_m = a_2,$$

ise o halde herhangi $c \neq 0$ sabiti için,

$$st_{\mu, \nu} - \lim_{m \rightarrow \infty} (x_m + \omega_m) = a_1 + a_2 \quad \text{ve} \quad st_{\mu, \nu} - \lim_{m \rightarrow \infty} cx_m = ca_1.$$

Kanıt. $st_{\mu, \nu} - \lim_{m \rightarrow \infty} x_m = a_1$ ve $st_{\mu, \nu} - \lim_{m \rightarrow \infty} \omega_m = a_2$ olduğunu varsayalım. Verilen $\epsilon > 0$ için $\min\{1 - z_1, 1 - z_2\} > 1 - \epsilon$ ve $\max\{z_1, z_2\} < \epsilon$ olacak şekilde bazı $z_1, z_2 > 0$ seçilsin. O halde yeterince büyük M ve $s > 0$ için,

$$K_{\mu, u}(z_1, s) := \{m \leq M : \mu(x_m - a_1, s) \leq 1 - z_1\},$$

$$K_{\nu,u}(z_1, s) := \{m \leq M : \nu(x_m - a_1, s) \geq z_1\},$$

$$K_{\mu,\omega}(z_2, s) := \{M \leq M : \mu(\omega_m - a_2, s) \leq 1 - z_2\},$$

$$K_{\nu,\omega}(z_2, s) := \{m \leq M : \nu(\omega_m - a_2, s) \geq z_2\}.$$

kümelerini tanımlayalım.

(a) Hepsinden önce, verilen $\epsilon > 0$ ve herhangi bir $s > 0$ için,

$$K_{\mu,u,\omega}(\epsilon, s) := \{m \leq M : \mu(x_m + \omega_m - (a_1 + a_2), s) \leq 1 - \epsilon\}$$

$$K_{\nu,u,\omega}(\epsilon, s) := \{m \leq M : \nu(x_m + \omega_m - (a_1 + a_2), s) \geq \epsilon\}$$

kümelerini tanımlayalım. Herhangi bir $s > 0$ için,

$$\begin{aligned} \mu(x_m + \omega_m - (a_1 + a_2), s) &\geq \min \left\{ \mu \left(x_m - a_1, \frac{s}{2} \right), \mu \left(\omega_m - a_2, \frac{s}{2} \right) \right\} \\ &> \min\{1 - z_1, 1 - z_2\} \\ &> 1 - \epsilon \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \nu(x_m + \omega_m - (a_1 + a_2), s) &\leq \max \left\{ \nu \left(x_m - a_1, \frac{s}{2} \right), \nu \left(\omega_m - a_2, \frac{s}{2} \right) \right\} \\ &< \max\{z_1, z_2\} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durum

$$K_{\mu,u}^c(z_1, s) \cap K_{\mu,\omega}^c(z_2, s) \subseteq K_{\mu,u,\omega}^c(\epsilon, s)$$

$$K_{\nu,u}^c(z_1, s) \cap K_{\nu,\omega}^c(z_2, s) \subseteq K_{\nu,u,\omega}^c(\epsilon, s)$$

ya da denk olarak,

$$\begin{aligned} K_{\mu,u,\omega}(\epsilon, s) &\subseteq K_{\mu,u}(z_1, s) \cup K_{\mu,\omega}(z_2, s), \\ K_{\nu,u,\omega}(\epsilon, s) &\subseteq K_{\nu,u}(z_1, s) \cup K_{\nu,\omega}(z_2, s). \end{aligned} \tag{5.1}$$

olmasını gerektirir. Eğer (5.1) ifadesinde her iki tarafın yoğunluğu alınırsa, herhangi bir $s > 0$ için,

$$0 \leq \delta(K_{\mu,u,\omega}(\epsilon, s)) \leq \delta(K_{\mu,u}(z_1, s) \cup K_{\mu,\omega}(z_2, s)) \tag{5.2}$$

$$= \delta(K_{\mu,u}(z_1, s)) + \delta(K_{\mu,\omega}(z_2, s)) - \delta(K_{\mu,u}(z_1, s) \cap K_{\mu,\omega}(z_2, s)) \quad (5.3)$$

$$\leq \delta(K_{\mu,u}(z_1, s)) + \delta(K_{\mu,\omega}(z_2, s)) \quad (5.4)$$

ve

$$0 \leq \delta(K_{\nu,u,\omega}(\epsilon, s)) \leq \delta(K_{\nu,u}(z_1, s)) + \delta(K_{\nu,\omega}(z_2, s)). \quad (5.5)$$

bulunur. (x_m) ve (ω_m) dizileri sezgisel bulanık (μ, ν) normuna göre $a_1, a_2 \in V$ değerlerine istatistiksel yakınsadığından, herhangi bir $s > 0$ için Lemma 5.1 yardımıyla,

$$\delta(K_{\mu,u}(z_1, s)) = \delta(K_{\nu,u}(z_1, s)) = 0 = \delta(K_{\mu,\omega}(z_2, s)) = \delta(K_{\nu,\omega}(z_2, s)) \quad (5.6)$$

elde edilir. Eğer (5.6) eşitliği (5.2) ve (5.5) eşitlikleriyle birlikte düşünülürse, o halde herhangi bir $s > 0$ için $\delta(K_{\mu,u,\omega}(\epsilon, s)) = \delta(K_{\nu,u,\omega}(\epsilon, s)) = 0$ olur. Lemma 5.1 yardımıyla $st_{\mu,\nu} - \lim_{m \rightarrow \infty} (x_m + \omega_m) = a_1 + a_2$ kanıtlanır.

(b) Şimdi verilen $\epsilon > 0$ ve $s > 0$ için,

$$K_{\mu,cu}(\epsilon, s) := \{m \leq M : \mu(cx_m - ca_1, s) \leq 1 - \epsilon\}$$

$$K_{\nu,cu}(\epsilon, s) := \{m \leq M : \nu(cx_m - ca_1, s) \geq \epsilon\}$$

kümelerini tanımlayalım. Herhangi bir $s > 0$ için,

$$\mu(cx_m - cL_1, s) = \mu\left(x_m - a_1, \frac{s}{|c|}\right) > 1 - z_1 > 1 - \epsilon$$

ve

$$\nu(cx_m - ca_1, s) = \nu\left(x_m - a_1, \frac{s}{|c|}\right) < z_1 < \epsilon,$$

olur. Bu durum, $K_{\mu,u}^c(z_1, s) \subseteq K_{\mu,cu}^c(\epsilon, s)$ ve $K_{\nu,u}^c(z_1, s) \subseteq K_{\nu,cu}^c(\epsilon, s)$, ya da denk olarak

$$K_{\mu,cu}(\epsilon, s) \subseteq K_{\mu,u}(z_1, s) \quad \text{ve} \quad K_{\nu,cu}(\epsilon, s) \subseteq K_{\nu,u}(z_1, s) \quad (5.7)$$

olduğu anlamına da gelir. Eğer 5.7 ifadesinin her iki tarafının yoğunluğu alınırsa, o halde herhangi bir $s > 0$ için,

$$0 \leq \delta(K_{\mu,cu}(\epsilon, s)) \leq \delta(K_{\mu,u}(z_1, s)) \quad \text{ve} \quad 0 \leq \delta(K_{\nu,cu}(\epsilon, s)) \leq \delta(K_{\nu,u}(z_1, s)). \quad (5.8)$$

elde edilir. (x_m) dizisi sezgisel bulanık (μ, ν) normuna göre $a_1 \in V$ değerine istatistiksel yakınsak olduğundan, herhangi bir $s > 0$ için Lemma 5.1 yardımıyla,

$$\delta(K_{\mu,u}(z_1, s)) = \delta(K_{\nu,u}(z_1, s)) = 0 \quad (5.9)$$

bulunur. Eğer (5.8) ve (5.9) birlikte düşünülürse, o halde $s > 0$ için $\delta(K_{\mu,cu}(\epsilon, s)) = \delta(K_{\nu,cu}(\epsilon, s)) = 0$ sonucuna ulaşılır. Buradan, Lemma 5.1 yardımıyla $st_{\mu,\nu} - \lim_{m \rightarrow \infty} cx_m = ca_1$ kanıtlanır. $\square$

Lemma 5.3. (Onder et al., 2023) $x = (x_m)$, (V, μ, ν) sezgisel bulanık normlu uzayında bir dizi olsun. (x_m) dizisi sezgisel bulanık (μ_0, ν_0) normuna göre $a \in V$ değerine istatistiksel Cesàro toplanabilirse, o halde (σ_{λ_m}) dizisi $a \in V$ değerine istatistiksel yakınsar. Yani $\lambda > 0$ için,

$$st_{\mu,\nu} - \lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_{\lambda_m} = a ; \quad \lambda_m = [\lambda m]$$

koşulu sağlanmalıdır.

Kanıt. $st_{\mu,\nu} - \lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_m = a$ olduğunu varsayalım. O halde yeterince büyük M ve verilen $\epsilon > 0$ için,

$$K_{\mu,\sigma}(\epsilon, s) := \{m \leq \lambda_M : \mu(\sigma_m - a, s) \leq 1 - \epsilon\},$$

$$K_{\nu,\sigma}(\epsilon, s) := \{m \leq \lambda_M : \nu(\sigma_m - a, s) \geq \epsilon\},$$

$$K_{\mu,\sigma_\lambda}(\epsilon, s) := \{m \leq M : \mu(\sigma_{\lambda_m} - a, s) \leq 1 - \epsilon\},$$

$$K_{\nu,\sigma_\lambda}(\epsilon, s) := \{m \leq M : \nu(\sigma_{\lambda_m} - a, s) \geq \epsilon\}$$

kümelerini tanımlayalım. Herhangi bir $s > 0$ için $K_{\mu,\sigma_\lambda}(\epsilon, s) \subseteq K_{\mu,\sigma}(\epsilon, s)$ ve $K_{\nu,\sigma_\lambda}(\epsilon, s) \subseteq K_{\nu,\sigma}(\epsilon, s)$ olduğu kolayca görülebilir. Yani,

$$\frac{|K_{\mu,\sigma_\lambda}(\epsilon, s)|}{M+1} = \frac{\lambda |K_{\mu,\sigma_\lambda}(\epsilon, s)|}{\lambda M + \lambda} \leq \lambda \frac{|K_{\mu,\sigma_\lambda}(\epsilon, s)|}{\lambda_M + 1} \leq \lambda \frac{|K_{\mu,\sigma}(\epsilon, s)|}{\lambda_M + 1}$$

ve

$$\frac{|K_{\nu,\sigma_\lambda}(\epsilon, s)|}{M+1} = \frac{\lambda |K_{\nu,\sigma_\lambda}(\epsilon, s)|}{\lambda M + \lambda} \leq \lambda \frac{|K_{\nu,\sigma_\lambda}(\epsilon, s)|}{\lambda_M + 1} \leq \lambda \frac{|K_{\nu,\sigma}(\epsilon, s)|}{\lambda_M + 1}$$

anlamına gelir. Bu ifadeler sırasıyla

$$\delta(K_{\mu,\sigma_\lambda}(\epsilon, s)) \leq \lambda \delta(K_{\mu,\sigma}(\epsilon, s)) \quad \text{ve} \quad \delta(K_{\nu,\sigma_\lambda}(\epsilon, s)) \leq \lambda \delta(K_{\nu,\sigma}(\epsilon, s))$$

olmasını gerektirir. (σ_m) dizisi sezgisel bulanık (μ, ν) normuna göre $L \in V$ değerine istatistiksel yakınsadığından, herhangi bir $s > 0$ için Lemma 5.1 yardımıyla,

$$\delta(K_{\mu,\sigma}(\epsilon, s)) = \delta(K_{\nu,\sigma}(\epsilon, s)) = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla herhangi $s > 0$ için,

$$\delta(K_{\mu,\sigma_\lambda}(\epsilon, s)) = \delta(K_{\nu,\sigma_\lambda}(\epsilon, s)) = 0$$

elde edilir ve ayrıca Lemma 5.1 yardımıyla, $st_{\mu,\nu} - \lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_{\lambda_m} = a$ olduğu kanıtlanır.

$0 < \lambda < 1$ durumunu inceleyelim. Şimdi, σ_{λ_m} terimi içerisinde aynı σ_m teriminden $(1 + 1/\lambda)$ den fazla kez meydana gelmediği gösterilmedir. Bu durumda, $i, f \in \mathbb{N}$ için,

$$m = \lambda_i = \lambda_{i+1} = \dots = \lambda_{i+f-1} < \lambda_{i+f}$$

ya da denk olarak,

$$m \leq \lambda i < \lambda(i+1) < \dots < \lambda(i+f-1) < m+1 \leq \lambda(i+f)$$

denktir. O halde

$$m + \lambda(f-1) < \lambda i + \lambda(f-1) = \lambda(i+f-1) < m+1$$

bulunur ve bu $\lambda(f-1) < 1$ olduğu anlamına gelir. Öyleyse $f < 1 + 1/\lambda$ eşitliği sağlanır. Herhangi $\epsilon > 0$ ve $s > 0$ için,

$$\frac{|K_{\mu,\sigma_\lambda}(\epsilon, s)|}{M+1} \leq \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \frac{\lambda_M + 1}{M+1} \frac{|K_{\mu,\sigma}(\epsilon, s)|}{\lambda_M + 1} \leq 2(\lambda + 1) \frac{|K_{\mu,\sigma}(\epsilon, s)|}{\lambda_M + 1}$$

ve

$$\frac{|K_{\nu,\sigma_\lambda}(\epsilon, s)|}{M+1} \leq \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \frac{\lambda_M + 1}{M+1} \frac{|K_{\nu,\sigma}(\epsilon, s)|}{\lambda_M + 1} \leq 2(\lambda + 1) \frac{|K_{\nu,\sigma}(\epsilon, s)|}{\lambda_M + 1}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikler de sırasıyla

$$\delta(K_{\mu,\sigma_\lambda}(\epsilon, s)) \leq 2(\lambda+1)\delta(K_{\mu,\sigma}(\epsilon, s)) \quad \text{ve} \quad \delta(K_{\nu,\sigma_\lambda}(\epsilon, s)) \leq 2(\lambda+1)\delta(K_{\nu,\sigma}(\epsilon, s))$$

anlamına gelir. (σ_m) dizisi sezgisel bulanık (μ, ν) normuna göre $a \in V$ ye istatistiksel yakınsadığı için herhangi $s > 0$ için Lemma 5.1 yardımıyla,

$$\delta(K_{\mu,\sigma}(\epsilon, s)) = \delta(K_{\nu,\sigma}(\epsilon, s)) = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla herhangi $s > 0$ için

$$\delta(K_{\mu,\sigma_\lambda}(\epsilon, s)) = \delta(K_{\nu,\sigma_\lambda}(\epsilon, s)) = 0$$

elde edilir. O halde Lemma 5.1 yardımıyla $st_{\mu,\nu} - \lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_{\lambda_m} = a$ de kanıtlanır. $\square$

Lemma 5.4. (Onder et al., 2023) $x = (x_m)$, (V, μ, ν) sezgisel bulanık normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer (x_m) dizisi sezgisel bulanık (μ, ν) normuna göre $a \in V$ ye istatistiksel Cesàro toplanabilir ise, o halde

$$\lambda > 1 \text{ için } st_{\mu,\nu} - \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_m - m} \sum_{k=m+1}^{\lambda_m} x_k = a \quad (5.10)$$

ve

$$0 < \lambda < 1 \text{ için } st_{\mu,\nu} - \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m - \lambda_m} \sum_{k=\lambda_m+1}^m x_k = a \quad (5.11)$$

koşulları sağlanmalıdır.

Kanıt. $st_{\mu,\nu} - \lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_m = a$ olduğunu varsayalım. Verilen $\epsilon > 0$ için $\min\{1 - z_1, 1 - z_2\} > 1 - \epsilon$ ve $\max\{z_1, z_2\} < \epsilon$ olacak şekilde bir $z_1, z_2 > 0$ değerleri seçilsin. O halde yeterince büyük M ve herhangi bir $s > 0$ için

$$K_{\mu,\sigma}(z_1, s) := \{m \leq M : \mu(\sigma_m - a, s) \leq 1 - z_1\},$$

$$K_{\nu,\sigma}(z_1, s) := \{m \leq M : \nu(\sigma_m - a, s) \geq z_1\},$$

$$K_{\mu,\sigma_\lambda,\sigma}(z_2, s) := \{m \leq M : \mu(\sigma_{\lambda_m} - \sigma_m, s) \leq 1 - z_2\},$$

$$K_{\nu,\sigma_\lambda,\sigma}(z_2, s) := \{m \leq M : \nu(\sigma_{\lambda_m} - \sigma_m, s) \geq z_2\}$$

kümeleri tanımlansın. $\lambda > 1$ durumunda verilen $\epsilon > 0$ ve herhangi $s > 0$ için,

$$\tau_m^>(u) = \frac{1}{\lambda_m - m} \sum_{k=m+1}^{\lambda_m} x_k, \quad \text{for all } m \in \mathbb{N}$$

olmak üzere,

$$K_{\mu,\tau^>}(\epsilon, s) := \{m \leq M : \mu(\tau_m^>(u) - a, s) \leq 1 - \epsilon\}$$

$$K_{\nu, \tau >}(\epsilon, s) := \{m \leq M : \nu(\tau_m^>(u) - a, s) \geq \epsilon\}$$

kümeleri de tanımlansın. $m \geq (3\lambda - 1)/\lambda(\lambda - 1)$ ile $m < \lambda_m$ olacak şekilde herhangi $\lambda > 1$ ve yeterince büyük $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ için ve $s_0 := (\lambda - 1)t/4\lambda > 0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} & \mu \left(\frac{1}{\lambda_m - m} \sum_{k=m+1}^{\lambda_m} x_k - a, s \right) \\ &= \mu \left(\frac{\lambda_m + 1}{\lambda_m - m} \frac{1}{\lambda_m - m} \sum_{k=0}^{\lambda_m} x_k - \frac{1}{\lambda_m - m} \sum_{k=0}^m x_k - a, s \right) \\ &= \mu \left(\frac{\lambda_m + 1}{\lambda_m - m} \sigma_{\lambda_m} - \frac{(\lambda_m + 1 - \lambda_m + m)}{\lambda_m - m} \sigma_m - a, s \right) \\ &\geq \min \left\{ \mu \left(\sigma_{\lambda_m} - \sigma_m, \frac{s}{2 \left(\frac{\lambda_m + 1}{\lambda_m - m} \right)} \right), \mu \left(\sigma_m - L, \frac{s}{2} \right) \right\} \\ &\geq \min \left\{ \mu \left(\sigma_{\lambda_m} - \sigma_m, \left(\frac{\lambda - 1}{4\lambda} \right) s \right), \mu \left(\sigma_m - a, \frac{s}{2} \right) \right\} \\ &= \min \left\{ \mu(\sigma_{\lambda_m} - \sigma_m, s_0), \mu \left(\sigma_m - L, \frac{s}{2} \right) \right\} \\ &> \min \{1 - z_2, 1 - z_1\} \\ &> 1 - \epsilon \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \nu \left(\frac{1}{\lambda_m - m} \sum_{k=m+1}^{\lambda_m} x_k - a, s \right) \\ &\leq \max \left\{ \nu \left(\frac{\lambda_m + 1}{\lambda_m - m} (\sigma_{\lambda_m} - \sigma_m), \frac{s}{2} \right), \nu \left(\sigma_m - a, \frac{s}{2} \right) \right\} \\ &\leq \max \left\{ \nu \left(\sigma_{\lambda_m} - \sigma_m, \left(\frac{\lambda - 1}{4\lambda} \right) s \right), \nu \left(\sigma_m - L, \frac{s}{2} \right) \right\} \\ &= \max \left\{ \nu(\sigma_{\lambda_m} - \sigma_m, s_0), \nu \left(\sigma_m - L, \frac{s}{2} \right) \right\} \\ &< \max \{z_2, z_1\} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla herhangi bir $s > 0$ için,

$$K_{\mu, \sigma}^c(z_1, s) \cap K_{\mu, \sigma_\lambda, \sigma}^c(z_2, s) \subseteq K_{\mu, \tau >}^c(\epsilon, s)$$

$$K_{\nu, \sigma}^c(z_1, s) \cap K_{\nu, \sigma_\lambda, \sigma}^c(z_2, s) \subseteq K_{\nu, \tau >}^c(\epsilon, s)$$

ya da denk olarak,

$$\begin{aligned} K_{\mu,\tau>}(\epsilon, s) &\subseteq K_{\mu,\sigma}(z_1, s) \cup K_{\mu,\sigma_\lambda,\sigma}(z_2, s), \\ K_{\nu,\tau>}(\epsilon, s) &\subseteq K_{\nu,\sigma}(z_1, s) \cup K_{\nu,\sigma_\lambda,\sigma}(z_2, s). \end{aligned} \quad (5.12)$$

bulunur. Eğer (5.12) kapsama bağıntısının her iki tarafının yoğunluğu alınır, herhangi bir $s > 0$ için

$$\begin{aligned} 0 \leq \delta(K_{\mu,\tau>}(\epsilon, s)) &\leq \delta(K_{\mu,\sigma}(z_1, s) \cup K_{\mu,\sigma_\lambda,\sigma}(z_2, s)) \\ &= \delta(K_{\mu,\sigma}(z_1, s)) + \delta(K_{\mu,\sigma_\lambda,\sigma}(z_2, s)) \\ &\quad - \delta(K_{\mu,\sigma}(z_1, s) \cap K_{\mu,\sigma_\lambda,\sigma}(z_2, s)) \\ &\leq \delta(K_{\mu,\sigma}(z_1, s)) + \delta(K_{\mu,\sigma_\lambda,\sigma}(z_2, s)) \end{aligned} \quad (5.13)$$

ve

$$0 \leq \delta(K_{\nu,\tau>}(\epsilon, s)) \leq \delta(K_{\nu,\sigma}(z_1, s)) + \delta(K_{\nu,\sigma_\lambda,\sigma}(z_2, s)) \quad (5.14)$$

elde edilir. (σ_m) dizisi sezgisel bulanık (μ, ν) normuna göre $a \in V$ değerine istatistiksel yakınsaktır. Yani herhangi bir $s > 0$ için

$$\delta(K_{\mu,\sigma}(z_1, s)) = \delta(K_{\nu,\sigma}(z_1, s)) = 0 \quad (5.15)$$

eşitliğinden dolayı (σ_{λ_m}) dizisi de $a \in V$ değerine istatistiksel yakınsar. Bu durum, Lemma 5.2 yardımıyla,

$$st_{\mu,\nu} - \lim_{m \rightarrow \infty} (\sigma_{\lambda_m} - \sigma_m) = 0$$

olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla $s > 0$ için

$$\delta(K_{\mu,\sigma_\lambda,\sigma}(z_2, s)) = \delta(K_{\nu,\sigma_\lambda,\sigma}(z_2, s)) = 0 \quad (5.16)$$

eşitliği sağlanır. Eğer (5.13) ve (5.14) eşitsizlikleri sırasıyla (5.15) ve (5.16) ile birlikte düşünülürse o zaman $s > 0$ için $\delta(K_{\mu,\tau>}(\epsilon, s)) = \delta(K_{\nu,\tau>}(\epsilon, s)) = 0$ bulunur. Sonuç olarak, Lemma 5.1 hareketiyle (5.10) kanıtlanır.

$0 < \lambda < 1$ durumunda benzer ispat yapılabilir. $\square$

6 Sezgisel Bulanık Normlu Uzayında İstatistiksel Cesàro Toplanabilme Metodu için Tauber Tipi Teoremler

Teorem 6.1. (Onder et al., 2023) $x = (x_m)$, (V, μ, ν) sezgisel bulanık normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer (x_m) dizisinin sezgisel bulanık (μ, ν) normuna göre $a \in V$ değerine istatistiksel Cesàro toplanabilir ise o halde (x_m) dizisi sezgisel bulanık (μ, ν) normuna göre $a \in V$ ye istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul her $\epsilon' > 0$ ve $s > 0$ için,

$$\inf_{\lambda > 1} \limsup_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M+1} \left| \left\{ m \leq M : \mu \left(\frac{1}{\lambda_m - m} \sum_{k=m+1}^{\lambda_m} (x_k - x_m), s \right) \leq 1 - \epsilon' \right\} \right| = 0 \quad (6.1)$$

ve

$$\inf_{\lambda > 1} \limsup_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M+1} \left| \left\{ m \leq M : \nu \left(\frac{1}{\lambda_m - m} \sum_{k=m+1}^{\lambda_m} (x_k - x_m), s \right) \geq \epsilon' \right\} \right| = 0 \quad (6.2)$$

koşullarının sağlanmasıdır.

Kanıt. Yeterlilik $st_{\mu, \nu} - \lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_m = a$ olduğunu varsayalım. (6.1) ve (6.2) koşulları sağlansın. Herhangi $\epsilon' > 0$ ve $s > 0$ için,

$$K_{\mu, ma}(\epsilon', s) := \left\{ m \leq M : \mu \left(\frac{1}{\lambda_m - m} \sum_{k=m+1}^{\lambda_m} (x_k - x_m), s \right) \leq 1 - \epsilon' \right\},$$

$$K_{\nu, ma}(\epsilon', s) := \left\{ m \leq M : \nu \left(\frac{1}{\lambda_m - m} \sum_{k=m+1}^{\lambda_m} (x_k - x_m), s \right) \geq \epsilon' \right\}$$

kümeleri tanımlansın. Verilen bir $\epsilon, \epsilon' > 0$ için $\min\{1 - z_1, 1 - z_2, 1 - \epsilon'\} > 1 - \epsilon$ ve $\max\{z_1, z_2, \epsilon'\} < \epsilon$ olacak şekilde bazı $z_1, z_2 > 0$ değerleri seçilsin. O halde yeterince büyük M ve herhangi bir $s > 0$ için,

$$K_{\mu, u}(\epsilon, s) := \{m \leq M : \mu(x_m - a, s) \leq 1 - \epsilon\},$$

$$K_{\nu, u}(\epsilon, s) := \{m \leq M : \nu(x_m - a, s) \geq \epsilon\},$$

$$K_{\mu, \sigma}(z_1, s) := \{m \leq M : \mu(\sigma_m - a, s) \leq 1 - z_1\},$$

$$K_{\nu,\sigma}(z_1, s) := \{m \leq M : \nu(\sigma_m - a, s) \geq z_1\},$$

$$K_{\mu,\sigma_\lambda,\sigma}(z_2, s) := \{m \leq M : \mu(\sigma_{\lambda_m} - \sigma_m, s) \leq 1 - z_2\},$$

$$K_{\nu,\sigma_\lambda,\sigma}(z_2, s) := \{m \leq M : \nu(\sigma_{\lambda_m} - \sigma_m, s) \geq z_2\}.$$

kümeleri oluşturulsun. Herhangi bir $\lambda > 1$ ve yeterince büyük $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ koşulu altında $m < \lambda_m$ olmak üzere $s_2 := (\lambda - 1)s/6\lambda > 0$ şeklinde tanımlanan bir $s_2 > 0$ için, Lemma 3.2 den yararlanılarak,

$$\begin{aligned} \mu(x_m - a) &= \mu(x_m - \sigma_m + \sigma_m - a, s) \\ &\geq \min \left\{ \mu \left(x_m + \frac{1}{\lambda_m - m} \sum_{k=m+1}^{\lambda_m} x_k - \frac{1}{\lambda_m - m} \sum_{k=m+1}^{\lambda_m} x_k \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{\lambda_m - m} \frac{\lambda_m - m}{m+1} \sum_{k=0}^m x_k, \frac{2s}{3} \right), \mu \left(\sigma_m - L, \frac{s}{3} \right) \right\} \\ &= \min \left\{ \mu \left(\frac{1}{\lambda_m - m} \sum_{k=m+1}^{\lambda_m} (x_m - x_k) + \frac{\lambda_m + 1}{\lambda_m - m} \frac{1}{\lambda_m + 1} \sum_{k=0}^{\lambda_m} x_k - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\lambda_m + 1}{\lambda_m - m} \sigma_m, \frac{2s}{3} \right), \mu \left(\sigma_m - a, \frac{s}{3} \right) \right\} \\ &= \min \left\{ \mu \left(\frac{1}{\lambda_m - m} \sum_{k=m+1}^{\lambda_m} (x_m - x_k) + \frac{\lambda_m + 1}{\lambda_m - m} (\sigma_{\lambda_m} - \sigma_m), \frac{2s}{3} \right), \right. \\ &\quad \left. \mu \left(\sigma_m - a, \frac{s}{3} \right) \right\} \\ &\geq \min \left\{ \mu \left(\frac{1}{\lambda_m - m} \sum_{k=m+1}^{\lambda_m} (x_m - x_k), \frac{s}{3} \right), \right. \\ &\quad \left. \mu \left((\sigma_{\lambda_m} - \sigma_m), \frac{s}{3 \left(\frac{\lambda_m + 1}{\lambda_m - m} \right)} \right), \mu \left(\sigma_m - a, \frac{s}{3} \right) \right\} \\ &\geq \min \left\{ \mu \left(\frac{1}{\lambda_m - m} \sum_{k=m+1}^{\lambda_m} (x_m - x_k), \frac{s}{3} \right), \right. \\ &\quad \left. \mu \left(\sigma_{\lambda_m} - \sigma_m, \left(\frac{\lambda - 1}{6\lambda} \right) s \right), \mu \left(\sigma_m - a, \frac{s}{3} \right) \right\} \\ &= \min \left\{ \mu \left(\frac{1}{\lambda_m - m} \sum_{k=m+1}^{\lambda_m} (x_m - x_k), \frac{s}{3} \right), \mu(\sigma_{\lambda_m} - \sigma_m, s_2), \right. \\ &\quad \left. \mu \left(\sigma_m - a, \frac{s}{3} \right) \right\} \\ &\geq \{1 - \epsilon', 1 - z_2, 1 - z_1\} \end{aligned}$$

$> \epsilon$

ve

$$\begin{aligned}
& \nu(x_m - a) \\
&= \nu(x_m - \sigma_m + \sigma_m - a, s) \\
&\leq \max \left\{ \nu \left(\frac{1}{\lambda_m - m} \sum_{k=m+1}^{\lambda_m} (x_m - x_k), \frac{s}{3} \right), \nu \left((\sigma_{\lambda_m} - \sigma_m), \frac{s}{3 \left(\frac{\lambda_m + 1}{\lambda_m - m} \right)} \right), \right. \\
&\quad \left. \nu \left(\sigma_m - a, \frac{s}{3} \right) \right\} \\
&\leq \max \left\{ \nu \left(\frac{1}{\lambda_m - m} \sum_{k=m+1}^{\lambda_m} (x_m - x_k), \frac{s}{3} \right), \nu \left(\sigma_{\lambda_m} - \sigma_m, \left(\frac{\lambda - 1}{6\lambda} \right) s \right), \right. \\
&\quad \left. \nu \left(\sigma_m - a, \frac{s}{3} \right) \right\} \\
&= \max \left\{ \nu \left(\frac{1}{\lambda_m - m} \sum_{k=m+1}^{\lambda_m} (x_m - x_k), \frac{s}{3} \right), \nu(\sigma_{\lambda_m} - \sigma_m, s_2), \nu \left(\sigma_m - a, \frac{s}{3} \right) \right\} \\
&\leq \max\{\epsilon', z_2, z_1\} \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla herhangi bir $s > 0$ için,

$$K_{\mu,ma}^c(\epsilon', s) \cap K_{\mu,\sigma_\lambda,\sigma}^c(z_2, s) \cap K_{\mu,\sigma}^c(z_1, s) \subseteq K_{\mu,u}^c(\epsilon, s)$$

$$K_{\nu,ma}^c(\epsilon', s) \cap K_{\nu,\sigma_\lambda,\sigma}^c(z_2, s) \cap K_{\nu,\sigma}^c(z_1, s) \subseteq K_{\nu,u}^c(\epsilon, s)$$

ya da denk olarak,

$$K_{\mu,u}(\epsilon, s) \subseteq K_{\mu,ma}(\epsilon', s) \cup K_{\mu,\sigma_\lambda,\sigma}(z_2, s) \cup K_{\mu,\sigma}(z_1, s), \quad (6.3)$$

$$K_{\nu,u}(\epsilon, s) \subseteq K_{\nu,ma}(\epsilon', s) \cup K_{\nu,\sigma_\lambda,\sigma}(z_2, s) \cup K_{\nu,\sigma}(z_1, s)$$

eşitlikleri elde edilir. Eğer (6.3) ifadesinin her iki tarafının asimptotik yoğunluğu alınırsa, o zaman herhangi bir $s > 0$ için,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \delta(K_{\mu,u}(\epsilon, s)) \leq \bar{\delta}(K_{\mu,ma}(\epsilon', s)) + \delta(K_{\mu,\sigma_\lambda,\sigma}(z_2, s)) + \delta(K_{\mu,\sigma}(z_1, s)), \\
0 &\leq \delta(K_{\nu,u}(\epsilon, s)) \leq \bar{\delta}(K_{\nu,ma}(\epsilon', s)) + \delta(K_{\nu,\sigma_\lambda,\sigma}(z_2, s)) + \delta(K_{\nu,\sigma}(z_1, s))
\end{aligned} \quad (6.4)$$

elde edilir. (σ_m) dizisi de sezgisel bulanık (μ, ν) normuna göre $a \in V$ değerine istatistiksel yakınsaktır. Öyleyse $s > 0$ için

$$\delta(K_{\mu,\sigma}(z_1, s)) = \delta(K_{\nu,\sigma}(z_1, s)) = 0 \quad (6.5)$$

olduğu için (σ_{λ_m}) dizisi de $a \in V$ değerine istatistiksel yakınsar. Öyleyse,

$$st_{\mu,\nu} - \lim_{m \rightarrow \infty} (\sigma_{\lambda_m} - \sigma_m) = 0$$

anlamına gelir. Dolayısıyla $s > 0$ için,

$$\delta(K_{\mu,\sigma_\lambda,\sigma}(z_2, s)) = \delta(K_{\nu,\sigma_\lambda,\sigma}(z_2, s)) = 0 \quad (6.6)$$

elde edilir. Eğer (6.4), (6.5) ve (6.6) ile birlikte düşünülürse $s > 0$ için $\delta(K_{\mu,u}(\epsilon, s)) = \delta(K_{\nu,u}(\epsilon, s)) = 0$ eşitliğine ulaşılır. Sonuç olarak, Lemma 5.1 yardımıyla, (x_m) dizisi sezgisel bulanık (μ, ν) normuna göre $a \in V$ değerine istatistiksel yakınsak olduğu görülür.

Gerekliklik $st_{\mu,\nu} - \lim_{m \rightarrow \infty} x_m = a$ ve $st_{\mu,\nu} - \lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_m = a$ olduğunu varsayalım. Lemma 3.1 yardımıyla $st_{\mu,\nu} - \lim_{m \rightarrow \infty} (\sigma_m - x_m) = 0$ elde edilir. Verilen $\epsilon' > 0$ için $\min\{1 - z_2, 1 - z_3\} > 1 - \epsilon'$ ve $\max\{z_2, z_3\} < \epsilon'$ olacak şekilde $z_2, z_3 > 0$ seçilsin. O halde yeterince büyük M ve herhangi bir $s > 0$ için 5.1 yardımıyla,

$$K_{\mu,\sigma,u}(z_3, s) := \{m \leq M : \mu(\sigma_m - x_m, s) \leq 1 - z_3\},$$

$$K_{\nu,\sigma,u}(z_3, s) := \{m \leq M : \nu(\sigma_m - x_m, s) \geq z_3\}$$

şeklinde tanımlanan kümelerin asimptotik yoğunlukları

$$\delta(K_{\mu,\sigma,u}(z_3, s)) = \delta(K_{\nu,\sigma,u}(z_3, s)) = 0, \quad (6.7)$$

olarak bulunur. $\lambda > 1$ olsun. $\lambda > 1$ ve yeterince büyük $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ için $m \geq (3\lambda - 1)/\lambda(\lambda - 1)$ koşulu altında $m < \lambda_M$ olmak üzere $s_0 := (\lambda - 1)s/4\lambda > 0$ şeklinde tanımlanan bir $s_0 > 0$ için olmak üzere ve Lemma 3.2 yardımıyla,

$$\begin{aligned} & \mu\left(\frac{1}{\lambda_m - m} \sum_{k=m+1}^{\lambda_m} (x_k - x_m), s\right) \\ &= \mu\left(\frac{1}{\lambda_m - m} \sum_{k=m+1}^{\lambda_m} x_k + \frac{1}{\lambda_m - m} \sum_{k=0}^m x_k - \frac{m+1}{\lambda_m - m} \sigma_m - x_m, s\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mu \left(\frac{\lambda_m + 1}{\lambda_m - m} (\sigma_{\lambda_m} - \sigma_m) + \sigma_m - x_m, s \right) \\
&\geq \min \left\{ \mu \left(\sigma_{\lambda_m} - \sigma_m, \frac{s}{2 \left(\frac{\lambda_m + 1}{\lambda_m - m} \right)} \right), \mu \left(\sigma_m - x_m, \frac{s}{2} \right) \right\} \\
&\geq \min \left\{ \mu \left(\sigma_{\lambda_m} - \sigma_m, \frac{\lambda - 1}{4\lambda} s \right), \mu \left(\sigma_m - x_m, \frac{s}{2} \right) \right\} \\
&= \min \left\{ \mu (\sigma_{\lambda_m} - \sigma_m, s_0), \mu \left(\sigma_m - x_m, \frac{s}{2} \right) \right\} \\
&> \min \{1 - z_2, 1 - z_3\} \\
&> 1 - \epsilon'
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\nu \left(\frac{1}{\lambda_m - m} \sum_{k=m+1}^{\lambda_m} (x_k - x_m), s \right) \\
&\leq \max \left\{ \nu \left(\sigma_{\lambda_m} - \sigma_m, \frac{s}{2 \left(\frac{\lambda_m + 1}{\lambda_m - m} \right)} \right), \nu \left(\sigma_m - x_m, \frac{s}{2} \right) \right\} \\
&\leq \max \left\{ \nu \left(\sigma_{\lambda_m} - \sigma_m, \frac{\lambda - 1}{4\lambda} s \right), \nu \left(\sigma_m - x_m, \frac{s}{2} \right) \right\} \\
&= \max \left\{ \nu (\sigma_{\lambda_m} - \sigma_m, s_0), \nu \left(\sigma_m - x_m, \frac{s}{2} \right) \right\} \\
&< \max \{z_2, z_3\} \\
&< \epsilon'
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla herhangi bir $s > 0$ için,

$$K_{\mu, \sigma_\lambda, \sigma}^c(z_2, s) \cap K_{\mu, \sigma, u}^c(z_3, s) \subseteq K_{\mu, ma}^c(\epsilon', s),$$

$$K_{\nu, \sigma_\lambda, \sigma}^c(z_2, s) \cap K_{\nu, \sigma, u}^c(z_3, s) \subseteq K_{\nu, ma}^c(\epsilon', s)$$

ya da denk olarak,

$$K_{\mu, ma}(\epsilon', s) \subseteq K_{\mu, \sigma_\lambda, \sigma}(z_2, s) \cup K_{\mu, \sigma, u}(z_3, s), \quad (6.8)$$

$$K_{\nu, ma}(\epsilon', s) \subseteq K_{\nu, \sigma_\lambda, \sigma}(z_2, s) \cup K_{\nu, \sigma, u}(z_3, s).$$

bulunur. Eğer (6.8) kapsama bağıntısının her iki tarafının üst asimptotik yoğunluğu alınırsa, herhangi bir $s > 0$ için,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \bar{\delta}(K_{\mu, ma}(\epsilon', s)) \leq \bar{\delta}(K_{\mu, \sigma_\lambda, \sigma}(z_2, s)) + \bar{\delta}(K_{\mu, \sigma, u}(z_3, s)), \\
0 &\leq \bar{\delta}(K_{\nu, ma}(\epsilon', s)) \leq \bar{\delta}(K_{\nu, \sigma_\lambda, \sigma}(z_2, s)) + \bar{\delta}(K_{\nu, \sigma, u}(z_3, s)).
\end{aligned} \quad (6.9)$$

sonucuna ulaşılır. (σ_m) dizisisezgisel bulanık (μ, ν) normuna göre $a \in V$ değerine istatistiksel yakınsak olduğundan Lemma 5.3 yardımıyla (σ_{λ_n}) dizisi de sezgisel bulanık (μ, ν) normuna göre $a \in V$ değerine istatistiksel yakınsaktır. Yani Lemma 3.1 den yararlanılarak,

$$st_{\mu, \nu} - \lim_{m \rightarrow \infty} (\sigma_{\lambda_m} - \sigma_m) = 0$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla herhangi bir $s > 0$ için,

$$\delta(K_{\mu, \sigma_\lambda, \sigma}(z_2, s)) = \delta(K_{\nu, \sigma_\lambda, \sigma}(z_2, s)) = 0 \quad (6.10)$$

eşitliği kolayca görülür. Eğer (6.9) eşitsizlikleri sırasıyla (6.7) ve (6.10) ile birlikte düşünülürse, o zaman $s > 0$ için $\bar{\delta}(K_{\mu, ma}(\epsilon', s)) = \bar{\delta}(K_{\nu, ma}(\epsilon', s)) = 0$ elde edilir. Sonuç olarak, $\epsilon' > 0$ ve $s > 0$ için Lemma 5.1 yardımıyla (6.1) ve (6.2) koşulları sağlanır. $\square$

$0 < \lambda < 1$ için de benzer süreçle ispatı yapılabilir.

Teorem 6.2. (Onder et al., 2023) $x = (x_m)$, (V, μ, ν) sezgisel bulanık normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer (x_m) dizisi sezgisel bulanık (μ, ν) normuna göre $a \in V$ değerine istatistiksel Cesàro toplanabilir ise o halde (x_m) dizisinin sezgisel bulanık (μ, ν) normuna göre $a \in V$ değerine istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul her $\epsilon' > 0$ ve $s > 0$ için,

$$\inf_{0 < \lambda < 1} \limsup_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M+1} \left| \left\{ m \leq M : \mu \left(\frac{1}{m - \lambda_m} \sum_{k=\lambda_m+1}^m (x_m - x_k), s \right) \leq 1 - \epsilon' \right\} \right| = 0 \quad (6.11)$$

ve

$$\inf_{0 < \lambda < 1} \limsup_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M+1} \left| \left\{ m \leq M : \nu \left(\frac{1}{m - \lambda_m} \sum_{k=\lambda_m+1}^m (x_m - x_k), s \right) \geq \epsilon' \right\} \right| = 0 \quad (6.12)$$

koşullarının sağlanmasıdır.

Her bir $\epsilon > 0$ ve $s > 0$ olmak üzere,

$$\inf_{\lambda > 1} \limsup_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M+1} \left| \left\{ m \leq M : \min_{m+1 \leq k \leq \lambda_m} \mu(x_k - x_m, s) \leq 1 - \epsilon \right\} \right| = 0 \quad (6.13)$$

ve

$$\inf_{\lambda > 1} \limsup_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M+1} \left| \left\{ m \leq M : \max_{m+1 \leq k \leq \lambda_m} \nu(x_k - x_m, s) \geq \epsilon \right\} \right| = 0 \quad (6.14)$$

koşullarını sağlıyorsa (x_m) dizisi sezgisel bulanık (μ, ν) normuna göre istatistiksel yavaş salınımlı bir dizi olarak adlandırılır. (6.13) ve (6.14) koşulları her bir $\epsilon > 0$ ve $s > 0$ için,

$$\inf_{0 < \lambda < 1} \limsup_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M+1} \left| \left\{ m \leq M : \min_{\lambda_m < k \leq m} \mu(x_m - x_k, s) \leq 1 - \epsilon \right\} \right| = 0 \quad (6.15)$$

ve

$$\inf_{0 < \lambda < 1} \limsup_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M+1} \left| \left\{ m \leq M : \max_{\lambda_m < k \leq m} \nu(x_m - x_k, s) \geq \epsilon \right\} \right| = 0 \quad (6.16)$$

koşullarına denktir.

Teorem 6.3. (*Onder et al., 2023*) $x = (x_m)$, (V, μ, ν) sezgisel bulanık normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer (x_m) dizisi sezgisel bulanık (μ, ν) normuna göre $a \in V$ değerine istatistiksel Cesàro toplanabilir ve yavaş salınımlı ise o halde (x_m) dizisi sezgisel bulanık (μ, ν) normuna göre $a \in V$ değerine istatistiksel yakınsaktır.

Kanıt. $st_{\mu, \nu} - \lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_m = a$ ve (x_m) dizisi sezgisel bulanık (μ, ν) normuna göre istatistiksel yavaş salınımlı olsun. Ayrıca, (6.13) ve (6.14) koşullarının (6.1) ve (6.2) koşullarını gerektirdiği gösterilirse, teoremin ispatı tamamlanmış olur. Öyleyse $\epsilon > 0$ verilsin. O halde yeterince büyük M ve herhangi bir $s > 0$ için,

$$K_{\mu, so}(\epsilon, s) := \left\{ m \leq M : \min_{m+1 \leq k \leq \lambda_m} \mu(x_k - x_m, s) \leq 1 - \epsilon \right\},$$

$$K_{\nu, so}(\epsilon, s) := \left\{ m \leq M : \max_{m+1 \leq k \leq \lambda_m} \nu(x_k - x_m, s) \geq \epsilon \right\}$$

kümelerini tanımlansın.

Herhangi $\lambda > 1$ ve yeterince büyük $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ için $m < \lambda_m$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & \mu \left(\frac{1}{\lambda_m - m} \sum_{k=m+1}^{\lambda_m} (x_k - x_m), s \right) \\ &= \mu \left(\sum_{k=m+1}^{\lambda_m} (x_k - x_m), (\lambda_m - m)s \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \min \{ \mu(x_{m+1} - x_m, s), \mu(x_{m+2} - x_m, s), \dots, \mu(u_{\lambda_m} - x_m, s) \} \\
&= \min_{m+1 \leq k \leq \lambda_m} \mu(x_k - x_m, s) \\
&> 1 - \epsilon
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\nu \left(\frac{1}{\lambda_m - m} \sum_{k=m+1}^{\lambda_m} (x_k - x_m), s \right) \\
&\leq \max \{ \nu(x_{m+1} - x_m, s), \nu(x_{m+2} - x_m, s), \dots, \nu(u_{\lambda_m} - x_m, s) \} \\
&= \max_{m+1 \leq k \leq \lambda_m} \mu(x_k - x_m, s) \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla herhangi bir $s > 0$ için,

$$K_{\mu,so}^c(\epsilon, s) \subseteq K_{\mu,ma}^c(\epsilon, s) \quad \text{ve} \quad K_{\nu,so}^c(\epsilon, s) \subseteq K_{\nu,ma}^c(\epsilon, s)$$

ya da denk olarak,

$$K_{\mu,ma}(\epsilon, s) \subseteq K_{\mu,so}(\epsilon, s) \quad \text{ve} \quad K_{\nu,ma}(\epsilon, s) \subseteq K_{\nu,so}(\epsilon, s)$$

eşitliği elde edilir. Eğer her iki tarafın üst asimptotik yoğunluğu alınır, herhangi bir $s > 0$ için,

$$0 \leq \bar{\delta}(K_{\mu,ma}(\epsilon, s)) \leq \bar{\delta}(K_{\mu,so}(\epsilon, s)) \quad \text{ve} \quad 0 \leq \bar{\delta}(K_{\nu,ma}(\epsilon, s)) \leq \bar{\delta}(K_{\nu,so}(\epsilon, s)) \quad (6.17)$$

elde edilir. (x_m) dizisi sezgisel bulanık (μ, ν) normuna göre istatistiksel yavaş salınımlı olduğu için, $\lambda > 1$ ve $s > 0$ için,

$$\bar{\delta}(K_{\mu,so}(\epsilon, s)) = \bar{\delta}(K_{\nu,so}(\epsilon, s)) = 0$$

elde edilir. Sonuç olarak, $\epsilon > 0$ ve $s > 0$ için (6.1) ve (6.2) koşulları sağlanır. $\square$

Teorem 6.4. (Onder et al., 2023) $x = (x_m)$, (V, μ, ν) sezgisel bulanık normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer (x_m) dizisi sezgisel bulanık (μ, ν) normuna göre $a \in V$ değerine istatistiksel Cesàro toplanabilir ve $\{m(x_m - x_{m-1})\}$ dizisi q -sınırlı ise o halde (x_m) dizisi sezgisel bulanık (μ, ν) normuna göre $a \in V$ değerine istatistiksel yakınsaktır.

Kanıt. $st_{\mu,\nu} - \lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_m = a$ ve $\{m(x_m - x_{m-1})\}$ dizisi q -sınırlı olsun. Burada $\{m(x_m - x_{m-1})\}$ q -sınırlı ise (x_m) dizisi sezgisel bulanık (μ, ν) normuna göre yavaş salınımlıdır. O halde 6.3 yardımıyla kanıtlanabilir. Verilen $\epsilon > 0$ için,

$$\inf_{m \in \mathbb{N}} \mu(m(x_m - x_{m-1}), s) > 1 - \epsilon \quad \text{ve} \quad \sup_{m \in \mathbb{N}} \nu(m(x_m - x_{m-1}), s) < \epsilon$$

olacak şekilde $s > M_\epsilon$ olmak üzere öyle bir $M_\epsilon > 0$ vardır. Eğer $1 < \lambda < 1 + \frac{s}{M_\epsilon}$ alınırsa o halde $m_0 < m < k \leq \lambda_m$ için,

$$\begin{aligned} \mu(x_k - x_m, s) &= \mu \left(\sum_{f=m+1}^k (x_f - x_{f-1}), s \right) \\ &\geq \min_{m+1 \leq f \leq k} \mu \left(x_f - x_{f-1}, \frac{s}{k-m} \right) \\ &= \min_{m+1 \leq f \leq k} \mu \left(f(x_f - x_{f-1}), \frac{fs}{k-m} \right) \\ &= \min_{m+1 \leq f \leq k} \mu \left(f(x_f - x_{f-1}), \frac{s}{\frac{k}{m} - 1} \right) \\ &\geq \min_{m+1 \leq f \leq k} \mu \left(f(x_f - x_{f-1}), \frac{s}{\lambda - 1} \right) \\ &\geq \inf_{f \in \mathbb{N}} \mu \left(f(x_f - x_{f-1}), \frac{s}{\lambda - 1} \right) \\ &> 1 - \epsilon \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \nu(x_k - x_m, s) &\leq \max_{m+1 \leq f \leq k} \nu \left(f(x_f - x_{f-1}), \frac{s}{\frac{k}{m} - 1} \right) \\ &\leq \sup_{f \in \mathbb{N}} \nu \left(f(x_f - x_{f-1}), \frac{s}{\lambda - 1} \right) < \epsilon \end{aligned}$$

elde edilir. O halde,

$$\begin{aligned} &\left\{ m_0 < m \leq M : \min_{m+1 \leq k \leq \lambda_m} \mu(x_k - x_m, s) \leq 1 - \epsilon \right\}, \\ &\left\{ m_0 < m \leq M : \max_{m+1 \leq k \leq \lambda_m} \nu(x_k - x_m, s) \geq \epsilon \right\} \end{aligned}$$

kümeleri boş olduğu için (x_m) dizisi sezgisel bulanık (μ, ν) normuna göre istatistiksel yavaş salınımlıdır. $\square$

SONUÇ

İlk bölümde sezgisel bulanık normlu uzayların tarihçesi ile giriş yapılmıştır. Daha sonra sezgisel bulanık normlu uzaylara ilişkin temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

İkinci bölümde, sezgisel bulanık normlu uzaylarda toplanabilirlik teorisi ve Tauber teorisine bir giriş olarak, sezgisel bulanık normlu uzaylarda Cesàro toplanabilirlik yöntemini tanımlanmıştır ve Cesàro toplanabilirlik yöntemi için bir Tauber teoremi ispatlanmıştır. Ayrıca, sezgisel bulanık normlu uzaylarda yavaş salınımlı dizi kavramını tanımlanarak, q -sınırlı dizilerle ilişkisini verilmiştir ve yavaş salınım ve q -sınırlılığın sezgisel bulanık normlu uzaylarda Cesàro toplanabilirlik yöntemi için Tauber koşullar olarak hizmet ettiğini gösterilmiştir.

Üçüncü bölümde, sezgisel bulanık normlu uzaylarda logaritmik toplanabilirlik tanıtılmıştır ve logaritmik toplanabilirliğin sezgisel bulanık normlu uzaylarda yakınsama sağladığı bazı Tauber koşulları verilmiştir. Ayrıca, sezgisel bulanık normlu uzaylarda logaritmik toplanabilirliğe göre yavaş salınım kavramını tanımlanarak, q -sınırlılık kavramı ile ilişkisini araştırılmıştır ve q -sınırlılık ve logaritmik toplanabilirliğe göre yavaş salınım aracılığıyla Tauber teoremler verilmiştir. Bu tezde ayrıca sezgisel bulanık normlu uzaylarda Cesàro toplanabilirlik yöntemi ile logaritmik toplanabilirlik yöntemi arasında bir karşılaştırma teoremi de kanıtlanmıştır.

Son bölümde, sezgisel bulanık normlu uzaylardaki diziler için istatistiksel Cesàro toplanabilirlik yöntemi ile istatistiksel yakınsama arasındaki ilişkisi yorumlanmıştır. Bu bölümdeki temel amaç, q -sınırlılık ve istatistiksel yavaş salınım gibi O-tipi olarak adlandırılan koşulların, istatistiksel Cesàro toplanabilir dizilerin sezgisel bulanık norm (μ, ν) açısından istatistiksel yakınsak olmasını gerektirip gerektirmediğinden bahsedilmiştir.

Ek olarak, bazı toplanabilirlik yöntemleri özellikle Cesàro ve türevleri üzerine mevcut Tauber tip teoremleri çeşitli araştırmacılar tarafından oluşturulmuştur. Bu çalışmanın ardından gelecek çalışmalar adına, istatistiksel Cesàro toplanabilirlik yöntemi istatistiksel logaritmik ve istatistiksel ağırlıklı ortalama gibi alternatif istatistiksel yöntemlerle değiştirildiğinde bir diziye uygulanan koşulların nasıl geliştiğine odaklanabilir. Bu alandaki herhangi bir katkının, yapısal tasarımda optimizasyon, sinyal işleme, akıllı şebekelerde enerji yönetimi, endüstriyel otomasyonda arıza teşhisi vb. gibi alanlara da hizmet etmesi beklenmektedir.



Kaynaklar

- Altundağ, S.** and **Kamber, E.**, 2018, Generalized weighted statistical convergence in intuitionistic fuzzy normed linear spaces, *Creat. Math. Inform.*, 27(2), 101–110.
- Efe, H.** and **Alaca, C.**, 2007, Compact and bounded sets in intuitionistic fuzzy metric spaces, *Demonstr. Math.*, 40(2), 449–456.
- Karakuş, S.**, **Demirci, K.**, and **Duman, O.**, 2008, Statistical convergence on intuitionistic fuzzy normed spaces, *Chaos Solitons Fractals*, 35(4), 763–769.
- Lael, F.** and **Nourouzi, K.**, 2008, Some results on the (IF) -normed spaces, *Chaos Solitons Fractals*, 37(3), 931–939.
- Onder, Z.**, **Canak, I.**, and **Karakahya, S.**, 2023, Tauberian theorems for the statistical Cesàro summability method in intuitionistic fuzzy normed spaces, *Soft Computing*, pages 1–18.
- Talo, Ö.** and **Başar, F.**, 2018, Necessary and sufficient Tauberian conditions for the (A^r) method of summability, *Math. J. Okayama Univ.*, 60, 209–219.
- Talo, Ö.** and **Yavuz, E.**, 2021, Cesàro summability of sequences in intuitionistic fuzzy normed spaces and related Tauberian theorems, *Soft Comput.*, 25(3), 2315–2323.
- Yavuz, E.**, 2020, On the Logarithmic Summability of Sequences in Intuitionistic Fuzzy Normed Spaces, *Fundamental Journal of Mathematics and Applications*, 3(101–108).

TEŞEKKÜR

İki yıllık bir çalışmanın ürünü olan bu tezin çalışma sürecinde, değerli bilgi ve birikimleriyle ışık olan, akademik hayatıma bir çok yönden görüş sağlamama yardımcı olan, çalışmamı bilimsel ve etik değerler doğrultusunda yön veren, her zaman ilgisini, inancını ve desteğini üzerimde hissettiğim, bana kattığı birçok şey için minnettar ve kendisine çok şey borçlu olduğum değerli danışmanım Prof.Dr.İbrahim ÇANAK'a, bu süreçte birlikte yol aldığım, çalışmamı titizlikle inceleyen, ihtiyaç duyduğum anda yardımcı olan, kıymetli bilgi birikimiyle tezin gelişimini sağlayan ve örnek aldığım Dr.Zerrin ÖNDER ŞENTÜRK'e, çalışmamı inceleyen, kıymetli görüş ve önerileriyle bu tezin gelişimine katkı sağlayan başta tez komitesi üyeleri Prof.Dr.Adnan MELEKOĞLU ve Prof.Dr.Özgür EGE'ye, akademik hayatıma adım attığım günden beri her daim yanımda hissettiğim, en zor anlarımda motive eden ve meslekte var olmam için desteklerini esirgemeyen sevgili yol arkadaşım Mustafa AKSİN'a, maddi ve manevi olarak hayatımda her daim varlıklarını hissettiğim, benim için her türlü fedakarlığa katlanan, beni büyüterek bugünlere getiren ve bu süreçte bana güvendikleri için canım annem ve babama teşekkürü bir borç bilirim.

05/04/2024

İmzası

Sinem Aksın

ÖZGEÇMİŞ

Özlük Bilgileri

Ad-Soyad: Sinem AKSIN

Öğrenim Durumu

Eylül 2021-: Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Matematik Ana Bilim Dalı Yüksek Lisans Programı (GNO: 3.77/4.00)

Eylül 2016-Haziran 2021: Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü Lisans Programı (GNO: 3.47/4.00)

Eylül 2012-Haziran 2016: Saruhanlı Anadolu Lisesi

Uluslararası Kongrelerde Sunulan Bildiriler

Sinem Karakahya, Zerrin Önder Şentürk, İbrahim Çanak, Tauberian theorems for statistical Cesàro summability method in intuitionistic fuzzy normed spaces, 7th International Conference of Mathematical Sciences (ICMS 2023), 05 - 09 July 2023, Maltepe University, Istanbul, Turkey, (face to face talk).

Yayınlar

Zerrin Önder, Sinem Karakahya, İbrahim Çanak, 2023, Tauberian theorems for the statistical Cesàro summability method in intuitionistic fuzzy normed spaces, Soft Computing, 28, 87-104.