

**ZAMANA GÖRE GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE
İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE KARARLILIK
EŞİTSİZLİKLERİ VE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**

HÜLYA ACAR

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. İLHAME AMİRALİ**

DÜZCE, 2024

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

ZAMANA GÖRE GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE
İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE KARARLILIK
EŞİTSİZLİKLERİ VE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Hülya ACAR tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. İlhami AMİRALİ
Düzce Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. İlhami AMİRALİ
Düzce Üniversitesi

Prof. Dr. Hakkı DURU
Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi

Prof. Dr. Fatma AYAZ
Gazi Üniversitesi

Doç. Dr. Hüseyin BUDAK
Düzce Üniversitesi

Doç. Dr. Nejla ÖZMEN
Düzce Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 18/04/2024

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

18 Nisan 2024

Hülya ACAR

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca yardımlarıyla, yönlendirmeleriyle, destekleriyle, bilgi ve deneyimleriyle yol gösteren kıymetli danışman hocam Prof. Dr. İlhame AMİRALİ'ye, doktora sürecinde birlikte çalışma fırsatını yakaladığım Prof. Dr. Gabil AMİRALİ'ye ve bu süreçte en büyük destekçim olan aileme teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez çalışması, Tübitak 2211/A Genel Yurtiçi Doktora Burs Programıyla desteklenmiştir.

18 Nisan 2024

Hülya ACAR

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ŞEKİL LİSTESİ	ix
ÇİZELGE LİSTESİ.....	x
KISALTMALAR	xi
SİMGELER	xii
ÖZET	xiii
ABSTRACT	xiv
EXTENDED ABSTRACT	xv
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ.....	5
3. KURAMSAL TEMELLER.....	17
3.1. GRONWALL İNTEGRAL EŞİTSİZLİĞİ.....	17
3.2. ARZELÀ-ASCOLİ TEOREMİ.....	17
3.3. DİFERANSİYEL DENKLEMLER	18
3.3.1. Adi Diferansiyel Denklemler	18
3.3.2. Kısmi Diferansiyel Denklemler	18
3.3.3. Başlangıç-Değer Problemi.....	19
3.3.4. Sınır-Değer Problemi.....	19
3.4. İNTEGRAL DENKLEMLER.....	19
3.4.1. Volterra İntegral Denklemi	20
3.4.2. Fredholm İntegral Denklemi	20
3.4.3. Volterra-Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklemleri	21
3.5. ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN VARLIK VE TEKLİK TEOREMLERİ	21
3.5.1. Lipschitz Şartı	21
3.5.2. Başlangıç-Değer Probleminin ve Volterra İntegral Denkleminin Birbirlerine Dönüşümü	22
3.5.3. Başlangıç Değer Probleminin Çözümünün Varlık ve Tekliği için Picard Teoremi	22

3.5.4. Başlangıç-Değer Probleminin Çözümünün Varlığı için Cauchy-Peano Varlık Teoremi	29
3.6. ÇOK KATLI İNTEGRALLERİN TEK KATLI İNTEGRALLERE DÖNÜŞTÜRÜLMESİ	34
3.7. GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER	34
3.8. GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN BAŞLANGIÇ-DEĞER PROBLEMLERİ.....	35
3.9. GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN VARLIK VE TEKLİK TEOREMLERİ	38
3.10. LİNEER GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ANALİTİK ÇÖZÜMLERİ.....	45
3.10.1. Bellman Adım Metodu	46
3.10.2. Laplace Metodu	61
3.11. ŞEBEKE VE ŞEBEKE FONKSİYONU	65
3.12. DÜZGÜN VE DÜZGÜN OLMAYAN ŞEBEKE.....	65
3.13. ŞEBEKE NÖRLERİ.....	66
3.14. DÜZGÜN ŞEBEKEDEN FARK TÜREVLERİ.....	66
3.15. DÜZGÜN OLMAYAN ŞEBEKEDEN FARK TÜREVLERİ	67
3.16. DİKDÖRTGEN METODU	67
3.17. YAMUK (TRAPEZ) METODU	69
3.18. YAKINSAKLIK VE DÜZGÜN YAKINSAKLIK.....	70
3.19. FARK ŞEMASININ KARARLILIĞI.....	71
4. NÖTR TİP GECİKMELİ VOLTERRA İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLER.....	72
4.1. (4.1)-(4.2) PROBLEMİ İÇİN KARARLILIK EŞİTSİZLİKLERİ.....	72
4.1.1. FARK ŞEMASININ KURULMASI.....	76
4.2. HATA DEĞERLENDİRMESİ	79
4.2.1. NÜMERİK SONUÇLAR	82
5. İKİNCİ MERTEBEDEN GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER	88
5.1. İKİNCİ MERTEBEDEN GECİKMELİ VOLTERRA İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLER	88
5.1.1. (5.1)-(5.3) Problemi İçin Kararlılık Eşitsizlikleri	88
5.1.2. Fark Şemasının Kurulması.....	93
5.1.3. Hata Değerlendirmesi.....	97
5.1.4. Nümerik Sonuçlar	101

5.2. ARANAN FONKSİYONUN BİRİNCİ MERTEBEDEN TÜREVİNDE GECİKME TERİMİ BULUNDURAN İKİNCİ MERTEBEDEN GECİKMELİ VOLTERRA İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLER.....	106
5.2.1. (5.48)-(5.50) Problemi İçin Kararlılık Eşitsizlikleri.....	106
5.2.2. Fark Şemasının Kurulması.....	113
5.2.3. Hata Değerlendirmesi.....	117
5.2.4. Nümerik Sonuçlar.....	120
6. YÜKSEK MERTEBEDEN GECİKMELİ VOLTERRA İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLER.....	124
6.1. (6.1)-(6.2) PROBLEMİ İÇİN KARARLILIK EŞİTSİZLİKLERİ.....	124
6.2. NÜMERİK SONUÇLAR	132
7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	136
8. KAYNAKLAR.....	139
9. EKLER.....	144
9.1. MATEMATİKSEL MODELLEMELERDE KULLANILAN MATLAB KODLARI	144
ÖZGEÇMİŞ.....	161

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1. Başlangıç hızları: öndeki araç = 80 m/s, arkadaki araç = 80 m/s. Başlangıç durumunda iki araç arasındaki mesafe: 10 m. Son hızları: öndeki araç = 20.06 m/s, arkadaki araç = 10.62 m/s. Son durumda iki aracın aldığı yol: öndeki araç = 509.50 m, arkadaki araç= 256.53 m. $\tau = 0.5, k = 0.5, c = 0.8$	10
Şekil 2.2. Stok fiyatı değişikliği	12
Şekil 2.3. Araç konumu ve iletişim sinyali.....	13
Şekil 3.1. τ gecikme parametresine bağlı olarak t değerinin değişimi	36
Şekil 3.2. Problemin $[0, 2]$ aralığındaki çözümünün grafiği.....	37
Şekil 3.3. I_0, I_1 ve I_2 aralıklarındaki kesin çözümlerin karşılaştırılması	49
Şekil 3.4. I_0, I_1 ve I_2 aralıklarındaki kesin çözümlerin karşılaştırılması	53
Şekil 3.5. $\varepsilon_0, \varepsilon_1$ ve ε_2 aralıklarındaki kesin çözümlerin karşılaştırılması	56
Şekil 3.6. $\varepsilon_0, \varepsilon_1$ ve ε_2 aralıklarındaki kesin çözümlerin karşılaştırılması	58
Şekil 3.7. I_0, I_1 ve I_2 aralıklarındaki kesin çözümlerin karşılaştırılması	61
Şekil 3.8. $N = 5$ ve $N = 10$ için dikdörtgen metodu	69
Şekil 3.9. $N = 5$ ve $N = 10$ için yamuk (trapez) metodu.....	70
Şekil 4.1. I_1 aralığında $N = 50$ ve $N = 100$ değerleri için problemin kesin ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması	84
Şekil 4.2. I_2 aralığında $N = 50$ ve $N = 100$ değerleri için problemin kesin ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması	85
Şekil 4.3. I_1 aralığında $N = 50$ ve $N = 100$ değerleri için problemin kesin ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması	86
Şekil 4.4. I_2 aralığında $N = 50$ ve $N = 100$ değerleri için problemin kesin ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması	87
Şekil 5.1. I_1 aralığında $N = 32, 64, 128$ değerleri için problemin kesin ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması	103
Şekil 5.2. I_2 aralığında $N = 32, 64, 128$ değerleri için problemin kesin ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması	104

Şekil 5.3.	I_1 aralığında $N = 32, 64, 128$ değerleri için problemin kesin ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması	105
Şekil 5.4.	I_1 aralığında $N = 32, 64, 128$ değerleri için problemin kesin ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması	122
Şekil 5.5.	I_1 aralığında $N = 32, 64, 128$ değerleri için problemin kesin ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması	123
Şekil 6.1.	Örnek 6.2’de I_1 aralığında farklı ε değerleri için problemin kesin çözümlerinin karşılaştırılması	133
Şekil 6.2.	Örnek 6.3’in I_1 aralığında farklı ε değerleri için problemin kesin çözümlerinin karşılaştırılması	135



ÇİZELGE LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Çizelge 4.1. Test probleminin I_1 aralığındaki sayısal sonuçları.....	83
Çizelge 4.2. Test probleminin I_2 aralığındaki sayısal sonuçları.....	85
Çizelge 5.1. Test probleminin I_1 aralığındaki sayısal sonuçları.....	102
Çizelge 5.2. Test probleminin I_2 aralığındaki sayısal sonuçları.....	103
Çizelge 5.3. Test probleminin I_1 aralığındaki sayısal sonuçları.....	105
Çizelge 5.4. Test probleminin I_1 aralığındaki sayısal sonuçları.....	121
Çizelge 5.5. Test probleminin I_1 aralığındaki sayısal sonuçları.....	123
Çizelge 6.1. Test probleminin I_1 aralığındaki sayısal sonuçları.....	133
Çizelge 6.2. Test probleminin I_1 aralığındaki sayısal sonuçları.....	135

KISALTMALAR

DD	Diferansiyel Denklem
ADD	Adi Diferansiyel Denklem
KDD	Kısmi Diferansiyel Denklem
IDD	İntegro-Diferansiyel Denklem
BDP	Başlangıç-Değer Problemi
SDP	Sınır-Değer Problemi
FİDD	Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklem
VİDD	Volterra İntegro-Diferansiyel Denklem
GDD	Gecikmeli Diferansiyel Denklem
GVİDD	Gecikmeli Volterra İntegro-Diferansiyel Denklem

SİMGELER

τ	Gecikme Parametresi
$\tau(t)$	Gecikme Fonksiyonu
G	Bölge
I	Aralık
$C([0, T])$	$[0, T]$ Aralığında Sürekli Fonksiyon
$C^p([0, T])$	$[0, T]$ Aralığında p . Mertebeden Sürekli Türevlere Sahip Fonksiyonlar Kümesi
$C^p([0, T] \times [0, T])$	$[0, T]$ ve $[0, T]$ 'nin Kartezyen Çarpımı Üzerinde Tanımlanan p . Mertebeden Sürekli Türevlenebilir Fonksiyonlar Kümesi
ω_N	Şebeke
e_i^N	Şebekede Kesin Hata
e^N	Şebekede Maksimum Hata
N	Şebeke Elemanlarının Sayısı
u	İntegro-Diferansiyel Denklemin Kesin Çözümü
u_i	İntegro-Diferansiyel Denklemin t_i Şebeke Noktasındaki Kesin Çözümünün Değeri
y	Sonlu Fark Probleminin Çözümü
y_i	$y(t)$ Fonksiyonunun t_i Şebeke Noktasındaki Yaklaşık Çözümünün Değeri
z_i	$y(t)$ Fonksiyonunun t_i Şebeke Noktasındaki Hata Fonksiyonunun Değeri
$\mathcal{F}_i$	Artmayan Fonksiyon
$O(h^q)$	Yakınsaklık Hızı

ÖZET

ZAMANA GÖRE GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE KARARLILIK EŞİTSİZLİKLERİ VE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Hülya ACAR

Düzce Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Danışman: Prof. Dr. İlhami AMİRALİ

Nisan 2024, 161 sayfa

Bu tez çalışmasında, farklı mertebelere sahip zamana bağlı gecikmeli Volterra integro-diferansiyel denklemlerinin özellikleri, kararlılık eşitsizlikleri ve nümerik çözümleri ele alınmıştır. İlk olarak, gecikmeli nötr tip Volterra integro-diferansiyel denklemleri için başlangıç veri fonksiyonuna göre kararlılık eşitsizlikleri oluşturulmuştur. Ardından ele alınan probleme sayısal integrasyon formüllerinden dikdörtgen metodu uygulanarak düzgün şebeke üzerinde sonlu fark şeması kurulmuştur. Yapılan bu analizler, ikinci mertebeden gecikmeli Volterra integro-diferansiyel denklemleri ile aranan fonksiyonun birinci mertebeden türevinde gecikme terimi bulunan ikinci mertebeden gecikmeli Volterra integro-diferansiyel denklemlere de uygulanmıştır. Ele alınan her bir problemin yaklaşık çözümünün, düzgün şebeke üzerinde maksimum normda düzgün yakınsak olduğu gösterilmiş ve yakınsama hızları belirlenmiştir. Ayrıca iki probleme de yamuk metodu uygulanarak fark şemaları oluşturulmuştur. Her bir problemin yaklaşık çözümünün kesin çözüme ayırık maksimum normda düzgün yakınsak olduğu gösterilmiş ve yakınsama hızları belirlenmiştir. Son olarak, yüksek mertebeden gecikmeli lineer Volterra integro-diferansiyel denklemlerinin kararlılık eşitsizlikleri elde edilmiştir. Burada yöntemin sadece düşük mertebeden türev içeren fonksiyonların kararlılık eşitsizliklerinin oluşturulmasında değil, aynı zamanda herhangi yüksek mertebeden denklemlerin kararlılık eşitsizliklerinin oluşturulmasında da kullanılabileceği gösterilmiştir. Elde edilen teorik sonuçların nümerik sonuçlar ile uyumlu olduğu gösterilerek, teorik sonuçlar sayısal örnekler ve bu örneklerin MatLab uygulaması yardımıyla elde edilen tablo ve grafikler ile desteklenmiştir.

Anahtar sözcükler: Gecikmeli Volterra İntegro-Diferansiyel Denklem, Düzgün Yakınsaklık, Sonlu Fark Metodu, Kararlılık Eşitsizlikleri, Sonlu Fark Şeması, Hata Tahmini.

ABSTRACT

STABILITY INEQUALITIES AND NUMERICAL SOLUTIONS FOR TIME DELAY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Hülya ACAR

Düzce University

Graduate School, Department of Mathematics

Doctoral Thesis

Supervisor: Prof. Dr. İlhami AMIRALI

April 2024, 161 pages

This thesis addresses the characteristics, stability inequalities and numerical solutions of time-delay Volterra integro-differential equations at various orders. Initially, stability inequalities have been formulated based on the initial data function for neutral Volterra integro-differential equations. Furthermore, the rectangle method from numerical integration formulas is applied to the problem to construct a finite difference scheme on a uniform mesh. Linear second-order delay Volterra integro-differential equations and linear second-order delay Volterra integro-differential equations with a delay component in the first-order derivative of the desired function have also been subjected to these analyses. It has been demonstrated that the approximate solution of each problem converges uniformly on a uniform mesh to the exact solution and convergence rates have been determined. Furthermore, for two different types of problems, finite difference schemes have been separately established using the trapezoidal method. It is shown that the approximate solution of each problem converges uniformly in the discrete maximum norm to the exact solution and convergence rates are determined. Finally, stability inequalities for high-order delay Volterra integro-differential equations are obtained. It is demonstrated that the method can be used not only to establish stability inequalities for functions containing only low-order derivatives but also for any high-order equations. Theoretical results have been supported by demonstrating their compatibility with numerical results and theoretical findings are supplemented with numerical examples, tables as well as graphs obtained through the use of MatLab.

Keywords: Volterra Delay Integro-Differential Equation, Uniform Convergence, Finite Difference Method, Stability Bounds, Finite Difference Scheme, Error Estimate.

EXTENDED ABSTRACT

STABILITY INEQUALITIES AND NUMERICAL SOLUTIONS FOR TIME DELAY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Hülya ACAR
Düzce University
Graduate School, Department of Mathematics
Doctoral Thesis
Supervisor: Prof. Dr. İlhami AMIRALI
April 2024, 161 pages

1. INTRODUCTION

The field of mathematic plays a foundational role in advancing our understanding of the natural world, continually evolving as researchers delve into intricate details, unveiling new concepts, theories and applications. This thesis aims to contribute to these dynamic realms by exploring stability inequalities and numerical solutions in delay differential equations (DDEs) and integro-differential equations (IDEs), introducing a fresh perspective to the mathematical landscape.

The motivation for this research stems from identifying gaps in the existing literature. While significant progress has been made in various branches of mathematics, there is a necessity to investigate and advance research in the domain of DDEs and IDEs. In response to this need, this thesis delves deeply into stability inequalities and numerical solutions in DDEs and IDEs, expanding our knowledge base. The goal is to enhance our understanding and offer insights into stability inequalities as well as numerical solutions in these equations.

The objectives of this research are twofold. Firstly, it aims to analyze and explore the existing knowledge in the field of DDEs and IDEs. This involves a comprehensive literature review encompassing pioneering works, recent developments and relevant theories. Critically evaluating existing research will identify gaps, limitations and areas with potential for further investigation.

Secondly, the research aims to propose new methodologies, algorithms or models to enhance our understanding of stability inequalities and numerical solutions for the addressed equations. Various methods will be employed to obtain finite difference schemes ensuring stability inequalities for the examined problems. Using MatLab implementation, graphs and tables will be generated to demonstrate the comprehensibility and applicability of the theoretical problems. These proposed methodologies may advance the field, provide practical solutions or shed light on previously unexplored aspects of DDEs and IDEs.

The significance of this research lies in its potential contributions to both the theoretical and applied aspects of mathematics. Theoretical contributions may provide new perspectives, deepen our understanding and potentially lead to the development of new mathematical theories. On the other hand, practical applications can offer innovative solutions to real-world problems in physics, engineering, health, economics, ecology, population dynamics and control systems.

In summary, this thesis addresses various-order Volterra delay integro-differential equations (VDIDEs) and their characteristics.

2. SOURCE SUMMARIES

Differential equations (DEs), dating back to ancient times, have emerged as a result of human curiosity and exploration in mathematical as well as scientific studies. The foundations of DE can be traced back to the ancient Greek period. Although some simple DEs were used in Euclidean geometry and early studies of mechanics, the development and systematic use of modern DEs began to take shape in the 17th century. The differential and integral calculus developed by Isaac Newton and Gottfried Wilhelm Leibniz is considered a significant step in solving DEs. Since then, DEs have been widely used in physics, engineering, economics, biology and other scientific fields.

IDEs have evolved as a more general form than DEs expressed with derivatives, as DEs were primarily used to describe the instantaneous change of a system or the speed of an event by expressing it with the derivatives of variables. IDEs that incorporate dependencies on past values of variables can also be used to express the past-dependent effects of events, since they contain both integral and derivative terms. However, finding analytical solutions for IDEs is often a challenging process and typically requires special techniques for specific equations. Numerical methods, Laplace transformation, iteration methods and transformation to eigenvalue problems are just a few of the well-known global methods used by researchers [20]-[42].

Volterra and Fredholm IDEs represent a special class within the theory of IDEs, which is an extensive form of IDEs. These equations were independently developed by Italian mathematician Vito Volterra and Swedish mathematician Ivar Fredholm. Today, Volterra and Fredholm IDEs play a crucial role in various fields of mathematical analysis and applied mathematics. These equations are used for mathematical modeling of problems in physics, engineering, economics, biology and other areas. The theories of Volterra and Fredholm form the foundation for the study of analytical and numerical solutions of IDEs, making this area a significant research field [1], [24], [35],[33], [37], [41], [44], [47], [56].

Delay differential equations (DDEs), widely used from the 19th to the early 20th century, emerged as mathematicians sought new methods to better understand and model the delay effects of systems. DDEs, a more general and comprehensive form of IDEs, differ fundamentally in that they model situations where the dynamics of a system are affected not at the current instant but after a specific time delay. The distinction between these two types of DE lies in the fact that the effects of events arise based on the values of the previous time rather than instantly. DDEs often find application in modeling real-world systems in more realistic and detailed situations [13], [14],[15], [18], [19].

Within the theory of IDEs, the area is divided into two main subcategories: Volterra and Fredholm IDEs. In the broader context of IDEs, we can examine Volterra and Fredholm delay integro-differential equations (VDIDE and FDIDE, respectively). VDIDE and FDIDE, with their solutions involving delay terms and jump points in various derivatives, pose a challenge in solving a kind of IDE. Over the years, various approaches have been proposed to solve VDIDEs, such as open and closed continuous Runge-Kutta methods. These methods have assisted in obtaining general linear methods to solve Volterra DDEs, as described by [32]. Researchers have also achieved the convergence of iterative schemes required at each step and the convergence of numerical solutions for Volterra systems. [4] demonstrated a discrete second-degree convergence in the maximum norm using a quadrature formula, a numerical method for solving delay and neutral-type VDIDEs. [22] applied mixed interpolation collection methods for first and second-order VDIDEs. Additionally, [17] provided a brief overview of approximate methods for VDIDEs. [46] introduced more general and effective methods for the numerical solutions of high-order Volterra/Fredholm IDEs.

Recently, there has been significant focus on developing numerical techniques for solving VDIDEs. For instance, [53] proposed a Taylor method that approximates the solution of high-order linear Volterra/Fredholm IDEs under mixed conditions using Taylor

polynomials centered around any point. Additionally, [9] presented a comprehensive review of various approximate methods for solving VDIDEs.

The stability of VDIDEs remains a subject of ongoing debate among a small community of researchers. Recent progress in fundamental knowledge suggests that this area will continue to be a rich field for exploration. Noteworthy studies include [39], who examined the stability of VDIDEs using the Runge-Kutta method for constant delay. [5] investigated high-order linear VDIDEs, determining stability bounds and suggesting methods for establishing exact solutions and creating stability inequalities for each derivative order. [2] established stability inequalities for nonlinear homogeneous VDIDEs. Although there are several approaches and techniques for solving VDIDEs, there are still many unexplored problems in terms of stability and accuracy. Ongoing research in this field suggests that new methods and insights will emerge in the future.

Singular perturbation in generalized DDs represents a broad concept within the realm of GDDs. These types of DDs encapsulate scenarios where one or more parameters characterizing the system become either very small or very large in a specific region. Singular perturbation theory is employed to mathematically model and solve situations characterized by such conditions. The analysis in this field serves as a crucial tool for understanding the interactions of parameters and changes in system behavior in solving GDDs. This concept continues to be utilized in comprehending complex dynamic systems, particularly in cases where inter-system interactions and time delays are significant, across various physical, biological and engineering applications.

Studies in this area include the work of [10], which focuses on the finite-difference solution of a singular perturbation coefficient-dependent initial value problem based on delay linear first-order Volterra integro-differential equations (VIDEs). Additionally, the study employs integral identities to analyze the convergence of the numerical method, exhibiting regular convergence properties depending on the perturbation parameter. [29] propose an approach for solving singular perturbed Fredholm integro-differential equations (FIDEs) using a reduced second kind Fredholm equation. The problem is dissected using a finite-difference approach that produces uniformly convergent numerical schemes and integrated approaches are formed using Shishkin-type meshes. [27] address the numerical solution of a nonlinear singular perturbed first-order FIDE. They develop and analyze an approach with uniform convergence in the ε -parameter. The numerical solution is disentangled using interpolation power formulas for the differential part and the composite rectangle rule for the integral part, while error estimates for the approximate solution are provided.

For an in-depth exploration of the analysis methods for singular perturbation in GDDs, interested researchers may refer to the studies by [28], [40],[? ?] and other relevant sources mentioned in these works.

3. THEORETICAL FOUNDATIONS

In this section, definitions of general topics that will be used in other sections of the thesis, such as grid, grid function, finite differences and Gronwall integral inequality are provided. Additionally, issues related to the analytical solution of DDEs are addressed along with the definition of DDEs. The theorems that establish the existence and uniqueness of solutions for DDEs under specific conditions are explained. Finally, analytical solution methods for linear DDEs are discussed. In particular, the Bellman step method and its application methods, which are used to solve different types of DDEs are discussed. Furthermore, the advantages and challenges of this method are illustrated in the graphs drawn in the presented numerical examples.

4. MATERIALS AND METHODS

This section is examined under four main headings.

Neutral type VDIDE given below are discussed in the first subsection of the fourth chapter:

$$u'(t) + a(t)u'(t-r) + b(t)u(t) + \int_{t-r}^t K(t,s)u(s)ds = f(t), \quad t \in I, \quad (0.1)$$

$$u(t) = \varphi(t), \quad -r \leq t \leq 0, \quad (0.2)$$

where $I = (0, T] = \cup_{p=1}^m I_p$, $I_p = \{t : r_{p-1} < t \leq r_p\}$, $1 \leq p \leq m$ and $r_s = sr$ ($0 \leq s \leq m$); $\bar{I} = [0, T]$, $I_0 = [-r, 0]$. $b(t) \geq 0$, $f(t)$, $a(t)$ ($t \in \bar{I}$), $\varphi(t)$ ($t \in I_0$) and $K(t,s)$ ($(t,s) \in \bar{I} \times \bar{I}$) are given functions, r is a constant delay. Moreover, we will assume that $a, b, f \in C(\bar{I})$, $\varphi \in C^2(I_0)$ and $\frac{\partial^2 K}{\partial s^2} \in C(\bar{I}^2)$ ($s = 0, 1, 2$).

As the second heading, second-order VDIDE given in the following form will be discussed:

$$u''(t) + a(t)u'(t) + b(t)u(t-r) + \int_{t-r}^t K(t,s)u(s)ds = f(t), \quad t \in I, \quad (0.3)$$

$$u(t) = \varphi(t), \quad (0.4)$$

$$u'(0) = B, \quad -r \leq t \leq 0, \quad (0.5)$$

where $I = (0, T] = \cup_{p=1}^m I_p$, $I_p = \{t : r_{p-1} < t \leq r_p\}$, $1 \leq p \leq m$ and $r_s = sr$ ($0 \leq s \leq m$); $\bar{I} = [0, T]$, $I_0 = [-r, 0]$. $a(t) \geq 0$, $f(t)$, $a(t)$ ($t \in \bar{I}$), $\varphi(t)$ ($t \in I_0$) and $K(t, s)$ ($(t, s) \in \bar{I} \times \bar{I}$) are given functions, r is a constant delay. Moreover, we will assume that $a, b, f \in C(\bar{I})$, $\varphi \in C^2(I_0)$ and $\frac{\partial^2 K}{\partial s^2} \in C(\bar{I}^2)$ ($s = 0, 1, 2$), $t \in I_1 = [0, r]$.

As the third subheading of the fourth section, the second-order VDIDE, which contains a delay term in the first derivative of the unknown function defined below, will be discussed:

$$u''(t) + a(t)u'(t) + b(t)u'(t-r) + \int_{t-r}^t K(t, s)u(s)ds = f(t), \quad t \in I, \quad (0.6)$$

subject to initial conditions

$$u(t) = \varphi(t), \quad -r \leq t \leq 0, \quad (0.7)$$

$$u'(0) = B. \quad (0.8)$$

The intervals I and I_p are defined as $I = (0, T] = \cup_{p=1}^m I_p$ and $I_p = \{t : r_{p-1} < t \leq r_p\}$, where $1 \leq p \leq m$ and $r_s = sr$ ($0 \leq s \leq m$). The set of real numbers $\bar{I}$ is defined as $\bar{I} = [0, T]$ and $I_0 = [-r, 0]$. We assume that $a, b, f \in C(\bar{I})$, $\varphi \in C^2(I_0)$ and $\frac{\partial^2 K}{\partial s^2} \in C^2(\bar{I}^2)$ ($s = 0, 1, 2$).

Under the three subsections of the fourth chapter mentioned above, difference schemes are created for various VDIDEs investigated under the heading of each problem and their stability, convergence and numerical properties have been analyzed separately.

In the fourth subheading, which is the final subheading of the fourth section, high-order VDIDE are examined:

$$u^{(n)}(t) + a(t)u^{(n-1)}(t) + b(t)u(t-r) + \int_{t-r}^t K(t, s)u(s)ds = f(t) \quad (0.9)$$

on $(0, T]$ with the interval conditions:

$$u(t) = \varphi(t), \quad u^{(i)}(0) = B_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad \text{and} \quad t \in I_0, \quad (0.10)$$

where $I = (0, T] = \cup_{p=1}^m I_p$, $I_p = \{t : r_{p-1} < t \leq r_p\}$, $1 \leq p \leq m$ and $r_s = sr$ ($0 \leq s \leq m$); $\bar{I} = [0, T]$, $I_0 = [-r, 0]$, $a(t) \geq 0$, $f(t)$, $a(t)$ ($t \in \bar{I}$), $\varphi(t)$ ($t \in I_0$) and $K(t, s)$ ($(t, s) \in \bar{I} \times \bar{I}$) are provided sufficiently smooth functions that satisfy specific regularity conditions to be described, r is a constant delay. Moreover, we will assume that $a, b, f \in C(\bar{I})$, $\varphi \in C^2(I_0)$ and $\frac{\partial^2 K}{\partial s^2} \in C(\bar{I}^2)$ ($s = 0, 1, 2$).

The method obtained in this chapter is not only used in writing stability inequalities of functions with low derivative orders, but also in writing stability inequalities of any equations with high orders. This reveals how effective the method applied in this chapter is compared to the methods found so far.

5. RESULTS AND RECOMMENDATIONS

In this section, a comprehensive review of the problems addressed in previous sections will be conducted. The main results obtained in this study will be summarized. Additionally, detailed recommendations for future studies that could contribute to the literature will be provided. Moreover, some discussions regarding the uniqueness and applicability of the ideas presented in this section will be addressed. Ultimately, the aim of this section is to establish a foundation for readers to delve deeper into and enhance studies in this field.

In this thesis, the focus has been on the characteristics of generalized VDIDEs, stability inequalities, finite-difference schemes on a uniform mesh and the design as well as analysis of error evaluations between obtained solutions.

Four different problems related to VDIDEs were considered in this study.

Firstly, the initial value problem for a neutral type VDIDEs, given by (0.1)-(0.2), was addressed. Stability bounds were established for the (0.1)-(0.2) problem. By applying the rectangle rule to the integral part of the problem, a finite-difference scheme on a uniform mesh was obtained. It was discovered that the (0.1)-(0.2) problem could be converted into a finite-difference problem by comparing the approximate solution obtained through an iterative method with the solution of the (0.1) problem. It was observed that the solution of the finite-difference problem converges uniformly on a uniform mesh to the solution of the (0.1)-(0.2) problem with a rate of $O(h^2)$. Sample problems were presented to demonstrate the applicability and effectiveness of the proposed methods. The results were supported by graphics and tables plotted with the help of a MatLab application for better observation of

the test problems. Consequently, the applied method was observed to be consistent with theoretical considerations.

Secondly, stability bounds for the second-order linear VDIDE given by (0.3)-(0.5) were established. A trapezoidal rule was applied to the integral part of (0.3) to formulate a finite-difference scheme on a uniform mesh. The stability and convergence of this finite-difference scheme were examined. It was shown that the approximate solution converges uniformly to the exact solution with a maximum norm rate of $O(h^2)$. The consistency of the numerical results with the theoretical results was supported by graphical and tabular evidence.

Thirdly, in addition to the problem discussed in (0.3)-(0.5), a problem of the form (0.6)-(0.8) was considered, incorporating a delay term in the first-order derivative of the unknown function. Stability bounds for (0.6)-(0.8) were established. Trapezoidal rule was again applied to the integral term to formulate a finite-difference scheme on a uniform mesh. The convergence of this scheme was analyzed. It was observed that the approximate solution of (0.6)-(0.7) converges uniformly to the exact solution with a maximum norm rate of $O(h^2)$. The effectiveness of the proposed method was demonstrated through sample problems supporting the theory.

Fourthly, higher-order VDIDEs of the form (0.9)-(0.10) were addressed. Critical points were discussed in obtaining the exact solution of (0.9)-(0.10). Stability bounds were obtained for the desired function and its different derivative orders. The method not only provided stability bounds for the desired function but also allowed the determination of stability equalities for any order of the derivative of this function. In terms of obtaining stability equalities for higher-order derivative orders, the method proved to be more effective compared to previously applied methods. The applicability and effectiveness of the method were supported by example problems. The results were further observed through graphics and tables generated using MatLab for a better understanding of the test problems. From these results, it was observed that the applied method is consistent with theoretical work.

In conclusion and recommendation, the finite-difference method applied in this study for different-order VDIDEs is a highly effective and economical solution approach in establishing stability bounds. The visual graphics and tables used for solving numerical examples for theoretical support add a new perspective to the thesis. Moreover, they present significant results. In the literature review, it was observed that such problems have not been widely studied yet. This thesis work is qualitative and contributes to researchers.

By utilizing the results of this study, future studies focusing on first and second-order Volterra-Fredholm DDEs, non-linear VDIDEs and those with more complex initial conditions can be conducted for more comprehensive analyses. Additionally, researchers can compare different numerical methods for solving VDIDEs, in addition to the finite-difference methods used in this thesis.

In conclusion, this thesis work marks a significant step in the numerical solution of VDIDEs. Future studies in line with the recommendations can expand the use of VDIDEs in a wider range of problems and improve the effectiveness of numerical solution methods. The results of this study are an important source to contribute to the analysis and practical applications of such equations.



1. GİRİŞ

Matematik alanı, doğal dünyanın anlaşılmasını geliştirmede temel bir rol oynayan sürekli gelişen bir disiplindir. Araştırmacılar matematikteki karmaşık detaylara daha derinlemesine girerken yeni kavramlar, teoriler ve uygulamalar ortaya çıkarmaya devam eder. Sergilenen bu tutum matematik araştırmalarının manzarasını şekillendirir. Matematik alanına yeni bir perspektif sunan bu doktora tez çalışması, gecikmeli diferansiyel denklemler (GDD) ile integro-diferansiyel denklemlerde (İDD) kararlılık eşitsizliklerini ve sayısal çözümlerini araştırarak bu dinamik alanlara katkıda bulunmayı amaçlamaktadır.

Bu araştırmanın motivasyonu, mevcut literatürdeki boşluğun belirlenmesinden kaynaklanmaktadır. Matematiğin çeşitli dallarında önemli ilerlemeler kaydedilirken, GDD'ler ile İDD'ler alanında ilerlemelerin araştırılması ve geliştirilmesi de gereklidir. Bu ihtiyaca yanıt olarak bu tez, GDD ve İDD'lerde kararlılık eşitsizliklerini ve sayısal çözümlerini derinlemesine araştırarak bilgilerimizi genişletmeyi sağlar. Ayrıca ele alınan problemlerin kararlılık eşitsizlikleri ve nümerik çözümleri hakkında bilgilerimizi genişletmek ve görüşler sunmak amaçlanmaktadır.

Bu araştırmanın hedefleri iki yönlüdür: İlk olarak GDD ve İDD'ler alanındaki mevcut bilgiyi analiz etmeyi ve keşfetmeyi amaçlar. Bu çalışma; daha önce yapılan öncü çalışmaların, son gelişmelerin ve ilgili teorilerin kapsamlı bir literatür taramasını içerecektir. Var olan araştırmaları eleştirel bir şekilde değerlendirerek boşlukları, sınırlamaları ve ileri araştırma potansiyeli olan alanları belirleyecektir.

İkinci olarak ele alınan denklemlerin kararlılık eşitsizliklerini ve sayısal çözümlerini anlamamızı geliştirmek için yeni metodolojiler, algoritmalar veya modeller önermeyi amaçlar. İncelenen problemlerin kararlılık eşitsizliklerini sağlamak için çeşitli yöntemler kullanarak fark şemaları elde edilir. MatLab uygulaması kullanılarak elde edilen grafikler ve tablolar aracılığıyla incelenen teorik problemlerin daha anlaşılır ve uygulanabilir

olduğunu göstermeyi amaçlar. Bu önerilen metodolojiler alanı ilerletebilir, pratik çözümler sunabilir veya gecikmeli fark ve İDD'lerin daha önce keşfedilmemiş yönlerine ışık tutabilir.

Bu araştırmanın önemi, matematiğin hem teorik hem de uygulamalı yönlerine katkı sağlama potansiyelinde yatmaktadır. Teorik katkılar yeni görüşler sağlayabilir, anlayışımızı derinleştirebilir ve potansiyel olarak yeni matematik teorilerinin geliştirilmesine yol açabilir. Diğer yandan pratik uygulamalar fiziğe, mühendisliğe, sağlığa, ekonomiye, ekolojiye, popülasyona ve kontrol sistemlerine yönelik gerçek dünya problemlerine yenilikçi çözümler sunarak uzun vadeli sonuçlar sağlayabilir.

Bu tez çalışmasında özet olarak çeşitli mertebeden gecikmeli Volterra integro-diferansiyel denklemler (GVİDD) ve özellikleri ele alınmıştır.

Çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünden sonra gelen ikinci bölümde teze ilgili literatür özetinin verildiği Kaynak Özetleri bölümü yer almaktadır.

Üçüncü bölümde tez çalışmasında faydalanılan temel tanım ve teoremlerin verildiği genel Kuramsal Temeller başlığı altında bilgiler verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise tezde ele alınan problemler incelenmektedir.

Dördüncü bölümün ilk alt başlığında aşağıda verilen nötr tip GVİDD ele alınmıştır:

$$u'(t) + a(t)u'(t-r) + b(t)u(t) + \int_{t-r}^t K(t,s)u(s)ds = f(t), \quad t \in I,$$

$$u(t) = \varphi(t), \quad -r \leq t \leq 0,$$

$I = (0, T] = \cup_{p=1}^m I_p$, $I_p = \{t : r_{p-1} < t \leq r_p\}$, $1 \leq p \leq m$ ve $r_s = sr$ ($0 \leq s \leq m$), $\bar{I} = [0, T]$, $I_0 = [-r, 0]$. $b(t) \geq 0$, $f(t)$, $a(t)$ ($t \in \bar{I}$), $\varphi(t)$ ($t \in I_0$) ve $K(t,s)$ ($(t,s) \in \bar{I} \times \bar{I}$) verilen fonksiyonlardır. r sabit bir gecikme terimidir. Ayrıca $a, b, f \in C(\bar{I})$, $\varphi \in C^2(I_0)$ ve $\frac{\partial^2 K}{\partial s^2} \in C(\bar{I}^2)$ ($s = 0, 1, 2$).

Dördüncü bölümün ikinci alt başlığı olarak aşağıda tanımlanan ikinci mertebeden GVİDD ele alınmıştır:

$$\begin{aligned} u''(t) + a(t)u'(t) + b(t)u(t-r) + \int_{t-r}^t K(t,s)u(s)ds &= f(t), \quad t \in I, \\ u(t) &= \varphi(t), \\ u'(0) &= B, \quad -r \leq t \leq 0, \end{aligned}$$

$I = (0, T] = \cup_{p=1}^m I_p$, $I_p = \{t : r_{p-1} < t \leq r_p\}$, $1 \leq p \leq m$ ve $r_s = sr$ ($0 \leq s \leq m$), $\bar{I} = [0, T]$, $I_0 = [-r, 0]$. $a(t) \geq 0$, $f(t)$, $a(t)$ ($t \in \bar{I}$), $\varphi(t)$ ($t \in I_0$) ve $K(t,s)$ ($(t,s) \in \bar{I} \times \bar{I}$) verilen fonksiyonlardır. r sabit bir gecikme terimidir. Ayrıca $a, b, f \in C(\bar{I})$, $\varphi \in C^2(I_0)$ ve $\frac{\partial^2 K}{\partial s^2} \in C(\bar{I}^2)$ ($s = 0, 1, 2$).

Dördüncü bölümün üçüncü alt başlığında aşağıda tanımlanan aranan fonksiyonun birinci mertebeden türevinde gecikme terimi bulunduran ikinci mertebeden GVİDD ele alınmıştır:

$$\begin{aligned} u''(t) + a(t)u'(t) + b(t)u'(t-r) + \int_{t-r}^t K(t,s)u(s)ds &= f(t), \quad t \in I, \\ u(t) &= \varphi(t), \quad -r \leq t \leq 0, \\ u'(0) &= B, \end{aligned}$$

$I = (0, T] = \cup_{p=1}^m I_p$, $I_p = \{t : r_{p-1} < t \leq r_p\}$, $1 \leq p \leq m$ ve $r_s = sr$ ($0 \leq s \leq m$), $\bar{I} = [0, T]$, $I_0 = [-r, 0]$. $a(t) \geq 0$, $f(t)$, $a(t)$ ($t \in \bar{I}$), $\varphi(t)$ ($t \in I_0$) ve $K(t,s)$ ($(t,s) \in \bar{I} \times \bar{I}$) verilen fonksiyonlardır. r sabit bir gecikme terimidir. Ayrıca $a, b, f \in C(\bar{I})$, $\varphi \in C^2(I_0)$ ve $\frac{\partial^2 K}{\partial s^2} \in C^2(\bar{I}^2)$ ($s = 0, 1, 2$).

Dördüncü bölümün üç alt başlığı altında araştırılan çeşitli GVİDD için fark şemaları oluşturulmuş ve kararlılık, yakınsaklık, nümerik çözümleri incelenmiştir.

Dördüncü bölümün son alt başlığında ise yüksek mertebeden GVİDD incelenmiştir:

$$u^{(n)}(t) + a(t)u^{(n-1)}(t) + b(t)u(t-r) + \int_{t-r}^t K(t,s)u(s)ds = f(t), \quad t \in I,$$

$$u(t) = \varphi(t), \quad u^{(i)}(0) = B_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad \text{ve} \quad t \in I_0,$$

$I = (0, T] = \cup_{p=1}^m I_p$, $I_p = \{t : r_{p-1} < t \leq r_p\}$, $1 \leq p \leq m$ ve $r_s = sr$ ($0 \leq s \leq m$), $\bar{I} = [0, T]$, $I_0 = [-r, 0]$, $a(t) \geq 0$, $f(t)$, $a(t)$ ($t \in \bar{I}$), $\varphi(t)$ ($t \in I_0$) ve $K(t, s)$ ($(t, s) \in \bar{I} \times \bar{I}$) belirli düzgünlük şartlarını sağlayan yeterince düzgün fonksiyonlar olup r sabit bir gecikmedir. Ayrıca $a, b, f \in C(\bar{I})$, $\varphi \in C^2(I_0)$ ve $\frac{\partial^2 K}{\partial s^2} \in C(\bar{I}^2)$ ($s = 0, 1, 2$).

İncelenen bu son bölümdeki yöntem sadece düşük mertebeden türev içeren fonksiyonların kararlılık eşitsizliklerinin oluşturulmasında değil, aynı zamanda herhangi bir yüksek mertebeden denklemlerin kararlılık eşitsizliklerinin oluşturulmasında da kullanıldığını gösterir. Bu da bu bölümde uygulanan yöntemin bu zamana kadar bulunan yöntemlere göre ne kadar etkin olduğunu gözler önüne sermektedir.

Son bölüm olan beşinci bölümde tez çalışmasında ele alınan problemler bir arada değerlendirilmiş, sonraki çalışmalar için görüş ve öneriler sunulmuştur.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Tarihi oldukça eski olan diferansiyel denklemler (DD) matematiksel ve bilimsel çalışmalarda insanoğlunun merakı ve araştırması sonucunda ortaya çıkmıştır. DD'lerin temelleri Antik Yunan dönemine kadar uzanır. Öklid geometrisinde ve mekaniğin erken çalışmalarında, bazı basit DD'ler kullanılmış olsada modern DD'lerin gelişimi ve sistematik bir şekilde kullanımı 17. yüzyılda oluşmaya başlamıştır. İlk olarak Isaac Newton ve Gottfried Wilhelm Leibniz'in geliştirdiği diferansiyel ve integral hesaplamaları, DD'lerin çözümünde büyük bir adım olarak kabul edilir. Bu dönemden itibaren DD'ler; fizik, mühendislik, ekonomi, biyoloji ve diğer bilim alanlarında yaygın olarak kullanılmaya başlanmıştır.

Değişkenlerin türevleriyle ifade edilen DD'lerin bir sistemin sadece anlık değişimini veya bir olayın anlık hızını açıklamak için kullanılmasından dolayı daha genel bir form olan İDD'ler ortaya çıkmıştır. İDD'ler türev ve integral terimlerini içeren denklemler olmasının yanı sıra değişkenlerin geçmiş değerlerine olan bağımlılıklarıyla birlikte olayların geçmişe dayalı etkilerini ifade etmektedir. Ancak İDD'lerin genellikle analitik olarak çözümlerinin bulunması zorlu bir süreçtir ve genellikle belirli denklemler için özel teknikler gerektirir. Sayısal yöntemler, Laplace dönüşümü, iterasyon yöntemleri, özdeğer problemlerine dönüştürülerek çözülmesi araştırmacılar tarafından iyi bilinen küresel yöntemlerden sadece bazılarıdır [20]-[42].

Volterra ve Fredholm İDD'leri, matematiksel analizin önemli bir alanı olan İDD'ler teorisi içinde özel bir sınıftır. Bu tür denklemler, İtalyan matematikçi Vito Volterra ve İsveç matematikçi Ivar Fredholm tarafından bağımsız olarak çalışılarak geliştirilmiştir. Günümüzde Volterra ve Fredholm İDD'leri, matematiksel analizde ve uygulamalı matematikte birçok alanda önemli bir rol oynamaktadır. Bu denklemler fizik, mühendislik, ekonomi, biyoloji ve diğer alanlarda problemlerin matematiksel modellemesi için kullanılmaktadır. Volterra ve Fredholm teorileri, İDD'lerin analitik ve sayısal çözümleri üzerine çalışmaların temelini oluşturur ve bu alanda önemli bir araştırma alanı olarak kabul

edilir. Volterra/Fredholm integral ve İDD'lerin temel teorisi için [1], [24], [35], [33], [37], [41], [44], [47], [56] gibi kaynaklardan incelemeler yapılabilir.

19. ve 20. yüzyılların başlarında yaygın olarak kullanılmaya başlanan GDD'ler ise matematikçilerin sistemlerin gecikme etkilerini daha iyi anlamak ve modellemek için yeni yöntemler arayışları sayesinde ortaya çıkmıştır. GDD'ler, adi diferansiyel denklemlerin (ADD) daha genel ve kapsamlı formu olsada aralarındaki en temel fark, GDD'lerin sistem dinamiklerinin mevcut zaman anında değil, belirli bir zaman gecikmesi sonrasında etkilendiği durumları modellemesidir. Bu iki tür DD arasındaki ayrım, olayların etkilerinin anlık değil, bir önceki zamandaki değerlere dayalı olarak ortaya çıkmasıdır. ADD'ler, bağımsız değişkenin türevlerini içerir ve bu değişkenlerin anlık değerlerine dayanarak sistem davranışını ifade eder. Örneğin bir nüfus dinamiği modelinde, popülasyon büyüme hızının anlık olarak mevcut popülasyona bağlı olduğu bir DD kullanılabilir. Diğer yandan GDD'ler, bir olayın gerçekleşmesi ile bu olayın sonuçlarının sistem üzerindeki etkisinin belirli bir zaman gecikmesi gösterdiği durumları modellemek için kullanılmasından dolayı, özellikle zaman gecikmeli etkilerin önemli olduğu durumlarda, örneğin bir ekosistemdeki türler arası etkileşimlerin modellenmesinde veya bir kontrol sisteminde geri besleme döngülerinin analizinde önemli bir rol oynar. Bu nedenle GDD'ler olayların geçmiş durumlarına olan bağımlılıkları nedeniyle ADD'lerden daha karmaşık bir yapıya sahiptir. Gecikmeli denklemler, genellikle gerçek dünya sistemlerinin daha gerçekçi ve ayrıntılı bir şekilde modellenmesi gerektiği durumlarda kullanılır ([13], [14], [16], [18], [19]).

İDD'ler teorisinde Volterra ve Fredholm İDD'leri olarak iki ana alt başlığa ayrılarak incelenen alanı İDD'lerin daha kapsamlı formu olan GDD'ler içinde gecikmeli Volterra ve gecikmeli Fredholm integro-diferansiyel denklemler (sırasıyla GVİDD ve GFİDD) alt başlığı altında inceleyebiliriz. GVİDD ve GFİDD'ler kesin çözümün çeşitli türevlerinde gecikme terimi ve sıçrama noktalarının varlığı nedeniyle çözümü zor olan bir tür DD'lerdir. Yıllar içinde açık ve kapalı sürekli Runge-Kutta yöntemleri gibi GVİDD'leri çözmek için çeşitli yaklaşımlar önerilmiştir. Bu yöntemler, [32]'de açıklandığı gibi Volterra GDD'leri çözmek için genel lineer yöntemler elde etmede yardımcı olmuştur. Ayrıca araştırmacılar her adımda gereken yinelemeli şemanın yakınsamasını ve Volterra sistemlerinin sayısal çözümlerinin yakınsamasını da elde ettiler. [4] gecikmeli ve nötr tip olan VİDD'lerin kararlılık eşitsizliklerini oluşturmanın yanı sıra, VİDD'leri çözmek

için nümerik integrasyon formülünün kullanılması ile ayrık maksimum normda ikinci derece yakınsama oluşturduğunu da gösterdiler. [22]'de birinci ve ikinci mertebeden VİDD'ler için karışık interpolasyon koleksiyonu yöntemlerini kullanmıştır. Diğer yandan [17], [23] GVİDD'ler için yaklaşık yöntemlerin kısa bir özetini sunmuştur. [46] ise yüksek dereceli Volterra/Fredholm İDD'lerin sayısal çözümleri için daha genel ve etkili yöntemler tanıtmıştır.

Son zamanlarda, GVİDD'leri çözmek için sayısal teknikler geliştirme konusuna önemli ölçüde odaklanılmaktadır ([21]). Örneğin [53], karma koşullar altında yüksek mertebeli lineer Volterra/Fredholm İDD'lerinin çözümünü herhangi bir nokta etrafında merkezlenmiş Taylor polinomları kullanarak yaklaştıran bir Taylor yöntemi önermiştir. Ayrıca [9] GVİDD'leri çözmek için çeşitli yaklaşık yöntemlerin kapsamlı bir incelemesini sunmuştur.

GVİDD'lerin kararlılığı, küçük bir araştırmacı topluluğu arasında devam eden bir tartışma konusu olsa da temel bilgi alanında son zamanlarda kaydedilen ilerlemeler, bu alanın keşif için zengin bir alan olmaya devam edeceğini düşündürmektedir. Bu alanda yapılan çalışmalardan [39] sabit bir gecikme için GVİDD'lerin Runge-Kutta yönteminin kararlılığını incelemiştir. [5] yüksek mertebeli lineer GVİDD'lerin kararlılık eşitsizliklerini elde etmiş ve önerdikleri yöntem ile sadece düşük mertebeden türev içeren fonksiyonların kararlılık eşitsizliklerinin oluşturulmasında değil, aynı zamanda herhangi bir yüksek mertebeden denklemlerin kararlılık eşitsizliklerinin oluşturulmasında da etkin olduğunu göstermişlerdir. [2] makalesinde, lineer olmayan homojen GVİDD'ler için kararlılık eşitsizlikleri belirlemiştir. Sonuç olarak GVİDD'leri çözmek için birkaç yaklaşım ve teknik olsa da, kararlılık ve doğruluk açısından henüz keşfedilecek çok fazla problemin olduğu ortaya koyulmuştur. Bu alandaki araştırmacıların devam eden çalışmaları, gelecekte yeni yöntemler ve anlayışların ortaya çıkacağını öngörmektedir.

Singular pertürbe GDD'ler ise GDD'ler ile ilgili genel bir alanı ifade eder. Bu tür DD'ler, sistemi karakterize eden bir veya daha fazla parametrenin belirli bir bölgede çok küçük veya çok büyük olduğu durumları içerir. Singular pertürbe teorisi, bu tür durumların matematiksel modellemesi ve çözümü için kullanılır. Bu alanın analizi, GDD'lerin çözümünde parametrelerin etkileşimlerini ve sistem davranışındaki değişiklikleri anlamak için önemli bir araçtır. Bu alan birçok fiziksel, biyolojik ve mühendislik uygulamasında,

özellikle de sistemler arası etkileşim ve zaman gecikmesi önemli olduğu durumda karmaşık dinamik sistemlerinin anlaşılması için kullanılmaya devam edilmektedir. Yapılan çalışmalara örnek olarak [10]'da gecikmeli lineer birinci mertebeden VİDD'lere dayanan singüler pertürbe katsayısına sahip başlangıç-değer problemi için sonlu fark çözümüne odaklanmıştır. Ayrıca integral kimliklerini kullanarak sayısal yöntemin yakınsamasını analiz etmekte ve pertürbe parametresine bağlı olarak düzenli yakınsama özelliklerini sergilemektedir. [29] singüler pertürbe Fredholm İDD'ini indirgenmiş ikinci tip Fredholm denklemi ile çözmek için bir yaklaşım sunmaktadır. Problem; ikinci mertebeden düzgün yakınsayan sayısal yaklaşımlar üreten sonlu fark yaklaşımı ile ayrıştırılmış, Shishkin tipi örgüler kullanılarak bütünleşik yaklaşımlar oluşturulmuştur. [27] ise lineer olmayan singüler pertürbe birinci mertebeden Fredholm İDD probleminin sayısal çözümü üzerine, ε – parametresinde düzgün yakınsamaya sahip bir yaklaşım geliştirilip analiz etmişlerdir. Sayısal çözüm, diferansiyel kısmı için interpolasyon kuvvet formülleri ve integral kısmı için bileşik dikdörtgen metodu kullanarak ayrıştırılmış, yaklaşık çözüm için hata tahminleri oluşturulmuştur. Singüler pertürbe GDD'lerin yaklaşım yöntemlerinin analiziyle ilgili detaylı inceleme için [8], [29], [40], [43] çalışmalarına ve bu çalışmalarda geçen diğer kaynaklara bakılabilir.

Bu bölümün bir sonraki alt bölümlerinde, günlük hayatımızda karşılaştığımız problemlerin matematiksel modellemesi üzerinde GDD'lerin etkileri incelenecektir.

Trafik Problemlerinde Kullanımı

Trafik akış ve kontrol problemlerinin modellemesinde GDD'lerin kullanılma sebepleri arasında sürücü davranışlarının daha gerçekçi bir şekilde araştırılmak istenmesi yer alır. Özellikle trafikteki gecikmeler, sürücülerin tepkilerini etkiler. Gecikmeli modeller, sürücülerin anında tepki vermeyip bir süre bekledikten sonra hareket etmelerini daha doğru bir şekilde yakalayabilir. Ayrıca trafik akışı genellikle bir dizi aracın birbirleriyle etkileşim içinde olduğu karmaşık bir sistemdir. GDD'ler, bu etkileşimleri ve sürücüler arasındaki zaman gecikmelerini modelleyerek daha kapsamlı bir bakış sunabilir. Sürücü ve araç ile etkileşim halinde olan diğer bir faktör de kullanılan ışık sistemleri ve diğer kontrol mekanizmalarıdır. Bunlarda genellikle gecikmelerle çalışır. GDD'ler, bu kontrol sistemlerinin etkilerini ve gecikmelerini daha doğru bir şekilde yakalayabilir. Ayrıca

günümüzün en büyük problemlerinden birisi olan trafik akışındaki dalgalanmaları ve yoğunluktaki değişiklikler GDD'ler yardımı ile daha doğru açıklanır. Diğer yandan açıklamalar sırasında kullanılacak trafik simülasyonları ve yapay zeka algoritmaları için uygun bir matematiksel temel sağlarlar.

GDD'lerin bu alanda çalışma modelinin gösterilmesi için trafikte iki aracın arka arkaya ilerlediği durumda, önde olan aracın aniden fren yapması halinde araçların hız değişimini ve aralarındaki mesafe değişimini matematiksel olarak modelleyelim.

Öndeki aracın hız değişimi

$$\frac{dv_1}{dt} = -a_1$$

şeklinde olur. Burada, $\frac{dv_1}{dt}$ önde olan aracın hızının zamanla olan değişimini göstermektedir. Öndeki aracın hızının zamanla azalmasından dolayı $-a_1$ negatiftir. Arkada bulunan aracın hız değişimi ise

$$\frac{dv_2}{dt} = k(v_1(t - \tau) - v_2(t)) - c \frac{d(x(t - \tau) - y(t))}{dt}$$

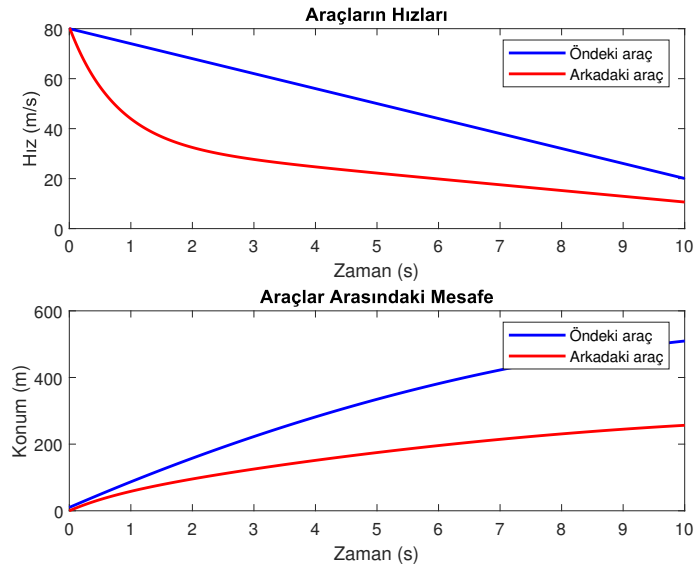
şeklinde ifade edilir. Yukarıdaki denklemde $\frac{dv_2}{dt}$ arkada olan aracın hızının zamanla değişimini, $v_1(t - \tau)$ önde giden aracın gecikme hızının farkını, $x(t - \tau) - y(t)$ uzaklık farkındaki değişimin zamanla oranını, k ve c sırasıyla hız, mesafe farkından etkilenen hız değişim oranlarını temsil etmektedir. Araçlar arasındaki mesafe değişimi

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v_1(t) \\ \frac{dy}{dt} &= v_2(t) \end{aligned}$$

şeklindedir. $\frac{dx}{dt}$ öndeki aracın konumunun zamanla olan değişiminin hızına, $\frac{dy}{dt}$ ise arkadaki aracın konumunun zamanla olan değişiminin hızına bağlı olan bir değişim hızıdır.

Bu problem, birbirini takip eden iki araç arasındaki mesafeyi modellemektedir. Önde olan araç aniden fren yaptığında, arkadaki aracın çarpışmayı önlemesi için hızını değiştirmek zorunda kalmıştır. Araçlar arasındaki mesafe ve hız değişimleri GDD'ler kullanılarak oluşturulmuştur.

Yukarıda modellediğimiz probleme bir sayısal örnek olarak, hızları 80 m/s ve aralarındaki mesafe 10 m olan iki aracı ele alalım. Öndeki araç aniden fren yaptığında arkadaki aracın önde olan araca çarpışmaması için hız ve mesafede meydana gelen değişimleri yukarıdaki matematiksel modellemeyi kullanarak çözdükten sonra elde edilen sonuçları Matlab ile çizilmiş grafikler ile gösterelim.



Şekil 2.1. Başlangıç hızları:

öndeki araç = 80 m/s , arkadaki araç = 80 m/s .

Başlangıç durumunda iki araç arasındaki mesafe: 10 m .

Son hızları:

öndeki araç = 20.06 m/s , arkadaki araç = 10.62 m/s .

Son durumda iki aracın aldığı yol:

öndeki araç = 509.50 m , arkadaki araç = 256.53 m .

$\tau = 0.5$, $k = 0.5$, $c = 0.8$.

Bu problemin matematiksel modellenmesi yapılırken GDD'ler yerine ADD'ler kullanılsaydı, gecikme süresi hesaba katılmayan bir model ortaya çıkardı. Böyle bir durumda arka arkaya giden araçlardan biri aniden fren yaptığında, arkasındaki aracın tepki süresi gecikmesiz hesaplanacak ve aracın hızında ani bir değişiklik meydana gelecekti. Ancak gerçek hayatta araçlar arasındaki iletişim gecikmeleri nedeniyle tepki süresi ve hız değişimi gecikmeli bir şekilde oluşur. Ayrıca gecikme süresi araçlar arasındaki mesafeyi korumak için son derece önemlidir. GDD'ler ile çalışırken gecikme yanıtları ve geçmiş durumlar hesaba katılarak mesafe kontrolü gerçekleştirilir. Ancak ADD'ler ile çalışırken gecikme süresi göz ardı edildiğinden mesafe kontrolü daha sınırlı olacak ve araçlar arasındaki mesafenin korunması tam olarak sağlanamayacaktır.

Sonuç olarak, GDD'leri kullanarak arka arkaya olan araçlardaki hız değişikliklerini daha gerçekçi bir şekilde modellemek ve araçlar arasındaki mesafeyi korumak mümkündür. ADD'lerin kullanımında, gecikme süresi göz ardı edileceğinden bu hesaplamaların doğru bir şekilde modellenmesi mümkün olmayacaktır.

Şekil 2.1'in çiziminde kullanılan (1) numaralı MatLab kodu çalışmanın 9.1. bölümünde yer almaktadır.

Ekonomi Problemlerinde Kullanımı

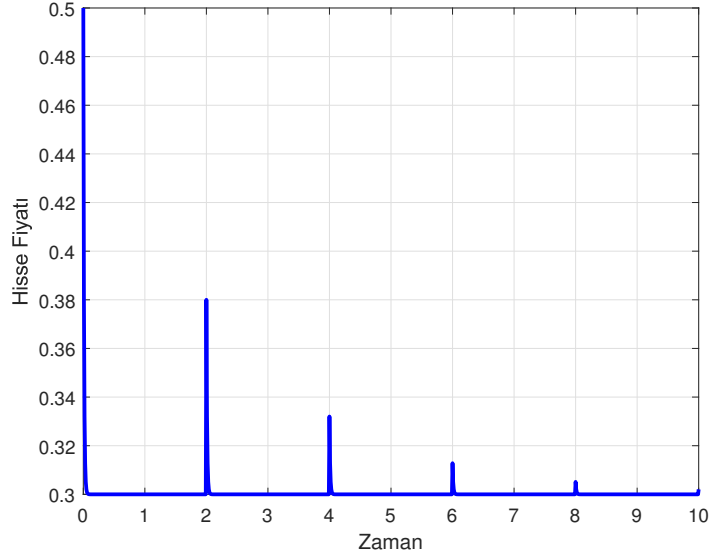
GDD'lerin kullanıldığı diğer alanlardan biri de ekonomidir. Bu alanda yapılan araştırmalarda, yatırımcı davranışlarındaki değişimlerin ve piyasa dalgalanmalarının zaman içindeki analizinde GDD'lerin kullanımı ele alınmaktadır. Bu amaçla piyasada bulunan yatırımcı sayısını N ve her yatırımcının hisse senedi portföyünün zamanın bir fonksiyonu olarak değişim hızını $P(t)$ olarak ifade edelim. Piyasadaki genel hisse senedi fiyatının değişim hızı, $F(t)$ aşağıdaki denklem ile oluşturulur:

$$F(t) = aP(t - \tau) + bF(t - \delta).$$

Elde edilen denklemde, a ve b denklemin sabit katsayıları, τ ve δ gecikme süreleridir. τ yatırımcı kararlarının fiyat değişiklikleri üzerindeki etkisinin gecikme süresini, δ ise geçmiş fiyat dalgalanmalarının gelecekteki fiyatlar üzerindeki etkisinin gecikme süresini temsil eder. Bu model, yatırımcıların geçmiş piyasa hareketlerine dayanarak mevcut

kararlar vermesi ile geçmiş fiyat dalgalanmalarının gelecekteki fiyat değişikliklerine etkisini yansıtır.

Yukarıdaki modellediğimiz probleme bir sayısal örnek olarak $a = 0.6$, $b = 0.4$, $\tau = 1$ ve $\delta = 2$ olan basit bir hisse senedi fiyat değişim senaryosunu ele alalım.



Şekil 2.2. Stok fiyatı değişikliği

Grafik; x ekseninde zamanın değişimi ile stok fiyatının nasıl değiştiğini, y ekseninde ise stok fiyatını göstermektedir.

Problemin çözümü ve Şekil 2.2'nin elde edilmesi için kullanılan (2) numaralı MatLab kodu tezin 2.1. bölümünde verilmiştir.

Uzay Problemlerinde Kullanımı

GDD'ler ayrıca uzay alanındaki çalışmalarda da kullanılmıştır. Örneğin uzay aracı arasındaki iletişimle ilgili GDD'ler üzerine araştırmalar yapılmıştır. Büyük mesafeler ve uzak gezegenlerle uğraşırken uzay aracı arasındaki iletişim sorunu yaşanması kaçınılmaz olacaktır. Bu durum gecikmelere neden olur. Işık hızının sınırlayıcı bir faktör olması göz önüne alındığında, uzay aracı ve uzay aracı ile Dünya arasındaki iletişimde gecikmeler oluşması doğaldır. GDD'leri kullanarak bir uzay aracının konumunu ve iletişim sinyalini matematiksel olarak modellenabilir.

İletişim gecikmesi τ olarak alınırsa, uzay aracının konumu

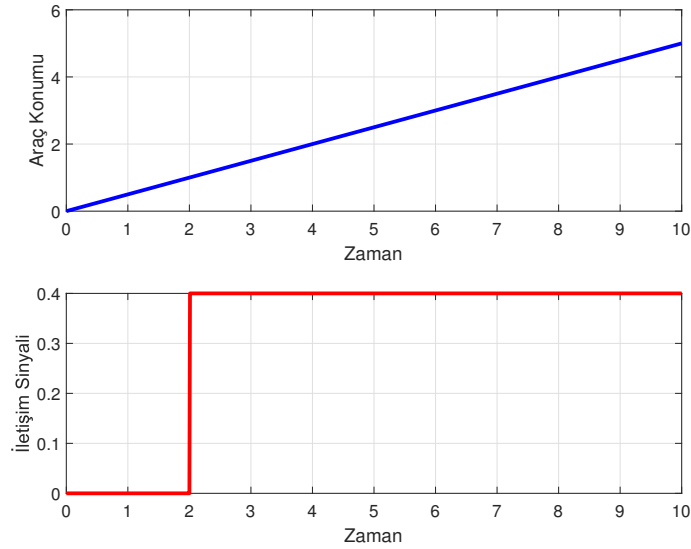
$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t)$$

şeklinde tanımlanırken $v(t)$ uzay aracının hızını temsil eder. İletişim sinyali ise

$$\frac{dy(t)}{dt} = k \frac{dx(t - \tau)}{dt}.$$

Burada, k bir sabit olup, iletişim sinyali uzay aracının hızının gecikmiş bir versiyonu olarak modellenmektedir.

Yukarıdaki matematiksel modellemesini oluşturduğumuz probleme sayısal bir örnek olarak $T = 10$ saniye boyunca 0 pozisyonundan başlayarak $v = 0.5$ birim/saniye hızla hareket eden bir uzay aracını ele alalım. İletişim sinyali, $k = 0.8$ katsayısı ve $\tau = 2$ saniye gecikme süresi ile uzay aracının konumunun değişim hızını temsil etsin. Yukarıdaki modellemeyi kullanarak problemi çözdüğümüzde, bulduğumuz sonuçları kullanarak MatLab yardımı ile aşağıdaki grafikleri elde ederiz.



Şekil 2.3. Araç konumu ve iletişim sinyali

İlk grafik uzay aracının pozisyonunu, ikinci grafik ise iletişim sinyalinin zaman içinde nasıl değiştiğini göstermektedir.

Problemin çözümü ve Şekil 2.3'ün elde edilmesi için kullanılan (3) numaralı MatLab kodu tezin 2.1. bölümünde verilmiştir.

Sağlık Alanındaki Problemlerde Kullanımı

GDD'ler biyolojik süreçlerin doğasını daha iyi yansıtabilen matematiksel modeller oluşturmak ve gerçekçi sonuçlar sağlamak için tıp alanında kullanılmaktadır. Tıpta GDD'lerin kullanılmasının başlıca nedenleri:

a) Zaman gecikmesi

Biyolojik sistemlerdeki birçok olay ve etkileşim zaman gecikmeleri ile karakterize edilir. Örneğin hormon salgısı, sinir iletimi ve hücre bölünmesi gibi süreçler zaman gecikmeleri içerir. GDD'ler, bu gecikmeleri modelleyerek daha gerçekçi sonuçlar elde etmek için kullanılır.

b) İlaç etkileri

İlaçlar genellikle vücutta belirli bir süre etkilidir. GDD'ler, ilaç etkilerinin zamanla nasıl değiştiğini modellemek için kullanılır. Bu, ilaç dozajının optimize edilmesi, tedavi stratejilerinin geliştirilmesi ve yan etkilerin öngörülmesi gibi konularda ışık tutar.

c) İmmünolojik etkileşimler

Bağışıklık sistemi, hastalıklarla mücadelede önemli bir rol oynar. GDD'ler, enfeksiyonların yayılması, bağışıklık tepkilerinin zamanlaması ve immünoterapi stratejilerinin optimizasyonu gibi konuları ele almak için immün hücre etkileşimlerini ve aktivitelerini modellemek için değerli bir araç olarak kullanılır.

d) Tümör büyümesi ve kanser tedavisi

GDD'ler tümör büyümesi ve kanser tedavisi gibi alanlarda kullanılır. Tümör büyümesi genellikle belirli bir zaman gecikmesiyle gerçekleşir ve kemoterapi veya immünoterapi gibi tedavilerin etkileri de zamanla ortaya çıkar. GDD'ler, tümör büyümesini ve tedavi etkilerini daha gerçekçi bir şekilde modellemek için kullanılır.

Bu alan ile ilgili yapılan bir çalışmada, [52], bağışıklık hücreleri ile tümör hücreleri arasındaki etkileşimi hesaba katan bir GDD modeli üzerinde durmaktadır. Model, hücre döngüsünün belirli bir evresinde etki eden bir çevrim-fazına özgü ilaçların etkilerini içermektedir. Tümör popülasyonunu farklı aşamalara veya çevrimlere ayrılarak ilacın etkisinin daha iyi modellenilebilir ve kontrol edilebilir olduğu gözlenmiştir. Araştırmacılar, hücre döngüsünün evrelerini dikkate alarak sistemi GDD'lerle modellemektedir. Çalışmada, sistemin kararlılığı analiz edilmekte ve bir sabit noktanın kararlılığını belirlemek için argüman prensibi temelli bir teorem kanıtlanmaktadır. Ayrıca kararlılığın gecikmeye bağlı olabileceğini ve Hopf Bifurkasyonları aracılığıyla periyodik çözümlerin ortaya çıkabileceğini göstermektedir. Bu davranışı sergileyen parametrelerin bir örneğine de makalede yer verilmiştir. Diğer yandan çalışma tümör büyümesi ve tedavisini anlama açısından önemli sonuçlar ortaya koymaktadır. Ayrıca araştırmacılar sistem dinamiklerini belirleyen bu değerlerin biyolojik anlamını inceleyerek, uygun bir aralık için oluşabilecek bir tahminde bulunarak uygun parametre değerlerini seçme konusundaki sorunu ele alırlar. Özet olarak, makale tümör büyümesi modellemesi ve döngü fazına özgü ilaçların bağışıklık sistemi ve tümör hücreleri üzerindeki etkileri konusunda değerli bilgiler içerir. Araştırmacıların GDD'leri kullanımı ve sistemin kararlılığına yönelik analizleri, kanser modelleri konusundaki literatüre katkıda bulunur ve bu alandaki gelecekteki araştırmalar için bir temel oluşturur.

Bu alandaki başka bir çalışma [14], gen düzenleyici ağların çevredeki sinyal moleküllerinin üretimini kontrol eden ve düzenleyen bakteriler arasındaki hücreler arası iletişim mekanizması olan kümelenme-algılama üzerinde durmaktadır. Araştırmacılar, bir kültürde *Pseudomonas putida* bakterisi için kümelenme-algılama işleminde iki farklı GDD içeren basit bir sistem sunarlar. Bu sistem bir pozitif geri besleme ve bir gecikmeli negatif geri besleme mekanizması içerir. Sistem, analitik ve sayısal yöntemler kullanılarak incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar; varlık, benzersizlik ve biyolojide matematiksel modeller için son derece önemli olan istenilmeyen durumun olmaması için çözümlerin temel özelliklerini göstermektedir. Ayrıca araştırmacılar çözümlerin nitel davranışını, özellikle durağan durumları ve istikrarlarını araştırırken belirli parametre değerlerinin seçilmesi durumunda, sistemin gecikme açısından istikrar değişiklikleri gösterdiğini bulmuşlardır. Dahası gecikme sıfıra ayarlandığında, negatif geri besleme parametrelerinden biriyle ilgili bir Hopf bifurkasyonu oluşabilir. Buradaki Hopf bifurkasyonu, bir dinamik

sistemde belirli bir parametre değeri geçildiğinde, sistemde sürekli bir değişim ve istikrarsızlık ortaya çıkaran bir tür bifurkasyon tipidir. Yapılan bu çalışmada da gecikmenin sifıra indirgenmesinden dolayı ortaya çıkmaktadır. Ayrıca yapılan araştırma, deneysel verilere uyarlanan model parametrelerinin önemini vurgular. GDD sisteminin basit bir model olmasına rağmen biyolojik gözlemleri açıklamak ve öngörmek için yeterli olduğunu gösterir. Ek olarak araştırmacılar basit GDD sisteminin, gelişmiş modellemenin ve temel nitel davranışın açık analizinin iyi bir uzlaşma olduğunu ve birkaç deneysel veriden parametre belirlemede kullanılabileceğini önermektedir.



3. KURAMSAL TEMELLER

Bu kısım; ilerleyen bölümlerde ihtiyaç duyulan çeşitli tanımların ve teoremlerin sunulmasını içermektedir, zira bunlar tezin temel yapı taşlarını oluşturmaktadır.

3.1. GRONWALL İNTEGRAL EŞİTSİZLİĞİ

Gronwall eşitsizliği, matematikte DD'lerle ilgili olarak fonksiyon davranışlarını sınırlayan ve bu sınırlamaları belirli koşullar altında analiz etmeye olanak sağlayan bir eşitsizliktir.

Lemma 3.1. $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonları $t \in [a, b]$ aralığında reel, pozitif değerli ve sürekli fonksiyonlar olmak üzere eğer

$$f(t) \leq c + k \int_a^t g(s)f(s)ds, \quad c, k \geq 0, \quad a \leq t \leq b$$

eşitsizliğini sağlıyorsa

$$f(t) \leq c \exp \left(k \int_a^t g(s)ds \right)$$

olarak elde edilir ([25]).

3.2. ARZELÀ-ASCOLI TEOREMİ

Teorem 3.2. $\{f_n\}$ kapalı ve sınırlı aralık olan $[a, b]$ üzerinde tanımlanmış gerçel, sürekli fonksiyonlar dizisi olsun. Eğer $\{f_n\}$ dizisi $[a, b]$ aralığında düzgün şekilde sınırlı ve düzgün şekilde eşsüreklidir ise, bu dizi $\{f_{n_k}\}$ şeklinde düzgün olarak yakınsayan alt bir diziye sahiptir.

İfadenin tersi de doğrudur. Yani eğer $\{f_n\}$ dizisinin her alt dizisinin kendisi düzgün olarak yakınsayan bir alt diziye sahipse, o zaman $\{f_n\}$ dizisi düzgün bir şekilde sınırlı ve düzgün bir şekilde eşsüreklidir ([45]).

3.3. DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Diferansiyel denklemler (DD), bağımsız ve bağımlı değişkenler ile birlikte bunların birinci veya daha yüksek mertebeden türevleri arasındaki bağıntıyı ifade eden denklemlerdir. Bağımsız değişken sayısına bağlı olarak DD'ler adi ve kısmi olmak üzere ikiye ayrılır.

3.3.1. Adi Diferansiyel Denklemler

Sadece bir bağımsız değişkenin türevlerini içeren

$$F(t, u, u', \dots, u^n) = 0$$

formundaki DD'e *adi diferansiyel denklem (ADD)* denir. Burada t bağımsız değişken, u^j ($j = 1, 2, \dots, n$) aranan u fonksiyonunun farklı mertebelerden türevlerini temsil etmektedir. F fonksiyonu $\mathbb{R}^{n+2}$ kümesinin herhangi bir alt kümesinde $t, u, u', \dots, u^n$ şeklindeki $n + 2$ tane değişkenler arasındaki bağıntıyı sağlayan fonksiyondur ([20], [26], [47]).

3.3.2. Kısmi Diferansiyel Denklemler

Bir veya daha fazla bağımsız değişkeni içeren çok değişkenli fonksiyonların türevleriyle ilgili DD'lere *kısmi diferansiyel denklem (KDD)* denir ve

$$F\left(t_1, t_2, \dots, t_n, \frac{\partial u}{\partial t_1}, \frac{\partial u}{\partial t_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial t_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}, \dots\right) = 0$$

şeklinde tanımlanır. Bu denklemde u bir fonksiyon ve $t_1, t_2, \dots, t_n$ bağımsız değişkenlerdir. $\frac{\partial u}{\partial t_i}$ ve $\frac{\partial^2 u}{\partial t_i^2}$ gibi terimler, u fonksiyonunun sırasıyla t_i 'ye göre birinci ve ikinci mertebelerden kısmi türevlerini temsil etmektedir ([20], [26], [47]).

DD'ler veriliş biçimine ve çözümün belirlenmesi için gereken başlangıç koşullarına göre başlangıç-değer ve sınır-değer problemleri olmak üzere ikiye ayrılmaktadır.

3.3.3. Başlangıç-Değer Problemi

DD'lerin belirli bir başlangıç noktasında bilinen bir değerle çözümünün bulunmasını amaçlayan problemlere *başlangıç-değer problemi (BDP)* denir. BDP'leri genellikle

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= f(t, u(t)), \quad t_0 \leq t \leq T, \\ u(t_0) &= u_0\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir ([20]).

3.3.4. Sınır-Değer Problemi

DD'in sınır şartlarını sağlayan çözümün bulunması problemine *sınır-değer problemi (SDP)* denir ve

$$\begin{aligned}u'' &= f(t, u, u'), \quad 0 < t < l, \\ \alpha_1 u'(0) + \beta_1 u(0) &= \mu_1, \quad \alpha_2 u'(l) + \beta_2 u(l) = \mu_2\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Burada α_i, β_i, μ_i ($i = 1, 2$) $\alpha_i^2 + \beta_i^2 \neq 0$ ($i = 1, 2$) eşitliğini sağlayan sayılar ve f de belirli bir fonksiyondur. $\alpha_i = 0$ ($i = 1, 2$) durumu *birinci tip sınır şartları*, $\beta_i = 0$ ($i = 1, 2$) durumu *ikinci tip sınır şartları*, $\alpha_i \neq 0, \beta_i \neq 0$ ($i = 1, 2$) durumu ise *üçüncü tip sınır şartları* olarak adlandırılır ([20], [7]).

3.4. İNTEGRAL DENKLEMLER

İntegral denklemler, aranan $u(t)$ fonksiyonunun inetgral işleminin dışında ve içinde yer aldığı

$$u(t) = f(t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} K(t, s)u(s)ds$$

şeklindeki denklemlerdir. Burada $f(t)$ bilinen fonksiyonu, $K(t, s)$ integral denklemin *çekirdeğini*, $\alpha(t)$ ve $\beta(t)$ integralin sırasıyla *alt* ve *üst sınırlarını* ifade etmektedir ([56]).

3.4.1. Volterra İntegral Denklemi

$u(t)$ aranan bir fonksiyon, $K(t,s)$ ve $f(t)$ bilinen fonksiyonlar, s ve t $[a,t]$ aralığında tanımlı reel değişkenler, λ ise sayısal bir parametre olmak üzere, integral sınırlarından birisi değişken olan

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t,s)u(s)ds$$

şeklindeki denkleme *ikinci tip lineer Volterra integral denklemi* denir. Burada $K(t,s)$ fonksiyonu Volterra integral denkleminin *çekirdeği* olarak isimlendirilir. Ayrıca $f(t) = 0$ olduğunda bu denklem *ikinci tip homojen lineer Volterra integral denklemi* olarak adlandırılır.

$$0 = f(t) + \lambda \int_a^t K(t,s)u(s)ds$$

şeklindeki denkleme de *birinci tip Volterra integral denklemi* denir ([37], [56]).

3.4.2. Fredholm İntegral Denklemi

$u(t)$ aranan bir fonksiyon, $K(t,s)$ ve $f(t)$ bilinen fonksiyonlar, s ve t $[a,b]$ aralığında tanımlı reel değişkenler, λ ise sayısal bir parametre olmak üzere, integral sınırlarının ikisinin de sabit olduğu

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)u(s)ds$$

şeklindeki denkleme *ikinci tip lineer Fredholm integral denklemi* denir. Burada $K(t,s)$ fonksiyonu Fredholm integral denkleminin *çekirdeği* olarak isimlendirilir. Ayrıca $f(t) = 0$ olduğunda bu denklem *ikinci tip homojen lineer Fredholm integral denklemi* olarak adlandırılır.

$$0 = f(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)u(s)ds$$

şeklindeki denkleme de *birinci tip Fredholm integral denklemi* denir ([37], [56]).

3.4.3. Volterra-Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklemleri

Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklemi, Volterra ve Fredholm integral denklemleri ile birlikte diferansiyel operatörün birleşimini içeren bir integral denklemdir. Genellikle

$$u^{(n)}(t) = f(t) + \int_a^t K_1(t,s)u(s)ds + \int_a^b K_2(t,s)u(s)ds$$

şeklindedir. Burada $K_1(t,s)$ ve $K_2(t,s)$ denklemin *çekirdekleri* olarak isimlendirilir. n , aranan $u(t)$ fonksiyonunun türevinin mertebesini göstermektedir ([56]).

3.5. ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN VARLIK VE TEKLİK TEOREMLERİ

Tezin bu bölümünde

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= f(t, u(t)), \quad t_0 \leq t \leq T, \\ u(t_0) &= u_0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanan BDP'lerinin çözümünün varlığı ve tekliği hakkındaki tanım ve teoremlere yer verilecektir.

3.5.1. Lipschitz Şartı

Tanım 3.3. $f(t, u)$ fonksiyonu $\mathcal{D}$ bölgesinde tanımlı sürekli bir fonksiyon olmak üzere eğer bir L sabiti (Lipschitz sabiti) bulanabilirse; $\mathcal{D}$ 'den olan keyfi u_1 , u_2 ve keyfi t için

$$|f(t, u_1) - f(t, u_2)| \leq L|u_1 - u_2|, \quad \forall (t, u_1), (t, u_2) \in \mathcal{D} \tag{3.2}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu durumda $\mathcal{D}$ bölgesinde tanımlı f fonksiyonu aynı bölgede t 'ye göre *Lipschitz şartını sağlıyor* denir ([20]).

3.5.2. Başlangıç-Değer Probleminin ve Volterra İntegral Denkleminin Birbirlerine Dönüşümü

Lemma 3.4. $u(t)$ fonksiyonu (3.1) BDP'nin bir çözümü ise aynı zamanda $u(t)$

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \quad (3.3)$$

Volterra integral denklemini de sağlar.

$u \in C^1[t_0, t_1]$ 'de tanımlı ve (3.3) Volterra integral denkleminin bir çözümü olduğu durumda $u(t)$ fonksiyonu (3.1) BDP'ni de sağlar ([56]).

3.5.3. Başlangıç Değer Probleminin Çözümünün Varlık ve Tekliği için Picard Teoremi

Teorem 3.5. (Teklik Teoremi)

$f(t, u)$ fonksiyonu sürekli ve $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^2$, $a > 0$, $b > 0$ sabitler olmak üzere

$$\mathcal{R} := \{(t, u) : |t - t_0| \leq a, |u - u_0| \leq b\}$$

şeklinde tanımlanan dikdörtgensel bölgede t 'ye göre L Lipschitz şartının sağlanması koşuluyla (3.1) BDP'nin çözümü tektir ([25]).

İspat. $t \in [t_0, t_1]$ olmak üzere $u(t)$ ve $v(t)$, (3.1)'in iki farklı çözümü olsun. Lemma 3.4 kullanılarak $u(t)$ ve $v(t)$ fonksiyonları

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds, \quad (3.4)$$

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t f(s, v(s)) ds \quad (3.5)$$

şeklinde yazılır. Buradan

$$u(t) - v(t) = u_0 + \int_{t_0}^t (f(s, u(s)) - f(s, v(s))) ds.$$

Böylece

$$\begin{aligned} |u(t) - v(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(s, u(s)) - f(s, v(s))| ds \\ &\leq L \int_{t_0}^t |u(s) - v(s)| ds. \end{aligned}$$

Eğer elde edilen

$$|u(t) - v(t)| \leq L \int_{t_0}^t |u(s) - v(s)| ds$$

eşitsizliğine Bölüm 3.1’de tanımlanan Gronwall eşitsizliği $f(s) = |u(s) - v(s)|$, $c = 0$, $g(s) = 1$ ve $k = L$ değerleri için uygulanırsa

$$|u(t) - v(t)| = 0$$

olarak elde edilir. Bu durum da $u(t) = v(t)$ olduğunu göstermektedir. Bu da (3.1)’in tek bir çözümünün olduğunu ispatıdır. $\square$

Teorem 3.6. (Picard Teoremi)

$\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ olmak üzere $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı ve $f(t, u)$ fonksiyonunun aşağıdaki şartları sağladığını varsayalım:

- a) $f(t, u)$ fonksiyonu birinci bileşeni t ’ye göre $\mathcal{D}$ ’de sürekli olsun. (t_0, u_0) noktası $\mathcal{D}$ bölgesi içinde kalan bir nokta ve $a > 0$, $b > 0$ sabitler olmak üzere

$$\mathcal{R} = \{(t, u) : |t - t_0| \leq a, |u - u_0| \leq b\} \subset \mathcal{D}$$

dikdörtgensel bölgesi tanımlansın. f fonksiyonu bu kapalı $\mathcal{R}$ bölgesinde sürekli olduğundan aynı zamanda sınırlıdır, yani $M = \max_{(t, u) \in \mathcal{R}} |f(t, u)|$ olur.

- b) $f(t, u)$ fonksiyonu L Lipschitz sabiti altında $\mathcal{D}$ bölgesinde ikinci bileşeni u ’ya göre Lipschitz şartını sağlayan fonksiyon olsun.

Böylece (a) ve (b) şartları çerçevesinde (3.1) BDP'yi $|t - t_0| \leq h$ aralığında tanımlı sürekli bir tek u çözümüne sahip olur, burada $h = \min(a, \frac{b}{M})$ 'dir ([25]).

İspat. $\mathcal{R}$, $\mathcal{D}$ 'de tanımlanmış kapalı dikdörtgensel bir bölge olduğu için $\mathcal{D}$ bölgesinde varsıyalan f fonksiyonunun tüm özellikleri $\mathcal{R}$ içinde de geçerlidir.

$$\mathcal{R}_1 = \{(t, u) : |t - t_0| \leq h, |u - u_0| \leq b\}$$

şeklinde olmak üzere, eğer $a < \frac{b}{M}$ ise $h = a$ ve $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}$ olur. Diğer yandan $\frac{b}{M} < a$ ise $h = \frac{b}{M}$ ve bu durumda da $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}$ olur.

Teorem, Picard'ın $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$, $\phi_3(t)$... iterasyonu ile $|t - t_0| \leq h$ üzerinde ardışık yaklaşımlar yöntemi kullanılarak ispatlanacaktır. $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$, $\phi_3(t)$... iterasyonları

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_0) ds, \\ \phi_2(t) &= u_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi_1(s)) ds, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \phi_n(t) &= u_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi_{n-1}(s)) ds \end{aligned} \tag{3.6}$$

şeklinde dir. BDP'nin çözümünün tekliği Teorem 3.5'de ispatlanmıştır. Çözümün varlığının ispatı $[t_0, t_0 + h]$ aralığında gösterilecektir. Benzer işlemler tekrar uygulanarak çözümün varlığı $[t_0 - h, t_0]$ aralığında da ispatlanabilir.

Teoremin ispatına ilk olarak (3.6)'da tanımlanan $\{\phi_n\}$ fonksiyon dizisinin verilen $\mathcal{R}_1$ bölgesinde tanımlı, sürekli türe ve sahip, $[t_0, t_0 + h]$ aralığında $|\phi_n(t) - u_0| \leq b$ eşitsizliğini sağlaması ve sonuç olarak $f(t, \phi_n(t))$ fonksiyonunun da aynı bölgede tanımlı olacağının gösterilmesi ile başlanılacaktır. Ayrıca ispat için tümevarım yöntemi kullanılacaktır.

İlk adım olarak $n = 1$ için (3.6) Picard iterasyonlarından

$$\phi_1(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_0) ds$$

ele alınsın. Buradan $\phi_1(t)$ fonksiyonunun tanımlı ve $[t_0, t_0 + h]$ aralığında sürekli türeve sahip olduğu açıkça görülebilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} |\phi_1(t) - u_0| &\leq \int_{t_0}^t |f(s, u_0)| ds \\ &\leq M(t - t_0) \\ &\leq Mh \\ &\leq b. \end{aligned}$$

$(t, \phi_1(t))$ fonksiyonu da $\mathcal{R}_1$ dikdörtgensel bölgesinin içinde yer almaktadır ve sonuç olarak $f(t, \phi_1(t))$ fonksiyonu $[t_0, t_0 + h]$ aralığında süreklidir. Bu da $n = 1$ değeri için tüm özelliklerin geçerli olduğunu gösterir.

Tümevarım metodunun ikinci adımı olarak $\phi_{n-1}(t)$ fonksiyonunun $[t_0, t_0 + h]$ aralığında tanımlı ve sürekli türeve sahip olduğunu, $[t_0, t_0 + h]$ aralığında $|\phi_{n-1}(t) - u_0| \leq b$ eşitsizliğini sağladığını varsayalım. Bu durum $(t, \phi_{n-1}(t)) \in \mathcal{R}_1$ olduğunu gösterir. Ayrıca $f(t, \phi_{n-1}(t))$ fonksiyonu da tanımlı, $t \in [t_0, t_0 + h]$ için birinci bileşeni t 'ye göre süreklidir ve dolayısıyla

$$|f(t, \phi_{n-1}(t))| \leq M, \quad t \in [t_0, t_0 + h]$$

eşitsizliğini sağlar. Böylece (3.6) şeklindeki $\phi_n(t)$ fonksiyonunun tanımlı ve sürekli türeve sahip olduğu görülür. Tekrar (3.6) kullanılarak

$$\begin{aligned} |\phi_n(t) - u_0| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, \phi_{n-1}(s)) ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(s, \phi_{n-1}(s))| ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{t_0}^t M ds \\
&= M(t - t_0) \\
&\leq Mh \\
&\leq b, \quad h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $(t, \phi_n(t))$ 'nin $\mathcal{R}_1$ dikdörtgensel bölgesinin içinde yer aldığı ve sonuç olarak $f(t, \phi_n(t))$ tanımlı ve $t \in [t_0, t_0 + h]$ aralığında sürekli olduğu görülür.

Tümevarım metodu, (3.6) şeklinde tanımlanan $\{\phi_n\}$ fonksiyonlar dizisinin $[t_0, t_0 + h]$ aralığında tüm özellikleri sağlandığını göstermektedir.

Şimdi de $\{\phi_n\}$ fonsiyonlar dizisinin limit yaklaşımının gösteriminden önce dizi terimlerinin her birinin $[t_0, t_0 + h]$ aralığında

$$|\phi_n(t) - \phi_{n-1}(t)| \leq \frac{M}{L} \frac{(Lh)^n}{n!} \quad (3.7)$$

eşitsizliğini sağladığını gösterelim. Bu eşitliliğin ispatı için de tümevarım metodu kullanılırsa $n = 1$ değeri için (3.6) iterasyonlardan

$$\begin{aligned}
|\phi_1(t) - u_0| &\leq \int_{t_0}^t |f(s, u_0)| ds, \\
&\leq M(t - t_0) \\
&\leq Mh
\end{aligned}$$

eşitsizliğinin sağlandığı kolaylıkla görülür. Tümevarım metodunun ikinci adımı olarak $\phi_{n-1}(t)$ ve $\phi_{n-2}(t)$ fonksiyonlarının

$$|\phi_{n-1}(t) - \phi_{n-2}(t)| \leq \frac{ML^{n-2}}{(n-1)!} (t - t_0)^{n-1}, \quad t \in [t_0, t_0 + h]$$

aralığında eşitsizliğini sağladığını varsayalım. Buradan da

$$|\phi_n(t) - \phi_{n-1}(t)| \leq \left| \int_{t_0}^t (f(s, \phi_{n-1}(s)) - f(s, \phi_{n-2}(s))) ds \right|$$

$$\leq \int_{t_0}^t |f(s, \phi_{n-1}(s)) - f(s, \phi_{n-2}(s))| ds \quad (3.8)$$

olur. (3.8) eşitsizliğinin devamında da daha önceden ispatlanan tüm n değerleri için $\{\phi_n\}$ fonksiyonlar dizisinin $t \in [t_0, t_0 + h]$ aralığında $|\phi_n(t) - u_0| \leq b$ eşitsizliğini sağlaması özelliği kullanılırsa, $(t, \phi_{n-1}(t))$ ve $(t, \phi_{n-2}(t))$ noktalarının $t \in [t_0, t_0 + h]$ aralığında $\mathcal{R}_1$ bölgesinde olduğu görülür. f fonksiyonunun da Lipschitz şartını sağlamasından dolayı (3.8) eşitsizliği

$$\begin{aligned} |\phi_n(t) - \phi_{n-1}(t)| &\leq L \int_{t_0}^t |\phi_{n-1}(s) - \phi_{n-2}(s)| ds \\ &\leq L \int_{t_0}^t \frac{ML^{n-2}}{(n-1)!} (s-t_0)^{n-1} ds \\ &\leq \frac{ML^{n-1}}{(n-1)!} \frac{(s-t_0)^n}{n} \Big|_{t_0}^t \\ &= \frac{ML^{n-1}}{n!} (t-t_0)^n \\ &\leq \frac{M}{L} \frac{(Lh)^n}{n!} \end{aligned}$$

şeklini alır. Böylece her bir n değeri için $\{\phi_n\}$ fonksiyonlar dizisinin (3.7) eşitsizliğini sağladığı gösterilmiş olur.

Şimdi de (3.7) eşitsizliğini kullanarak $\{\phi_n\}$ fonksiyonlar dizisinin $[t_0, t_0 + h]$ aralığında $n \rightarrow \infty$ olduğunda her bir dizi teriminin sürekli bir fonksiyon olan ϕ fonksiyonuna düzgün bir şekilde yaklaştığını ispatlayalım. İlk olarak (3.7) eşitsizliği sonsuz seri toplamı olarak yazılırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\phi_n(t) - \phi_{n-1}(t)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{L} \frac{(Lh)^n}{n!} \quad (3.9)$$

olur. Elde edilen eşitsizliğin sağ tarafı

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{L} \frac{(ML)^n}{n!} = \frac{M}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Lh)^n}{n!}$$

$$= \frac{M}{L} \left(1 + \frac{Lh}{1!} + \frac{(Lh)^2}{2!} + \dots - 1 \right)$$

$$= \frac{M}{L} (e^{Lh} - 1).$$

(3.9)'daki sonsuz toplam dizisi eşitliğinin sağ tarafının $\frac{M}{L} (e^{Lh} - 1)$ yakınsamasından dolayı Weierstrass M-teste göre $\sum_{n=1}^{\infty} |\phi_n(t) - \phi_{n-1}(t)|$ sonsuz toplam dizisi de $[t_0, t_0 + h]$ aralığında yakınsaktır.

$\sum_{n=1}^{\infty} |\phi_n(t) - \phi_{n-1}(t)|$ sonsuz toplam dizisinin yakınsadığı ϕ fonksiyonunun elde edilmesinin gösterimi için sonsuz toplam dizisinden kısmi toplam dizisini

$$\begin{aligned} S_n(t) &= u_0 + \sum_{i=1}^n (\phi_i(t) - \phi_{i-1}(t)) \\ &= \phi_n(t) \end{aligned}$$

ele alalım. $\{S_n\} = \{\phi_n\}$ olduğundan $[t_0, t_0 + h]$ aralığında limit fonksiyonu ϕ 'ye düzgün yakınsar. Böylece (3.6) şeklinde tanımlanan $\{\phi_n\}$ dizisinin $[t_0, t_0 + h]$ aralığında ϕ fonksiyonuna yakınsadığı gösterilmiş olur. $[t_0, t_0 + h]$ aralığında her bir dizi teriminin sürekli olması, limit fonksiyonu olan ϕ 'nin de aynı aralıkta sürekli olduğunun işaretidir.

Teoremin ispatının son adımı limit fonksiyonu olan ϕ fonksiyonunun (3.1) BDP'ni sağladığının gösterilmesidir. İspatın bu bölümüne $[t_0, t_0 + h]$ aralığında $f(t, \phi_n(t))$ fonksiyonunun $f(t, \phi(t))$ fonksiyonuna düzgün yakınsadığını göstererek başlayalım. f fonksiyonunun aynı aralıkta L Lipschitz sabiti altında Lipschitz şartını sağlamasından dolayı

$$|f(t, \phi_n(t)) - f(t, \phi(t))| \leq L |\phi_n(t) - \phi(t)|$$

olur. Burada $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ olarak alınırsa, $\{\phi_n\}$ dizisi yakınsak olduğundan önceden verilen ε 'a göre öyle δ vardır ki $n > N$ ve $t \in [t_0, t_0 + h]$ için

$$|\phi_n(t) - \phi(t)| \leq \delta$$

veya

$$|f(t, \phi_n(t)) - f(t, \phi(t))| \leq \varepsilon$$

olur. Ayrıca $[t_0, t_0 + h]$ aralığında $f(t, \phi_n(t))$ fonksiyonu sürekli olduğundan, limit fonksiyonu olan $f(t, \phi(t))$ 'de aynı aralıkta süreklidir. Buradan

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(t) \\ &= u_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(s, \phi_n(s)) ds \\ &= u_0 + \int_{t_0}^t \lim_{n \rightarrow \infty} f(s, \phi_n(s)) ds \\ &= u_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) ds.\end{aligned}$$

Son olarak Lemma 3.4 kullanılarak ϕ fonksiyonunun (3.1) BDP'ni sağladığı görülür. Bu da BDP'nin çözümünün varlığının ispatıdır.

□

3.5.4. Başlangıç-Değer Probleminin Çözümünün Varlığı için Cauchy-Peano Varlık Teoremi

Tanım 3.7. (ε -Yaklaşık Çözümü)

ϕ fonksiyonu $I = |t - t_0| \leq a$ aralığı üzerinde (3.1) BDP'ne ait bir ε -yaklaşık çözümü ise

- i) $(t, \phi(t)) \in \mathcal{D}, t \in I,$
- ii) I aralığında $\phi \in C^1$ (Yalnızca olası sonlu $\mathcal{S}$ nokta kümesi için ϕ' fonksiyonu basit süreksizliğe sahip olabilir.),
- iii) $\forall t \in I/\mathcal{S}$ değerleri için $|\phi'(t) - f(t, \phi(t))| < \varepsilon$

özelliklerini sağlar.

Teorem 3.8. (3.1) BDP için $f(t, u)$ fonksiyonunun

$$\mathcal{R} = \{(t, u) : |t - t_0| \leq a, |u - u_0| \leq b\}$$

dikdörtgensel bölgede sürekli olduğunu varsayalım. Kapalı bölgede sürekli olmasından dolayı $M = \max_{(t, u) \in \mathcal{R}} |f(t, u)|$ eşitsizliğini sağlar. Böylece verilen her bir $\varepsilon > 0$ değeri için $|t - t_0| \leq h$ aralığında (3.1) BDP'nin tek bir ε -yaklaşık çözümü vardır. Burada $h = \min(a, \frac{b}{M})$ 'dir ([25]).

İspat. $\varepsilon > 0$ verilsin. ε -yaklaşık çözümünün incelenmesi $[t_0, t_0 + h]$ aralığında gösterilecektir. Benzer işlemler tekrar uygulanarak çözümün varlığı $[t_0 - h, t_0]$ aralığında da ispatlanabilir.

ε -yaklaşık çözümünün varlığının ispatı için, bu çözümün (t_0, u_0) noktasından başlayan, yani uçtan uca birleştirilmiş sonlu sayıda doğrulardan oluşan bir çokgen yol içerdiğini varsayalım. $f(t, u)$ fonksiyonu $\mathcal{R}$ bölgesinde düzgün sürekli olduğundan tüm $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta = \delta(\varepsilon)$ değeri vardır ki $|t - \tilde{t}| < \delta$ ve $|u - \tilde{u}| < \delta$ olduğunda

$$|f(t, u) - f(\tilde{t}, \tilde{u})| < \varepsilon$$

eşitsiliğini sağlar. $[t_0, t_0 + h]$ aralığını

$$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = t_0 + h$$

şeklinde n tane alt aralığa ayırılım ve

$$\max |t_k - t_{k-1}| \leq \min\left(\delta(\varepsilon), \frac{\delta(\varepsilon)}{M}\right)$$

olarak tanımlayalım. Şimdi de (t_0, u_0) noktasından başlayan, $f(t_0, u_0)$ eğimine sahip ve $t = t_1$ noktasına kadar devam eden doğru denklemini oluşturalım.

$$u(t) = u_0 + f(t_0, u_0)(t - t_0).$$

Bu doğru parçası (t_0, u_0) noktasından başlayarak eğimleri sırasıyla M ve $-M$ olan doğrular tarafından sınırlanan üçgensel bölge içinde yer almaktadır. Benzer şekilde her bir alt aralık

için doğru denklemleri yazılırsa

$$[t_1, t_2] \text{ aralığı için } u(t) = u(t_1) + f(t_1, u(t_1))(t - t_1),$$

$$[t_2, t_3] \text{ aralığı için } u(t) = u(t_2) + f(t_2, u(t_2))(t - t_2),$$

...

$$[t_{k-1}, t_k] \text{ aralığı için } u(t) = u(t_{k-1}) + f(t_{k-1}, u(t_{k-1}))(t - t_{k-1})$$

olur. Burada $k = 1, 2, 3, \dots$ 'dir. Elde edilen doğru denklemlerinden de görülebileceği gibi $[t_0, t_0 + h]$ üzerindeki u fonksiyonu, parçalı türeve sahip bir fonksiyondur, yani $u \in C_p^1[t_0, t_0 + h]$ 'dir.

Şimdi de ε -yaklaşık çözümünün tanımındaki son maddenin gösterilmesi için $t, \tilde{t} \in [t_0, t_0 + h]$ aralığında herhangi iki nokta alalım. Bu noktalar $\tilde{t} \in [t_{i-1}, t_i], t \in [t_{j-1}, t_j]$ ($t_{i-1} < t_i < t_{j-1} < t_j$) olsun. Buradan da

$$\begin{aligned} |u(t) - u(\tilde{t})| &= |u(t) - u(t_{j-1}) + u(t_{j-1}) - \dots - u(t_i) + u(t_i) - u(\tilde{t})| \\ &\leq |u(t) - u(t_{j-1})| + \dots + |u(t_i) - u(\tilde{t})| \\ &\leq M|t - t_{j-1}| + \dots + M|t_i - \tilde{t}| \\ &\leq M|t - t_{j-1} + t_{j-1} + \dots + t_i - \tilde{t}| \\ &= M|t - \tilde{t}| \end{aligned}$$

olur. Eğer $\tilde{t} = t_0$ olarak alınırsa son eşitsizlik

$$\begin{aligned} |u(t) - u(t_0)| &\leq M|t - t_0| \\ &\leq Mh \\ &\leq b \end{aligned}$$

şeklini alır. Bu da $t \in [t_0, t_0 + h]$ aralığında $(t, u(t)) \in \mathcal{R}$ 'de olduğunu gösterir. Sonuç olarak aynı aralıkta $f(t, u(t))$ tanımlanmış olur.

Son olarak da genel $t \in [t_{k-1}, t_k]$ aralığı için elde edilen

$$u(t) = u(t_{k-1}) + f(t_{k-1}, u(t_{k-1}))(t - t_{k-1}) \quad (3.10)$$

doğru denklemini ele alalım. (3.10) denkleminde $u'(t) = f(t_{k-1}, u(t_{k-1}))$ olduğu görülür ve yine aynı denklem kullanılarak

$$\begin{aligned} |u(t) - u(t_{k-1})| &\leq M|t - t_{k-1}| \\ &\leq M \frac{\delta}{M} \\ &= \delta \end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Buradan da f fonksiyonunun düzgün yakınsak olmasından dolayı

$$\begin{aligned} |u'(t) - f(t, u(t))| &= |f(t_{k-1}, u(t_{k-1})) - f(t, u(t))| \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Böylece u fonksiyonunun (3.1) BDP'nin ε -yaklaşık çözümü olduğu ispatlanmış olur. $\square$

Teorem 3.9. (Cauchy-Peano Varlık Teoremi)

f fonksiyonu

$$\mathcal{R} = \{(t, u) : |t - t_0| \leq a, |u - u_0| \leq b\}$$

şeklinde tanımlanan dikdörtgensel bölgede sürekli olduğunda $|t - t_0| \leq h$ aralığında (3.1) BDP tek bir çözüme sahiptir. Burada $h = \min(a, \frac{b}{M})$ ve $M = \max_{(t, u) \in \mathcal{R}} |f(t, u)|$ 'dur ([25]).

İspat. $n = 1, 2, 3, \dots$ değerleri için $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ olarak alalım. Seçilen her bir ε_n değeri için BDP'nin tek bir ε -yaklaşık çözümü vardır. Teorem 3.8'den dolayı $|u_n(t) - u_0| \leq b$ olduğundan $|u_n(t)| \leq |u_0| + b$ olur. Bu da $\{u_n\}$ dizisinin düzenli sınırlı olduğunu gösterir. Yine Teorem 3.8'de elde edilen $t, \tilde{t} \in [t_0, t_0 + h]$ için

$$|u_n(t) - u_n(\tilde{t})| \leq M|t - \tilde{t}|$$

eşitsizliği kullanılarak $\{u_n\}$ dizisinin eşsüreklili fonksiyonlar dizisi olduğu görülür. Bu nedenle, Arzelà-Ascoli Teoremi gereği, $\{u_n\}$ 'in bir alt dizisi olan $\{u_{n_k}\}$ bulunmaktadır. Böylece $[t_0, t_0 + h]$ aralığında $u_{n_k} \rightarrow u$ 'ya düzgün şekilde yakınsar. Bu da u fonksiyonunun aynı aralıkta sürekli olduğunu gösterir.

Elde edilen limit fonksiyonu olan u 'nun (3.1) BDP'ni sağladığını gösterilmesi için

$$\Delta_{n_k}(t) = \begin{cases} u'_{n_k}(t) - f(t, u_{n_k}(t)), & \text{eğer } u'_{n_k} \text{ tanımlı ise,} \\ 0, & \text{eğer } u'_{n_k} \text{ tanımlı değilse} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Buradan

$$u'_{n_k}(t) = f(t, u_{n_k}(t)) + \Delta_{n_k}(t) \quad (3.11)$$

olur. (3.11) eşitliğinin iki tarafından t_0 'dan t 'ye olmak üzere integrali alınırsa

$$u_{n_k}(t) = u_0 + \int_{t_0}^t (f(s, u_{n_k}(s)) + \Delta_{n_k}(s)) ds. \quad (3.12)$$

$u_{n_k} \rightarrow u$ 'ya düzgün yakınsamasından dolayı $f(t, u_{n_k}(t))$ fonksiyonu da $f(t, u(t))$ 'ye düzgün yakınsar. Bu da

$$\int_{t_0}^t f(s, u_{n_k}(s)) ds \rightarrow \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$$

anlamına gelir. Dahası

$$|\Delta_{n_k}| \leq \epsilon_n = \frac{1}{n}$$

olmasından dolayı (3.12) eşitliği

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds,$$

$$u(t_0) = u_0$$

şeklini alır. Lemma 3.4'den u fonksiyonunun (3.1) BDP'nin de çözümü olduğu görülür. Böylece Teorem 3.9 ispatlanmış olur. $\square$

3.6. ÇOK KATLI İNTEGRALLERİN TEK KATLI İNTEGRALLERE DÖNÜŞTÜRÜLMESİ

$n > 0$, a bir sabit ve $x = x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = x_n$ olmak üzere çoklu integralleri tek bir integrale dönüştüren genel formül

$$\int_a^{x_1} \int_a^{x_2} \dots \int_a^{x_n} u(t) dt \dots dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} u(t) dt$$

şeklindedir. Benzer şekilde

$$\int_a^{x_1} \int_a^{x_2} \dots \int_a^{x_{n-1}} u(t) dt dx_n \dots dx_2 = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} u(t) dt$$

olarak da elde edilir ([56]).

3.7. GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

t bağımsız değişken, $u(t)$ aranan fonksiyon, $h_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) verilen ve $u^{(j)}(h_i(t))$ $u(t)$ 'nin j . mertebeden türevinin $h_i(t)$ noktasındaki değerini gösteren fonksiyonlar olmak üzere, fonksiyonun kendisini ve farklı mertebelerden türevlerini içeren

$$\begin{aligned} F(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(l_0)}(t), u(h_1(t)), u'(h_1(t)), \dots, u^{(l_1)}(h_1(t)), \dots, \\ u(h_n(t)), u'(h_n(t)), \dots, u^{(l_n)}(h_n(t))) = 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

kapalı denkleme *gecikmeli diferansiyel denklem* (GDD) denir. Genellikle $h_i(t) = t - \tau_i(t)$.

Böylece (3.13) ile ifade edilen denklem

$$\begin{aligned} F(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(l_0)}(t), u(t - \tau_1(t)), u'(t - \tau_1(t)), \dots, u^{(l_0)}(t - \tau_1(t)), \dots, \\ u(t - \tau_n(t)), u'(t - \tau_n(t)), \dots, u^{(l_n)}(t - \tau_n(t))) = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

şekline dönüşür. (3.14) denkleminde türevin mertebesi l_n , farkın mertebesi ise n 'dir. Ayrıca F , $1 + (l_n + 1)(n + 1)$ değişkenli bir fonksiyondur. $\tau_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ fonksiyonlarının argümanlarının *mevli*, $\tau_i(t) \geq 0$ olduğu durumda ise fonksiyonun

gecikmesi olarak isimlendirilir. Özellikle, $\tau_i(t)$ fonksiyonları sabit olduğunda, (3.14) denklemi *diferansiyel-fark denklemi* olarak adlandırılır ([31], [38]).

Tezdeki diğer bölümlerde, aşağıdaki denklemi ele alacağız:

$$\begin{aligned} u^{(l_0)}(t) = f(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(l_0)}(t), u(t - \tau_1(t)), u'(t - \tau_1(t)), \dots, u^{(l_0)}(t - \tau_1(t)), \dots, \\ u(t - \tau_n(t)), u'(t - \tau_n(t)), \dots, u^{(l_n)}(t - \tau_n(t))). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Burada $\tau_i(t) \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$. (3.15) denklemi için ele alınan problemin çözümünün varlığı ve özellikleri, l_0 ve aranan fonksiyonun maksimum türev mertebesinin birbirleri ile olan ilişkilerine bağlı olarak değişir. $p = \max_{1 \leq i \leq n} \{l_i\}$ olmak üzere:

- $l_0 > p$ ise (3.15) denklemi *gecikmeli tip*,
- $l_0 = p$ ise (3.15) denklemi *nötr tip*,
- $l_0 < p$ ise (3.15) denklemi *ileri tip* denklem olarak adlandırılır.

Örnek 3.10. GDD'lerin çeşitlerine örnekler aşağıda verilmiştir:

- $u'(t) = 2u(t - \pi)$,
 $l_0 = 1$ ve $p = 0$ olduğundan denklem gecikmeli tip,
- $u'(t) = u(t) - u'(t - \pi)$,
 $l_0 = 1$ ve $p = 1$ olduğundan denklem nötr tip,
- $u'(t) = u''(t - \pi) + u(t)$,
 $l_0 = 1$ ve $p = 2$ olduğundan denklem ileri tip diferansiyel denklem olur.

3.8. GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN BAŞLANGIÇ-DEĞER PROBLEMLERİ

GDD'ler için BDP sistemi düşünülecek olursa

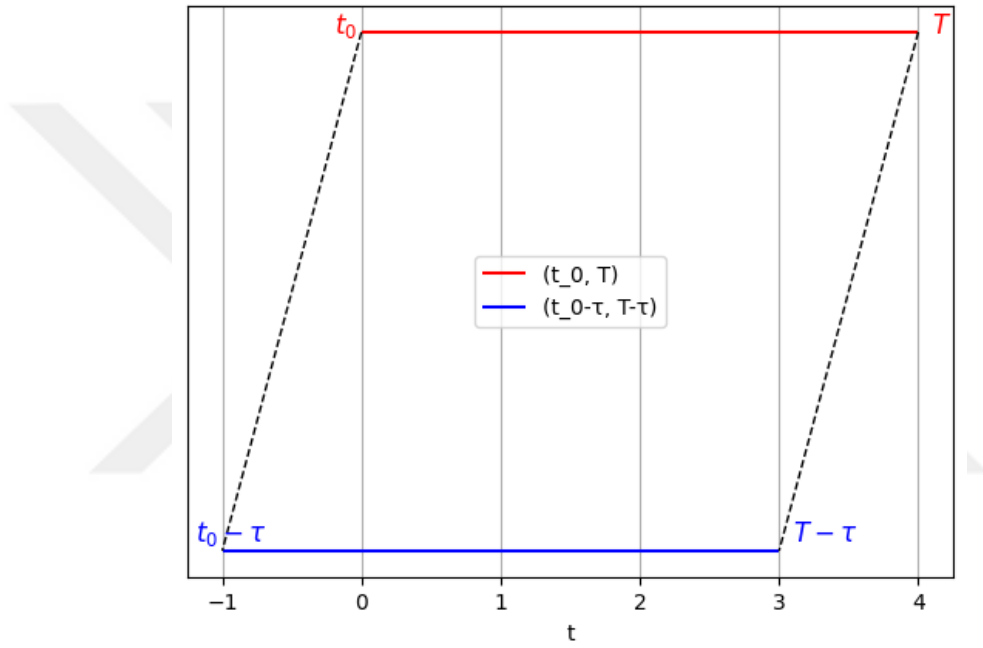
$$u'(t) = f(t, u(t), u(t - \tau)), \quad t \geq t_0, \quad (3.16)$$

$$u(t) = \varphi(t), \quad t_0 - \tau < t \leq t_0 \quad (3.17)$$

şeklinde olur. Burada $f(t, u_1, u_2)$ fonksiyonu, t, u_1, u_2 değişkenleri ile birlikte G bölgesinde tanımlanmış bir fonksiyondur. $\varphi(t)$, (t_0, T) aralığında türevlenebilir bir fonksiyon olmasının yanı sıra

- a) $(t, \varphi(t), \varphi(t - \tau)) \in G, \quad t \in (t_0, T),$
- b) $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t), \varphi(t - \tau)), \quad t \in (t_0, T)$

koşullarını sağlıyorsa, o zaman $u = \varphi(t)$ fonksiyonu, verilen aralıkta denklem (3.16)'nın bir çözümü olarak adlandırılır.



Şekil 3.1. τ gecikme parametresine bağlı olarak t değerinin değişimi

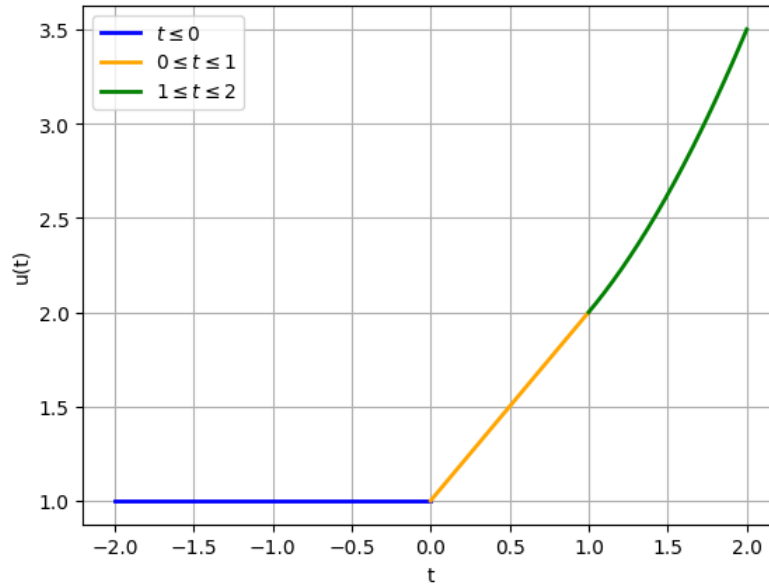
Şekil 3.1'de açıkça görülebileceği gibi, t değişkeni (t_0, T) aralığında değiştiğinde, $t - \tau$ argümanı $(t_0 - \tau, T - \tau)$ aralığında değişmeye devam edecektir. Dolayısıyla, (t_0, T) aralığında (3.16) denkleminin bir çözümü olan $u = \varphi(t)$ fonksiyonu, $(t_0 - \tau, t_0]$ sağ yarı açık aralığı üzerinde de tanımlanmış olmalıdır. Bu nedenle (t_0, T) aralığında (3.16) denkleminin çözümünü bulmak için problemin başlangıç koşuluna $(t_0 - \tau, t_0]$ sağ yarı açık aralığı üzerinde ek koşullar getirilmesi gerekmektedir.

Tanım 3.11. $(t_0 - \tau, t_0]$ sağ yarı açık aralığında $\varphi_0(t)$ fonksiyonuna eşit olan ve (t_0, T) aralığında (3.16) denklemini sağlayan çözümün bulunması problemine *BDP*, t_0 noktasına *başlangıç noktası*, $(t_0 - \tau, t_0]$ *başlangıç kümesi* ve $\varphi_0(t)$ fonksiyonuna da *başlangıç fonksiyonu* denir.

Örnek 3.12. Driver (1977)

Aşağıda verilen test problemini ele alalım:

$$\begin{cases} u'(t) = u(t-1), & t \geq 0, \\ u(t) = 1 & t \leq 0. \end{cases}$$



Şekil 3.2. Problemin $[0, 2]$ aralığındaki çözümünün grafiği

Yukarıdaki problemi incelediğimizde, $t = 0$ noktası için $u'(0)^- = 0$ ve $u'(0)^+ = u(-1) = 1$ olduğundan, türev fonksiyonu $u'(t)$ 'nin $t = 0$ noktasında bir sıçrama noktasına sahip olduğu görülür. Problemin çözümünün verildiği Şekil 3.2'de de $t = 0$ noktasında türev değeri olmadığı görülür. Benzer şekilde, işlemlere devam edilirse $u''(t) = u'(t-1)$ 'in $t = 1$ noktasında bir sıçrama noktası olduğu ve $u'''(t) = u''(t-1) = u'(t-2)$ 'nin $t = 2$ noktasında sıçrama noktaları olduğu elde edilir. Bu işlemlere devam edildikçe her gecikme miktarı için $u(t)$ türevlerinin her mertebeden sıçrama noktalarına sahip olduğu gözlemlenir.

Yukarıdaki örnekte görüldüğü gibi ADD ve GDD'ler her ikisi de DD çeşidi olsa da, formülasyonları ve davranışları bakımından farklılık gösterirler. ADD'lerde aranan fonksiyonun türevi, zaman bağımlılığına dayanarak sadece mevcut değere ve belki de o zamanda türevlerine bağlı olurken GDD'lerde türevler fonksiyonun hem mevcut değerine hem de geçmiş değerlerine bağlıdır. Bu durum sistemde bir zaman gecikmesi etkisi oluşturur ve ayrıca geçmiş ile şimdiki davranışlarını etkiler. Ayrıca GDD'lerde gecikme

terimleri, türevlerin herhangi bir zamanda doğru bir şekilde hesaplanması için belirli bir zaman aralığı boyunca fonksiyonun değerlerinin bilinmesini gerektirir.

ADD ve GDD'lerdeki formülasyon farklılıklarının yanı sıra kararlılık analizindeki farklılıkları da dikkat çekmektedir. GDD'lerde, gecikmenin varlığı nedeniyle kararlılığı analiz etmek genellikle ADD'lerden daha karmaşıktır. Gecikme terimleri, osilasyonlar veya hatta kaotik davranış gibi ek istikrarsızlık kaynaklarına neden olabilir. GDD'lerin kararlılık analizi, karakteristik denklemlerin incelenmesini ve kararlılık koşullarının belirlenmesini içerir.

Sayısal çözüm yöntemleri söz konusu olduğunda ise GDD'leri sayısal olarak çözmek, ADD'lere göre daha zordur. ADD'ler için tasarlanmış geleneksel sayısal yöntemler, Euler yöntemi veya Runge-Kutta yöntemleri uygulanırken geçmiş bağımlılığı hesaba katma ihtiyacından dolayı GDD'lere doğrudan uygulanamaz. Adımlar yöntemi veya Laplace dönüşümleri gibi özel teknikler, GDD'leri verimli bir şekilde ele almak için geliştirilmiştir.

GDD'lerin belirli durumlarda ADD'lere indirgenebileceğinin de altını çizmek gerekir. Bu durum, gecikme terimleri ihmal edilebilir olduğu durumda veya sistem önemli bellek etkileri göstermediğinde gerçekleşir.

3.9. GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN VARLIK VE TEKLİK TEOREMLERİ

Tezin bu bölümünde

$$u'(t) = f(t, u(t), u(t - \tau(t))), \quad t \geq t_0, \quad (3.18)$$

$$u(t) = \varphi(t), \quad t_0 - \tau(t) < t \leq t_0 \quad (3.19)$$

GDD için BDP incelenecektir. Burada $\tau(t)$ ve $\varphi(t)$ fonksiyonları

$$\mathcal{R} = \{(t, u) : t_0 - a - \tau(t) \leq t \leq t_0 + a, \quad |u - u_0| \leq b; \quad a, b \in \mathcal{R}\}$$

bölgesinde sürekli olduğunda ve f Lipschitz sabit koşulunu sağladığında (3.18) denklemi $\mathcal{R}$ üzerinde bir çözüme sahip olur. Varlık teoreminin bir hipotezi, $f, \frac{\partial f}{\partial u(t)}, \frac{\partial f}{\partial u(t-\tau(t))}$ 'nin

$\mathcal{R}$ bölgesinde sürekli olmasıdır. Aynı zamanda bu durum, f 'nin $\mathcal{R}$ içinde sınırlı olması gerektiği anlamına gelir. Bu da M pozitif bir gerçektek sayı olmak üzere $\mathcal{R}$ bölgesindeki tüm noktalar için $|f(t, u_1, u_2)| \leq M$ eşitsizliğini sağladığında olur.

$h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ ve $\mathcal{R}$ 'nin içinde kalan $\mathcal{R}_1 = \{(t, u) : |t - t_0| \leq h, |u - u_0| \leq b\}$ dikdörtgensel bölgeyi şeklinde tanımlayalım. Lemma 3.4 kullanılarak (3.18) denklemi

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s), \varphi(s - \tau(s)))ds \quad (3.20)$$

gecikmeli integral denklemi olarak yazılır. Bu denklemin Picard iterasyonu

$$\varphi_n(t) = \varphi_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_{n-1}(s), \varphi_{n-1}(s - \tau(s)))ds \quad (3.21)$$

şeklinde dir. Tezin bu bölümünde bu çözüm dizisinin yakınsaklığı kanıtlanacaktır. Denklem (3.18)'in varlık ve tekliği ile ilgili kanıtın temel noktalarından biri, çözüm u 'nun integral denklemi olan (3.20) çözümünün φ ile eşdeğer olmasıdır.

Bu bölümdeki teorem ve ispatlarının açıklaması için [31] ile [38] kaynaklarına başvurulmuştur.

Teorem 3.13. Eğer $|t - t_0| \leq h$ ise $n = 1, 2, \dots$ değerleri için $|\varphi_n(t) - \varphi_0| \leq b$ olur.

İspat. Teorem 3.13'ün ispatı için tümevarım yöntemini ele alalım. İlk adım olarak (3.21) denklemini $|t - t_0| \leq h$ aralığında $n = 1$ değeri için değerlendirilirse

$$\begin{aligned} |\varphi_1 - \varphi_0| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, \varphi_0(s), \varphi_0(s - \tau(s)))ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(s, \varphi_0(s), \varphi_0(s - \tau(s)))| ds \\ &\leq M \int_{t_0}^t ds \\ &= M(t - t_0) \\ &\leq Mh \\ &= b. \end{aligned}$$

Tümevarım metodunun ikinci adımı olarak eğer $|t - t_0| \leq h$ için $|\varphi_{n-1}(t) - \varphi_0| \leq b$ doğruluğu kabul edilir ve n değeri için eşitsizlik yazılırsa

$$\begin{aligned}
|\varphi_n - \varphi_0| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, \varphi_{n-1}(s), \varphi_{n-1}(s - \tau(s))) ds \right| \\
&\leq \int_{t_0}^t |f(s, \varphi_{n-1}(s), \varphi_{n-1}(s - \tau(s)))| ds \\
&\leq M \int_{t_0}^t ds \\
&= M(t - t_0) \\
&\leq Mh \\
&= b.
\end{aligned}$$

Böylece tüm n değerleri için $|t - t_0| \leq h$ aralığında $|\varphi_n(t) - \varphi_0| \leq b$ eşitizliğinin sağlandığı ispatlanmış olur. $\square$

Teorem 3.14. Eğer $|t - t_0| \leq h$ ise $n = 1, 2, \dots$ değerleri için $(t, \varphi_n(t))$ fonksiyonları $\mathcal{R}_1$ bölgesindedir.

Teorem 3.15. (3.21) gecikmeli integral denkleminin $\{\varphi_n\}$ çözümleri $\mathcal{R}_1$ üzerinde düzgün şekilde yakınsar.

İspat. φ_n fonksiyonunu

$$\varphi_n = \varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_0) + \dots + (\varphi_n - \varphi_{n-1})$$

şeklinde yazalım.

$$\varphi_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi_{n+1} - \varphi_n) \tag{3.22}$$

sonsuz toplamının yakınsaması $\{\varphi_n\}$ dizisinin yakınsaması ile eş değerdir. Bu yüzden, Teorem 3.15'in ispatı için $\{\varphi_n\}$ çözüm dizisinin yakınsaması yerine (3.22) sonsuz toplamının yakınsaması ele alınacaktır. $R_n(t) = \varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)$ olarak gösterilmiş olsun. Buradan

$$|R_n(t)| = |\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{t_0}^t |f(s, \varphi_n(s), \varphi_n(s - \tau(s))) - f(s, \varphi_{n-1}(s), \varphi_{n-1}(s - \tau(s)))| ds \\
&\leq L \int_{t_0}^t [| \varphi_n(s) - \varphi_{n-1}(s) | + | \varphi_n(s - \tau(s)) - \varphi_{n-1}(s - \tau(s)) |] ds \\
&= L \int_{t_0}^t [| R_{n-1}(s) | + | R_{n-1}(s - \tau(s)) |] ds. \tag{3.23}
\end{aligned}$$

Burada L Lipschitz sabitidir. (3.23) de $n = 0$ için

$$\begin{aligned}
| R_0(t) | &= | \varphi_1(t) - \varphi_0(t) | \\
&= \left| \varphi_0(t) + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_0(s), \varphi_0(s - \tau(s))) - \varphi_0(t) \right| ds \\
&= \left| \int_{t_0}^t f(s, \varphi_0(s), \varphi_0(s - \tau(s))) \right| ds \\
&\leq M \int_{t_0}^t ds \\
&= M(t - t_0) \\
&\leq Mh.
\end{aligned}$$

Benzer şekilde $n = 1$ için

$$\begin{aligned}
| R_1(t) | &= | \varphi_2(t) - \varphi_1(t) | \\
&\leq L \int_{t_0}^t [| R_0(s) | + | R_0(s - \tau(s)) |] ds \\
&\leq L \int_{t_0}^t [M | s - t_0 | + M | s - \tau(s) - t_0 |] ds \\
&\leq L \int_{t_0}^t [2M | s - t_0 |] ds \\
&= 2LM \frac{|t - t_0|^2}{2!} \\
&= 2LM \frac{h^2}{2!}.
\end{aligned}$$

$n = 2$ için

$$\begin{aligned}
|R_2(t)| &= |\varphi_3(t) - \varphi_2(t)| \\
&\leq L \int_{t_0}^t [|R_1(s)| + |R_1(s - \tau(s))|] ds \\
&\leq L \int_{t_0}^t \left[\frac{2LM}{2!} |s - t_0|^2 + \frac{2LM}{2!} |s - \tau(s) - t_0|^2 \right] ds \\
&\leq L \int_{t_0}^t \left[\frac{2LM}{2!} |s - t_0|^2 + \frac{2LM}{2!} |s - t_0|^2 \right] ds \\
&= 4L^2 M \frac{|t - t_0|^3}{3!} \\
&= 4L^2 M \frac{h^3}{3!}.
\end{aligned}$$

n değerlerini arttırarak yazmaya devam edersek $n = m$ için genel olarak

$$\begin{aligned}
|R_m(t)| &\leq 2^m L^m M \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} \\
&= \frac{M (2Lh)^{m+1}}{2L (m+1)!}
\end{aligned}$$

formülü elde edilir. Yukarıdaki $n = 0, 1, 2, \dots, m$ değerleri için tüm $R_n(t)$ fonksiyonları toplanırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^m |R_n(t)| &\leq \frac{M}{2L} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2Lh)^{n+1}}{(n+1)!} \\
&= \frac{M}{2L} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2Lh)^n}{(n)!} \\
&= \frac{M}{2L} (e^{2Lh} - 1)
\end{aligned}$$

olur. Bu yüzden

$$\varphi_n \rightarrow \varphi_0 + \frac{M}{2L} (e^{2Lh} - 1).$$

□

Teorem 3.16. (3.21) denkleminin yaklaşık çözümler dizisi, (3.20) denkleminin tam çözümüne yakınsar.

İspat. $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$ olduğunu göstermek için (3.21) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{n+1}(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \varphi_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_n(s), \varphi_n(s - \tau(s))) ds \right\} \\ &= \varphi_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(s, \varphi_n(s), \varphi_n(s - \tau(s))) ds. \end{aligned}$$

Buradan da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(s, \varphi_n(s), \varphi_n(s - \tau(s))) ds = \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s), \varphi(s - \tau(s))) ds$$

olduğunu göstermek için

$$\begin{aligned} & \left| \int_{t_0}^t f(s, \varphi_n(s), \varphi_n(s - \tau(s))) ds - \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s), \varphi(s - \tau(s))) ds \right| \\ & \leq \int_{t_0}^t |f(s, \varphi_n(s), \varphi_n(s - \tau(s))) - f(s, \varphi(s), \varphi(s - \tau(s)))| ds \\ & \leq L \int_{t_0}^t [| \varphi_n(s) - \varphi(s) | + | \varphi_n(s - \tau(s)) - \varphi(s - \tau(s)) |] ds \\ & \leq L \int_{t_0}^t \sum_{n=0}^{\infty} [| R_n(s) | + | R_n(s - \tau(s)) |] ds \\ & \leq Lh \frac{M}{L} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2Lh)^{n+1}}{(n+1)!} \\ & \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Bu yüzden

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{n+1}(t) &= \varphi_0(t) + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s), \varphi(s - \tau(s))) ds \\ &= \varphi(t). \end{aligned}$$

□

Teorem 3.17. $\varphi(t)$ sürekli bir fonksiyondur.

İspat. $\{\varphi_n\}$ düzgün yakınsak bir dizi ve her bir $\varphi_n(t)$ fonksiyonu sürekli olduğundan limit fonksiyonu olan $\varphi(t)$ de sürekli dir. Bu nedenle sonuç olarak, integral denklemi (3.20)'nin sürekli bir çözümü $\varphi(t)$ mevcuttur. Bu da (3.18) denkleminin bir çözümünün var olduğu anlamına gelir. □

Teorem 3.18. Eğer (3.20)'de tanımlanan integral denklemi bir çözüme sahipse o zaman bu çözüm tektir. Bu durum, (3.18) GDD'in tek bir çözüme sahip olmasıyla eşdeğerdir.

İspat. $\varphi_1(t)$ ve $\varphi_2(t)$ fonksiyonlarının her biri (3.20) integral denkleminin birer çözümü olsun. O zaman

$$\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = \int_{t_0}^t [f(s, \varphi_1(s), \varphi_1(s - \tau(s))) - f(s, \varphi_1(s), \varphi_1(s - \tau(s)))] ds$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca $\forall t \in \mathcal{R}$ için $(t, \varphi_1(t), \varphi_1(t - \tau(t)))$ ve $(t, \varphi_2(t), \varphi_2(t - \tau(t)))$ noktalarını içeren $\mathcal{R}_1$ kümesinde tanımlanan tüm f fonksiyonlarının L Lipschitz sabiti altında Lipschitz şartını sağlamasından dolayı

$$\begin{aligned} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| &= \left| \int_{t_0}^t [f(s, \varphi_1(s), \varphi_1(s - \tau(s))) - f(s, \varphi_1(s), \varphi_1(s - \tau(s)))] ds \right| \\ &\leq L \int_{t_0}^t [|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)| + |\varphi_1(s - \tau(s)) - \varphi_2(s - \tau(s))|] ds \\ &\leq Lh \sup_{t_0 \leq s \leq b} [|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)| + |\varphi_1(s - \tau(s)) - \varphi_2(s - \tau(s))|]. \end{aligned}$$

$0 < Lh < 1$ olarak alınırsa

$$[|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)| + |\varphi_1(s - \tau(s)) - \varphi_2(s - \tau(s))|] < \varepsilon.$$

Sonuç olarak $\forall t \in \mathcal{R}$ için $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ olur. Bu da çözümün tekliğinin ispatıdır. □

GDD'lerin sabit gecikmeli, gecikmesi değişkene bağlı olan çeşitleri ve farklı mertebelere sahip şekillerinin varlık ve teklik teoremlerinin incelemesi için [31] ile [38] kaynaklarına bakılabilir.

3.10. LİNEER GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ANALİTİK ÇÖZÜMLERİ

GDD'lerin analitik çözümleri, geniş bir uygulama alanına sahiptir. Bu çözümler, bir sistemin geçmiş durumlarına dayanarak gelecekteki davranışlarını anlamak, sistemlerin kararlılığını değerlendirmek ve tasarım süreçlerinde güvenilir sonuçlar elde etmek için önemlidir. Özellikle mühendislik, biyoloji, ekonomi ve fizik gibi alanlarda, GDD'lerin analitik çözümleri, sistemlerin dinamiklerini daha iyi anlamamıza ve karmaşık olayları daha etkili bir şekilde modellememize olanak tanır. Ancak bu çözümlerin elde edilmesi genellikle karmaşık matematiksel hesaplamaları gerektirir ve bu da çözüm sürecini zorlu kılar. Matematiksel zorluklar, genellikle kesin çözümlerin analitik ifadelerini bulmayı zorlaştırabilir. Bu nedenle GDD'lerin analitik çözümleri genellikle özel durumları kapsar ve genel çözümleri bulmak karmaşık olabilir. Bu alandaki araştırmalar, analitik çözümlerin sınırlamalarını aşmak ve sayısal yöntemlerle daha geniş bir uygulama alanına yayılmak için devam etmektedir.

İlk olarak Bellman (1961)'de GDD'lerin çözümünü bulabilmek için çözüm metoduna kendi isminin verildiği Bellman (adım) yöntemini tanıttı. Üretilen bu yöntem zaman gecikmesine sahip problemler için en uygun çözümleri bulma ve dinamik programlama prensibine dayanır. Bellman yönteminin temel fikri, GDD sorununu tekrarlayan alt problemler dizisine indirmektedir. Uygulanan bu teknik, zaman aralığını ayrı ayrı zaman aralıklarına ayırmayı ve GDD'yi çözüme dair geriye doğru kaymalar içeren bir özyinelemeli denklem olarak formüle etmeyi içerir. Ayrıca bu metod, sistemin geçmişini çözüm sürecine dahil etmeyi mümkün kılar. İteratif süreç ilk olarak çözüm için bir başlangıç tahmini tanımlayarak başlar. Ardından da her zaman adımında özyinelemeli denklem, çözümün gecikme değerlerini dikkate alarak çözülür. Süreç, her iterasyonda çözümü iyileştirerek yakınsamaya ulaşana kadar devam eder. Bununla birlikte, Bellman'ın bu sorunları çözmek için kullandığı iterasyonlar büyük ölçekli sistemlerde maliyetli ve zaman alıcı olabilir. Öte yandan bu önerilen yöntemde geriye doğru kaydırılmış çözümleri depolamayı gerektiren yaklaşım, özellikle büyük zaman adımları veya uzun gecikme süreleri olduğunda büyük bellek gereksinimlerini gerektirmektedir. Bunun yanı sıra Bellman yöntemi çözümü iteratif olarak iyileştirirken bazı durumlarda yavaş yakınsayabileceği için daha fazla iterasyon gerektirebilir.

[30] ise, GDD'leri çözmek için Euler formülünü kullanma yöntemini önerdi. Bu yöntem, GDD'deki gecikme değerlerinin doğrusal interpolasyon ile yaklaşık olarak hesaplanması ve zaman alanının küçük zaman adımlarına ayrıştırılması ile ilgilidir. Bu yaklaşımlar GDD'e yerleştirilerek, bir fark denklemi elde edilir. İteratif işlem, belirli bir zaman adımında çözüm için başlangıç tahmini tanımlanarak başlar. Ardından, Euler formülünden türetilen fark denklemi kullanılarak, bir sonraki zaman adımındaki çözüm hesaplanır. Bu işlem, istenen zaman aralığına kadar her bir sonraki zaman adımı için tekrarlanır. Elsgolts yöntemi, hesaplama açısından oldukça verimlidir ancak doğrusal interpolasyon kullanımı sayısal hatalara neden olabilir. Ayrıca çözümün doğruluğu seçilen zaman adımı boyutuna bağlıdır. Bu nedenle doğru sonuçlar elde etmek için zaman adımının dikkatli bir şekilde düşünülmesi ve yöntemin kararlılık ile yakınsaklık özelliklerinin analiz edilmesi gereklidir.

[51] GDD'lerin çözümü için yüksek dereceli bir yöntem geliştirmiştir. Bu yöntem, gecikme değerlerini yüksek dereceli interpolasyon teknikleri ile yaklaşıp tek adımlı bir yaklaşım kullanır ve belirli bir zaman aralığına kadar her adımda çözümü tekrarlı olarak günceller. Euler yöntemi gibi daha basit yöntemlerle karşılaştırıldığında, Tavernini yöntemi daha az sayısal hata ile daha doğru bir yaklaşım sağlar. Ancak interpolasyonun yüksek derecesi daha fazla hesaplama kaynağı gerektirmesinden dolayı yöntemi uygularken doğruluk ve maliyet arasında bir denge sağlanmalıdır.

Literatürden açıkça anlaşılacağı gibi GDD'lerin sayısal çözümüne geniş bir ilgi olduğu gözlemlenmektedir. Bu bölümde, tezin ilerleyen kısımlarında kullanılma gerekliliği olan bazı genel çözümün elde edilme yöntemlerine yer verilecektir. Ayrıca çözüm yöntemlerinin açıklanması için ele alınan örnekler ve bu örneklerden elde edilen grafik ve tablolarla detaylı bir şekilde incelenecektir.

3.10.1. Bellman Adım Metodu

Bellman adım metodu anlatılırken GDD'in sahip olduğu gecikme terimi sayısına ve gecikme teriminin sabit veya bir değişkene bağlı olarak verilmiş şekline göre gruplandırılarak yöntemler tanıtılacaktır.

1) Sabit Bir Gecikmesi Olan Gecikmeli Diferansiyel Denklemler

(3.16)-(3.17) şeklinde verilen GDD'in çözümünün bulunması problemini ele alalım.

Burada $\tau > 0$ sabit bir gecikme, $\varphi_0(t)$, I_{t_0} 'da bir fonksiyon ve $f(t, u_1, u_2)$, $G = \{t \geq t_0, -\infty < u_i < \infty, i = 1, 2\}$ kümesinde sürekli bir fonksiyon olsun.

İlk olarak (3.16)-(3.17) probleminin çözümünü $I_1 = [t_0, t_0 + \tau]$ aralığında inceleyelim. Açıkça görülebilir ki, $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau$ ise, $u(t - \tau)$ fonksiyonundaki gecikmeden dolayı $t_0 - \tau \leq t - \tau \leq t_0$ olur. Bu nedenle $t \in I_1$ için $u(t - \tau)$ fonksiyonu I_0 aralığındaki $\varphi_0(t - \tau)$ fonksiyonuna eşit olur. Böylece denklem sistemi, aşağıdaki BDP'nin çözümünü bulma problemine evrilir:

$$u'(t) = f(t, u(t), \varphi_0(t - \tau)), \quad (3.24)$$

$$u(t_0) = \varphi_0(t_0). \quad (3.25)$$

$\mathbb{G}_0 = \{t_0 \leq t \leq t_0 + \tau, -\infty < u_i < \infty, i = 1, 2\}$ üzerinde $f(t, u(t), \varphi_0(t - \tau))$ fonksiyonu sürekli olduğundan, çözümün varlığına varlık ve teklik teoremine göre, (3.24)-(3.25) probleminin $[t_0, t_0 + h]$ aralığında tanımlanan en az bir çözümü var demektir. Burada $\varphi_1(t)$, (3.24)-(3.25) denklem sisteminin çözümünü gösterebilir. Benzer şekilde $I_2 = [t_0 + \tau, t_0 + 2\tau]$ aralığında (3.16)-(3.17) probleminin çözümünün bulunması sırasında $u(t - \tau) = \varphi_1(t - \tau)$ olduğundan problem

$$u'(t) = f(t, u(t), \varphi_1(t)) \quad (3.26)$$

eşitliğinin çözümünü bulmayı ve

$$u(t_0 + \tau) = \varphi_1(t_0 + \tau) \quad (3.27)$$

başlangıç koşulunu sağlamayı gerektirir.

$f(t, u(t), \varphi_1(t - \tau))$ fonksiyonu $\mathbb{G}_1 = \{t_0 + \tau \leq t \leq t_0 + 2\tau, -\infty < u_i < \infty, i = 1, 2\}$ üzerinde sürekli olduğundan (3.26)-(3.27) probleminin çözümü mevcuttur.

$\varphi_2(t)$, I_2 üzerinde tanımlı olan (3.26)-(3.27) probleminin çözümünü gösterebilir.

$I_3 = [t_0 + 2\tau, t_0 + 3\tau]$ aralığı için (3.16)-(3.17) probleminin çözümünün bulunması sırasında $u(t - \tau) = \varphi_2(t - \tau)$ olur ve problem aşağıdaki ADD'in çözümünün

bulunması problemine dönüşür:

$$u'(t) = f(t, u(t), \varphi_2(t)), \quad (3.28)$$

$$u(t_0 + \tau) = \varphi_1(t_0 + \tau). \quad (3.29)$$

Bu sürece devam edilerek elde edilen genel çözüm

$$u(t) = \begin{cases} \varphi_0(t), & t \in I_0, \\ \varphi_1(t), & t \in I_1, \\ \varphi_2(t), & t \in I_2, \\ \dots & \dots \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir.

Yukarıdaki yöntemi kullanarak BDP'nin çözümünü bulma yöntemi, *adım yöntemi* veya *ardışık tümleme yöntemi* olarak adlandırılır. Adım yönteminin özelliği, her sonlu aralıkta sapma eğiliminde olan GDD'den ADD'e geçiş yapılmasıdır.

Örnek 3.19. Aşağıdaki sabit bir gecikmeye sahip GDD'i çözmek için adım yöntemini kullanalım.

$$u'(t) = u(t - \pi), \quad t \in [0, 2\pi],$$

$$u(t) = \cos(t), \quad t \in [-\pi, 0].$$

Adım yöntemi kullanarak test probleminin çözümünün ilk olarak $I_1 = [0, \pi]$ aralığında bulunması ile başlanıldığında $t \in I_1$ aralığında iken $t - \pi \in [-\pi, 0]$ olacağından test problemi

$$u'(t) = \cos(t - \pi),$$

$$u(0) = \cos(0) = 1$$

BDP'ne dönüşür. Elde edilen BDP çözüldüğünde ise problemin I_1 aralığındaki çözümü $\varphi_1(t) = -\sin(t) + 1$ olarak elde edilir. Benzer şekilde, $I_2 = [\pi, 2\pi]$ aralığındaki çözümün bulunması için $t \in I_2$ aralığında alındığında gecikmeden dolayı $t - \pi \in [0, \pi]$, yani $t - \pi \in I_1$ aralığında olacaktır. Dolayısı I_2 aralığında test

probleminin çözümünün bulunması

$$u'(t) = \sin(t - 2\pi) + 1,$$

$$u(\pi) = 1$$

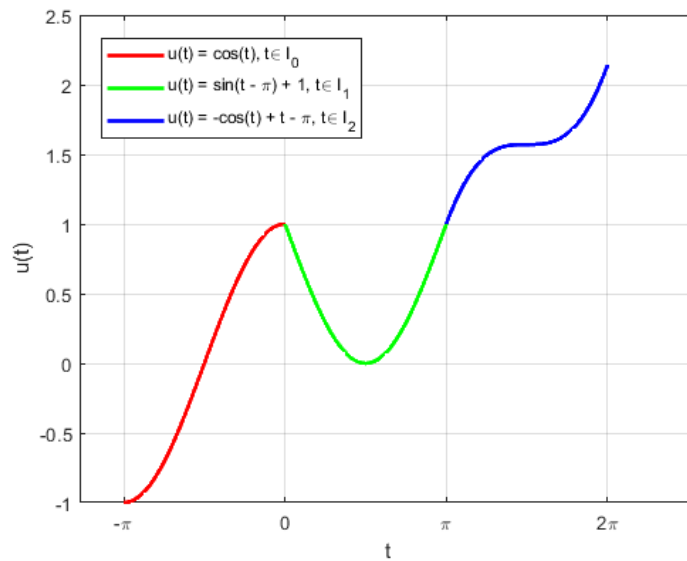
BDP'nin çözümünün bulunması problemine dönüşür. Bu denklem sisteminin çözülmesi ile de I_2 aralığında çözüm $\varphi_2(t) = -\cos(t) + t - \pi$ olarak elde edilir.

Böylece problemin kesin çözümü

$$u(t) = \begin{cases} \cos(t), & t \in [-\pi, 0], \\ -\sin(t) + 1, & t \in [0, \pi], \\ -\cos(t) + t - \pi, & t \in [\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

İstenilen aralığa ulaşana kadar adım yöntemini kullanarak problemin çözümü bulunmaya devam edilebilir.

Elde edilen kesin çözümlerden veya çözümleri kullanarak elde edilen grafiklerde kolayca görülebileceği gibi denklemin sağ tarafı ve başlangıç fonksiyonu herhangi bir mertebeye sahip türevlere sahip olsa da çözümün birinci türevi t_0 'da, ikinci türevi $t = \pi$ 'de ve süreç aynı şekilde devam edildiğinde n 'inci mertebeye türevi $t = n\pi$ 'de sahip olmadığı görülür.



Şekil 3.3. I_0 , I_1 ve I_2 aralıklarındaki kesin çözümlerin karşılaştırılması

2) Birden Fazla Sabit Gecikmesi Olan Gecikmeli Diferansiyel Denklemler

(3.16)-(3.17) şeklinde verilen GDD'in birden fazla gecikmeye sahip, genel hali

$$u'(t) = f(t, u(t), u(t - \tau_1), \dots, u(t - \tau_m)) \quad (3.30)$$

şeklinde olan ve

$$u(t_0) = \varphi(t_0), \quad t \in I_{t_0} = [t_0 - \tau_m, t_0] \quad (3.31)$$

koşulunu sağlayan bir çözümünün bulunması problemini ele alalım. Burada $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m$ olsun. Bir önceki bölümde sabit bir gecikmeye sahip GDD sisteminin çözülmesinde kullanılan adım metodunda olduğu gibi ilk olarak $[t_0, t_0 + \tau_1]$ aralığında probleminin çözümünün araştırılması ile başlayalım. $t \in [t_0, t_0 + \tau_1]$ olduğunda gecikme terimlerinden dolayı $t - \tau_1 \in I_{t_0}, \dots, t - \tau_m \in I_{t_0}$ olduğu açıkça görülür. Bu nedenle $[t_0, t_0 + \tau_1]$ aralığında

$$u(t - \tau_1) = \varphi_0(t - \tau_1), \dots, u(t - \tau_m) = \varphi_0(t - \tau_m)$$

olur. Araştırılan problem, $u(t_0) = \varphi_0(t_0)$ başlangıç-değer şartını sağlayan

$$u'(t) = f(t, u(t), \varphi_0(t - \tau_1), \dots, \varphi_0(t - \tau_m))$$

BDP'nin çözümünü bulma işlemine dönüşür.

İlk adımda, $[t_0, t_0 + \tau_1]$ aralığında ele alınan problem için çözümü $\varphi_1(t)$ olarak gösterildiğini varsayalım ve ikinci adım olarak $[t_0 + \tau_1, t_0 + 2\tau_1]$ aralığını ele alalım. Bu aralıktaki t için $t - \tau_i \in [t_0 + \tau_1 - \tau_i, t_0 + 2\tau_1 - \tau_i]$ $i = 1, 2, \dots, m$ olduğundan, $u(t - \tau_i)$ değerleri $\varphi_0(t)$ veya $\varphi_1(t)$ ile ifade edilir. Bu nedenle elde edilecek çözüm aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\psi_1(t) = \begin{cases} \varphi_0(t), & t_0 - \tau_m \leq t \leq t_0, \\ \varphi_1(t), & t_0 \leq t \leq t_0 + \tau_1. \end{cases}$$

Çözümü araştırılan bu problemde tek bir gecikme olmamasından dolayı her bir aralık için elde edilen çözümlerin yazılımındaki aralıklar birden fazla gecikme terimine bağlı olarak oluşturulmaktadır. İkinci adımda ise (3.30)-(3.31) probleminin çözümü,

$\psi_1(t_0 + \tau_1)$ başlangıç koşulunu sağlayan ve

$$u'(t) = f(t, u(t), \psi_1(t - \tau_1), \dots, \psi_1(t - \tau_m))$$

şeklindeki ADD'in bir çözümünün bulunması problemine dönüşür.

Örnek 3.20. Aşağıdaki birden fazla gecikmeye sahip GDD problemini çözmek için yukarıda ifade edilen adım yöntemini kullanalım.

$$u'(t) = 2u(t - 0.6) - u(t - 1),$$

$$u(t) = 1, \quad t \in [-1, 0].$$

Problem $\tau_1 = 0.6$ ve $\tau_2 = 1$ olmak üzere iki farklı gecikme sabiti içermektedir. Bu yüzden adım yöntemini kullanırken her iki gecikmeye de dikkat ederek kullanacağımız aralıkları oluşturmamız gerekmektedir. İlk olarak $I_1 = [0, 0.6]$ alınırsa bu aralıkta oluşan problem:

$$\int_0^t u'(s)ds = 2 \int_0^t u(s - 0.6)ds - \int_0^t u(s - 1)ds,$$

$$u(t) = 1 + t, \quad t \in I_1$$

şeklinde olur. $t \in [-1, 0]$ ve $t \in I_1$ aralığı için genel çözüm:

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-1, 0], \\ 1 + t, & t \in [0, 0.6]. \end{cases}$$

Daha sonraki adımda problemin $I_2 = [0.6, 1.2]$ aralığındaki çözümünün bulunması istenildiğinde ise tekrar iki sabit gecikmenin dikkate alınması gerekmektedir. Çünkü $t \in I_2$ olduğunda $t - 0.6 \in [0, 0.6]$ aralığında olmasından dolayı I_1 aralığında bulunan çözüm kullanılır. Ancak $t - 1 \in [-0.4, 0.6]$ aralığına düştüğü için bu aralıktaki $t - 1$ değerleri için hem I_0 'daki hem de I_1 aralığında bulunan iki çözüm de kullanılmalıdır. Yapılan bu işlemden sonra problem ADD'de çözüm bulma problemine dönüştürülür. Ancak gecikme teriminden dolayı oluşan $[-0.4, 0.6]$ aralığının daha önceden bulunan iki farklı çözümü de içermesinden dolayı ADD probleminin çözümü için elde edilen integrallerin sınırlarına dikkat edilmesi

gerekmektedir. Sonuçta problem

$$\begin{aligned}u'(t) &= 2\varphi(t - 0.6) - \varphi(t - 1), \\u(0.6) &= 1.6\end{aligned}$$

şekline dönüşür. Yukarıda verilen BDP'nin çözümü için denklemin her iki tarafından da 0 ile t arasında integrali alınırsa

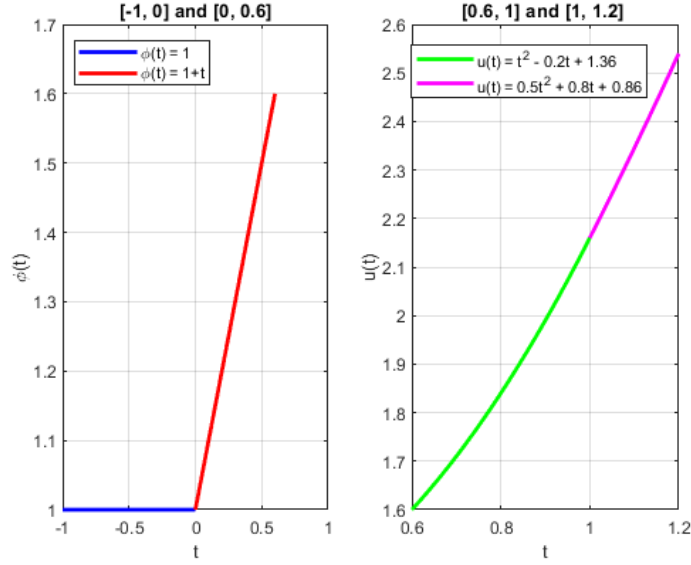
$$\begin{aligned}\int_{0.6}^t u'(s)ds &= 2 \int_{0.6}^t u(s - 0.6)ds - \int_{0.6}^t u(s - 1)ds \\&= 2 \int_{0.6}^1 u(s - 0.6)ds + 2 \int_1^t u(s - 0.6)ds \\&\quad - \int_{0.6}^1 u(s - 1)ds - \int_1^t u(s - 1)ds\end{aligned}$$

olur. İntegral içindeki fonksiyonlar yerine koyulduktan ve gerekli işlemler yapıldıktan sonra aşağıda verilen genel çözüm elde edilir:

$$u(t) = \begin{cases} t^2 - 0.2t + 1.36, & 0.6 < t \leq 1, \\ 0.5t^2 + 0.8t + 0.86, & 1 < t \leq 1.2. \end{cases}$$

GDD problemlerinde birden çok sabit gecikme olsa bile yine de adım yöntemini kullanarak problemi çözebiliriz. Ancak sadece bir gecikme olan problemleri çözmekten daha zor olan kısım aralıkları belirlemektir. Problemin farklı gecikmelere sahip olması, aralık belirleme işleminde gecikme terimlerine sahip fonksiyonların farklı aralıklara sığramasına sebep olmaktadır.

Aşağıda test probleminin genel çözümünün farklı aralık değerlerinde elde edilen çözümlerinin daha iyi görülebilmesi için grafikler verilmiştir.



Şekil 3.4. I_0 , I_1 ve I_2 aralıklarındaki kesin çözümlerin karşılaştırılması

3) Gecikmesi Bir Değişkene Bağlı Olan Gecikmeli Diferansiyel Denklemler

(3.18)-(3.19)'da verilen problemin çözümünün bulunması problemine adım metodunun uygulamasını ele alalım. Burada $\tau(t) \geq 0$, $\varphi_0(t)$ ve $f(t, u_1, u_2)$ fonksiyonları sırasıyla $[t_0, T]$, I_{t_0} ve $\mathbb{G} = \{t_0 \leq t \leq T, -\infty < u_i < \infty, i = 1, 2\}$ aralıklarında süreklidir.

Bu bölümde $\tau(t)$ 'nin mümkün olan değerlerine karşılık adım metodunun kullanılmasında oluşan farklılıklara yer verilecektir.

- a) $\inf_{t_0 \leq t \leq T} \tau(t) = \delta > 0$ olduğu durumu ele alalım. t argümanının $I_1 = [t_0, t_0 + \delta]$ ($t_0 + \delta < T$) aralığı içinde değişmesi durumunda, $h(t) = t - \tau(t) \leq t_0$ olur.

Bu nedenle (3.18)-(3.19) problemi, I_1 aralığında bir çözüm bulma problemine dönüşür. Aynı zamanda problem, aşağıdaki ADD'in çözümünü bulmakla eşdeğerdir:

$$u'(t) = f(t, u(t), \varphi_0(t - \tau(t))), \quad (3.32)$$

$$u(t_0) = \varphi_0(t_0). \quad (3.33)$$

Verilen koşullar altında, $f(t, u(t), \varphi_0(t - \tau(t)))$ fonksiyonu, $\mathbb{G} = \{t_0 \leq t \leq t_0 + \delta, -\infty < u_i < \infty\}$ üzerinde süreklidir. Ayrıca Peano teoremi, (3.32)-(3.33) problemi için $0 < \alpha \leq \delta$ olduğu durumda $[t_0, t_0 + \alpha]$ aralığında tanımlanmış

en az bir çözümü olan $\varphi_1(t)$ 'nin olduğunu gösterir. Bu durumda

$$\psi_1(t) = \begin{cases} \varphi_0(t), & t \in I_{t_0}, \\ \varphi_1(t), & t \in (t_0, t_0 + \alpha] \end{cases}$$

fonksiyonu (3.18)-(3.19) probleminin $[t_0, t_0 + \alpha]$ aralığındaki çözümüdür. Bu çözümün, (3.18)-(3.19) probleminin $t_0 + 2\delta < T$ olduğu $I_2 = [t_0 + \delta, t_0 + 2\delta]$ aralığında çözümünün bulunması için kullanıldığı düşünülür ise (3.18)-(3.19) probleminin çözümünün bulunması aşağıda ifade edilen ADD'in bir çözümünü bulmakla eşdeğer duruma gelir:

$$\begin{aligned} u'(t) &= f(t, u(t), \psi_1(t - \tau(t))), \\ u(t_0 + \delta) &= \varphi_0(t_0). \end{aligned}$$

Böylece $\inf_{t_0 \leq t \leq T} \tau(t) = \delta > 0$ olduğunda, adım yöntemi (3.18)-(3.19) problemini çözmek için uygulanır ve her adımda δ şartını sağlayan bir aralıkta çözüm bulunabilir.

- b) $\tau(t)$ fonksiyonunun türevlenebilir ve $\tau(t) < 1$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $h(t) = t - \tau(t)$ fonksiyonu kesin olarak artan bir fonksiyondur. Dolayısıyla $I_{t_0} = [t_0 - \tau(t_0), t_0]$ mevcuttur. $\gamma(t)$, $h(t)$ 'nin tersi olarak gösterilsin. İlk olarak $\gamma(t_0) > t_0$ durumunu ele alalım. Bu durumda $t \in \varepsilon_{t_0} = [t_0, \gamma(t_0)]$ için $h(t) \leq t_0$ ve ε_{t_0} , t 'leri belirleyen en büyük parçadır. İlk olarak (3.18)-(3.19) probleminin ε_{t_0} aralığında çözümünün bulunması işlemini (3.32)-(3.33) probleminin ε_{t_0} üzerinde bir çözümünün bulunması problemine dönüştürülmesi ile başlayalım. Buradan $\gamma(t_0) = t_0$ eşitliğinin, ε_{t_0} 'da sadece t_0 noktasından oluştuğu görülür. Öte yandan $\gamma(h(t_0)) = t_0$ ve $\gamma(t)$ monoton artan bir fonksiyon olduğunda $I_{t_0} = \{t_0\}$ olur. Bu durumda sadece $\tau(t_0) = 0$ olduğu zaman gerçekleşir. Bu nedenle $\gamma(t_0) = t_0$ olduğunda adım yöntemi uygulanamaz ve bu *özel bir durum* olarak adlandırılır. Özel bir durum olmadığında ve (3.32)-(3.33) probleminin ε_{t_0} üzerindeki çözümü $\varphi_1(t)$ olarak tanımlandığı durumda ikinci adım olarak (3.18)-(3.19) problemi $\varepsilon_{\gamma(t_0)} = [\gamma(t_0), \gamma(\gamma(t_0))]$ aralığında ele alınır. Daha sonra da problemin bu

aralıktaki çözümü, aşağıdaki problemi çözme işlemine dönüştürülür:

$$\begin{aligned} u'(t) &= f(t, u(t), \varphi_1(t - \tau(t))), \\ u(\gamma(t_0)) &= \varphi_1(\gamma(t_0)). \end{aligned}$$

Böylece GDD'lerde sabit gecikmenin farklı bir değişkene bağlı olması problemlerin çözümünde GDD'lerin ADD'lere dönüştürülmesi veya her bir adım için gecikme teriminden kaynaklanan aralıklarının oluşturulması, gecikme teriminin sabit olan denklem sistemlerinin çözümüne göre daha karmaşık olduğu gösterilmiş olur.

Örnek 3.21. Aşağıdaki gecikmesi bir değişkene bağlı olarak verilen GDD'in çözümünü bulmak için adım yöntemini kullanalım.

$$\begin{aligned} u'(t) &= u\left(\frac{t}{2}\right), \quad 1 \leq t \leq 4, \\ u(t) &= t, \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

Bu problemi çözmek için yukarıda anlatılan adım metodunu gecikmesi bir değişkene bağlı olarak verilen test problemine uygulayalım. Burada $\tau(t) = \frac{t}{2}$. Dolayısıyla ters fonksiyon $\gamma(t) = 2t$ ve $\varepsilon_{t_0} = [\frac{1}{2}, 1]$ olacaktır. İlk aralık $\varepsilon_1 = [1, \gamma(1)] = [1, 2]$. ε_1 aralığı için GDD

$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{t}{2}, \\ u(1) &= 1 \end{aligned}$$

ADD'in çözümünün bulunması problemine dönüştürülür. Bu problemin çözümü ε_1 aralığında $u(t) = \frac{t^2}{4} + \frac{3}{4}$ olur.

İkinci adım $\varepsilon_2 = [\gamma(1), \gamma(\gamma(1))] = [2, 4]$ alınırsa problem

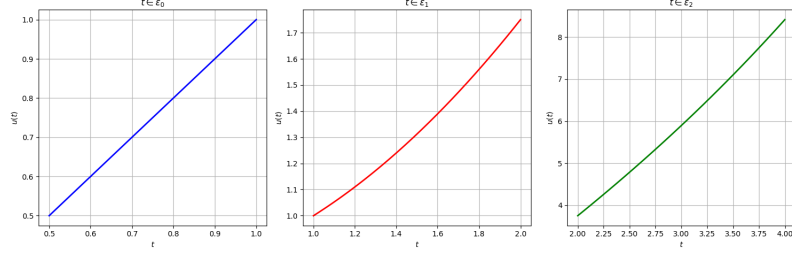
$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{t^2}{16} + \frac{3}{4}, \\ u(2) &= \frac{7}{4} \end{aligned}$$

şekline dönüşür. Bu problemin de ε_2 için çözümü ise

$$u(t) = \frac{t^3}{48} + \frac{7t}{4} + \frac{1}{12}$$

olur.

Aşağıda verilen grafiklerde test probleminin gecikme teriminden kaynaklı oluşturulan aralıklardaki çözümleri incelenebilir.



Şekil 3.5. ε_0 , ε_1 ve ε_2 aralıklarındaki kesin çözümlerin karşılaştırılması

4) Nötr Tip Gecikmeli Diferansiyel Denklemler

Adım yöntemini kullanarak sabit bir gecikmeli nötr tip denklem için başlangıç koşulunu sağlayan çözümünü bulma metodunu ele alalım.

$$u'(t) = f(t, u(t), u(t - \tau), u'(t - \tau)), \quad (3.34)$$

$$u(t) = \varphi_0(t), \quad t \in I_{t_0}. \quad (3.35)$$

Burada gecikme sabiti τ 'dur. $f(t, u_1, u_2, u_3)$ fonksiyonu, $\mathbb{G} = \{t_0 \leq t \leq T, -\infty < u_i < \infty, i = 1, 2, 3\}$ kümesinde sürekli ve $\varphi_0(t)$ fonksiyonunun I_{t_0} 'da sürekli türevi olan fonksiyonlar olsun. Bu durumda ele alınan problem $u(t) = \varphi_0(t)$ başlangıç koşuluyla birlikte $I_1 = [t_0, t_0 + \tau]$ aralığında

$$u'(t) = f(t, u(t), u(t - \tau), u'(t - \tau))$$

ADD'in çözümünü bulma problemine dönüştürülür. Verilen koşullar altında bu problemin bir çözümü olduğu görülebilir. $\varphi(t)$, $I_1 = [t_0, t_0 + \tau]$ aralığında tanımlanmış bir çözümü olsun. O zaman, (3.34)-(3.35) probleminin $I_2 = [t_0 + \tau, t_0 + 2\tau]$ aralığındaki çözümünü bulmak için başlangıç koşulu $u(t_0 + \tau) = \varphi_0(t_0 + \tau)$ olan

$$u'(t) = f(t, u(t), \varphi_1(t - \tau), \varphi_1'(t - \tau))$$

denkleminin bir çözümünü bulmamız gerekir. Kabul edilen koşullar altında, çözümün $(t_0 - \tau, t_0)$, $(t_0, t_0 + \tau)$, $(t_0 + \tau, t_0 + 2\tau)$, ... noktalarında sol ve sağ

türevlerinin olduğu gözlemlenebilir. Ancak çözüm $t_0, t_0 + \tau, t_0 + 2\tau, \dots$ noktalarında türevlere sahip olmayabilir. Aslında t_0 noktasında çözümün sol türevi $\varphi'_0(t_0 - \tau)$ 'ye ve sağ türevi de $\varphi_1(T- = +0) = f(t_0, \varphi_0(t_0), \varphi'_0(t_0 - \tau))$ 'ye eşittir. Bu nedenle çözüm yalnızca aşağıdaki koşul sağlandığında t_0 noktasında türevlere sahiptir:

$$\varphi'_0(t_0 - 0) = f(t_0 + \tau, \varphi_0(t_0), \varphi_0(t_0 - \tau), \varphi'_0(t_0 - \tau)). \quad (3.36)$$

Açıkça görülebileceği gibi, $t_0 + \tau$ noktasında, çözümün sol türevi

$$f(t_0 + \tau, \varphi_1(t_0 + \tau), \varphi(t_0), \varphi'_0(t_0 - \tau))$$

fonksiyonuna, sağ türevi ise

$$f(t_0 + \tau, \varphi_1(t_0 + \tau), \varphi(t_0), \varphi'_1(t_0 - \tau))$$

fonksiyonuna eşittir. Buradan (3.36) koşulu sağlandığında

$$f(t_0 + \tau, \varphi_1(t_0 + \tau), \varphi(t_0), \varphi'_0(t_0 - \tau)) = f(t_0 + \tau, \varphi_1(t_0 + \tau), \varphi(t_0), \varphi'_1(t_0 - \tau))$$

olur. Bu durumda, çözümün $t_0 + \tau$ noktasında sürekli bir türevi olduğu anlamına gelir. Bu yöntemle, (3.35) koşulu sağlandığında çözümün $t_0 + 2\tau, t_0 + 3\tau, t_0 + 4\tau \dots$ noktalarında sürekli bir türevi olduğu gösterilebilir. Ancak genel olarak (3.35)-(3.36) probleminin çözümü, aralıktan aralığa geçtikçe daha düzgün hale gelir. Yukarıda ifade edilen yöntem, değişken gecikmeli nötr tip denklemler için aynı şekilde uygulanabilir.

Örnek 3.22. Aşağıda verilen test problemini ele alalım.

$$\begin{aligned} u'(t) &= 24u\left(\frac{t}{2}\right)u'\left(\frac{t}{2}\right), & 1 \leq t \leq 4, \\ u(t) &= t, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

Verilen problemin çözümü için adım yöntemini uygulamadan önce, $\tau(t) = \frac{t}{2}$, $\gamma(t) = 2t$ ve $\varepsilon_0 = [\frac{1}{2}, 1]$ olduğuna dikkat edelim. Böylece, ilk aralık $\varepsilon_1 = [1, \gamma(1)] = [1, 2]$ olur ve problem aşağıdaki ADD sisteminin çözümünün bulunması problemine

dönüştürülür:

$$u'(t) = 12t,$$

$$u(1) = 1.$$

Buradan da ε_1 aralığında çözüm $u(t) = 6t^2 - 5$ olarak bulunur. Benzer şekilde, $\varepsilon_2 = [\gamma(1), \gamma(\gamma(1))] = [2, 4]$ alınırsa problem

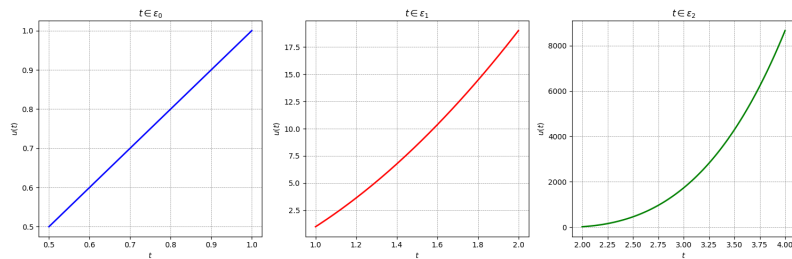
$$u'(t) = 216t^3 - 720t,$$

$$u(2) = 19$$

şekline dönüşür. Bu problemin de çözümünü bulmak için gerekli işlemler yapıldıktan sonra, aşağıda verilen genel çözüm elde edilir:

$$u(t) = \begin{cases} t, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \\ 6t^2 - 5, & 1 \leq t \leq 2, \\ 54t^4 - 360t^2 + 595, & 2 \leq t \leq 4. \end{cases}$$

Aşağıdaki grafikler, adım metodu yardımı ile çözülen problemin gecikme nedeniyle farklı aralıklarda elde edilen çözümlerinin daha iyi anlaşılması ve görülebilmesi için verilmiştir.



Şekil 3.6. ε_0 , ε_1 ve ε_2 aralıklarındaki kesin çözümlerin karşılaştırılması

5) İleri Tip Diferansiyel Denklemler

$$u(t) = f(t, u(t - \tau), u'(t - \tau))$$

şeklinde verilen problem için $u(t) = \varphi_0(t)$, $t \in I_{t_0}$ koşulunu sağlayan çözümünü adım yöntemini uygulayarak bulalım. φ_t fonksiyonunun I_{t_0} aralığında k . mertebeye kadar sürekli türevlere sahip olduğunu ve $f(t, u_1, u_2)$ fonksiyonunun $\mathbb{G} = \{t_0 \leq t < T, -\infty < u_i < \infty, i = 1, 2\}$ kümesinde $(k - 1)$. mertebeye kadar sürekli türevleri olduğunu varsayalım. İlk adımda yani $(t_0, t_0 + \tau]$ yarım aralığında, problemin çözümü

$$\varphi_1(t) = f(t, \varphi_0(t - \tau), \varphi_0'(t - \tau))$$

şeklinde olacaktır. $u = \varphi_1(t)$ fonksiyonu da genel olarak $(t_0, t_0 + \tau]$ yarım aralığında $(k - 1)$. mertebeye kadar sürekli türevlere sahiptir. İkinci adımda yani $(t_0 + \tau, t_0 + 2\tau]$ yarım aralığında, problemin çözümü

$$\varphi_2(t) = f(t, \varphi_1(t - \tau), \varphi_1'(t - \tau))$$

şeklinde dir. Açıkça görülebileceği gibi $u = \varphi_2(t)$ fonksiyonu genel olarak $(t_0 + \tau, t_0 + 2\tau]$ yarım aralığında $(k - 2)$. mertebeye kadar sürekli türevlere sahiptir. Bu şekilde devam eden işlemler ile $(t_0, t_0 + k\tau]$ yarım aralığında ele alınan problemin genel çözümü:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_0(t), & t_0 - \tau \leq t \leq t_0, \\ \varphi_1(t), & t_0 \leq t \leq t_0 + \tau, \\ \varphi_2(t), & t_0 + \tau \leq t \leq t_0 + 2\tau, \\ \dots & \\ \varphi_k(t), & t_0 + (k - 1)\tau \leq t \leq t_0 + k\tau. \end{cases}$$

$$\varphi_1(t_0 + 0) \neq f(t_0, \varphi_0(t_0 - \tau), \varphi_0'(t_0 - \tau))$$

olduğunda $t = t_0$ noktasında çözümün sürekli olduğu ve ayrıca

$$\varphi_2(t_0 + \tau + 0) \neq f(t_0 + \tau, \varphi_1(t_0 + 0), \varphi_0'(t_0 + 0))$$

olduğunda $t = t_0 + \tau$ noktasında çözümün sürekli olduğu açıkça görülebilir. t artarken bir birim aralıktan komşu aralığa geçişte ele alınan problem çözümünün devamlılığı gözlenir.

Örnek 3.23. Aşağıda verilen test problemini ele alalım.

$$u'(t) = u(t) + u^2(t-1), \quad 0 \leq t \leq 2,$$

$$u(t) = 1, \quad -1 \leq t \leq 0.$$

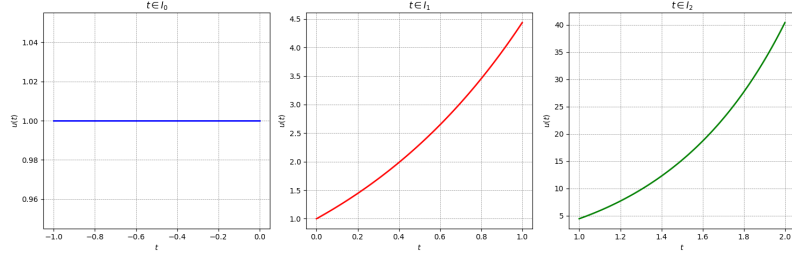
Gecikmesi $\tau = 1$ olan GDD'i adım yöntemi kullanarak çözmek için, başlangıç koşulu $u(0) = 1$ olan $u'(t) = u(t) + 1$ ADD'in çözümünü bulma problemi çözülmelidir. Gerekli adımlar gerçekleştirildikten sonra, çözüm $u(t) = 2e^t - 1$ olarak elde edilir. Benzer şekilde, aralık $I_2 = [1, 2]$ için problem

$$u'(t) = u(t) + (2e^{t-1} - 1)^2,$$

$$u(1) = 2e - 1$$

olur. Yukarıdaki problemi çözdükten sonra, aşağıda gösterildiği gibi genel çözümü ve buna karşılık gelen grafik elde edilir.

$$u(t) = \begin{cases} 1, & -1 \leq t \leq 0, \\ 2e^t - 1, & 0 \leq t \leq 1, \\ 4e^{2(t-1)} - 4e^{1-t} + 2e^t - 1, & 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$



Şekil 3.7. I_0 , I_1 ve I_2 aralıklarındaki kesin çözümlerin karşılaştırılması

3.10.2. Laplace Metodu

Laplace dönüşümü, bir fonksiyonu zaman alanından frekans alanına taşıyan bir integral dönüşümdür. GDD'leri çözmek amacıyla Laplace dönüşümü uygulanırken, denklemler s -alanına (Laplace alanına) taşınır ve orada daha sade hale getirilir. Bu süreç, DD'leri cebirsel denklemlere dönüştürmeyi sağlar. Böylece çözüm süreci daha yönetilebilir hale gelir. Laplace dönüşümü sayesinde, gecikmeli sistemlerin analizi daha sistemli bir şekilde gerçekleştirilebilir.

Bu bölümde GDD'lerin Laplace metodu yardımı ile çözümlemelerine değinilecektir.

$$u'(t) = Au(t) + Bu(t-r) \quad (3.37)$$

şeklindeki sabit katsayılı, homojen, lineer GDD'lerin *karakteristik denklemleri*, (3.37) denkleminin sıfırdan farklı çözümlerinin bulunması için c reel bir sabit olması şartı altında $u(t) = ce^{\lambda t}$ şeklindeki çözümlerin bulunması sırasında elde edilir. $u(t) = ce^{\lambda t}$ eşitliği (3.37) denklminde yerine yazıldığında karakteristik denklem

$$\lambda - A - Be^{-\lambda r} = 0 \quad (3.38)$$

olur. Buradan da görülebileceği gibi (3.37) GDD'in sıfırdan farklı çözümünün olması ancak ve ancak (3.38) karakteristik denklem eşitliğinin sağlanmasına bağlıdır.

ADD'lerin karakteristik denklemleri polinom şeklinde olurken GDD'lerin karakteristik denklemleri içerdikleri $e^{-\lambda r}$ teriminden dolayı transandantal denklem şeklindedir.

Lemma 3.24. Eğer $\{\lambda_j\}$, (3.38) denkleminin $j \rightarrow \infty$ gittiğinde $|\lambda_j| \rightarrow \infty$ şartını sağlayan çözümleri ise $j \rightarrow \infty$ giderken $Re(\lambda_j) \rightarrow -\infty$ olur. Bu nedenle (3.38)'nin tüm çözümlerini

sağlayan λ için $Re(\lambda_j) < \alpha$ olan bir α gerçel sayısı vardır. Ayrıca karmaşık düzlemdeki her dikey şeritte yalnızca sonlu sayıda çözüm bulunmaktadır.

İspat. (3.38) denklemi herhangi λ çözümü için

$$|\lambda - A| = |B|e^{-rRe(\lambda)} \quad (3.39)$$

şeklinde ele alınsın. $|\lambda| \rightarrow \infty$ gittiğinde $|\lambda - A| \rightarrow \infty$ olur. (3.39) denkleminin sol tarafının sonsuza gitmesinden dolayı eşitliğin sağlanması için (3.39) denkleminin sağ tarafının da sonsuza gitmesi gerekir. Bu da $r > 0$ olduğunda $e^{-rRe(\lambda)} \rightarrow 0$ olduğunu gösterir. Bu durum da ancak $Re(\lambda) \rightarrow -\infty$ olduğunda gerçekleşir.

$h(\lambda) = \lambda - A - Be^{-\lambda r}$ tam bir fonksiyon olduğundan, $h(\lambda)$ 'nın herhangi bir sınırlı kümede yalnızca sonlu sayıda sıfırları vardır. Bu, Lemma 3.24'ün ikinci kısmının ispatıdır. $\square$

Teorem 3.25. Eğer λ , (3.38) karakteristik denkleminin m defa tekrar eden kökleri ise $t^k e^{\lambda t}$, ($k = 0, 1, 2, \dots, m-1$) şeklindeki fonksiyon da (3.37) GDD'in çözümüdür. (3.37) GDD'i lineer ise bu formdaki çözümlerin sonlu sayıdaki toplamaları da yine (3.37) denkleminin çözümümü olacaktır. Ayrıca yakınsaklık durumunu sağlayan şartlar altında sonsuz çözüm toplamaları da aynı şekilde (3.37) denkleminin çözümü olabilir.

İspat. Eğer $u(t) = t^k e^{\lambda t}$ çözümünü (3.37) denkleminde yerine yazarsak

$$u'(t) - Au(t) - Bu(t-r) = e^{\lambda t}(kt^{k-1} + \lambda t^k) - At^k e^{\lambda t} - B(t-r)^k e^{\lambda(t-r)}$$

olur. Bu eşitlikteki $(t-r)^k$ terimi için Binom açılımı yapılırsa

$$\begin{aligned} &= e^{\lambda t} \left[(\lambda - A)t^k + kt^{k-1} - Be^{-\lambda r} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} t^{k-j} (-r)^j \right] \\ &= e^{\lambda t} \left[(\lambda - A - Be^{-\lambda r})t^k + (1 + Be^{-\lambda r})kt^{k-1} \right] \\ &- e^{\lambda t} \left[Be^{-\lambda r} \sum_{j=2}^k \binom{k}{j} t^{k-j} (-r)^j \right]. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Burada

$$h(\lambda) = \lambda - A - Be^{-\lambda r},$$

$$\begin{aligned}
h'(\lambda) &= 1 + Be^{-\lambda r}, \\
h''(\lambda) &= -Br^2 e^{-\lambda r}, \\
h'''(\lambda) &= Br^3 e^{-\lambda r}, \\
&\dots \\
h^{(j)}(\lambda) &= -Be^{-\lambda r}(-r)^j, \quad j = 2, 3, \dots
\end{aligned}$$

olur. Böylece (3.40) eşitliği

$$u'(t) - Au(t) - Bu(t-r) = e^{\lambda t} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} t^{k-j} h^{(j)}(\lambda) \quad (3.41)$$

şeklinde elde edilir. λ , (3.38) karakteristik denkleminin m defa tekrar eden kökü olduğundan $j = 0, 1, \dots, m-1$ için $h^{(j)}(\lambda) = 0$ olur. Bu da (3.41) denkleminin sağ tarafının sıfır olduğunu gösterir. Sonuç olarak $k = 0, 1, \dots, m-1$ için $t^k e^{\lambda t}$ çözümlerinin (3.37) denkleminin çözümü olduğu görülür. $\square$

Gecikmeli Diferansiyel Denklemlerin Laplace Metodu ile Temel Çözümü

$$X(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan ve Laplace dönüşümü $\frac{1}{\lambda - A - be^{-\lambda r}}$ olan X fonksiyonu, homojen (3.37) formundaki GDD'lerin bir çözümüdür. Ayrıca $\mathcal{L}(X) = \frac{1}{h(\lambda)}$, (3.37) denkleminin *temel çözümüdür* denir.

Teorem 3.26. $X(t)$, (3.37) denkleminin temel çözümü ve $\mathcal{L}(X)(\lambda) = \frac{1}{h(\lambda)}$ olduğunda herhangi $c > b$ değeri için

$$X(t) = \int_{(c)} e^{\lambda t} \frac{1}{h(\lambda)} d\lambda, \quad t > 0$$

olur. Burada b değeri

$$|X(t)| \leq ae^{bt}, \quad t > 0$$

fonksiyonunun *üstel sınır* değeridir.

İspat. X fonksiyonu b değeri altında üstel sınıra sahip, $Re(\lambda) > b$ için analitik ve (3.37) denkleminin bir çözümü olduğundan

$$X'(t) = AX(t) + BX(t-r) \quad (3.42)$$

şeklinde yazılır. (3.42) denkleminin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$\mathcal{L}(X'(t))(\lambda) = A\mathcal{L}(X(t))(\lambda) + B\mathcal{L}(X(t-r))(\lambda) \quad (3.43)$$

eşitliği elde edilir. (3.43) denkleminde $\mathcal{L}(X(t-r))(\lambda)$ dönüşümü için

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(X(t-r))(\lambda) &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} X(t-r) dt \\ &= \int_{-r}^{\infty} e^{-\lambda(t+r)} X(t) dt \\ &= e^{-\lambda r} \left[\int_{-r}^0 e^{-\lambda t} X(t) dt + \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} X(t) dt \right] \\ &= e^{-\lambda r} [0 + \mathcal{L}(X)(\lambda)] \\ &= e^{-\lambda r} \mathcal{L}(X)(\lambda). \end{aligned} \quad (3.44)$$

elde edilip, (3.44) eşitliği (3.43)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \lambda \mathcal{L}(X)(\lambda) - 1 &= A\mathcal{L}(X)(\lambda) + Be^{-\lambda r} \mathcal{L}(X)(\lambda), \\ \mathcal{L}(X)(\lambda) [\lambda - A - Be^{-\lambda r}] &= 1, \\ \mathcal{L}(X)(\lambda) h(\lambda) &= 1, \\ \mathcal{L}(X)(\lambda) &= \frac{1}{h(\lambda)} \end{aligned}$$

olur. X fonksiyonu (3.42) denkleminin temel çözümü olduğundan Teorem 3.26 ispatlanmış olur. □

Ayrıca $\mathcal{L}(X)(\lambda) = \frac{1}{h(\lambda)}$ eşitliğine ters Laplace uygulanırsa

$$\begin{aligned} X(t) &= \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(X)(\lambda)) \\ &= \int_{(C)} e^{\lambda t} \mathcal{L}(X)(\lambda) d\lambda \\ &= \int_{(C)} e^{\lambda t} \frac{1}{h(\lambda)} d\lambda \end{aligned}$$

olarak bulunur (Ger vd, 2022).

3.11. ŞEBEKE VE ŞEBEKE FONKSİYONU

$[0, T]$ kapalı aralığında tanımlanan ve sonlu sayıda noktadan oluşan parçalanışa *şebeke* denir. Şebekenin amacı, bir bölgedeki matematiksel problemleri çözmek için matematiksel modeller oluşturmaktır.

Şebekede $t_i \in [0, T]$ aralığından alınmış düğüm noktalarında tanımlanmış $g_i = g(t_i)$ fonksiyonuna *şebeke fonksiyonu* denir (Samarskii, 2001).

3.12. DÜZGÜN VE DÜZGÜN OLMAYAN ŞEBEKE

$[0, T]$ aralığında düğüm noktaları eşit aralıklı olmak üzere

$$\bar{\omega}_h = \left\{ t_i = ih, i = 1, 2, \dots, N; h = \frac{T}{N} \right\}$$

şeklinde tanımlı ifadeye *düzgün şebeke* ve h sabitine *şebeke adımı* denir. Diğer taraftan $[0, T]$ aralığında tanımlı

$$\bar{\omega}_N = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = T, h_i = t_i - t_{i-1}\}$$

ayrık noktalar kümesine de *düzgün olmayan şebeke* denir ([49], [7]).

Düzgün şebeke ve düzgün olmayan şebeke arasındaki tercih, modellenen olayın özelliklerine bağlıdır. Düzgün şebeke, basitliği ve hesaplama kolaylığı nedeniyle basit diferansiyel denklemlerin ve integral hesaplamalarının sayısal çözümleri için tercih

edilirken, düzgün olmayan şebeke adaptif yöntemler, hücresel otomatonlar veya parçacık tabanlı simülasyonlar gibi daha karmaşık modellenmesi gereken durumlarda kullanılır.

3.13. ŞEBEKE NÖRMLARI

$[0, T]$ aralığında tanımlanan

$$\|g\|_{\infty} \equiv \|g\|_{\infty, [0, T]} \equiv \|g\|_{C[0, T]} = \max_{0 \leq t \leq T} |g(t)|$$

ifadesine $[0, T]$ aralığındaki $g(t)$ fonksiyonunun *maksimum normu* denir. Ayrıca $\|g\|_{\infty, \bar{\omega}_N}$ ifadesine *düzgün ve düzgün olmayan şebekelerde maksimum normun fark benzeri* olarak isimlendirilir ([33]).

3.14. DÜZGÜN ŞEBEKEDEN FARK TÜREVLERİ

$[0, T]$ aralığında tanımlanan bir düzgün şebekede herhangi bir $g(t)$ fonksiyonu için

$$g_{t,i} = \frac{g_{i+1} - g_i}{h}$$

eşitliğine *birinci mertebeden ileri fark türevi*,

$$g_{\bar{t},i} = \frac{g_i - g_{i-1}}{h}$$

eşitliğine *birinci mertebeden geri fark türevi*,

$$g_{i,i} = \frac{g_{i+1} - g_{i-1}}{2h}$$

eşitliğine *birinci mertebeden merkezi fark türevi*,

$$g_{\bar{t},i} = \frac{g_{i+1} - 2g_i + g_{i-1}}{h^2}$$

eşitliğine *ikinci mertebeden fark türevi* denir ([49]).

3.15. DÜZGÜN OLMAYAN ŞEBEKEDEN FARK TÜREVLERİ

$[0, T]$ aralığında tanımlı düzgün olmayan şebeke herhangi bir $g(t)$ fonksiyonu için

$$g_{t,i} = \frac{g_{i+1} - g_i}{h_{i+1}}$$

eşitliğine *birinci mertebeden ileri fark türevi*,

$$g_{\bar{t},i} = \frac{g_i - g_{i-1}}{h_i}$$

eşitliğine *birinci mertebeden geri fark türevi*,

$$g_{\hat{t},i} = \frac{g_{i+1} - g_i}{\hat{h}_i}$$

eşitliğine *birinci mertebeden fark türevi*,

$$g_{\tilde{t},i} = \frac{g_{t,i} + g_{\bar{t},i}}{2}$$

eşitliğine *birinci mertebeden merkezi fark türevi*,

$$g_{\tilde{\tilde{t}},i} = \frac{g_{t,i} - g_{\bar{t},i}}{\hat{h}_i}$$

eşitliğine *ikinci mertebeden fark türevi* denir. Burada

$$\hat{h}_i = \frac{h_i + h_{i+1}}{2}$$

şeklinde tanımlanmıştır ([49]).

3.16. DİKDÖRTGEN METODU

$[0, T]$ aralığında yeterince düzgün $g(t)$ fonksiyonu için

$$\int_0^T g(t) dt = h \sum_{i=1}^N g\left(t_{i-\frac{1}{2}}\right) + R_N(g),$$

$$\left(t_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, h = \frac{T}{N}; t_{i-\frac{1}{2}} = t_i - \frac{h}{2}\right)$$

ifadesine kalan terimi integral biçiminde olan *genelleştirilmiş dikdörtgen formülü* denir.

Burada $R_N(g)$ kalan terimi

$$R_N(g) = \sum_1^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} g''(s) \left[\frac{(t_i - s)^2}{2} - (t_i - t_{i-1})T_1 \left(\frac{t_i + t_{i-1}}{2} - s \right) \right] ds$$

şeklindedir ([7]).

Örnek 3.27.

$$I = \int_0^1 t^2 dt$$

integralini $N = 5$ için dikdörtgen metodu kullanarak hesaplayalım.

Bu durumda düğüm noktaları

$$t_1 = 0.1, t_2 = 0.3, t_3 = 0.5, t_4 = 0.7, t_5 = 0.9$$

olduğu için yukarıdaki dikdörtgen metodunda ifade edilen formül uygulanırsa

$$I \approx 0.2\{g(0.1) + g(0.3) + g(0.5) + g(0.7) + g(0.9)\}$$

şeklinde yazılacaktır.

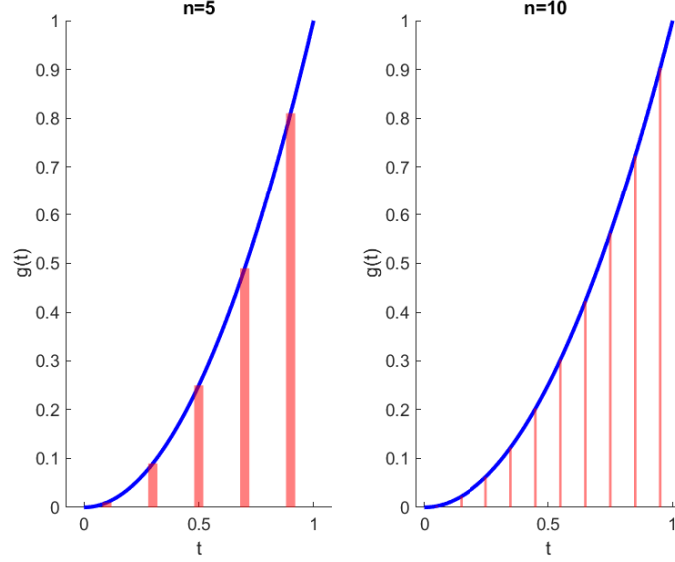
$$g(t_1) = 0.01, g(t_2) = 0.09, g(t_3) = 0.25, g(t_4) = 0.49, g(t_5) = 0.81$$

değerleri hesaplanıp yerine koyulduktan sonra

$$I \approx 0.33$$

bulunur. Ayrıca $N = 10$ değeri için problemi dikdörtgen metodu kullanarak çözersek $I \approx 0.3325$ olarak bulunur. Böylece iki farklı N değeri için iki farklı integral sonucu elde etmiş oluruz. Dikdörtgen metodu yönteminin kullanımında N değerlerini arttırdıkça

integral sonucuna daha çok yaklaştığı gözlenir. Daha küçük alt aralık genişlikleri ve daha fazla düğüm noktası kullanarak hesaplamalar gerçek değere daha yakın sonuçlar verir. Grafiğik 3.8'in düğüm noktalarının ve bu düğüm noktalarındaki fonksiyon değerlerinin



Şekil 3.8. $N = 5$ ve $N = 10$ için dikdörtgen metodu

elde edilmesinde, aynı zamanda grafiklerin çiziminde kullanılan (4) numaralı MatLab kodu tezin 9.1. bölümünde yer almaktadır.

3.17. YAMUK (TRAPEZ) METODU

$[0, T]$ aralığında yeterince düzgün $g(t)$ fonksiyonu için

$$\int_0^1 g(t)dt = \sum_{i=1}^N \frac{h_i}{2} (g_i + g_{i-1}) + R_N(g) \equiv \sum_{i=0}^N \tilde{h}_i g_i + R_N(g)$$

şeklinde tanımlanan ifadeye kalan terimi integral biçiminde olan *genelleştirilmiş yamuk (trapez) kuralı* denir. Burada $R_N(g)$ kalan terimi

$$R_N(g) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)(t_{i-1} - s)g''(s)ds$$

ve

$$\tilde{h}_0 = \frac{h_1}{2}, \quad \tilde{h}_N = \frac{h_N}{2}$$

şeklindedir ([7]).

Örnek 3.28.

$$I = \int_0^1 t^2 dt$$

integralini $N = 5$ için yamuk (trapez) metodunu kullanarak hesaplayalım.

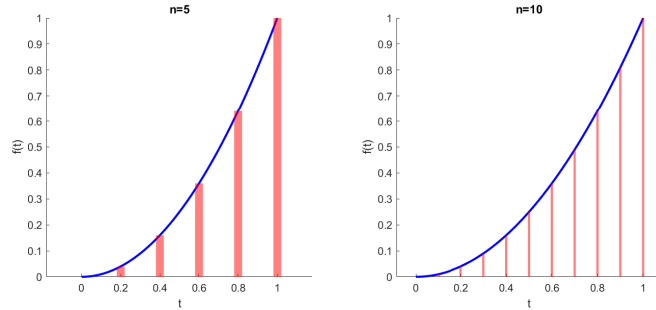
Bu durumda düğüm noktaları

$$t_0 = 0, t_1 = 0.2, t_2 = 0.4, t_3 = 0.6, t_4 = 0.8, t_5 = 1$$

olduğu için yukarıdaki yamuk (trapez) metodunda ifade edilen formül uygulanırsa

$$I \approx 0.33$$

şeklinde elde edilecektir. Eğer N değeri 10 alınırsa integral sonucu 0.335 olarak bulunur.



Şekil 3.9. $N = 5$ ve $N = 10$ için yamuk (trapez) metodu

Grafiğik 3.9'un düğüm noktalarının ve bu düğüm noktalarındaki fonksiyon değerlerinin elde edilmesinde, aynı zamanda grafiklerin çiziminde kullanılan (5) numaralı MatLab kodu tezin 9.1. bölümünde yer almaktadır.

3.18. YAKINSAKLIK VE DÜZGÜN YAKINSAKLIK

$u(t)$ verilen problemin kesin çözümünü, y_i bu probleme uygun fark probleminin çözümünü ifade etsin. $z = y - u$ ifadesine *hata fonksiyonu* denir. Ayrıca $\|\cdot\|_1$ belli bir şebekedeki

herhangi bir norm olmak üzere

$$h \rightarrow 0 \text{ iken } \|z\|_1 = \|y - u\|_1 \rightarrow 0$$

oluyorsa fark probleminin çözümü verilen prblemin çözümüne *yakınsaktır* denir. Yeteri kadar küçük h sabiti için

$$h \rightarrow 0 \text{ iken } \|z\|_1 = \|y - u\|_1 \leq Ch^p, p > 0$$

şeklinde bir eşitsizlik söz konusu olduğu durumda yaklaşık çözüm kesin çözüme $O(h^p)$ hızı ile *yakınsar* denir. Diğer bir deyiş ile yaklaşık çözüm $O(h^p)$ *kesinliğine sahiptir* denir ([49]).

3.19. FARK ŞEMASININ KARARLILIĞI

I_h ve L_h , $\bar{\omega}_h$ 'da tanımlanan fonksiyonlar kümesinde etkili olan fark operatörleri , γ_h ve ω_h belli şebeke fonksiyonları olmak üzere

$$I_h y = \chi_h, \quad t \in \gamma_h,$$

$$L_h y = \varphi_h, \quad t \in \omega_h$$

fark problemi şeklinde tanımlansın. Bu fark problemi, yeteri kadar küçük $h \leq h_0$ ve belirli sınıflardan olan her bir γ_h ve ω_h başlangıç veri fonksiyonları için tek bir çözüme sahip olduğunu varsayalım. Bu fark probleminin başlangıç veri fonksiyonları $\bar{\chi}_h$ ve $\bar{\varphi}_h$ olan çözümünü $\bar{y}$ ile ifade edelim. Eğer öyle h 'dan bağımsız C_1 ve C_2 sabitleri varsa ve yeteri kadar küçük $h \leq h_0$ için

$$\|\bar{y} - y\|_1 \leq C_1 \|\bar{\varphi} - \varphi\|_2 + C_2 \|\bar{\chi} - \chi\|_3$$

eşitsizliği sağlanıyor ise bu durumda fark şeması sağ tarafa ve sınır (veya başlangıç) şartına göre *kararlıdır* denir. Burada $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ ve $\|\cdot\|_3$ şebeke normlarıdır ([49]).

Kararlılık analizi, fark şemasının istikrarlı veya kararsız olduğunu belirlemek ve gerekirse şema parametrelerini veya çözüm yöntemini ayarlamak için önemlidir. Bu şekilde, doğru çözüm elde etmek ve hatalı sonuçlardan kaçınmak mümkün olur.

4. NÖTR TİP GECİKMELİ VOLTERRA İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Bu bölümde, aşağıdaki şekilde tanımlanan nötr GVİDD'leri ele alacağız:

$$u'(t) + a(t)u'(t-r) + b(t)u(t) + \int_{t-r}^t K(t,s)u(s)ds = f(t), \quad t \in I, \quad (4.1)$$

$$u(t) = \varphi(t), \quad -r \leq t \leq 0, \quad (4.2)$$

$I = (0, T] = \cup_{p=1}^m I_p$, $I_p = \{t : r_{p-1} < t \leq r_p\}$, $1 \leq p \leq m$ ve $r_s = sr$, $(0 \leq s \leq m)$; $\bar{I} = [0, T]$, $I_0 = [-r, 0]$ olur. $b(t) \geq 0$, $f(t)$, $a(t)$ ($t \in \bar{I}$), $\varphi(t)$ ($t \in I_0$) ve $K(t,s)$ ($(t,s) \in \bar{I} \times \bar{I}$) verilen fonksiyonlardır. r sabit bir gecikme terimidir. Ayrıca, $a, b, f \in C(\bar{I})$, $\varphi \in C^2(I_0)$ ve $\frac{\partial^2 K}{\partial s^2} \in C([0, T] \times [0, T])$ ($s = 0, 1, 2$) olduğunu düşünelim.

Tezin bu bölümünde, (4.1)-(4.2)'nin kesin çözümünün bazı önemli özellikleri, kararlılık eşitsizlikleri ve fark şemasının inşası incelenmiştir. Ayrıca (4.1)-(4.2) problemi ile ilgili yapılan çalışmaları açıklayan sayısal örneklere yer verilmiştir.

4.1. (4.1)-(4.2) PROBLEMİ İÇİN KARARLILIK EŞİTSİZLİKLERİ

Bu bölümde, problemin kararlılığını gösteren nötr GVİDD'lerin kesin çözümü ve başlangıç koşulu için bazı eşitsizliklerin oluşumu incelenmiştir.

Lemma 4.1. $a, b, f \in C(\bar{I})$, $K \in C([0, T] \times [0, T])$, $\varphi \in C^1(I_0)$ ise (4.1)-(4.2) probleminin çözümü $u(t)$ için

$$\|u\|_{\infty, I_p} \leq C_p, \quad 1 \leq p \leq m, \quad (4.3)$$

$$\|u'\|_{\infty, I_p} \leq D_p, \quad 1 \leq p \leq m \quad (4.4)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Burada

$$C_1 = [\|\varphi\| + r\|f\|_{\infty, I_1} + r\|a\|_{\infty, I_1}\|\varphi'\|_{\infty, I_0} + \bar{K}r\|\varphi\|_{\infty, I_0}]e^{\bar{K}r^2},$$

$$D_1 = \|a\|_{\infty, I_1} \|\varphi'\|_{\infty, I_0} + \|b\|_{\infty, I_1} C_1 + \bar{K}r(\|\varphi\|_{\infty, I_0} + C_1) + \|f\|_{\infty, I_1},$$

$$C_p = [C_{p-1} + r\|f\|_{\infty, I_p} + rD_{p-1}\|a\|_{\infty, I_p} + \bar{K}r^2 C_{p-1}] e^{\bar{K}r^2}, \quad p = 2, 3, \dots, m,$$

$$D_p = \|a\|_{\infty, I_p} D_{p-1} + \|b\|_{\infty, I_p} C_p + \bar{K}r(C_{p-1} + C_p) + \|f\|_{\infty, I_p}, \quad p = 2, 3, \dots, m$$

ve

$$\bar{K} = \max_{I \times I} |K(t, s)|$$

biçimindedir.

İspat.

Lemma 4.1.'in ispatı p için tümevarım yöntemi kullanılarak yapılacaktır. $t \in I_1$ aralığında yer aldığında (4.1) denklemi

$$\begin{aligned} u'(t) + b(t)u(t) &= f(t) - a(t)u'(t-r) - \int_{t-r}^t K(t, s)u(s)ds, \\ u(t)e^{\int_0^t b(s)ds} - u(0) &= \int_0^t f(s)ds - \int_0^t a(s)u'(s-r)ds \\ &\quad - \int_0^t \int_{s-r}^s K(t, s)u(s)ds, \\ u(t) &= \varphi(0) + \int_0^t e^{-\int_0^t b(s)ds} f(s)ds \\ &\quad - \int_0^t e^{-\int_0^t b(s)ds} a(s)u'(s-r)ds \\ &\quad - \int_0^t \int_{s-r}^0 e^{-\int_0^t b(s)ds} K(t, \xi)u(\xi)d\xi \\ &\quad - \int_0^t \int_0^s e^{-\int_0^t b(s)ds} K(t, \xi)u(\xi)d\xi \end{aligned}$$

şeklini alır. Böylece

$$\begin{aligned}
|u(t)| &\leq |\varphi(0)| + \int_0^t |f(s)| ds \\
&+ \int_0^t |a(s)| |u'(s-r)| ds \\
&+ \int_0^t ds \int_{s-r}^0 |K(s, \xi)| |u(\xi)| d\xi \\
&+ \int_0^t ds \int_0^s |K(s, \xi)| |u(\xi)| d\xi \\
&\leq |\varphi(0)| + \int_0^r |f(t)| dt + \|a\|_{\infty, I_1} \int_{-r}^0 |\varphi'(\xi)| d\xi \\
&+ \bar{K}r \int_{-r}^0 |\varphi(\xi)| d\xi + \bar{K}r \int_0^t |u(\xi)| d\xi \\
&\leq |\varphi(0)| + r\|f\|_{\infty, I_1} + r\|a\|_{\infty, I_1} + \|\varphi'\|_{\infty, I_0} + \bar{K}r^2 \|\varphi\|_{\infty, I_0} \\
&+ \bar{K}r \int_0^t |u(\xi)| d\xi
\end{aligned} \tag{4.5}$$

olarak yazılır. Burada da Gronwall eşitsizliği kullanılırsa;

$$|u(t)| \leq (|\varphi(0)| + r\|f\|_{\infty, I_1} + r\|a\|_{\infty, I_1} + \|\varphi'\|_{\infty, I_0} + \bar{K}r^2 \|\varphi\|_{\infty, I_0}) e^{\bar{K}r^2} \equiv C_1$$

sonucu elde edilir.

Benzer şekilde $u'(t)$ fonksiyonunun sınırını oluşturmak için (4.1) denklemi kullanarak $u'(t)$ 'yi yalnız bırakır ve denklemin her iki tarafının mutlak değeri alınır;

$$\begin{aligned}
u'(t) &= f(t) - a(t)u'(t-r) \\
&- b(t)u(t) - \int_{t-r}^t K(t, s)u(s)ds,
\end{aligned}$$

$$|u'(t)| \leq |f(t)| + |a(t)| |u'(t-r)|$$

$$\begin{aligned}
& + \quad |b(t)| |u(t)| + \int_{t-r}^t |K(t,s)| |u(s)| ds \\
& \leq \quad \|f\|_{\infty, I_1} + \|a\|_{\infty, I_1} \|\varphi'\|_{\infty, I_0} + \|b\|_{\infty, I_1} |u(t)| \\
& + \quad \bar{K} \int_{t-r}^0 |u(s)| ds + \bar{K} \int_0^t |u(s)| \\
& \leq \quad \|a\|_{\infty, I_1} \|\varphi'\|_{\infty, I_0} + \|b\|_{\infty, I_1} C_1 \\
& + \quad \bar{K}r(\|\varphi\|_{\infty, I_0} + C_1) + \|f\|_{\infty, I_1} \\
& \equiv \quad D_1
\end{aligned}$$

kesin çözümün birinci mertebeden türevi için kararlılık eşitsizliği elde edilir.

Tümevarım yöntemini devam ettirmek için $p \leq l$ olduğunda (4.1) ve (4.2) denklemlerinin doğru olduğunu varsayalım. O zaman, $t \in I_{l+1}$ aralığında olduğunda (4.5) için aşağıda verilen eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
|u(t)| & \leq |u(rl)| + \int_{rl}^t |f(t)| dt \\
& + \int_{rl}^t |a(s)| |u'(s-r)| ds \\
& + \int_{rl}^t \left(\int_{s-r}^{rl} |K(s, \xi)| |u(\xi)| d\xi \right) ds \\
& + \int_{rl}^t \left(\int_{rl}^s |K(s, \xi)| |u(\xi)| d\xi \right) ds \\
& \leq C_l + r\|f\|_{\infty, I_{l+1}} + r\|a\|_{\infty, I_{l+1}} \|u'\|_{\infty, I_l} \\
& + \bar{K}r^2 C_l + \bar{K}r \int_0^t |u(\xi)| d\xi.
\end{aligned}$$

Buradan Gronwall eşitsizliği kullanılırsa

$$|u(t)| \leq (r\|f\|_{\infty, I_{l+1}} + r\|a\|_{\infty, I_{l+1}} D_l + (1 + \bar{K}r^2)C_l) e^{\bar{K}r^2} \equiv C_{l+1}$$

olur. Eğer (4.1) denklemini kullanarak $u'(t)$ 'yi yalnız bırakır ve daha sonra eşitliğin her iki tarafının da mutlak değeri alınır, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} |u'(t)| &\leq |f(t)| + |a(t)| |u'(t-r)| \\ &+ |b(t)| |u(t)| + \int_{t-r}^t |K(t,s)| |u(s)| ds \\ &\leq \|f\|_{\infty, I_{l+1}} + \|a\|_{\infty, I_{l+1}} \|D_l\| + \|b\|_{\infty, I_{l+1}} C_{l+1} \\ &+ \bar{K} \int_{rl}^t |u(s)| ds + \bar{K} \int_0^t |u(s)| ds \\ &\leq \|f\|_{\infty, I_{l+1}} + \|a\|_{\infty, I_{l+1}} \| + \|b\|_{\infty, I_{l+1}} C_{l+1} + \bar{K}(C_l + C_{l+1}) \\ &\equiv D_{l+1}. \end{aligned}$$

Dolayısıyla (4.3) ve (4.4) eşitsizliklerinin $p = l + 1$ için doğruluğu ispatlanmış olur. $\square$

4.1.1. FARK ŞEMASININ KURULMASI

Bu bölümde (4.1)-(4.2) problemi için düzgün şebekede fark şeması oluşturulacaktır. $\bar{I}$ aralığında

$$\omega_{N_0} = \{t_i = ih, i = 1, 2, \dots, N_0; h = T/N_0 = r/N\}$$

şeklinde tanımlansın (Kolaylık olması için T/r tam sayı olsun; yani $T = mr$ olur.). Burada her bir I_p ($1 \leq p \leq m$) alt aralığı N tane şebeke noktalarını içermektedir.

$$\omega_{N,p} = \{t_i : (p-1)N + 1 \leq i \leq pN\}, \quad 1 \leq p \leq m$$

ve sonuç olarak

$$\omega_{N_0} = \cup_{p=1}^m \omega_{N,p},$$

$$\bar{\omega}_{N,p} = \omega_N \cup \{t_0 = 0, t_N = T\}$$

şeklindedir.

ω_{N_0} üzerinde tanımlanmış her bir t_i noktasındaki $g(t)$ fonksiyonunun $g_i = g(t_i)$ şeklindeki gösterimi ile

$$g_{\bar{t},i} = \frac{g_i - g_{i-1}}{h},$$

$$g_i^{(0.5)} = \frac{1}{2}(g_i + g_{i-1}),$$

$$g_{i-\frac{1}{2}} = g\left(t_{i-\frac{1}{2}}\right) = g\left(t_i - \frac{h}{2}\right)$$

eşitlikleri tanımlanmış olsun. Ayrıca ω_{N_0} üzerinde tanımlanan herhangi bir g_i şebeke fonksiyonu için kullanılan norm

$$\|g\|_{\infty,p} \equiv \|g\|_{\infty,\omega_{N,p}} = \max_{\bar{\omega}_{N,p}} |g(t)|,$$

$$\|g\|_{\infty,N_0} \equiv \|g\|_{\infty,\omega_{N_0}}$$

biçimindedir. Bu gösterim, $g(t)$ şebeke fonksiyonu için t_i noktasının yakınındaki t_{i-1} ve t_{i+1} noktalarında g değerlerini kullanarak türevinin yaklaşımını göstermemize olanak sağlar. Bu yöntem sayısal analizde, sonlu farklar kullanarak türevleri yaklaştırmak için yaygın bir şekilde kullanılır.

(4.1)'de verilen denklemde t değişkeni yerine $t_{i-\frac{1}{2}}$ yazılırsa;

$$u'\left(t_{i-\frac{1}{2}}\right) + a\left(t_{i-\frac{1}{2}}\right)u'\left(t_{i-\frac{1}{2}} - r\right) + b\left(t_{i-\frac{1}{2}}\right)u\left(t_{i-\frac{1}{2}}\right)$$

$$+ \int_{t_{i-\frac{1}{2}}-r}^{t_{i-\frac{1}{2}}} K(t_{i-\frac{1}{2}}, s) u(s) ds = f(t_{i-\frac{1}{2}}), \quad 1 \leq i \leq N_0 \quad (4.6)$$

sonucuna varılır. Bir sonraki adımda, aşağıdaki bağıntılar kullanılacaktır:

$$u'(t_{i-\frac{1}{2}}) = u_{\bar{i},i} + R_i^{(1)}, \quad R_i^{(1)} = -\frac{h^2}{24} u'''(\xi_i^{(1)}), \quad \xi_i^{(1)} \in (t_{i-1}, t_i), \quad (4.7)$$

$$u'(t_{i-\frac{1}{2}} - r) = u_{\bar{i},i-N} + R_i^{(2)}, \quad R_i^{(2)} = -\frac{h^2}{24} u'''(\xi_i^{(2)}), \quad \xi_i^{(2)} \in (t_{i-N-1}, t_{i-N}), \quad (4.8)$$

$$u(t_{i-\frac{1}{2}}) = u_i^{(0,5)} + R_i^{(3)}, \quad R_i^{(3)} = -\frac{h^2}{8} u''(\xi_i^{(3)}), \quad \xi_i^{(3)} \in (t_{i-1}, t_i). \quad (4.9)$$

(4.6)'nın integral terimi için, dikdörtgen kuralı uygulanırsa

$$\int_{t_{i-\frac{1}{2}}-r}^{t_{i-\frac{1}{2}}} K(t_{i-\frac{1}{2}}, s) u(s) ds = h \sum_{j=i-N+1}^{i-1} K(t_{i-\frac{1}{2}}, t_j) u_j + R_i^{(4)}$$

elde edilir. Burada kalan terim

$$R_i^{(4)} = \frac{h^2 r}{24} \frac{d^2}{ds^2} \left(K(t_{i-\frac{1}{2}}, \xi_i^{(4)}) u(\xi_i^{(4)}) \right), \quad t_{i-\frac{1}{2}} - r < \xi_i^{(4)} < t_{i-\frac{1}{2}} \quad (4.10)$$

şeklindedir. Sonuç olarak (4.1) problemi için

$$u_{\bar{i},i} + a_{i-\frac{1}{2}} u_{\bar{i},i-N} + b_{i-\frac{1}{2}} u_i^{(0,5)} + h \sum_{j=i-N+1}^{i-1} K_{i-\frac{1}{2},j} u_j = f_{i-\frac{1}{2}} - R_i, \quad (4.11)$$

$$R_i = R_i^{(1)} + a_{i-\frac{1}{2}} R_i^{(2)} + b_{i-\frac{1}{2}} R_i^{(3)} + R_i^{(4)}, \quad 1 \leq i \leq N_0 \quad (4.12)$$

kalan terimi ile birlikte $u(t_{i-\frac{1}{2}})$ 'nin (4.11)'de ifade edilen kesin bağıntısı elde edilmiş olur.

Böylece (4.11)'i dikkate alarak (4.1)-(4.2) problemi için

$$y_{\bar{i},i} + a_{i-\frac{1}{2}} y_{\bar{i},i-N} + b_{i-\frac{1}{2}} y_i^{(0,5)} + h \sum_{j=i-N+1}^{i-1} K_{i-\frac{1}{2},j} y_j = f_{i-\frac{1}{2}}, \quad 1 \leq i \leq N_0, \quad (4.13)$$

$$y_i = \varphi_i, \quad -N \leq i \leq 0 \quad (4.14)$$

fark şeması oluşturulur.

4.2. HATA DEĞERLENDİRMESİ

(4.1) ve (4.13) denklemlerine göre yaklaşık çözüm hatasını z_i şeklinde ifade edelim. Bu hata fonksiyonu, t_i noktasındaki yaklaşık çözüm y_i ve kesin çözüm u_i arasındaki farkı temsil eder. Böylece

$$z_{\bar{i},i} + a_{i-\frac{1}{2}} z_{\bar{i},i-N} + b_{i-\frac{1}{2}} z_i^{(0.5)} + h \sum_{j=i-N+1}^{i-1} K_{i-\frac{1}{2},j} z_j = R_i, \quad 1 \leq i \leq N_0, \quad (4.15)$$

$$z_i = 0, \quad -N \leq i \leq 0 \quad (4.16)$$

problemi yazılabilir. Burada R_i (4.12) ile verilen kesme hatasıdır. Hata fonksiyonu z_i 'yi incelemeden önce, süreç sırasında kullanacağımız bir Lemmayı ele alalım.

Lemma 4.2. $|F_i| \leq \mathcal{F}_i$ ve $\mathcal{F}_i$ azalmayan bir fonksiyon olmak üzere;

$$v_{\bar{i},i} + A_i v_i^{(0.5)} = F_i, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (4.17)$$

$$v_0 = \mu \quad (4.18)$$

olur. Burada $t_i = x_0 + ih$, $h = (X - x_0)/N$, $A_i \geq 0$ 'dır ve BDP'nin çözümü olan şebeke fonksiyonu v_i

$$|v_i| \leq |\mu| + (X - x_0) \mathcal{F}_i, \quad 1 \leq i \leq N \quad (4.19)$$

eşitsizliğini sağlar.

İspat. (4.17)'de verilen fark denklemi

$$v_i = \frac{2 - hA_i}{2 + hA_i} v_{i-1} + \frac{2h}{2 + hA_i} F_i$$

şeklinde yazılır. Buradan

$$|v_i| \leq |v_{i-1}| + h |F_i|$$

sonucu çıkarılır. Bu yüzden

$$|v_i| \leq |v_0| + h \sum_{j=1}^i |F_j| \leq |v_0| + ih \mathcal{F}_i$$

olur. Bu durum da, (4.19)'un geçerliliğini gösterir. $\square$

Lemma 4.3. (4.15)-(4.16) probleminin z_i çözümü

$$\|z\|_{\infty, N_0} \leq \frac{\left[\left(1 + r \left(\frac{2}{h} \|a\|_{\infty, \bar{I}} + T\bar{K} \right) e^{r^2 T\bar{K}} \right)^m - 1 \right]}{\left(1 + r \left(\frac{2}{h} \|a\|_{\infty, \bar{I}} + T\bar{K} \right) e^{r^2 T\bar{K}} - 1 \right)} \|R\|_{\infty, N_0} \quad (4.20)$$

eşitliğini sağlar.

İspat. $t_i \in \omega_{N,p}$ için

$$\begin{aligned} & \left| R_i - a_{i-\frac{1}{2}} z_{\bar{I}, i-N} - h \sum_{j=i-N+1}^{i-1} K_{i-\frac{1}{2}, j} z_j \right| \\ & \leq \|R\|_{\infty, N, p} + \frac{2}{h} \|a\|_{\infty, \bar{I}} \|z\|_{\infty, p-1} \\ & \quad + h\bar{K} \sum_{j=i-N+2}^i |z_{j-1}| \\ & \leq \|R\|_{\infty, N, p} + \frac{2}{h} \|a\|_{\infty, \bar{I}} \|z\|_{\infty, p-1} \\ & \quad + T\bar{K} \|z\|_{\infty, p-1} + h\bar{K} \sum_{j=i-N+1}^i |z_{j-1}| \\ & \leq \|R\|_{\infty, \omega_{N_0}} + \left(\frac{2}{h} \|a\|_{\infty, \bar{I}} + T\bar{K} \right) \|z\|_{\infty, p-1} \\ & \quad + h\bar{K} \sum_{j=i-N+1}^i |z_{j-1}| \end{aligned}$$

olur. Daha sonra $t_i \in \omega_{N,p}$ olduğu göz önünde bulundurularak Lemma 4.2, (4.15) problemine uygulanırsa

$$\begin{aligned} |z_i| & \leq |z_{(p-1)N}| + r \|R\|_{\infty, \omega_N} \\ & \quad + r \left(\frac{2}{h} \|a\|_{\infty, \bar{I}} + T\bar{K} \right) \|z\|_{\infty, p-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + h\bar{K}r \sum_{j=i-N+1}^i |z_{j-1}| \\
& \leq r\|R\|_{\infty, \omega_{N_0}} + \left(1 + r \left(\frac{2}{h}\|a\|_{\infty, \bar{I}} + T\bar{K}\right)\right) \|z\|_{\infty, p-1} \\
& + h\bar{K}r \sum_{j=i-N+1}^i |z_{j-1}|
\end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Buradan, Gronwall integral eşitsizliğini kullanılarak

$$|z_i| \leq re^{r^2 T \bar{K}} \|R\|_{\infty, N_0} + \left(1 + r \left(\frac{2}{h}\|a\|_{\infty, \bar{I}} + T\bar{K}\right)\right) e^{r^2 T \bar{K}} \|z\|_{\infty, p-1}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu nedenle z_i için birinci mertebeden fark eşitsizliği aşağıdaki gibidir:

$$\|z\|_{\infty, p} \leq A\|z\|_{\infty, p-1} + B.$$

Eşitsizlikteki A ve B değerleri;

$$A = \left(1 + r \left(\frac{2}{h}\|a\|_{\infty, \bar{I}} + T\bar{K}\right)\right) e^{r^2 T \bar{K}},$$

$$B = re^{r^2 T \bar{K}} \|R\|_{\infty, N_0}$$

şeklindedir. Sonuç olarak

$$\|z\|_{\infty, p} \leq \frac{A^p - 1}{A - 1} B, \quad 1 \leq p \leq m$$

genel formunu elde edilir. Bu da (4.20) eşitsizliğinin doğruluğunu gösterir. $\square$

Lemma 4.4. $u \in C^3[0, T]$ olsun. Bu durumda R_i kalan terimi için

$$\|R\|_{\infty, \omega_{N_0}} \leq Ch^2 \quad (4.21)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $R_i^{(k)}$ 'nin (4.12)'deki her bir değeri için aşağıdaki eşitsizlikleri oluşturalım:

$$|R_i^{(1)}| \leq \frac{h^2}{24} \|u'''\|_{\infty, \bar{I}}, \quad |R_i^{(2)}| \leq \frac{h^2}{24} \|u'''\|_{\infty, \bar{I}}, \quad |R_i^{(3)}| \leq \frac{h^2}{24} \|u''\|_{\infty, \bar{I}},$$

$$|R_i^{(4)}| \leq \frac{h^2}{24} \left[\left\| \frac{\partial^2 K}{\partial s^2} \right\|_{\infty, \bar{I}^2} \|u\|_{\infty, \bar{I}} + 2 \left\| \frac{\partial K}{\partial s} \right\|_{\infty, \bar{I}^2} \|u'\|_{\infty, \bar{I}} + \|K\|_{\infty, \bar{I}^2} \|u\|_{\infty, \bar{I}} \right].$$

Yukarıdaki eşitsizliklerin düzgünlük koşulları göz önünde bulundurulursa (4.21)'in geçerliliği kolayca görülebilir. $\square$

Teorem 4.5. Lemma 4.4'ün şartları sağlanarak (4.1)-(4.2) probleminin çözümü u , (4.13)-(4.14) fark probleminin çözümü y olsun. Varsayılan koşullar altında (4.13)-(4.14) fark probleminin çözümü, (4.1)-(4.2)'nin çözümüne düzgün şebekede maksimum normda $O(h^2)$ hızıyla düzgün yakınsaktır:

$$\|y - u\|_{\infty, \bar{\omega}_{N_0}} \leq Ch^2.$$

İspat. Bu teoremin ispatı Lemma 4.3 ve Lemma 4.4 kullanılarak elde edilebilir. $\square$

4.2.1. NÜMERİK SONUÇLAR

Bu bölümde (4.1)-(4.2) problemi için elde edilen teorik sonuçlar aşağıdaki örnekler ile denetlenmiştir. Bu örnekler (4.13)-(4.14) fark şemasından elde edilen

$$y_i = \frac{2hf_{i-\frac{1}{2}} + y_{i-1} \left(2 - hb_{i-\frac{1}{2}}\right) + 2a_{i-\frac{1}{2}}(y_{i-N-1} - y_{i-N}) - 2h^2 \sum_{j=i-N+1}^{i-1} K_{i-\frac{1}{2}} y_j}{2 + hb_{i-\frac{1}{2}}}, \quad i = 1, 2, \dots, N_0, \quad (4.22)$$

$$y_i = \varphi_i, \quad i = -N, \dots, 0 \quad (4.23)$$

iteratif tekniği kullanılarak da çözülmüştür.

Örnek 4.6. Aşağıda verilen test problemini ele alalım:

$$u'(t) + u'(t-1) + 2u(t) + \int_{t-1}^t u(s)ds = 1, \quad t \in (0, 2],$$

$$u(t) = e^t, \quad t \leq 0.$$

Problemin kesin çözümü:

$$u(t) = \begin{cases} e^t, & t \in I_0, \\ -e^{-t}(t-1), & t \in I_1, \\ -e^{-t}(t-1) - e^{-t+1}(t^2 - 5t + 4), & t \in I_2 \end{cases}$$

şeklindedir. Yukarıdaki problemin yakınsaklık durumunun araştırılması için herhangi bir N değerinde şebekedeki kesin hata e_i^N ve şebekedeki maksimum hata e^N aşağıdaki biçimde gösterilir:

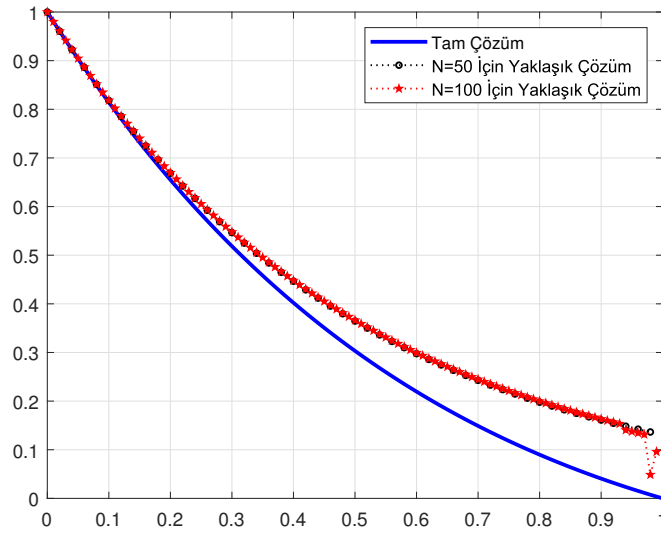
$$e_i^N = |y_i - u_i|, \quad e^N = \|y - u\|_{\infty, \bar{\omega}_{N_0}}.$$

Nötr GVİDD'in kesin çözümü ve iteratif yöntem ile bulunan yaklaşık çözümü kullanarak elde edilen sonuçlar Tablo 4.1 ve Tablo 4.2 'de verilmiştir.

Çizelge 4.1. Test probleminin I_1 aralığındaki sayısal sonuçları

t_i	u_i	y_i ($N = 50$)	e_i^{50}	y_i ($N = 100$)	e_i^{100}
0.1000	0.8144	0.8178	0.0034	0.8152	0.0008
0.2000	0.6550	0.6686	0.0136	0.6684	0.0034
0.3000	0.5186	0.5465	0.0279	0.5356	0.0170
0.4000	0.4022	0.4465	0.0443	0.4235	0.0213
0.6000	0.2195	0.2976	0.0781	0.2594	0.0399

Örnek 4.6'nın kesin ve yaklaşık çözümünün I_1 aralığındaki grafiği aşağıda verilmiştir:



Şekil 4.1. I_1 aralığında $N = 50$ ve $N = 100$ değerleri için problemin kesin ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

Tablo 4.1'in oluşumu ve Grafik 4.1'in çizimi için kullanılan (6) numaralı MatLab kodu tezin 9.1. bölümünde bulunmaktadır.

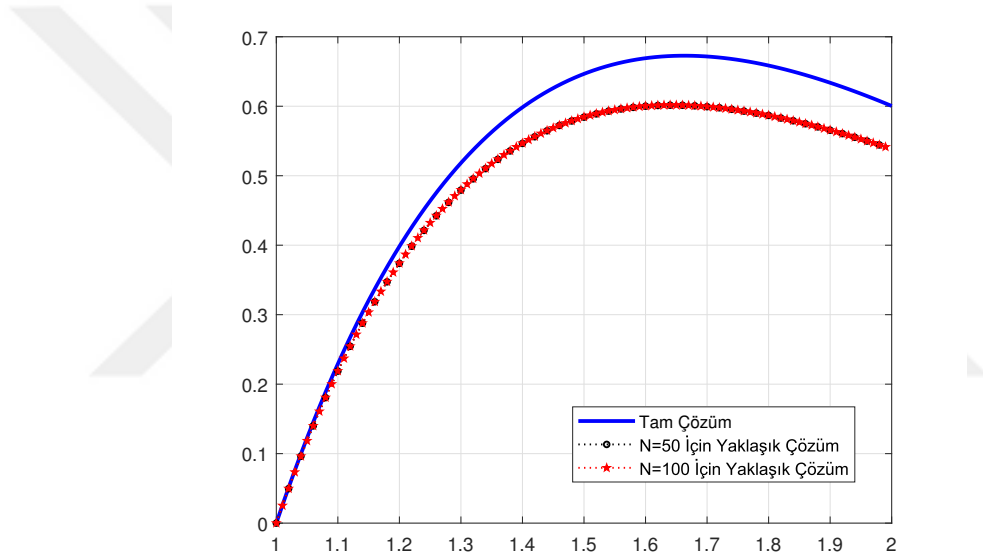
Şekil 4.1'de $N = 50$ değeri için araştırılan problemin yaklaşık ve kesin çözümleri I_1 aralığında bulunmuş ve çözüm değerleri Şekil 4.1 ve Tablo 4.1 kullanılarak gösterilmiştir. Ayrıca $N = 50$ için çözümlerin hata oranları hesaplanarak Tablo 4.1'e eklenmiştir. Yaklaşık çözümün N değerlerinin arttıkça kesin çözüme yaklaştığını göstermek için daha önce bulunan noktalardaki çözüm değerleri $N = 100$ için de hesaplanmış ve Tablo 4.1'e eklenmiştir. Benzer şekilde $N = 100$ için de hata oranları hesaplanıp, eklenmiştir.

(6) numaralı MatLab kodunda başlangıç fonksiyonu ve aralık değerleri değiştirilip, tekrar çalıştırıldığında I_2 aralığındaki çözümün tablo ve grafik değerleri elde edilmiş olur. I_2 aralığı içinde aşağıda verilen grafik ve tablo kullanılarak I_1 aralığında olduğu gibi aynı yorumları yapabilir. Ayrıca (6) numaralı MatLab kodunda farklı N değerlerinin uygulanması ile farklı N değerlerine karşılık gelen sonuçlar da karşılaştırılabilir.

Çizelge 4.2. Test probleminin I_2 aralığındaki sayısal sonuçları

t_i	u_i	y_i ($N = 50$)	e_i^{50}	y_i ($N = 100$)	e_i^{100}
1.1000	0.2291	0.2188	0.0103	0.2280	0.0011
1.2000	0.3983	0.3799	0.0184	0.3883	0.0100
1.3000	0.5183	0.4793	0.0390	0.4796	0.0387
1.4000	0.5985	0.5465	0.0520	0.5668	0.0287
1.6000	0.6692	0.6001	0.0691	0.6003	0.0688
1.8000	0.6586	0.5830	0.0756	0.5868	0.0718

Örnek 4.6'nın sayısal çözümü ve I_2 aralığında şebeke üzerindeki yaklaşık çözümü aşağıdaki grafikte verilmiştir:



Şekil 4.2. I_2 aralığında $N = 50$ ve $N = 100$ değerleri için problemin kesin ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

Çözümü yapılan bu örnekte, grafikler ve tablolar kullanılarak N 'nin çeşitli değerleri için sayısal ve yaklaşık çözümlerle problemin çözümü karşılaştırılır. İki farklı metot ile elde edilen çözümlerin bu karşılaştırılması, yöntemin doğruluğunu ve yakınsamasını gözler önüne sermekte; ayrıca çözümün davranışı ve yöntemin etkinliği hakkında daha kapsamlı bir anlayış kazanmamıza olanak sağlamaktadır.

Örnek 4.7.

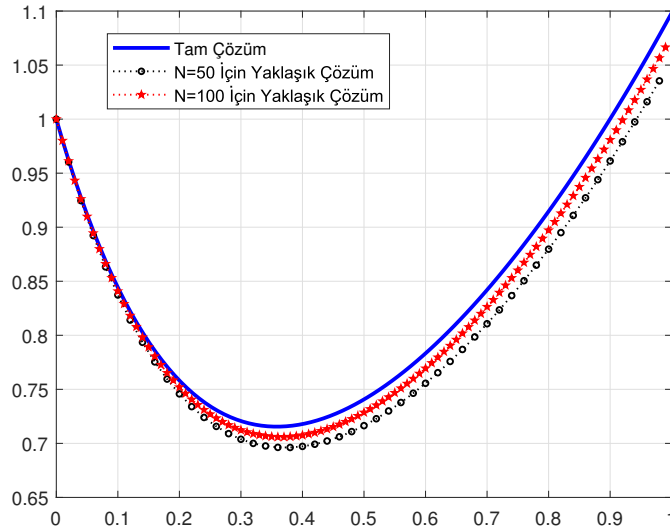
$$u'(t) + 3u(t) + u'(t-1) - 4 \int_{t-1}^t u(s)ds = 4t - 3, \quad t \in (0, 2],$$

$$u(t) = 1, \quad t \leq 0$$

probleminin kesin çözümü:

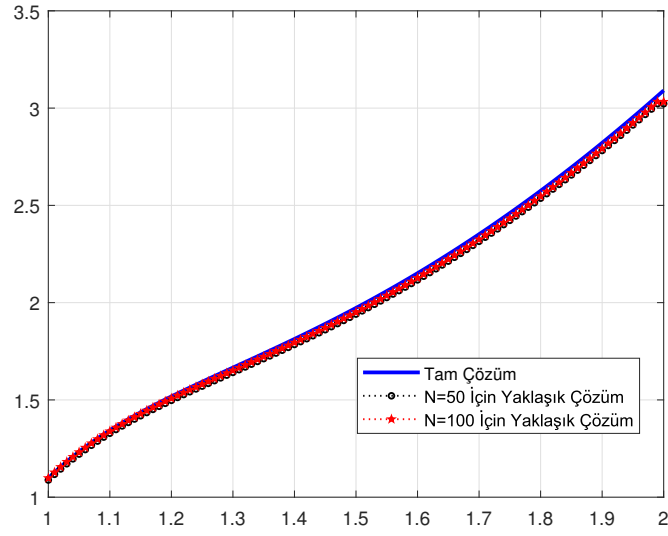
$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \in I_0, \\ \frac{3}{5}e^{-4t} + \frac{2}{5}e^t & t \in I_1, \\ \frac{2e^t + e^{t-1}(3-2t) + e^{-4t+4}(12t-8) + 3e^{-4t}}{5}, & t \in I_2 \end{cases}$$

şeklindedir. Aşağıdaki grafikte, I_1 aralığında Örnek 4.7'nin kesin ve yaklaşık çözüm değerleri verilmiştir:



Şekil 4.3. I_1 aralığında $N = 50$ ve $N = 100$ değerleri için problemin kesin ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

Aşağıdaki grafikte de, I_2 aralığında Örnek 4.7'nin kesin ve yaklaşık çözüm değerleri verilmiştir:



Şekil 4.4. I_2 aralığında $N = 50$ ve $N = 100$ değerleri için problemin kesin ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

5. İKİNCİ MERTEBEDEN GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

5.1. İKİNCİ MERTEBEDEN GECİKMELİ VOLTERRA İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Bu bölümde, aşağıda verilen ikinci mertebeden GVİDD'leri ele alacağız:

$$u''(t) + a(t)u'(t) + b(t)u(t-r) + \int_{t-r}^t K(t,s)u(s)ds = f(t), \quad t \in I, \quad (5.1)$$

$$u(t) = \varphi(t), \quad (5.2)$$

$$u'(0) = B, \quad -r \leq t \leq 0. \quad (5.3)$$

$I = (0, T] = \cup_{p=1}^m I_p$, $I_p = \{t : r_{p-1} < t \leq r_p\}$, $1 \leq p \leq m$ ve $r_s = sr$, $(0 \leq s \leq m)$; $\bar{I} = [0, T]$, $I_0 = [-r, 0]$. $a(t) \geq 0$, $f(t)$, $a(t)$ ($t \in \bar{I}$), $\varphi(t)$ ($t \in I_0$) ve $K(t,s)$ ($(t,s) \in \bar{I} \times \bar{I}$) verilen fonksiyonlardır. r sabit bir gecikme terimidir. Ayrıca $a, b, f \in C(\bar{I})$, $\varphi \in C^2(I_0)$ ve $\frac{\partial^2 K}{\partial s^2} \in C([0, T] \times [0, T])$ ($s = 0, 1, 2$).

Tezin bu bölümünde, (5.1)-(5.3)'nün kesin çözümünün bazı önemli özellikleri, kararlılık eşitsizlikleri ve fark şemasının oluşumu ele alınmıştır. Ayrıca kararlılık şemasının yardımı ile elde edilen yaklaşık ve kesin çözümün karşılaştırması alınan sayısal problemler üzerinde incelenmiştir. Yapılan araştırmaların daha net anlaşılması için örnekler MatLab uygulaması yardımı ile elde edilen grafik ve tablolar ile desteklenmiştir.

5.1.1. (5.1)-(5.3) Problemi İçin Kararlılık Eşitsizlikleri

Bu bölümde, (5.1)-(5.3) probleminin kararlılığını gösteren ikinci mertebe GVİDD'lerin kesin çözümü ve başlangıç koşulu için bazı eşitsizliklerin oluşumu incelenmiştir.

Lemma 5.1. $a, b, f \in C(\bar{I})$, $K \in C([0, T] \times [0, T])$, $\varphi \in C^1(I_0)$ ise (5.2)-(5.3) probleminin çözümü için

$$\|u\|_{\infty, I_p} \leq C_p, \quad 1 \leq p \leq m, \quad (5.4)$$

$$\|u'\|_{\infty, I_p} \leq D_p, \quad 1 \leq p \leq m, \quad (5.5)$$

$$\|u''\|_{\infty, I_p} \leq E_p, \quad 1 \leq p \leq m \quad (5.6)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Burada

$$\begin{aligned}
C_1 &= (|\varphi(0)| + |B| r) e^{r^3 \bar{K}} \\
&+ \left(\|f\|_{\infty, I_1} + \|b\|_{\infty, I_1} \|\varphi\|_{\infty, I_0} + \bar{K} \int_{-r}^0 |\varphi(\theta)| d\theta \right) r^2 e^{r^3 \bar{K}}, \\
&p = 2, 3, \dots, m,
\end{aligned} \tag{5.7}$$

$$D_1 = |\beta| + r(\|f\|_{\infty, I_1} + \|b\|_{\infty, I_1} \|\varphi\|_{\infty, I_0}) + r^2 \bar{K}(\|\varphi\|_{\infty, I_0} + C_1), \tag{5.8}$$

$$E_1 = \|f\|_{\infty, I_1} + \|a\|_{\infty, I_1} D_1 + \|b\|_{\infty, I_1} \|\varphi\|_{\infty, I_0} + r \bar{K}(\|\varphi\|_{\infty, I_0} + C_1), \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned}
C_p &= [C_{p-1} + r|B| + r^2(\|f\|_{\infty, I_p} + \|b\|_{\infty, I_p} \|u\|_{\infty, I_{p-1}} + r \bar{K} C_{p-1})] e^{2\bar{K}r^5}, \\
&p = 2, 3, \dots, m,
\end{aligned} \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned}
D_p &= |\beta| + r(\|f\|_{\infty, I_p} + \|b\|_{\infty, I_p} C_{p-1}) + r^2 \bar{K}(\|\varphi\|_{\infty, I_{p-1}} + C_p), \\
&p = 2, 3, \dots, m,
\end{aligned} \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned}
E_p &= \|f\|_{\infty, I_p} + \|a\|_{\infty, I_p} D_p + (\|b\|_{\infty, I_p} + r \bar{K}) C_{p-1} + r \bar{K} C_p, \\
&p = 2, 3, \dots, m
\end{aligned} \tag{5.12}$$

ve

$$\bar{K} = \max_{\bar{I} \times \bar{I}} |K(t, s)|$$

biçimindedir.

İspat.

Lemma 5.1 ispatı p üzerinden tümevarım yöntemi kullanılarak yapılacaktır. $t \in I_1$ için (5.1) denklemi

$$\begin{aligned}
u(t) = & \varphi(0) + B \int_0^t e^{-\int_0^\xi a(s)ds} d\xi \\
& + \int_0^t \int_0^\xi f(s) e^{-\int_s^\xi a(\eta)d\eta} ds d\xi \\
& - \int_0^t \int_0^\xi b(s) u(s-r) e^{-\int_s^\xi a(\eta)d\eta} ds d\xi \\
& - \int_0^t \int_0^\xi e^{-\int_s^\xi a(\eta)d\eta} \int_{s-r}^0 K(s, \theta) u(\theta) d\theta ds d\xi \\
& - \int_0^t \int_0^\xi e^{-\int_s^\xi a(\eta)d\eta} \int_0^s K(s, \theta) u(\theta) d\theta ds d\xi
\end{aligned} \tag{5.13}$$

şeklini alır. Böylece (5.13) eşitliğinin her iki taraftan mutlak değeri alınırsa;

$$\begin{aligned}
|u(t)| & \leq |\varphi(0)| + |B| t + \int_0^t \int_0^\xi |f(s)| ds d\xi \\
& + \int_0^t \int_0^\xi |b(s)| |u(s-r)| ds d\xi \\
& + \int_0^t \int_0^\xi \int_{s-r}^0 |K(s, \theta)| |u(\theta)| d\theta ds d\xi \\
& + \int_0^t \int_0^\xi e^{-\int_s^\xi a(\eta)d\eta} \int_0^s |K(s, \theta)| |u(\theta)| d\theta ds d\xi \\
& \leq |\varphi(0)| + |B| r + r^2 \|f\|_{\infty, I_1} + r^2 \|b\|_{\infty, I_1} \|u\|_{\infty, I_0} \\
& + r^2 \bar{K} \int_{-r}^0 |\varphi(\theta)| d\theta + r^2 \bar{K} \int_0^t |u(\theta)| d\theta
\end{aligned}$$

(5.14)

olur. (5.14) eşitliğinin yazılımını kısaltmak için

$$Q_0 = |\varphi(0)| + |B| r + r^2 \|f\|_{\infty, I_1} + r^2 \|b\|_{\infty, I_1} \|u\|_{\infty, I_0} + r^2 \bar{K} \int_{-r}^0 |\varphi(\theta)| d\theta$$

şeklinde alınmış olsun. Böylece

$$|u(t)| \leq Q_0 + r^2 \bar{K} \int_0^t |u(\theta)| d\theta$$

olur. Buradan da Gronwall eşitsizliği kullanılırsa

$$|u(t)| \leq Q_0 e^{r^3 \bar{K}}$$

bulunur. Böylece $t \in I_1$ için (5.1) probleminin çözümü olan $u(t)$ için kararlılık eşitsizliği elde edilmiş olur.

(5.1) problemini sağlayan $u'(t)$ fonksiyonunun kararlılık eşitsizliğini elde etmek için I_1 aralığında

$$F(t) = f(t) - b(t)u(t-r) - \int_{t-r}^t K(t,s)u(s)ds$$

olsun. Buradan da

$$u'(t) = B e^{-\int_0^t a(s)ds} + \int_0^t e^{-\int_s^t a(\eta)d\eta} F(s)ds \quad (5.15)$$

olarak bulunur. (5.15) eşitliğinin her iki tarafından mutlak değeri alınırsa;

$$\begin{aligned} |u'(t)| &\leq |B| + r \|f\|_{\infty, I_1} + r \|b\|_{\infty, I_1} \|\varphi\|_{\infty, I_0} + r^2 \bar{K} \|\varphi\|_{\infty, I_0} \\ &\quad + (r \|c\|_{\infty, I_1} + r \bar{K}) \int_0^r |u(\theta)| d\theta \\ &\leq |B| + r (\|f\|_{\infty, I_1} + \|b\|_{\infty, I_1} \|\varphi\|_{\infty, I_0}) + r^2 \bar{K} \|\varphi\|_{\infty, I_0} + r^2 \bar{K} C_1 \end{aligned}$$

$u'(t)$ için kararlılık eşitsizliği elde edilmiş olur. Aynı yöntemle (5.1) problemi kullanılarak I_1 aralığında $u''(t)$ için aşağıda verilen kararlılık eşitsizliği elde edilir:

$$|u''(t)| \leq \|f\|_{\infty, I_1} + \|a\|_{\infty, I_1} D_1 + \|b\|_{\infty, I_1} \|\varphi\|_{\infty, I_0} + r\bar{K} \|\varphi\|_{\infty, I_0} + \bar{K} r C_1.$$

Tümevarım yönteminin kullanımına devam etmek için $p \leq l$ olduğunda (5.1)-(5.3) eşitliklerinin doğru olduğu varsayalım. O zaman $t \in I_{l+1}$ aralığında olduğu zaman (5.14) için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} |u(t)| &\leq |u(rl)| + |B|t + \int_{rl}^t \int_{rl}^{\xi} |f(s)| ds d\xi \\ &+ \int_{rl}^t \int_{rl}^{\xi} |b(s)| |u(s-r)| ds d\xi \\ &+ \int_{rl}^t \int_{rl}^{\xi} \int_{s-r}^{rl} |K(s, \theta)| |u(\theta)| d\theta ds d\xi \\ &+ \int_{rl}^t \int_{rl}^{\xi} e^{-\int_s^{\xi} a(\eta) d\eta} \int_{rl}^s |K(s, \theta)| |u(\theta)| d\theta ds d\xi \\ &\leq C_l + |B| r + r^2 \|f\|_{\infty, I_l} + r^2 \|b\|_{\infty, I_l} \|u\|_{\infty, I_{l-1}} \\ &+ r^2 \bar{K} \int_{-r(l-1)}^{rl} |\varphi(\theta)| d\theta + r^2 \bar{K} \int_{rl}^t |u(\theta)| d\theta. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Buradan Gronwall eşitsizliği kullanılarak

$$|u(t)| \leq [r\|f\|_{\infty, I_{l+1}} + r\|a\|_{\infty, I_{l+1}} D_l + (1 + r^2 \bar{K}) C_l] e^{r^3 \bar{K}}$$

sonucuna ulaşılır. Aynı işlemler (5.15) ve (5.1)'e uygulanırsa aşağıda verilen eşitsizlikler elde edilir:

$$|u'(t)| \leq |B| + r(\|f\|_{\infty, I_1} + \|b\|_{\infty, I_1} C_l) + r^2 \bar{K} (C_l + C_{l+1}),$$

$$|u''(t)| \leq \|f\|_{\infty, I_{l+1}} + \|a\|_{\infty, I_{l+1}} D_{l+1} + \|b\|_{\infty, I_l} C_l + r\bar{K}(C_l + C_{l+1}).$$

Dolayısıyla (5.4)-(5.6) eşitsizliklerinin $p = l + 1$ için doğruluğu ispatlanmış olur. $\square$

5.1.2. Fark Şemasının Kurulması

Bu bölümde (5.1)-(5.3) problemi için düzgün şebekede fark şeması oluşturulacaktır.

$\bar{I}$ aralığında

$$\omega_{N_0} = \{t_i = ih, i = 1, 2, \dots, N_0; h = T/N_0 = r/N\}$$

şeklinde tanımlanmış olsun (kolaylık olması için T/r tam sayı olsun; yani $T = mr$ olur).

Burada her bir I_p ($1 \leq p \leq m$) alt aralığı N tane şebeke noktalarını içermektedir.

$$\omega_{N,p} = \{t_i : (p-1)N + 1 \leq i \leq pN\}, \quad 1 \leq p \leq m$$

ve sonuç olarak

$$\omega_{N_0} = \cup_{p=1}^m \omega_{N,p},$$

$$\bar{\omega}_{N,p} = \omega_{N,p} \cup \{t_0 = 0, t_N = T\}$$

şelindedir.

ω_{N_0} üzerinde tanımlanmış her bir t_i noktasındaki $g(t)$ fonksiyonunun $g_i = g(t_i)$ şeklindeki gösterimi ile

$$\begin{aligned} g_{t,i} &= \frac{g_{i+1} - g_i}{h}, & g_{\bar{t},i} &= \frac{g_i - g_{i-1}}{h}, \\ g_{\hat{t},i} &= \frac{g_{i+1} - g_{i-1}}{2h}, & g_{\bar{\bar{t}},i} &= \frac{g_{i+1} - 2g_i + g_{i-1}}{h^2} \end{aligned}$$

eşitlikleri tanımlanmış olsun. ω_{N_0} üzerinde tanımlanan herhangi bir g_i şebeke fonksiyonu için kullanılan norm

$$\|g\|_{\infty,p} \equiv \|g\|_{\infty,\omega_{N,p}} = \max_{\bar{\omega}_{N,p}} |g(t)|,$$

$$\|g\|_{\infty, N_0} \equiv \|g\|_{\infty, \omega_{N_0}}$$

biçimindedir.

(5.1)'de verilen denklemde t değişkeni yerine t_i yazılırsa;

$$u''(t_i) + a(t_i)u'(t_i) + b(t_i)u(t_i - r) + \int_{t_i-r}^{t_i} K(t_i, s)u(s)ds = f(t_i), \quad 1 \leq i \leq N_0. \quad (5.17)$$

Bir sonraki adımda aşağıdaki bağıntılar kullanılacaktır:

$$u''(t_i) = u_{\bar{t}t,i} + R_i^{(1)}, \quad R_i^{(1)} = -\frac{h^2}{12}u^{(4)}(\xi_i^{(1)}), \quad \xi_i^{(1)} \in (t_{i-1}, t_{i+1}), \quad (5.18)$$

$$u'(t_i) = u_{\bar{t},i} + R_i^{(2)}, \quad R_i^{(2)} = -\frac{h^2}{6}u'''(\xi_i^{(2)}), \quad \xi_i^{(2)} \in (t_{i-1}, t_{i+1}). \quad (5.19)$$

(5.1)'ün integral terimi için yamuk (trapez) kuralı uygulanırsa

$$\int_{t_i-r}^{t_i} K(t_i, s)u(s)ds = \sum_{j=i-N}^i \bar{h}_j K(t_i, t_j) u_j + R_i^{(3)}$$

elde edilir. Burada

$$\bar{h}_{i-N} = \bar{h}_i = \frac{h}{2}, \quad \bar{h}_j = h, \quad j = i - N + 1, i - N + 2, \dots, i - 1$$

ve kalan terim

$$R_i^{(3)} = \frac{1}{2} \sum_{j=i-N+1}^i \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_j - \xi)(t_{j-1} - \xi) \frac{d^2}{d\xi^2} (K(t_i, \xi)u(\xi)) d\xi, \quad t_{i-r} < \xi < t_i$$

biçimindedir. Sonuç olarak, (5.1) problemi kullanılarak

$$u_{\bar{t}t,i} + a_i u_{\bar{t},i} + b_i u_{i-N} + \sum_{j=i-N}^i \bar{h}_j K_{i,j} u_j = f_i - \bar{R}_i, \quad (5.20)$$

$$\bar{R}_i = R_i^{(1)} + a_i R_i^{(2)} + R_i^{(3)}, \quad 1 \leq i \leq N_0 \quad (5.21)$$

kalan terimi ile birlikte $u(t_i)$ için (5.20)'de ifade edilen kesin bağıntısı elde edilir. Eğer

$$u_{\bar{t},i}^* = u_{t,i} - \frac{h}{2} u_{\bar{t},i}$$

eşitliği kullanılarak (5.20) ve (5.21) denklemlerini birlikte yazılırsa;

$$\left(1 - \frac{a_i h}{2}\right) u_{\bar{t},i} + a_i u_{t,i} + b_i u_{i-N} + \sum_{j=i-N}^i \hbar_j K_{i,j} u_j = f_i - \bar{R}_i \quad (5.22)$$

eşitliği elde edilir. Son olarak (5.22)'de $x = \frac{a_i}{2} h$ için

$$1 - x = \frac{1}{1+x} - \frac{x^2}{1+x} \equiv \frac{1}{1+x} + O(x^2), \quad x > 0$$

eşitliğinin kullanılmasıyla

$$k_i u_{\bar{t},i} + a_i u_{t,i} + b_i u_{i-N} + \sum_{j=i-N}^i \hbar_j K_{i,j} u_j = f_i - R_i \quad (5.23)$$

$u(t_i)$ için (5.23)'de ifade edilen bağıntı elde edilir. Burada kalan terim

$$R_i = \bar{R}_i + R_i^{(4)}, \quad R_i^{(4)} = -\frac{\left(\frac{\hbar a_i}{2}\right)^2}{1 + \frac{\hbar a_i}{2}} u_{\bar{t},i} \quad (5.24)$$

ve

$$k_i = \frac{1}{1 + \frac{\hbar a_i}{2}} \quad (5.25)$$

biçimindedir. (5.1) probleminin (5.3) başlangıç koşulunun yaklaşık değerini incelemek için işleme;

$$u'(0) = u_{t,0} - \frac{h}{2} u''(0) - \frac{h^2}{6} u'''(\xi_0), \quad 0 < \xi_0 < 1 \quad (5.26)$$

denklemini ile başlanılsın. (5.1)'de $t = 0$ için

$$u''(0) = f(0) - a(0)u'(0) - b(0)\varphi'(-r) - \int_{-r}^0 K(0,s)\varphi(s)ds \quad (5.27)$$

eşitliği elde edilir. (5.27) içindeki $u'(0)$ yaklaşık olarak hesaplanırsa

$$u'(0) = u_{t,0} - \frac{h}{2}u''(\xi_1), \quad 0 < \xi_1 < t_1$$

ve elde edilen bu yaklaşım (5.27)'de bulunan eşitlik ile birlikte (5.26)'da yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} u'(0) &= \left(1 + \frac{h}{2}a(0)\right) u_{t,0} \\ &- \frac{h}{2} \left[f(0) - b(0)\varphi'(-r) - \int_{-r}^0 K(0,s)\varphi(s)ds \right] \\ &- \frac{h^2}{6}u'''(\xi_0) + \frac{h^2}{4}a(0)u''(\xi_1) \end{aligned} \quad (5.28)$$

bulunur. Böylece (5.3) değerini yaklaşık olarak hesaplamak için aşağıdaki form kullanabilir:

$$u_{t,0} = y_{t,0} + r^{(0)}.$$

Burada

$$y_{t,0} = \bar{B} \equiv \left(1 + \frac{h}{2}a(0)\right)^{-1} \left[B + \frac{h}{2} \left(f(0) - b(0)\varphi'(0) - \int_{-r}^0 K(0,s)\varphi(s)ds \right) \right] \quad (5.29)$$

olur ve kalan terim

$$r^{(0)} = \left(1 + \frac{h}{2}a(0)\right)^{-1} \left[-\frac{h^2}{6}u'''(\xi_0) + \frac{h^2}{4}a(0)u''(\xi_1) \right] \quad (5.30)$$

biçimindedir. Böylece (5.23) ve (5.29)'de elde edilen eşitlikler yardımıyla, (5.1)-(5.3)'yı yaklaşık olarak hesaplamak için aşağıdaki fark şeması oluşturulur:

$$k_i y_{\bar{t},i} + a_i y_{t,i} + b_i y_{i-N} + \sum_{j=i-N}^i \hbar_j K_{i,j} y_j = f_i, \quad 1 \leq i \leq N_0, \quad (5.31)$$

$$y_i = \varphi_i, \quad 0 \leq i \leq N_0, \quad (5.32)$$

$$y_{t,0} = \bar{B}. \quad (5.33)$$

5.1.3. Hata Değerlendirmesi

(5.1) ve (5.31) problemine göre yaklaşık çözüm hatasını z_i şeklinde ifade edelim. Bu hata fonksiyonu her bir t_i noktasındaki yaklaşık çözüm y_i ve kesin çözüm u_i arasındaki farkı temsil eder. Böylece

$$k_i z_{it,i} + a_i z_{t,i} + b_i z_{i-N} + \sum_{j=i-N}^i \hbar K_{i,j} z_j = R_i \quad 1 \leq i \leq N_0, \quad (5.34)$$

$$z_i = 0, \quad 0 \leq i \leq N_0, \quad (5.35)$$

$$z_{t,0} = -r^{(0)} \quad (5.36)$$

problemi yazılır. Burada R_i 'ler (5.24) ile verilen kesme hatasıdır. Hata fonksiyonu z_i 'yi ele almadan önce, süreç sırasında kullanacak bir Lemma incelenecektir.

Lemma 5.2. $|F_i| \leq \mathcal{F}_i$ ve $\mathcal{F}_i$ azalmayan bir fonksiyon olmak üzere;

$$v_{t,i} + A_i v_i = F_i, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (5.37)$$

$$v_0 = B \quad (5.38)$$

olur. Burada $t_i = x_0 + ih$, $h = \frac{X-x_0}{N}$, $A_i \geq 0$ 'dır ve BDP'nin çözümü olan şebeke fonksiyonu v_i

$$|v_i| \leq B + ih\mathcal{F}_i, \quad 1 \leq i \leq N \quad (5.39)$$

eşitsizliğini sağlar.

İspat. (5.37)'de verilen fark denklemi

$$v_i = \frac{1}{1 + A_i h} v_{i-1} + \frac{h}{1 + A_i h} F_i$$

şeklinde yazılır. Buradan

$$\begin{aligned}
|v_i| &\leq \frac{1}{1+A_i h} |v_{i-1}| + \frac{h}{1+A_i h} |F_i| \\
&\leq |v_0| + h \sum_{j=1}^i |F_j| \\
&\leq B + ih \mathcal{F}_i
\end{aligned}$$

sonucu çıkarılır. Bu durumda (5.39)'nin sağladığını gösterir. $\square$

Lemma 5.3. (5.34)-(5.36) probleminin z_i çözümü

$$\|z\|_{\infty, p} \leq E \sum_{j=0}^{p-1} F^j, \quad (5.40)$$

eşitsizliğini sağlar. Burada

$$E = e^{T^3 \bar{K}} \left(T \left| r^{(0)} \right| + MT^2 \|R\|_{\infty, \bar{\omega}, N_0} \right)$$

ve

$$F = e^{T^3 \bar{K}} MT \|b\|_{\infty, \bar{I}}$$

şeklindedir.

İspat. $t_i \in \omega_{N,p}$ noktaları için $z_{t,i} = v_i$ olarak tanımlanmış olsun. Böylece (5.34) aşağıdaki şekle dönüşür:

$$k_i v_{\bar{i},i} + a_i v_i = D_i, \quad 1 \leq i \leq N_0, \quad (5.41)$$

$$v_0 = r^{(0)}. \quad (5.42)$$

Burada

$$D_i = R_i - b_i z_{i-N} - \sum_{j=i-N}^i \hbar K_{i,j} z_j$$

eşitliğini ifade etmektedir. Lemma 5.2’u $\omega_{N,p}$ üzerinde (5.41) ve (5.42)’e uygulanırsa;

$$|v_i| \leq \left| r^{(0)} \right| + \left(1 + \frac{T}{4} \|a\|_{\infty, \bar{I}} \right) h \sum_{j=1}^i |D_j|$$

bağıntısı elde edilir. Burada $M = \left(1 + \frac{T}{4} \|a\|_{\infty, \bar{I}} \right)$ olarak tanımlanırsa daha sonraki adımda

$$\begin{aligned} |z_i| &\leq h \sum_{j=0}^{i-1} \left| r^{(0)} \right| + M h^2 \sum_{s=0}^{i-1} \sum_{j=1}^s |D_j| \\ &\leq T \left| r^{(0)} \right| + M T \|b\|_{\infty, \bar{I}} h \sum_{j=1}^{i-1} |z_{j-N}| \\ &\quad + M T^2 \bar{K} h \sum_{j=1}^{i-1} |z_j| + M T h \sum_{j=1}^{i-1} |R_j| \end{aligned}$$

değerlendirmesi yapılır. Buradan

$$A_i = T \left| r^{(0)} \right| + M T \|b\|_{\infty, \bar{I}} h \sum_{j=1}^{i-1} |z_{j-N}| + M T h \sum_{j=1}^{i-1} |R_j|$$

olarak alındıktan sonra Gronwall eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} |z_i| &\leq T^2 \bar{K} h \sum_{j=1}^{i-1} |z_j| + A_i \\ &\leq A_i e^{T^2 \bar{K} t_i} \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. $t_i \in I_p$ için

$$\begin{aligned} |z_i| &\leq e^{T^3 \bar{K}} \left(T \left| r^{(0)} \right| + M T^2 \|R\|_{\infty, \bar{\omega}, N_0} \right) \\ &\quad + e^{T^3 \bar{K}} M T \|b\|_{\infty, \bar{I}} h \sum_{j=1}^{i-1} |z_{j-N}| \end{aligned}$$

değerlendirmesine ulaşılabacağı kolaylıkla görülebilir. Son olarak z_i için

$$E = e^{T^3 \bar{K}} \left(T \left| r^{(0)} \right| + M T^2 \|R\|_{\infty, \bar{\omega}, N_0} \right)$$

ve

$$F = e^{T^3 \bar{K}} M T \|b\|_{\infty, \bar{I}}$$

olduğu durumda

$$\|z\|_{\infty, p} \leq E + F \|z\|_{\infty, p-1}$$

$$\leq E \sum_{j=0}^{p-1} F^j$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

Lemma 5.4. Eğer $a, b, f \in C(\bar{I})$, $\varphi \in C^2(I_0)$, $K \in C^2(\bar{I} \times \bar{I})$ ve $u \in C^4[0, T]$ olursa, R_i ve $r^{(0)}$ kalan terimleri

$$\|R\| \leq Ch^2, \quad 1 \leq p \leq m, \quad (5.43)$$

$$|r^{(0)}| \leq Ch^2 \quad (5.44)$$

eşitsizliklerini sağlar.

İspat. (5.18)-(5.19), (5.24) ve Lemma 5.1'den yararlanılarak

$$|R_i^{(1)}| \leq \frac{h^2}{12} \|u^{(4)}\|_{\infty, \bar{I}}, \quad |R_i^{(2)}| \leq \frac{h^2}{6} \|u^{(3)}\|_{\infty, \bar{I}},$$

$$|R_i^{(3)}| \leq \frac{h^2 r}{24} \left\| \frac{\partial^2}{\partial s^2} (K) \right\|_{\infty, \bar{I}^2},$$

$$|R_i^{(4)}| \leq \frac{\left(\frac{h \|a\|_{\infty, \omega_{N_0}}}{2} \right)^2}{1 + \frac{h \|a\|_{\infty, \omega_{N_0}}}{2}} \|u^{(4)}\|_{\infty, \bar{I}}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Yukarıda belirtilen eşitsizlikler dikkate alındığında, (5.43) ve (5.44)'nin geçerliliği kolayca görülebilir. $\square$

Teorem 5.5. (5.1)-(5.3) probleminin çözümü u ve (5.31)-(5.33) fark probleminin çözümü de y olsun. Varsayılan koşullar altında (5.31)-(5.33) fark probleminin çözümü,

(5.1)-(5.3)'nın çözümüne düzgün şebekede maksimum normda $O(h^2)$ hızıyla düzgün yakınsaktır:

$$\|y - u\|_{\infty, \omega_{N_0}} \leq Ch^2.$$

İspat. Bu teoremin ispatı Lemma 5.3 ve Lemma 5.4'den elde edilir. □

5.1.4. Nümerik Sonuçlar

Bu bölümde (5.1)-(5.3) problemi için elde edilen teorik sonuçlar aşağıda verilen örnekler ile incelenecektir. Bu örnekler (5.31)-(5.33) fark şemasından elde edilen

$$y_{i+1} = \frac{h^2 f_i + y_i(2k_i + ha_i) - y_{i-1}k_i - y_{i-N}h^2 b_i - h^2 \sum_{j=i-N}^i \hbar K_{i,j} y_j}{k_i + ha_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N_0, \quad (5.45)$$

$$y_i = \varphi_i, \quad -N \leq i \leq 0, \quad (5.46)$$

$$y_1 = y_0 + h\bar{B} \quad (5.47)$$

iteratif tekiniği kullanılarak çözülür.

Örnek 5.6. Elde edilen sonuçlar aşağıdaki problem için test edilecektir:

$$u''(t) + 2u'(t) + 3u(t - \pi) = 3e^{-t+\pi} + \cos(t), \quad t \in (0, \pi],$$

$$u(t) = e^{-t}, \quad u'(0) = -1, \quad t \leq 0.$$

Bu problemin kesin çözümü

$$u(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t \in I_0, \\ \frac{7}{10}e^{-2t} - \frac{\sqrt{5}}{5}\cos(t + \arctan(2)) + \frac{1}{2}, & t \in I_1, \\ \frac{-e^{-2t}}{4} (3e^{t+\pi} + 3te^{2t}) + e^{2t} \left(\frac{14}{25}\cos(t) + \frac{2}{25}\sin(t) - \frac{3\pi}{4} - \frac{5}{4} \right) \\ - \left(\frac{21}{20}te^{2\pi} \right) - \frac{e^{2\pi+2t}}{10000} (10500\pi - 18913), & t \in I_2. \end{cases}$$

Herhangi bir N değeri için sayısal yöntem kullanarak elde edilen yaklaşık çözüm ile problemin kesin çözümü arasındaki farkı temsil eden kesin hata e_i^N biçiminde gösterilir:

$$e_i^N = |y_i - u_i|, \quad e^N = \|y - u\|_{\infty, \bar{\omega}_{N_0}}.$$

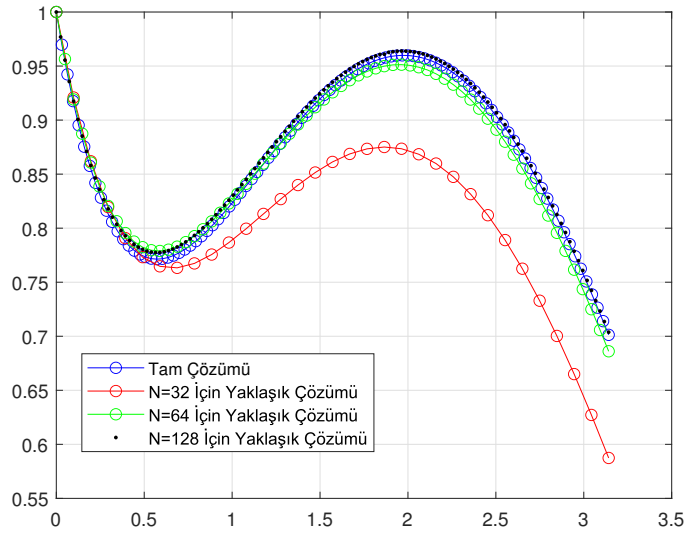
e^N maksimum noktasal hatadır ve tüm ayrık noktalardaki kesin hatanın maksimum değeridir. Bu, herhangi bir noktada kesin çözüm ile yaklaşık çözüm arasındaki en büyük sapmayı temsil eder ve belirli bir aralıktaki N değeri için de hesaplanır. Ayrıca bu değer, kesin çözümü yaklaşık olarak hesaplayan sayısal yöntemin etkililiğini belirlemek için kullanılır.

Örnek 5.6'ın kesin çözümünü ve iteratif yöntem ile bulunan yaklaşık çözümü kullanarak elde edilen sonuçlar Tablo 5.1'de verilmiştir:

Çizelge 5.1. Test probleminin I_1 aralığındaki sayısal sonuçları

t_i	u_i	y_i ($N = 32$)	e_i^{32}	y_i ($N = 64$)	e_i^{64}	y_i ($N = 128$)	e_i^{128}
0.2702	0.8185	0.8314	0.0124	0.8288	0.0103	0.8353	0.0168
0.5040	0.7748	0.7698	0.0050	0.7829	0.0081	0.7789	0.0041
1.0040	0.8273	0.7921	0.0352	0.8222	0.0051	0.8275	0.0002
1.5040	0.9278	0.8537	0.0750	0.9154	0.0124	0.9206	0.0072
2.0040	0.9593	0.8747	0.0846	0.9495	0.0098	0.9639	0.0046
2.5040	0.9086	0.8039	0.1047	0.8891	0.0195	0.9062	0.0024
3.0040	0.7573	0.6425	0.1048	0.7370	0.0203	0.7514	0.0059
3.1573	0.7004	0.5940	0.1064	0.6871	0.0133	0.7042	0.0038

Örnek 5.6'ün kesin ve yaklaşık çözümünün I_1 aralığındaki grafiği aşağıda verilmiştir:

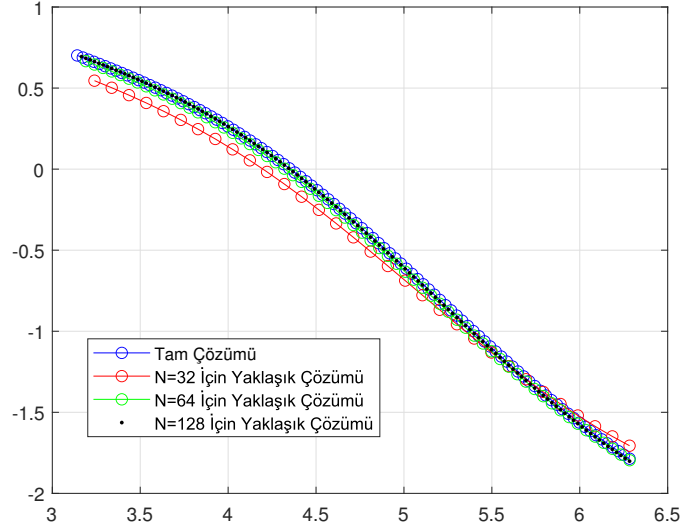


Şekil 5.1. I_1 aralığında $N = 32, 64, 128$ değerleri için problemin kesin ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

I_2 aralığında Örnek 5.6'ün kesin çözümü ve iteratif yöntem ile bulunan yaklaşık çözümü kullanarak elde edilen tablo ve grafik aşağıda verilmiştir:

Çizelge 5.2. Test probleminin I_2 aralığındaki sayısal sonuçları

t_i	u_i	y_i ($N = 32$)	e_i^{32}	y_i ($N = 64$)	e_i^{64}	y_i ($N = 128$)	e_i^{128}
3.1331	0.6895	0.5496	0.1399	0.6195	0.0700	0.6195	0.0700
3.5040	0.5671	0.4096	0.1575	0.5233	0.0438	0.5233	0.0438
4.0040	0.2959	0.1297	0.1662	0.2172	0.0787	0.2180	0.0769
4.5040	-0.1327	-0.2376	0.1049	-0.1764	0.0437	-0.1770	0.0431
5.0121	-0.5787	-0.7187	0.1400	-0.6487	0.0700	-0.6490	0.0697
5.5040	-1.1385	-1.1210	0.0175	-1.1035	0.0300	-1.1055	0.0280
5.9960	-1.5845	-1.4971	0.0874	-1.5845	0.0000	-1.5845	0.0000
6.2782	-1.7857	-1.6983	0.0874	-1.7770	0.0085	-1.7775	0.0080



Şekil 5.2. I_2 aralığında $N = 32, 64, 128$ değerleri için problemin kesin ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

Tüm tablolardan ve grafiklerden elde edilecek sonuç, kesin ve yaklaşık çözümün arasındaki fark, N arttıkça azalmaktadır. Ayrıca yaklaşık ve kesin çözümler arasındaki hata oranı da azalmaktadır. Çözümlerin birbirlerine yaklaşması ve hata oranının azalması, önerdiğimiz yöntemin doğruluğunu göstermektedir.

Örnek 5.7.

$$u''(t) - \int_{t-\pi/2}^t u(s)ds = -\cos(t - \pi/2) - 2, \quad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$u(t) = \sin(t), \quad u'(0) = 1, \quad t \leq 0$$

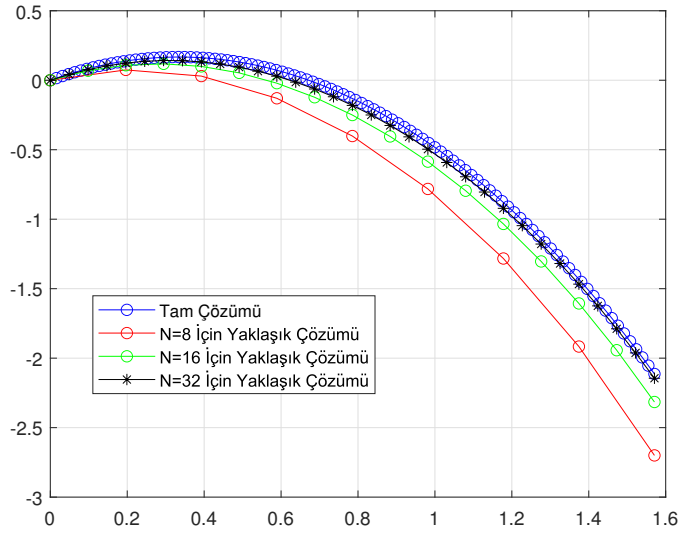
probleminin kesin çözümü:

$$u(t) = \begin{cases} \sin(t), & t \in I_0, \\ e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) - e^{\frac{3t}{2}} + \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right), & t \in I_1 \end{cases}$$

şeklinde. Aşağıdaki tabloda, I_1 aralığında Örnek 5.7 'ün kesin ve yaklaşık çözümünün değerleri verilmiştir:

Çizelge 5.3. Test probleminin I_1 aralığındaki sayısal sonuçları

t_i	u_i	y_i (N=32)	e_i^{32}	y_i (N=64)	e_i^{64}	y_i (N=128)	e_i^{128}
0.2009	0.1283	0.0561	0.0722	0.1071	0.0212	0.1071	0.0212
0.4000	0.1720	0.0357	0.1363	0.0969	0.0751	0.1071	0.0649
0.5991	0.0408	-0.0969	0.0561	-0.0153	0.0255	0.0459	0.0051
0.8018	-0.1341	-0.4337	0.2996	-0.2602	0.1261	-0.1582	0.0241
1.0009	-0.4752	-0.7806	0.3054	-0.5765	0.1013	-0.4643	0.0109
1.2037	-0.9475	-1.3316	0.3841	-1.0459	0.0984	-0.9439	0.0036
1.3991	-1.4723	-2.0153	0.5430	-1.6378	0.1655	-1.5663	0.0940
1.5687	-2.0845	-2.6684	0.5839	-2.2806	0.0961	-2.1173	0.0328



Şekil 5.3. I_1 aralığında $N = 32, 64, 128$ değerleri için problemin kesin ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

Örnek 5.6'de yaptığımız aynı yorumlar Örnek 5.7 için de geçerlidir. N değerleri arttıkça, kesin ve yaklaşık çözümler yakınsar. Ayrıca hata oranının azalmasından çözümlerin yakınsamasını görebiliriz. Çözümlerin birbirine yakınsaması ve hata oranındaki azalma, önerilen yöntemin doğruluğunu gözler önüne sermektedir.

5.2. ARANAN FONKSİYONUN BİRİNCİ MERTEBEDEN TÜREVİNDE GECİKME TERİMİ BULUNDURAN İKİNCİ MERTEBEDEN GECİKMELİ VOLTERRA İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Bu bölümde, aranan fonksiyonun birinci mertebeden türevinde gecikme terimi içeren ikinci mertebeden GVİDD'leri ele alınacaktır.

$$u''(t) + a(t)u'(t) + b(t)u'(t-r) + \int_{t-r}^t K(t,s)u(s)ds = f(t), \quad t \in I, \quad (5.48)$$

$$u(t) = \varphi(t), \quad -r \leq t \leq 0, \quad (5.49)$$

$$u'(0) = B. \quad (5.50)$$

$I = (0, T] = \cup_{p=1}^m I_p$ ve $I_p = \{t : r_{p-1} < t \leq r_p\}$, $1 \leq p \leq m$ ve $r_s = sr$, $(0 \leq s \leq m)$. $a, b, f \in C(\bar{I})$, $\varphi \in C^2(I_0)$ ve $s = 0, 1, 2$ için $\frac{\partial^2 K}{\partial s^2} \in C^2([0, T] \times [0, T])$ olduğu düşünülür.

Tezin bu bölümünde (5.48)-(5.50)'ün kesin çözümünün bazı önemli özellikleri, kararlılık eşitsizlikleri ve fark şemasının oluşumu incelenecektir. Ayrıca kararlılık şemasının yardımı ile elde edilen yaklaşık ve kesin çözümün karşılaştırmasını sağlayan sayısal problemler üzerinde incelemeler yapılacaktır. Yapılan araştırmaların daha net anlaşılması için örnekler MatLab uygulaması yardımı ile elde edilen grafik ve tablolar ile desteklenecektir.

5.2.1. (5.48)-(5.50) Problemi İçin Kararlılık Eşitsizlikleri

Bu bölümde, (5.48)-(5.50) probleminin kararlılığını gösteren aranan fonksiyonunun birinci mertebeden türevinde gecikme terimi bulunduran ikinci mertebeden GVİDD'lerin kesin çözümü ve başlangıç koşulu için bazı eşitsizliklerin oluşumu ele alınacaktır.

Lemma 5.8. $a, b, f \in C^1(\bar{I})$, $K \in C^2([0, T] \times [0, T])$ ve $\varphi \in C^2(I_0)$ ise (5.48)-(5.50) probleminin çözümü

$$\|u\|_{\infty, I_p} \leq C_p, \quad 1 \leq p \leq m, \quad (5.51)$$

$$\|u'\|_{\infty, I_p} \leq D_p, \quad 1 \leq p \leq m, \quad (5.52)$$

$$\|u''\|_{\infty, I_p} \leq E_p, \quad 1 \leq p \leq m \quad (5.53)$$

eşitsizliklerini sağlar. Burada

$$\begin{aligned} C_1 &= (|\varphi(0)| + |B| r + r^2 \|f\|_{\infty, I_1}) e^{r^3 \bar{K}} \\ &+ r \|\varphi\|_{\infty, I_0} (2 \|b\|_{\infty, I_1} + r \|b'\|_{\infty, I_1} + r \|b\|_{\infty, I_1} \|a\|_{\infty, I_1}) e^{r^3 \bar{K}} \\ &+ \left(r^2 \bar{K} \int_{-r}^0 |\varphi(\theta)| d\theta \right) e^{r^3 \bar{K}}, \end{aligned} \quad (5.54)$$

$$\begin{aligned} D_1 &= |B| + r \|f\|_{\infty, I_1} + r^2 \bar{K} (\|\varphi\|_{\infty, I_0} + C_1) \\ &+ r \|\varphi\|_{\infty, I_0} (2 \|b\|_{\infty, I_1} + \|b'\|_{\infty, I_1} + \|b\|_{\infty, I_1} \|a\|_{\infty, I_1}), \end{aligned} \quad (5.55)$$

$$E_1 = \|f\|_{\infty, I_1} + \|a\|_{\infty, I_1} D_1 + \|b\|_{\infty, I_1} \|\varphi'\|_{\infty, I_0} + r \bar{K} (\|\varphi\|_{\infty, I_0} + C_1), \quad (5.56)$$

$$\begin{aligned} C_p &= C_{p-1} (1 + 2r \|b\|_{\infty, I_p} + r^2 \|b'\|_{\infty, I_p} + r^2 \|b\|_{\infty, I_p} \|a\|_{\infty, I_p} + 2r^3 \bar{K}) e^{r^3 \bar{K}} \\ &+ (|B| r + r^2 \|f\|_{\infty, I_p}) e^{r^3 \bar{K}}, \end{aligned} \quad p = 2, 3, \dots, m, \quad (5.57)$$

$$\begin{aligned} D_p &= |B| + r \|f\|_{\infty, I_p} + r^2 \bar{K} (C_{p-1} + C_p) \\ &+ r C_{p-1} (2 \|b\|_{\infty, I_p} + \|b'\|_{\infty, I_p} + \|b\|_{\infty, I_p} \|a\|_{\infty, I_p}), \end{aligned} \quad p = 2, 3, \dots, m, \quad (5.58)$$

$$E_p = \|f\|_{\infty, I_p} + \|a\|_{\infty, I_p} D_p + \|b\|_{\infty, I_p} D_{p-1} + r \bar{K} C_{p-1} + r \bar{K} C_p,$$

$$p = 2, 3, \dots, m$$

(5.59)

ve

$$\bar{K} = \max_{\bar{I} \times \bar{I}} |K(t, s)|$$

biçimindedir.

İspat.

Lemma 5.8'in ispatı p üzerinde tümevarım yöntemi kullanılarak yapılacaktır. $t \in I_1$ için (5.48) denklemi

$$\begin{aligned} u(t) &= \varphi(0) + B \int_0^t e^{-\int_0^s a(s) ds} d\xi \\ &+ \int_0^t \int_0^\xi f(s) e^{-\int_s^\xi a(\eta) d\eta} ds d\xi \\ &- \int_0^t \int_0^\xi b(s) u'(s-r) e^{-\int_s^\xi a(\eta) d\eta} ds d\xi \\ &- \int_0^t \int_0^\xi e^{-\int_s^\xi a(\eta) d\eta} \int_{s-r}^0 K(s, \theta) u(\theta) d\theta ds d\xi \\ &- \int_0^t \int_0^\xi e^{-\int_s^\xi a(\eta) d\eta} \int_0^s K(s, \theta) u(\theta) d\theta ds d\xi \\ &= \varphi(0) + B \int_0^t e^{-\int_0^s a(s) ds} d\xi + \int_0^t \int_0^\xi f(s) e^{-\int_s^\xi a(\eta) d\eta} ds d\xi \\ &+ \int_0^t \left(u(\xi-r) b(\xi) - u(-r) b(0) e^{-\int_0^\xi a(\eta) d\eta} \right) d\xi \\ &+ \int_0^t \int_0^\xi (u(s-r) b'(s) + u(s-r) b(s) a(s)) e^{-\int_s^\xi a(\eta) d\eta} ds \\ &- \int_0^t \int_0^\xi e^{-\int_s^\xi a(\eta) d\eta} \int_{s-r}^0 K(s, \theta) u(\theta) d\theta ds d\xi \end{aligned}$$

$$- \int_0^t \int_0^\xi e^{-\int_s^\xi a(\eta) d\eta} \int_0^s K(s, \theta) u(\theta) d\theta ds d\xi \quad (5.60)$$

şeklini alır. Böylece (5.60) eşitliğinin her iki tarafının mutlak değeri alınırsa;

$$\begin{aligned} |u(t)| &\leq |\varphi(0)| + |B|t + \int_0^t \int_0^\xi |f(s)| ds d\xi \\ &+ \int_0^t (|u(\xi - r)| |b(\xi)| + |u(-r)| |b(0)|) d\xi \\ &+ \int_0^t \int_0^\xi (|u(s - r)| |b'(s)| + |u(s - r)| |b(s)| |a(s)|) ds d\xi \\ &+ \int_0^t \int_0^\xi \int_{s-r}^0 |K(s, \theta)| |u(\theta)| d\theta ds d\xi \\ &+ \int_0^t \int_0^\xi e^{-\int_s^\xi a(\eta) d\eta} \int_0^s |K(s, \theta)| |u(\theta)| d\theta ds d\xi \\ &\leq |\varphi(0)| + |B| r + r^2 \|f\|_{\infty, I_1} \\ &+ r \|\varphi\|_{\infty, I_0} (2 \|b\|_{\infty, I_1} + r \|b'\|_{\infty, I_1} + r \|b\|_{\infty, I_1} \|a\|_{\infty, I_1}) \\ &+ r^2 \bar{K} \int_{-r}^0 |\varphi(\theta)| d\theta + r^2 \bar{K} \int_0^t |u(\theta)| d\theta \end{aligned} \quad (5.61)$$

olur. (5.61) eşitsizliğinin yazılımını kısaltmak için

$$\begin{aligned} Q_0 &= |\varphi(0)| + |B| r + r^2 \|f\|_{\infty, I_1} \\ &+ r \|\varphi\|_{\infty, I_0} (2 \|b\|_{\infty, I_1} + r \|b'\|_{\infty, I_1} + r \|b\|_{\infty, I_1} \|a\|_{\infty, I_1}) \\ &+ r^2 \bar{K} \int_{-r}^0 |\varphi(\theta)| d\theta \end{aligned}$$

olarak alırsak

$$|u(t)| \leq Q_0 + r^2 \bar{K} \int_0^t |u(\theta)| d\theta \quad (5.62)$$

olur. Buradan da Gronwall eşitsizliği kullanılırsa

$$|u(t)| \leq Q_0 e^{r^3 \bar{K}}$$

bulunur. Böylece $t \in I_1$ aralığında (5.48) probleminin çözümü olan $u(t)$ için kararlılık eşitsizliği elde edilmiş olur.

(5.48) problemini sağlayan $u'(t)$ fonksiyonunun kararlılık eşitsizliğini elde etmek için I_1 aralığında

$$\begin{aligned} u'(t) &= Be^{-\int_0^\xi a(s)ds} + \int_0^t f(s)e^{-\int_s^\xi a(\eta)d\eta} ds \\ &\quad - \int_0^t b(s)u'(s-r)e^{-\int_s^\xi a(\eta)d\eta} ds \\ &\quad - \int_0^t e^{-\int_s^\xi a(\eta)d\eta} \int_{s-r}^s K(s,\theta)u(\theta)d\theta ds \\ &= Be^{-\int_0^\xi a(s)ds} + \int_0^t f(s)e^{-\int_s^\xi a(\eta)d\eta} ds \\ &\quad - u(t-r)b(t)e^{-\int_s^t a(\eta)d\eta} \\ &\quad - u(-r)b(0)e^{-\int_0^\xi a(\eta)d\eta} \\ &\quad + \int_0^t u(s-r)b'(s)e^{-\int_s^\xi a(\eta)d\eta} ds \\ &\quad + \int_0^t u(s-r)b(s)a(s)e^{-\int_s^\xi a(\eta)d\eta} ds \\ &\quad - \int_0^t e^{-\int_s^\xi a(\eta)d\eta} \int_{s-r}^s K(s,\theta)u(\theta)d\theta ds \end{aligned}$$

eşitliği ele alınsın. Her iki tarafın mutlak değeri alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
|u'(t)| &\leq |B| + r\|f\|_{\infty, I_1} \\
&+ 2r\|b\|_{\infty, I_1}\|\varphi\|_{\infty, I_0} \\
&+ r\|\varphi\|_{\infty, I_0}(\|b'\|_{\infty, I_1} + \|b\|_{\infty, I_1}\|a\|_{\infty, I_1}) \\
&+ r^2\bar{K}\|\varphi\|_{\infty, I_0} + r\bar{K}\int_0^r |u(\theta)| d\theta \\
&\leq |B| + r\|f\|_{\infty, I_1} \\
&+ r\|\varphi\|_{\infty, I_0}(2\|b\|_{\infty, I_1} + \|b'\|_{\infty, I_1} + \|b\|_{\infty, I_1}\|a\|_{\infty, I_1}) \\
&+ r^2\bar{K}(\|\varphi\|_{\infty, I_0} + C_1). \tag{5.63}
\end{aligned}$$

Böylece $u'(t)$ için kararlılık eşitsizliği elde edilmiş olur. Aynı yöntemle (5.48) problemini kullanarak I_1 aralığında $u''(t)$ için aşağıda verilen kararlılık eşitsizliği elde edilir:

$$|u''(t)| \leq \|f\|_{\infty, I_1} + \|a\|_{\infty, I_1}D_1 + \|b\|_{\infty, I_1}\|\varphi'\|_{\infty, I_0} + r\bar{K}(\|\varphi\|_{\infty, I_0} + C_1).$$

Sonuç olarak (5.51)-(5.53) eşitsizliklerinin $p = 1$ için geçerli olduğu gösterilmiş olur.

Tümevarım yöntemini kullanmaya devam etmek için $p \leq l$ olduğunda (5.51)-(5.53) eşitsizliklerinin doğru olduğunu varsayalım. O zaman $t \in I_{l+1}$ aralığında olduğu zaman (5.61) için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
|u(t)| &\leq |u(rl)| + |B|t + \int_{rl}^t \int_{rl}^{\xi} |f(s)| ds d\xi \\
&+ \int_{rl}^t \int_{rl}^{\xi} |b(s)| |u'(s-r)| ds d\xi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{rl}^t \int_{rl}^{\xi} \int_{s-r}^{rl} |K(s, \theta)| |u(\theta)| d\theta ds d\xi \\
& + \int_{rl}^t \int_{rl}^{\xi} e^{-\int_s^{\xi} a(\eta) d\eta} \int_{rl}^s |K(s, \theta)| |u(\theta)| d\theta ds d\xi \\
& \leq C_l + |B| r + r^2 \|f\|_{\infty, I_{l+1}} \\
& + r C_l (2 \|b\|_{\infty, I_{l+1}} + r \|b'\|_{\infty, I_{l+1}} + r \|b\|_{\infty, I_{l+1}} \|a\|_{\infty, I_{l+1}}) \\
& + r^2 \bar{K} \int_{-r}^0 |\varphi(\theta)| d\theta + r^2 \bar{K} \int_0^t |u(\theta)| d\theta \\
& + r^2 \bar{K} \int_{-r(l-1)}^{rl} |\varphi(\theta)| d\theta + r^2 \bar{K} \int_{rl}^t |u(\theta)| d\theta. \tag{5.64}
\end{aligned}$$

Buradan Gronwall eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
|u(t)| & \leq C_l (1 + 2r \|b\|_{\infty, I_{l+1}} + r^2 \|b'\|_{\infty, I_{l+1}} + r^2 \|b\|_{\infty, I_{l+1}} \|a\|_{\infty, I_{l+1}} + 2r^3 \bar{K}) e^{r^3 \bar{K}} \\
& + (|B| r + r^2 \|f\|_{\infty, I_{l+1}}) e^{r^3 \bar{K}}
\end{aligned}$$

olur. Aynı işlemler (5.61) ve (5.63)'ya uygulanırsa aşağıda verilen eşitsizlikler oluşturulur:

$$\begin{aligned}
|u'(t)| & \leq |B| + r \|f\|_{\infty, I_{l+1}} + r^2 \bar{K} (C_l + C_{l+1}) \\
& + r C_l (2 \|b\|_{\infty, I_{l+1}} + \|b'\|_{\infty, I_{l+1}} + \|b\|_{\infty, I_{l+1}} \|a\|_{\infty, I_{l+1}}), \\
|u''(t)| & \leq \|f\|_{\infty, I_{l+1}} + \|a\|_{\infty, I_{l+1}} D_{l+1} + \|b\|_{\infty, I_{l+1}} D_l + r \bar{K} (C_l + C_{l+1}).
\end{aligned}$$

Dolayısıyla (5.51)-(5.53) eşitsizliklerinin $p = l + 1$ için doğruluğu ispatlanmış olur. $\square$

5.2.2. Fark Şemasının Kurulması

Bu bölümde (5.48)-(5.50) problemi için düzgün şebekede fark şeması oluşturulacaktır.

$\bar{I}$ aralığında

$$\omega_{N_0} = \{t_i = ih, i = 1, 2, \dots, N_0; h = T/N_0 = r/N\},$$

şeklinde tanımlayalım. Burada, T/r 'nin bir tam sayı olduğu varsayılır (yani $T = mr$) ve ayrıca her I_p ($1 \leq p \leq m$) alt aralık içinde N tane şebeke noktası bulunur. Bu yüzden

$$\omega_{N,p} = \{t_i : (p-1)N + 1 \leq i \leq pN\}, \quad 1 \leq p \leq m$$

ve sonuç olarak

$$\omega_{N_0} = \bigcup_{p=1}^m \omega_{N,p},$$

$$\bar{\omega}_{N,p} = \omega_{N,p} \cup \{t_0 = 0, t_N = T\}$$

şeklindedir.

ω_{N_0} üzerinde tanımlanmış her bir t_i noktasındaki $g(t)$ fonksiyonunun $g_i = g(t_i)$ şeklindeki gösterimi ile

$$\begin{aligned} g_{t,i} &= \frac{g_{i+1} - g_i}{h}, & g_{\bar{t},i} &= \frac{g_i - g_{i-1}}{h}, \\ g_{\hat{t},i} &= \frac{g_{i+1} - g_{i-1}}{2h}, & g_{\tilde{t},i} &= \frac{g_{i+1} - 2g_i + g_{i-1}}{h^2} \end{aligned}$$

eşitlikleri tanımlanmış olsun. ω_{N_0} üzerinde tanımlanan herhangi bir g_i şebeke fonksiyonu için kullanılan norm

$$\|g\|_{\infty,p} \equiv \|g\|_{\infty,\omega_{N,p}} = \max_{\bar{\omega}_{N,p}} |g(t)|, \quad \|g\|_{\infty,N_0} \equiv \|g\|_{\infty,\omega_{N_0}}$$

biçimindedir.

(5.48)'de verilen denklemde t değişkeni yerine t_i yazılırsa;

$$u''(t_i) + a(t_i)u'(t_i) + b(t_i)u'(t_i - r) + \int_{t_i-r}^{t_i} K(t_i, s)u(s)ds = f(t_i), \quad 1 \leq i \leq N_0 \quad (5.65)$$

şeklinde olur. Bir sonraki adımda, aşağıdaki bağıntılar kullanılacaktır:

$$u''(t_i) = u_{\bar{t}t,i} + R_i^{(1)}, \quad R_i^{(1)} = -\frac{h^2}{12}u^{(4)}(\xi_i^{(1)}), \quad \xi_i^{(1)} \in (t_{i-1}, t_{i+1}), \quad (5.66)$$

$$u'(t_i) = u_{\bar{t},i} + R_i^{(2)}, \quad R_i^{(2)} = -\frac{h^2}{6}u'''(\xi_i^{(2)}), \quad \xi_i^{(2)} \in (t_{i-1}, t_{i+1}), \quad (5.67)$$

$$u'(t_i - r) = u_{\bar{t},i-N} + R_i^{(3)}, \quad R_i^{(3)} = -\frac{h^2}{12}u'''(\xi_i^{(3)}), \quad \xi_i^{(3)} \in (t_{i-1-N}, t_{i+1-N}) \quad (5.68)$$

(5.48)'in integral terimi için, yamuk (trapez) metodu uygulanırsa

$$\int_{t_i-r}^{t_i} K(t_i, s)u(s)ds = \sum_{j=i-N}^i \bar{h}_j K(t_i, t_j)u(t_j) + R_i^{(4)}$$

elde edilir. Burada

$$\bar{h}_{i-N} = \bar{h}_i = \frac{h}{2}, \quad \bar{h}_j = h, \quad j = i - N + 1, i - N + 2, \dots, i - 1$$

ve kalan terim

$$R_i^{(4)} = \frac{1}{2} \sum_{j=i-N+1}^i \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_j - \xi)(t_{j-1} - \xi) \frac{d^2}{d\xi^2} (K(t_i, \xi)u(\xi)) d\xi, \quad t_i - r < \xi < t_i \quad (5.69)$$

biçimindedir. Sonuç olarak (5.48) probleminden

$$u_{\bar{t}t,i} + a_i u_{\bar{t},i} + b_i u_{\bar{t},i-N} + \sum_{j=i-N}^i \bar{h}_j K_{i,j} u_j = f_i - \bar{R}_i \quad (5.70)$$

$$\bar{R}_i = R_i^{(1)} + R_i^{(2)} + R_i^{(3)} + R_i^{(4)}, \quad 1 \leq i \leq N_0 \quad (5.71)$$

kalan terimi ile birlikte $u(t_i)$ için (5.70)'de ifade edilen kesin bağıntısı elde edilir. Eğer

$$u_{t,i}^* = u_{t,i} - \frac{h}{2} u_{\bar{t},i} \quad (5.72)$$

ilişkisi kullanılarak (5.70) ve (5.71) denklemleri ile birlikte yazılırsa:

$$\left(1 - \frac{a_i h}{2}\right) u_{\bar{t},i} + a_i u_{t,i} + b_i u_{t,i-N}^* + \sum_{j=i-N}^i \hbar_j K_{i,j} u_j = f_i - \bar{R}_i \quad (5.73)$$

eşitliği elde edilir. Son olarak (5.73)'de $x = \frac{a_i}{2} h$ için

$$1 - x = \frac{1}{1+x} - \frac{x^2}{1+x} = \frac{1}{1+x} + O(x^2), \quad x > 0, \quad (5.74)$$

eşitliğini kullanarak

$$k_i u_{\bar{t},i} + a_i u_{t,i} + b_i u_{t,i-N}^* + \sum_{j=i-N}^i \hbar_j K_{i,j} u_j = f_i - R_i, \quad (5.75)$$

$u(t_i)$ için (5.75)'de ifade edilen bağıntı oluşturulur. Burada kalan terim

$$R_i = \frac{h}{2} \bar{R}_i + R_i^{(5)}, \quad R_i^{(5)} = -\frac{\left(\frac{h a_i}{2}\right)^2}{1 + \frac{h a_i}{2}} u_{\bar{t},i} \quad (5.76)$$

ve

$$k_i = \frac{1}{1 + \frac{h a_i}{2}}$$

olur. (5.48) probleminin (5.50) başlangıç koşulunun yaklaşık değerini incelemek için işleme;

$$u'(0) = u(t) - \frac{h}{2} u''(0) - \frac{h^2}{6} u'''(\xi_0), \quad 0 < \xi_0 < 1 \quad (5.77)$$

denklemini ile başlanılsın. (5.48)'de $t = 0$ için

$$u''(0) = f(0) - a(0)u'(0) - b(0)\varphi'(-r) - \int_{-r}^0 K(0,s)\varphi(s)ds \quad (5.78)$$

eşitliği elde edilir. (5.78) içindeki $u'(0)$ yaklaşık olarak hesaplanırsa

$$u'(0) = u(t) - \frac{h}{2}u''(\xi_1), \quad 0 < \xi_1 < 1$$

ve elde edilen bu yaklaşım (5.78)'de bulunan eşitlik ile birlikte (5.77)'de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} u'(0) &= \left(1 + \frac{h}{2}a(0)\right) u_{t,0} \\ &- \frac{h}{2} \left[f(0) - b(0)\varphi'(-r) - \int_{-r}^0 K(0,s)\varphi(s)ds \right] \\ &- \frac{h^2}{6}u'''(\xi_0) + \frac{h^2}{4}a(0)u''(\xi_1) \end{aligned} \quad (5.79)$$

sonucuna ulaşılır. Ayrıca (5.50) değerinin yaklaşık olarak hesaplanması için aşağıdaki form kullanılabilir:

$$u_{t,0} = y_{t,0} + r^{(0)}.$$

Buradan da

$$y_{t,0} = \bar{B} \equiv \left(1 + \frac{h}{2}a(0)\right)^{-1} \left[B + \frac{h}{2} \left(f(0) - b(0)\varphi'(0) - \int_{-r}^0 K(0,s)\varphi(s)ds \right) \right] \quad (5.80)$$

olur ve kalan terim

$$r^{(0)} = \left(1 + \frac{h}{2}a(0)\right)^{-1} \left[-\frac{h^2}{6}u'''(\xi_0) + \frac{h^2}{4}a(0)u''(\xi_1) \right] \quad (5.81)$$

şeklindedir. Böylece (5.48)-(5.50) probleminin yaklaşık çözümü için aşağıda verilen fark şeması elde edilir:

$$k_i y_{\bar{t},i} + a_i y_{t,i} + b_i y_{i,i-N} + \sum_{j=i-N}^i \tilde{h}_j K_{i,j} y_j = f_i, \quad (5.82)$$

$$y_i = \varphi_i, \quad -N < i < 0, \quad (5.83)$$

$$y_t = \left(1 + \frac{h}{2}a(0)\right)^{-1} \left[B + \frac{h}{2} \left(f(0) - b(0)\varphi'(0) - \int_{-r}^0 K(0,s)\varphi(s)ds \right) \right]. \quad (5.84)$$

5.2.3. Hata Değerlendirmesi

(5.48) ve (5.82) problemlerine göre yaklaşık çözüm hatasını z_i şeklinde ifade edelim. Bu hata fonksiyonunu her bir t_i noktasındaki yaklaşık çözümü y_i ve kesin çözümü u_i arasındaki farkı temsil eder. Böylece

$$k_i z_{it,i} + a_i z_{t,i} + b_i z_{i,i-N} + \sum_{j=i-N}^i \hat{h}_j K_{i,j} z_j = R_i, \quad 1 \leq i \leq N_0, \quad (5.85)$$

$$z_i = 0, \quad -N \leq i \leq 0, \quad (5.86)$$

$$z_t = -r^{(0)} \quad (5.87)$$

problemi yazılır. Burada R_i 'ler (5.76) ile verilen kesme hatalarıdır.

Lemma 5.9. (5.85)-(5.87) probleminin z_i çözümü

$$\|z\|_{\infty,p} \leq E \sum_{j=0}^{p-1} F^j \quad (5.88)$$

eşitsizliğini sağlar. Burada

$$E = e^{MT^3 \bar{K}} \left(T \left| r^{(0)} \right| + MT^2 \|R\|_{\infty, \bar{\omega}, N_0} \right),$$

$$F = e^{MT^3 \bar{K}} (T^2 M \bar{K} h + MT \|b\|_{\infty, \bar{I}})$$

şeklindedir.

İspat. $t_i \in \omega_{N,p}$ noktaları için $z_{t,i} = v_i$ olarak tanımlanmış olsun. Böylece (5.85) denklemi aşağıdaki forma dönüşür:

$$k_i v_{\bar{t},i} + a_i v_i = D_i \quad 1 \leq i \leq N_0, \quad (5.89)$$

$$v_0 = -r^{(0)}. \quad (5.90)$$

Burada

$$D_i = R_i - b_i z_{i,i-N} - \sum_{j=i-N}^i \hbar K_{i,j} z_j$$

eşitliğini ifade etmektedir. Lemma 5.2’u $\omega_{N,p}$ üzerinde (5.89)-(5.90)’e uyguladıktan sonra, elde edilen

$$|v_i| \leq |r^{(0)}| + \left(1 + \frac{T}{2} \|a\|_{\infty, \bar{I}}\right) h \sum_{j=1}^i |D_j|$$

olur. Burada $M = \left(1 + \frac{T}{2} \|a\|_{\infty, \bar{I}}\right)$ olarak tanımlandıktan sonra

$$\begin{aligned} |z_i| &\leq h \sum_{j=0}^{i-1} |r^{(0)}| + M h^2 \sum_{s=0}^{i-1} \sum_{j=1}^s |D_j| \\ &\leq T |r^{(0)}| + M T \|b\|_{\infty, \bar{I}} h \sum_{j=1}^{i-1} \left| \frac{z_{j+1-N} - z_{i-1-N}}{2h} \right| \\ &\quad + M T^2 \bar{K} h \sum_{s=1}^{i-1} \sum_{j=s-N}^s |z_j| + M T h \sum_{j=1}^{i-1} |R_j| \\ &= T |r^{(0)}| + \frac{M T \|b\|_{\infty, \bar{I}}}{2} \sum_{j=2}^i |z_{j-N}| + \frac{M T \|b\|_{\infty, \bar{I}}}{2} \sum_{j=0}^{i-2} |z_{j-N}| \\ &\quad + M T^2 \bar{K} h \sum_{j=0}^{i-1} |z_j| + M T^2 \bar{K} h \sum_{j=i-1}^N |z_j| + M T h \sum_{j=1}^{i-1} |R_j| \\ &\leq T |r^{(0)}| + (T^2 M \bar{K} h + M T \|b\|_{\infty, \bar{I}}) \sum_{j=0}^{i-1} |z_{j-N}| \\ &\quad + T^2 M \bar{K} h \sum_{j=0}^{i-1} |z_j| + M T h \sum_{j=1}^{i-1} |R_j| \end{aligned}$$

biçiminde değerlendirmesi yapılır. Buradan da

$$A_i = T |r^{(0)}| + (T^2 M \bar{K} h + M T \|b\|_{\infty, \bar{I}}) \sum_{j=0}^{i-1} |z_{j-N}| + M T h \sum_{j=1}^{i-1} |R_j|$$

olarak alındıktan sonra

$$|z_i| \leq MT^2 \bar{K} h \sum_{j=0}^{i-1} |z_j| + A_i$$

eşitsizliği elde edilir. Daha sonraki adımda elde edilen son denklem için Gronwall eşitsizliğini kullanırsak

$$|z_i| \leq A_i e^{MT^2 \bar{K} t_i}$$

ifadesi elde edilir. Ardından z_i için aşağıda verilen birinci mertebeden fark eşitsizliği geçerli olduğu kolaylıkla gösterilir:

$$\|z\|_{\infty, p} \leq E + F \|z\|_{\infty, p-1}.$$

Sonuç olarak (5.88) eşitsizliği ispatlanmış olur. □

Lemma 5.10. $a, b, f \in C(\bar{I})$, $\varphi \in C^2(I_0)$, $K \in C^2(\bar{I} \times \bar{I})$ ve $u \in C^4[0, T]$ olduğunda kalan terimler

$$\|R\| \leq Ch^2, \quad 1 \leq p \leq m, \quad (5.91)$$

$$|r^{(0)}| \leq Ch^2 \quad (5.92)$$

eşitsizliklerini sağlar.

İspat. (5.66)-(5.68), (5.76) ve Lemma (5.8)'den yararlanarak

$$|R_i^{(1)}| \leq \frac{h^2}{12} \|u^{(4)}\|_{\infty, \bar{I}}, \quad |R_i^{(2)}| \leq \frac{h^2}{6} \|u^{(3)}\|_{\infty, \bar{I}},$$

$$|R_i^{(3)}| \leq \frac{h^2}{12} \|u^{(3)}\|_{\infty, \bar{I}}, \quad |R_i^{(4)}| \leq \frac{h^2 r}{12} \left\| \frac{\partial^2 K}{\partial s^2} \right\|_{\infty, \bar{I}^2},$$

$$|R_i^{(5)}| \leq \frac{h^2 \|a\|_{\infty, \bar{I}}^2}{2+h\|a\|_{\infty, \bar{I}}} \|u^{(4)}\|_{\infty, \bar{I}}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Yukarıda ifade edilen eşitsizlikler ve Lemma (5.8)'in düzgünlük koşullarının dikkate alınır (5.91)'ün geçerliliği kolayca görülür. $\square$

Teorem 5.11. (5.48)-(5.50) probleminin çözümü u ve (5.82)-(5.84) fark probleminin çözümü de y olsun. Varsayılan koşullar altında (5.82)-(5.84) fark probleminin çözümü, (5.48)-(5.50)'ün çözümüne düzgün şebeke üzerinde maksimum normda $O(h^2)$ hızıyla düzgün yakınsaktır:

$$\|y - u\|_{\infty, \omega_{N_0}} \leq Ch^2.$$

İspat. Bu teoremin ispatı Lemma 5.9 ve Lemma 5.10'den elde edilir. $\square$

5.2.4. Nümerik Sonuçlar

Bu bölümde (5.48)-(5.50) problemi için elde edilen teorik sonuçlar aşağıda verilen örnekler ile incelenecektir. Bu örnekler (5.82)-(5.84) fark şemasından elde edilen

$$y_{i+1} = \frac{y_i(4k_i + 2ha_i) + y_{i-1}(hb_i - 2k_i) + 2h^2 f_i - 2h^2 \sum_{j=N}^i \hbar_j K_{i,j} y_j}{2k_i + 2ha_i + hb_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N_0, \quad (5.93)$$

$$y_i = \varphi_i, \quad -N \leq i \leq 0, \quad (5.94)$$

$$y_1 = y_0 + h\bar{B} \quad (5.95)$$

iteratif tekniği kullanılarak çözülür.

Örnek 5.12. Elde edilen sonuçlar aşağıdaki problem için test edilecektir:

$$u''(t) + 4u'(t) + u'(t-1) = 0, \quad t \in (0, \pi],$$

$$u(t) = \sin(\pi t) - 3, \quad u'(0) = \pi, \quad t \leq 0.$$

Bu problemin kesin çözümü

$$u(t) = \begin{cases} \sin(\pi t) - 3, & t \leq 0, \\ e^{4t} \left(\frac{4\sin(\pi t) - \pi \cos(\pi t)}{\pi^2 + 16} \right) - e^{-4t} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{\pi^2 + 16} \right) + \frac{\pi - 12}{4}, & t \in (0, \pi] \end{cases}$$

şeklindedir. Herhangi bir N değeri için sayısal yöntem kullanılarak elde edilen yaklaşık çözüm ile problemin adım metoduyla elde edilen kesin çözümü arasındaki farkı temsil eden kesin hata

$$e_i^N = |y_i - u_i|, \quad e^N = \|y - u\|_{\infty, \bar{\omega}_{N_0}}$$

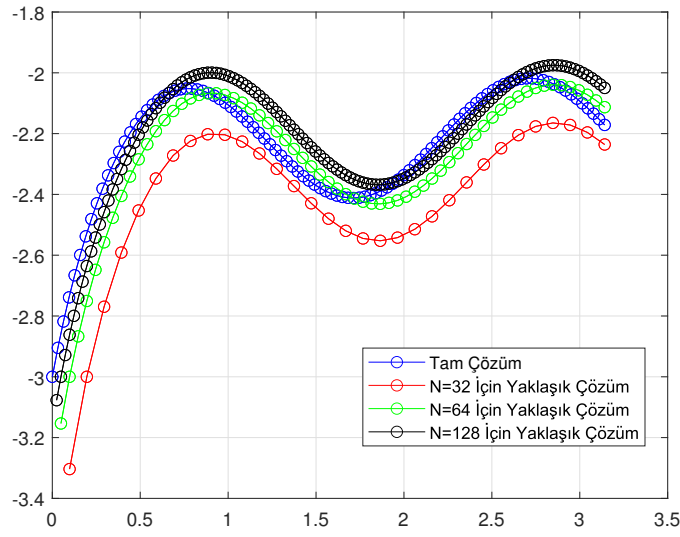
biçiminde gösterilir. e^N maksimum noktasal hatadır ve tüm şebeke noktalarındaki kesin hatanın maksimum değeridir.

Örnek 5.12'un kesin çözümünü ve iteratif yöntem ile bulunan yaklaşık çözümünü kullanarak elde edilen sonuçlar Tablo 5.4'da verilmiştir:

Çizelge 5.4. Test probleminin I_1 aralığındaki sayısal sonuçları

t_i	u_i	y_i ($N = 32$)	e_i^{32}	y_i ($N = 64$)	e_i^{64}	y_i ($N = 128$)	e_i^{128}
0.2621	-2.4242	-2.7653	0.3411	-2.6327	0.2085	-2.5300	0.1058
0.5040	-2.1297	-2.3857	0.1560	-2.2362	0.1065	-2.1522	0.0225
0.7782	-2.0423	-2.1122	0.0599	-2.0122	0.0301	-1.9796	0.0627
1.0040	-2.1122	-2.0796	0.0336	-1.9983	0.1139	-1.9749	0.1373
1.5040	-2.3601	-2.3245	0.0356	-2.2455	0.1146	-2.2222	0.1379
2.0121	-2.3280	-2.4306	0.1026	-2.3528	0.0248	-2.3015	0.0265
2.5040	-2.0423	-2.1449	0.1026	-2.0729	0.0306	-2.0449	0.0026
3.0040	-2.0860	-2.0265	0.0595	-1.9843	0.1017	-1.9609	0.1251

Örnek 5.12'un kesin ve yaklaşık çözümünün I_1 aralığındaki grafiği aşağıda verilmiştir:



Şekil 5.4. I_1 aralığında $N = 32, 64, 128$ değerleri için problemin kesin ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

Örnek 5.13. Aşağıdaki şekilde tanımlanan diğer bir test problemi ele alınsın:

$$u''(t) + 2u'(t) - u'(t-1) - \int_{t-1}^t (t-s)u(s)ds = te^{-t+1} + t, \quad t \in (0, 1],$$

$$u(t) = e^{-t}, \quad u'(0) = -1, \quad t \leq 0.$$

Problemin kesin çözümü:

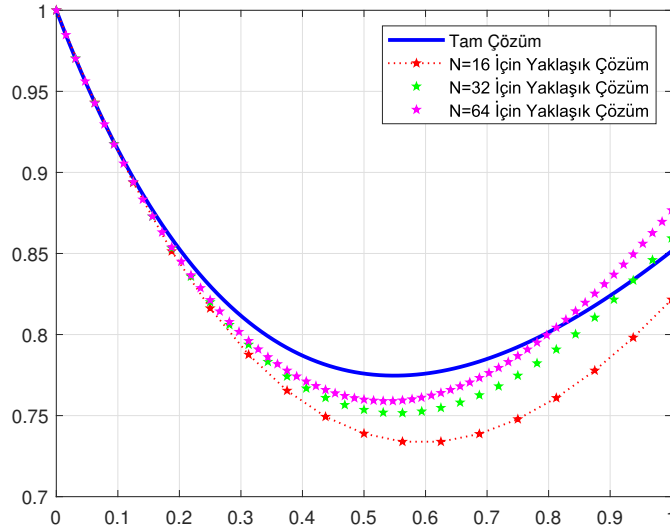
$$u(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t \leq 0, \\ \frac{3}{4}e^{-2t} + \frac{t}{2} + \frac{1}{4}, & t \in (0, 1] \end{cases}$$

şeklindedir.

Çizelge 5.5. Test probleminin I_1 aralığındaki sayısal sonuçları

t_i	u_i	y_i ($N = 16$)	e_i^{16}	y_i ($N = 32$)	e_i^{32}	y_i ($N = 64$)	e_i^{64}
0.0997	0.9139	0.9137	0.0002	0.9142	0.0003	0.9159	0.0020
0.1999	0.8526	0.8441	0.0085	0.8463	0.0063	0.8463	0.0063
0.2991	0.8116	0.7984	0.0132	0.8005	0.0111	0.7999	0.0117
0.4003	0.7875	0.7586	0.0289	0.7682	0.0193	0.7727	0.0148
0.4995	0.7762	0.7393	0.0369	0.7529	0.0233	0.7608	0.0035
0.5997	0.7757	0.7342	0.0415	0.7529	0.0218	0.7614	0.0143
0.6999	0.7856	0.7405	0.0451	0.7637	0.0219	0.7773	0.0083
0.8001	0.8017	0.7592	0.0425	0.7863	0.0154	0.8005	0.0012

Aşağıdaki grafik, I_1 aralığı için Örnek 5.13'nin fark şeması kullanarak elde edilen yaklaşık çözüm ve kesin çözümünü göstermektedir:



Şekil 5.5. I_1 aralığında $N = 32, 64, 128$ değerleri için problemin kesin ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

Örnek 5.12'da bahsettiğimiz gözlemler, Örnek 5.13 için de geçerlidir. N arttıkça, kesin ve yaklaşık çözümler birbirlerine yaklaşıyor. Bu durum aynı zamanda azalan hata oranından da kolaylıkla anlaşılabilir. Çözümlerin birbirine yakınsaması ve hata oranındaki azalma, önerilen yöntemin doğruluğunu ispatlamaktadır.

6. YÜKSEK MERTEBEDEN GECİKMELİ VOLTERRA İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Bu bölümde, yüksek mertebeli GVİDD'ler ele alınmıştır.

$$u^{(n)}(t) + a(t)u^{(n-1)}(t) + b(t)u(t-r) + \int_{t-r}^t K(t,s)u(s)ds = f(t), \quad (6.1)$$

$$u(t) = \varphi(t), \quad u^{(i)}(0) = B_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad \text{ve} \quad t \in I_0. \quad (6.2)$$

$I = (0, T] = \cup_{p=1}^m I_p$, $I_p = \{t : r_{p-1} < t \leq r_p\}$, $1 \leq p \leq m$ ve $r_s = sr$, $(0 \leq s \leq m)$; $\bar{I} = [0, T]$, $I_0 = [-r, 0]$, $a(t) \geq 0$, $f(t)$, $a(t)$ ($t \in \bar{I}$), $\varphi(t)$ ($t \in I_0$) ve $K(t,s)$ ($(t,s) \in \bar{I} \times \bar{I}$) belirli düzgünlük şartlarını sağlayan yeterince düzgün fonksiyonlar olup, r sabit bir gecikmedir. Ayrıca $a, b, f \in C(\bar{I})$, $\varphi \in C^2(I_0)$ ve $\frac{\partial^2 K}{\partial s^2} \in C(\bar{I} \times \bar{I})$ ($s = 0, 1, 2$) olduğu düşünülür.

Tezin bu bölümünde, (6.1)-(6.2) probleminin kesin çözümünün türetilmesindeki önemli yönleri ele alınacaktır. Ayrıca aranan fonksiyon ve farklı mertebeden türevleri için kararlılık eşitsizlikleri üretilecektir. Önerilen kararlılık eşitsizlikleri sadece düşük türev mertebelerinde değil, aynı zamanda herhangi bir yüksek türev mertebesinde de denklemlerin üretilmesi için kullanılması yönünden uygulanan yöntemin bu zamana kadar bulunan yöntemlere göre ne kadar etkin olduğunu göstermektedir.

6.1. (6.1)-(6.2) PROBLEMİ İÇİN KARARLILIK EŞİTSİZLİKLERİ

Bu bölümde, (6.1)-(6.2) probleminin kararlılığını gösteren yüksek mertebeden GVİDD'lerin kesin çözümünü ve başlangıç koşulu için bazı eşitsizliklerin oluşumu ele alınacaktır.

(6.1) denklemi aşağıdaki gibi yeniden düzenlenirse;

$$u^{(n)}(t) + a(t)u^{(n-1)}(t) = f(t) - b(t)u(t-r) - \int_{t-r}^t K(t,s)u(s)ds \quad (6.3)$$

ve (6.3)'in her iki tarafından 0'dan t 'ye kadar integrali alınırsa;

$$\begin{aligned}
u^{(n-1)}(t) &= B_{n-1} e^{-\int_0^t a(s)ds} + \int_0^t f(s) e^{-\int_s^t a(\eta)d\eta} ds \\
&- \int_0^t b(s) u(s-r) e^{-\int_s^t a(\eta)d\eta} ds \\
&- \int_0^t \int_{s-r}^s K(s, \theta) u(\theta) d\theta e^{-\int_s^t a(\eta)d\eta} ds
\end{aligned} \tag{6.4}$$

eşitliği elde edilir. Bulunan denklemin tekrar 0 ile t arasında integrali alınırsa;

$$\begin{aligned}
u^{(n-2)}(t) &= B_{n-2} + \int_0^t B_{n-1} e^{-\int_0^s a(\eta)d\eta} ds \\
&+ \int_0^t \int_0^{t_1} f(s) e^{-\int_s^{t_1} a(\eta)d\eta} ds dt_1 \\
&- \int_0^t \int_0^{t_1} b(s) u(s-r) e^{-\int_s^{t_1} a(\eta)d\eta} ds dt_1 \\
&- \int_0^t \int_0^{t_1} \int_{s-r}^s K(s, \theta) u(\theta) d\theta e^{-\int_s^{t_1} a(\eta)d\eta} ds dt_1
\end{aligned}$$

ve bir adım daha aynı işlem uygulanırsa;

$$\begin{aligned}
u^{(n-3)}(t) &= B_{n-3} + \int_0^t B_{n-2} ds \\
&+ \int_0^t \int_0^{t_1} B_{n-1} e^{-\int_0^s a(\eta)d\eta} ds dt_1 \\
&+ \int_0^t \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} f(s) e^{-\int_s^{t_1} a(\eta)d\eta} ds dt_1 dt_2 \\
&- \int_0^t \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} b(s) u(s-r) e^{-\int_s^{t_1} a(\eta)d\eta} ds dt_1 dt_2 \\
&- \int_0^t \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} \int_{s-r}^s K(s, \theta) u(\theta) d\theta e^{-\int_s^{t_1} a(\eta)d\eta} ds dt_1 dt_2
\end{aligned} \tag{6.5}$$

sonucu bulunur. Yukarıda bulunan denklemin sahip olduğu $(n-3)$ türev mertebesi kadar tekrar 0'dan t 'ye integral alma işlemi devam edilirse;

$$\begin{aligned}
u(t) = & \varphi(0) + \int_0^t B_1 ds + \int_0^t \int_0^{t_1} B_2 ds dt_1 + \dots \\
& + \underbrace{\int_0^t \dots \int_0^{t_1} B_{n-2} ds dt_1 \dots dt_{n-3}}_{n-2} \\
& + \underbrace{\int_0^t \dots \int_0^{t_1} B_{n-1} e^{-\int_0^s a(\eta) d\eta}}_{n-1} ds dt_1 \dots dt_{n-2} \\
& + \underbrace{\int_0^t \dots \int_0^{t_1} f(s) e^{-\int_s^{t_1} a(\eta) d\eta}}_n ds dt_1 \dots dt_{n-1} \\
& - \underbrace{\int_0^t \dots \int_0^{t_1} b(s) u(s-r) e^{-\int_s^{t_1} a(\eta) d\eta}}_n ds dt_1 \dots dt_{n-1} \\
& - \underbrace{\int_0^t \dots \int_{s-r}^0 K(s, \theta) u(\theta) d\theta e^{-\int_s^{t_1} a(\eta) d\eta}}_n ds dt_1 \dots dt_{n-1} \\
& - \underbrace{\int_0^t \dots \int_0^s K(s, \theta) u(\theta) d\theta e^{-\int_s^{t_1} a(\eta) d\eta}}_n ds dt_1 \dots dt_{n-1}
\end{aligned}$$

uzun bir $u(t)$ eşitliği oluşturulur. Bu denklemin daha kapalı bir forma dönmesi için Wazwaz (2011) da verilen dönüşüm formülü olan, diğer bir ifadeyle herhangi bir çoklu integrali tek bir integrale dönüştürme imkanı sağlayan formül kullanılarak;

$$\begin{aligned}
u(t) = & \varphi(0) + \sum_{i=0}^{n-3} \frac{1}{i!} \int_0^t (t-s)^i B_{i+1} ds \\
& + \frac{1}{(n-2)!} \int_0^t (t-s)^{n-2} B_{n-1} e^{-\int_0^s a(\eta) d\eta} ds \\
& + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} f(s) e^{-\int_s^{\xi} a(\eta) d\eta} ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} b(s) u(s-r) e^{-\int_s^\xi a(\eta) d\eta} ds \\
& - \frac{1}{(n-2)!} \int_0^t \int_{s-r}^0 (t-s)^{n-2} K(s, \theta) u(\theta) d\theta e^{-\int_s^\xi a(\eta) d\eta} ds \\
& - \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} K(s, \theta) u(\theta) d\theta e^{-\int_s^\xi a(\eta) d\eta} ds
\end{aligned} \tag{6.6}$$

eşitliği elde edilir. Daha sonra (6.6) denklemini hesaba katarak

$$\begin{aligned}
|u(t)| & \leq |\varphi(0)| + \sum_{i=0}^{n-3} \frac{r^{i+1}}{i!} |B_{i+1}| \\
& + \frac{r^{n-1}}{(n-2)!} |B_{n-1}| \\
& + \frac{r^n}{(n-1)!} (\|f\|_{\infty, I_1} + \|b\|_{\infty, I_1} \|\varphi\|_{\infty, I_0} + (n-1)\bar{K} \|\varphi\|_{\infty, I_0}) \\
& + \frac{r^{n-1}}{(n-2)!} \bar{K} \int_0^r |u(s)| ds
\end{aligned} \tag{6.7}$$

sonucuna ulaşılır. Burada

$$\bar{K} = \max_{\bar{I} \times \bar{I}} |K(t, s)|$$

ifade etmektedir. (6.7) eşitliğinin yazılımını kısaltmak için

$$\begin{aligned}
Q_0 & = |\varphi(0)| + \sum_{i=0}^{n-3} \frac{r^{i+1}}{i!} |B_{i+1}| \\
& + \frac{r^{n-1}}{(n-2)!} |B_{n-1}| \\
& + \frac{r^n}{(n-1)!} (\|f\|_{\infty, I_1} + \|b\|_{\infty, I_1} \|\varphi\|_{\infty, I_0} + (n-1)\bar{K} \|\varphi\|_{\infty, I_0})
\end{aligned}$$

kullanılırsa

$$|u(t)| \leq Q_0 + \frac{r^{n-1}}{(n-2)!} \bar{K} \int_0^r |u(s)| ds$$

olur. Buradan da Gronwall integral eşitsizliği uygulanırsa

$$|u(t)| \leq Q_0 e^{\frac{r^n}{(n-2)!} \bar{K}}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki açıklamaların ışığında

$$\begin{aligned} C_1 &= \left(|\varphi(0)| + \sum_{i=0}^{n-3} \frac{r^{i+1}}{i!} |B_{i+1}| + \frac{r^{n-1}}{(n-2)!} |B_{n-1}| \right) e^{\frac{r^n}{(n-2)!} \bar{K}} \\ &+ \frac{r^n}{(n-1)!} (\|f\|_{\infty, I_1} + \|b\|_{\infty, I_1} \|\varphi\|_{\infty, I_0} + (n-1) \bar{K} \|\varphi\|_{\infty, I_0}) e^{\frac{r^n}{(n-2)!} \bar{K}} \end{aligned} \quad (6.8)$$

ifade ettiği durumda

$$|u(t)| \leq C_1$$

eşitsizliği kolaylıkla yazılır. Ardından $t \in I_p$ aralığı için

$$\begin{aligned} C_p &= \left(|\varphi(0)| + \sum_{i=0}^{n-3} \frac{r^{i+1}}{i!} |B_{i+1}| + \frac{r^{n-1}}{(n-2)!} |B_{n-1}| \right) e^{\frac{r^n}{(n-2)!} \bar{K}} \\ &+ \frac{r^n}{(n-1)!} (\|f\|_{\infty, I_p} + \|b\|_{\infty, I_p} \|u\|_{\infty, I_{p-1}} + (n-1) \bar{K} \|u\|_{\infty, I_{p-1}}) e^{\frac{r^n}{(n-2)!} \bar{K}} \end{aligned} \quad (6.9)$$

olması sonucuna varılır. Herhangi bir türev mertebesinde kararlılık eşitsizliği elde etmek için eğer $t \in I_1$ aralığında (6.5) eşitliği kullanılırsa;

$$\left| u^{(n-3)}(t) \right| \leq |B_{n-3}| + r |B_{n-2}| + r^2 |B_{n-1}|$$

$$+ r^3 (\|f\|_{\infty, I_1} + \|b\|_{\infty, I_1} \|\varphi\|_{\infty, I_0})$$

$$\begin{aligned}
& + r^3 \bar{K} \int_{-r}^0 |u(\theta)| d\theta + r^3 \bar{K} \int_0^t |u(\theta)| d\theta \\
& \leq |B_{n-3}| + r |B_{n-2}| + r^2 |B_{n-1}| \\
& + r^3 (\|f\|_{\infty, I_1} + \|b\|_{\infty, I_1} \|\varphi\|_{\infty, I_0}) + r^4 \bar{K} (\|u\|_{\infty, I_0} + C_1)
\end{aligned}$$

olur. Bu ifade de fonksiyon $(n-3)$. mertebeden türeve sahiptir. Ancak daha genel formuyla $(n-k)$ türev mertebesine sahip olan fonksiyon için

$$\begin{aligned}
\left| u^{(n-k)}(t) \right| & \leq \sum_{j=0}^{k-1} |B_{n-k-j}| r^j + r^k (\|f\|_{\infty, I_1} + \|b\|_{\infty, I_1} \|u\|_{\infty, I_0}) \\
& + r^{k+1} \bar{K} (\|u\|_{\infty, I_0} + C_1), \quad k = 1, 2, \dots, n-1
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Yukarıda ifade edilen eşitsizliğin yazılımını kısaltmak için

$$\begin{aligned}
D_1 & = \sum_{j=0}^{k-1} |B_{n-k-j}| r^j + r^k (\|f\|_{\infty, I_1} + \|b\|_{\infty, I_1} \|u\|_{\infty, I_0}) \\
& + r^{k+1} \bar{K} (\|u\|_{\infty, I_0} + C_1), \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \quad \text{ve} \quad p = 2, 3, \dots, m
\end{aligned} \tag{6.10}$$

olsun. O zaman $t \in I_p$ için

$$\begin{aligned}
\left| u^{(n-k)}(t) \right| & \leq \sum_{j=0}^{k-1} |B_{n-k-j}| r^j + r^k (\|f\|_{\infty, I_p} + \|b\|_{\infty, I_p} \|u\|_{\infty, I_{p-1}}) \\
& + r^{k+1} \bar{K} (\|u\|_{\infty, I_{p-1}} + C_p), \quad k = 1, 2, \dots, n-1
\end{aligned}$$

olur. Tekrar

$$D_p = \sum_{j=0}^{k-1} |B_{n-k-j}| r^j + r^k (\|f\|_{\infty, I_p} + \|b\|_{\infty, I_p} \|u\|_{\infty, I_{p-1}})$$

$$+ r^{k+1} \bar{K}(\|u\|_{\infty, I_{p-1}} + C_{p-1}), \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \quad \text{ve} \quad p = 2, 3, \dots, m \quad (6.11)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece önerilen yaklaşık çözüm yönteminin analizinde kullanılacak yüksek mertebeli GVDD'in kesin çözümü için ön hazırlık aşamasını gerçekleştirmiş olduk.

Teorem 6.1. $a, b, f \in C(\bar{I})$, $K \in C(\bar{I} \times \bar{I})$, $\varphi \in C^1(I_0)$ olsun. (6.1)-(6.2) probleminin çözümü u için

$$\|u\|_{\infty, I_p} \leq C_p, \quad 1 \leq p \leq m, \quad (6.12)$$

$$\|u^{(n-k)}\|_{\infty, I_p} \leq D_p, \quad 1 \leq p \leq m \quad (6.13)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Burada C_1 , D_1 , C_p ve D_p daha önce ifade edilen (6.8)-(6.11) eşitliklerde tanımlanmıştır.

İspat.

İspat p için tümevarım yöntemi kullanılarak yapılacaktır. $t \in I_1$ için Bölüm 6.1'in hazırlık aşamasında C_1 ve D_1 'in sırasıyla (6.8) ve (6.10)'de elde edilişi gösterilmiştir. İkinci adım olarak (6.6) denkleminde $t \in I_{l+1}$ için

$$\begin{aligned} u(t) = & u(rl) + \sum_{i=0}^{n-3} \frac{1}{i!} \int_{rl}^t (t-s)^i B_{i+1} ds \\ & + \frac{1}{(n-2)!} \int_{rl}^t (t-s)^{n-2} B_{n-1} e^{-\int_{rl}^s a(\eta) d\eta} ds \\ & + \frac{1}{(n-1)!} \int_{rl}^t (t-s)^{n-1} f(s) e^{-\int_s^\xi a(\eta) d\eta} ds \\ & - \frac{1}{(n-1)!} \int_{rl}^t (t-s)^{n-1} b(s) u(s-r) e^{-\int_s^\xi a(\eta) d\eta} ds \\ & - \frac{1}{(n-2)!} \int_{rl}^t \int_{s-r}^{rl} (t-s)^{n-2} K(s, \theta) u(\theta) d\theta e^{-\int_s^\xi a(\eta) d\eta} ds \end{aligned}$$

$$- \frac{1}{(n-1)!} \int_{rl}^t (t-s)^{n-1} K(s, \theta) u(\theta) d\theta e^{-\int_s^{\xi} a(\eta) d\eta} ds$$

elde edilen eşitliğin her iki tarafından da mutlak değeri alınırsa;

$$\begin{aligned} |u(t)| &\leq C_l + \sum_{i=0}^{n-3} \frac{r^{i+1}}{i!} |B_{i+1}| + \frac{r^{n-1}}{(n-2)!} |B_{n-1}| \\ &+ \frac{r^n}{(n-1)!} (\|f\|_{\infty, I_{l+1}} + \|b\|_{\infty, I_{l+1}} \|u\|_{\infty, I_l} + (n-1)\bar{K} \|u\|_{\infty, I_l}) \\ &+ \frac{r^{n-1}}{(n-2)!} \bar{K} \int_{rl}^r |u(s)| ds \end{aligned}$$

olur. Burada

$$\begin{aligned} Q_l &= C_l + \sum_{i=0}^{n-3} \frac{r^{i+1}}{i!} |B_{i+1}| + \frac{r^{n-1}}{(n-2)!} |B_{n-1}| \\ &+ \frac{r^n}{(n-1)!} (\|f\|_{\infty, I_{l+1}} + \|b\|_{\infty, I_{l+1}} \|u\|_{\infty, I_l} + (n-1)\bar{K} \|u\|_{\infty, I_l}) \end{aligned}$$

şeklindedir. Gronwall eşitsizliği kullanılarak

$$|u(t)| \leq Q_l e^{\frac{r^{n+1}}{(n-2)!} \bar{K}}$$

elde edilir. Ayrıca (6.10) için (6.1) denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned} |u^{(n-k)}(t)| &\leq \sum_{j=0}^{k-1} |B_{n-k-j}| r^j + r^k (\|f\|_{\infty, I_{l+1}} + \|b\|_{\infty, I_{l+1}} C_l) \\ &+ r^{k+1} \bar{K} (C_l + C_{l+1}) \end{aligned}$$

sonucuna varılır. Bu nedenle $p = l + 1$ için (6.12)-(6.13) eşitsizliklerinin geçerli olduğu gösterilmiş olur. $\square$

6.2. NÜMERİK SONUÇLAR

Bu bölümde (6.1)-(6.2) problemi için elde edilen teorik sonuçlar aşağıda verilen örnekler ile incelenecektir. Ayrıca tüm hesaplamaları desteklemek için MatLab yazılımı kullanılmıştır.

Örnek 6.2. Elde edilen sonuçlar aşağıdaki problem için test edilecektir:

$$u^{(4)}(t) + 2u^{(3)}(t) + u(t-2) = \varepsilon, \quad t \in (0, 2],$$

$$u(t) = e^{2t} + 3e^{-2t} + \varepsilon, \quad t \leq 0,$$

$$u'(0) = -1, \quad u''(0) = 16, \quad u^{(3)}(0) = -16.$$

$\varepsilon = 0$ için problemin kesin çözümü:

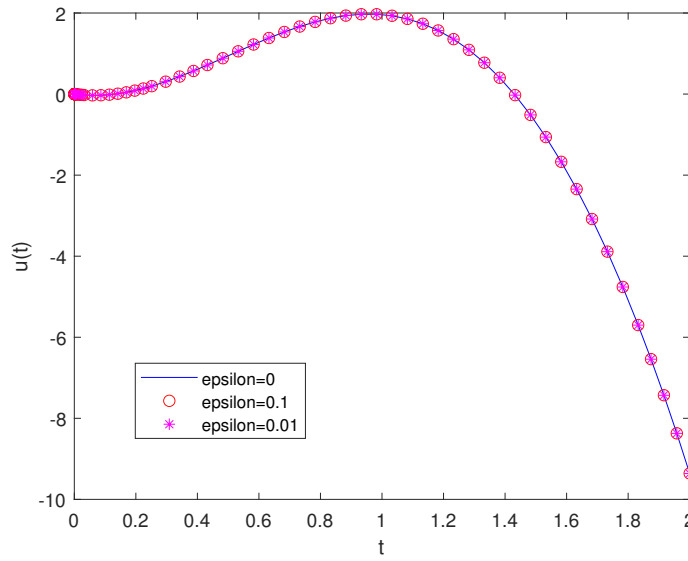
$$u(t) = \begin{cases} e^{2t} + 3e^{-2t}, & t \leq 0, \\ \frac{e^{2t-4}}{48} - \frac{3e^{4-2t}}{16} + \frac{3e^{4-4t}}{128} + \frac{e^{-4-4t}}{384} + \frac{e^{-4t}}{4} + \frac{3e^4 - e^{-4} + 96}{32}(2t^2 - t) \\ - \frac{3e^4}{128} - \frac{11e^{-4}}{128} + \frac{27}{4}, & t \in (0, 2] \end{cases}$$

şeklinde olur.

Örnek 6.2’de, $t \in I_1$ için verilen problemin farklı ε değerleri altında adım yöntemi ile elde edilen çözümleri karşılaştırılmaktadır. Küçük ε değerleri için bu çözümler arasında pek fark olmadığı gözlemlenmektedir. Ayrıca, ε azaldıkça, problemde farklı ε değerleri için elde edilen çözümler birbirine yaklaşmaktadır. Bu yaklaşımın daha iyi değerlendirilebilmesi için MatLab grafikleriyle birlikte I_1 aralığındaki belirli noktalarındaki fonksiyon değerlerini içeren bir tablo oluşturulmuştur. Aynı zamanda birden fazla ε değeri için hata oranları hesaplanmıştır.

Çizelge 6.1. Test probleminin I_1 aralığındaki sayısal sonuçları

t_i	u_i	$u_i (\varepsilon = 10^{-1})$	$e_i^{10^{-1}}$	$u_i (\varepsilon = 10^{-2})$	$e_i^{10^{-2}}$
0.1	0.0219	0.0219	0.0	0.0219	0.0
0.2	0.0917	0.0917	0.0	0.0917	0.0
0.3	0.3143	0.3143	0.0	0.3143	0.0
0.4	0.6109	0.6109	0.0	0.6109	0.0
1.0	1.9564	1.9565	0.0001	1.9566	0.0002
1.2	1.4947	1.4949	0.0002	1.4947	0.0
1.4	0.2527	0.2530	0.0003	0.2527	0.0
1.8	-5.0878	-5.0865	0.0013	-5.0876	0.0002



Şekil 6.1. Örnek 6.2’de I_1 aralığında farklı ε değerleri için problemin kesin çözümlerinin karşılaştırılması

Örnek 6.2’de $\varepsilon = 0, 10^{-1}$ ve 10^{-2} değerleri için Tablo 6.1’in oluşumu ve grafik 6.1’un çiziminde kullanılan (7) numaralı MatLab kodu tezin 9.1. bölümünde yer almaktadır. Ayrıca farklı ε değerlerinden kaynaklanan yukarıdaki (7) MatLab kodunun yardımı ile elde edilen Örnek 6.2’nin çözümünün farklı t noktalarındaki değerleri için (8)-(9) numaralı MatLab kodları kullanılmıştır.

Örnek 6.3.

$$u''(t) + 3u'(t) + u(t - \pi) - 2 \int_{t-\pi}^t u(s) ds = -(\sin(2(t - \pi)) + \cos(2(t - \pi))) + \varepsilon, \quad t \in (0, \pi],$$

$$u(t) = \sin(2t) + \varepsilon, \quad t \leq 0,$$

$$u'(0) = 2, \quad u''(0) = -7 + \varepsilon.$$

$\varepsilon = 0$ için problemin kesin çözümü:

$$u(t) = \begin{cases} \sin(2t), & t \leq \pi, \\ e^{-t} - \frac{e^{t(\sqrt{3}-1)}(3-2\sqrt{3})}{6} - \frac{e^{-t(\sqrt{3}+1)}(3\sqrt{3}+5)}{2\sqrt{3}+3}, & t \in (0, \pi] \end{cases}$$

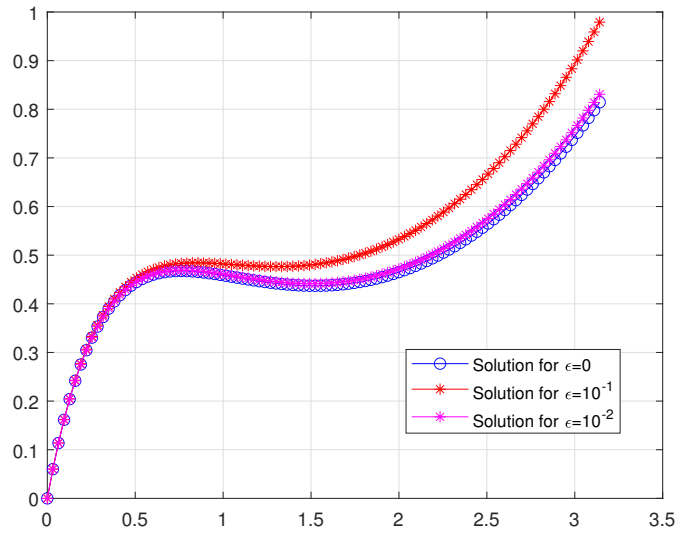
şeklindedir. Herhangi bir ε değeri için, tam hata

$$e_i^\varepsilon = |y_i - u_i|, \quad e_i^\varepsilon = \|y - u\|_{\infty, \bar{\omega}_{\varepsilon_0}}$$

biçiminde gösterilir. Burada y_i, t_i düğüm noktaları için u_i kesin çözümünün yaklaşık çözümüdür. Yüksek mertebeden GVDD problemine örnek olarak verilen Örnek 6.3'ün kesin çözümündeki farklı noktalardaki değerleri Tablo 6.2'de ve Grafik 6.2'de verilmiştir.

Çizelge 6.2. Test probleminin I_1 aralığındaki sayısal sonuçları

t_i	u_i	$u_i (\varepsilon = 10^{-1})$	$e_i^{10^{-1}}$	$u_i (\varepsilon = 10^{-2})$	$e_i^{10^{-2}}$
0.2597	0.3349	0.3330	0.0019	0.3349	0.0
0.5012	0.4425	0.4500	0.0075	0.4443	0.0018
1.0007	0.4670	0.4821	0.0151	0.4613	0.0057
1.5002	0.4330	0.4821	0.0491	0.4443	0.0113
1.9998	0.4632	0.5311	0.0679	0.4708	0.0076
2.2460	0.5594	0.6613	0.1019	0.5708	0.0114
2.9988	0.7387	0.8915	0.1528	0.7538	0.0151
3.1510	0.8160	0.9802	0.1642	0.8330	0.0170



Şekil 6.2. Örnek 6.3'in I_1 aralığında farklı ε değerleri için problemin kesin çözümlerinin karşılaştırılması

7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu bölümde, önceki bölümlerde ele alınan problemlerin kapsamlı bir incelemesi yapılacak ve bu çalışma ile ortaya çıkan ana sonuçlar özetlenecektir. Ayrıca literatüre katkı sağlayabilecek sonraki çalışmalar hakkında detaylı önerilerde bulunulacaktır. Bununla birlikte bu bölümde sunulan fikirlerin özgünlüğü ve uygulanabilirliği konusunda bazı tartışmalar da ele alınacaktır. Sonuç olarak bu bölümün amacı, araştırmacıların bu alandaki çalışmalarını daha da derinleştirmesi ve geliştirmesi için bir temel oluşturmaktır.

Bu tez çalışmasında GVİDD'lerin özellikleri, kararlılık eşitsizlikleri, düzgün bir şebeke üzerinde oluşturulmuş sonlu fark şemaları, elde edilen çözümler arasındaki hata değerlendirmelerinin tasarlanması ve analizi üzerinde yoğunlaşmıştır.

Bu çalışmada GVİDD için dört farklı problem ele alınmıştır.

İlk olarak nötr tip GVİDD için (4.1)-(4.2) başlangıç-değer problemi ele alınmıştır. Başlangıç olarak (4.1)-(4.2) problemi için kararlılık sınırları oluşturulmuş, problemin integral kısmı için dikdörtgen metodu uygulanarak düzgün şebeke üzerinde fark şeması elde edilmiştir. (4.1) probleminin çözümü ve oluşturulan fark şemasından uygulanan iteratif metod ile elde edilen yaklaşık çözümün kıyaslanması sonucunda araştırılan (4.1)-(4.2) problemi (4.15)-(4.16) fark problemine dönüştürülmüştür. Fark probleminin çözümünün düzgün şebekede (4.1)-(4.2) probleminin çözümüne $O(h^2)$ hızıyla düzgün yakınsadığı sonucu ele edilmiştir. Bulunan yöntemlerin uygulanabilir ve etkili olduğunu göstermek için örnek test problemleri sunulmuştur. Ayrıca test problemlerinin daha iyi gözlenebilmesi için sonuçlar MatLab uygulaması yardımı ile çizilen grafik ve tablolar ile desteklenmiştir. Sonuçtan hareketle uygulanan yöntemin teorik çalışmaya uygun olduğu gözlemlenmiştir.

İkinci olarak (5.1)-(5.3) ikinci mertebe lineer GVİDD'in kararlılık eşitsizlikleri oluşturulmuştur. (5.1)'ün integral kısmı için yamuk (trapez) metodu uygulanarak düzgün şebeke üzerinde fark şeması kurulmuştur. Bu fark şemasının kararlılık ve yakınsaklık incelemesi yapılmıştır. Yaklaşık çözümün, kesin çözüme maksimum normda

$O(h^2)$ hızıyla düzgün yakınsadığı gösterilmiştir. Elde edilen nümerik sonuçların teorik sonuçlara uygunluğu verilen örnekler ve alınan örnekler için üretilen grafik ve tablolar ile desteklenmiştir.

Üçüncü olarak (5.1)-(5.3)'da incelenen probleme ek olarak aranan fonksiyonun birinci mertebeden türevinde gecikme terimi bulunduran (5.48)-(5.50) formundaki problem ele alınmıştır. (5.48)-(5.50) probleminin de kararlılık eşitsizlikleri oluşturularak, içerdiği integral terimi için yine yamuk (trapez) metodu uygulanarak düzgün şebeke üzerinde fark şeması kurulmuş ve yakınsaklık incelemesi yapılmıştır. (5.48)-(5.50) probleminin de yaklaşık çözümünün, kesin çözüme maksimum normda $O(h^2)$ hızıyla düzgün yakınsadığı gözlemlenmiştir. Ayrıca teoriyi destekleyen örnek problemler ile sunulan yöntemin etkinliği gösterilmiştir.

Dördüncü olarak (6.1)-(6.2) formundaki yüksek mertebeli GVİDD'ler ele alınmıştır. (6.1)-(6.2) probleminin kesin çözümünün üretilmesinde önemli noktalara değinilmiştir. Ayrıca aranan fonksiyon ve bu fonksiyonun farklı mertebeden türevleri için kararlılık eşitsizlikleri elde edilmiştir. Yöntemin sadece aranan fonksiyonun kararlılık eşitsizliklerinin elde edilmesinin yanı sıra bu fonksiyonun herhangi bir yüksek türev mertebesinde de kararlılık eşitsizliklerini bulunmasına olanak sağlaması yönünden, yöntemin bu zamana kadar uygulanan yöntemlere göre ne kadar etkin olduğu gözler önüne serilmektedir. Sunulan örnek problemler ile yöntemin uygulanabilirliği ve etkililiği gösterilmiştir. Sonuçlar, MatLab uygulaması kullanılarak oluşturulan grafikler ve tablolar ile desteklenerek test problemlerinin daha iyi gözlemlenmesi sağlanmıştır. Bu sonuçlardan yola çıkarak, uygulanan yöntemin teorik çalışmaya uygun olduğu gösterilmiştir.

Sonuç ve öneri olarak bu çalışmada ele alınan farklı mertebeden GVİDD'ler için uygulanan sonlu fark metodu problemin kararlılık eşitsizliklerinin oluşturulmasında oldukça etkili ve ekonomik bir çözüm yaklaşımıdır. İncelenen teorik çalışmaya destek amacı ile alınan sayısal örneklerin çözümü için kullanılan görsel grafik ve tablolar teze yeni bir perspektif katmıştır. Ayrıca incelemeye değer sonuçlar sunmuştur. Yapılan literatür taramasında, bu tür problemlerin henüz yaygın bir şekilde çalışılmadığı anlaşılmıştır. Bu tez çalışması, araştırmacılara katkı sağlayabilecek niteliktedir.

Bu çalışmanın sonuçlarından faydalanarak birinci ve ikinci mertebeden Volterra-Fredholm GİDD'ler, lineer olmayan ve daha karmaşık başlangıç şartları içeren GVİDD'ler üzerine yoğunlaşarak daha kapsamlı analizler yapılabilir. Ayrıca GVİDD'lerin nümerik çözümleri için bu tez çalışmasında kullanılan sonlu fark yöntemlerinin yanı sıra, araştırmacılar farklı nümerik metotları da uygulayarak çözüm yaklaşımlarını karşılaştırabilirler.

Sonuç olarak, bu tez çalışması, GVİDD'lerin sayısal çözümü konusunda önemli bir adım olmuştur. Öneriler doğrultusunda yapılan gelecekteki çalışmalar, GVİDD'lerin daha geniş bir yelpazedeki problemlerde kullanımını ve nümerik çözüm yöntemlerinin etkinliğini artırabilir. Bu çalışmanın sonuçları, bu tür denklemlerin analizine ve pratik uygulamalarına katkı sağlamak için önemli bir kaynaktır.



8. KAYNAKLAR

- [1] E. Adel, A. Elsaid, ve M. El-Agamy, "Adaptive finite element method for Fredholm integral equation", *Communications on Advanced Computational Science with Applications*, sayı 1, ss. 24–32, 2016.
- [2] I. Amirali, "Stability properties for the delay integro-differential equation", *Gazi University Journal of Science*, c. 36(2), ss. 862–868, 2023.
- [3] I. Amirali, "Analysis of higher order difference method for a pseudo-parabolic equation with delay", *Miskolc Mathematical Notes*, c. 20(2), ss. 755-766, 2019.
- [4] I. Amirali, ve H. Acar, "Stability inequalities and numerical solution for neutral Volterra delay integro-differential equation", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, c. 436(1):115343, 2023.
- [5] I. Amirali, ve H. Acar, "A novel approach for the stability inequalities for high-order Volterra delay integro-differential equation", *Journal of Applied Mathematics and Computing*, c. 69, ss. 1057-1069, 2023.
- [6] I. Amirali, ve G. M. Amiraliyev, "Three layer difference method for linear pseudo-parabolic equation with delay", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, c. 401, ss. 118-173, 2022.
- [7] G. Amirali, ve I Amirali, "Nümerik Analiz (Teori ve Uygulamalarla)", *Seçkin Yayıncılık*, Ankara, 2023.
- [8] I. G. Amiraliyeva, M. E. Durmaz, H. Acar, ve G.M. Amiraliyev, "First-order numerical method for the singularly perturbed nonlinear Fredholm integro-differential equation with integral boundary condition", *Journal of Physics Conference Series*, 2023.
- [9] G. M. Amiraliyev, ve Ö. Yapman, "On the Volterra delay integro-differential equation with layer behavior and its numerical solution", *Miskolc Mathematical Notes*, c. 20(1), ss. 75-87, 2019.
- [10] G. M. Amiraliyev, Ö. Yapman, ve M. Kudu, "A fitted approximate method for a Volterra delay integro-differential equation with initial layer", *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, c. 48(5), 1417-1429, 2019.

- [11] P. Assari, ve M. Dehghan, "A meshless local discrete Galerkin (MLDG) scheme for numerically solving two-dimensional nonlinear Volterra integral equations", *Applied Mathematics and Computation*, c. 350, ss. 249-265, 2019.
- [12] M. M. Bahşı, A. K. Bahşı, M. Çevik, ve M. Sezer, "Improved Jacobi matrix method for the numerical solution of Fredholm integro-differential-difference equations", *Mathematical Sciences*, c. 10, ss. 83–93, 2016.
- [13] B. Balachandran, T. K. Nagy, ve D. E. Gilsinn, "Delay differential equations", *Springer, New York*, 2009.
- [14] M. V. Barbarossa, ve C. Kuttler, "Mathematical modeling of bacteria communication in continuous cultures", *Applied Sciences*, 6(5):149, 2016.
- [15] A. Bellen, S. Maset, M. Zennaro, ve N. Guglielmi, "Recent trends in the numerical solution of retarded functional differential equations", *Acta Numerica*, c. 18, ss. 1-110, 2009.
- [16] A. Bellen, ve N. Guglielmi, "Solving neutral delay differential equations with state-dependent delays", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, c. 229, ss. 350-362, 2009.
- [17] A. Bellen, ve M. Zennaro, "Numerical methods for delay differential equations", *Oxford University Press, Oxford*, 2003.
- [18] R. E. Bellman, "On the computational solution of differential difference equations", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, c. 2, ss. 108-110, 1961.
- [19] G. A. Bocharov, ve F. A. Rihan, "Numerical modelling in biosciences with delay differential equations", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, c. 125, ss. 183–199, 2000.
- [20] W. E. Boyce, ve R. C. DiPrima, "Elementary differential equations and boundary value problems", *John Wiley-Sons, Inc., United States of America*, 2009.
- [21] H. Brunner, "Numerical analysis and computational solution of integro-differential equations", *Contemporary Computational Mathematics-A Celebration of the 80th Birthday of Ian Sloan (J. Dick et al., eds.)*, Springer, Cham ss. 205-231, 2018.

- [22] H. Brunner, A. Makroglou, ve R. Miller, "Mixed interpolation collocation methods for first and second order Volterra integro-differential equations with periodic solution", *Applied Numerical Mathematics*, c. 23(4), ss. 381–402, 1997.
- [23] H. Brunner, ve P. J. Van der Houwen, "The numerical solution of Volterra equations", *Amsterdam, New York*, c. 3, 1986.
- [24] T. A. Burton, "Volterra integral and differential equations", *New York, Academic Press, Inc.(Mathematics in Science and Engineering)*, c. 167, 1983.
- [25] E. A. Coddington, ve N. Levinson, "Theory of ordinary differential equations", *McGraw-Hill Inc.*, 1987.
- [26] R. D. Driver, "Ordinary and delay differential equations", *Springer-Verlag, New York*, 1977.
- [27] M. E. Durmaz, I. Amirali, J. Mohapatra, ve G. M. Amiraliyev, "A second-order numerical approximation of a singularly perturbed nonlinear Fredholm integro-differential equation", *Applied Numerical Mathematics*, c. 191, ss. 17-28, 2023.
- [28] M. E. Durmaz, M. Cakir, I. Amirali, ve G. M. Amiraliyev, "Numerical solution of singularly perturbed Fredholm integro-differential equations by homogeneous second order difference method", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, c. 412(4):114327, 2022.
- [29] M. E. Durmaz, I. Amirali, ve G. M. Amiraliyev, "An Efficient Numerical Method for a Singularly Perturbed Fredholm Integro-Differential Equation with Integral Boundary Condition", *Journal of Applied Mathematics and Computing*, c. 69, ss. 505-528, 2022.
- [30] L. E. El'sgol'ts, "Introduction to the theory of differential equations with deviating argument", *Holden-Day, N. Y.*, 1966.
- [31] L. E. El'sgol'ts, ve S. B. Norkin, "Introduction to the theory and application of differential equations with deviating arguments", *Academic Press, New York*, 1973.
- [32] W. Enright, ve M. Hu, "Continuous Runge-Kutta methods for neutral Volterra integro-differential equations with delay", *Applied Numerical Mathematics*, c. 24(2-3), ss. 175–190, 1997.

- [33] E. Isaacson, ve B. H. Keller, "Analysis of Numerical Methods", *Dover Publications Inc.*, New York, 1994.
- [34] Z. Jackiewicz, "Existence and uniqueness of solutions of neutral delay-differential equations with state dependant delays", *Funckcial. Ekvac.* 30, ss. 9-17, 1987.
- [35] A. Jerri, "Introduction to integral equations with applications", *Wiley, New York*, 1999.
- [36] G. Ker, G. Gozalez-Parra, ve M. Sherman, "A new method based on the Laplace transform and Fourier series for solving linear neutral delay differential equations", *Applied Mathematics and Computation*, c. 420(2), 2022.
- [37] M. Krasnov, A. Ksilev, ve G. Makarenko, "Problems and exercises in integral equations", *Mir Publishers, Moskow*, 1971.
- [38] V. Kolmanovski, ve A. Myshkis, "Applied theory of functional differential equations", *Kluwer Academic, Dordrecht*, 1992.
- [39] T. Koto, "Stability of Runge-Kutta methods for delay integro-differential equations", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, c. 145, ss. 483-492, 2002.
- [40] M. Kudu, I. Amirali, ve G. M. Amiraliyev, "A finite-difference method for a singularly perturbed delay integro-differential equation", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, c. 308, ss. 379-390, 2016.
- [41] J. D. Lambert, "Computational methods in ordinary differential equations", *Willey*, 1973.
- [42] I. M. Olaru, "Generalization of an integral equation related to some epidemic models", *Carpathian Journal of Mathematics*, c. 26(1), ss. 92-96, 2010.
- [43] A. Panda, J. Mohapatra, ve I. Amirali, "A second-order post-processing technique for singularly perturbed Volterra integro-differential equations", *Mediterranean Journal of Mathematics*, c. 18:231, 2021.
- [44] H. J. Reinhardt, "Analysis of approximation methods for differential and integral equations", *Springer Verlag, New York*, 1985.

- [45] W. Rudin, "Principles of mathematical analysis", *McGraw-Hill, Inc., New York*, 1976.
- [46] N. Rohaninasab, K. Maleknejad, ve R. Ezzati, "Numerical solution of high order Volterra-Fredholm integro-differential equations by using Legendre collocation method", *Applied Mathematics and Computation*, c. 328, ss. 171–188, 2018.
- [47] S. L. Ross "Differential equations", *Wiley-India*, c. 13(6), 1650040, 20 pages, 2016.
- [48] A. Saadatmandi, ve M. Dehghan, "Numerical solution of the higher-order linear Fredholm integrodifferential-difference equation with variable coefficients", *International Journal of Computational Methods*, 2010.
- [49] A. A. Samarskii, "The theory of difference schemes", Marcel Dekker, Inc. New York, 2402–2412, 2001.
- [50] S. Shahmorad, ve M. H. Ostadzad, "An operational matrix method for solving delay Fredholm and Volterra integro–differential equations", *International Journal of Computational Methods*, c. 13(6), 1650040, 20 pages, 2016.
- [51] L. Tavernini, "One-step methods for the numerical solution of Volterra functional differential equations", *SIAM Journal on Numerical Analysis*, c. 8, sayı 4, 1971.
- [52] M. Villasana, ve A. Radunskaya, "A delay differential equation model for tumor growth", *Journal of Mathematical Biology*, 47, 270-294, 2003.
- [53] Ö. Yapman, G. M. Amiraliyev, ve I. Amirali, "Convergence analysis of fitted numerical method for a singularly perturbed nonlinear Volterra integro-differential equation with delay", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, c. 355, ss. 301-309, 2019.
- [54] C. Zang, ve S. Vandewalle, "General linear methods for Volterra integro-differential equations with memory", *Society for Industrial and Applied Mathematics*, c. 27(6), ss. 2010-2031, 2006.
- [55] Y. Zhou, ve M. Stynes, "Block boundary value methods for solving linear neutral Volterra integro-differential equations with weakly singular kernels", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, c. 401, 113747, 2022.

- [56] A. M. Wazwaz, "Linear and nonlinear integral equations, methods and applications",
Higher Education Press, Beijing, Springer Verlag, New York, 2011.



9. EKLER

9.1. MATEMATİKSEL MODELLEMELERDE KULLANILAN MATLAB KODLARI

```
1  % Parameters
2  v1_baş = 80; % Öndeki aracın başlangıç hızı (m/s)
3  v2_baş = 80; % Arkadaki aracın başlangıç hızı (m/s)
4  x_baş = 10; % Araçlar arasındaki başlangıç mesafe (m)
5  a1 = 6; % Öndeki aracın yavaşlama ivmesi (m/s^2)
6  tau = 0.5; % gecikme (s)
7  k = 0.5; %Hız farkı tarafından etkilenen hız değişim oranı
8  c = 0.8; % Mesafe farkı tarafından etkilenen hız değişim oranı
9
10 % Zaman aralığı ve adım sayısı
11 t_baş = 0; % Başlangıç zamanı (s)
12 t_bit = 10; % Bitiş zamanı (s)
13 dt = 0.01; % adım uzunluğu (s)
14 num_steps = (t_bit - t_baş) / dt;
15
16 % Değişkenlerin başlangıç değerleri
17 x = zeros(num_steps, 1); % Öndeki aracın başlangıç konumu
18 y = zeros(num_steps, 1); % Arkadaki aracın başlangıç konumu
19 v1_vals = zeros(num_steps, 1); % Öndeki aracın hızı
20 v2_vals = zeros(num_steps, 1); % Arkadaki aracın hızı
21 % Başlangıç Değerler
22 x(1) = x_initial; % Öndeki aracın başlangıç pozisyonu
23 y(1) = 0; % Arka aracın başlangıç pozisyonu (mesafe)
24 v1_vals(1) = v1_initial; % Ön aracın başlangıç hızı
25 v2_vals(1) = v2_initial; % Arka aracın başlangıç hızı
26 % Sayısal entegrasyon
27 for i = 2:num_steps
28     t = (i-1) * dt;
29     % Ön aracın hızını güncelle (frenleme)
30     v1_t = v1_initial - a1 * t;
```

```

32 % Arka aracın gecikme hızını hesapla
33 if (i > round(tau / dt))
34 v1_delay = v1_vals(i - round(tau / dt));
35 else
36 v1_delay = v1_initial;
37 end
38
39 % Hız değişimini hesapla
40 if (i > 2)
41 dv2_dt = k * (v1_delay - v2_vals(i-1))
42 - c * ((y(i-1) - y(i-2)) / dt);
43 else
44 dv2_dt = k * (v1_delay - v2_vals(i-1));
45 end
46
47 % Hızları güncelle
48 v1_vals(i) = v1_t;
49 v2_vals(i) = v2_vals(i-1) + dv2_dt * dt;
50
51 % Pozisyonları güncelle
52 x(i) = x(i-1) + v1_vals(i) * dt;
53 y(i) = y(i-1) + v2_vals(i) * dt;
54 end

```

Listing 1. Şekil (2.1) için MatLab kodu

```

1 % Parametre tanımları
2 a = 0.6;
3 b = 0.4;
4 tau = 1;
5 delta = 2;
6
7 % Zaman aralığı ve adım sayısı
8 T = 10; % Simülasyon süresi
9 dt = 0.01; % Adım büyüklüğü
10 N = round(T / dt) + 1; % Adım sayısı (dizinleme için 1 eklenir)
11
12 % Başlangıç koşulu
13 F = zeros(N, 1);
14 F(1) = 0.5; % Başlangıç hisse senedi fiyatı
15
16 % Portföy değişim oranı tanımı
17 P = zeros(N, 1);
18 P(1) = 0.3; % Başlangıç portföy değişim oranı
19
20 % Modelin sayısal çözümü
21 for i = 2:N
22     idx_tau = round(i - tau / dt);
23     idx_delta = round(i - delta / dt);
24
25     if idx_tau <= 0
26         P(i) = P(i-1);
27     else
28         P(i) = P(idx_tau);
29     end
30
31     if idx_delta <= 0
32         F(i) = a * P(i) + b * F(i-1);
33     else
34         F(i) = a * P(i) + b * F(idx_delta);
35     end
36 end
37
38 % Zaman vektörünün oluşturulması

```

```
39 t = 0:dt:(N-1)*dt;  
40  
41 % Çizim  
42 plot(t, F, 'b', 'LineWidth', 2);  
43 xlabel('Zaman');  
44 ylabel('Hisse Senedi Fiyatı');  
45 grid on;
```

Listing 2. Şekil (2.2) için MatLab kodu

```

1 % Parametre tanımları
2 k = 0.8; % İletişim sinyali katsayısı
3 tau = 2; % İletişim gecikmesi (saniye)
4
5 % Zaman aralığı ve adım sayısı
6 T = 10; % Simülasyon süresi (saniye)
7 dt = 0.01; % Adım büyüklüğü (saniye)
8 N = round(T / dt) + 1; % Adım sayısı (dizinleme için 1 eklenir)
9
10 % Başlangıç koşulları
11 x = zeros(N, 1); % Araç pozisyonu
12 y = zeros(N, 1); % İletişim sinyali
13
14 % Araç başlangıç pozisyonu ve hızı
15 x(1) = 0;
16 v = 0.5; % Araç hızı (birim başına saniye)
17
18 % Modelin sayısal çözümü
19 for i = 2:N
20 % Araç pozisyonu
21 x(i) = x(i-1) + v * dt;
22
23 % İletişim sinyali (gecikmeli)
24 idx_gecikme = round(i - tau / dt);
25
26 if idx_gecikme <= 0
27 y(i) = 0;
28 else
29 y(i) = k * (x(max(idx_gecikme,1)) - x(max(idx_gecikme-1,1))) / dt;
30 end
31 end
32
33 % Zaman vektörü
34 t = 0:dt:(N-1)*dt;
35
36 % Çizim
37 figure;
38 subplot(2,1,1);

```

```
39 plot(t, x, 'b', 'LineWidth', 2);
40 xlabel('Zaman');
41 ylabel('Araç Pozisyonu');
42 grid on;
43
44 subplot(2,1,2);
45 plot(t, y, 'r', 'LineWidth', 2);
46 xlabel('Zaman');
47 ylabel('İletişim Sinyali');
48 grid on;
```

Listing 3. Şekil (2.3) için MatLab kodu

```

1 % Fonksiyon tanımı
2 f = @(x) x.^2;
3
4 % Entegrasyon aralığı [a, b]
5 a = 0;
6 b = 1;
7
8 % Alt aralıkların sayısı
9 n = 5;
10
11 % Her alt aralığın genişliğini hesapla
12 h = (b - a) / n;
13
14 % Her alt aralığın orta noktasında fonksiyonu değerlendir
15 x_ortanoktaları = a + h/2 : h : b - h/2;
16 y_ortanoktaları = f(x_ortanoktaları);
17
18 % Dikdörtgenlerin alanlarının toplamını hesapla
19 alan_tahmini = h * sum(y_ortanoktaları);
20
21 % Düğüm noktalarını ve karşılık gelen fonksiyon değerlerini göster
22 fprintf('Düğüm Noktaları ve Fonksiyon Değerleri:\n');
23 for i = 1:n
24 fprintf('x_%d = %f, f(x_%d) = %f\n', i, x_ortanoktaları(i), i,
25 y_ortanoktaları(i));
26 end
27
28 % Fonksiyonu ve dikdörtgenleri çizdir (önceki kod ile aynı)
29
30 % Başlık ve etiketler (önceki kod ile aynı)
31
32 % Sonuç (önceki kod ile aynı)
33 fprintf('Tahmini Alan: %f\n', alan_tahmini);
34
35
36 % Fonksiyon tanımı
37 f = @(x) x.^2;
38

```

```

39 % Entegrasyon aralığı [a, b]
40 a = 0;
41 b = 1;
42
43 % Alt aralıkların sayısı
44 n1 = 5;
45 n2 = 10;
46
47 % Her alt aralığın genişliğini hesapla
48 h1 = (b - a) / n1;
49 h2 = (b - a) / n2;
50
51 % Her alt aralığın orta noktasında fonksiyonu değerlendir
52 x_ortanoktaları1 = a + h1/2 : h1 : b - h1/2;
53 y_ortanoktaları1 = f(x_ortanoktaları1);
54
55 x_ortanoktaları2 = a + h2/2 : h2 : b - h2/2;
56 y_ortanoktaları2 = f(x_ortanoktaları2);
57
58 % Dikdörtgenlerin alanlarının toplamını hesapla
59 alan_tahmini1 = h1 * sum(y_ortanoktaları1);
60 alan_tahmini2 = h2 * sum(y_ortanoktaları2);
61
62 % n=5 ve n=10 için fonksiyonu ve dikdörtgenleri yan yana çizdir
63 x_değerleri = linspace(a, b, 100);
64 y_değerleri = f(x_değerleri);
65
66 figure;
67 subplot(1, 2, 1);
68 hold on;
69 plot(x_değerleri, y_değerleri, 'b', 'LineWidth', 2);
70 bar(x_ortanoktaları1, y_ortanoktaları1, h1, 'FaceColor', 'r',
71     'EdgeColor', 'none', 'FaceAlpha', 0.5);
72 hold off;
73 title('n=5');
74 xlabel('t');
75 ylabel('g(t)');
76
77 subplot(1, 2, 2);

```

```

78 hold on;
79 plot(x_değerleri, y_değerleri, 'b', 'LineWidth', 2);
80 bar(x_ortanoktaları2, y_ortanoktaları2, h2, 'FaceColor', 'r',
81     'EdgeColor', 'none', 'FaceAlpha', 0.5);
82 hold off;
83 title('n=10');
84 xlabel('t');
85 ylabel('g(t)');
86
87 % Tahmini alanları göster
88 fprintf('Tahmini Alan (n=5): %f\n', alan_tahmini1);
89 fprintf('Tahmini Alan (n=10): %f\n', alan_tahmini2);

```

Listing 4. Şekil (3.8) için MatLab kodu

```

1  % Fonksiyon tanımı
2  f = @(t) t.^2;
3
4  % Integral aralığı
5  a = 0;
6  b = 1;
7
8  % Adım sayısı
9  n1 = 5;
10 n2 = 10;
11
12 % Adım büyüklüğü
13 h1 = (b - a) / n1;
14 h2 = (b - a) / n2;
15
16 % İlk ve son değerlerin hesaplanması (n=5)
17 integral_approx1 = (f(a) + f(b)) / 2;
18 for i = 1:n1-1
19     x = a + i * h1;
20     integral_approx1 = integral_approx1 + f(x);
21 end
22 integral_approx1 = integral_approx1 * h1;
23
24 % İlk ve son değerlerin hesaplanması (n=10)
25 integral_approx2 = (f(a) + f(b)) / 2;
26 for i = 1:n2-1
27     x = a + i * h2;
28     integral_approx2 = integral_approx2 + f(x);
29 end
30 integral_approx2 = integral_approx2 * h2;
31
32 % Grafik çizimi (n=5 ve n=10)
33 t_vals = linspace(a, b, 100);
34 f_vals = f(t_vals);
35
36 figure;
37 subplot(1, 2, 1);
38 hold on;

```

```

39 plot(t_vals, f_vals, 'b', 'LineWidth', 2);
40 x_pts1 = linspace(a, b, n1+1);
41 y_pts1 = f(x_pts1);
42 bar(x_pts1, y_pts1, h1, 'FaceColor', 'r', 'EdgeColor', 'none',
43 'FaceAlpha', 0.5);
44 hold off;
45 title('n=5');
46 xlabel('t');
47 ylabel('f(t)');
48
49 subplot(1, 2, 2);
50 hold on;
51 plot(t_vals, f_vals, 'b', 'LineWidth', 2);
52 x_pts2 = linspace(a, b, n2+1);
53 y_pts2 = f(x_pts2);
54 bar(x_pts2, y_pts2, h2, 'FaceColor', 'r', 'EdgeColor', 'none',
55 'FaceAlpha', 0.5);
56 hold off;
57 title('n=10');
58 xlabel('t');
59 ylabel('f(t)');
60
61 % İki grafik arasındaki boşluk ayarı
62 set(gcf, 'Position', [100, 100, 1000, 400]);

```

Listing 5. Şekil (3.9) için MatLab kodu

```

1  N = [50, 100];
2  h = 1./N;
3  u = @(t) -exp(-t).*(t-1);
4
5  figure;
6  hold on;
7
8  for k = 1:numel(N)
9  y = zeros(N(k)+1, 1);
10 y(1) = exp(0);
11
12 for i = 2:N(k)+1
13 sum_term = 0;
14 for j = max(i-N(k),1):i-1
15 sum_term = sum_term + y(j);
16 end
17 y(i) = (y(i-1)*(1-h(k)) + y(max(i-N(k)-1,1)) - y(max(i-N(k),1))
18 - h(k)^2*sum_term) / (1+h(k));
19 end
20
21 x = 0:h(k):1;
22 plot(x, y, 'o-')
23 end
24 t = linspace(0, 1, 100);
25 plot(t, u(t), 'r--')
26 legend('N = 50', 'N = 100', 'u(t) = -e^{-t}(t-1)')
27 hold off;

```

Listing 6. Matlab Code for Figure (4.1)

```

1  % Değişkenlerin atanması
2  epsilon_values = [0, 0.1, 0.01];
3  u_prime_0 = -1;
4  u_doubleprime_0 = 16;
5  u_tripleprime_0 = -16;
6
7  % Denklem sistemi ve koşullarının belirlenmesi
8  odefun = @(t, u) u(2); u(3); u(4);
9  -2*u(4) - 3*exp(-2*t+4) + epsilon_values(1)*exp(2*t-4);
10 [t, u] = ode45(odefun, [0, 2],
11 [0, u_prime_0, u_doubleprime_0, u_tripleprime_0]);
12 u1 = u(:, 1);
13
14 % Grafiğin çizilmesi
15 plot(t, u1, 'b');
16 hold on;
17
18 % Denklem sistemi ve koşullarının belirlenmesi
19 odefun = @(t, u) u(2); u(3); u(4);
20 -2*u(4) - 3*exp(-2*t+4) + epsilon_values(2)*exp(2*t-4);
21 [t, u] = ode45(odefun, [0, 2],
22 [0, u_prime_0, u_doubleprime_0, u_tripleprime_0]);
23 u2 = u(:, 1);
24
25 % Grafiğin çizilmesi
26 plot(t, u2, 'ro');
27
28 % Denklem sistemi ve koşullarının belirlenmesi
29 odefun = @(t, u) u(2); u(3); u(4);
30 -2*u(4) - 3*exp(-2*t+4) + epsilon_values(3)*exp(2*t-4);
31 [t, u] = ode45(odefun, [0, 2],
32 [0, u_prime_0, u_doubleprime_0, u_tripleprime_0]);
33 u3 = u(:, 1);
34
35 % Grafiğin çizilmesi
36 plot(t, u3, 'm*');
37
38 % Grafik ayarları

```

```
39 xlabel('t');  
40 ylabel('u(t)');  
41 legend('epsilon=0', 'epsilon=0.1', 'epsilon=0.01');
```

Listing 7. Örnek (6.1) için MatLab kodu

```

1  % Değişkenlerin atanması
2  epsilon_values = [0, 0.1, 0.01];
3  u_prime_0 = -1;
4  u_doubleprime_0 = 16;
5  u_tripleprime_0 = -16;
6
7  % Denklem sistemi ve koşullarının belirlenmesi
8  odefun = @(t, u) [u(2); u(3); u(4);
9  -2*u(4)-3*exp(-2*t+4)+epsilon_values(1)*exp(2*t-4)];
10 [t, u] = ode45(odefun, [0, 2],
11 [0, u_prime_0, u_doubleprime_0, u_tripleprime_0]);
12 u1 = u(:, 1);
13
14 % Grafiğin çizilmesi
15 plot(t, u1, 'b');
16 hold on;
17
18 % Denklem sistemi ve koşullarının belirlenmesi
19 odefun = @(t, u) [u(2); u(3); u(4);
20 -2*u(4)-3*exp(-2*t+4)+epsilon_values(2)*exp(2*t-4)];
21 [t, u] = ode45(odefun, [0, 2],
22 [0, u_prime_0, u_doubleprime_0, u_tripleprime_0]);
23 u2 = u(:, 1);
24
25 % Grafiğin çizilmesi
26 plot(t, u2, 'ro');
27
28 % Denklem sistemi ve koşullarının belirlenmesi
29 odefun = @(t, u) [u(2); u(3); u(4);
30 -2*u(4)-3*exp(-2*t+4)+epsilon_values(3)*exp(2*t-4)];
31 [t, u] = ode45(odefun, [0, 2],
32 [0, u_prime_0, u_doubleprime_0, u_tripleprime_0]);
33 u3 = u(:, 1);
34
35 % Grafiğin çizilmesi
36 plot(t, u3, 'm*');
37
38 % Grafik ayarları

```

```

39 xlabel('t');
40 ylabel('u(t)');
41 legend('epsilon=0', 'epsilon=0.1', 'epsilon=0.01');
42
43 % Kodun geri kalanı, farklı epsilon değerleri için belirtilen
44 t değerlerindeki u(t) değerlerini verir.
45 fprintf 'Epsilon = 0: t=0.1, u(0.1)=%.4f, t=0.2, u(0.2)=%.4f,
46 t=0.3, u(0.3)=%.4f, t=0.4, u(0.4)=%.4f, t=1, u(1)=%.4f,
47 t=1.2, u(1.2)=%.4f, t=1.4, u(1.4)=%.4f, t=1.8, u(1.8)=%.4f\\n', ...
48 interp1(t, u1, 0.1), interp1(t, u1, 0.2), interp1(t, u1, 0.3),
49 interp1(t, u1, 0.4), interp1(t, u1, 1), interp1(t, u1, 1.2),
50 interp1(t, u1, 1.4), interp1(t, u1, 1.8);
51
52
53 fprintf 'Epsilon = 0.1: t=0.1, u(0.1)=%.4f, t=0.2, u(0.2)=%.4f,
54 t=0.3, u(0.3)=%.4f, t=0.4, u(0.4)=%.4f, t=1, u(1)=%.4f,
55 t=1.2, u(1.2)=%.4f, t=1.4, u(1.4)=%.4f, t=1.8,
56 u(1.8)=%.4f\\n', ...
57 interp1(t, u2, 0.1), interp1(t, u2, 0.2), interp1(t, u2, 0.3),
58 interp1(t, u2, 0.4), interp1(t, u2, 1), interp1(t, u2, 1.2),
59 interp1(t, u2, 1.4), interp1(t, u2, 1.8);
60
61 fprintf 'Epsilon = 0.01: t=0.1, u(0.1)=%.4f, t=0.2, u(0.2)=%.4f,
62 t=0.3, u(0.3)=%.4f, t=0.4, u(0.4)=%.4f, t=1, u(1)=%.4f,
63 t=1.2, u(1.2)=%.4f, t=1.4, u(1.4)=%.4f, t=1.8,
64 u(1.8)=%.4f\\n', ...
65 interp1(t, u3, 0.1), interp1(t, u3, 0.2), interp1(t, u3, 0.3),
66 interp1(t, u3, 0.4), interp1(t, u3, 1), interp1(t, u3, 1.2),
67 interp1(t, u3, 1.4), interp1(t, u3, 1.8);

```

Listing 8. Örnek (6.1) için MatLab kodu

Yukarıdaki kod çalıştırıldıktan sonra elde edilen değerler aşağıda verilmiştir:

```
1  Epsilon = 0:
2  t=0.1, u(0.1)=-0.0219,
3  t=0.2, u(0.2)=0.0917,
4  t=0.3, u(0.3)=0.3143,
5  t=0.4, u(0.4)=0.6109,
6  t=1,    u(1)=1.9564,
7  t=1.2, u(1.2)=1.4947,
8  t=1.4, u(1.4)=0.2527,
9  t=1.8, u(1.8)=-5.0878
10
11 Epsilon = 0.1:
12 t=0.1, u(0.1)=-0.0219,
13 t=0.2, u(0.2)=0.0917,
14 t=0.3, u(0.3)=0.3143,
15 t=0.4, u(0.4)=0.6109,
16 t=1,    u(1)=1.9565,
17 t=1.2, u(1.2)=1.4947,
18 t=1.4, u(1.4)=0.2530,
19 t=1.8, u(1.8)=-5.0865
20
21 Epsilon = 0.01:
22 t=0.1, u(0.1)=-0.0219,
23 t=0.2, u(0.2)=0.0917,
24 t=0.3, u(0.3)=0.3143,
25 t=0.4, u(0.4)=0.6109,
26 t=1,    u(1)=1.9566,
27 t=1.2, u(1.2)=1.4947,
28 t=1.4, u(1.4)=0.2527,
29 t=1.8, u(1.8)=-5.0876
```

Listing 9. Örnek (6.1)'un çözümünün aldığı değerler

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Hülya ACAR
Yabancı Dili : İngilizce

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Doktora	Matematik	Düzce Üniversitesi	2024
Y. Lisans	Matematik	İstanbul Üniversitesi	2015
Lisans	Matematik	İstanbul Üniversitesi	2013
Lise	Sayısal	Karacabey Dayı Anadolu Lisesi	2008

TEZDEN KAYNAKLI YAYINLAR

- I. Amiralı, H. Acar, "A novel approach for the stability inequalities for high-order Volterra delay integro-differential equation," *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 401, 2022.
- H. Acar, "Stability analysis for high-order Volterra delay integro-differential equation", *4th International Conference on Pure and Applied Mathematics (ICPAM)*, Van, 2022.
- H. Acar, "Stability inequalities and numerical solution for neutral Volterra delay Integro-differential equation", *Sixth International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM)*, Antalya, 2022.

I. Amirali, H. Acar, "Stability inequalities and numerical solution for neutral Volterra delay integro-differential equation", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2023.

DİĞER AKADEMİK KATKILAR

I. Amirali, G. M. Amiraliyev, H. Acar, "Fitted numerical method for a Volterra delay integro-differential equation", *International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME)*, Ankara, 2021.

I. G. Amiraliyeva, M. E. Durmaz, H. Acar, G. M. Amiraliyev, "First-order numerical method for the singularly perturbed nonlinear Fredholm integro-differential equation with integral boundary condition", *Journal of Physics Conference Series*, 2023.