

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YAPAY ZEKA VE ROBOTİK ANABİLİM DALI

HOPFIELD TİPİ SİNİR AĞLARININ GLOBAL KARARLILIK ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ayşe Nur GÜNEL
Danışman: Doç. Dr. Muzaffer ATEŞ

VAN – 2023

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YAPAY ZEKA VE ROBOTİK ANABİLİM DALI

HOPFIELD TİPİ SİNİR AĞLARININ GLOBAL KARARLILIK ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ayşe Nur GÜNEL

VAN – 2023

KABUL VE ONAY SAYFASI

Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yapay Zeka ve Robotik Anabilim Dalı'nda Doç. Dr. Muzaffer ATEŞ danışmanlığında, Ayşe Nur GÜNEL tarafından sunulan “Hopfield Tipi Sinir Ağlarının Global Kararlılık Analizi” başlıklı bu çalışma Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri gereğince 24 /03 /2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile başarılı bulunmuş ve Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Sabir RÜSTEMLİ

İmza:

Üye: Doç. Dr. Muzaffer ATEŞ

İmza:

Üye: Doç. Dr. Atilla BAYRAM

İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun /.... / 2023 tarih ve sayılı kararı ile onaylanmıştır.

İmza

Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

İmza

Ayşe Nur GÜNEL



ÖZET

HOPFIELD TİPİ SİNİR AĞLARININ GLOBAL KARARLILIK ANALİZİ

GÜNEL, Ayşe Nur

Yüksek Lisans Tezi, Yapay Zeka ve Robotik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Muzaffer ATEŞ

Mart 2023, 71 sayfa

Hopfield tipi yapay sinir ağı ve diğer sinir ağlarının denge noktalarının varlığı, tekliği ve global asimptotik kararlılığı ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Ancak yapay sinir ağları gibi dinamik sistemlerin matematiksel çözümlerini ve kararlılığını incelemek kolay olmamıştır. Sistemin analitik çözümü imkânsıza yakın bir durumken bu sistemlerin davranışları hakkında bilgi edinmek mümkündür. Bu anlamda tasarlanmış en etkili yöntem Lyapunov'un doğrudan veya ikinci metodu kabul edilmektedir. Yöntemin en önemli özelliği sistemlerin diferansiyel denklemlerinin açıkça çözümüne ihtiyaç duymadan uygulanabilir olmasıdır. Bu çalışmada sistemlerin dinamik davranışını daha kolay analiz etmek için kullanılan modelleme probleminden hareketle, Hopfield tipi yapay sinir ağının RC ve Opamp elektrik devresine nasıl uygulanabileceği sunulmuştur. Sistemin ağırlık fonksiyonları fiziksel olarak anlamlandırılmış ve sistemin fiziksel anlamından hareketle Lyapunov veya enerji fonksiyonu inşa edilerek kararlılık analizi incelenmiştir. Sistem yörüngeleri boyunca Lyapunov veya enerji fonksiyonunun türevinin, devre teorisinin güç enerji ilişkisinden hareketle sistemde harcanan gücün negatif değerine eşit olduğu ispatlanmıştır. Elde edilen teorik sonuçlar Hurwitz matrisinin özdeğerleri ile test edilmiştir.

Anahtar kelimeler: Dinamik sistemler, Hopfield, Lyapunov kararlılığı, Nonlineer sistemler, Yapay sinir ağları

ABSTRACT

GLOBAL STABILITY ANALYSIS OF HOPFIELD-TYPE NEURAL NETWORKS

GÜNEL, Ayşe Nur

M.Sc. Thesis, Department of Artificial Intelligence and Robotics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Muzaffer ATEŞ

March 2023, 71 pages

Many studies have been carried out on the existence, uniqueness and global asymptotic stability of the Hopfield type artificial neural network and other neural networks. However, it is not easy to analyse mathematical solutions and stability of dynamic systems such as artificial neural networks. While analytical solution of system is nearly impossible, it is possible to obtain information about behaviors of these systems. The most effective method designed in this sense is accepted as Lyapunov's direct or second method. The most important feature of the method is that it can be applied without the need for an explicit solution of differential equation of systems. In this study, based on the modeling problem which is used to analyse the dynamic behavior of systems more easily, it has been presented how the Hopfield type artificial neural network can be applied to the RC and Opamp electric circuit. The weight functions of the system are physically examined and the stability analysis is examined by constructing the Lyapunov or energy function from the physical meaning of the system. It will be shown that along the system trajectories, the derivative of the Lyapunov or energy function is equal to negative value of power dissipated in the system, based on the power-energy relationship of circuit theory. The obtained theoretical results has been tested with the eigenvalues of the Hurwitz matrix.

Keywords: Artificial neural network, Dynamic system, Hopfield, Lyapunov stability, Nonlinear systems



TEŞEKKÜR

Tez çalışmam süresince her türlü ilgi ve yardımlarını esirgemeyen danışmanım Sayın Doç. Dr. Muzaffer ATEŞ'e ve çalışmamın gelişmesinde katkıları olan değerli tez jüri hocalarım Sayın Prof. Dr. Sabir RÜSTEMLİ'ye ve Sayın Doç. Dr. Atilla BAYRAM'a teşekkürlerimi sunarım.

Deneyimi ve sabrıyla tez sürecimin her aşamasında yanımda olan dostum Dilan BEYAZKÖY'e, manevi desteğini bir an olsun esirgemeyen kıymetli kardeşim Muhammed Enes GÜNEŞ'e, tez çalışmamda destekçi olan çok kıymetli dostlarıma ve çalışma arkadaşlarıma teşekkürü borç bilirim.

Yaşamım boyunca bütün tercihlerimde daima arkamda olan babam Hasip GÜNEL'e, annem Gurbet GÜNEL'e ve canımdan çok sevdiğim kardeşlerim İlknur, Yeşim, Muhammed Emre, Doğan, Muhammed Enes'e minnettarım.

2023

Ayşe Nur GÜNEL



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	v
İÇİNDEKİLER	vii
ÇİZELGELER LİSTESİ	ix
ŞEKİLLER LİSTESİ	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	xiii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ	3
3. YAPAY SİNİR AĞLARI, HOPFIELD VE KARARLILIK	7
3.1 Yapay Sinir Ağları	7
3.2 Yapay Sinir Ağlarının Faydaları	12
3.3 Hopfield Yapay Sinir Ağları	15
3.4 Kararlılık Kavramı ve Denge Noktası.....	17
4. MATERYAL VE YÖNTEM.....	23
4.1 Matris Sınıfları	23
4.2 Vektör Normları	24
4.3 Dinamik YSA Kararlılık Analizi.....	26
4.3.1 Denge Noktasının Kararlılığı	27
4.3.2 Asimptotik Kararlılık	28
4.3.3 Lyapunov Fonksiyonu ve Kararlılık	29
4.3.4 La Salle Değişmezlik Teoremi.....	30
4.4 Hopfield YSA Modeli ve Kararlılık Analizi	31
5. BULGULAR.....	47
5.1 Tek Nöronlu ve Tek Girişli Sinir Ağı'nın Kararlılık Analizi	47
5.2 Tek Nöronlu ve Çok Girişli Sinir Ağı'nın Kararlılık Analizi	48
5.3 Çok Girişli ve Çok Çıkışlı Sinir Ağı'nın Jacobian Özdeğerleri ve Lyapunov Kararlılığı.....	51
6. TARTIŞMA VE SONUÇ	65

KAYNAKLAR	67
-----------------	----



ÇİZELGELER LİSTESİ

Çizelge 3.1 Aktivasyon fonksiyonları.....	11
Çizelge 3.2 Biyolojik sinir ağı ve yapay sinir ağı karşılaştırması.....	11



ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 3.1 Biyolojik sinir sisteminin blok diyagram gösterimi	8
Şekil 3.2 Biyolojik nöron yapısı	9
Şekil 3.3 Doğrusal olmayan yapay bir nöron modeli	10
Şekil 3.4 Sürtünmeli bir bilyeli yatak	17
Şekil 3.5 Çekim havzaları	18
Şekil 3.6 Eşitlik 3.1 için faz diyagramı	19
Şekil 3.7 Eşitlik 3.1 için çözüm eğrileri	20
Şekil 3.8 Eşitlik (3.3) sistemine ait Matlab programı ile elde edilen çözüm eğrileri	21
Şekil 3.9 Eşitlik (3.4) sistemine ait Matlab programı ile elde edilen çözüm eğrileri	22
Şekil 4.1 Kararlı bir cismin hareketi	30
Şekil 4.2 j ile etiketlenmiş bir nöronun toplamsal modeli	33
Şekil 4.3 $N = 4$ nörondan oluşan bir Hopfield ağının yapısal grafiği	35
Şekil 4.4 (a) Standart sigmoidal doğrusal olmayanlığın çizimi, (b) Standart sigmoidal doğrusal olmayanlığın tersinin çizimi.....	37
Şekil 4.5 Doğrusal olmayan kapasitif elemanlı LRC devresi.....	40
Şekil 4.6 Doğrusal olmayan kapasitif elemanlı LRC devresi.....	42
Şekil 4.7 Doğrusal olmayan dirençli elemanlı RC devresi.....	44
Şekil 5.1 Tek nöronlu ve tek girişli nöron modeli	47
Şekil 5.2 Hopfield yapay sinir ağının i.nöronuna ait dinamik devre modeli	49
Şekil 5.3 Hopfield-tipi bir sinir ağının modeli	51
Şekil 5.4 Sistem (5.12)'nin faz portresi.	62
Şekil 5.5 Sistem (5.12)'nin u_1 değişkeninin zamana göre davranış grafiği.....	62
Şekil 5.6 Sistem (5.12)'nin u_2 değişkeninin zamana göre davranış grafiği.....	63
Şekil 5.7 Sistem (5.12)'nin u_3 değişkeninin zamana göre davranış grafiği.....	63



SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamalarıyla aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
C	Kapasitans
$\det(A)$	Matrisin determinanı
$\mathcal{H}$	Lyapunov fonksiyonu
L	Endüktans
R	Direnç
$\mathbb{R}^n$	n boyutlu vektör uzayı
T	Zaman değişkeni
t_0	Başlangıç zamanı
$\dot{V}(x)$	$V(x)$ fonksiyonunun türevi

Kısaltmalar	Açıklama
GAS	Global Asimptotik Kararlılık
PDF	Pozitif Tanımlı Fonksiyon
VLSI	Çok Geniş Ölçekli Tümleşim
YSA	Yapay Sinir Ağları



1. GİRİŞ

Son yıllarda Hopfield tipi yapay sinir ağları, Hücresel sinir ağları ve Cohen-Grossberg sinir ağları, çok fazla çalışılarak çağrışımsal bellek tasarlama ve optimizasyon problemlerini çözmek gibi çeşitli mühendislik uygulamalarında kullanılmıştır (Arik ve Orman, 2005). Bu mühendislik uygulamaları, tasarlanmış olan sinir ağının dinamik davranış analizine dayanmaktadır. Bu sebeple ağın denge durumlarının ve denge koşullarının kararlılık özelliklerinin analizi önem noktasında ilk sırada yer almaktadır. Ağın kararlılık özelliklerini sağlayan sinir sisteminin ağ parametreleri, üzerindeki kısıtlama koşulları ile bir nevi yol haritası olarak kullanılmaktadır. Uygulamanın amacına göre ağ parametreleri üzerindeki kısıtlama koşulları değişkenlik göstermektedir. Bir yapay sinir ağı çağrışımsal bellek işlevi göreceksa eğer birçok kararlı denge noktası olacak şekilde tasarlanır, optimizasyon problemlerinin çözülmesi durumunda tasarlanmış bir yapay sinir ağının ise global asimptotik olarak kararlı olan benzersiz bir denge noktasının olması gerekmektedir. Bu sebeple, bir yapay sinir ağının benzersiz bir denge noktasının global asimptotik kararlılığının sağlanması için koşulların oluşturulması önem taşımaktadır (Arik ve Tavşanlıoğlu, 2005).

Yakın dönemde araştırmacılar Hopfield sinir ağları ve diğer sinir ağları sınıflarının denge noktasının benzersizliği ve global asimptotik kararlılığı için yeterli koşullar sunmuştur. Bu koşullar Forti, Manetti ve Marini 1994; Arik ve Tavşanlıoğlu, 1996; Arik, 2000; Hu ve Wang, 2002’de yaptığı çalışmalarda mevcuttur. Ancak yapay sinir ağları gibi dinamik sistemlerin kararlılığını incelemek kolay olmamıştır. Hemen hemen tüm sistemler doğaları gereği lineer formda olmadığından bu sistemlerin analitik çözümleri mevcut değildir (Vidyasagar, 2002). Araştırmacılar sistemlerin dinamik davranışını analiz etmek için modelleme problemine odaklanarak, sistemlerin enerji kullanımına dayanan yöntemler geliştirmiştir. Bu sayede sistemin işleyişi ile ilgili varsayımlarda bulunmuşlardır (Ateş ve Kadam, 2021). Doğrusal olmayan sistemler için güçlü kararlılık kısıtlamaları getirmenin zorluğu bir asır önce Rus matematikçi A.M. Lyapunov tarafından fark edilmiştir (Yerramalla vd., 2003). Lyapunov’un bu teoremi (ikinci, doğrudan yöntemi) sistemlerin diferansiyel denkleminin açıkça çözümüne gerek kalmadan uygulanabilir olmasıdır. Ancak teoremler Lyapunov fonksiyonunun nasıl

bulunacağıyla ilgili kesin bir bilgi vermemekle beraber deneme ve yanılmaya bağlıdır. Sistemin enerji fonksiyonu Lyapunov fonksiyonu olarak hareket etmektedir (Rao, 1981).

Literatürde enerji fonksiyonunun seçimiyle ilgili net bir tanım bulunmamaktadır. Araştırmacılar enerji fonksiyonlarını oluştururken literatürde yer alan aday Lyapunov fonksiyonları seçmiş veya deneme yanılma yoluyla enerji fonksiyonları için bir fiziksel anlam oluşturmadan Lyapunov fonksiyonlarını inşa etmişlerdir. Fakat bu yöntemler Lyapunov kararlılığını daha karmaşık hale getirmiştir (Haykin, 2008).

Bu çalışmada Hopfield tipi yapay sinir ağlarının kararlılık analizi incelenirken sistemdeki ağırlık fonksiyonları fiziksel olarak anlamlandırılmıştır. Sistem için uygun olan Lyapunov ya da enerji fonksiyonu sistemin fiziksel anlamından hareketle oluşturulmuştur. Basit bir Hopfield Yapay sinir ağı fiziksel olarak bir RC ve Opamp elektrik devresine benzemektedir. Ele alınan sistem Kirchhoff' un akım yasası yöntemi ile oluşturulmuştur. Devre teorisinin güç enerji ilişkisinden hareketle; sistemdeki kondansatörleri depolama elemanı olarak kullanarak sistem için bir enerji fonksiyonu (depolama fonksiyonu) veya Lyapunov fonksiyonu inşa edilmiştir. Böylece sistemler için oluşturulmuş enerji fonksiyonları veya Lyapunov fonksiyonlarının zamana göre türevinin, sistemde harcanan gücün negatif değerine eşit olduğu kanıtlanmıştır. Böylece Hopfield yapay sinir ağının Lyapunov kararlılığı RC ve Opamp elektrik devre sistemiyle basitleştirilmiştir. Elde edilen sonuçlar Hurwitz matrisi ile test edilmiştir.

Hopfield Yapay sinir ağlarının Kararlılık Analizi'ni ele alan bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde Giriş başlığı ile çalışmanın amacına ilişkin bilgilere yer verilmiştir. İkinci bölümde Kaynak Bildirileri başlığında kararlılık analizi ile ilgili yapılmış benzer çalışmalara değinilmiştir. Üçüncü bölümde ise Yapay Sinir Ağları, Hopfield ve Kararlılık başlığı ile bu kavramlar ele alınmıştır. Dördüncü bölümde Materyal ve Yöntem başlığı ile çalışma içerisinde kullanılan matematiksel ifadeler yer verilmiş ve kararlılık kavramı birçok yönü ile ele alınmış olup Hopfield yapay sinir ağı ve RC ve Opamp elektrik devresi arasındaki benzerliklere yer verilmiştir. Beşinci bölümde ise Bulgular başlığı altında Hopfield yapay sinir ağı ile RC ve Opamp elektrik devresi arasındaki benzerlikten yola çıkılarak kararlılık analizi gerçekleştirilmiştir, kararlılık analizi sonuçlarının MATLAB programı ile simülasyonu yapılmıştır. Altıncı bölümde Sonuç başlığı ile çalışmanın genel bir değerlendirilmesi yapılmıştır.

2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

Literatürde Hopfield yapay sinir ağı ve doğrusal olmayan elektrik devrelerinin kararlılığı ile ilgili birçok farklı çalışma yapılmıştır. Bu bölümde konuya ilişkin literatürde yer alan benzer çalışmalara yer verilmiştir.

Rao (1981), “*Ordinary Differential Equations Theory and Applications*” adlı kitap çalışmasında diferansiyel ve integral eşitsizliklerini ele alarak doğrusal ve doğrusal olmayan sistemlerin kararlılığını incelemiştir. İki boyutlu doğrusal otonom sistemlerin denge noktalarını inceleyerek Lyapunovun ikinci yöntemi ile kararlılık konusuna yer vermiştir.

Haddad ve Chellaboina (2008), “*Nonlinear Dynamical Systems and Control*” adlı kitap çalışmasında Lyapunov fonksiyonunun temel fikrinden hareketle yöntemi daha güçlü hale getirerek bu fonksiyonların gerçek uygulamalarda; sistemin enerjisi veya sistemin depolama fonksiyonları şeklindeki ifadelerle tanımlayarak yöntemi daha anlaşılır kılmıştır.

Şamlı (2006), “*Çift Yönlü Çağrışımlı Bellek Yapay Sinir Ağları'nın Kararlılık Analizi*” adlı yüksek lisans tezinde çift yönlü çağrışımlı bellek yapay sinir ağlarının genel bir sınıfının kararlılık ile ilgili özelliklerini ele almıştır. Çalışmada bağlantı matrislerinin simetrik olup olmadığı, aktivasyon fonksiyonlarının monoton, diferansiyellenebilir ve sınırlı olup olmadığını dikkate alınmadan ÇBA'nın denge noktasının varlığı, tekliği ve global asimptotik kararlılığı ile ilgili yeni gerekli koşullar sunmuştur.

Orman (2007), “*Cohen-Grossberg Yapay Sinir Ağlarının Dinamik Davranış Analizi*” adlı yayınlanmamış doktora tezinde gecikme parametresinin sabit olduğu veya zamanla değiştiği Cohen Grossberg yapay sinir ağlarında denge noktasının global kararlılığını sağlayan farklı koşullar elde etmiştir. Kararlılık koşullarının bazıları tanımlanmış yeni Lyapunov fonksiyonlarının Lyapunov yaklaşımı ile test edilerek elde edilmiştir. Bazı kararlılık koşullarıysa yine tanımlanmış Lyapunov fonksiyonlarına Halanay eşitsizliği prensibinin uygulanmasıyla elde etmiştir. Bu koşullar, Cohen Grossberg yapay sinir ağı sisteminin ağ parametreleri arasında gecikme parametresine bağlı olarak veya gecikme parametresinden bağımsız olarak ve bazı diğer parametreler üzerindeki kısıtlamalar esnek tutularak elde edilmiştir.

Demirel (2009), “*Gecikmeli Yapay Sinir Ağlarının Kararlılık Analizi İçin Genel Bir Yaklaşım*” adlı yayınlanmamış doktora tezinde ayrık zamanlı, sürekli-zamanlı ve çoklu zaman gecikmeli yapay sinir ağlarının global robust yakınsama özelliklerinin analizini ele almıştır. Çalışmada Lyapunov fonksiyonu kullanılarak denge noktalarının varlığı, tekliği ve global asimptotik kararlılığıyla ilgili bazı yeterli koşullar sunulmuştur. Sunulan koşullar sistemin ağ parametreleri ile ifade edilerek sonuçların kolaylıkla doğrulanabilmesi sağlanmıştır. Bu çalışma sonucunda gecikmeli yapay sinir ağları ile ilgili bazı yeni robust kararlılık kriterleri belirlenmiştir.

Hagan (2014), “*Neural Network Desing*” adlı kitap çalışmasında temel sinir ağı yapısına ve öğrenme kurallarına değinmiştir. Bu ağların matematiksel analizine ve onların eğitme yöntemlerine yer vermiş, ayrıca bunların doğrusal olmayan regresyon, örüntü tanıma, sinyal işleme, veri madenciliği ve kontrol sistemleri gibi birçok alan için pratik mühendislik problemlerine vurgu yapmıştır. Ayrıca Sinir Ağlarının yeniden canlanmasında etkili olan Hopfield Sinir Ağı’nı geniş bir çerçevede tartışarak Lyapunov kararlılık teorisinin ağ operasyonunu analiz etmiş, ağın bir çağrışımsal bellek olarak davranacak şekilde nasıl tasarlanabileceğini göstermiştir.

Ateş ve Laribi (2018), “*New results on the global asymptotic stability of certain nonlinear RLC circuits*” adlı çalışmalarında Lyapunov yöntemini kullanarak doğrusal olmayan RLC devre sistemlerinin global asimptotik kararlılığını ele almışlardır. Çalışmada her sistem için uygun görülen bir Lyapunov fonksiyonu ya da enerji benzeri fonksiyonu oluşturularak ilgili sisteme doğrudan Lyapunov yöntemi uygulanmıştır. Sonrasında sistem çözümünü GAS hale getiren her sistem için değişmez denge noktası belirlenmiş belirli/ kesin doğrusal olmayan RLC devre sistemlerinin bazı yeni açık global asimptotik kararlılığı koşulları, Lyapunov’un doğrudan yöntemi ile türetilmiştir.

Kadah (2019), “*Doğrusal Olmayan RLC Devrelerinin Kararlılık ve Pasiflik Analizi*” adlı yüksek lisans tezinde sistemlerin kararlılığını ve pasifliğini hem teorik olarak hem de uygulamalı biçimde ele almıştır. Literatürde bulunan çeşitli nonlinear elektrik devreleri ve mekanik sistemleri uygulama olarak seçmiş; bu sistemlerin kararlılığını, global asimptotik kararlılığını ve pasif durumunu Lyapunov’un ikinci metoduna uygulayarak incelemiş ve her incelenen nonlinear sistem için uygun olan bir Lyapunov fonksiyonu elde etmiştir. Literatürde Hopfield yapay sinir ağlarının Lyapunov yöntemi ve kararlılık analizine ilişkin birçok farklı çalışma yapılmıştır. Bu anlamıyla bu

tez çalışmasının da elde edeceği yeni teorik sonuçlar ile literatüre katkı sunması beklenmektedir.





3. YAPAY SİNİR AĞLARI, HOPFIELD VE KARARLILIK

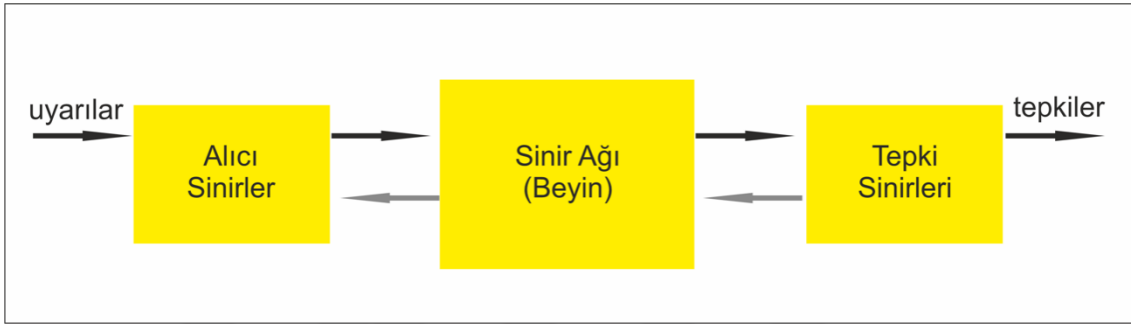
Bu çalışmanın konusu “Hopfield Tipi Yapay Sinir Ağlarının Global Kararlılığı”dır. Çalışmada Yapay Sinir Ağlarına, Hopfield tipi Yapay Sinir Ağı’na ve kararlılık kavramı ve denge noktası ile ilgili bazı temel kavramlara yer verilerek çalışmanın seyri oluşturulmuştur.

3.1 Yapay Sinir Ağları

En genel haliyle bir sinir ağı, beynin belirli bir görevi veya ilgilenilen işlevi yerine getirme şeklini modellemek için tasarlanmış bir makinedir. Ağ genellikle elektronik bileşenler kullanarak gerçekleştirilir veya bir dijital bilgisayardaki yazılımda simüle edilmektedir. Beyin oldukça karmaşık, doğrusal olmayan ve paralel bir bilgi işleme sistemidir. Nöronlar olarak bilinen yapısal bileşenler, belirli hesaplamaları (örüntü/ model tanıma, algılama ve motor kontrol gibi) bugün var olan en hızlı dijital bilgisayardan çok daha hızlı gerçekleştirecek şekilde düzenleme yeteneğine sahiptir. Biyolojik sinir sisteminin blok diyagramı Şekil 3.1’ de gösterildiği gibi üç aşamalı bir sistem olarak görülmektedir. Sistemin merkezinde, sürekli olarak bilgi alan, onu algılayan ve uygun kararlar veren nöral (sinir) ağı ile temsil edilen beyin bulunmaktadır. Şekilde iki ok seti gösterilmiştir. Soldan sağa işaret edenler, bilgi taşıyan sinyallerin sistem üzerinden ileri iletimini göstermektedir. Sağdan sola işaret eden oklar, sistemdeki geri bildirimin varlığını göstermektedir. Reseptörler, insan vücudundan veya dış ortamdan gelen uyarıları, nöral ağı (beyne) bilgi ileten elektriksel darbelerle dönüştürmektedir. Eftörler, sinir ağı tarafından üretilen elektriksel darbeler, sistem çıktıları olarak fark edilebilir tepkilere dönüştürölür (Haykin, 2008).

Yapay sinir ağları, özellikle sinir sistemi ve onun temel birimi olan nöron dahil olmak üzere bilgi işleme için biyolojik süreçler üzerinde modellenmiştir. Sinyaller, hücrelerin içi ve dışı arasındaki potansiyel farklılıklar şeklinde yayılmaktadır. Nöronal bir hücrenin bileşenleri Şekil 3.2’ de gösterilmiştir. Buradan da anlaşılacağı üzere bir sinir hücresi, hücre gövdesi (soma), bağlantılar (sinapslar), giriş (dendrit) ve çıkışlardan meydana gelir. Dendritler, diğer nöronlardan gelen sinyalleri hücre gövdesine veya soma’da, hücre kapasitans, akson tepciğinde toplanan sinyalleri bütünleştirmektedir.

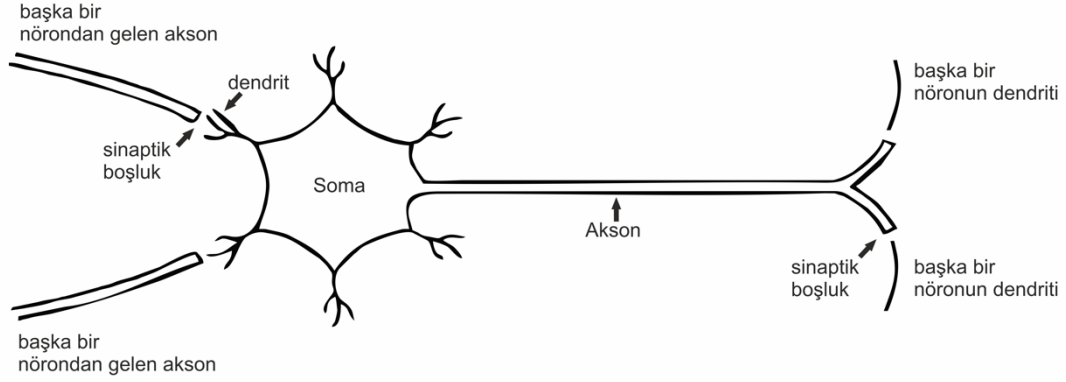
Kombine sinyal belirli bir hücre eşiğini aştığında, bir sinyal, aksiyon potansiyelini, gelen sinyallerin kombinasyonunun doğrusal olmayan bir işlevi haline getirmektedir. Akson, sinapslar yoluyla, sonraki nöronların dentritleriyle bağlanmaktadır. Sinapslar, hücreler arası boşluklar boyunca nörotransmitter kimyasalların deşarjı yoluyla çalışır ve uyarıcı (bir sonraki nöronu ateşleme eğiliminde) veya engelleyici (bir sonraki nöronun ateşlemesini önleme eğiliminde) olabilmektedir (Sarangapani, 2006).



Şekil 3.1 Biyolojik sinir sisteminin blok diyagram gösterimi (Haykin, 2008)

Nöronlar veya sinir hücreleri, sinir sisteminin yapı taşlarını oluşturmaktadır. Diğer hücrelerle benzer organizasyona ve biyokimyasal yapıya sahip olmalarına rağmen farklı özelliklere sahiptirler. Ayırt edici bir şekle, elektrik dürtüleri üretebilen bir dış zara ve benzersiz bir yapıya sahiptirler. Bu biyolojik nöronu: Hücre gövdesi, dentritler ve akson olarak üç bölüme ayırmak mümkündür (Poznyak vd., 2001).

Hücre gövdesi, hücrenin destek fonksiyonlarını ve yapısını sağlarken diğer nöronlardan alınan bilgileri toplayarak işlemektedir. Akson, hücre gövdesinden uzağa uzanır ve bilginin diğer nöronlara gittiği yolu sağlamaktadır. Dendritler, dallanan ve hücre gövdesinin etrafında gür bir ağaç şeklinde bulunan tüp benzeri uzantılardır. Nöronun gelen bilgiyi aldığı ana yolu sağlamaktadır. Aksonun kaynağında, alınan bilgiye yanıt olarak hücre gövdesi tarafından bir sinir uyarısı tetiklenir; uyarı akson boyunca ilerlemektedir. Bir aksonun başka bir nöronun dendritiyle birleşme noktasına sinaps adı verilmektedir. Burada, sinir uyarıları ile serbest bırakılan kimyasal vericiler aracılığıyla nörondan nörona bilgi iletilmektedir (Poznyak vd., 2001). Biyolojik nöron bileşenlerinin şeması Şekil 3.2' de gösterilmektedir.



Şekil 3.2 Biyolojik nöron yapısı (Fausett, 1994)

Bir yapay sinir ağı (YSA), deneysel bilgiyi depolayabilen ve kullanıma hazır hale getirebilen biyolojik sinir ağlarından esinlenmiş, büyük ölçüde paralel dağılmış bir işlemciden oluşmaktadır. Beyinle bazı benzer özellikleri vardır, örneğin; bilgi bir öğrenme süreci yoluyla elde edilir; bu bilgiyi depolamak için sinaptik ağırlıklar olarak adlandırılan internöron bağlantısı kullanılmaktadır. Öğrenme süreci (learning process) için prosedür, bir öğrenme algoritması (learning algorithm) olarak bilinmektedir. Fonksiyonu, önceden belirlenmiş bir hedefe ulaşmak için ağların sinaptik ağırlıklarını değiştirmektir. Ağırlıklar modifikasyonu (weights modification), sinir ağları tasarımı ve uygulaması için geleneksel metodu (traditional method) sağlamaktadır. Nöron, bir sinir ağının çalışması için temel birimdir. Yapay bir nöron şeması Şekil 3.3’ de sunulmuştur. Bu şemada üç temel unsur söz konusudur, bunlar:

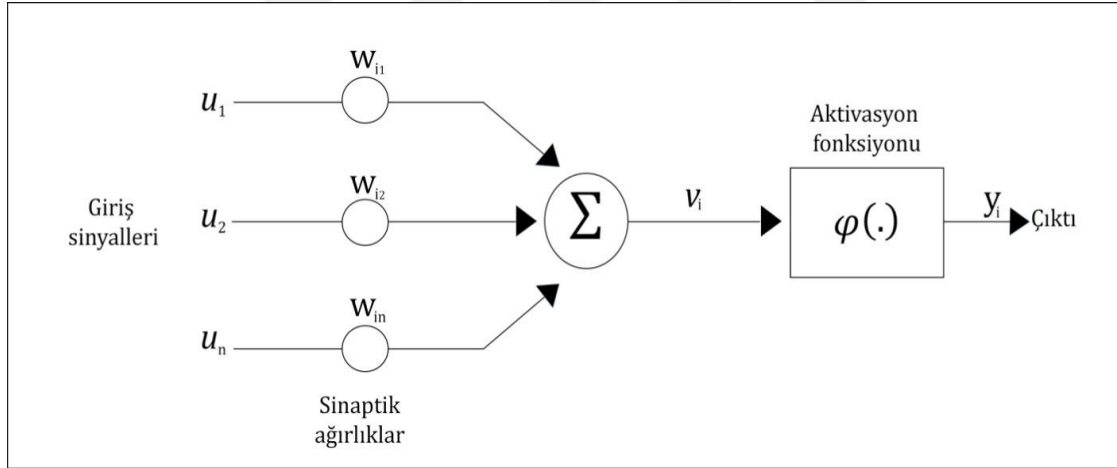
- i. Her bir elemanın kendi ağırlığı ile karakterize edildiği bir sinapsis bağlantısı kümesi,
- ii. İlgili sinapsis ağırlığı ile çarpılan girdi sinyal bileşenlerini toplamak için bir toplayıcı (adder),
- iii. Toplayıcı çıktısını nöronun çıktısına dönüştüren doğrusal olmayan bir aktivasyon fonksiyonudur (Poznyak vd., 2001).

Matematiksel olarak i inci nöron şu şekilde tanımlanmaktadır:

$$v_i = \sum_{j=1}^n w_{ij} u_j$$

$$y_i = \varphi(v_i - p_i)$$

Girdiyi aktivasyon fonksiyonuna azaltmak için harici veya dış bir eşik uygulanmaktadır. Doğrusal olmayan hücre işlevi, aktivasyon işlevi olarak bilinmektedir. Aktivasyon fonksiyonları uygulamalara özel olarak seçilmiştir ancak bazı genel seçenekler Çizelge 3.1’ de gösterilmiştir. Aktivasyon fonksiyonunun amacı, argümanın belirli bir değerinin altında çıktının olmadığı hücrenin doğrusal olmayan davranışını modellemektir. Sigmoid fonksiyonlar, $-\infty$ ve $+\infty$ arasında sınırlı değerler alan monotonik olarak azalmayan fonksiyonların genel bir sınıfını oluşturmaktadır. Eşik değeri veya sapma (bias) p_i değiştiğinde, etkinleştirme işlevlerinin sola veya sağa kaydığı not edilmektedir. Birçok sinir ağı eğitimi için geri yayılım dahil, seçilen aktivasyon fonksiyonunun türevlenebilir olması için $\varphi(\cdot)$ türevine ihtiyaç duyulmaktadır (Sarangapani, 2006).



Şekil 3.3 Doğrusal olmayan yapay bir nöron modeli (Poznyak vd., 2001)

Verilen denklemde, u_j girdinin j 'inci bileşeni, w_{ij} j 'inci giriş bileşeninin i nöronuna bağlayan ağırlığı, v_i toplayıcının çıktısını, p_i eşik değerini, $\varphi(\cdot)$ doğrusal olmayan aktivasyon fonksiyonunu, y_i i nöronunun çıktısını, Σ yapay sinir hücresine gelen net girdiyi hesaplayan toplam fonksiyonu ifade etmektedir.

Nöronun çözmeye çalıştığı problemin bazı özelliklerini karşılamak için belirli bir transfer fonksiyonu seçilmektedir. Çeşitli aktivasyon fonksiyonları Çizelge 3.1’de verilmiştir. Grafiği ‘S’ şeklinde olan sigmoid fonksiyonu, sinir ağlarının yapımında

kullanılan aktivasyon fonksiyonlarının açık ara en yaygını olmaktadır. Doğrusal ve doğrusal olmayan davranış arasında dereceli bir denge sergileyen kesin olarak artan bir işlev olarak tanımlanmaktadır.

Çizelge 3.1 Aktivasyon fonksiyonları (Hagan, 2014)

İsim	Girdi/çıkış ilişkisi	Simge	MATLAB
Hard limit	$a = 0 \quad n < 0$ $a = 1 \quad n \geq 0$		hardlim
Simetrik hard limit	$a = -1 \quad n < 0$ $a = +1 \quad n \geq 0$		hardlims
Doğrusal	$a = n$		purelin
Saturating doğrusal	$a = 0 \quad n < 0$ $0 = n \quad 0 \leq n \leq 1$ $a = 1 \quad n > 1$		satlin
Symmetric saturating doğrusal	$a = -1 \quad n < -1$ $a = n - 1 \leq n \leq 1$ $a = 1 \quad n > 1$		satlins
Log-sigmoid	$a = \frac{1}{1 + e^{-n}}$		logsig
Hiperbolik tanjant sigmoid	$a = \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}}$		tansig
Pozitif doğrusal	$a = 0 \quad n < 0$ $a = n \quad 0 \leq n$		poslin

Çizelge 3.2’ de Yapay Sinir Ağları (YSA) ile biyolojik sinir ağları arasındaki benzerliklere ve karşılaştırmalara yer verilmiştir.

Çizelge 3.2 Biyolojik sinir ağı ve yapay sinir ağı karşılaştırması (Haykin, 2008)

Biyolojik sinir ağı	Yapay sinir ağı
Sinir hücresi (nöron)	İşlemci eleman
Sinaps	Sinirler arası bağlantı ağırlıkları
Dendrit	Toplama fonksiyonu
Hücre gövdesi	Transfer fonksiyonu
Akson	Yapay nöron çıkışı

3.2 Yapay Sinir Ağlarının Faydaları

Bir sinir ağının hesaplama gücü, büyük ölçüde paralel dağıtılmış yapısı, öğrenme ve genelleme yeteneği yoluyla elde edilmiştir. Genelleme, sinir ağının eğitim (öğrenme/ learning) sırasında karşılaşılmayan girdiler için makul çıktılar üretmesini ifade etmektedir. Bu iki bilgi işlem yeteneği, sinir ağlarının zorlu olan karmaşık problemlere, en yakın çözümler bulmasını mümkün kılmaktadır. Pratikte sinir ağları tek başına çalışarak çözüm sağlayamadığından tutarlı bir sistem mühendisliği yaklaşımına entegre edilmeleri gerekmektedir. Özel olarak ilgilenilen karmaşık bir problem, bir dizi nispeten basit göreve ayrıştırılır ve sinir ağlarına, kendi doğal yeteneklerine uyan görevlerin bir alt kümesi atanmaktadır. Bununla birlikte, insan beynini taklit eden bir bilgisayar mimarisini inşa etmeden önce gidecek uzun bir yolun olduğunu kabul etmek önem taşımaktadır (Haykin, 2008).

Sinir ağlarının özellikleri ve yetenekleri şu şekilde özetlenebilmektedir:

Doğrusal Olmama: Yapay bir nöron doğrusal (linear) olabildiği gibi doğrusal olmayabilir (nonlinear). YSA' nın en önemli özelliklerinden biri de hayattaki doğrusal olmayan yapıları da dikkate alabiliyor olmasıdır. YSA' nın temel işlem elemanı olan hücre doğrusal değildir ve bu hücrelerin biraraya gelmesiyle meydana YSA doğrusal olmamakla birlikte bütün ağa yayılmış durumdadır. Karmaşık problemlerin çözümünde kullanılan önemli araçlardan biri haline gelmiştir (Bayır, 2006).

Doğrusal olmayan nöronların ara bağlantılı olmasından oluşan bir sinir ağının kendisi doğrusal olmayandır. Dahası, ağ boyunca dağılmış doğrusal olmaması bakımından özel bir türdür. Doğrusallık, özellikle giriş sinyalinin üretilmesinden sorumlu altta yatan fiziksel mekanizma (örneğin, konuşma sinyali) doğası gereği doğrusal olmaması önemli bir özelliğidir (Haykin, 2008).

Girdi-Çıktı Eşleme/ Haritalama (Mapping): Bir öğretmenle öğrenme veya denetimli öğrenme olarak adlandırılan popüler bir öğrenme paradigması, bir dizi etiketli (labeled) eğitim örneği veya görev örnekleri uygulayarak bir sinir ağının sinaptik ağırlıklarının modifikasyonunu içermektedir. Her örnek, benzersiz bir giriş sinyalinden ve karşılık gelen bir hedef yanıtı oluşmaktadır. Ağ, kümeden rastgele seçilen bir örnekle sunulur ve ağın sinaptik ağırlıkları (serbest parametreler), uygun bir istatistiksel kritere göre giriş sinyali tarafından üretilen ağın istenen yanıtı ile gerçek yanıt arasındaki

farkı en aza indirmek için değiştirilmektedir. Ağ sinaptik ağırlıklarda daha fazla önemli değişikliğin olmadığı sabit bir duruma ulaşana kadar, ağın eğitimi kümedeki birçok örnek için tekrarlanmaktadır. Daha önce uygulanan eğitim örnekleri, eğitim seansı sırasında yeniden uygulanabilir ancak farklı bir sırayla olması gerekmektedir. Böylece ağ, eldeki problem için bir girdi-çıkış eşleşmesi/ haritalaması oluşturarak örneklerden öğrenilmektedir. Böyle bir yaklaşım, modelden bağımsız tahminle ilgilenen bir istatistik dalı olan, parametrik olmayan istatistiksel çıkarım çalışmasını veya biyolojik bir bakış açısıyla tabula rasa learning'i akla getirmektedir (Geman vd., 1992). Burada 'parametrik olmayan' terimi, girdi verileri için istatistiksel bir model üzerinde önceden varsayımlarda bulunulmadığı gerçeğini belirtmek için kullanılmıştır.

Uyarlanabilirlik (Adaptivity): Sinir ağları, sinaptik ağırlıklarını çevreleyen ortamdaki değişikliklere uyarlamak için yerleşik bir yeteneğe sahiptir. Özellikle, belirli bir ortamda çalışmak üzere eğitilmiş bir sinir ağı, çalışma ortamı koşullarındaki küçük değişikliklerle başa çıkmak için kolayca yeniden eğitilebilmektedir. Ayrıca, durağan olmayan bir ortamda yani istatistiklerin zamanla değiştiği bir ortamda çalıştığında, bir sinir ağı sinaptik ağırlıklarını gerçek zamanlı olarak değiştirmek için tasarlanabilmektedir. Bir sinir ağının örüntü/ model sınıflandırması, sinyal işleme ve kontrol uygulamaları için doğal mimarisi/ yapısı, ağın uyarlanabilir yeteneği ile birleştiğinde, onu uyarlanabilir örüntü/ model sınıflandırmasında, uyarlanabilir sinyal işlemede ve uyarlanabilir kontrolde yararlı bir araç haline getirmektedir. Genel bir kural olarak bir sistem ne kadar uyumlu hale getirilirse, sistemin her zaman kararlı kalmasını sağlayarak sistemin durağan olmayan bir ortamda çalışması gerektiğinde performansının muhtemelen o kadar sağlam (robust) olacağı söylenebilir. Ancak, uyarlanabilirliğin her zaman sağlamlığa yol açmadığı vurgulanmalıdır; bunun akside söz konusudur. Örneğin, kısa zaman sabitlerine sahip uyarlanabilir bir sistem hızla değişebilir ve bu nedenle sistem performansında ciddi bir bozulmaya neden olarak sahte bozulmalara yanıt verme eğiliminde olabilmektedir. Uyarlanabilirliğin tüm faydalarından yararlanmak için sistemin temel zaman sabitleri, sistemin sahte bozulmaları göz ardı etmesine yetecek kadar uzun ve yine de ortamdaki anlamlı değişikliklere yanıt verecek kadar kısa olmalıdır; burada açıklanan problem, kararlılık- plastisite ikilemi olarak adlandırılmaktadır (Grossberg, 1988).

Kanıtsal Niteliğinde Yanıt (Evidential response): Örüntü/ pattern sınıflandırması bağlamında, bir sinir ağı, yalnızca hangi belirli örüntünün seçileceği hakkında değil, aynı zamanda verilen karara olan güven hakkında da bilgi sağlamak için tasarlanabilmektedir. Bu bilgi, belirsiz modelleri/ örüntüleri reddetmek ve böylece ağın sınıflandırma performansını geliştirmek için kullanılabilir (Haykin, 2008).

Bağlamsal Bilgi (Contextual information): Bilgi, bir sinir ağının yapısı ve aktivasyon durumu ile temsil edilmektedir. Ağdaki her nöron, potansiyel olarak ağdaki diğer tüm nöronların global aktivitesinden etkilenmektedir. Sonuç olarak, bağlamsal bilgi doğal olarak bir sinir ağı tarafından ele alınmaktadır (Haykin, 2008).

Hata Toleransı: YSA birden fazla hücrenin farklı biçimlerde bağlanmasıyla meydana gelmiş olmasından dolayı paralel dağılmış bir yapıya sahiptir ve ağına sahip olduğu bilgi, ağdaki bütün bağlantılar üzerine dağılmış durumdadır. Bu sebeple, eğitilmiş bir yapay sinir ağının belirli bağlantılarının ve belirli hücrelerinin etkisiz duruma gelmesi, ağına doğru bilgi üretimini önemli boyutta etkilemez. Bundan dolayı geleneksel yöntemlere nazaran hatayı tolere etme yeteneği yüksektir (Ergezer vd., 2003).

Donanım biçiminde uygulanan bir sinir ağı, olumsuz çalışma koşulları altında performansının dereceli düşmesi anlamında, doğası gereği hataya dayanıklı olma veya sağlam hesaplama yeteneğine sahip olma potansiyeline sahip olmaktadır. Örneğin, bir nöron veya bağlantı noktaları hasar görürse, saklanan bir modelin geri çağırılması kalite açısından bozulur. Bununla birlikte, ağda saklanan bilgilerin dağıtılmış doğası nedeniyle, ağına toplam yanıt ciddi şekilde bozulmadan önce hasarın kapsamlı olması gerekmektedir. Bu nedenle, prensipte, bir sinir ağı, feci bir başarısızlıktan ziyade performansta dereceli bir bozulma sergilemektedir. Sağlam hesaplama için bazı deneysel kanıtlar vardır, ancak bu deneysel kanıtlar genellikle kontrolsüz olmaktadır. Sinir ağının aslında hataya dayanıklı olduğundan emin olmak ve ağı eğitmek için kullanılan algoritmanın tasarlanmasında düzeltici önlemlerin alınması gerekmektedir (Kerlirzin ve Valet, 1993).

VLSI Uygulanabilirliği (VLSI Implementability): Bir sinir ağının büyük ölçüde paralel doğası, onu belirli görevlerin hesaplanması için potansiyel olarak hızlı hale getirmektedir. Bu aynı özellik, bir sinir ağını büyük ölçekli tümleşik (VLSI) teknolojisi kullanılarak uygulamaya uygun hale getirmektedir. VLSI' nin belirli bir yararlı özelliği,

gerçekten karmaşık davranışları oldukça hiyerarşik bir biçimde yakalamanın bir yolunu sağlamasıdır (Mahowald ve Mead, 1989).

Analiz ve Tasarımda Tekdüzelik: Temel olarak, sinir ağları bilgi işlemcileri olarak evrensellik taşımaktadır. Bu sinir ağlarının uygulanmasını içeren tüm alanlarda aynı gösterimin kullanıldığı anlamını taşımaktadır. Bu özellik kendini farklı şekillerde gösterir:

- i. Nöronlar, şu ya da bu şekilde, tüm sinir ağlarında ortak olan bir bileşeni (ingredient) temsil etmektedir.
- ii. Bu ortaklık, sinir ağlarının farklı uygulamalarında teorileri ve öğrenme algoritmalarını paylaşmayı mümkün kılmaktadır.
- iii. Modüler ağlar, modüllerin sorunsuz entegrasyonu yoluyla oluşturulabilmektedir.

Nörobiyolojik Analoji: Bir sinir ağının tasarımı, hataya dayanıklı paralel işlemenin sadece fiziksel olarak mümkün olmadığı aynı zamanda hızlı ve güçlü olduğunun canlı kanıtı olan beyne benzetilerek (analogy) motive edilmektedir. Nörobiyologlar, nörobiyolojik fenomenlerin yorumlanması için bir araştırma aracı olarak yapay sinir ağlarına odaklanmışlardır. Öte yandan mühendisler, geleneksel kablolu tasarım tekniklerine dayalı olanlardan daha karmaşık sorunları çözmek için yeni fikirler bulmak için nörobiyolojiye yönelmişlerdir (Haykin, 2008).

3.3 Hopfield Yapay Sinir Ağları

1940'lı yıllardan bu yana yapay sinir ağları sürekli olarak gelişerek ve çözilemeyen problemleri çözüme kavuşturarak ilerlemektedir. Bu sayede sürekli olarak farklı yapay sinir ağı modelleri üretilmektedir. Ağdaki proses elemanlarının yapıları, aktivasyon ve toplama fonksiyonu, ağın topolojisi, ağda kullanılan öğrenme kuralı gibi etkenler farklı ağ modellerinin oluşmasını gerekli kılmaktadır (Öztemel, 2006).

Erken dönemde sinir ağlarına ilginin yeniden canlanmasının çoğu 1980'lerdeki John Hopfield'in çalışmalarına atfedilmektedir. Tanınmış bir Cal Tech fizikçisi olarak Hopfield'in tanınmışlığı ve bilimsel referansları, 1960'ların ortalarındaki hype ile kararmış olan sinir ağı alanına yeni bir güvenilirlik kazandırmıştır. Hopfield, kariyerinin başında ışık ve katılar arasındaki etkileşimi incelemiş, daha sonra biyolojik moleküller arasındaki elektron transfer mekanizmasına odaklanmıştır. Fizik ve matematikteki

akademik çalışmasının biyolojideki deneyimleriyle birleştğinde, sinir ağlarına verdiği katkının önemi görülmüştür. Yapay sinir ağlarının temeli kabul edilen Hopfield Yapay Sinir Ağı Modeli, Hopfield'in 1982 ve 1984' te yazdığı iki makalesiyle önem kazanmıştır. Bu makaledeki fikirlerin bir kısmı McCulloch ve Pitts'in nöron modeli (McCulloch ve Pitts, 1943), Grossberg'in eklemeli modeli (Grossberg, 1967), Kohonen (Kohonen, 1972) ve Anderson (Anderson, 1972) gibi diğer araştırmacıların önceki çalışmalarına dayanmaktadır. Hopfield'in makaleleri çok okunabilirdi, bir dizi önemli fikri bir araya getirerek net bir matematiksel analiz sunmuştur. Buna Lyapunov kararlılık teorisinin uygulanması da dahil olmuştur (Hagan, 2014).

Hopfield zaman içinde karmaşık, doğrusal olmayan dinamik bir sistemin evriminden basit, yapılandırılmış bir davranışın ortaya çıkmasının mümkün olduğunu göstermiştir. Bu tür bir dinamik davranışın olasılığı daha önce başka araştırmacılar tarafından çalışılmış ancak Hopfield'in makalesinde, tekrarlayan sinir ağlarının ortaya çıkan davranışının temelleri ilk kez görünür ve ikna edici bir şekilde bir araya getirilmiştir. Hopfield' in 1982 makalesinin etkileyici hale gelmesindeki sebepler bunlardır (Haykin, 2008).

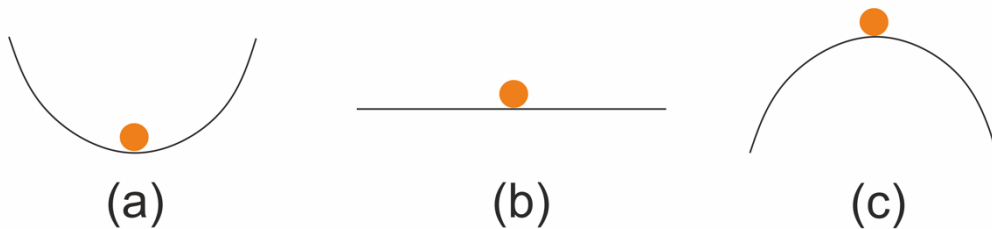
Hopfield, temel kabul edilen bu dinamik yapay sinir ağı modeli için pozitif değer alan Lyapunov fonksiyonu önermiştir (Forti vd., 1992). Hopfield, simetrik bağlantı matrislerinin varlığı koşuluna dayanan bu fonksiyonun zamana bağlı türevinin negatif olduğunu göstermiştir. Sistemin global kararlılığını gösteren bu durum, denge noktalarının tek veya birden çok olduğu konusunda bir yoruma gidememiştir. Bu yorum için aktivasyon fonksiyonlarının özellikleri ve nöronların bağlantı katsayılarının değeri hakkında bilgi sahibi olunmalıdır (Doğan, 2019).

Günümüze kadar geliştirilen iki farklı türde Hopfield ağı mevcut olduğu görülmektedir. Biri kesikli diğeri ise sürekli olarak adlandırılmaktadır. İki ağ türü arasındaki temel farklılık kesikli Hopfield ağında signum fonksiyonu kullanılırken sürekli Hopfield ağında ise sigmoid fonksiyonun kullanılmasıdır. Kesikli Hopfield ağı çağırışimli bellek olarak kullanılmaktadır. Sürekli Hopfield ağı ise optimizasyon problemleri çözümünde daha fazla kullanılmakta, optimizasyon algoritmasıyla çözümünün mümkün olmadığı ya da zor olan gezgin satıcı problemini çözmektedir (Öztemel, 2006).

3.4 Kararlılık Kavramı ve Denge Noktası

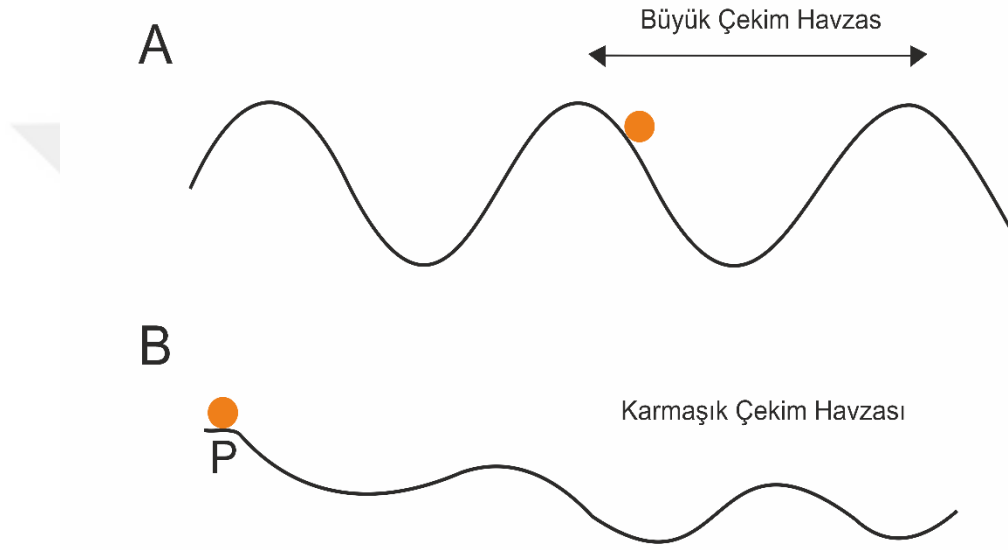
Çalışmanın konusu yapay sinir ağı sisteminin kararlılığıyla ilgili olduğundan bu ve diğer bu anlamdaki çalışmaların anlaşılması için kararlılık kavramının açıklanması önem taşımaktadır. Literatürde ve konuyla ilgili çalışmalarda bahsedilen sistemlerin kararlı durumda nasıl performans gösterdiği bilinmek istenmektedir. En çok, ağı sabit bir çıktıya, yani sabit bir denge noktasına yakınsadığı durumlarla ilgilenilecektir.

Kararlılık kavramının sürtünmeli bir bilyeli yatak örneğini üzerinden ele alınmıştır. Bir yerçekimi alanında sürtünmeli bir bilyeli yatağın hareketi üzerinden Şekil 3.4 (a)' da gösterildiği gibi, bir oluğun dibine (a noktası) bilyeli yatak yerleştirilmiştir. Yatak farklı bir konuma doğru hareket ettirildiğinde oluk içinde ileri geri salınım yapacaktır. Fakat sürtünme sebebiyle salınımın sonunda bilye oluğun dibine yerleşecektir. Sonraki bölümlerde matematiksel olarak ifade edilecek bu konuma asimptotik olarak kararlı nokta denilecektir. Şekil 3.4 (b) 'de düz bir yüzeyin ortasına yerleştirilmiş bir bilye yatağı olduğu varsayılırsa: Yatak farklı bir konuma yerleştirilirse bilye hareket etmeyecektir. Yüzeyin merkezindeki konum asimptotik olarak kararlı değildir, çünkü yatak uzaklaştırılırsa bilye merkeze geri dönmeyecektir. Bununla beraber, bir anlamda sabittir. Çünkü top merkez noktadan daha uzağa yuvarlanmayacaktır. Bu tür bir noktaya, Lyapunov anlamında kararlı denilmektedir. Şekil 3.4 (c) 'de ki üçüncü şekilde bilyeli bir rulman tepenin üstüne yerleştirilse bu bir denge noktası olacaktır. Çünkü dikkatli bir şekilde konumlandırıldığında top tepenin üstünde kalacaktır. Fakat rulman en ufak bir bozuklukta (disturbance) yokuş aşağı yuvarlanacaktır. Bu kararsız bir denge noktası demektir (Hagan, 2014).



Şekil 3.4 Sürtünmeli bir bilyeli yatak

Büyük çekim havzasına sahip sinir ağları tasarlanacak olursa Şekil 3.5 A'daki gibi havzalardan herhangi birine yüksek sürtünme ile dönen bir top (hız sıfır kabul edilir) yerleştirilecek olursa top o havzada kalarak ve sonunda dibe yani kararlı noktaya doğru yolunu bulacaktır. Fakat B durumu daha karmaşık bir durumdur. P noktasına sürtünmeli bir top yerleştirilirse sonunda hangi sabit nokta ile topun duracağı net değildir. Top P'ye en yakın sabit noktada durmayabilir. Belirli bir sabit nokta için çekim havzasının ne kadar büyüklükte olduğunun belirlenmesi pek mümkün olmayacaktır (Hegan, 2014).



Şekil 3.5 Çekim havzaları

Yapay sinir ağlarındaki kararlılık sistemin bir denge konumuna ulaşması ve buradan dışarı çıkmaması durumudur. Bu durumda öncelik sistemin en az bir denge noktasına sahip olması ve denge noktalarının kararlılık durumuna erişmesidir. Sistemlerin kararlılığı dendiğinde genel itibariyle aynı şey ifade edilmektedir. Birçok kararlılık türü mevcuttur. Bunlar; global kararlılık, üstel kararlılık ve tam kararlılık türleridir (Şamlı, 2006).

Nonlineer sistemlerde birden fazla denge noktası olduğu gibi bu denge noktaları kararlı ve kararsız olabilmektedir (Bao ve Lee, 2007). Eşitlik (3.1)'de gösterilen sistem ($k > 0$, sabit sayılar) A noktası sistemin çözümüdür veya denge noktasıdır (Edwards ve Penny, 2008). Şekil 3.6 ve Şekil 3.7 incelendiğinde sisteme ait çözüm eğrilerinin zamana göre davranışlarına bakılarak denge noktasının kararlılığıyla ilgili yorumlar yapılabilmektedir.

$$\dot{x}(t) = -k(x - A), \quad x(0) = x_0, \quad (k > 0) \quad (3.1)$$

Açık çözüm değişkenlerin ayrılması ile denklem çözülerek Eşitlik (3.2) elde edilmiştir.

$$\frac{dx}{dt} = -k(x - A)$$

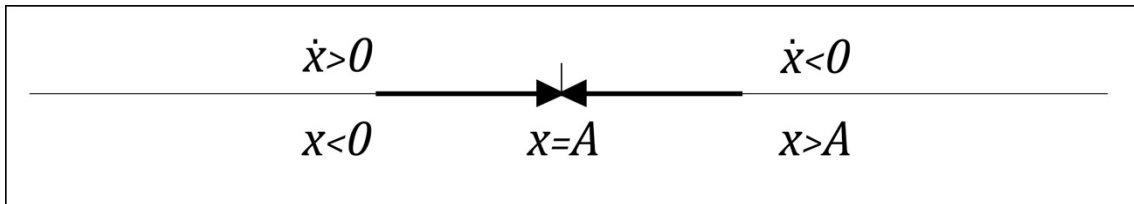
$$\int_0^t \frac{dx}{dt} = \int_0^t -k(x - A) dS$$

$$x(t) = A + (x_0 - A)e^{-kt}$$

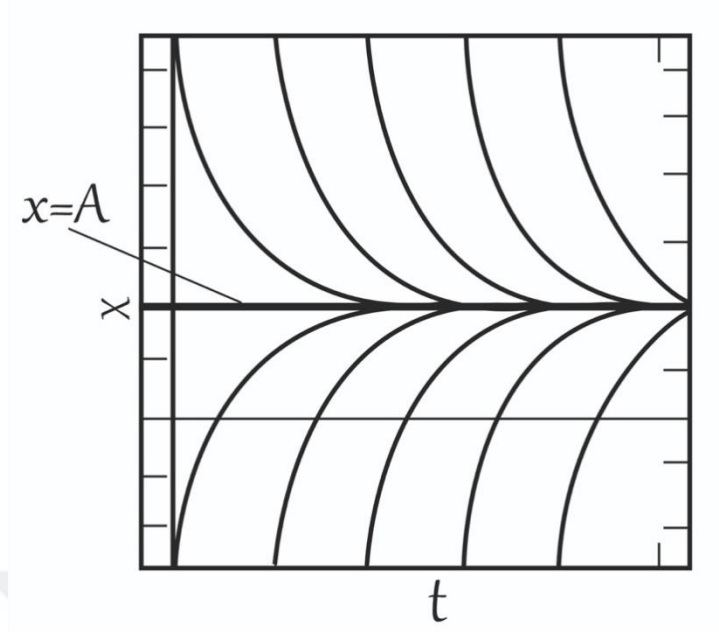
$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = A. \quad (3.2)$$

Eşitlik (3.1)' in sonuçlarının davranışı, Şekil 3.6' daki faz diyagramı ile özetlenmiştir. Faz diyagramı, x' in kendisinin bir fonksiyonu olarak x' teki değişimin yönünü (fazını) göstermektedir. Sağ taraf $f(x) = -k(x - A) = k(A - x)$, $x < A$ ise pozitif, $x > A$ ise negatiftir. Bu gözlem, $x = A$ çizgisinin üzerinde başlayan çözümlerin ve bunun altında başlayan çözümlerin, t arttıkça (oklarla gösterildiği gibi) sınırlayıcı $x(t) \equiv A$ çözümüne yaklaşmasına karşılık gelmektedir (Edwards ve Penny, 2008).

Eşitlik 3.1 için gösterilmiş olan Şekil 3.6'da kullanılan faz diyagramı için kullanılan Eşitlik 3.2' deki sınır, diğer tüm çözüm eğrilerinin, denge çözüm eğrisi $x = A$ ' ya asimptotik olarak $t \rightarrow +\infty$ olarak yaklaştığını göstermektedir.



Şekil 3.6 Eşitlik 3.1 için faz diyagramı

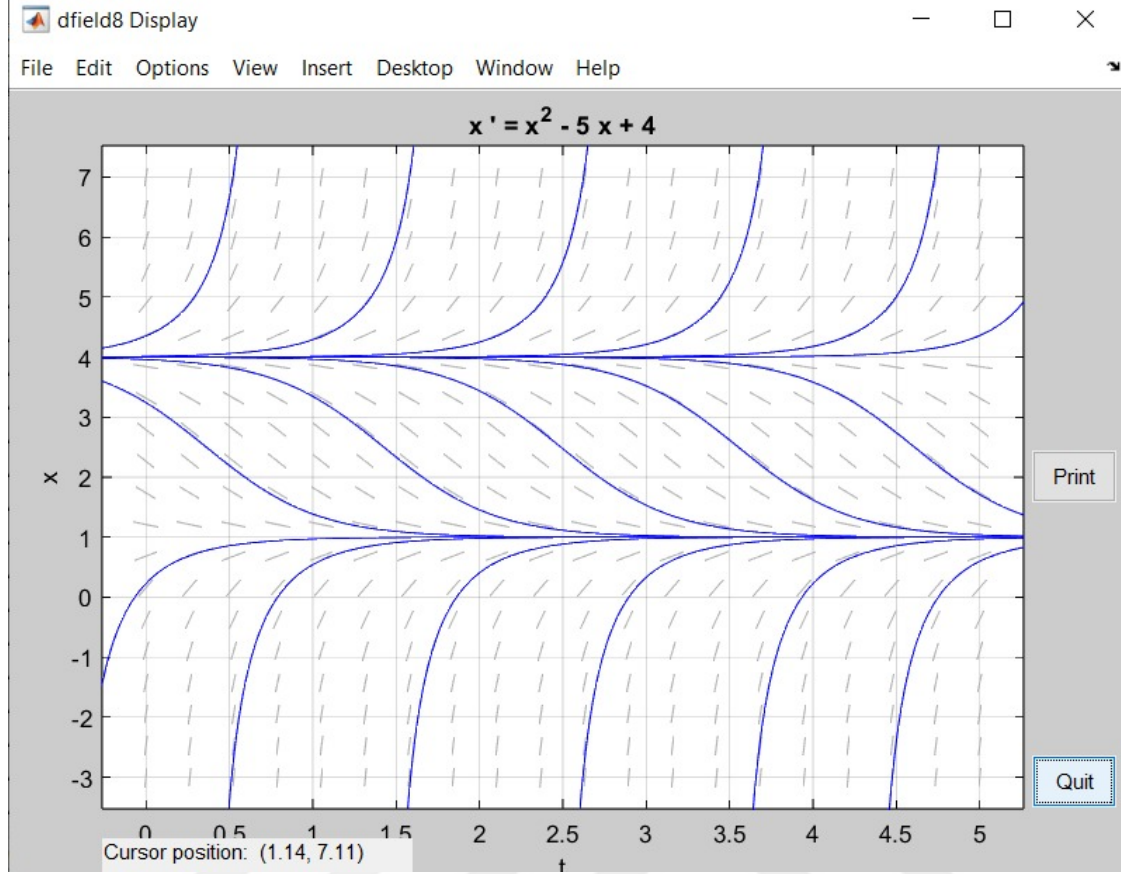


Şekil 3.7 Eşitlik 3.1 için çözüm eğrileri (Edwards ve Penny, 2008)

Örnek 3.1 Matematiksel olarak ifade edilen Eşitlik (3.3) sisteminin denge noktalarının kararlılığı ve çözüm eğrileri Matlab ‘dfield’ bilgisayar programı ile incelenmiştir.

$$\dot{x} = x^2 - 5x + 4 \quad (3.3)$$

Sistemin denge noktaları incelendiğinde, sistemin iki farklı kökü bir diğer ifade ile iki farklı denge noktasının mevcut olduğu görülmüştür. Matlab ‘dfield’ programı yardımıyla matematiksel çözümü yapılmadan elde edilen çözüm eğrileri Şekil 3.8’ de gösterilmiştir. Sisteme ait eğriler zamanla $x = 1$ noktasına yaklaşırken $x = 4$ noktasından uzaklaşmaktadır. Bu sebeple $x = 1$ noktası kararlı iken $x = 4$ noktası kararsız bir denge noktasıdır.

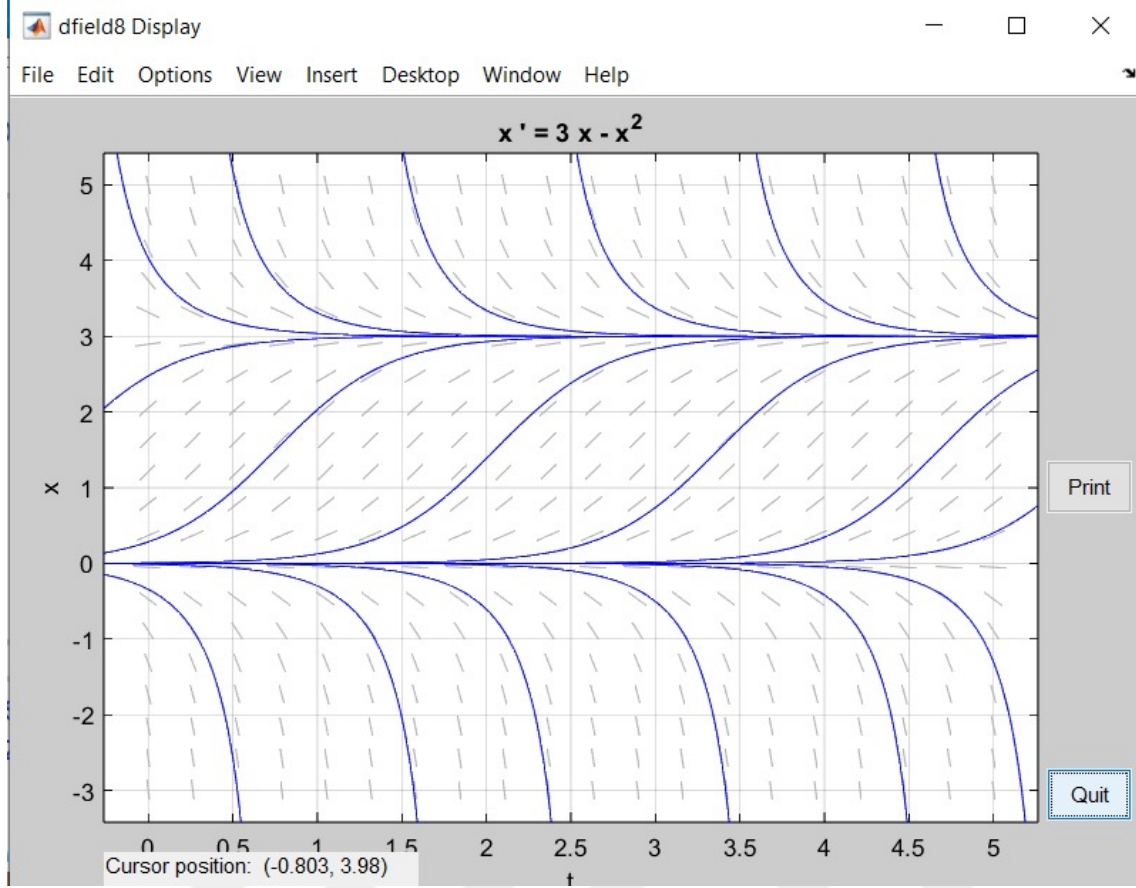


Şekil 3.8 Eşitlik (3.3) sistemine ait Matlab programı ile elde edilen çözüm eğrileri

Örnek 3.2 Matematiksel olarak ifade edilen Eşitlik (3.4) sisteminin denge noktalarının kararlılığı ve çözüm eğrileri Matlab ‘dfield’ bilgisayar programı ile incelenmiştir.

$$\dot{x} = 3x - x^2 \quad (3.4)$$

Sistemin denge noktaları incelendiğinde, sistemin iki farklı kökü bir diğer ifade ile iki farklı denge noktasının mevcut olduğu görülmüştür. Matlab ‘dfield’ programı yardımıyla matematiksel çözümü yapılmadan elde edilen çözüm eğrileri Şekil 3.9’ da gösterilmiştir. Sisteme ait eğriler zamanla $x = 3$ noktasına yaklaşırken $x = 0$ noktasından uzaklaşmaktadır. Bu sebeple $x = 3$ noktası kararlı iken $x = 0$ noktası kararsız bir denge noktasıdır.



Şekil 3.9 Eşitlik (3.4) sistemine ait Matlab programı ile elde edilen çözüm eğrileri

4. MATERYAL VE YÖNTEM

Yapay sinir ağları gibi dinamik sistemlerin kararlılık analizinde denge noktalarının kararlılığı incelenirken ara bağlantı matrisleri üzerindeki kısıtlama koşullarına dayanmaktadır. Bu sebeple YSA' nın kararlılık analizinde matrislerin bazı türleri istenilen kararlılık koşullarının türetilmesinde büyük bir role sahiptir. Genel anlamda YSA' da denge noktasının analizinde matris teorisi önemli bir araç niteliği taşımaktadır.

Bu çalışma kapsamında önem arz eden matris ve vektörlere ait bazı temel kavramlar açıklanarak matris ve vektörlere dair sembolik gösterimlerin anlamları ele alınmıştır.

Matrisler büyük harf ile ifade edilmiştir. Örneğin P . P matrisi için aşağıda ifade edilen gösterimler kullanılmıştır:

P^T : P matrisinin transpozunu göstermektedir. Bir matrisin transpozu matris satırlarının ve sütunlarının yer değiştirilmesi ile oluşturulur. Simetrik bir P matrisi için, $P = P^T$ 'dir. P^{-1} : P matrisinin tersini gösterir. λ_i : Herhangi bir matrisin i . özdeğeridir. $\lambda_i(P)$: P matrisinin i . özdeğerini ifade eder. $\lambda_m(P)$ ve $\lambda_M(P)$: Simetrik bir P matrisinin en küçük ve en büyük değerlerinin ifade etmektedir. $\det(P)$: P matrisinin determinantı olarak ifade edilir. $D = \text{diag}(d_i) > 0$: Pozitif köşegen bir D matrisidir. $|P|$: P matrisinin her bir elemanının mutlak değerinin alınarak oluşturulduğu bir matristir.

Vektörleri küçük harfle ifade edilmiştir. Örneğin x veya y gibi. $x_1, x_2, \dots, x_n$ sayıları x vektörünün bileşenleridir. x vektörü, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ile ifade edilir ve bu ifade sütun vektörünü göstermektedir. x^T , de x ' in evriğidir ve bir satır vektörüdür $x^T = (x_1 x_2 \dots x_n)$ şeklinde tanımlanmıştır.

Gerçek sayıları oluşturan $x_1, x_2, \dots, x_n$ ifadeleri n -boyutlu Öklid uzayı olarak tanımlanır. $\mathbb{R}^n$ ile gösterilirken tüm gerçek sayıları içeren tek boyutlu Öklid uzayı ise $\mathbb{R}$ ile gösterilmiştir.

4.1 Matris Sınıfları

Tanım 4.1.1 (Hurwitz Matrisi ve Hurwitz Kararlılık Teoremi)

$\dot{x} = f(x)$ tanımlı sistemin $x = 0$ denge noktası olsun.

$$P = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Big|_{x=0}$$

Burada, P , $\dot{x} = f(x)$ sisteminin Jacobian'ı olarak isimlendirilir.

$\dot{x} = f(x)$ sisteminin orijini, P 'nin tüm özdeğerlerinin gerçel kısmının negatif ya da sıfır olması halinde kararlıdır. P 'nin tüm özdeğerlerinin reel kısmı negatif ise orijin asimptotik kararlıdır. P 'nin tüm reel özdeğerlerinin reel kısmı negatif olduğunda P matrisine kararlılık matrisi veya “Hurwitz Matrisi” denilmektedir. Eğer P 'nin gerçel kısmı pozitif olan en az bir özdeğeri var ise orijinin kararsız olacağı söylenir.

Örnek:

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{eig}(P) = -3, -3, -3, -1$$

4.2 Vektör Normları

$\mathbb{R}^n$, gerçekte sayı bileşenleri olan tüm n -boyutlu kolon/sütun vektörlerinin kümesini gösterir $\mathbb{R}^n$ ’de bir mesafeyi tanımlamak için, gerçekte sayılar kümesi olan $\mathbb{R}$ üzerindeki mutlak değerin genelleştirilmesi olan norm kavramı kullanılır.

Tanım 4.2.1

$\mathbb{R}^n$ üzerindeki bir vektör normu, aşağıdaki özelliklere sahip $\mathbb{R}^n$ ’den $\mathbb{R}$ ’ye bir $\|\cdot\|$ fonksiyonudur:

- i. $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için,
- ii. $\|x\| = 0$, $\forall x = 0$ ise,
- iii. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ için,
- iv. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

$\mathbb{R}^n$ ' deki vektör sütun/kolon vektörleridir ve bir vektör, bileşenleri cinsinden temsil edildiğinde, devrik (transpose) gösterimi kullanılmıştır. Örneğin, şu vektör

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ şeklinde yazılmıştır.

Tanım 4.2.2

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ vektörü için l_2 ve l_∞ normları şu şekilde tanımlanır:

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \{\sum_{i=1}^n x_i^2\}^{\frac{1}{2}} \text{ ve } \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} x_i.$$

Bu normların her birinin $n = 1$ durumunda mutlak değere düştüğü (reduce) bilinmektedir. l_2 normu, $\mathbf{x}$ vektörünün Öklid normu olarak adlandırılır, çünkü $\mathbf{x}$ ' in $\mathbb{R}^1 \equiv \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ veya $\mathbb{R}^3$ ' de olması durumunda orijinden olağan uzaklık kavramını (usual notion of distance) temsil etmiştir. Örneğin, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^t$ vektörünün l_2 normu, $(0, 0, 0)$ ve (x_1, x_2, x_3) noktalarını birleştiren doğrunun (straight line) uzunluğunu vermiştir.

Örnek: $\mathbf{x} = (-1, 1, -2)^t$ vektörünün l_2 normunun ve l_∞ normunu belirlenirse:

Çözüm: $\mathbb{R}^3$ ' deki : $\mathbf{x} = (-1, 1, -2)^t$ vektörü şu normlara sahip olduğu söylenebilir:

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|-1|, |1|, |-2|\} = 2.$$

Tanım 3.1' deki özelliklerin l_∞ normu için geçerli olduğunu göstermek kolaydır çünkü bunlar mutlak değerler için benzer sonuçlardan gelmektedir. Çok fazla ispat gerektiren özellik Tanım 4.2.1 de yer alan (iv)'dir. Bu durumda eğer;

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t \text{ ve } \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^t \text{ ise,}$$

o zaman;

$$\|x + y\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} x_i + y_i \leq \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i| + |y_i|) \leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| + \max_{1 \leq i \leq n} |y_i| = \|x\|_{\infty} + \|y\|_{\infty}.$$

Tanım 4.2.3

Eğer $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ ve $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^t$, $\mathbb{R}^n$, de bir vektörse, x ve y arasındaki l_2 ve l_{∞} uzaklıkları şununla tanımlanır:

$$\|x - y\|_2 = \{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2\}^{\frac{1}{2}} \text{ ve } \|x - y\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

4.3 Dinamik YSA Kararlılık Analizi

Doğadaki sistemlerin birçoğu doğaları gereği doğrusal değildir. Bu sistemler doğrusal olmayan sistemler olarak tanımlanmaktadır (Vidyasagar, 2002). Doğrusal olmayan sistemler nonlinear denklemler ile ifade edilir. Nonlinear denklemlerin matematiksel çözümlerin linear denklemlerdeki kadar basit olmadığı bilinmektedir.

Denge noktaları etrafında doğrusallaştırılmış doğrusal olmayan sistemler bu noktalarda doğrusal sistem gibi davranarak sistemin yerel kararlılığını göstermiştir. Fakat bu yöntem yetersizlik göstererek yalnızca belli bir bölge için doğru sonuçlar doğurmaktadır (Şamlı, 2006).

Bilgi işleme problemlerinde işlenecek bilginin kararlı durum formunda olması gerekmektedir. Yapay sinir ağlarının dinamik davranışlarında kararlılık göstermesi, YSA' nın bilgi işleme problemlerinde sık kullanılmasını da sağlamıştır. Diğer tarafta, nöronların zamanla değişen durumları incelendiğinde bu davranış hareketine sahip olan yapay sinir ağlarının tasarımı, sistem dinamiği analizinin önemini göstermiştir. Farklı denge noktalarının kararlılık özelliklerini incelemek tasarlanacak sistem için önem taşımaktadır (Semerci, 2007).

Son zamanlarda dinamik yapay sinir ağlarının hızla gelişim göstermesi birçok farklı (optimizasyon ve analogdan dijital dönüşürücü tasarımı) problemin çözümüne uygulanışı önemlidir. Bu uygulamalar için tasarlanmış olan yapay sinir ağı modelinin her harici giriş vektörünün tek ve global asimtotik kararlı bir denge noktasına yakınsaması önemlidir (Şamlı, 2006).

Hopfield 1980' li yıllarda işlemsel kuvvetlendiriciler kullanarak RC devresi ile sigmoid giriş-çıkış karakteristiğinde bir dinamik nöron modeli sunmuş daha sonra bu model ile elektronik bir yapay sinir ağı sistemi kurmuştur. Hopfield bu sistem ile birçok optimizasyon problemini çözmüştür. Hopfield sistemin dinamik davranışını analiz etmek için bir Lyapunov tipi enerji fonksiyonu önermiştir. Daha sonra denge noktalarının varlığı için birtakım gerekli görülen simetri koşulu ve aktivasyon fonksiyonu üstündeki kısıtlamaların artık gerekli olmadığını ispatlamıştır. Bu sayede literatürde Hopfield modelinden hareketle sistem parametreleri üzerinde yapılan farklı varsayımlarla kararlılık analizi çalışmalarına katkıda bulunmuştur (Semerci, 2007).

4.3.1 Denge Noktasının Kararlılığı

Hopfield Yapay Sinir Ağları' nın kararlılık analizinden önce denge noktasının kararlılık koşullarının belirlenmesi amacıyla doğrusal olmayan dinamik sistemlerin kararlılık teorisinden elde edilecek olan bir kısım temel sonuçlar açıklanmaya çalışılmıştır.

Doğrusal olmayan bir dinamik sistemden hareketle:

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Sistem $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ durum vektörünü gösterirken, vektör formu Eşitlik (4.3) şeklinde ifade edilmiştir.

$f(x^*) = 0$ koşulunu sağlayan sabit x^* vektörüne bu dinamik sistemin denge noktası denir. Genel olarak sistemin denge noktası etrafındaki davranış ile ilgilenilmektedir. Denge noktası etrafındaki sistem yörüngelerinin denge noktasından ayrılması, yakınsaması veya denge noktası etrafında osilasyon yapması gibi davranış hareketleri incelenmektedir (Orman, 2007).

$f(x)$ fonksiyonu Eşitlik (4.1)' i sağlıyorsa Lipschitz olarak adlandırılmıştır.

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| \quad (4.1)$$

Eşitlik (4.1)' de gösterilen L , Lipschitz sabiti olarak adlandırılmaktadır. Tüm $x, y \in \mathbb{R}^n$ değerlerini sağlamaktadır.

Sistemlerin dinamik analizlerini daha basit şekilde inceleyebilmek için denge noktası orijinde kabul edilmelidir (Şamlı, 2006). Bu kısımdaki amaç doğrusal olmayan $\dot{x} = f(x)$ sisteminin denge noktasının kararlılık özelliğini incelemektir.

Aşağıda yer alan teoremler denge noktasının kararlılığı ya da asimptotik kararlılığı ile ilgilidir.

4.3.2 Asimptotik Kararlılık

Dinamik bir sistem Σ ; bir zaman kümesi $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}_+$, boş olmayan bir durum uzay kümesi $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, boş olmayan bir giriş değeri uzay kümesi $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ 'den oluşan soyut bir matematiksel model olarak analiz edilir, burada n ve m negatif olmayan tam sayılardır. $\mathcal{X}$ elemanları çağrılan durumlardır, $\mathcal{U}$ elemanları giriş değerleridir. Bu bağlamda, şu formun dinamik bir sistemi ele alınır.

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0, \quad \forall t \geq 0, \quad (4.2)$$

burada $f: \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$, ikinci değişkendeki global Lipschitz koşulunu sağlamaktadır. 0 'ın boş vektör olduğu yerde, eğer $f(t, \bar{x}, 0) = 0$ koşulu sağlanıyorsa, sabit bir $\bar{x} \in \mathcal{X}$ vektörünün Eşitlik (4.2)'nin denge durumu olduğu söylenir. Hız vektörü $\dot{x}(t)$, $\bar{x}$ denge noktasında kaybolur ve bu nedenle $x(t) = \bar{x}$ sabit fonksiyonu Eşitlik (4.2)'nin bir çözümüdür. Eşitlik (4.2)'nin iyi konumlandığı varsayılır, yani $x(0) = x_0 \in \mathcal{X}$ başlangıç koşulu için benzersiz bir $x: [0, \infty) \rightarrow \mathcal{X}$ çözümü olduğu varsayılır ve x , $\mathcal{X}$ üzerindeki normlu topolojiye göre sürekli olarak x_0 'a bağlıdır.

Bir diğer ifade ile Şekil 3.4 a' da gösterildiği gibi bilyenin konumu (sıfır hız ile), bilyalı yatağın sürtünmesi olduğu sürece asimptotik olarak kararlıdır. Sürtünme yoksa konum sadece Lyapunov anlamında kararlıdır (Hagan, 2014).

Bir diğer ifade ile asimptotik kararlılık denge noktasının, komşuluğundaki diğer başka yörüngelerle uzun süreli zaman limitinde çekim etkisine sahip olma durumu olarak da tanımlanabilir. Bir denge noktası, yerel kararlılık veya global asimptotik kararlılık

gösteriyorsa sistemin tek denge noktası olduğu kabul edilir. Bu nedenle birçok denge noktası olan sistemler asimptotik kararlılık şartını sağlamamaktadır (Doğan, 2019).

4.3.3 Lyapunov Fonksiyonu ve Kararlılık

Denge noktasının kararlılık durumunu incelemek ve bu anlamda sonuçlar çıkarmak için pozitif bir enerji fonksiyonunu tanımlanması ve bu fonksiyonun zamana bağlı türevinin incelenerek denge noktasının karakterize edilmesidir (Doğan, 2019).

Otonom, doğrusal olmayan bir sistem gösterilirse:

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0, \quad \forall t \geq 0, \quad (4.3)$$

$V(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ sürekli, türevi alınabilen bir fonksiyondur. $V(x)$ fonksiyonunun türevi ise $\dot{V}(x)$ ile gösterilir.

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} f_i(x_i) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x)$$

Lyapunov enerji fonksiyonu yukarıdaki şekilde ifade edilir.

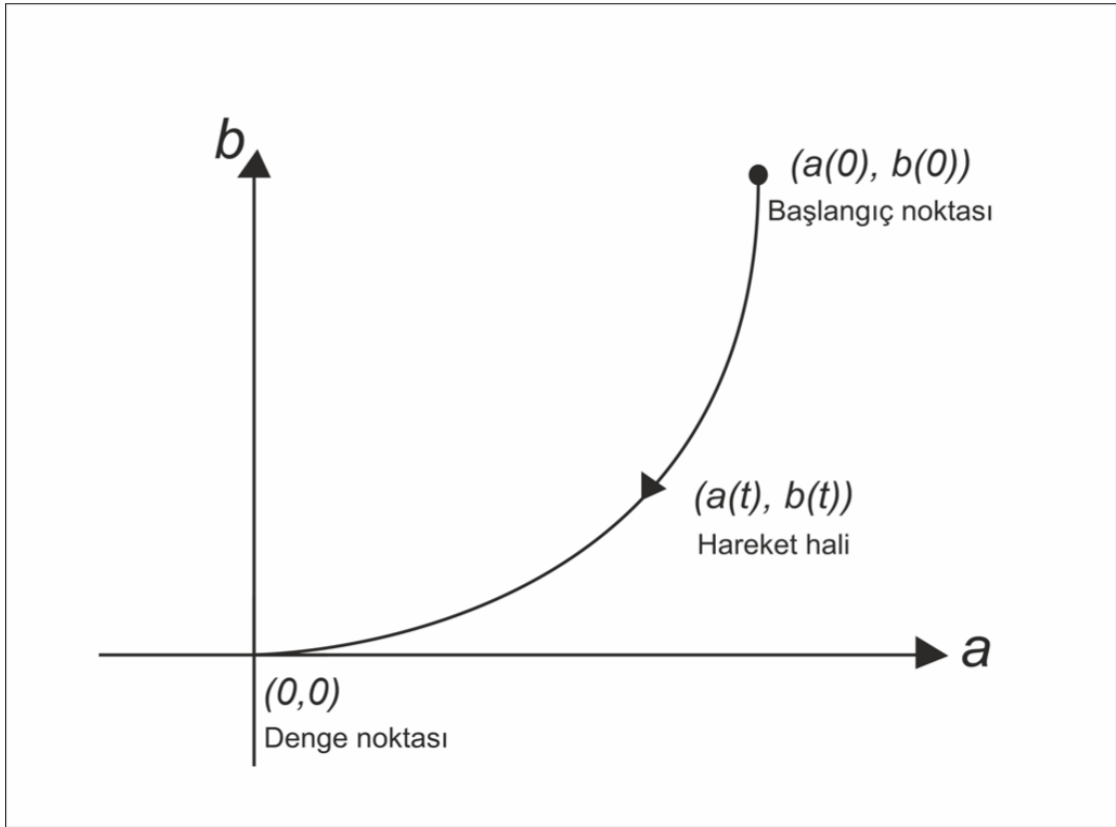
Teorem 4.1

Eğer $\dot{V}(x)$ negatif yarı tanımlı olacak şekilde pozitif tanımlı bir $V(x)$ fonksiyonu bulunabilirse, o zaman Eşitlik (4.3) sistemi için orijin ($x = 0$) için kararlıdır. Eğer $\dot{V}(x)$ negatif tanımlı olacak şekilde pozitif tanımlı bir $V(x)$ fonksiyonu bulunabilirse orijin ($x = 0$) için asimptotik olarak kararlıdır. Ayrıca $\dot{V}(x)$ pozitif ise $x = 0$ 'da kararsızdır. Her durumda V , sistemin bir Lyapunov fonksiyonu olarak adlandırılır.

$V(x)$ ' i genelleştirilen bir enerji fonksiyonudur. Teoremin davranışı: Bir sistemin enerjisi sürekli azalıyorsa ($\dot{V}(x)$ negatif tanımlı), sistem bu durum sonunda bir minimum enerji durumuna yerleşecektir. Lyapunov'un fikri enerji kavramının genelleştirilmesi ile ilgiliydi. Böylece bu teorem, enerjinin ifade edilmesinin zor olduğu veya hiçbir anlamı olmayan sistemlere uygulanabilecektir (Hagan, 2014).

Lyapunov kararlılığı bir araç yakıt örneği ile somutlaştırılırsa; belli bir noktadan hareket ederek yol boyunca ilerleyen ve yakıt takviyesi yapmayan bir araç olduğu varsayılır. Aracın enerjisi, aracın deposundaki mevcut yakıtla eş değer olduğu varsayılır.

Yol boyu araç ilerledikçe aracın yakıtı azalacak ve yakıt tamamen tükendiğinde araç durarak hareketsiz konuma gelecektir. Aracın durduğu bu nokta orijin olarak kabul edilebilir, bu nokta aynı zamanda araç enerjisinin sıfır olduğu noktadır. Temelde Lyapunov fonksiyonu araç yakıt örneğindeki enerji fikriyle benzerdir. Kararlı olan bir cismin hareketiyle enerjisi ilişkisi Şekil 4.1’ de gösterildiği gibi kurulabilir: Cismin enerjisinin sıfır (minimum) olduğu noktanın orijin olmasıdır (Kadah, 2019).



Şekil 4.1 Kararlı bir cismin hareketi (Kadah, 2019)

4.3.4 La Salle Değişmezlik Teoremi

La Salle teoreminde Lyapunov teoreminden farklı olarak, $V(x)$ olarak tanımlanan Lyapunov fonksiyonunun PDF olmasını gerektirmemektedir. PDF fonksiyonlar için radyal sınırsızlığı koşulunu sağlamak daha kolay olmaktadır. Fonksiyonun pozitif tanımlı olmayışı yeterli olmayabilmektedir (Şamlı, 2006).

La Salle değişmezlik teorisinde, Lyapunov’un direkt metodunda gösterilenin aksine, $V(x)$ Lyapunov fonksiyonun türevi $\dot{V}(x)$ ’ in negatif tanımlı olmadığı zamanlarda

da sistemin asimptotik kararlılığını sonuçlandırma fırsatı vermektedir. Fakat bu durumun mümkün olması için ilgili Lyapunov fonksiyonun türevinin negatif yarı tanımlı yani $\dot{V}(x) \leq 0$ olması gerekmektedir. Ve bu ilke sadece otonom sistemlerde geçerlilik göstermektedir (Kadah, 2019).

Teorem 4.2

$\dot{x} = f(x)$ sisteminin denge noktası $x = 0$ olursa $V: D \rightarrow \mathbb{R}$, D içinde ve D komşuluğunda tanımlanmış sürekli ve türevlenebilen bir $\dot{V}(x) \leq 0$ şeklinde pozitif tanımlı bir fonksiyon varsayılacaktır.

$$S = \{x \in D \mid \dot{V}(x) = 0\}$$

olmak üzere, orijin dışında hiçbir çözümü S kümesinde kalmadığı varsayıldığında, bu durumda sistemin orijini asimptotik kararlıdır.

Teorem 4.3

$\dot{x} = f(x)$ sisteminin denge noktası $x = 0$ 'dır ve $V(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için $\dot{V}(x) \leq 0$ olan sürekli türevlenebilir, radyal sınırsız ve pozitif tanımlı bir fonksiyon olsun yani, $\|x\| \rightarrow \infty$ olduğunda $V(x) \rightarrow \infty$ 'dur.

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \dot{V}(x) = 0\}$$

Sistemin orijini dışında hiçbir çözümü S kümesinde kalmıyor olduğu varsayılır ise bu durumda sistemin orijini global asimptotik kararlıdır (GAS).

4.4 Hopfield YSA Modeli ve Kararlılık Analizi

Pratik bakış açısına uygun olarak John Hopfield, yapay sinir ağı modelini bir elektrik devresi olarak sunmuştur. Sürekli zamanlı Hopfield Sinir Ağı, doğrusal olmayan amplifikatörleri bağlayan bir RC ağına dayanan elektrik devresi ile tanımlanabilir (Khalil, 1996).

İşlemsel kuvvetlendirici, kapasiteler ve dirençten oluşan elektronik olarak gerçekleştirilebilen bu model, yapay sinir ağlarının ilk dinamik modeli olarak kabul edilebilmektedir (Hopfield, 1982a).

Yapay sinir ağlarının ilk dinamik modeli kabul edilen Hopfield Yapay sinir ağının diferansiyel denklem tanımı Eşitlik (4.4)'de gösterilmiştir (Hopfield, 1982b).

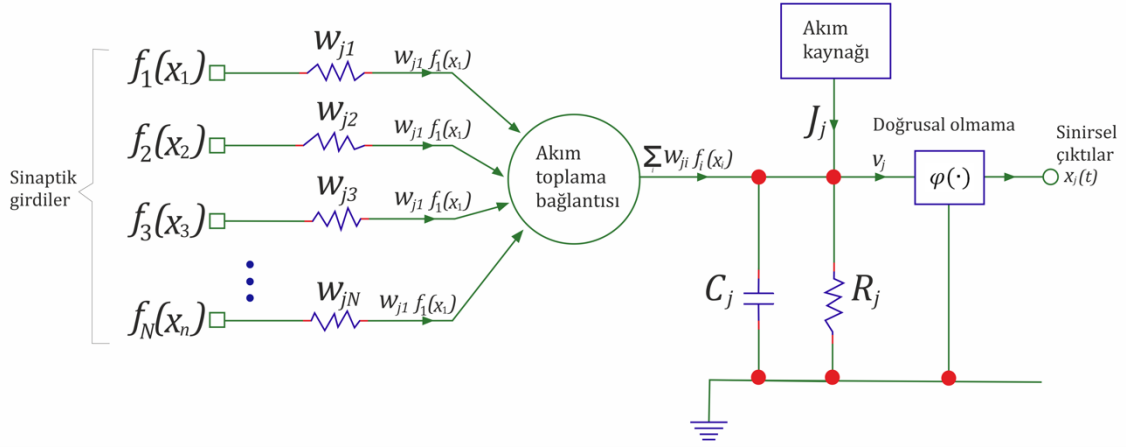
$$\frac{dx_i}{dt} = -c_i x_i(t) + \sum_{k=1}^n a_{ik} f_k(x_k(t)) + u_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.4)$$

Eşitlik (4.4)' de gösterilen ağ modeli Eşitlik (4.5)' de gösterilen vektör-matris formunda da temsil edilebilmektedir.

$$\dot{x} = -Dx + Tg(x) + u \quad (4.5)$$

Diferansiyel denklem sisteminde n nöron sayısını göstermektedir, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ durum değişkeni vektörünü, c_i devre gerçekleşmesindeki direnç ve kapasite değerlerinden oluşan $D = \text{diag}(c_i > 0)$ şeklinde tanımlanan diyagonal matrisini, a_{ik} (k nöronundan i nöronuna sinaptik gücü temsil eden ara bağlantı ağırlığıdır) nöronların ağırlık katsayılarından oluşan bağlantı matrisi, $g(x) = (f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_n(x_n))^T$ sürekli olarak diferansiyellenebilir ve monotonik artan aktivasyon fonksiyonlarını (nöron aktivasyonlarını), $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$ giriş vektörünü, $T = (a_{ik})_{n \times n}$ ağırlık katsayılarını belirten ara bağlantı mantisini, $J = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$ dış giriş vektörünü göstermektedir.

Hopfield Sinir Ağı'nın dinamiğinin incelenmesi için öncesinde bir nöronun toplamsal modeline dayanan Şekil 4.2' de gösterilen bir nöronun gecikmesiz dinamik modeli ele alınmıştır. Fiziksel terimlerle ifade edilen modelde; $w_{j1}, w_{j2}, \dots, w_{jN}$ sinaptik ağırlıkları iletkenlikleri temsil eder ve ilgili girdiler $x_1(t), x_2(t) \dots x_N(t)$ potansiyelleri temsil eder ve N giriş sayısıdır. Bu girişler düşük giriş direnci, toplam akım kazancı (current gain of unity) ve yüksek çıkış direnci gibi karakterize edilen bir akım toplama bağlantısına uygulanır (Haykin, 2008).



Şekil 4.2 j ile etiketlenmiş bir nöronun toplamsal modeli (Haykin, 2008)

Böylece akım-toplama bağlantı yeri, giriş akımları için bir toplama düğümü işlevi görmektedir. Şekil 4.3’ deki nonlineer elemanın (aktivasyon fonksiyonu) girdi düğümüne doğru akan toplam akımı aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\sum_{i=1}^N w_{ji}f_i(x_i) + J_j$$

Burada, birinci (summation) terim sırasıyla $w_{j1}, w_{j2}, \dots, w_{jN}$ sinaptik ağırlıklar (iletkenler) üzerinde etki eden $x_1(t), x_2(t) \dots x_N(t)$ uyarılarından kaynaklanmakta ve ikinci terim, harici olarak uygulanan bir bias’ı temsil eden mevcut J_j kaynağından kaynaklanmaktadır. $v_j(t)$, doğrusal olmayan aktivasyon fonksiyonunu $\varphi(\cdot)$ girişinde indüklenen yerel alanı gösterirken daha sonra doğrusal olmayan elemanın giriş düğümünden akan toplam akımı iki terimin toplamı olarak ifade edilmiştir.

$$\frac{v_j(t)}{R_j} + C_j \frac{dv_j(t)}{dt}$$

Burada birinci terim kaçak direnç R_j 'den ve ikinci terim C_j kaçak kapasitanstan kaynaklanmaktadır. Kirchoff'un akım yasasından, bir elektrik devresinin herhangi bir düğümüne doğru akan toplam akımın sıfır olduğu bilinmektedir. Kirchoff'un mevcut

yasasını Şekil 4.3' deki doğrusal olmayan giriş düğümüne uygulamasıyla aşağıdaki denklem elde edilmektedir (Haykin, 2008).

$$C_j \frac{dv_j(t)}{dt} + \frac{v_j(t)}{R_j} = \sum_{i=1}^N w_{ji} f_i(x_i) + J_j \quad (4.6)$$

Eşitlik (4.6)' nın sol tarafındaki kapasitif terim $\frac{C_j dv_j(t)}{dt}$ bir nöron modeline dinamik bellek eklemenin en basit yoludur. Endüklenen yerel alan $v_j(t)$ göz önüne alındığında, aşağıdaki doğrusal olmayan ilişkiyi kullanarak j nöronunun çıktısı belirlenir (Haykin, 2008).

$$f_j(x_j) = \varphi(v_j(t)) \quad (4.7)$$

Eşitlik (4.6) ile açıklanan RC modeli, genellikle toplamsal model olarak adlandırılmaktadır. Bu terminoloji, modeli w_{ji} ' nin x_i ' ye bağlı olduğu çarpımsal modellerden ayırmak için kullanılmaktadır. Eşitlik (4.6) ile açıklanan toplamsal modelin karakteristik bir özelliği, i nöronuna bitişik olarak j nöronuna uygulanan $x_i(t)$ sinyalinin t zamanının yavaş değişen bir fonksiyonu olmasıdır. Bu şekilde açıklanan model, klasik nörodinamiğin temelini oluşturmaktadır (Haykin, 2008).

Her birinin Eşitlik (4.6) ve Eşitlik (4.7) denklemlerinde açıklanan aynı matematiksel modele sahip olduğu varsayılan N nöronun ara bağlantılarından oluşan tekrarlayan bir ağ varsayalım. Ardından, nöronlar arası yayılma zaman gecikmelerini göz ardı ederek aşağıdaki birleştirilmiş birinci mertebeden diferansiyel denklem sistemi ile ağın dinamikleri tanımlanır:

$$C_j \frac{dv_j(t)}{dt} = -\frac{v_j(t)}{R_j} + \sum_{i=1}^N w_{ji} f_i(x_i) + J_j, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (4.8)$$

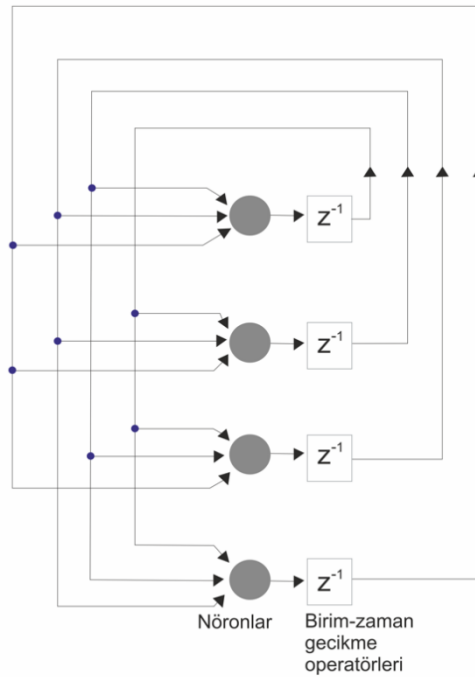
Bu denklem sistemi, Denklem (4.2)' deki durum denklemleriyle aynı matematiksel forma sahiptir. Eşitlik (4.6)' daki terimlerin basit bir yeniden düzenlenmesinden kaynaklanmaktadır. Nöron j ' nin $x_j(t)$ çıktısını indüklenmiş yerel alanı $v_j(t)$ ile ilişkilendiren aktivasyon fonksiyonunun $\varphi(\cdot)$ sürekli bir fonksiyon olduğu

ve dolayısıyla t zamanına göre türevlenebilir olduğu varsayılır. Yaygın olarak kullanılan bir etkinleştirme işlevi, aşağıdaki lojistik işlevdir (Haykin, 2008).

$$\varphi(v_j) = \frac{1}{1+\exp(-v_j)}, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (4.9)$$

Aşağıda Hopfield Sinir Ağı'nın kararlılığı için literatürde kullanılan genel $\mathcal{H}$ enerji fonksiyonunun veya Lyapunov fonksiyonunun nasıl elde edildiği ve kararlılık kriterlerinin nasıl tespit edildiği aşama aşama ifade edilmiştir.

Hopfield Yapay Sinir Ağı, tek katmanlı ve geri dönüşümlü bir ağıdır. Şekil 4.3' de gösterildiği gibi, birçok döngülü geri dönüt sistemi oluşturan, bir dizi nörondan ve karşılık gelen bir birim zaman gecikmelerinden oluşmaktadır. Geri dönüt döngülerinin sayısı, nöronların sayısına eşittir. Temel olarak, her bir nöronun çıktısı, ağıdaki diğer nöronların her birine bir birim zaman gecikme elemanı aracılığıyla geri bildirilmektedir. Tüm proses elemanları ağıın hem girdi hem çıktı elemanıdır. Ağıdaki bağlantı değeri enerji fonksiyonu şeklinde saklanmaktadır (Haykin, 2008).



Şekil 4.3 $N = 4$ nörondan oluşan bir Hopfield ağı yapısı (Haykin, 2008)

Bir diferansiyel denklem sisteminin kararlılığını incelemek için üç varsayım söz konusu olmaktadır:

- i. Sinaptik ağırlıkların matrisi simetriktir. $w_{ij} = w_{ji}$ tüm i ve j değerleri için.
- ii. Her nöronun kendine ait lineer olmayan bir aktivasyon fonksiyonu vardır. Eşitlik 4.4' deki $\varphi_i(\cdot)$ kullanımı gibi.
- iii. Doğrusal olmayan aktivasyon fonksiyonunun tersi vardır.

$$v = \varphi_i^{-1}(x) \quad (4.10)$$

$\varphi_i(v)$ sigmoid fonksiyonunun kendisi aşağıdaki hiperbolik tanjant fonksiyonu tarafından tanımlanır.

$$x = \varphi_i(v) = \tanh\left(\frac{a_i v}{2}\right) = \frac{1 - \exp(-a_i v)}{1 + \exp(-a_i v)} \quad (4.11)$$

Eşitlik (4.11)' deki sigmoid fonksiyonuna dayanarak Eşitlik (4.10)' un ters çıktı-girdi ilişkisi aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$v = \varphi_i^{-1}(x) = -\frac{1}{a_i} \log\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \quad (4.12)$$

Birlik kazançlı (unity gain) bir nöron için ters çıktı-girdi ilişkisinin standart biçimi aşağıdaki denklemle tanımlanır:

$$\varphi^{-1}(x) = -\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \quad (4.13)$$

Eşitlik (4.12) bu standart bağıntı açısından Eşitlik (4.14) gibi yeniden yazılırsa:

$$\varphi_i^{-1}(x) = \frac{1}{a_i} \varphi^{-1}(x) \quad (4.14)$$

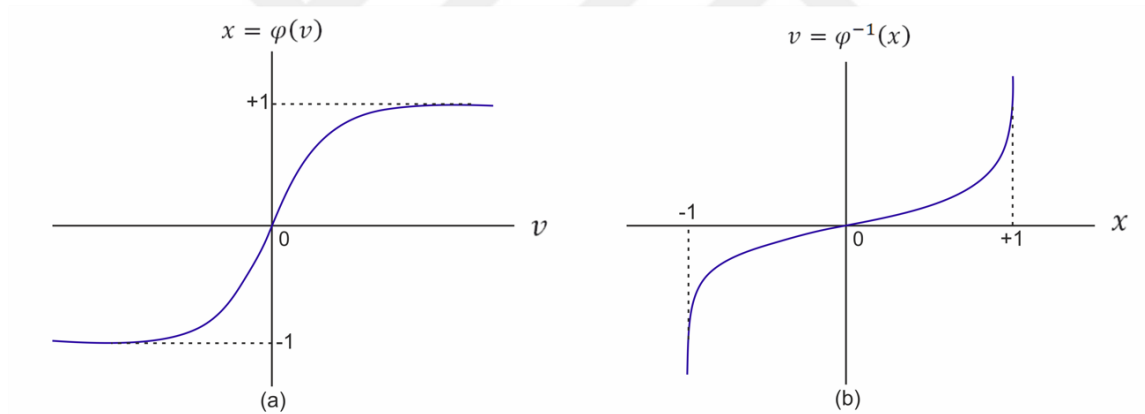
Standart sigmoidal doğrusal olmayanlığın $\varphi(v)$ bir grafiğini Şekil 4.4 (a) gösterirken ters doğrusal olmayanlığın $\varphi_i^{-1}(x)$ ' e karşılık gelen grafiği ise Şekil 4.4 (b)' de

gösterilmektedir. Şekil 4.3’ deki Hopfield Ağının enerji (Lyapunov) işlevi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_{ji} x_i x_j + \sum_{j=1}^N \frac{1}{R_j} \int_0^{x_j} \varphi_i^{-1}(x) dx - \sum_{j=1}^N J_j x_j \quad (4.15)$$

Eşitlik (4.15) ile tanımlanan enerji fonksiyonu $\mathcal{H}$, birçok minimumu olan karmaşık bir manzaraya (landscape) sahip olabilmektedir. Ağın dinamikleri, bu minimumları arayan bir mekanizma tarafından tanımlanır. Minimumları göz önünde bulundurarak, $\mathcal{H}$ ’ yi t zamanına göre farklılaştırarak aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = - \sum_{j=1}^N \left(\sum_{i=1}^N w_{ji} x_i - \frac{v_j}{R_j} + J_j \right) \frac{dx_j}{dt} \quad (4.16)$$



Şekil 4.4 (a) Standart sigmoidal doğrusal olmayanlığın çizimi, (b) Standart sigmoidal doğrusal olmayanlığın tersinin çizimi

Eşitlik (4.16)’ nın sağ tarafında parantez içindeki miktar Eşitlik (4.4) sayesinde $\frac{C_j dv_j(t)}{dt}$ olarak tanımlanır. Böylece Eşitlik (4.16) aşağıdaki gibi sadeleştirilebilir:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = - \sum_{j=1}^N C_j \left(\frac{dv_j}{dt} \right) \frac{dx_j}{dt} \quad (4.17)$$

v_j ’yi x_j cinsinden tanımlayan ters ilişkiyi tanımlayalım, Eşitlik (4.10)’ nun Eşitlik (4.17) içinde kullanılması şu ifadeyi verecektir:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = - \sum_{j=1}^N C_j \left[\frac{d}{dt} \varphi_i^{-1}(x_j) \right] \frac{dx_j}{dt} \quad (4.18)$$

$$= - \sum_{j=1}^N C_j \left(\frac{dx_j}{dt} \right)^2 \left[\frac{d}{dx_j} \varphi_i^{-1}(x_j) \right]$$

Eşitlik (4.5)' deki $\varphi_i^{-1}(x_j)$ ters çıktı- girdi ilişkisinin x_j çıktısının monoton artan bir fonksiyonu olduğu görülmektedir. Bu nedenle köşeli parantez içinde verilen ifade aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\frac{d}{dx_j} \varphi_i^{-1}(x_j) \geq 0 \quad \text{tüm } x_j \text{ için}$$

Ayrıca parantez içindeki ifade şu şartı sağladığından:

$$\left(\frac{dx_j}{dt} \right)^2 \geq 0 \quad \text{tüm } x_j \text{ için.}$$

Bu nedenle, Eşitlik (4.15) tanımlanan $\mathcal{H}$ enerji fonksiyonu için Eşitlik (4.19) şartı sağlanmaktadır:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} \leq 0 \quad (\text{her } t \text{ için}). \quad (4.19)$$

Eşitlik (4.15) tanımından, $\mathcal{H}$ enerji fonksiyonunun sınırlı olduğu bilinmektedir. Buna göre aşağıdaki yorumda bulunulur:

Bir Hopfield ağının (Lyapunov) enerji fonksiyonu $\mathcal{H}$, zamanın monoton olarak azalan bir fonksiyonudur. Buna göre, Hopfield ağı Lyapunov anlamında asimptotik olarak kararludur; çekici sabit noktaları (attractor fixed points), enerji fonksiyonunun minimumlarıdır ve bunun tersi de geçerlidir.

Literatürde enerji fonksiyonunun seçimiyle alakalı net bir tanımının olmayışı, araştırmacıların enerji fonksiyonlarını oluştururken literatürde yer alan aday Lyapunov fonksiyonlarını seçerek veya deneme yanılma yoluyla enerji fonksiyonlarını inşa ettikleri fakat bu yöntemin Lyapunov kararlılığını daha karmaşık hale getirdiği ifade edilmiştir.

Çalışmanın odak noktası yapay sinir ağı gibi dinamik sistemlerin elektrik devrelerine modellenmesindeki pratiklikten faydalanmaktır. Basit bir Hopfield Sinir Ağı fiziksel olarak bir RC ve Opamp elektrik devresine benzemektedir. Hopfield Yapay Sinir Ağı ile RC ve Opamp elektrik devre sistemi arasındaki benzerlikten yola çıkarak Hopfield tipi yapay sinir ağı kararlılık analizi için sistemdeki fonksiyonlar fiziksel olarak anlamlandırılmıştır. Kirchhoff'un mevcut yasası yöntemi sinir ağına uygulanarak bir sistem elde edilmiştir. Sistemdeki kondansatörler birer depolama elemanı olarak kullanılmıştır. Dirençler dağıtıcı elemanlardır ve yükselteçler kendilerinin giri ve çıkışları arasında haritalama/eşleme rolü oynamaktadır. Devre teorisinin güç enerji ilişkisine dayalı olarak sistem için uygun olan Lyapunov ya da enerji fonksiyonu sistemin fiziksel anlamından hareketle oluşturulmuştur. Böylece sistemler için oluşturulmuş tüm enerji fonksiyonları ya da Lyapunov fonksiyonlarının zamana göre türevinin sistemde harcanan gücün, Eşitlik (4.20)' de gösterildiği gibi negatif değere eşit olduğu kanıtlanmıştır.

$$\dot{\mathcal{H}}(t) = -\sum_{i=1}^n R_i I_i^2 = -\sum_{i=1}^n \frac{V_i^2}{R_i} = -\sum_{i=1}^n G_i V_i^2. \quad (4.20)$$

burada $V_i = R_i I_i$ ve $R_i = \frac{1}{G_i}$ dir.

Hopfield Yapay Sinir Ağı kararlılık analizinin anlaşılabilir olması için öncesinde, time invariant yani zamana göre değişmeyen devre elemanlarından oluşmuş nonlinear RLC ve RC devrelerinin kararlılık analizine yer verilmiştir. RLC ve RC devrelerine karşılık gelen ikinci mertebeden doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin veya böyle davranan sistemlerin çözümüne girmeden Lyapunov'un direkt metodu ile denge noktasının (sıfır çözümü) kararlılığının nasıl elde edildiği gösterilmiştir.

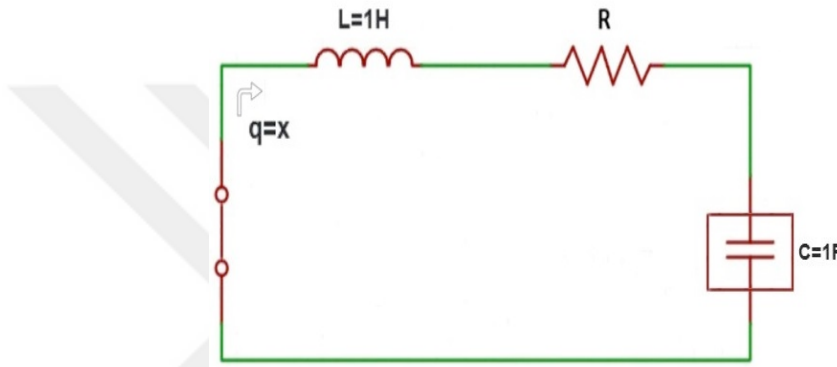
Örneklerden sonra RC ve Opamp devresi ile Hopfield Sinir Ağı arasındaki benzerlikten yola çıkılarak sinir ağının kararlılığı ispat edilmiştir.

Aşağıda yer alan örneklerin genelinde kullanılan formüller şu şekilde ifade edilmiştir: elektrik devresinde yükün türevi akımı $\dot{q} = I$ vermektedir, kondansatör gerilimi $V_c = \frac{q}{C}$, direncin gerilimi $V_R = IR$, kondansatörün enerjisi $E_k = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$, bobinin enerjisi

$E_B = \frac{1}{2}LI^2$, devrenin gücü $P = VI = I^2R$, devrenin enerjisi $w = \int_0^t P dt$, iletkenlik $G = \frac{1}{R} = W$ ve $I_c = C \frac{dV}{dt} = C\dot{V}$ şeklinde gösterilmektedir.

Örnek 4.1

Aşağıda doğrusal olmayan bir kapasitör elemanlı LRC devresi Şekil 4.5' de gösterilmiştir. $\gamma > 0$ ve $\beta > 0$ sabitlerin olduğu $R = \gamma q(t) + \mu q^3(t)$ k Ω ile tanımlanmaktadır. $C = 1F$, L ve R elemanları pozitif skalerdir. $q = x$ elektrik yük akışını göstermektedir.



Şekil 4.5 Doğrusal olmayan kapasitif elemanlı LRC devresi

Kirchhoff gerilim kanunundan hareketle:

$$V_L + V_R + V_C = 0$$

olduğu bilinmektedir. Şekil 4.5' deki dinamik sistem, formun bir diferansiyel denklemini oluşturmaktadır.

$$\ddot{q} + R\dot{q}(t) + \gamma q(t) + \mu q^3(t) = u(t).$$

Yukarıdaki denklem yerine Eşitlik (4.21) kullanılmıştır.

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -R - \gamma x - \mu x^3 \end{cases} \quad (4.21)$$

Sistem (4.21) tartışılmıştır.

Teorem 4.4:

(4.21) sistemi $u(t) = 0$ ve $\gamma > 0$, $\mu > 0$ durumlarında $(0,0)$ denge noktasının komşuluğunda izole edilmiş denge noktasıdır ve kararlıdır.

İspat 4.4:

$(x(t), y(t)), t \geq 0$ için (4.21)' nin bir çözümü olsun. $(0,0)$ noktası Eşitlik (4.21)' nin değişmez denge noktasıdır. Eşitlik (4.21) sisteminin kararlılığı için; güç-enerji ilişkisinden depolama enerji fonksiyonu, $(0,0)$ denge noktasının komşuluğunda şu şekilde oluşturulmaktadır:

$$\mathcal{H}_1(t) = \mathcal{H}_1(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x (\gamma x + \mu x^3) dx$$

$$\mathcal{H}_1(t) = \mathcal{H}_1(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\gamma x^2 + \frac{1}{4}\mu x^4$$

Enerji fonksiyonu (Lyapunov) $(\mathcal{H}_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+)$ şunu karşılar: $\mathcal{H}_1(0) = 0$, $\mathcal{H}_1(x, y) > 0$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+$ ve $\sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$. $\mathcal{H}_1$ radyal olarak sınırsızdır fakat $(0,0)$ komşuluğunda $\mathcal{H}_1$ pozitif tanımlıdır.

Eşitlik (4.21) sisteminin yörüngeleri boyunca $\mathcal{H}_1(t)$ enerji fonksiyonunun (Lyapunov) türevi aşağıdaki ifadeyi vermektedir:

$$\dot{\mathcal{H}}_1(t) = y\dot{y} + \gamma x\dot{x} + \mu(x)^3\dot{x}$$

Eşitlik (4.21)' yi kullanarak aşağıdaki denklem elde edilmektedir:

$$\dot{\mathcal{H}}_1(t) = (-Ry + \gamma q - \mu q^3)y + \gamma qy + \mu q^3y$$

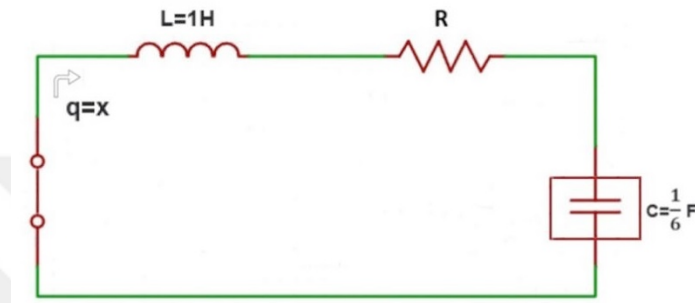
$$\dot{\mathcal{H}}_1(t) = -Ry^2 \tag{4.22}$$

Eşitlik (4.22), Eşitlik (4.2) ile doğrulanır ve Lyapunov fonksiyonu Eşitlik (4.22)' in zamana göre türevinin sistemde harcanan gücün negatif değerine eşit olduğu

kanıtlanmıştır. Dolayısıyla Eşitlik (4.20) sağlanmıştır. Bu durumda sistemin asimptotik olarak kararlı olduğu söylenmektedir.

Örnek 4.2

Aşağıda doğrusal olmayan kapasitör elemanlı bir LRC devresi Şekil 4.6’ da gösterilmiştir. $q = x$ elektrik yük akışını temsil etmektedir. $C = \frac{1}{6}F$, $R = 5\text{ k}\Omega$ ve $L = 1H$ ’dir.



Şekil 4.6 Doğrusal olmayan kapasitif elemanlı LRC devresi

Kirchhoff gerilim kanunundan hareketle:

$$V_L + V_R + V_C = 0$$

olduğu bilinmektedir. Şekil 4.6’ daki dinamik sistem aşağıdaki denklem formunu oluşturmaktadır.

$$\ddot{q} + 5\dot{q} + 6q = 0.$$

Yukarıdaki denklem yerine Eşitlik (4.23) kullanılmıştır.

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -5y - 6x \end{cases} \quad (4.23)$$

Güç-enerji ilişkisinden hareketle depolama enerji fonksiyonu aşağıdaki şekilde oluşturulmuştur:

$$\mathcal{H}_2(t) = \mathcal{H}_2(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + 3x^2$$

Enerji fonksiyonu (Lyapunov) $(\mathcal{H}_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+)$ şunu karşılamaktadır: $\mathcal{H}_2(0) = 0$, $\mathcal{H}_2(x, y) > 0$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+$ ve $\sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$. $\mathcal{H}_2$ radyal olarak sınırsızdır fakat $(0,0)$ komşuluğunda $\mathcal{H}_2$ pozitif tanımlıdır.

Eşitlik (4.22)'nin yörüngeleri boyunca $\mathcal{H}_2(t)$ enerji fonksiyonunun türevi ile aşağıdaki ifade elde edilmiştir:

$$\dot{\mathcal{H}}_2(t) = y\dot{y} + 6yx.$$

Eşitlik (4.23)'yi kullanarak aşağıdaki denklem elde edilmiştir:

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{H}}_2(x) &= y(-5y - 6x) + 6xy \\ \dot{\mathcal{H}}_2(x) &= -5y^2\end{aligned}\tag{4.24}$$

Eşitlik (4.24), Eşitlik (4.2) ile doğrulanır ve Lyapunov fonksiyonu Eşitlik (4.24)'ün zamana göre türevinin sistemde harcanan gücün negatif değerine eşit olduğu kanıtlanmıştır. Dolayısıyla Eşitlik (4.20) sağlanmış olur. Bu durumda sistemin asimptotik olarak kararlı olduğu söylenir. Yani $\mathcal{H}_2$, Eşitlik (4.24)'ün herhangi bir hareketi boyunca azalan bir fonksiyondur.

Sistemin analitik çözümü:

$$\ddot{q} + 5\dot{q} + 6q = 0$$

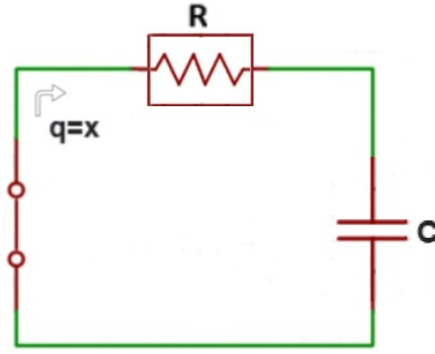
$$q(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-2t}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = 0.$$

Örnek 4.3

Aşağıda doğrusal olmayan bir direnç elemanı Şekil 4.7’de mevcuttur,

$\frac{\alpha}{b} > \frac{g(x)}{x}$ eşitsizliğini sağlayan α ve b sabitlerinin olduğu $R = \alpha x - bg(x)$ k Ω ile tanımlanmaktadır. $C = 1F$ ’dır ve $q = x$ yükün akışını temsil etmektedir.



Şekil 4.7 Doğrusal olmayan dirençli elemanlı RC devresi

Kirchhoff gerilim kanunundan hareketle:

$$V_R + V_C = 0$$

olduğu bilinmektedir. Şekil 4.8’ deki dinamik sistem aşağıdaki denklem formunu oluşturmuştur:

$$R\dot{x} + x = 0.$$

Yukarıdaki denklem yerine Eşitlik (4.25) kullanılmıştır.

$$\dot{x} = -\frac{x}{\alpha x + bg(x)} \quad (4.25)$$

Güç- enerji ilişkisinden hareketle depolama enerji fonksiyonu aşağıdaki şekilde oluşturulmuştur:

$$\mathcal{H}_3(t) = \mathcal{H}_3(x) = \frac{1}{2}x^2$$

Enerji fonksiyonu (Lyapunov) $(\mathcal{H}_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+)$ şunu karşılar: $C > 0$ olduğundan $\mathcal{H}_3$ pozitif tanımlı bir fonksiyondur.

Eşitlik (4.25)' nin yörüngeleri boyunca $\mathcal{H}_3(t)$ enerji fonksiyonunun türevi:

$$\dot{\mathcal{H}}(t) = x\dot{x}.$$

Eşitlik (4.24) kullanarak aşağıdaki ifade elde edilmiştir:

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{H}}_3(t) &= x \left[-\frac{x}{ax + bg(x)} \right] \\ \dot{\mathcal{H}}_3(t) &= - \left[\frac{1}{ax - bg(x)} \right] x^2\end{aligned}\tag{4.26}$$

Eşitlik (4.26), Eşitlik (4.2) ile doğrulanır ve Lyapunov fonksiyonu Eşitlik (4.26)' in zamana göre türevinin sistemde harcanan gücün negatif değerine eşit olduğu kanıtlanmıştır. Dolayısıyla Eşitlik (4.20) sağlanmış olur. Bu durumda sistemin asimptotik olarak kararlı olduğu söylenebilir.

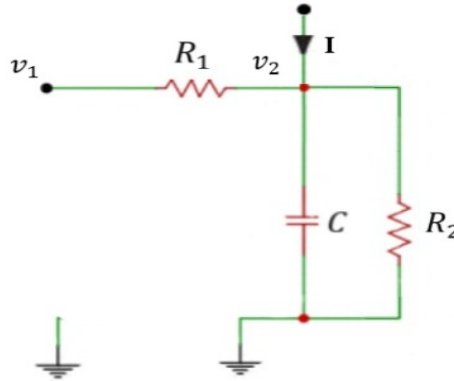


5. BULGULAR

Bu bölümde, zamana göre değişmeyen devre elemanlarından oluşan doğrusal olmayan RLC ve RC devresinin kararlılık analizinden hareketle; bir RC ve Opamp devresi gibi hareket ettiği gösterilen Hopfield tipi yapay sinir ağının kararlılığı Lyapunov'un direkt metodu kullanılarak denge noktasının asimptotik kararlılığı gösterilmiştir. Bu çalışma ile yapay sinir ağları dinamik sistemlerin matematiksel olarak elektrik devrelerine modellenerek kararlılık analizinin yapılabileceği gösterilmiştir. Elde edilen teorik sonuçlar lineer matrisinin özdeğerleri ile test edilerek yorumlanmıştır.

5.1 Tek Nöronlu ve Tek Girişli Sinir Ağının Kararlılık Analizi

Tek nöronlu ve tek girişli sinir ağının modellendiği doğrusal olmayan bir RC devresi Şekil 5.1' de verilmiştir.



Şekil 5.1 Tek nöronlu ve tek girişli nöron modeli

Kirchhoff akım yasasından hareketle:

$$I_{in}(t) + \frac{v_{in}(t) - v_2}{R_1} = \frac{v_2}{R_2} + C \dot{v}_2, \quad (5.1)$$

Eşitlik (5.1) elde edilir. Eşitlik (5.1)'de, dış harici girdiler sıfıra ayarlandığında ($v_{in} = I_{in} = 0$).

$$\dot{v}_2 = -\frac{1}{C} \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right] v_2, \quad (5.2)$$

Eşitlik (5.2) elde edilir. Güç enerji ilişkisine göre yukarıdaki devrenin enerji (depolama) fonksiyonu aşağıdaki şekilde oluşturulur:

$$\mathcal{H}_4(t) = \mathcal{H}_4(v_2) = \frac{1}{2} C v_2^2. \quad (5.3)$$

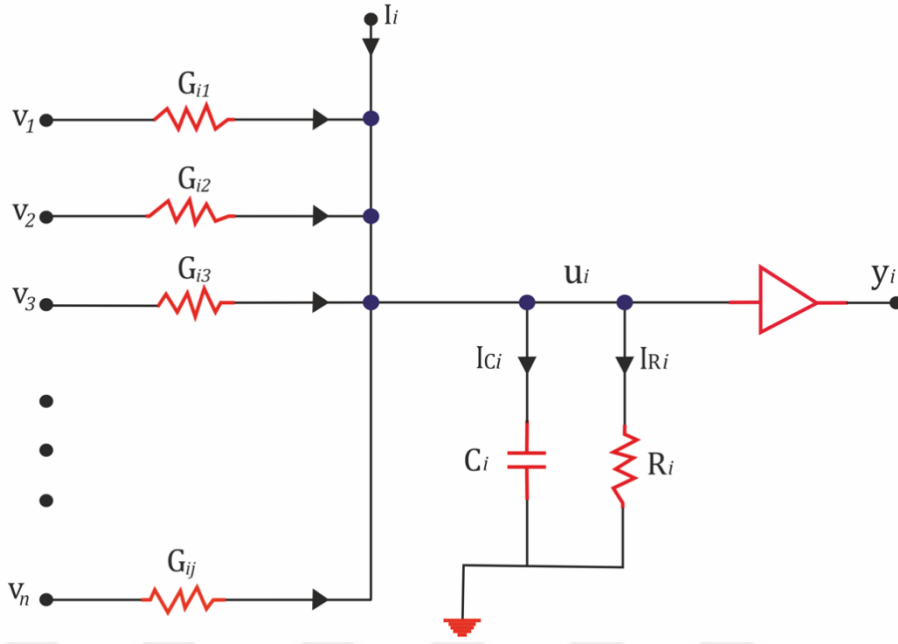
Devrenin C parametresi pozitif bir sayı olduğundan dolayı, $\mathcal{H}_4$ pozitif tanımlı bir fonksiyondur. Eşitlik (5.3)'ün zamana göre türevi alındığında

$$\dot{\mathcal{H}}_4(t) = C v_2 \dot{v}_2 = -C \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right] \frac{v_2^2}{C} = - \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right] v_2^2$$

elde edilir. Eşitlik (5.3), Eşitlik (4.2) ile doğrulanır ve Lyapunov fonksiyonu Eşitlik (5.3)'ün zamana göre türevi sistemde harcanan gücün negatif değerine eşit olduğu da kanıtlanmıştır. Dolayısıyla Eşitlik (4.20) sağlanmış olur. Bu durumda Eşitlik (5.2) üstel ve asimptotik olarak kararlıdır.

5.2 Tek Nöronlu ve Çok Girişli Sinir Ağının Kararlılık Analizi

Şekil 5.2'de yapay bir sinir ağının i 'ninci nöronuna ait devre modeli verilmiştir.



Şekil 5.2 Hopfield yapay sinir ağının i.nöronuna ait dinamik devre modeli (Zurada,1992)

Elektrik devre analiz tekniği ile yukarıdaki devreden Eşitlik (5.4) elde edilir.

$$C_i \dot{u}_i + \frac{u_i}{R_i} = \sum_{j=1}^n G_{ij} (v_j - u_i) + I_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.4)$$

Burada;

- i. $C_i > 0$, C_i kapasitansı gösterir,
- ii. $G_{ij} \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $R_{ij} \left(\frac{1}{G_{ij}} \right)$, direnci ifade eder,
- iii. $R_i > 0$, direnci ifade eder,
- iv. $I_i(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ ve sürekli bir fonksyondur, I_i harici bir girişi belirtir,
- v. $\dot{u}_i = du_i/dt$,
- vi. $y_i = g_i(u_i)$, $g_i: \mathbb{R} \rightarrow (-a, a)$, $a > 0$, g_i sürekli ve türevlenebilir monoton olarak artan bir fonksiyondur, yani $u_i' > u_i''$ ise $g_i(u_i') > g_i(u_i'')$ 'dir,
- vii. $u_i g_i(u_i) > 0$, her $u_i \neq 0$ ve $g_i(0) = 0$,
- viii. $g_i(\cdot)$ nonlinear bir fonksiyon olup amplifikatör çıkışı anlamına gelmektedir,
- ix. $u^* = [u_1^*, \dots, u_n^*]^T \in \mathbb{R}^n$, sistem (5.4) için bir denge noktası olarak tanımlanmaktadır.

Eşitlik (5.4)'ün denge çözümleri; $\dot{u}_i \equiv 0, (i = 1, \dots, n)$ olduğu durum sistemin dinlenme pozisyonlarını ifade etmektedir. Sistem (5.4)'ün dış/harici girdilerini ($I_i = v_j = 0, j = 1, \dots, 3$) sıfıra ayarlayarak aşağıdaki denklem elde edilir.

$$C_i \dot{u}_i + \frac{u_i}{R_i} = - \sum_{j=1}^{n=3} G_{ij} u_i.$$

Burada;

$$C_1 \dot{u}_1 + \frac{1}{R_1} u_1 = -G_{11} u_1 - G_{12} u_1 - G_{13} u_1,$$

$$C_1 \dot{u}_1 + G_1 u_1 = -G_{11} u_1 - G_{12} u_1 - G_{13} u_1,$$

$$\dot{u}_1 = -\frac{1}{c_1} [G_1 + G_{11} + G_{12} + G_{13}] u_1 \quad (5.5)$$

elde edilir. Güç enerji ilişkisine göre aşağıdaki enerji fonksiyonu oluşturulur.

$$\mathcal{H}_5(t) = \mathcal{H}(u_1) = \frac{1}{2} C u_1^2 \quad (5.6)$$

$$\mathcal{H}_5(t) = \mathcal{H}(u_1) \geq \frac{1}{4} C u_1^2 \quad (5.7)$$

Enerji fonksiyonu (Lyapunov) ($\mathcal{H}_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$) karşılamaktadır. $C > 0$ olduğundan $\mathcal{H}_5$ pozitif tanımlı bir fonksiyondur.

Eşitlik (5.6)'ün zamana göre türevi alındığında

$$\dot{\mathcal{H}}_5 = C_1 u_1 \dot{u}_1 = C_1 u_1 \frac{-1}{c_1} u_1 [G_1 + G_{11} + G_{12}]$$

$$\dot{\mathcal{H}}_5 = -[G_1 + G_{11} + G_{12}] u_1^2 \quad (5.8)$$

elde edilir. Eşitlik (5.7) ve Eşitlik (5.8) kullanılarak:

$$\dot{\mathcal{H}}_5 \leq -\frac{4}{C_1} [G_1 + G_{11} + G_{12} + G_{13}] \mathcal{H}_5 = -\lambda \mathcal{H}_5$$

burada

$$\lambda = \frac{4}{C} [G_1 + G_{11} + G_{12} + G_{13}],$$

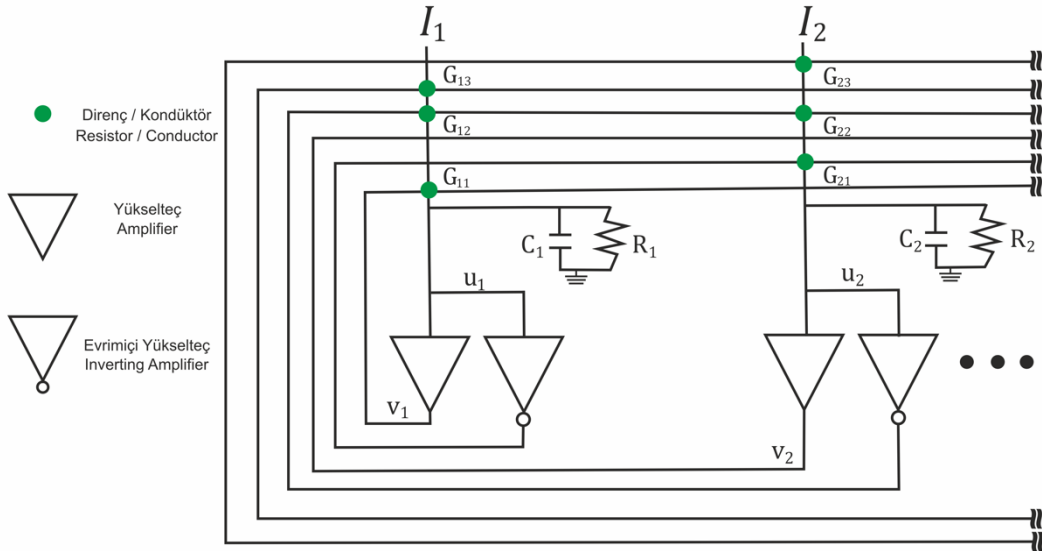
olup, ve

$$\mathcal{H}_5 \leq e^{-\lambda t},$$

olur. Sonuç olarak, Eşitlik (5.5)' in çözümü global üstel olarak karardır.

5.3 Çok Girişli ve Çok Çıkışlı Sinir Ağı'nın Jacobian Özdeğerleri ve Lyapunov Kararlılığı

Şekil 5.3'te Hopfield tipi dinamik yapay bir sinir ağının devresi verilmiştir.



Şekil 5.3 Hopfield-tipi bir sinir ağının modeli (Michel vd., 1989)

Yukarıdaki devreden aşağıdaki sistem elde edilir:

$$\dot{u}_i = -b_i u_i + \sum_{j=1}^n W_{ij} g_j(u_j) + U_i(t), \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.9)$$

burada, $W_{ij} = G_{ij}/C_i$, $b_i = R_i/C_i$ ve $U_i(t) = I_i(t)/C_i$ 'dir. (5.9)' un parametrelerinin ve değişkenlerinin rolü (5.4) ile benzerdir. Sigmoidal giriş-çıkış özelliklerine (5.9) sahip işlemsel yükselteçleri sağlayan bir RC ağına dayanan dinamik sinir ağının analog bir uygulamasıdır. Böyle bir ağda, kapasitörler depolama elemanlarıdır, dirençler dağıtıcı/yitirgen elemanlardır ve yükselteçler kendilerinin giriş ve çıkışları arasında eşleşme/haritalama rolü oynarlar. (5.9)' un $U_i(t) = 0$ durumunda nitel analizi iki nöron için yani $i, j = 1, 2$ için Xue Bin Liang' in 2000 tarihli çalışmasında yer almaktadır. Sistem için bir Lyapunov fonksiyon adayı ele alınmıştır fakat fonksiyonun ve türevinin fiziksel anlamı verilmemiştir. Bu çalışma, Liang' ın 2000'li yıllarda yapmış olduğu bir ve daha fazla nöron için fiziksel anlamlarla genişletilmiştir (bkz., $\mathcal{H}_2$ ve $\dot{\mathcal{H}}_2$).

Sistem (5.9) için aşağıdaki hipotezler kabul edilmiştir:

i. $A_i = (a_{ij}), \quad i, j = 1, \dots, n$ için

$$\text{trace}(A_i) < 0, \quad \det(A_i) > 0, \quad \text{Re}(\text{eig}(A_i)) < 0.$$

ii. Sistem (5.9) için, tüm harici girişleri sıfıra ayarlanır:

$$U_i(t) \equiv 0, \quad U_i(t), \quad i = 1, \dots, n.$$

iii. Aşağıdaki gibi simetrik bir $a = (a_{ij}), i, j = 1, \dots, n$ matrisi vardır.

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j \\ a_{ij} = a_{ji} = 1, & i \neq j \end{cases}.$$

iv. $g_i(x_i) = k_i x_i, k_i = 1, i = 1, \dots, n.$

v. $b_i > n k_i, k_i = 1, i = 1, \dots, n.$

vi. $\text{diag}(b_i) = n, i = 1, \dots, n.$

Bu tanımlamalar ile sonucu ifade edilebilecek ve ispatlanacak duruma gelinmiştir.

Teorem 5.1

Eğer yukarıdaki hipotezler sağlanırsa, sistem (5.9)' un denge noktası $u = 0$ tüm nöronlar için Lyapunov enerji metoduna ve Hurwitz matrisine göre global asimptotik olarak kararlıdır.

İspat: $n = 1$ için:

$$\dot{u}_1 = -u_1 \quad (5.10)$$

Sistem (5.10) aşağıdaki A_1 matrisine sahiptir.

$$A_1 = [-1].$$

Sistem (5.10)' un enerji fonksiyonu:

$$S_1 = \frac{1}{2}u_1^2$$

dir. S_1 pozitif tanımlı bir fonksiyondur. S_1 ' in zamana göre türevi:

$$\dot{S}_1 = u_1 \dot{u}_1 = -u_1^2 \leq 0, \forall u_1 \in \mathbb{R} \text{ için}$$

dir. Sistem (5.10) Lyapunov metoduna göre kararlıdır. Ayrıca, sistem (5.10)' un matris özellikleri araştırıldığında:

$$\text{trace}(A_1) = -1, \det(A_1) = -1 < 0, \text{eig}(A_1) = -1$$

elde edilir. Burada $\text{eig}(A_1) < 0$ olduğu için Sistem (5.10) lineer asimptotik olarak da kararlıdır.

$n = 2$ için:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = -2u_1 + u_2 \\ \dot{u}_2 = u_1 - 2u_2 \end{cases} \quad (5.11)$$

Sistem (5.11) elde edilir. Sistem (5.11) aşağıdaki A_2 matrisine sahiptir.

$$A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Sistem (5.11)' in enerji fonksiyonu:

$$S_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 u_i^2$$

dir. S_2 pozitif tanımlı bir fonksiyondur. S_2 'nin zamana göre türevi:

$$\dot{S}_2 = u_1 \dot{u}_1 + u_2 \dot{u}_2 = -2u_1^2 + 2u_1 u_2 - 2u_2^2$$

'dir. $2ab \leq a^2 + b^2$ eşitsizliği yukarıdaki denklemde kullanıldığında ve $\forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ için

$$\dot{S}_2 = -u_1^2 - u_2^2 \leq 0,$$

'dir. Sistem (5.11) Lyapunov metoduna göre kararlıdır. Ayrıca, Sistem (5.11)' in matris özellikleri araştırıldığında:

$$\text{trace}(A_2) = -4, \quad \det(A_2) = 3 > 0, \quad \text{eig}(A_2) = -3, -1$$

elde edilir. $\text{eig}(A_2) < 0$ olduğu için sistem (5.11) Hurwitz matrisine göre kararlıdır.

$n = 3$ için:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = -3u_1 + u_2 + u_3 \\ \dot{u}_2 = u_1 - 3u_2 + u_3 \\ \dot{u}_3 = u_1 + u_2 - 3u_3 \end{cases} \quad (5.12)$$

Sistem (5.12) elde edilir. Sistem (5.12) aşağıdaki A_3 matrisine sahiptir.

$$A_3 = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Sistem (5.12)' nin enerji fonksiyonu:

$$S_3 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 u_i^2$$

dir. S_3 pozitif tanımlı bir fonksiyondur. S_3 'ün zamana göre türevi:

$$\dot{S}_3 = u_1 \dot{u}_1 + u_2 \dot{u}_2 + u_3 \dot{u}_3 = -3u_1^2 - 3u_2^2 - 3u_3^2 + 2u_1 u_2 + 2u_1 u_3 + 2u_2 u_3$$

$$\dot{S}_3 = -u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 \leq 0,$$

dir. Sistem (5.12) Lyapunov metoduna göre kararlıdır. Ancak Sistem (5.12)' nin matris özellikleri araştırıldığında:

$$trace(A_3) = -9, \det(A_3) = -16 < 0, eig(A_3) = -4, -4, -1.$$

elde edilir. . $eig(A_3) < 0$ olduğu için Sistem (5.12) Hurwitz matrisine göre kararlıdır.

$n = 4$ için:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = -4u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \\ \dot{u}_2 = u_1 - 4u_2 + u_3 + u_4 \\ \dot{u}_3 = u_1 + u_2 - 4u_3 + u_4 \\ \dot{u}_4 = u_1 + u_2 + u_3 - 4u_4 \end{cases} \quad (5.13)$$

Sistem (5.13) elde edilir. Sistem (5.13) aşağıdaki A_4 matrisine sahiptir:

$$A_4 = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Sistem (5.13)' ün enerji fonksiyonu:

$$S_4 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 u_i^2$$

dir. S_4 pozitif tanımlı bir fonksiyondur. S_4 'ün zamana göre türevi:

$$\begin{aligned} \dot{S}_4 &= u_1 \dot{u}_1 + u_2 \dot{u}_2 + u_3 \dot{u}_3 + u_4 \dot{u}_4 \\ &= -4u_1^2 - 4u_2^2 - 4u_3^2 - 4u_4^2 + 2u_1u_2 + 2u_1u_3 + 2u_1u_4 + 2u_2u_3 \\ &\quad + 2u_2u_4 + 2u_3u_4 \end{aligned}$$

$$\dot{S}_4 = -u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 \leq 0,$$

dir. Sistem (5.13) Lyapunov metoduna göre kararlıdır. Ancak Sistem (5.13)'ün matris özellikleri araştırıldığında:

$$\text{trace}(A_4) = -16 < 0, \det(A_4) = 125 > 0, \text{eig}(A_4) = -5, -5, -5, -1.$$

elde edilir. $\text{eig}(A_4) < 0$ olduğu için sistem (5.13) Hurwitz matrisine göre kararlıdır.

$n = 5$ için:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = -5u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 \\ \dot{u}_2 = u_1 - 5u_2 + u_3 + u_4 + u_5 \\ \dot{u}_3 = u_1 + u_2 - 5u_3 + u_4 + u_5 \\ \dot{u}_4 = u_1 + u_2 + u_3 - 5u_4 + u_5 \\ \dot{u}_5 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - 5u_5 \end{cases} \quad (5.14)$$

Sistem (5.14) elde edilir. Sistem (5.14) aşağıdaki A_5 matrisine sahiptir:

$$A_5 = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

Sistem (5.14)' ün enerji fonksiyonu:

$$S_5 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^5 u_i^2$$

dir. S_5 pozitif tanımlı bir fonksiyondur. S_5 'in zamana göre türevi:

$$\begin{aligned} \dot{S}_5 &= u_1 \dot{u}_1 + u_2 \dot{u}_2 + u_3 \dot{u}_3 + u_4 \dot{u}_4 + u_5 \dot{u}_5 \\ &= -5u_1^2 - 5u_2^2 - 5u_3^2 - 5u_4^2 - 5u_5^2 + 2u_1 u_2 + 2u_1 u_3 + 2u_1 u_4 \\ &\quad + 2u_1 u_5 + 2u_2 u_3 + 2u_2 u_4 + 2u_2 u_5 + 2u_3 u_4 + 2u_3 u_5 + 2u_4 u_5 \\ \dot{S}_5 &= -u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 - u_5^2 \leq 0, \end{aligned}$$

dir. Sistem (5.14) Lyapunov metoduna göre kararlıdır. Ancak Sistem (5.14)' ün matris özellikleri araştırıldığında:

$$\text{trace}(A_5) = -20 < 0, \det(A_5) = -1296 < 0, \text{eig}(A_5) = -6, -6, -6, -6, -1.$$

elde edilir. $\text{eig}(A_5) < 0$ olduğu için sistem (5.14) Hurwitz matrisine göre kararlıdır.

$n = 6$ için:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = -6u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 \\ \dot{u}_2 = u_1 - 6u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 \\ \dot{u}_3 = u_1 + u_2 - 6u_3 + u_4 + u_5 + u_6 \\ \dot{u}_4 = u_1 + u_2 + u_3 - 6u_4 + u_5 + u_6 \\ \dot{u}_5 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - 6u_5 + u_6 \\ \dot{u}_6 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 - 6u_6 \end{cases} \quad (5.15)$$

Sistem (5.15) elde edilir. Sistem (5.15) aşağıdaki A_6 matrisine sahiptir:

$$A_6 = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 \end{bmatrix}.$$

Sistem (5.15)' in enerji fonksiyonu:

$$S_6 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 u_i^2$$

dir. S_6 pozitif tanımlı bir fonksiyondur. S_6 'nın zamana göre türevi:

$$\begin{aligned} \dot{S}_6 &= u_1 \dot{u}_1 + u_2 \dot{u}_2 + u_3 \dot{u}_3 + u_4 \dot{u}_4 + u_5 \dot{u}_5 + u_6 \dot{u}_6 \\ &= -6u_1^2 - 6u_2^2 - 6u_3^2 - 6u_4^2 - 6u_5^2 - 6u_6^2 + 2u_1u_2 + 2u_1u_3 + 2u_1u_4 \\ &\quad + 2u_1u_5 + 2u_1u_6 + 2u_2u_3 + 2u_2u_4 + 2u_2u_5 + 2u_2u_6 + 2u_3u_4 \\ &\quad + 2u_3u_5 + 2u_3u_6 + 2u_4u_5 + 2u_4u_6 + 2u_5u_6 \\ \dot{S}_6 &= -u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 - u_5^2 - u_6^2 \leq 0, \end{aligned}$$

dır. Sistem (5.15) Lyapunov metoduna göre kararlıdır. Ayrıca sistem (5.15)' in matris özellikleri araştırıldığında:

$$\text{trace}(A_6) = -36 < 0, \det(A_6) = 16807 > 0, \text{eig}(A_6) = -7, -7, -7, -7, -7, -1.$$

elde edilir. $\text{eig}(A_6) < 0$ olduğu için sistem (5.15) Hurwitz matrisine göre kararlıdır.

$n = 7$ için:

$$A_7 = \begin{cases} \dot{u}_1 = -7u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 \\ \dot{u}_2 = u_1 - 7u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 \\ \dot{u}_3 = u_1 + u_2 - 7u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 \\ \dot{u}_4 = u_1 + u_2 + u_3 - 7u_4 + u_5 + u_6 + u_7 \\ \dot{u}_5 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - 7u_5 + u_6 + u_7 \\ \dot{u}_6 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 - 7u_6 + u_7 \\ \dot{u}_7 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 - 7u_7 \end{cases} . \quad (5.16)$$

Sistem (5.16) elde edilir. Sistem (5.16) aşağıdaki A_7 matrisine sahiptir:

$$A_7 = \begin{bmatrix} -7 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -7 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -7 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -7 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -7 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -7 \end{bmatrix}.$$

Sistem (5.16)'nın enerji fonksiyonu:

$$S_7 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^7 u_i^2$$

dir. S_7 pozitif tanımlı bir fonksiyondur. S_7 'nin zamana göre türevi:

$$\begin{aligned} \dot{S}_7 &= u_1 \dot{u}_1 + u_2 \dot{u}_2 + u_3 \dot{u}_3 + u_4 \dot{u}_4 + u_5 \dot{u}_5 + u_6 \dot{u}_6 + u_7 \dot{u}_7 \\ &= -7u_1^2 - 7u_2^2 - 7u_3^2 - 7u_4^2 - 7u_5^2 - 7u_6^2 - 7u_7^2 + 2u_1u_2 + 2u_1u_3 \\ &\quad + 2u_1u_4 + 2u_1u_5 + 2u_1u_6 + 2u_1u_7 + 2u_2u_3 + 2u_2u_4 + 2u_2u_5 \\ &\quad + 2u_2u_6 + 2u_2u_7 + 2u_3u_4 + 2u_3u_5 + 2u_3u_6 + 2u_3u_7 + 2u_4u_5 \\ &\quad + 2u_4u_6 + 2u_4u_7 + 2u_5u_6 + 2u_5u_7 + 2u_6u_7 \end{aligned}$$

$$\dot{S}_7 = -u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 - u_5^2 - u_6^2 - u_7^2 \leq 0,$$

dir. Sistem (5.16) Lyapunov metoduna göre kararlıdır. Ancak Sistem (5.16)'nın matris özellikleri araştırıldığında:

$$\begin{aligned} \text{trace}(A_7) &= -49 < 0, \det(A_7) = -262140 < 0, \text{eig}(A_7) = \\ &= -8, -8, -8, -8, -8, -8, -1. \end{aligned}$$

elde edilir. $\text{eig}(A_7) < 0$ olduğu için sistem (5.11) Hurwitz matrisine göre kararlıdır.

$n = 8$ için:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = -8u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 \\ \dot{u}_2 = u_1 - 8u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 \\ \dot{u}_3 = u_1 + u_2 - 8u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 \\ \dot{u}_4 = u_1 + u_2 + u_3 - 8u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 \\ \dot{u}_5 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - 8u_5 + u_6 + u_7 + u_8 \\ \dot{u}_6 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 - 8u_6 + u_7 + u_8 \\ \dot{u}_7 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 - 8u_7 + u_8 \\ \dot{u}_8 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 - 8u_8 \end{cases} \quad (5.17)$$

Sistem (5.17) elde edilir. Sistem (5.17) aşağıdaki A_8 matrisine sahiptir:

$$A_8 = \begin{bmatrix} -8 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -8 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -8 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -8 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -8 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -8 \end{bmatrix}.$$

Sistem (5.17)'nin enerji fonksiyonu:

$$S_8 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 u_i^2$$

dir. S_8 pozitif tanımlı bir fonksiyondur. S_8 'in zamana göre türevi:

$$\begin{aligned}
\dot{S}_8 &= u_1\dot{u}_1 + u_2\dot{u}_2 + u_3\dot{u}_3 + u_4\dot{u}_4 + u_5\dot{u}_5 + u_6\dot{u}_6 + u_7\dot{u}_7 + u_8\dot{u}_8 \\
&= -8u_1^2 - 8u_2^2 - 8u_3^2 - 8u_4^2 - 8u_5^2 - 8u_6^2 - 8u_7^2 - 8u_8^2 + 2u_1u_2 \\
&\quad + 2u_1u_3 + 2u_1u_4 + 2u_1u_5 + 2u_1u_6 + 2u_1u_7 + 2u_1u_8 + 2u_2u_3 \\
&\quad + 2u_2u_4 + 2u_2u_5 + 2u_2u_6 + 2u_2u_7 + 2u_2u_8 + 2u_3u_4 + 2u_3u_5 \\
&\quad + 2u_3u_6 + 2u_3u_7 + 2u_3u_8 + 2u_4u_5 + 2u_4u_6 + 2u_4u_7 + 2u_4u_8 \\
&\quad + 2u_5u_6 + 2u_5u_7 + 2u_5u_8 + 2u_6u_7 + 2u_6u_8 \\
\dot{S}_8 &= -u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 - u_5^2 - u_6^2 - u_7^2 - u_8^2 \leq 0
\end{aligned}$$

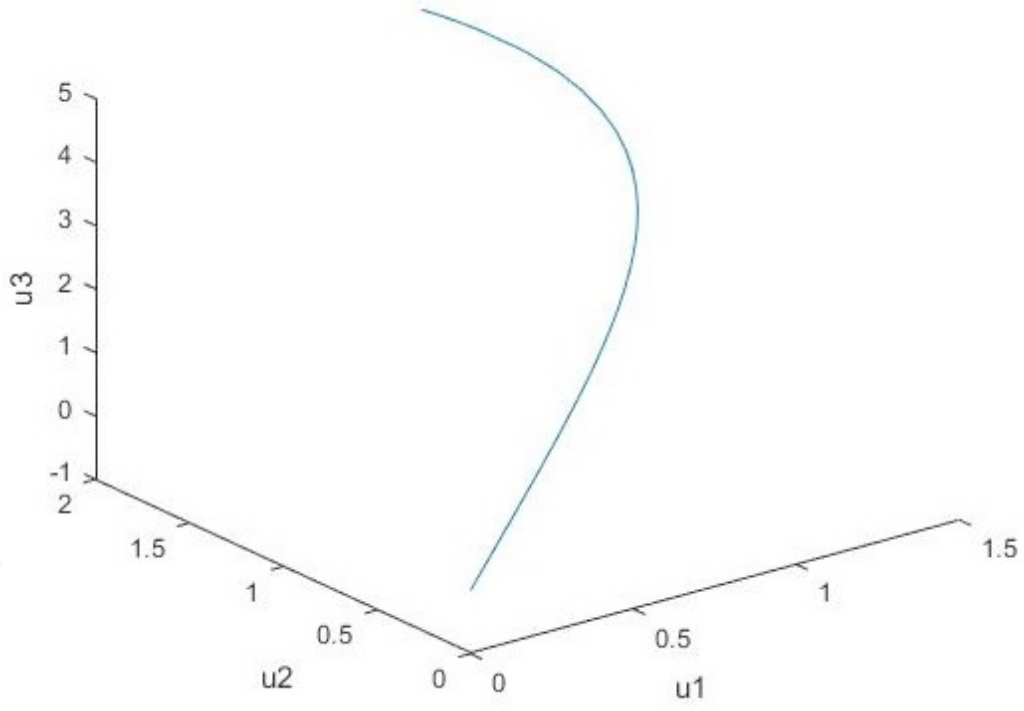
dir. Sistem (5.17) Lyapunov metoduna göre kararlıdır. Ayrıca sistem (5.17)'nin matris özellikleri araştırıldığında:

$$\begin{aligned}
\text{trace}(A_8) &= -64 < 0, \det(A_8) = 4682969 > 0, \\
\text{eig}(A_8) &= -9, -9, -9, -9, -9, -9, -9, -1
\end{aligned}$$

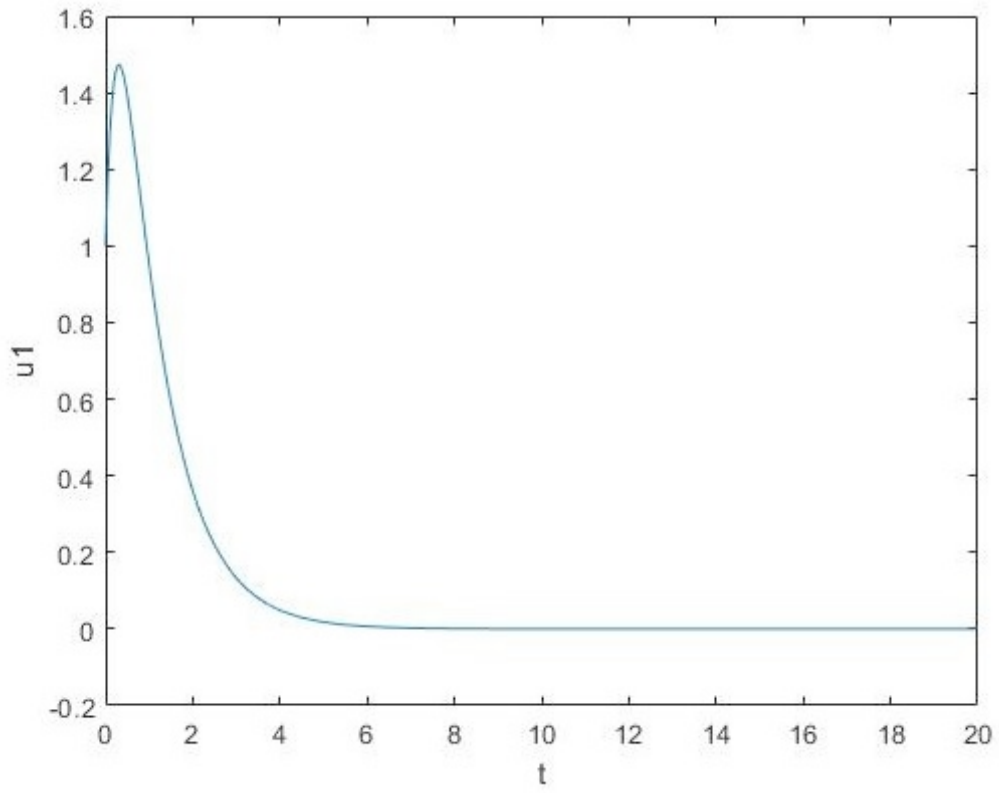
elde edilir. $\text{eig}(A_8) < 0$ olduğu için. Sistem (5.17) lineer analiz olarak da kararlıdır.

Yukarıdaki sonuçlardan hareketle; sistem (5.9) tüm nöronlar için hem Lyapunov ve hemde Hurwitz matris özelliklerine göre kararlıdır. Bu kararlılığı sağlayan neden ise tüm nöronlar için sistem (5.9)'un ilgili matrisinin diagonal olarak dominant olmasıdır. Tek nöronlarda ilgili matrisin determinanı sıfırdan küçüktür ($\det A < 0$)'dır. Çift nöronlarda ise bu determinant sıfırdan büyüktür ($\det A > 0$)'dır.

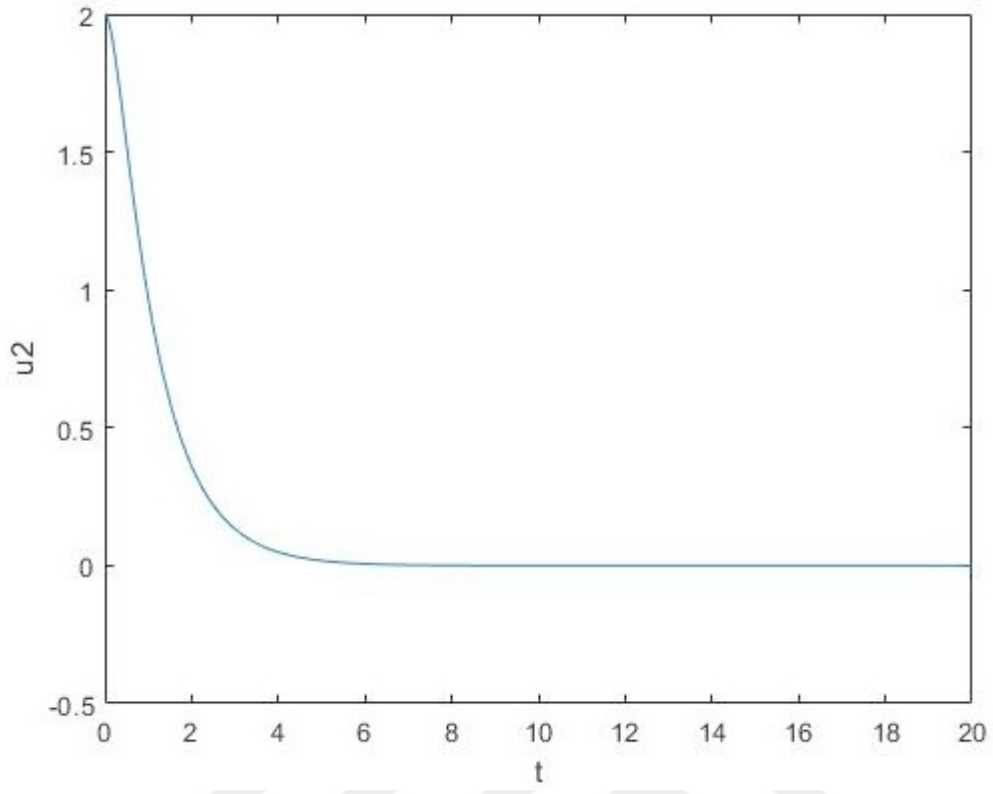
Sistem (5.12)'nin matlab simülasyonları Şekil 5.4, Şekil 5.5, Şekil 5.6, ve Şekil 5.7' de gösterildiği gibidir.



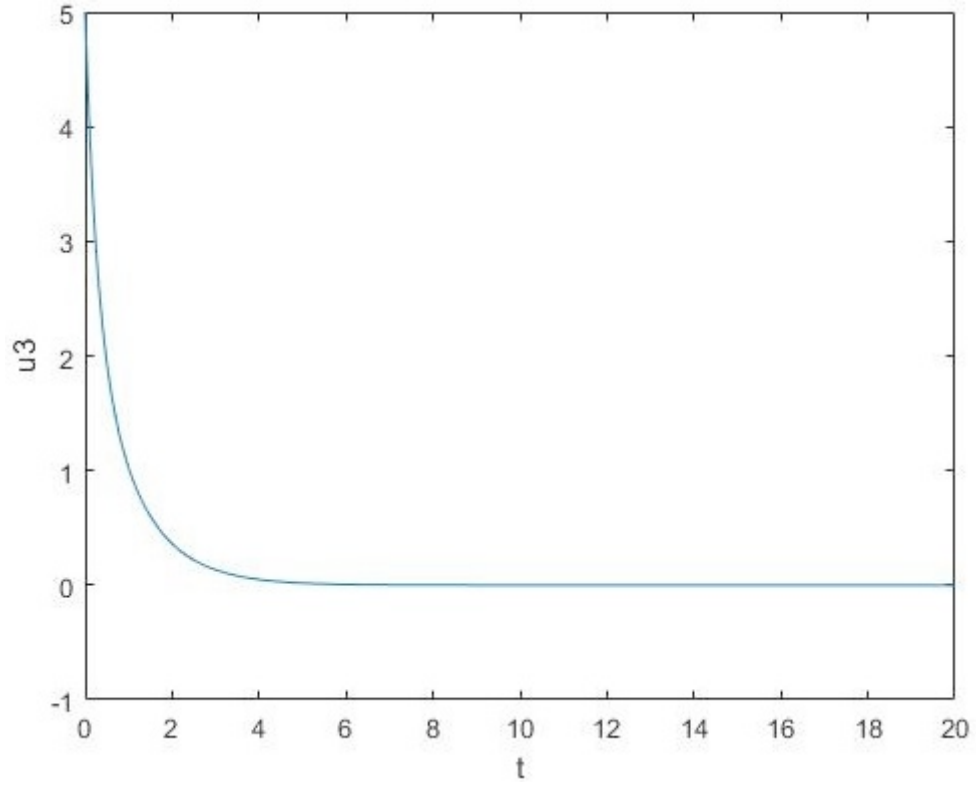
Şekil 5.4 Sistem (5.12)'nin faz portresi



Şekil 5.5 Sistem (5.12)'nin u_1 değişkeninin zamana göre davranış grafiği



Şekil 5.6 Sistem (5.12)' nin u_2 değişkeninin zamana göre davranış grafiği



Şekil 5.7 Sistem (5.12)' nin u_3 değişkeninin zamana göre davranış grafiği

Sistem (5.12) için, Lyapunov anlamındaki kararlılık ile simülasyonlar örtüşmektedirler. Bu örtüşme aşağıdaki sonucu ifade etmektedir.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_i(t) = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Sistem (5.12) için, Lyapunov metodu ile simülasyonlar kararlılık anlamında ilgili Hurwitz matrisi ile de örtüşmektedir.



6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Son yıllarda yapay sinir ağlarına olan ilginin artması ile beraber kararlılık analizi çalışmaları önem kazanmıştır. Bu bağlamda literatürde yapay sinir ağları ile ilgili birçok farklı makale çalışmaları ve uygulamaları mevcuttur. Bu denli önemli olan yapay sinir ağının temelleri Hopfield' in 1980' lerde yaptığı çalışmalara dayanmaktadır. En etkili sinir ağı modellerinden biri olan Hopfield tipi yapay sinir ağı, örüntü tanıma ve optimizasyondaki pratik sorunların çözümünde sıklıkla kullanılmıştır. Hopfield' ın literatüre katkılarının biri de Lyapunov kararlılık teorisinin tekrarlayan sinir ağlarının analizine uygulaması olmuştur.

Yapay sinir ağı gibi doğrusal olmayan sistemler güçlü kararlılık kısıtlamalarına ihtiyaç duymuştur. Bu ihtiyaç Rus matematikçi A. M. Lyapunov tarafından fark edilmiş, Lyapunov sistemlerin diferansiyel denklemlerinin açık bir çözümüne gerek duymadan uygulanabilir olmasını Lyapunov'un Doğrudan Yöntemi şeklinde adlandırdığı ikinci yöntemi ile geliştirmiştir. Sistemin enerjisini bir Lyapunov enerji fonksiyonu olarak tanımlamıştır.

Bir sistemin enerjisi o sistemin davranışını belirlemektedir. Bundan hareketle bu çalışmada Hopfield yapay sinir ağının bir elektrik devresi olan RC ve Opamp devresine nasıl uygulanabileceği sunulmuştur. Çalışmada, sistemin fiziksel anlamından yola çıkılarak enerji fonksiyonu elde edilmiş ve sistem yörüngeleri boyunca bu enerji fonksiyonunun türevinin sistemde harcanan gücün negatif değerine eşit olduğu ispat edilmiştir.

Bu çalışmanın yapay sinir ağı kararlılık analizi ile ilgili diğer çalışmalardan farkı, literatürde yer alan hazır Lyapunov fonksiyonu veya deneme yanılma yolu ile elde edilen Lyapunov fonksiyonu kullanılmadan, sistemin fiziksel anlamından yola çıkılarak devre teorisinin güç-enerji ilişkisine dayalı olarak sistem için yeni bir Lyapunov (enerji fonksiyonu) oluşturulmasıdır. Yapay sinir ağları gibi dinamik sistemlerin matematiksel olarak elektrik devrelerine modellenerek kararlılık analizi yapılabileceği de gösterilmiştir. Elde edilen teorik sonuçlar Hurwitz matrisinin özdeğerleri ve simülasyonlarla test edilerek çalışmanın önemi arttırılmıştır.



KAYNAKLAR

- Anderson, J. A. (1972). A simple neural network generating an interactive memory. *Mathematical Biosciences*, 14, 197–220. doi: 10.1016/0025-5564(72)90075-2
- Arik, S. (2000). Global asymptotic stability of a class of dynamical neural networks, *Institute of Engineers and Everyone Else Trans*, 47(4), 568–571. doi: 10.1109/81.841858
- Arik, S., Orman, Z. (2005). Global stability analysis of cohen–grossberg neural networks with time varying delays. *Elsevier*, 357–538. doi: 10.1016/j.physleta.2005.04.095
- Arik, S., Tavsanoğlu, V. (1996). Equilibrium analysis of nonsymmetric CNNs, *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 24(3), 269–274.
- Arik, S., V. Tavsanoğlu. (2005). Global asymptotic stability analysis of bidirectional associative memory neural networks with constant time delays. *Elsevier*, 161–176. doi:10.1016/j.neucom.2004.12.002
- Ateş, M., Kadah, N. (2021). Novel stability and passivity analysis for three types of nonlinear LRC circuits. *Ijocta*, 11(2), 227–237. doi: 10.11121/ijocta.01.2021.001073
- Ateş, M., Laribi, S. (2018). New results on the global asymptotic stability of certain nonlinear RLC circuits. *Turkish Journal of Electrical Engineering & Computer Sciences*, 434–441. doi: 10.3906/elk-1612-100
- Bao, J., Lee, P.L. (2007). **Process control the passive system approach**. Springer: London, U.K.
- Barmish, B. R. (1994). **New tools for robustness of linear systems**. Macmillan Publishing Company: New York.
- Bayır, F. (2006). *Yapay sinir ağları ve tahmin modellemesi üzerine bir uygulama*, Yüksek lisans tezi. İstanbul Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, İstanbul, Türkiye.
- Demirel Yücel, E. (2009). *Gecikmeli yapay sinir ağlarının kararlılık analizi için genel bir yaklaşım*, Doktora tezi. İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, Türkiye.
- Doğan, Z. (2019). *Nötral tipteki zaman gecikmeli dinamik yapay sinir ağlarının kararlılık özelliklerinin incelenmesi*, Yüksek lisans tezi. İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, Türkiye.
- Edwards, C.H., Penny D.E. (2008). **Elementary differential equations** (6. ed.). Pearson Education: U.S.A.
- Ergezer, H., Dikmen, M., Özdemir, E. (2003). Yapay sinir ağları ve tanıma sistemleri. *Pivolka*, (6), 14–17.
- Fausett, L. (1994). **Fundamentals of neural networks**. Prentice Hall PTR: USA.
- Forti, M., Manetti, S., Marini, M. (1992). A condition for global convergence of a class of symmetric neural circuits, *Institute of Engineers and Everyone Else Transactions on Circuits and Systems- I*, 39(6), 480–483. doi: 10.1109/81.153645
- Forti, M., Manetti, S., Marini, S. (1994). Necessary and sufficient condition for absolute stability of neural networks. *Institute of Engineers and Everyone Else*, 41(7), 491–494. doi: 10.1109/81.298364
- Geman, S., E. Bienenstock, R. Doursat. (1992). Neural networks and the bias/variance dilemma. *Neural Computation*, (4), 1–58.
- Grossberg, S. (1967). Nonlinear difference-differential equations in prediction and learning theory. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 58(4), 1329–1334. doi: 10.1073/pnas.58.4.1329

- Grossberg, S. (1988). *Neural networks and natural intelligence*, Cambridge University Press: USA. doi: <https://doi.org/10.1017/S0033291700024430>
- Haddad, W.M., Chellaboina, V.S. (2008). *Nonlinear dynamical systems and control*. Princeton University Press: USA.
- Hagan, M.T., Demuth, H.B., Beale, M.H., Jesus, O.D. (2014). *Neural network design* (2. ed.). <https://hagan.okstate.edu/NNDesign.pdf>
- Haykin, S. (2008). *Neural networks and learning machines* (4. ed.). Pearson Prentice Hall: United States of America.
- Hopfield, J. J. (1982a). Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 79(8), 2554-2558. doi: 10.1073/pnas.79.8.2554
- Hopfield, J. J. (1982b). Neurons with graded response have collective computational properties like those of two state neurons. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 81(10), 3088-3092. doi: <https://doi.org/10.1073/pnas.81.10.3088>
- Hu, S., Wang, J. (2002). Global exponential stability of continuous-time interval neural networks, *Physical Review*, 49(9), 1334–1347. doi: 10.1103/PhysRevE.65.036133
- Kadah, N. (2019). *Doğrusal olmayan RLC devrelerinin kararlılık ve pasiflik analizi*, Yüksek lisans tezi. Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Van, Türkiye.
- Kerlirzin, P., Vallet, F. (1993). Robustness in multilayer perceptrons, *Neural Computation*, 5(3), 473–482.
- Khalil, H.K. (1996). *Nonlinear systems* (4. ed.). Prentice Hall: New York, USA.
- Kohonen, T. (1972). Correlation matrix memories. *Institute of Engineers and Everyone Else Transactions on Computers*, 21, 353–359.
- Liang, X.B. (2000). Equivalence between local exponential stability of the unique equilibrium point and global stability for hopfield-type neural networks with two neurons, *Institute of Engineers and Everyone Else Transactions on Neural Networks*, 11(5), 1194 – 1196.
- Mahowald, M.A., Mead, C. (1989). Analog VLSI and neural systems. *Silicon Retina*, 257-278.
- McCulloch, W., Pitts, W. (1943). A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. *Bulletin of Mathematical Biophysics*, 5, 115–133.
- Michel, A.N., Farrell, J.A., Porod, W. (1989). Qualitative analysis of neural networks, *Institute of Engineers and Everyone Else Transactions on Circuits and Systems*, 36(2), 229-243.
- Orman, Z. (2007). *Cohen grossberg yapay sinir ağlarının dinamik davranış analizi*, Doktora tezi. İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, Türkiye.
- Öztemel, E. (2006). *Yapay sinir ağları*. Papatya Yayıncılık: İstanbul, Türkiye.
- Poznyak, A.S., Sanchez, E.N., Yu, W. (2001). *Differential neural networks for robust nonlinear control*. World Scientific Publishing Company: USA.
- Rao, R. M. (1981). *Ordinary differential equations theory and applications*. Edward Arnold: London, UK.
- Semerçi, N.Ö. (2007). *Gecikmeli yapay sinir ağlarının robust kararlılık analizi*, Doktora tezi. İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, Türkiye.
- Sarangapani, J. (2006). *Neural network control of nonlinear discrete-time systems* (1. ed.). United States of America. USA.
- Şamlı, R. (2006). *Çift yönlü çağırışımli bellek yapay sinir ağları'nın kararlılık analizi*, Yüksek lisans tezi. İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, Türkiye.

- Vidyasagar, M. (2002). *Nonlinear system analysis* (2. ed.). Society for Industrial and Applied Mathematics: USA.
- Yerramalla, S., Fuller, E., Mladenovski, M., Cukic, B. (2003). Lyapunov analysis of neural network stability in an adaptive flight control system. *Lecture Notes in Computer Science*, 77-92. doi: 10.1007/3-540-45032-7
- Zurada, J. M. (1992). *Introduction to artificial neural systems*. West Publishing Company: USA.





VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
LİSANSÜSTÜ TEZ ORJİNALLİK RAPORU

Tarih 26/04/2023

Tez Başlığı: Hopfield Tipi Sinir Ağlarının Global Kararlılık Analizi

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışmamın, kapak sayfası, giriş, ana bölümler ve sonuç bölümlerinden oluşan toplam 95 sayfalık kısmına ilişkin, 26/04/2023 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından TURNITIN adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre tezimin benzerlik oranı % 15 tir.

Uygulanan filtreler aşağıda verilmiştir:

- Kabul ve onay sayfası hariç,
- Teşekkür hariç,
- İçindekiler hariç,
- Simge ve kısaltmalar hariç,
- Gereç ve yöntemler hariç,
- Kaynakça hariç,
- Alıntılar hariç,
- Tezden çıkan yayınlar hariç,
- 7 kelimedenden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç (Limit match size to 7 words)

Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Lisansüstü Tez Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılmasına İlişkin Yönergeyi inceledim ve bu yönergede belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini bilgilerinize arz ederim.

26/04/2023

Adı Soyadı: Ayşe Nur GÜNEL

Öğrenci No: 19910001072

Anabilim Dalı: Yapay Zeka ve Robotik

Programı: Yapay Zeka ve Robotik

Statüsü: (X) Yüksek lisans () Doktora

DANIŞMAN ONAYI

ENSTİTÜ ONAYI

UYGUNDUR

UYGUNDUR

Doç. Dr. Muzaffer ATEŞ

