

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇOK DEĞİŞKENLİ YÖNTEMLERDE ENTROPİ KULLANIMI:
MUTLULUK ENDEKSİ ÜZERİNE BİR UYGULAMA

Esra ÖNCÜL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İstatistik Anabilim Dalı

İstatistik Programı

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Doğan YILDIZ

Şubat, 2023

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ÇOK DEĞİŞKENLİ YÖNTEMLERDE ENTROPİ KULLANIMI:
MUTLULUK ENDEKSİ ÜZERİNE BİR UYGULAMA**

Esra ÖNCÜL tarafından hazırlanan tez çalışması 9.02.2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı, İstatistik Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Dr. Öğr. Üyesi Doğan YILDIZ
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Dr. Öğr. Üyesi Doğan YILDIZ, Danışman

Yıldız Teknik Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Elif TUNA, Üye

Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Mustafa ÇANAKÇIOĞLU, Üye

İstanbul Gelişim Üniversitesi

Danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Doğan YILDIZ sorumluluğunda tarafımca hazırlanan Çok Değişkenli Yöntemlerde Entropi Kullanımı: Mutluluk Endeksi Üzerine Bir Uygulama başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Esra ÖNCÜL
İmza

TEŞEKKÜR

“Çok Değişkenli Yöntemlerde Entropi Kullanımı: Mutluluk Endeksi Üzerine Bir Uygulama” konulu tez çalışmamda, bana danışmanlık ederek, beni yönlendiren ve değerli fikirler veren danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Doğan YILDIZ’a hem ders hem de tez sürecinde destek olan arkadaşlarım Sena YILDIZ ve Hatice Burcu KOÇAK’a ve her zaman yanımda olan aileme çok teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ.....	vii
KISALTMA LİSTESİ.....	viii
ŞEKİL LİSTESİ	ix
TABLO LİSTESİ.....	x
ÖZET	xii
ABSTRACT	xiii
1 GİRİŞ.....	1
1.1 Literatür Özeti	2
1.2 Tezin Amacı.....	5
1.3 Orijinal Katkı	6
2 ENTROPİ YASASI VE ENTROPİ ÖLÇÜLERİ.....	7
2.1 Entropi Yasası	7
2.1.1 Entropi Yasasının Önemi.....	9
2.2 İstatistiksel Termodinamikte Entropi Yasası.....	11
2.3 Shannon'ın Entropi Fonksiyonu ve Önemi.....	12
2.3.1 Shannon'ın Entropi Fonksiyonu ile Olasılık, Tahminler ve İstatistik Biliminin İlişkisi.....	14
2.3.2 Shannon'ın Entropi Fonksiyonu	14
2.3.3 Shannon'un Entropi Fonksiyonunun Özellikleri	17
2.3.4 Önemli Olasılık Dağılımlarının Shannon Entropisi	19
2.4 Entropi Ölçüm Birimi	20
2.5 Entropi Fonksiyon Türleri	21
2.5.1 Renyi Entropisi	22
2.5.2 Tsallis Entropisi (q Entropisi).....	23
2.5.3 Göreli Entropi (Kullback Leibler Uzaklığı)	23
2.6 Sistemin Entropisi.....	25
2.6.1 Kesikli Sistemler için Entropi	25
2.6.2 Sürekli Sistemler için Entropi.....	26
2.7 Bileşik Entropi	27
2.7.1 Kesikli Sistemler için Bileşik Entropi	27
2.7.2 Sürekli Sistemler için Bileşik Entropi	27

2.8	Koşullu Entropi.....	28
2.9	Ortak Bilgi Miktarı ve Entropi	29
2.9.1	X ve Y rd'leri Kesikli ise Ortak Bilgi Miktarı.....	31
2.9.2	X ve Y rd'leri Sürekli ise Ortak Bilgi Miktarı.....	31
2.10	Entropi ve Bilgi Miktarı İlişkisi	33
2.11	Bilgi Teorisi ve Entropi İlişkisi	37
2.11.1	İletişim Sistemi ve Gürültü.....	37
2.11.2	İletişim Sisteminde Bilgi Miktarının Ölçümü.....	37
2.12	Sistemsal Açıdan İnfomasyon ve Entropi.....	39
2.12.1	Tam ve Kısmi İnfomasyon.....	40
2.13	Negentropi (Negatif Entropi)	40
2.14	Ağırlıklı Entropi.....	41
2.15	Bulanık Entropi	41
2.15.1	Bulanık Mantık (Fuzzy Logic)	41
2.15.2	Bulanık Entropi.....	42
2.16	Diğer Bazı Entropi Türleri	43
3	ENTROPİNİN ARAŞTIRMA YÖNTEMLERİNDE KULLANIMI	45
3.1	Entropi ile Ağırlıklandırma.....	46
3.1.1	ÇKKV Yöntemlerinde Entropi ile Ağırlıklandırma.....	46
3.1.2	Çok Kriterli Endeks Çalışmalarında Entropi ile Ağırlıklandırma .	54
3.2	Entropinin İstatistiksel Analizlerde Kullanımı.....	55
3.2.1	Entropinin Çoklu Regresyon Analizinde Kullanımı.....	55
3.2.2	Entropinin Çok Değişkenli İstatistiksel Analizlerde Kullanımı	57
4	UYGULAMA.....	75
4.1	Veri Seti	76
4.2	Çalışma Kapsamında Kullanılan Değişkenler	77
4.3	Entropi Yöntemi ile Ağırlıklandırma	79
4.4	Entropiye Dayalı TOPSİS Yöntemi ile Ülkelerin Mutluluk Düzeylerinin Sıralanması	85
4.5	Entropiye Dayalı ARAS Yöntemi ile Ülkelerin Mutluluk Düzeylerinin Sıralanması	96
4.6	Ülkelerin Kümeleme Analizi ile Mutluluk Düzeylerine göre Gruplandırılması	107
4.7	Ülkelerin Mutluluk Düzeylerinin Temel Bileşenler Analizi ile Sıralanması	112

4.8 Entropiye Dayalı TOPSİS ve ARAS Yöntemlerinin Karşılaştırılması	117
4.9 Entropiye Dayalı TOPSİS ve ARAS Yöntemleri ile Temel Bileşenler Analizi (TBA)'nin Karşılaştırılması	119
4.10 Kümeleme Analizi ile Diğer Yöntemlerin Karşılaştırılması	121
4.11 Dünya Mutluluk Raporu Sıralamaları ile Entropiye Dayalı TOPSİS ve ARAS Yöntemleri ile TBA Sıralamalarının Karşılaştırılması	123
4.12 Dünya Mutluluk Raporu Sıralamaları ile Kümeleme Analizi Sonuçlarının Karşılaştırılması.....	126
5 SONUÇ VE ÖNERİLER.....	128
KAYNAKÇA.....	131
TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR.....	135



SİMGE LİSTESİ

A	Karışım Matrisi
C_i^*	i. Alternatifin Görelî Yakınlık Değeri
d_j	j. Kriter İçin Bilginin Farklılaşma Derecesi
$D(p \setminus q)$	Görelî Entropi (Kullback Leibler Uzaklığı)
E	Enerji
$H(x)$	Shannon'ın Entropi Fonksiyonu
$H(X, Y)$	Bileşik Entropi
$H(X \setminus Y)$	Koşullu Entropi
$H_R(X)$	Renyi Entropisi
$H_\alpha(p)$	Tsallis Entropisi
$H_{\Delta x}$	Sürekli Sistemler için Alansal Entropi
H_w	Ağırlıklı Entropi
$I(x, y)$	Ortak Bilgi Miktarı
K_i	i. Alternatifin Fayda Derecesi
k	Boltzman Sabiti
R_{ij}	Normalize Karar Matrisi
s	Bağımsız Bileşen Matrisi
S	Entropi
V	Ağırlıklı Standardize Karar Matrisi
W	Ayrıştırma Matrisi
w_i	i. Kriterin Ağırlık Değeri
X	Karışım Matrisi
X_{ij}	Karar vericinin i. Alternatifinin j. Kriteria göre Performans Değeri

KISALTMA LİSTESİ

AB	Avrupa Birliği
ARAS	Additive Ratio Assesment
BBA	Bağımsız Bileşen Analizi
ÇKKV	Çok Kriterli Karar Verme
GME	Genelleştirilmiş Maksimum Entropi
MaxEnt	Maksimum Entropi
MinEnt	Minumum Entropi
TBA	Temel Bileşenler Analizi
TOPSİS	Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution
UN SDSN	Birleşmiş Milletler Sürdürülebilir Kalkınma Çözümleri Ağı

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 1.1 Genel Sistem Teorisi'ne Göre Sistem ile Entropi ve Zaman İlişkisi.....	3
Şekil 2.1 Entropiye Dayalı Araştırmaların Gelişim Süreci.....	13
Şekil 2.2 Entropi ve Ortak Bilgi Miktarı İlişkisi	33
Şekil 2.3 Entropi ve Bilgi Düzeyleri İlişkisi.....	34
Şekil 2.4 İletişim Sistemi.....	37
Şekil 2.5 Entropinin Geometrik Gösterimi	43
Şekil 3.1 Yüz Tanımda Öznitelikler ve Türleri.....	64
Şekil 3.2 Orijinal Sinyaller ve Orijinal Sinyallerin Gözlenen Karışımları	68
Şekil 3.3 Orijinal Sinyallerin BBA ile Tahminleri	69
Şekil 4.1 Entropi Yöntemine göre Kriter Ağırlıkları.....	85
Şekil 4.2 Ülkelerin Entropiye Dayalı Topsis Yöntemine göre Mutluluk Sıralamaları.....	96
Şekil 4.3 Ülkelerin Entropiye Dayalı ARAS Yöntemine Göre Mutluluk Sıralamaları.....	106
Şekil 4.4 Hiyerarşik Kümeleme Analizi Sonucu Dendogram	110
Şekil 4.5 AB Üyesi Ülkeler ve Türkiye'nin Mutluluk Düzeylerinin Dağılımı	112
Şekil 4.6 Yamaç Grafiği (Scree plot)	114
Şekil 4.7 Ülkelerin TBA'na göre Ağırlıkları ve Sıralaması.....	117

TABLO LİSTESİ

Tablo 2.1 Dünyayı Değiştiren 17 Denklem.....	10
Tablo 2.2 Farklı Deneyler için Sistemin Maksimum Entropi Değerleri	17
Tablo 2.3 Bazı Olasılık Dağılımlarının Shannon Entropisi.....	19
Tablo 2.4 Belirsizliği Ölçmek için Kullanılan Entropi Fonksiyonları	21
Tablo 2.5 Kutulardan Çekilecek Toplar için Entropi ve Bilgi Miktarları.....	35
Tablo 2.6 Zar Atma ve Para Atma Deneylerinin Entropi Değerleri	36
Tablo 2.7 Alternatif Mesaj Sayılarına göre Bilgi Miktarı.....	38
Tablo 2.8 Bilinen İstatistiksel Deneylerin Bilgi Miktarları (Bit)	39
Tablo 3.1 Tek ve Çok Değişkenli İstatistiksel Analizlerin Karşılaştırılması.....	59
Tablo 3.2 Çok Değişkenli İstatistiksel Analizler.....	60
Tablo 4.1 AB Üyesi Ülkelerin Dünya Mutluluk Endeksi Mutluluk Skor Değerleri ve değişkenlerin değerleri.....	76
Tablo 4.2 Dünya Mutluluk Endeksi Değişkenleri	78
Tablo 4.3 Değişkenler arası Korelasyon Değerleri	78
Tablo 4.4 Kriter Parametreleri	80
Tablo 4.5 Karar Matrisi.....	80
Tablo 4.6 Normalize Karar Matrisi.....	81
Tablo 4.7 Kriterlerin Entropi Değerleri	83
Tablo 4.8 Kriterlerin bilginin farklılaşma dereceleri (dj)	83
Tablo 4.9 Kriterlerin ağırlıkları	84
Tablo 4.10 Entropi yöntemine göre değişken ağırlıkları.....	84
Tablo 4.11 Karar Matrisi.....	85
Tablo 4.12 Normalize Karar Matrisi.....	87
Tablo 4.13 Ağırlıklı Standardize Karar Matrisi.....	89
Tablo 4.14 İdeal (A+) ve Negatif İdeal (A-) Çözümler	90
Tablo 4.15 İdeal ve Negatif İdeal Ayırım Ölçüleri	91
Tablo 4.16 Göreceli Yakınlık Değerleri	92
Tablo 4.17 Ülkelerin Entropiye Dayalı Topsis Yöntemine Göre Mutluluk Sıralamaları.....	94
Tablo 4.18 Kriterlerin Fayda/Maliyet Durumuna Göre Optimal Değerleri.....	97
Tablo 4.19 Karar Matrisi.....	97

Tablo 4.20 Normalize Karar Matrisi.....	98
Tablo 4.21 Entropi Yöntemi ile Elde Edilen Değişken Ağırlıkları.....	100
Tablo 4.22 Ağırlıklandırılmış Normalize Karar Matrisi.....	100
Tablo 4.23 Optimallik Dereceleri (Si)	101
Tablo 4.24 Fayda Dereceleri (Ki)	103
Tablo 4.25 Ülkelerin Entropiye Dayalı Aras Yöntemine göre Mutluluk Sıralamaları.....	104
Tablo 4.26 Ülkelerin Gruplandığı Kümeler	108
Tablo 4.27 Kümeleme Analizi Sonuçlarına göre Ülkelerin Mutluluk Düzeylerine göre Kümeleri.....	111
Tablo 4.28 KMO ve Bartlett's Testi Sonuçları.....	113
Tablo 4.29 Açıklanan Toplam Varyans Tablosu	113
Tablo 4.30 Bileşenler Matrisi	114
Tablo 4.31 Ülkelerin TBA'na göre Ağırlıkları ve Sıralamaları	115
Tablo 4.32 Entropiye Dayalı Topsis ve Aras Yöntemleri Karşılaştırması	118
Tablo 4.33 Entropiye Dayalı Topsis ve Aras Yöntemleri ile TBA Karşılaştırması	120
Tablo 4.34 Kümeleme Analizi ile Diğer Yöntemlerin Karşılaştırılması.....	122
Tablo 4.35 Dünya Mutluluk Raporu Sıralamaları ile Araştırmada Kullanılan Yöntemlerin Karşılaştırılması.....	125
Tablo 4.36 Dünya Mutluluk Raporu Sıralamaları ile Kümeleme Analizi Sonuçlarının Karşılaştırılması.....	127

Çok Değişkenli Yöntemlerde Entropi Kullanımı: Mutluluk Endeksi Üzerine Bir Uygulama

Esra ÖNCÜL

İstatistik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Doğan YILDIZ

Entropi, evrensel bir yasa olarak belirsizliğin bir ölçüsü olup başta fizik ve mühendislik olmak üzere birçok alanda kullanılmaktadır. Literatürde entropinin, istatistik alanında da farklı uygulamaları bulunmakta özellikle farklı araştırma ve analizlerde kullanıldığı görülmektedir. Ancak istatistik literatüründe entropi konusunda sınırlı sayıda tez çalışması bulunmakta iken entropinin kullanıldığı araştırma yöntemlerini birarada ele alan bir çalışma bulunmamaktadır. Bu nedenle bu tez çalışması ile istatistik alanında entropi teorisinin, kavramının, ölçü birimi olarak anlaşılmasının sağlanması özellikle de istatistikte entropiye dayalı analiz ve araştırma yöntemlerinin bütüncül bir yaklaşımla ele alınması amaçlanmaktadır. Bu sayede hem entropinin istatistikteki analiz ve araştırmalarda kullanımına dikkat çekilmesi hem de entropi konusundaki sınırlı sayıdaki tez çalışmasına katkıda bulunulması amaçlanmaktadır.

Çalışmanın ilk bölümünde; tez çalışmasının amacı ve tez konusunun seçilme nedeninden bahsedilmiş, literatür özeti anlatılmış ayrıca çalışmanın tüm bölümlerinin içeriği detaylı anlatılmıştır.

İkinci bölümde; entropi yasası ve önemi, entropinin matematikselleştirildiği shannon'ın entropi fonksiyonu, entropi fonksiyonları, entropi ölçüleri ve türleri, entropinin bilgi-bilgi teorisi ve ortak bilgi miktarı ile ilişkisi anlatılmıştır.

Üçüncü bölümde; entropinin kullanıldığı araştırma ve analiz yöntemleri anlatılmıştır. Entropi; endeks çalışmalarında kriterlerin ağırlıklandırılmasında, entropiye dayalı ÇKKV yöntemlerinde ve istatistiksel analizlerde ise çoklu regresyon analizine alternatif olan entropi optimizasyon yöntemlerinde ve çok değişkenli istatistiksel analizlerden BBA'nde kullanılmakta olup bu yöntemler detaylıca açıklanmıştır.

Uygulama bölümünde AB ülkeleri ve Türkiye, mutluluk düzeylerine göre farklı analiz yöntemleri ile sıralanarak karşılaştırılmıştır. Entropiye dayalı ÇKKV yöntemlerinden TOPSİS ve ARAS ile sıralamalarla, sıralamalarda yaygın kullanılan TBA sıralamaları karşılaştırılmıştır. Ülkeler, kümeleme analizi ile mutluluk düzeylerine göre gruplanmış ve diğer analiz yöntemlerindeki sıralamalar ile karşılaştırılmıştır. Mutluluk düzeylerinin ölçümü için Dünya Mutluluk Endeksi Raporu'nda Dünya Mutluluk Endeksi 2022 verileri kullanılmıştır. Analiz yöntemleri ile elde edilen sonuçlar hem birbirleri ile hem de raporun kendi sonuçları ile karşılaştırılarak değerlendirilmiştir.

Beşinci bölümde; tez çalışmasında elde edilen sonuçlar, uygulama kısmındaki analizler sonucu değerlendirmeler ve sonrasında gerçekleştirilebilecek çalışmalar konusunda öneriler yer almaktadır.

Anahtar Kelimeler: Avrupa Birliği, ÇKKV, Entropi, Bağımsız Bileşen Analizi, Temel Bileşenler Analizi

Using Entropy in Multivariate Methods: An Application on the Happiness Index

Esra ÖNCÜL

Department of Statistics

Master of Science Thesis

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Doğan YILDIZ

Entropy is a measure of uncertainty as a universal law and used in many fields, especially in physics and engineering. In the literature, entropy has also different applications in the field of statistics and it is seen that it is used in different research and analysis. However, there are a limited number of thesis on entropy in the statistical literature and there is no study that deals with research methods in which entropy is used. For this reasons, with this thesis, it is aimed to provide an understanding of the theory and concept of entropy, as a unit of measurement in the field of statistics, especially to deal with entropy-based analysis and research methods in statistics with a holistic approach. In this way, it is aimed to draw attention to the use of entropy in statistical analysis and research and contribute to the limited number of thesis studies on entropy.

In the first part of the study; the purpose of thesis and reason for choosing thesis topic were mentioned, literature summary was explained and content of parts of the study was explained in detail.

In the second part; entropy law and its importance, Shannon's entropy function which entropy is mathematized, entropy functions, entropy measures and types,

the relationship of entropy with information-theory and amount of common information are explained.

In the third part; research and analysis methods using entropy are explained. Entropy is used in weighting criteria in index studies, in MCDM methods based on entropy and in entropy optimization methods, which are alternatives to multiple regression analysis in statistical analysis, and in Independent Component Analysis (ICA), one of the multivariate statistical analyses and these methods are explained in detail.

In the application part, EU countries and Turkey were compared according to happiness levels by ranking with different analysis methods. TOPSIS and ARAS, which are entropy-based MCDM methods, were compared with rankings and Principal Component Analysis (PCA) rankings, which are commonly used in rankings. Countries were grouped by happiness levels with cluster analysis and compared with the rankings in other analysis methods. World Happiness Index 2022 data was used in the World Happiness Index Report to measure happiness levels. The results obtained by analysis methods were evaluated by comparing them with each other and the results of the report.

In the fifth part; the results of thesis, the evaluations as a result of the analyzes in the application part and suggestions about studies that can be carried out afterwards are included.

Keywords: European Union (EU), Entropy, Independent Component Analysis (ICA), MCDM, Principal Component Analysis (PCA)

1

GİRİŞ

Bu çalışma, 5 bölümden oluşmaktadır. 1. Bölümü giriş kısmı olup çalışmada genel anlamda neler yapıldığından bahsedilmiştir. Çalışmanın bölümleri ve bu bölümlerde gerçekleştirilen çalışmalar detaylandırılmıştır.

2. bölümde öncelikle entropinin tam olarak anlaşılabilmesi için entropi kavramı üzerinde durulmuş, termodinamiğin ikinci yasası ve evrensel bir yasa olan entropi yasası ve önemi, farklı alanlarda kullanım amaçları, entropinin bir ölçü birimi olarak kullanımı, Shannon'ın Entropi Fonksiyonu ve diğer entropi fonksiyonları, entropi türleri, entropi ve bilgi kavramları ilişkisi konuları anlatılmıştır.

3. bölümde ise entropiye dayalı analiz ve araştırma yöntemleri anlatılmıştır. Entropinin, endeks çalışmalarında kriterlerin ağırlıklandırılmasında ve entropiye dayalı çok kriterli karar verme yöntemlerinde kullanımı anlatılmıştır. İstatistiksel analiz ve araştırmalar kapsamında çoklu regresyon analizinde bilinen klasik regresyon analizinin kullanılmadığı durumlarda alternatif bir yöntem sunan entropiye dayalı optimizasyon yöntemlerinden GME (Genelleştirilmiş Maksimum Entropi) yöntemi anlatılmıştır. Farklı mühendislik alanlarında sıklıkla kullanılan ve istatistik alanında birçok değişkenli araştırma yöntemi olmasına rağmen pek çalışma bulunmayan entropiye dayalı bir analiz yöntemi olan bağımsız bileşen analizi anlatılmıştır. Bağımsız bileşenler analizinin mühendislik alanında çalışmalarda kullanımı ve istatistiksel açıdan çok değişkenli bir araştırma yöntemi olarak bağımsız bileşen analizi açıklanmıştır. Ayrıca çalışmanın uygulama bölümünde kullanılan analiz yöntemleri de bu bölümde anlatılmıştır.

Çalışmanın 4. Bölümü uygulama bölümüdür. Bu bölümde; AB ülkeleri ve Türkiye'nin mutluluk düzeylerinin alternatif analiz yöntemleri ile sıralanması ve karşılaştırılması yapılmıştır. Mutluluk düzeylerinin ölçümü için Dünya Mutluluk Endeksi 2022 verileri kullanılmıştır. Bunun için Dünya Mutluluk Raporu (World Happiness Report 2022) nda mutluluk endeksi skorları hesaplanırken kullanılan alt kriterler; kişi başına GSYİH, sosyal destek, sağlıklı yaşam beklentisi, yaşam

seçimleri yapma 6zg6rl6đ6, c6mertlik, yolsuzluk algısı alınmıştır. İstatistiksel analiz y6ntemleri olarak ise ÇKKV y6ntemlerinden entropiye dayalı TOPSİS ve ARAS y6ntemleri, TBA ile k6meleme analizi kullanılmıştır.

Uygulamada ilk olarak 6 değişken entropi y6ntemi ile ağırlıklandırılmış ardından bu değişken ağırlıklarının kullanıldığı ÇKKV y6ntemleri olan TOPSİS ve ARAS y6ntemleri ile 6lkelerin mutluluk d6zeyleri sıralaması elde edilmiştir. Bu y6ntemlere g6re 6lkelerin mutluluk d6zeylerin sıralamalarının birbirine yakın sıra değerleri aldığı g6r6lm6řt6r. Ayrıca alt kriterlerin skor değerleri kullanılarak TBA ile de 6lkelerin mutluluk d6zeyi sıralamaları elde edilmiş ve ÇKKV y6ntemleri sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Sonuç olarak 3 y6ntemde de 6lke sıralamaları genelde birbirine yakın değerler almaktadır. K6meleme analizi ile ise 6lkeler mutluluk d6zeylerine g6re 3 grupta k6melenmiş (y6ksek, orta, d6ř6k) yine bu k6melerdeki 6lkelerin diğer 3 y6ntemdeki mutluluk d6zeyi sıralamalarına uyduğu g6r6lm6řt6r.

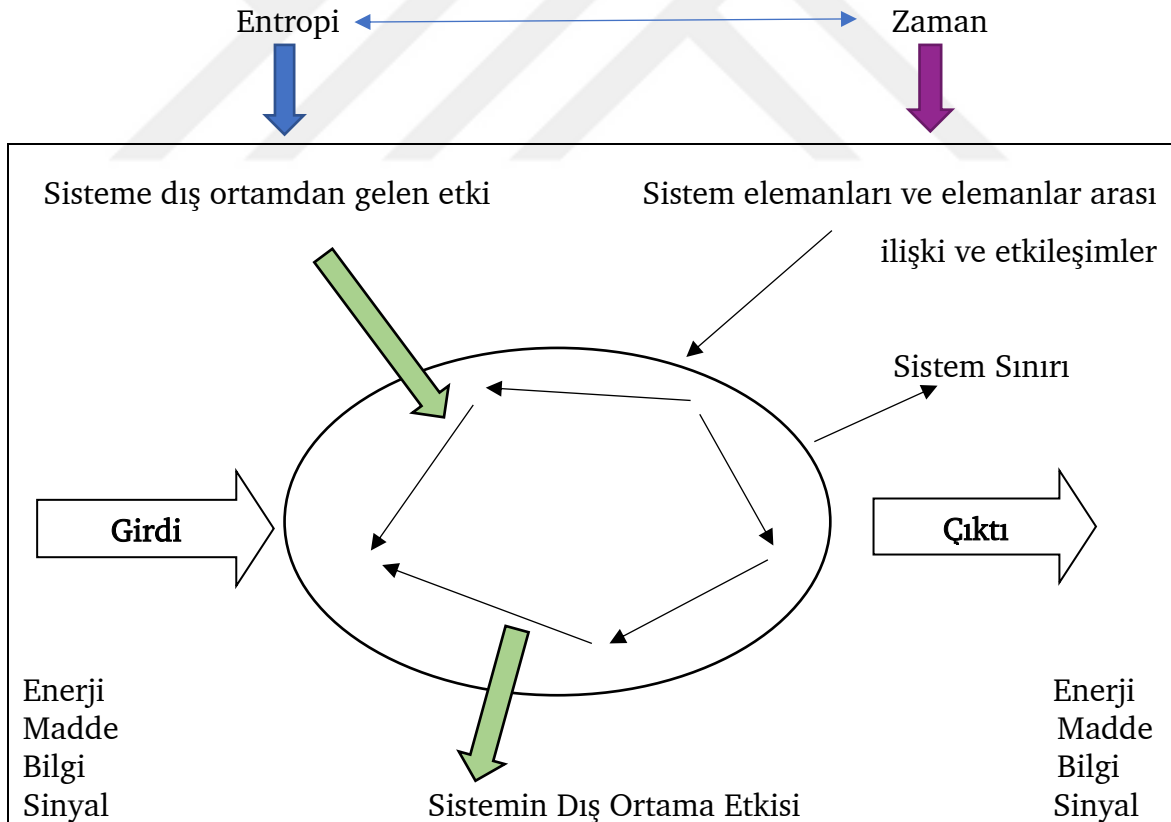
5. B6l6mde diğer b6l6mlerde gerek tez çalışması gerekse de analiz ve uygulama sonuçlarından elde edilen 6neri ve değerlendirmelere yer verilmiştir.

1.1 Literat6r 6zeti

Entropi herhangi bir sistemdeki belirsizliğin, d6zensizliğin ve karmaşanın 6ls6n6 g6stermektedir. D6zensizliğin veya belirsizliğin daha fazla olduğu bir sistemin entropisi daha fazladır. Sistemlerin d6zenli iken d6n6ř6me uğramış hali, dağılmış ve d6zensizdir. Bu durum sistemde entropinin arttığı anlamına gelmektedir. Sistemin dağılmadan 6nceki ilk halinin entropisi daha az olup d6ř6k entropiye sahipken, ikinci halinin entropisi daha fazla olup y6ksek entropiye sahiptir.

Entropi, sistemlerle ilgili bir kavram olduğundan birçok alanda entropi aklımıza gelebilmektedir. 6ncelikle, sistemi tanımlayacak olursak entropiyi de daha iyi anlayabiliriz. Sistem; ortak amacı ve fonksiyonu olan aralarında iletişim ve etkileşimi bulunan birimlerin bir d6zen ve uyum halinde oluşturduğu bir b6t6nd6r. Bir yapıya sistem denilebilmesi için 6 koşul bulunmakta olup bunlar; sistemin 6ğelerden (birimlerden) oluşması, 6ğeler (birimler) arası ilişki bulunması

ve öğelerin sistemin amacı için çalışmasıdır. Sistemin ilk ortaya çıkışı ve uygulamaları biyoloji alanında olmuştur. Avusturyalı biyolog Karl Ludwig Von Bertalanfly sistemi bütünsel bir yaklaşımla ele alarak “Genel Sistem Teorisi”ni geliştirmiştir. Bu teori tüm sistemlere uygulanabilmekte olup teoriye göre her sistemin bir amacı vardır ve alt sistemler ortaklaşa bu amacı gerçekleştirmeye çalışmaktadırlar. Ayrıca bu sistemin bulunduğu ortamla, dış çevresiyle sınırları olmakla birlikte bu sınırlar üzerinden bulunduğu ortam ile madde, enerji, sinyal ve bilgi alışverişi sağlamaktadır. Bu nedenle de sistemlerin birbirleriyle etkileşimleri de kaçınılmazdır. Bertalanfly’nın bu teorisi sistemler teorisi olarak anılmakta olup doğada her şeyin birbiriyle bağlantılı olduğunu ve birbirini etkilediği görüşünü ortaya koymaktadır (Çini,P., 2019). Şekil 1.1’de genel sistem teorisine göre sistem yer almaktadır. Ayrıca bu bir sistem modeli olarak düşünülürse sistemler üzerinde her ne kadar görülmeseler de entropi ve zamanın etkisi de bulunmaktadır.



Şekil 1.1 Genel sistem teorisi'ne göre sistem ile entropi ve zaman ilişkisi

Sistem, her bilim dalı için farklı anlama sahiptir. Birimleri insan olan sistem sosyal sistem, fizik bilimi ile ilgili sistemler fiziksel sistem, birimleri canlılar olan sistem biyolojik sistem vb. isimler almaktadır. Bu sebeple Bertalanffy'nın "Genel Sistem Teorisi" tanımı tüm bilim dalları için geçerli olmaktadır. Entropinin de neredeyse her türlü sistemle ilişkisi bulunmakta olduğundan entropi her alanda uygulama bulmaktadır. Çünkü tüm bu sistemlerde bulunan belirsizlik ve düzensizlikler entropi ile ölçülebilmektedir.

Şekil 1.1'de görülebileceği gibi sistemlerin girdileri madde, enerji, bilgi ve sinyal olup sisteme sınırları dışında ortamdan (çevresinden) etkiler olarak gelmekte sistem bu girdileri kullanarak çıktıya dönüştürmektedir. Aslında bu girdi faktörleri ile bir de entropi faktörü bulunmaktadır. İşte bu sistemlerdeki belirsizlik ve düzensizliğin ölçüsü entropi ile ifade edilmektedir. Bir yandan da zaman faktörü söz konusudur. Bu nedenle de sistemlerin girdisi olan enerji, bilgi, maddenin birbirleri ve entropi ve zamanla ilişkisi farklı bilim dallarınca incelenmektedir. Fiziksel sistemlerdeki ısı ve enerji kayıpları düzensizliği artırdığından entropi artışı ile açıklanmakta, sistemlerde bilgi artışı belirsizliği azalttığından entropiyi azaltmakta, bir sistemde maddelerin parçalanması, dağılması, ufalanması düzensizliği artırdığından entropiyi artırmakta, kapalı bir sistemde ise zamanla dışarıdan bir etki olmayacağından düzensizlik artacağından entropi artmaktadır. Sistemler için enerji, zaman ve entropi birbiriyle yakından ilişkilidir. Dünyayı düşündüğümüzde dünya güneşten enerji alışverişinde bulunması dışında kapalı bir sistemdir. Kapalı sistemlerinse zamanla yani zaman ilerledikçe düzensizliği artacak ve bu süreçte enerjisi azalacaktır. Sir Arthur Eddington, "Entropi zamanın okudur" sözüyle zaman ve entropinin eş yönlü olarak değiştiğini ifade etmektedir (Alphan ve Efil, 2011).

Fizikte termodinamik kendi bakış açısından enerji dönüşümleri açısından enerji bir formdan diğerine dönüşürken kaybolan enerjiyi "entropi" ile açıklamıştır. Fizikte düzensizliğin artmasına şu örnekler verilebilir. Fiziksel olarak maddenin katıdan sıvıya ve sıvıdan gaz haline geçmesi moleküllerin düzensizliğini artıracığından entropi artmaktadır. Fiziksel bir sistemde sıcaklık arttırılırsa moleküller hareketleneceğinden ve düzensizlikleri artacağından entropi

artmaktadır. Sıcaklık azaltıldığında gerçekleşen donma, soğuma, yoğunlaşma gibi olaylarda moleküller daha düzenli bir hale geleceğinden fiziksel sistemlerin entropisi azalacaktır. Bu durumda maddenin katı halinde entropisi en az gaz halinde ise entropisi en fazladır.

Claude Shannon bilgi teorisi konusunda çalışan bir akademisyendir ve bilgi ve entropinin aynı madalyonun farklı yüzleri olduğu görüşünü ortaya koymuştur (Shannon, 1948). Kişi, ilgili sistem/süreç ile ilgili daha fazla bilgi edindiğinde sistem/süreç üzerindeki kontrolü artacak ve içinde bulunduğu belirsizlik azalacaktır. Faydalı bilgi, sistemdeki belirsizlikleri yani entropiyi azaltacağından entropinin tersi bir işlevle sistemin entropisini azaltır ve bu nedenle de “negatif entropi” olarak tanımlanabilir (Brillouin, 1960). Evrendeki entropi sürekli olarak artmakta iken bir yandan insan, enerji ve madde ile bilgiyi bir arada kullanarak birçok konuda belirsizlikleri gidermekte ve evrenin entropisini azaltmakta ve negatif entropisini (negentropi) artırmaktadır. Bilgi teorisine göre evrende bilgi alışverişi arttıkça, bilinmeyen konularda yeni bilgi üretildikçe evrendeki belirsizlikler (evrenin entropisi) azalacak ve negatif entropi (negentropi) de artacaktır.

Yönetim sistemlerinde işletmelerin önemli amaçlarından biri yüksek verimlilik düzeyinde çalışmaktır. Bir işletmede herhangi bir süreç, personel, vb. kaynaklı verimsizlik bu yönetim sisteminin (işletmenin) entropisinde bir artışa neden olacaktır. Yönetim sistemlerinde işletmenin verimliliğini azaltan her türlü faktör entropi olarak kabul edilerek işletmelerde toplam entropi yönetimi bir yönetim modeli olarak kullanılabilmektedir.

Sosyal sistemlerde; sistemin ögeleri arasındaki, bütünleşememe ve organize olamama gibi sebeplerle toplumsal kaynakların faydalı işe dönüştürülmesi sürecinde oluşan kayıplar, “sosyal entropi” olarak tanımlanmaktadır (Bailey, 1990).

1.2 Tezin Amacı

Öncelikle literatürde istatistik alanında entropi konusunda sınırlı sayıda olan tez çalışmalarına katkıda bulunulması ve entropi kavramı, yasası, ölçüleri ve özellikle

entropiye dayalı araştırma yöntemlerinin kullanımı özgün bir şekilde anlatılarak entropi konusunun hem kendisine hem de araştırma yöntemlerinde kullanımına dikkat çekilmesi ve bu konuda daha fazla çalışma yapılmasının sağlanması amaçlanmaktadır.

Çalışmanın uygulama bölümünde ise entropiye dayalı ÇKKV yöntemleri olan (TOPSİS ve ARAS) yöntemleri ile AB ülkeleri ve Türkiye'nin mutluluk sıralamaları vasıtasıyla diğer istatistiksel analiz yöntemleri olan TBA sıralamaları ve kümeleme analizi küme gruplarının karşılaştırılmasıyla bu 4 yöntemin karşılaştırılması amaçlanmaktadır.

1.3 Orijinal Katkı

Öncelikle bu tez çalışması ile literatürde istatistik alanında entropi konusunda sınırlı sayıda çalışma bulunduğundan konusu itibarıyla orijinal bir katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Ayrıca istatistik alanındaki bu konudaki tezlerden farklı olarak entropiye dayalı araştırma yöntemleri bu tezde bir arada incelenmiş ve anlatılmıştır. İstatistik alanında entropi konusunda ve özellikle de entropiye dayalı araştırma yöntemleri konusunda daha fazla çalışma yapılmasının teşvik edilmesi için entropi kavramı, yasası ve ölçüleri ve entropiye dayalı araştırma yöntemleri özgün bir şekilde anlatılmaya çalışılmıştır.

Çalışmanın uygulama bölümünde AB ülkeleri ve Türkiye'nin mutluluk düzeylerinin karşılaştırması yardımıyla yöntemler karşılaştırılmıştır. Uygulama konusu, seçilen veri seti ve kullanılan yöntemlerin bütünselliği dikkate alındığında özgün bir çalışma olduğu düşünülmektedir.

ENTROPİ YASASI VE ENTROPİ ÖLÇÜLERİ

2.1 Entropi Yasası

Entropinin asıl çıkış noktası ve ilk kullanıldığı alan fizikteki termodinamik alanıdır. Hatta “Entropi” kelimesi ilk defa Rudolf Julius Emanuel Clausius’un “Mekanik Isı Teorisi” kitabında, termodinamik bir sistemin enerji miktarının ölçüsünü ifade etmek için kullanılmıştır. Termodinamik alanında bilinen termodinamik yasaları ise makinaların öneminin iyice arttığı 19. Yüzyılda sanayi devriminin gerçekleştiği dönemde, bilim insanlarının sanayide kullanılan makinaların verimliliğini araştırmaları sırasında enerjinin korunumunu yöneten kuralları anlamaya başladıkları zamanlarda ortaya çıkmıştır. Bu yasaların en ünlüsü Clausius tarafından geliştirilen Termodinamiğin İkinci Yasası, entropi yasasıdır. Entropi yasasına göre kapalı ve tersinir bir sistemin entropisi artmaktadır (Baray, 2003).

Termodinamik fiziğin bir alt konusu olan temel bir bilim dalı olup enerji ile ilgilenmektedir. Enerji ve enerji formlarının birbirine dönüşümlerini incelemektedir (Çengel ve Boles, 1996). Termodinamik biliminin kurucusu Fransız Fizikçi Sadi Carnot, sanayi devriminin gerçekleştiği yıllar olan 19. Yüzyılda buhar makinelerinin verimliliği konusunda makinelerde ısı konusunu çalışırken makinelerdeki ısıнын mekanik enerjiye dönüşürken bir kısmını kaybettiğini keşfetmiştir. Bu keşfi de kaybolan enerjiyi ifade etmekte olup termodinamiğin ikinci yasasının ısı birimi (kalori) olarak ifadesidir.

Termodinamikte 4 temel yasa bulunmaktadır ancak bu yasalardan ilk iki yasa evrenseldir ve evrendeki enerji dönüşümlerini açıklamaktadır. Termodinamiğin I. yasası enerjinin korunumu yasası olup enerjinin yoktan var ve vardan yok edilemediğini sadece enerjinin bir formdan başka bir forma dönüştüğünü ve toplam enerjinin aynı kaldığını ifade etmektedir. Örneğin; sıcak bir bardak su bir odada bırakılırsa etrafına ısı yayarak soğumaya başlayacaktır ve bir ısı enerjisi kaybedecektir ancak ısı ortama yayılacak ve ortam ısınacaktır. Kısacası bardağın

ortama verdiği enerji ile ortamın aldığı enerji birbirine eşit olacak ve sadece enerji dönüşmüş olacaktır. Termodinamiğin ikinci yasası ise entropi yasası olarak bilinmekte olup enerji dönüşümleri sırasında toplam enerji aynı kalsa da enerjinin bir bölümünün kaybolmakta olduğunu ve iş üretmeyen, faydası olmayan enerjiye dönüştüğünü göstermektedir. Mesela bir arabanın hareketi sırasında sürtünme kuvveti ile çıkan ısı enerjisi iş üretmeyen, kullanılamayan, kaybolan bir enerji formuna dönüşmüştür (Çamdalı, 2012).

Termodinamiğin I. Yasası evrendeki toplam enerjinin miktarı ile ilgilenirken Termodinamiğin II. Yasası ise evrendeki enerjinin niteliği ile ilgilenmektedir. Kendiliğinden olan süreçlerde enerjinin form değiştirirken sürekli daha az faydalı, daha az iş yapabilir, daha az kullanılabilir hale geldiğini anlatmaktadır. Örneğin; bir araba hareket ederken kullanılan enerjinin bir bölümü arabanın sürtünme kuvveti ile kaybedilecek ve baştaki kullanılabilir, iş yapabilir enerjinin bir kısmı kullanılamayan bir miktar enerjiye dönüşecektir. Termodinamikteki bu yasa evrenin temel yasalarından olup birçok alanda anlamı vardır. Termodinamiğin II. yasası Clausius tarafından geliştirilmiş olup bu yasa entropi yasası olarak ta bilinmektedir. Entropi yasası, evrende herşeyin maksimum düzensizlik ve minimum enerji yönünde hareket ederek; çoktan aza, kullanılabilir halden kullanılamaz olana, doğumdan ölüme, düzenden düzensizliğe doğru doğal bir gidişe eğilimli olduğunu söylemektedir. Örneğin bir odaya bırakılan bir bardak çay zamanla soğur, fakat hiçbir zaman kendiliğinden ısınmaz. Isı, her zaman sıcak olan ortamdan soğuk olan ortama doğru akar asla soğuk olandan sıcak olana doğru akmaz. Entropi yasasına göre ısının soğuk bir cisimden sıcak bir cisme akması imkansızdır. Bir ortamda parfümün kapağı açık bırakılırsa koku odaya dağılır ancak odaya dağılmış olan moleküller kendiliğinden bir şişeyi dolduramaz. Bir cam bardak yere düşüp kırılınca kendiliğinden parçalara ayrılır ancak bu parçalar kendiliğinden tekrar bir araya gelerek cam bardağı yeniden aynı şekilde oluşturamaz. Kısacası entropi yasasına göre bu tür süreçler tersinir değildir. Yani geri döndürülemezdir ve tek yönlü olarak çalışmaktadır (Çengel ve Boles, 1996). Entropi Yasası'ndan ortaya çıkan genel sonuç, kapalı bir sistemde düzensizliğin ölçüsü olan entropinin ya sabit kalacağı ya da artacağıdır. Kapalı sistemler

Çevreleri ile herhangi bir etkileşimde olmayan sistemlerdir. Entropi yasasına göre evrenin entropisi sürekli olarak artmaktadır. Yine bu yasaya göre evrenin entropisi hiçbir zaman azalmayacaktır yani negatif olmayacaktır.

Entropinin sembolü S olup (2.1) formol, evrenin entropisindeki değişimin her zaman sıfırdan büyük olacağını ve hiçbir zaman negatif olmayacağını ifade etmektedir. Evrende enerji korunumu özelliği varken entropinin korunumu olmadığı gibi evrenin entropisi sürekli artmaktadır.

$$\Delta S_{\text{evren}} > 0 \quad (2.1)$$

ΔS_{evren} = Evrenin Entropisinde Oluşan Değişim

Dünya da evrensel sistemin bir parçası olarak güneşten enerji alır ancak vresi ile ihmal edilebilir seviyede madde alışverişi halinde olduğundan kapalı bir sistemdir. Dünyanın kapalı bir sistem olması ve enerji dönüşümleri ile birlikte entropisinin artması, kullanılabilir enerji miktarının sürekli olarak azalması anlamına gelmektedir. Ayrıca bu enerji dönüşümleri esnasında kaçınılmaz olarak ortaya çıkan ısı enerjisi ve atıklar sebebiyle yerküre sürekli olarak ısınmakta ve kirlilik oranları da artış göstermektedir (Alphan ve Efil, 2011: 56).

Enerji, değişikliklere neden olan bir etmen olarak tanımlanmakta olup entropi ise enerji ile doğrudan ilişkili bir kavram olarak enerjideki düzensizliği anlatmaktadır. Entropi, evrenin başlangıcında en düşük seviyede hatta sıfır seviyesindedir. Evrenin başlangıcıyla birlikte madde ve enerjinin ortaya çıkışı ile entropi de ortaya çıkmıştır ve zaman içerisinde evrenin entropisi sürekli olarak artış göstermektedir. Bu bakış açısı ile madde ile enerjinin olduğu her yerde entropi de olacaktır (Külcü, 2018).

2.1.1 Entropi Yasasının nemi

Entropi, en önemli fizikçilere göre fiziğin en temel yasasıdır. Albert Einstein'e göre bilimin birinci yasası entropi yasasıdır. Albert Einstein, entropi yasasının da ikinci yasası olduğu termodinamik yasaları için düşüncelerini şu sözü ile ifade etmiştir: "Bir kuram önermeleri ne kadar basit, ilgili olduğu şeyler ne kadar çok ve uygulama alanı ne kadar geniş olursa, o kadar etkileyicidir. Bu nedenle klasik termodinamik beni derin bir şekilde etkiledi. Temel kavramlarının

uygulanabilirliği ile asla yıkılmayacağına emin olduğum evren içeriğinin tek fiziksel kuramıdır” (Lieb ve Yngvason, 2000: 32).

Arthur Eddington’a göre entropi yasası, doğa yasaları içinde en önemli yere sahiptir ve evren hakkındaki bir teorinin, Maxwell’in formülleriyle, hatta daha önceden yapılmış bazı deneylerle uyumsuz olsa bile doğru olma şansının bulunabileceğini ama entropi yasası ile çelişiyorsa hiçbir şansının olmadığını söyler. Matematik Profesörü Ian Stewart’a göre Bilinmeyenin Peşinde: “Dünyayı değiştiren 17 denklem” kitabında yer alan denklemler arasında matematikte pisagor teoremi, fizikte Newton’un yer çekimi kuvveti, istatistikte önemli yeri olan normal dağılım gibi denklemler bulunurken aynı zamanda enerji ile ilgili önemli yasalar da bulunmaktadır (Tablo 2.1).

Bu 17 denklem arasında enerji ile ilgili olarak 2 tane yasa bulunmaktadır. Bu yasalardan biri Einstein’ın 1905 yılında geliştirdiği fiziğin temeli sayılan İzafiyet Teoremi (Görelilik Yasası)’dır. Einstein ünlü formülü ($E = mc^2$) enerji ile ilgili olup E enerji, m madde ve c ışık hızı olmak üzere madde ve enerjinin birbirinden çok ta farklı olmadıklarını maddenin enerjinin daha yoğun bir hali olduğunu anlatmaktadır. Bu denklemlerden enerji ile ilgili olan bir diğeri ise entropi yasasıdır. Entropi yasası ise termodinamik yasalardan ikincisi olup evrende entropinin sürekli olarak arttığından bu nedenle entropi değişiminin hep sıfır veya sıfırdan fazla olduğundan bahsetmektedir (Tablo 2.1).

Tablo 2.1. Dünyayı değiştiren 17 denklem (Stewart, 2013)

1	Pisagor Teoremi	$a^2 + b^2 = c^2$	Pythagoras M.Ö. 530
2	Logaritma	$\log xy = \log x + \log y$	John Napier, 1610
3	Diferansiyel ve İntegral Hesabı	$\frac{df}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(t+h) - f(t)}{h} \right)$	Newton, 1668
4	Yerçekimi Kanunu	$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$	Newton, 1687
5	-1’in Karekökü	$i^2 = -1$	Euler, 1750

Tablo 2.1. Dünyayı değiştiren 17 denklem (Stewart, 2013) (Devamı)

6	Çok Yüzlüler için Euler Formülü	$V - E + F = 2$	Euler, 1751
7	Normal Dağılım (Gauss Dağılımı)	$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	C. F. Gauss, 1810
8	Dalga Denklemi	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	J. d’Almbert, 1746
9	Fourier Dönüşümü	$f(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i x w} dx$	J. Fourier, 1822
10	Navier-Stokes Denklemi	$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) = -\nabla p + \nabla \cdot T + f$	C. Navier, G. Stokes, 1845
11	Maxwell’in Denklemleri	$\nabla \cdot E = 0 \quad \nabla \cdot H = 0$ $\nabla \times E = -\frac{1}{c} \frac{\partial y}{\partial x} \quad \nabla \times H = \frac{1}{c} \frac{\partial y}{\partial x}$	J.C. Maxwell, 1865
12	Termodinamik’in İkinci Yasası (Entropi Yasası)	$dS \geq 0$	L Boltzman, 1874
13	İzafiyet Teoremi	$E = m c^2$	Einstein, 1905
14	Schrödinger Denklemi	$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = H \psi$	E. Schrodinger, 1927
15	Bilişim Kuramı	$H = - \sum p(x) \log p(x)$	C. Shannon, 1949
16	Kaos Teorisi	$x_{t+1} = k x_t (1 - x_t)$	Robert May, 1975
17	Black Scholes Denklemi	$\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + r S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} - r \cdot V = 0$	F. Black, M. Scholes, 1990

2.2 İstatistiksel Termodinamikte Entropi Yasası

Termodinamik fiziğin bir alt dalıdır ve ısı ile ilgili süreçleri incelemektedir. Termodinamik ise 3 grubu ayrılmaktadır. Bunlar; klasik, istatistiksel ve kimyasal termodinamiktir. İstatistiksel termodinamik; klasik termodinamik yasalarının istatistik alanı yardımıyla ifade edilmiş halidir. Ayrıca entropi kavramının açıklaması; fiziğin bir konusu olan klasik termodinamikte makroskopik açıdan bir

bakış açısını yansıtmakta iken istatistiksel termodinamikte mikroskobik bir bakış açısını yansıtmaktadır. Bu nedenle de istatistiksel termodinamik, mikroskobik bakış açısıyla klasik termodinamikteki bazı konulara da açıklamalar bulmuştur.

Entropi kavramı, Avusturyalı Fizikçi Ludwig Boltzmann tarafından kapalı bir kaptaki ideal bir gazın düzensizliğinin bir ölçüsü olarak 19. Yüzyılın sonlarında ortaya konulmuştur. Ludwig Boltzmann düzensizliğin dâhisi olarak bilinmekte ve istatistiksel fizik alanındaki buluşları ile ünlü olup 19. Yüzyılın sonlarında termodinamiksel düzensizliği formülize etmiştir. Bir sistemin entropisi (S), sistemin girilebilir durumlarının (termodinamik olasılıklar) (P) sayısı cinsinden (2.2) denklemindeki gibi ifade edilmektedir. Denklemden sistemin girilebilir durumlarının sayısı (termodinamik olasılıklar) bir bakıma düzensizlik arttıkça entropinin de artacağı sonucuna ulaşılmaktadır.

$$S = k \cdot \ln P \quad (2.2)$$

k = Boltzman sabiti

2.3 Shannon'ın Entropi Fonksiyonu ve Önemi

Shannon'a kadar entropi kavramı sadece fizik alanında kullanılmıştır. Bir sistemin S entropisi, sistemin girilebilir durumlarının P sayısı cinsinden (2.3)'teki gibi ifade edilmektedir.

$$S = k \cdot \ln P \quad (2.3)$$

(k = Boltzman sabiti)

Ancak denklem (2.3), fizik alanında kullanılabilen iken matematik veya istatistik alanında kullanılamamaktadır.

Claude E. Shannon'ın 1948 yılında Bell laboratuvarlarında, fiziğe ait olan entropi kavramı üzerinde düşünerek matematiksel bilgi kuramının temelini oluşturan "A Mathematical Theory of Communication" adlı çalışması ile bir seçimde yapılan tercihlerin ya da bir olaya ait belirsizliğin bir ölçüsünü entropi fonksiyonunu geliştirerek bulmuştur. Shannon tarafından bulunduğundan dolayı bu fonksiyon Shannon'ın entropi fonksiyonu olarak bilinmektedir.

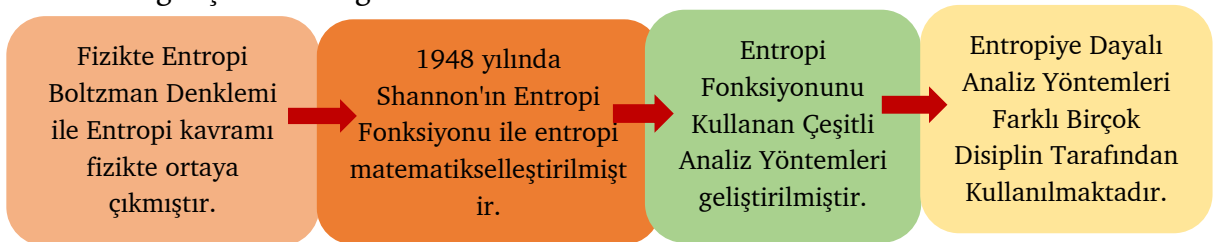
Shannon, entropi fonksiyonunu bularak durumlar ve olaylar için belirsizliğin ölçümünü fonksiyonlaştırmıştır. Bu nedenle Shannon'ın entropi fonksiyonu, entropi kavramını matematiğe kazandırmıştır. Ardından entropi fonksiyonuna dayalı analiz yöntemleri geliştirilmiş ve bu yöntemler son dönemde mühendislik alanında da sıkça kullanılmaktadır.

Shannon ve Weaver 1948 yılında olasılık teorisinde entropiyi; bilginin içerisindeki belirsizliğin ölçümü olarak tanımlamışlardır.

Jaynes 1957 yılında ters alma problemlerinin çözümü için Shannon'ın entropi fonksiyonunu maksimize eden maksimum entropi yöntemini bulmuştur. Daha sonra entropi optimizasyon yöntemleri geliştirilmiş ve bu yöntemler özellikle istatistik, matematik, fizik, mühendislik, iktisat, finans, pazarlama gibi birçok alanda uygulama bulmaktadır. Literatürde gerçekleştirilen çalışmalarda entropi optimizasyon yöntemlerinden maksimum entropi (MaxEnt) ve minimum entropi (MinEnt) yöntemlerinin daha fazla kullanıldığı görülmektedir.

Özellikle literatürde istatistik alanında çoklu regresyon analizinde önkoşulların sağlanamadığı durumlarda entropi optimizasyon yöntemlerinin kullanıldığı çalışmalar bulunmaktadır. Ayrıca entropiye dayalı BBA'de son dönemde mühendislik alanında yüz tanıma uygulamalarında sıklıkla kullanıldığı görülmektedir. Tez çalışmasının 3. Bölümünde entropiye dayalı araştırma yöntemleri detaylıca incelenmiştir.

Kısacası entropiyi fizik alanından esinlenerek fonksiyonlaştırarak matematiğe kazandıran ardından entropiye dayalı analiz yöntemleri yoluyla tüm disiplinlere kazandıran Claude Shannon'ın entropi fonksiyonu diğer tüm çalışmaların temelini oluşturmuştur. Bu nedenle bilimde Claude Shannon'ın entropi fonksiyonunu bulması oldukça önemlidir. Şekil 2.1'de entropi kavramının ortaya çıkışından itibaren gelişim süreci görülmektedir.



Şekil 2.1 Entropiye dayalı araştırmaların gelişim süreci

2.3.1 Shannon'ın Entropi Fonksiyonu ile Olasılık, Tahminler ve İstatistik Biliminin İlişkisi

Fizikte termodinamikte ortaya konulan sistemlerin entropisini, belirsizliğinin ölçüsünü en iyi ifade edebilecek bilim dalı istatistiktir. Çünkü belirsizlik durumunda netlik veya kesinlik yoktur ancak tahminlerde bulunulur ve ancak tahminler ve olasılıklardan söz edilebilir. Bu nedenle belirsizliğin ilk defa fonksiyonlaştırılması yani matematiksel olarak ifade edilmesi Shannon'ın Entropi Fonksiyonundaki olasılıklar sayesinde olmuştur.

Shannon tarafından ortaya konulan Entropi Fonksiyonu $H(p)$ belirsizliğin bir ölçüsüdür. Belirsizliği ölçen bu fonksiyonun içinde olasılıkların olması çok mantıklıdır. Çünkü bildiğimiz gibi istatistik yöntembiliminin temeli tahminler ve olasılıklar üzerine kuruludur. Örneğin; Olasılık denilen kavram, bir olay gerçekleştiğinde olası tüm sonuçları, tahminleri bize verir. Zar atma deneyinde zarın hangi yüzünün geleceğini bilemeyiz. Kesinlik yoktur ancak olasılık yardımıyla bu belirsizlik altında tahminlerde bulunabiliriz. Shannon'ın entropi fonksiyonunun da denklemin sol tarafında belirsiz bir sistemin ölçüsü, bir durumun belirsizliğinin ifadesi ancak sağ tarafta olasılıkların yer aldığı bir fonksiyonla olabildi.

2.3.2 Shannon'ın Entropi Fonksiyonu

Shannon'ın entropi fonksiyonunun hesaplanması X rastlantı değişkeninin kesikli ve sürekli olmasına göre değişmektedir. X rastlantı değişkeni kesikli iken toplam, sürekli iken de integral ile hesaplama gerçekleştirilmektedir.

- X kesikli rastlantı değişkeninin dağılımı $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve olasılıkları $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ olsun. Olasılık kurallarına göre olasılıklar hem sıfırdan büyüktür hem de toplamı 1'dir. Bu durum her bir i değeri için olasılıklar 0'a eşit veya büyük ($p_i \geq 0$) ve olasılıklar toplamı 1 olarak (2.4) eşitliğindeki gibi ifade edilmektedir.

$$\sum_{i=1}^n p(x_i) = 1 \quad (2.4)$$

$p_1, p_2, \dots, p_n$ bir kesikli olasılık dağılımı ise bu dağılıma ilişkin Shannon'ın Entropi Fonksiyonu;

$$H_n(p) = - \sum_{i=1}^n p(x_i) \log_2 p(x_i) \quad (2.5)$$

şeklinde olmaktadır.

- X sürekli bir rastlantı değişkeni olduğunda shannon'ın entropi fonksiyonu (2.6) denklemdeki gibi hesaplanmaktadır. Sürekli durumlardaki entropiye, diferansiyel entropi ismi de verilmektedir.

$$H = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \log(f(x)) dx \quad (2.6)$$

- Shannon'ın entropi fonksiyonunda logaritmanın tabanı genel olarak 2 olarak alınmakta olup entropi birimi “bit (binary digit)” olarak ifade edilmektedir. Ancak logaritmanın tabanı e olarak alınırsa entropi birimi bu sefer “nat” olmaktadır (Garcia, 1994: 203).
- X rd'nin kesikli olduğu durumlarda eğer rastlantı değişkeninin alabileceği tüm değerlerin $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ olasılıkları birbirine eşit ise olasılıkların toplamı 1 olduğundan $(\sum_{i=1}^n p(x_i) = 1)$, rastlantı değişkeninin alabileceği değerlerin olasılıkları birbirine eşit ve $p(x_1) = p(x_2) = \dots = p(x_n) = \frac{1}{n}$ olduğu durumda entropi değeri (2.7) eşitliğindeki gibi olmaktadır.

$$H(p) = \log_2 n \quad (2.7)$$

Bu entropi değeri X rastlantı değişkeninin en heterojen olduğu durumdaki (rastlantı değişkeninin aldığı tüm değerleri alma olasılıklarının birbirine eşit olduğu) entropi değeridir. Heterojen durumdaki entropi sistemin maksimum entropisidir.

Aşağıdaki örneklerde farklı deneyler için sistemlerin maksimum entropileri hesaplanmıştır. (Şamilov, 2015:16).

Örnek 2.1 Para atma deneyine uygun fiziksel sistemin maksimum entropisinin hesaplanması.

Para atma deneyine ait tüm sonuçların örneklem uzayı $S=(\text{Yazı}, \text{Tura})$ olup denemenin olası tüm sonuçlarının sayısı $n=2$ ve (2.8)'deki hesaplamadan para atma deneyine uygun fiziksel sistemin maksimum entropisinin 1 bit olduğu görülmektedir.

$$H(p) = \log_2 2 = 1 \text{ bit} \quad (2.8)$$

Örnek 2.2 Zar atma deneyine uygun fiziksel sistemin maksimum entropisinin hesaplanması.

- Zar atma deneyinde tüm sonuçlara ait örneklem uzayı $S=(1,2,3,4,5,6)$ olup denemenin olası tüm sonuçlarının sayısı $n=6$ ve (2.9)'daki gibi bulunmaktadır. (2.9)'daki hesaplardan zar atma deneyine uygun fiziksel sistemin maksimum entropisinin 2,58 bit olduğu görülmektedir.

$$H(p) = \log_2 6 = 2,58 \text{ bit} \quad (2.9)$$

Örnek 2.3 Bir satranç taşının, satranç tahtasının herhangi bir sütununda bulunması deneyine uygun sistemin maksimum entropisinin hesaplanması.

- Satranç tahtasının 8 sütunu olduğundan ve deneyin 8 tane sonucu olabileceğinden $n=8$ alınarak eşitlik (2.10)'daki gibi bulunmaktadır. (2.10)'daki hesaplardan bir satranç taşının, satranç tahtasının herhangi bir sütununda bulunması deneyine uygun fiziksel sistemin maksimum entropisi 2,58 bit olduğu görülmektedir.

$$H(p) = \log_2 8 = 3 \text{ bit} \quad (2.10)$$

Örnek 2.4 Bir satranç taşının satranç tahtasının herhangi bir karesinde bulunması deneyine uygun sistemin maksimum entropisinin hesaplanması.

- Satranç tahtasının 64 karesi bulunduğundan ve bir deneyin 64 sonucu olabileceğinden $n=64$ olarak alınarak eşitlik (2.11)'deki gibi hesaplanmakta olup bu durumda bir satranç taşının, satranç tahtasının herhangi bir karesinde bulunması deneyine uygun fiziksel sistemin maksimum entropisinin 6 bit olduğu görülmektedir.

$$H(p) = \log_2 64 = 6 \text{ bit} \quad (2.11)$$

(2.12) nolu denklemde görüleceği gibi bir deneydeki maksimum entropinin bulunması formülünde n değeri büyüdükçe maksimum entropi değerinin de $H(p)$ arttığı görülmektedir. Bu nedenle bir deneydeki olası sonuç sayısı daha fazla ise maksimum entropi de daha fazladır.

$$H(p) = \log_2 n \quad (2.12)$$

Örneklerde verilen deneyler için maksimum entropi değerleri karşılaştırıldığında deney olası sonuçları daha fazla olan deneylerin maksimum entropisinin daha fazla olduğu görülmektedir. Örneğin; satranç taşının satranç tahtasının herhangi bir karesinde bulunması durumunda, herhangi bir sütununda bulunması durumuna göre maksimum entropi değerinin daha yüksek olduğu görülmektedir. Deneyler arasında en az maksimum entropi değeri, deneme sonucu yalnızca 2 olan para atma deneyine aittir (Tablo 2.2).

Tablo 2.2 Farklı deneyler için sistemin maksimum entropi değerleri

Deney/Olay Adı	Deneyin Olası Tüm Sonuçları	Deneyin Tüm Olası Sonuçlarının Sayısı (n)	Sistemin Maksimum Entropisi Hesabı $H(p)$	Sistemin Maksimum Entropi Değeri (bit)
Para atma deneyi	Paranın Yüzleri (Yazı, Tura)	$n = 2$	$H(p) = \log_2 2$	1
Zar atma deneyi	Zarın tüm yüzleri (1,2,3,4,5,6)	$n = 6$	$H(p) = \log_2 6$	2,58
Satranç taşının herhangi bir sütunda olması	Satrançta sütunlar (1,2,3,4,5,6,7,8)	$n = 8$	$H(p) = \log_2 8$	3
Satranç taşının satranç tahtasının herhangi bir karesinde bulunması	Satrançta kare sayısı 64 tanedir (1,2,...,64)	$n = 64$	$H(p) = \log_2 64$	6

2.3.3 Shannon'un Entropi Fonksiyonunun Özellikleri

Shannon'ın entropi fonksiyonunun özellikleri aşağıda yer almaktadır: (Cover ve Thomas, 2006: 41).

1. Entropi fonksiyonu her zaman 0 ve 0'dan büyük değerler alır. Entropi değeri hiçbir zaman negatif olamaz. Bu durum (2.13)'te ifade edilmektedir.

$$H(X) \geq 0 \quad (2.13)$$

2. Koşullandırma entropiyi azaltmaktadır. Bu durum Teorem 2.1'den anlaşılmaktadır.

Teorem 2.1 X ve Y iki rd olmak üzere $H(X/Y) \leq H(X)$ ve X ve Y rd'leri bağımsız ise

$$H(X/Y) = H(X) \quad (2.14)$$

olacaktır.

İspat: X ve Y rd'leri bağımsız ise $H(X, Y) = H(X) + H(Y)$ olduğundan;

$$H(X, Y) = H(X/Y) + H(Y)$$

$$H(X/Y) = \frac{H(X, Y)}{H(Y)}$$

$$H(X/Y) = \frac{H(X) + H(Y)}{H(Y)} = H(X)$$

$$H(X/Y) = H(X)$$

3. Entropiye Bağlı Bağımsızlık: $X_1, X_2, \dots, X_n$ $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 'e göre çizilebilir.

Bu durumda;

$$H(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq \sum_{i=1}^n H(X_i) \quad (2.15)$$

olacaktır.

Ancak ve ancak X_i ler bağımsız ise;

$$H(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n H(X_i) \quad (2.16)$$

olmakta ve X_i 'lerin bağımsız olması durumunda geçerli bu eşitliğe toplamsallık denilmektedir.

4. $|X|$, X 'in aralığındaki elemanların sayısı gösterdiği durumda, eğer ve sadece X , X üzerinde uniform dağılıma sahipse

$$H(X) \leq \log |X| \quad (2.17)$$

olacaktır.

5. $H(p)$, p 'de konkav yani iç bükeydir.

6. Oluşma olasılığı 0 veya 1 olan bir olayın entropisi sıfırdır.

$$H_1(0) = H_1(1) = 0 \quad (2.18)$$

- Entropi fonksiyonunda olmayacağı kesin olan yani oluşma olasılığı ($p=0$) olan bir olayın entropisi hesaplanırsa;

$$H_1(p) = -p_1 \ln p_1 = -0 \cdot \ln(0) = 0$$

olduğundan entropi sıfırdır. Bu durum (2.19) eşitliği ile ifade edilmektedir.

$$H_1(0) = 0 \quad (2.19)$$

- Entropi fonksiyonunda olacağı kesin olan yani oluşma olasılığı ($p=1$) olan bir olayın entropisi hesaplanırsa;

$$H_1(p) = -p_1 \ln p_1 = -1 \cdot \ln(1) = -1 \cdot 0 = 0$$

olduğundan entropi sıfırdır. Bu durum (2.20) eşitliği ile ifade edilmektedir.

$$H_1(1) = 0 \quad (2.20)$$

- Eğer bir olayda olası durumların olma olasılıklarından sadece biri 1 ve diğer olasılıklar 0 ise bu durumda olayın entropi değeri 0 olacaktır. Bunun nedeni bu olayların durumlarının olma olasılıklarının sadece iki ihtimalinin olmasından ve belirsizliğin olmamasından kaynaklanmaktadır.

Teorem 2.2 p bir olasılık o.ü $H(p)$, p olasılığının konkav bir fonksiyonudur.

$$H(p) = \log |X| - D(p \parallel u) \quad (2.21)$$

u , $|X|$ üzerinde bir uniform dağılıma sahiptir. H 'nin konkavlığı D 'nin konveksliğini doğrudan takip eder (Cover ve Thomas, 2006: 32).

2.3.4 Önemli Olasılık Dağılımlarının Shannon Entropisi

İstatistikte yaygın kullanıldığı için önemli olan kesikli ve sürekli olasılık dağılımlarının olasılık fonksiyonları ve bu olasılık fonksiyonları ile hesaplanan shannon'ın entropi değerleri Tablo 2.3'te görülmektedir.

Tablo 2.3 Bazı olasılık dağılımlarının shannon entropisi (Dinçer, 2015: 28)

Dağılımın Adı	Olasılık Fonksiyonu	Shannon'ın Entropisi
Üstel Dağılım	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x, \lambda > 0$	$1 - \ln \lambda$
Normal	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\ln(2\pi e \sigma^2)$
Düzgün	$f(x) = \frac{1}{\beta - \alpha}; \quad \alpha \leq x \leq \beta$	$\ln(\beta - \alpha)$

Tablo 2.3 Bazı olasılık dağılımlarının shannon entropisi (Dinçer, 2015: 28)

(Devamı)

Bernoulli	$f(k; p) = p^k (1 - p)^{1-k} ; k = 0,1$	$-q \ln(q) - p \ln(p)$
Binom	$P(K=k) = \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} p$	$\frac{1}{2} \ln(2\pi n e p (1-p)) + O\left(\frac{1}{n}\right)$
Geometrik	$P(K=k) = p^k (1-p)^{k-1}$	$\frac{-(1-p) \log_2(1-p) - p \log_2(p)}{p}$
Gama	$f(x) = \frac{x^{k-1} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right)}{\Gamma(k) \theta^k}$	$k + \ln \theta + \ln \Gamma(k) + (1 - k) \Psi(k)$
Beta	$f(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}$	$\ln B(\alpha, \beta) - (\alpha-1) \Psi(\alpha-1) - \Psi(\beta) + (\alpha + \beta - 2) \Psi(\alpha + \beta)$

2.4 Entropi Ölçüm Birimi

Farklı alanlarda herhangi bir büyüklüğün ölçülmesinde aynı türden birim bir büyüklük kabul edilerek bu büyüklüğe göre ölçümler değerlendirilir. Örneğin; uzunluk ölçümlerinde iki yer arasındaki mesafe 20 km ise bu baz alınan birim uzunluk olan 1 km'nin 20 katı kadar bir mesafe demektir. Bir araba saatte 1 km yol alıyorsa bu arabanın hızı 1 km/saat olarak kabul edilmektedir. Bu durumda bir arabanın hızının 180 km/saat olduğu belirtilirse birim hızın 180 katı kadar bir hıza sahip olduğu anlaşılmaktadır. Sıcaklık ölçümlerinde ise bir birim sıcaklık 1°C olarak kabul edilir ve eğer bir cismin sıcaklığı 50°C deniliyorsa buradan birim sıcaklığın 50 katı olduğunu anlamalıyız. Benzer biçimde bir sistemin entropisinin (belirsizliğinin) ölçümünde de birim entropi tanımı olacaktır. Bu birim entropi, basit bir sistemin entropisi olacaktır. Bu basit sistem iki duruma sahip sistemdir. Bir olay sonucu yalnızca 2 sonucu olan bir sistem basit bir sistemdir.

Örnek 2.5 Para atma deneyi, 2 duruma sahip olan bir fiziksel sistemdir. Bu şekilde bir sistemin entropisi aşağıdaki shannon'ın entropi fonksiyonu yardımıyla 1 olarak elde edilmektedir. 2 duruma sahip basit bir fiziksel sistemin entropisi 1 olmakta ve bu şekilde bir sistemin entropisi birim entropi değeri olarak kabul edilir ve bit (binary digit) denir. Eğer bir sistemin entropisi 25 bit ise entropi biriminin 25 katı kadar bir entropi değerine sahip olduğu anlaşılmaktadır (Şamilov, 2015: 16).

$$H(p) = - \sum_{i=1}^n p(x_i) \log_2 p(x_i) \quad (2.22)$$

$$= - \left(\frac{1}{2} \cdot \log_2 \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \log_2 \frac{1}{2} \right) = 1$$

2.5 Entropi Fonksiyon Türleri

Belirsizliğin bir ölçümü olan ilk entropi fonksiyonu, Shannon'ın entropi fonksiyonudur. Shannon'ın entropi fonksiyonu, belirsizliği ilk defa fonksiyonlaştırmıştır. Ardından bu fonksiyon yardımıyla başka entropi fonksiyonları da geliştirilmiştir. Örneğin; Alfred Renyi, Shannon'ın entropi fonksiyonunu geliştirerek Renyi entropi fonksiyonunu bulmuştur.

Shannon'ın entropi fonksiyonu dışında Renyi, Tsallis, Kullback Leibler en yaygın kullanılan entropi fonksiyonlarıdır. Ancak bu entropi fonksiyonları dışında başka entropi fonksiyonları da bulunmaktadır. Tablo 2.4'te 23 tane entropi fonksiyonu bulunmaktadır. Bu fonksiyonların ortak özellikleri, belirsizliğin ölçümünde kullanılmaları olup genelde bu fonksiyonlarda logaritmanın olduğu görülmektedir.

Tablo 2.4 Belirsizliği ölçmek için kullanılan entropi fonksiyonları (Esteban ve Morales, 1995: 338)

No	$h(x)$	$\vartheta_1(x)$	$\vartheta_2(x) v_i$	
1	x	$-x \log x$	x	v
2	$(1-r)^{-1} \log x$	x^r	x	v
3	x	$-x^r \log x$	x^r	v
4	$(s-r)^{-1} \log x$	x^r	x^s	v
5	$(1/s) \arctan x$	$x^r \sin(s \log x)$	$x^r \cos(s \log x)$	v
6	$(m-r)^{-1} \log x$	x^{r-m+1}	x	v
7	$((m-r))^{-1} \log x$	$x^{r/m}$	x	v
8	$(1-t)^{-1} \log x$	x^{t+s-1}	x^s	v
9	$(1-s)^{-1}(x-1)$	x^s	x	v

Tablo 2.4 Belirsizliği ölçmek için kullanılan entropi fonksiyonları (Esteban ve Morales, 1995: 338) (Devamı)

10	$(t-1)^{-1}(x^t-1)$	$x^{1/t}$	x	v
11	$(1-s)^{-1}(e^x-1)$	$(s-1)x\log x$	x	v
12	$(1-s)^{-1}(x^{(s-1)/(r-1)}-1)$	x^r	x	v
13	x	$-x^r\log x$	x	v
14	$(s-r)^{-1}x$	$x^r - x^s$	x	v
15	$(\sin s)^{-1}x$	$x^r\sin(s\log x)$	x	v
16	$(1+1/\lambda) \log (1+\lambda) - x/\lambda$	$(1+\lambda x) \log(1+\lambda x)$	x	v
17	x	$-x\log((\sin(sx)/2\sin(s/2)))$	x	v
18	x	$(\sin(sx)/2\sin(s/2)) \log((\sin(sx)/2\sin(s/2)))$	x	v
19	x	$-x\log x$	x	v_i
20	x	$-\log x$	1	v_i
21	$(1-r)^{-1}\log x$	x^{r-1}	1	v_i
22	$(1-s)^{-1}(e^x-1)$	$(s-1)\log x$	1	v_i
23	$(1-s)^{-1}(x^{(s-1)/(r-1)}-1)$	x^{r-1}	1	v_i

2.5.1 Renyi Entropisi

Olasılık teorisindeki çalışmaları ile tanınan matematikçi Alfred Renyi, Shannon'ın entropi fonksiyonu'nu geliştirerek yeni bir entropi fonksiyonu geliştirmiştir.

Renyi entropi fonksiyonu, Shannon'ın entropi fonksiyonu'nun $\alpha \rightarrow 1$ 'e yaklaşırken özel bir halidir. Benzer şekilde belirli matematiksel işlemlerle renyi entropisinden de shannon'ın entropi fonksiyonuna ulaşılabilir. Renyi entropisi (2.23) eşitliğinde görülmektedir.

$$H_R(p) = \frac{1}{1-\alpha} \log \left(\sum_{i=1}^4 p_i \right), \alpha > 0, \alpha \neq 1 \quad (2.23)$$

Renyi entropi fonksiyonu, Shannon'ın entropi fonksiyonundan elde edildiğinden renyi entropisinin özellikleri Shannon'ın entropi fonksiyonunun özelliklerine benzemektedir (Principe J.C., 2009).

1. Renyi entropisi ($H_R(X)$) negatif değerler almamakta sıfır ve sıfırdan büyük değerler almaktadır. Bu durum (2.24) eşitliği ile gösterilmektedir.

$$H_R(X) \geq 0 \quad (2.24)$$

2. Renyi entropisi ($H_R(X)$) sınırlı, sürekli ve α değerleri için artan olmayan bir fonksiyondur.

3. Renyi entropileri farklı α değerleri için korelasyonludur.

4. Renyi entropisi $\alpha < 1$ ise konkav, $\alpha > 1$ ise konvex ya da konvex değildir.

5. Renyi entropisinin toplanabilirlik özelliği vardır.

6. Renyi entropisinin maksimumu $P_i = 1/n$ için $\ln = n$ dir.

2.5.2 Tsallis Entropisi (q Entropisi)

Fizik biliminde Tsallis entropisi, standart Boltzman-Gibbs entropilerinin genelleştirilmiş halidir. Boltzmann-Gibbs entropisi, ısısal dengedeki sistemlerin faz uzayında her hali eşit olasılıkla işgal ettikleri ilkesine dayanmakta olup dengede olmayan sistemler için ise 1988 yılında Constantino Tsallis tarafından ilk kez yeni bir entropi ortaya konulmuştur. Bu nedenle tsallis entropisi veya q entropisi olarak ta anılmaktadır. Tsallis entropisinin

$\alpha \rightarrow 1$ için Shannon entropisine yaklaşmakta olduğu görülmektedir. Tsallis entropisi (2.25) denklemindeki gibidir (Tsallis, vd., 1988).

$$H_\alpha(p) = \frac{1 - \sum p_i^\alpha}{\alpha - 1} \quad (2.25)$$

$\alpha > 0$ ve $\alpha \neq 1$

2.5.3 Görelî Entropi (Kullback Leibler Uzaklığı)

Görelî entropi, iki dağılım arasındaki uzaklığın bir ölçüsü olup bu uzaklık nedeniyle Kullback-Leibler Uzaklığı da denilmektedir. İstatistikte, olabilirlik oranının beklenen logaritması olarak ifade edilmektedir. Görelî entropi, $D(p \parallel q)$

doğru dağılım p iken q 'yu tahmin etmenin verimsizliğini tahmin etmenin bir ölçüsüdür (Cover ve Thomas, 2006: 19).

$p(x)$ ve $q(x)$ olasılık fonksiyonları arasındaki Görelî Entropi veya Kullback-Leibler Uzaklığı (2.29) ve (2.30) eşitliklerindeki gibi ifade edilmektedir.

$$D(p \parallel q) = \sum_{x \in X} p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)} \quad (2.26)$$

$$D(p \parallel q) = E_p \log \frac{p(x)}{q(x)} \quad (2.27)$$

Teorem 2.3 Görelî entropi için zincir kuralı (Cover ve Thomas, 2006: 24-25).

$$D(p(x, y) \parallel q(x, y)) = D(p(x) \parallel q(x)) + D(p(y|x) \parallel q(y|x)) \quad (2.28)$$

İspat:

$$\begin{aligned} D(p(x, y) \parallel q(x, y)) &= \sum_x \sum_y p(x, y) \log \frac{p(x, y)}{q(x, y)} \\ &= \sum_x \sum_y p(x, y) \log \frac{p(x) p(y|x)}{q(x) q(y|x)} \\ &= \sum_x \sum_y p(x, y) \log \frac{p(x)}{q(x)} + \sum_x \sum_y p(x, y) \log \frac{p(y|x)}{q(y|x)} \\ &= D(p(x) \parallel q(x)) + D(p(y|x) \parallel q(y|x)) \end{aligned}$$

Teorem 2.4 Görelî Entropinin Konveksliği

$D(p \parallel q)$, (p, q) çifti için konvektir. Yani (p_1, q_1) ve (p_2, q_2) iki çift olasılık yoğunluk fonksiyonları olmak üzere tüm $0 \leq \lambda \leq 1$ için;

$$\begin{aligned} D(\lambda p_1 + (1 - \lambda) p_2 \parallel \lambda q_1 + (1 - \lambda) q_2) \\ \leq \lambda D(p_1 \parallel q_1) + (1 - \lambda) D(p_2 \parallel q_2) \end{aligned} \quad (2.29)$$

olmaktadır (Cover ve Thomas, 2006: 32).

İspat: Logaritmik toplam eşitsizliğini (2.29) denkleminin sol tarafındaki bir terime uyguluyoruz.

$$\begin{aligned} (\lambda p_1(x) + (1 - \lambda) p_2(x)) \log \frac{\lambda p_1(x) + (1 - \lambda) p_2(x)}{\lambda q_1(x) + (1 - \lambda) q_2(x)} \\ \leq \lambda p_1(x) \log \frac{\lambda p_1(x)}{\lambda q_1(x)} + (1 - \lambda) p_2(x) \log \frac{(1 - \lambda) p_2(x)}{(1 - \lambda) q_2(x)} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Bunu tüm x üzerinden toplayarak, istenen özelliği elde ederiz.

2.6 Sistemin Entropisi

Bir sistemin entropisi bulunurken değişkenin olası sonuç değerleri ile olasılıkları çarpılmaktadır. Ancak entropinin bulunmasında değişkenin kesikli veya sürekli olması önemlidir çünkü entropinin bulunması değişecektir.

2.6.1 Kesikli Sistemler için Entropi

Rasgelelik içeren bir sistemin (X) bulunabileceği durumlar $x_1, x_2, \dots, x_n$ olsun. Her bir durumun olasılığı $p_i = P(X = x_i)$ olmak üzere, sistem aşağıdaki gibi ise;

$$X = \begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ p_1, p_2, \dots, p_n \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

Bu sistemin entropisi, Shannon'ın entropi fonksiyonundan (2.31)'deki eşitlik ile hesaplanabilmektedir.

$$H(X) = \sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i \quad (2.31)$$

Örnek 2.6 Bir X sisteminin bulunabileceği durumlar ve bu durumlarda bulunma olasılıkları aşağıdaki gibi olsun. 4 tane durum olup durum olasılıkları aşağıda verilmiştir.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

Bu durumda X sisteminin entropisi eşitlik (2.31) ve sistemin farklı durumlarda bulunma olasılıkları ile bulunmaktadır.

$$H(X) = \sum_{i=1}^4 p_i \log_2 p_i = -\frac{3}{7} \log_2 \frac{3}{7} - \frac{2}{7} \log_2 \frac{2}{7} - \frac{1}{7} \log_2 \frac{1}{7} - \frac{1}{7} \log_2 \frac{1}{7}$$

$$H(X) = -0,428 \times (-1,244) - 0,285 \times (-1,811) - 0,285 \times (-2,8) = 1,84 \text{ bit}$$

X sisteminin entropisi olan $H(X)$, 1,84 bit olmaktadır. Bir diğer ifadeyle X sistemindeki belirsizliğin ölçüsü 1,84 bit kadardır. Entropi için birim ölçü 1 bit olup X sistemi, belirsizliğin ölçü birimi olan 1 bitin 1,84 katı kadar belirsizliğe (entropiye) sahiptir.

2.6.2 Sürekli Sistemler için Entropi

Sürekli bir sistem için değişkenin aldığı değerler sürekli bir aralıktan gelen (x sürekli bir rd.) ve $f(x)$ oyf. olmak üzere Shannon'ın Entropi Fonksiyonu $H(X)$ eşitlik (2.32)'deki gibi bulunmaktadır (Şamilov, 2015: 23-25).

$$H(X) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \log f(x) dx = E\{-\log f(x)\} \quad (2.32)$$

Sürekli sistemler için entropi alansal olarak ta (2.33) ve (2.34)'teki gibi ifade edilebilmektedir.

$$H_{\Delta x}^{(n)} = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \log f(x) dx - \log \Delta x \quad (2.33)$$

$$H_{\Delta x} = E\{-\log (f(x) \Delta x)\} \quad (2.34)$$

Bu eşitliklerdeki Δx değeri grafiksel bir alanı ifade etmektedir. Açıklayacak olursak; X rd'nin yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ ise yoğunluk fonksiyonunun tanımına göre $f(x) \geq 0$ ve $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ 'dir. Bu tanım yoğunluk fonksiyonun grafiğini düşündüğümüzde ise $y=f(x)$ ile x eksenini arasında kalan alanın 1 olduğunu göstermektedir. $y=f(x)$ fonksiyonunun tanım aralığını uzunluğu Δx olan alt aralıklara bölerek, bölüm noktalarından y eksenine paraleller çizilmesiyle, söz konusu alan alt tabanı Δx olan ABCD eğrisel yamuklarına bölünmüş olur ve bu eğrisel yamukların her birinin alanı, alt tabanı Δx ve yüksekliği $f(x_i)$ olan dikdörtgenlerin alanları ile hesaplanmaktadır. Bu durumda bu $y=f(x)$ ile x eksenini arasında kalan alan, $f(x_i)\Delta x$ alanına sahip dikdörtgenlerin toplamı olarak ifade edilmektedir. Bu durumda aynı alanın yeniden farklı fonksiyonlarla ifade edilmesi sağlanmaktadır. Olasılık yoğunluk fonksiyonu $y=f(x)$ olan X sürekli rd'ni yerine n duruma sahip olan ve gerçekleşme olasılıkları $f(x_i)\Delta x$ olan kesikli rd'leri ile ifade edilmektedir. Buradan yola çıkılarak; x sürekli rd'nin entropisi, n sayıda değeri olan bir kesikli rd'nin entropisinin hesabı ile elde edilebilmektedir. Bu durumda; $p_i = f(x_i)\Delta x$ olarak alındığında kesikli rd'nin entropi fonksiyonu (2.35) ve (2.36)'daki gibi olmaktadır.

$$H_{\Delta x}^{(n)} = - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i = - \sum_{i=1}^n (f(x_i)\Delta x) \log (f(x_i)\Delta x) \quad (2.35)$$

$$H_{\Delta x}^{(n)} = - \sum_{i=1}^n (f(x_i) \log f(x_i)) \Delta x - \sum_{i=1}^n (f(x_i)\Delta x) \log \Delta x \quad (2.36)$$

$n \rightarrow \infty$ ve $\Delta x \rightarrow 0$ ise;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [f(x_i) \log f(x_i)] \Delta x = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \log f(x) dx \quad (2.37)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \quad (2.38)$$

(2.37) ve (2.38) eşitlikleri dikkate alındığında (2.36) eşitliği yaklaşık bir şekilde (2.33)'teki gibi elde edilmektedir (Şamilov, 2015: 23-25).

2.7 Bileşik Entropi

Bileşik entropinin hesaplanması X ve Y rastlantı değişkenlerinin kesikli veya sürekli olmalarına göre farklı şekillerde hesaplanmaktadır.

2.7.1 Kesikli Sistemler için Bileşik Entropi

X ve Y kesikli rastlantı değişkenlerinin bileşik entropisi, $p(x,y)$ olasılık dağılımı ve Shannon'ın entropi fonksiyonu ile (2.39) eşitliği ile aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$H(X, Y) = - \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x,y) \log p(x,y) \quad (2.39)$$

Aynı zamanda (2.40) denklemi ile de tanımlanabilmektedir (Cover ve Thomas, 2006: 16-17).

$$H(X, Y) = - E \log p(X, Y) \quad (2.40)$$

X ve Y sistemleri birbirinden bağımsız ise X ve Y gibi bağımsız iki sistemin bileşkelerinin entropisi (2.41) eşitliğindeki gibi sistemlerin entropilerinin toplamına eşit olmaktadır.

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y) \quad (2.41)$$

2.7.2 Sürekli Sistemler için Bileşik Entropi

X ve Y fiziksel sistemleri olmak üzere bu sistemlere uygun olarak x ve y rastlantı değişkenleri ve bu değişkenlerin olasılık yoğunluk fonksiyonları $f_1(x)$ ve $f_2(y)$, bu fonksiyonların bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x,y)$ o.ü; (X,Y) bileşke sisteminin entropisi (2.42) veya (2.43)'teki eşitliklerdeki gibi ifade edilmektedir. Bu eşitliklerdeki ($\Delta x \Delta y$) alan ifade etmektedir. Bu eşitlikler; (x,y) sürekli rastlantı

değişkeninin entropisinin, sonlu sayıda değere sahip kesikli rastlantı değişkeninin entropisi yardımıyla ifade edilmesiyle elde edilmektedir (Şamilov, 2015: 25-26).

$$H_{\Delta x, \Delta y}^{(n, m)} = - \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \log f(x, y) dx dy - \log \Delta x \Delta y \quad (2.42)$$

$$H_{\Delta x, \Delta y} = E\{-\log [f(x, y) \Delta x \Delta y]\} \quad (2.43)$$

2.8 Koşullu Entropi

Eğer X ve Y kesikli rastlantı değişkenleri $p(x, y)$ bileşik olasılık fonksiyonuna sahipse bu değişkenlerden birinin diğerine göre koşullu entropisi, değişkenlerden birinin diğerine göre koşullu olasılığının logaritmasının beklenen değerinin negatifine eşittir.

Eğer $(X, Y) \sim p(x, y)$ ise $H(Y|X)$;

$$H(Y|X) = \sum_{x \in X} p(x) H(Y|X=x) \quad (2.44)$$

$$= - \sum_{x \in X} p(x) \sum_{y \in Y} p(y|x) \log p(y|x) \quad (2.45)$$

$$= - \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x, y) \log p(y|x) \quad (2.46)$$

$$= -E \log p(Y|X) \quad (2.47)$$

olmaktadır (Cover ve Thomas, 2006: 17).

Teorem 2.5 Koşullu Entropi için Zincir Kuralı

Zincir kuralına göre X ve Y gibi rastlantı değişkeninin bileşik entropisi değişkenlerden birinin entropisi ile diğer değişkenin bu değişkene göre koşullu entropisinin toplamına eşit olmaktadır. Buna zincir kuralı teoremi denilmekte olup aşağıda ispatlanmaktadır. (Cover ve Thomas, 2006: 17-18).

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y|X) \quad (2.48)$$

$$H(X, Y) = H(Y) + H(X|Y) \quad (2.49)$$

İspatı:

$$\begin{aligned} H(X, Y) &= - \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x, y) \log p(x, y) \\ &= - \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x, y) \log p(x) p(y|x) \\ &= - \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x, y) \log p(x) - \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x, y) \log p(y|x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{x \in X} p(x) \log p(x) - \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x,y) \log p(y|x) \\
&= H(X) + H(Y|X)
\end{aligned}$$

Benzer biçimde eşitlik (2.50) yazılabilmekte ve denklemin iki tarafının beklenen değeri alınarak teorem elde edilebilmektedir (Cover ve Thomas, 2006: 18).

$$\log p(X, Y) = \log p(X) + \log p(Y|X) \quad (2.50)$$

Sonuç olarak;

$$H(X, Y|Z) = H(X|Z) + H(Y|X, Z) \quad (2.51)$$

İspatı teoremin ispatı ile aynı çizgide ilerlemektedir (Cover ve Thomas, 2006: 18).

- (X, Y) bileşke sisteminde X ve Y sistemleri bağımsız ise;

$$H(Y / X) = H(Y) \quad (2.52)$$

$$H(X / Y) = H(X) \quad (2.53)$$

- Bileşke sistemin entropisi, sistemlerin entropilerinin toplamına eşit veya küçüktür.

$$H(X, Y) \leq H(X) + H(Y) \quad (2.54)$$

2.9 Ortak Bilgi Miktarı ve Entropi

Bir sistemin belirsizliğini gidermek için o sistemdeki bilgi miktarının artırılmasının gerektiği bilinmektedir. Bir X sisteminin belirsizliğinin giderilmesi için gerekli enformasyon miktarı I_X olmaktadır. Ancak X sisteminin direk olarak gözlenemediği durumlarda bu X sistemini gözlemek yerine, bu sistemle bağlantılı olan bir Y sistemini gözlemek gerekli olabilir.

X sisteminin entropisi $H(X)$ ise bu belirsizliğin aşılması için gerekli bilgi miktarı, $I_X = H(X)$ olacaktır. X sistemi direk gözlenemediğinden Y sistemi dikkate alınmışsa koşullu entropiye göre Y sisteminin X hakkında içerdiği entropi miktarı $H(X|Y)$ 'dir. Böyle bir durumda, Y sisteminin gözlenmesi ile X sisteminin entropisinde gerçekleşen azalma miktarı diğer bir ifade ile Y sisteminin X sistemi hakkında verdiği enformasyon miktarı (2.55) nolu denklemle;

$$I_{Y \rightarrow X} = H(X) - H(X|Y) \quad (2.55)$$

$I_{Y \rightarrow X}$ = Y sisteminin X sistemi hakkında verdiği enformasyon miktarı

$H(X) = X$ sisteminin entropisi

$H(X|Y) = X$ 'in Y 'ye göre koşullu entropisi = Y sisteminin X hakkında içerdiği entropi miktarı

X sisteminin Y sistemi hakkında verdiği enformasyon miktarı ise (2.56) nolu denklemle

$$I_{X \rightarrow Y} = H(Y) - H(Y|X) \quad (2.56)$$

$I_{X \rightarrow Y} = X$ sisteminin Y sistemi hakkında verdiği enformasyon miktarı

$H(Y) = Y$ sisteminin entropisi

$H(Y|X) = Y$ 'in X 'ye göre koşullu entropisi

ifade edilmektedir (Şamilov, 2015: 37).

Teorem 2.6 X sisteminin Y sistemi hakkında verdiği enformasyon ile Y sisteminin X sistemi hakkında verdiği enformasyon miktarları birbirine eşittir.

$$I_{X \rightarrow Y} = I_{Y \rightarrow X} \quad (2.57)$$

İspat: Bileşke sistemin (X, Y) entropisi $H(X, Y)$ olarak ifade edilmektedir ve

$H(X, Y) = H(X) + H(Y|X) = H(Y) + H(X|Y)$ olduğundan buradan

$$H(Y|X) = H(X, Y) - H(X) \quad (2.58)$$

$$H(X|Y) = H(X, Y) - H(Y) \quad (2.59)$$

$I_{X \rightarrow Y} = H(Y) - H(Y|X)$ denkleminde $H(Y|X)$ yerine (2.58) yazılırsa ve $I_{Y \rightarrow X} = H(X) - H(X|Y)$ denkleminde $H(X|Y)$ yerine (2.59) denklemini yazılırsa;

Sonuç olarak;

$$I_{X \rightarrow Y} = H(X) + H(Y) - H(X, Y) \quad (2.60)$$

$$I_{Y \rightarrow X} = H(X) + H(Y) - H(X, Y) \quad (2.61)$$

elde edilmektedir. Buradan (2.60) ve (2.61) denklemlerinin birbirine eşit olduğu sonucuna ulaşılmaktadır. Ayrıca (2.60) ve (2.61) formülleri birarada yazıldığında karşılıklı enformasyon denklemi elde edilmektedir. Karşılıklı enformasyon denklemi;

$$I_{X \leftrightarrow Y} = H(X) + H(Y) - H(X, Y) \quad (2.62)$$

şeklinde bulunmaktadır (Şamilov, 2015:38).

Teorem 2.6'dan Çıkan Sonuçlar:

- X ve Y sistemleri birbirinden bağımsız sistemler ise $I_{X \rightarrow Y} = I_{Y \rightarrow X} = 0$ olacaktır.

X ve Y sistemleri birbirinden bağımsız ise bileşik (X, Y) sisteminin entropisi;

$H(X, Y) = H(X) + H(Y)$ şeklindedir.

Bu denklem, (2.60) ve (2.61) denklemlerinde $H(X, Y)$ yerine yazılırsa $I_{X \rightarrow Y} = I_{Y \rightarrow X} = 0$ olduğu rahatlıkla görülmektedir.

- Y sistemi X sistemini olasılık bakımından tamamen belirlemiş ise, bir başka ifadeyle $P(Y|X) = 1$ ise,

$H(X, Y) = H(X)$ olmaktadır ve (2.60) denkleminde $I_{Y \rightarrow X} = H(X) = H(Y)$ sonucuna ulaşılmaktadır (Şamilov, 2015: 38-39).

x ve y rdlerinin kesikli veya sürekli olmasına göre ortak bilgi miktarının formülleri değişiklik göstermektedir.

2.9.1 X ve Y rd'leri Kesikli ise Ortak Bilgi Miktarı

x ve y iki kesikli rastlantı değişkeni ve bileşik olasılık fonksiyonları $p(x, y)$ ve marjinal olasılık fonksiyonları $p(x)$ ve $p(y)$ olsun. Ortak bilgi miktarı $I(X, Y)$; x ve y rastlantı değişkenlerinin birleşik olasılık fonksiyonu ve marjinal olasılık fonksiyonları çarpımı $p(x) \cdot p(y)$ arasındaki göreceli entropi veya Kullback - Leibler uzaklığıdır (Cover ve Thomas, 2006: 19-20).

$$I(X, Y) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x, y) \log \frac{p(x, y)}{p(x) \cdot p(y)} \quad (2.63)$$

$$= D(p(x, y) \parallel p(x) p(y)) \quad (2.64)$$

$$= E_{p(x, y)} \log \frac{p(x, y)}{p(x) p(y)} \quad (2.65)$$

2.9.2 X ve Y rd'leri Sürekli ise Ortak Bilgi Miktarı

x ve y sürekli rastlantı değişkenleri ve bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonları $f(x, y)$ ve marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonları ise $f(x)$ ve $f(y)$ olmak üzere x ve y rdleri arasındaki ortak bilgi miktarı $I(x, y)$ olmak üzere;

$$I(X, Y) = E \left[\log \frac{f(x, y)}{f(x)f(y)} \right] \quad (2.66)$$

olarak ifade edilmektedir (Şamilov, 2015: 46).

(2.66) nolu denklemin sağ tarafında sürekli rastlantı değişkenleri olan x ve y için beklenen değerin bulunmasından (2.67) denklemine ulaşılmaktadır.

$$I(X, Y) = E \left[\log \frac{f(x, y)}{f(x)f(y)} \right] = \iint f(x, y) \log \frac{f(x, y)}{f(x)f(y)} dx dy \quad (2.67)$$

- Ortak bilgi miktarı 0 dan büyük değerler alır pozitiftir.

$$I(x, y) > 0 \quad (2.68)$$

Teorem 2.7 Ortak Bilgi Miktarı için Zincir Kuralı

$X_1, \dots, X_n$ ve Y rastlantı değişkenleri olmak üzere;

$$I(X_1, \dots, X_n; Y) = \sum_{i=1}^n I(X_i; Y | X_{i-1}, X_{i-2}, \dots, X_1) \quad (2.69)$$

olmaktadır (Cover ve Thomas, 2006: 24).

İspat:

$$\begin{aligned} I(X_1, \dots, X_n; Y) &= H(X_1, \dots, X_n) - H(X_1, \dots, X_n | Y) \\ &= \sum_{i=1}^n H(X_i | X_{i-1}, X_{i-2}, \dots, X_1) - \sum_{i=1}^n H(X_i | X_{i-1}, X_{i-2}, \dots, X_1, Y) \\ &= \sum_{i=1}^n I(X_i; Y | X_1, X_2, \dots, X_{i-1}) \end{aligned}$$

Teorem 2.8 Ortak Bilgi Miktarı ve Entropi

X ve Y iki rastlantı değişkeni olsun. X ve Y değişkenlerinin ortak bilgi miktarları ve entropileri arasındaki ilişki aşağıda denklemlerde yer almaktadır (Cover ve Thomas, 2006: 21-22).

$$I(X; Y) = H(X) - H(X|Y) \quad (2.70)$$

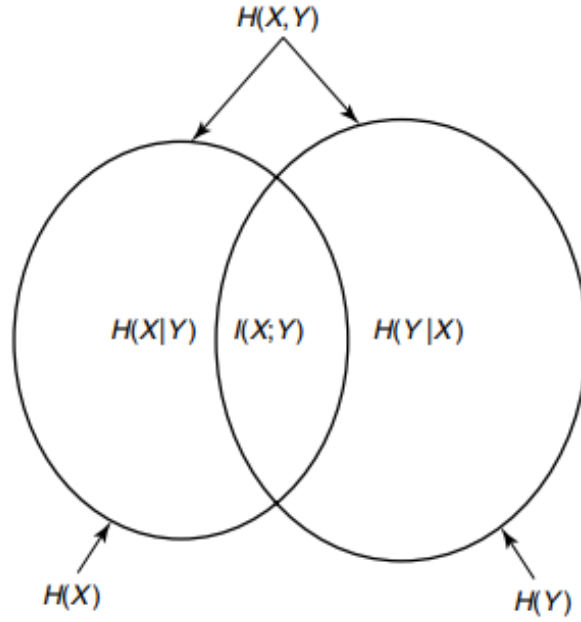
$$I(X; Y) = H(Y) - H(Y|X) \quad (2.71)$$

$$I(X; Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y) \quad (2.72)$$

$$I(X; Y) = I(Y; X) \quad (2.73)$$

$$I(X; X) = H(X) \quad (2.74)$$

$H(X)$, $H(Y)$, $H(X,Y)$, $H(X|Y)$, $H(Y|X)$ ve $I(X, Y)$ arasındaki ilişki Şekil 2.2'deki venn şeması ile gösterilmektedir. Ortak bilgi miktarının $I(X; Y)$, X ve Y 'nin bilgi miktarlarının kesişimine karşılık geldiği görülmektedir.



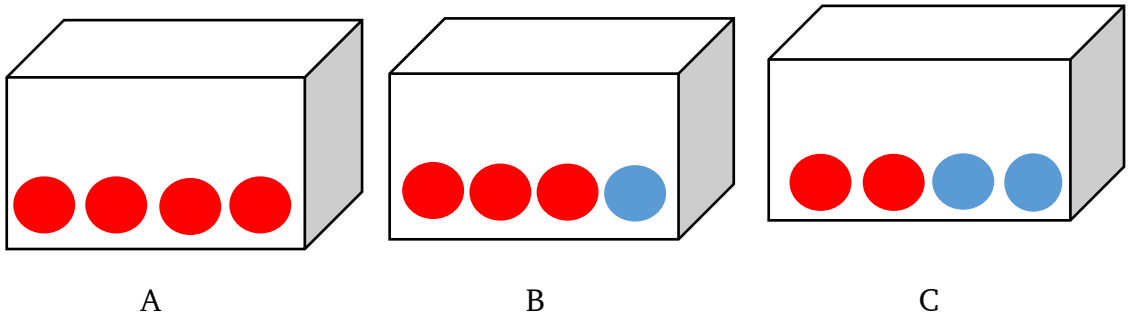
Şekil 2.2 Entropi ve ortak bilgi miktarı ilişkisi (Cover ve Thomas, 2006: 22).

2.10 Entropi ve Bilgi Miktarı İlişkisi

Entropi düzensizliği ifade etmesinin yanında belirsizliği de ifade etmektedir. Sistemler için de entropi, sistemdeki belirsizliğin bir ölçüsünü ifade etmektedir. Bir sistem ile ilgili bilgi miktarı fazla ise sistem ile ilgili belirsizlik az olacakken tersi durumda, sistem hakkında az bilgi sahibi isek sistemdeki belirsizlik o derece fazla olacağından entropi ile bilgi kavramları birbiri ile zıttır. Bir sisteme giren bilgi miktarı arttıkça belirsizlik dolayısıyla entropi azalacak; bilgi miktarı azaldıkça da sistemdeki belirsizlik artacağından entropi artacaktır. Bilinmeyen bir sistem ile ilgili ne kadar fazla bilgi sahibi olunursa sistemin belirsizliği, bilinmezliği, belirsizliğin ölçüsü olan entropi azalacaktır. İstatistikteki bilinen 3 deneyin (para atma, zar atma ve kutulardan top çekme) bilgi miktarları ve entropi düzeyleri arasındaki ilişki örnek 2.7'de incelenmiştir.

Örnek 2.7. İstatistikte bilinen 3 deney (para atma, zar atma ve kutulardan top çekme) için aşağıda belirtilen durumlarda bilgi miktarları (düzeyleri) ve entropi miktarı (düzeyi) ilişkisi anlatılmaktadır.

- **Para Atma Deneyi:** Hileli ve hilesiz para atma durumlarını düşünelim. Hilesiz bir para atma deneyinde sonuçların oluşma olasılığı eşit olduğundan heterojenlik söz konusu olup maksimum belirsizlik ve bu nedenle de maksimum entropi vardır. Oysa ki yazı çıkma olasılığı daha fazla olan hileli bir para atma deneyinde paranın ne geleceği konusunda daha net bilgi sahibi olduğundan (yazı gelmesi ihtimalinin daha yüksek olacağı bilindiğinden) entropisi daha az olmaktadır.
- **Zar Atma Deneyi:** İstatistikte bilinen zar atma deneyinde 1 zarın atılmasında elde edilebilecek 6 sonuç bulunmaktadır. Normal koşullarda zar atma deneyi sonucu her bir yüzün seçilmesi olasılığı $1/6$ kadar iken bir atışta istenen yüzün çift sayı olması olasılığı $1/2$ 'dir. Örneğin; zarın üst yüzünün çift sayı gelmesi olasılığının daha fazla olduğu hileli bir zar atma deneyini düşünelim. Bu deney ile hilesiz zar atma deneyleri, zarın üst yüzünün çift sayı gelmesi olasılığı bakımından kıyaslandığında zarın üst yüzünün çift sayı gelmesi olasılığı için hilesiz zar atma deneyinde entropi daha fazla, hileli zar atma deneyinde daha azdır. Çünkü hileli zar atma deneyinde zarın üst yüzünün çift sayı gelmesi daha olasıdır.
- **Kutulardan Top Çekme Deneyi:** Şekil 2.3'te olasılık teorisinde bilinen kutulardan top çekme deneyini inceleyelim. Bu deneyde kutudan çekilen topun kırmızı veya mavi gelme olasılığı ile ilgilenilmektedir. Tablo 2.5'te her bir kutudan bir top çekildiğinde topların çekilmesi olasılıkları, bilgi miktarları ve entropileri görülmektedir.



Şekil 2.3 Entropi ve bilgi düzeyleri ilişkisi

Tablo 2.5 Kutulardan çekilecek toplar için entropi ve bilgi miktarları

No	Olasılıklar	Bilgi Miktarı	Entropi
A	$P(K) = 4/4$ $P(M) = 0$	Kutudan bir top çekildiğinde kırmızı olacağı kesin	Kutudan çekilecek topun rengi konusunda kesin bilgi (yüksek bilgi) olduğundan entropi düşük
B	$P(K) = 3/4$ $P(M) = 1/4$	Kutudan bir top çekildiğinde kırmızı olma olasılığı daha yüksek	Kutudan çekilecek topun rengi konusunda orta düzeyde bilgi olduğundan orta düzeyde entropi
C	$P(K) = 1/2$ $P(M) = 1/2$	Kutudan bir top çekildiğinde kırmızı ve mavi olma olasılıkları aynı	Kutudan çekilecek topun rengi konusunda düşük düzeyde bilgi olduğundan yüksek düzeyde entropi

Ayrıca bir sistem içinde bir olayda sonuçlar açısından ne kadar çok fazla olası durumla karşılaşılıyor ise o sistemde belirsizliğin ve belirsizliğin ölçüsü olan entropinin daha fazla olduğu bilinmektedir. Bu duruma istatistikte bilinen para ve zar atma deneyleri örnek olarak gösterilebilir. Örnek 2.8’de görülebileceği gibi zar atma deneyinin olası sonuç sayısı (6) olup para atma deneyinin olası sonuç sayısı (2)’den fazla olduğundan zar atma deneyi için entropi değeri (1,79) ile para atma deneyinin entropi değerinden (0,69) fazladır.

Örnek 2.8 Basit bir örnek olarak istatistikte olasılık teorisinde çok kullanılan 2 deney olan para atma deneyi ve zar atma deneylerini ele alabiliriz. Her bir deney için entropi değerlerini hesaplayarak entropi değerlerini karşılaştıralım.

Her bir deney sonucu tüm sonuçların yer aldığı örneklem uzayları birer sistem olarak düşünülmelidir. Para ve zar atma deneyleri için örneklem uzayları sırasıyla;

Para atma deneyi için $S_1 = \{Y, T\}$

Zar atma deneyi için $S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Örneklem uzayı (S), bir olay meydana geldiğinde karşılaşılacak tüm sonuçları kapsamaktadır. Bu iki olay iki sistem olarak düşünüldüğünde olası sonuç sayısı fazla olan zar atma deneyinde belirsizliğin daha fazla olduğu, entropi ölçüsünün

fazla olacağı söylenebilir. Bu bilginin doğruluğunu Shannon'un entropi fonksiyonu ile kontrol edelim.

$$H(x) = - \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i \quad (2.75)$$

- Para atma deneyi için deney sonucu olası 2 sonuç (Y, T) vardır. $n=2$ 'dir.
2 sonuç için olasılık değerleri; $P(Y) = P(T) = 1/2$
 $p_1 = p_2 = 1/2$
Para atma deneyi için entropi fonksiyonu;
 $H(x_1) = - [(1/2) \ln(1/2) + 1/2 \ln(1/2)] = -[0,5 \cdot (-0,69) + 0,5 \cdot (-0,69)]$
 $H(x_1)=0,69$ (Para atma deneyi sonucundaki belirsizliğin ölçüsü 0,69 çıkmaktadır.)
 - Zar atma deneyi için deney sonucu 6 olası sonuç (1, 2, 3, 4, 5, 6) vardır. $n=6$ 'dır.
6 sonuç için olasılık değerlerinin her biri; $P(1) = P(2) = \dots = P(6) = 1/6$
 $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = 1/6$
Zar atma deneyi için entropi fonksiyonu;
 $H(x_2) = - [1/6 \ln(1/6) + \dots + 1/6 \ln(1/6)] = - 6 \cdot 1/6 \ln(1/6)$
 $H(x_2)=1,79$ (Zar atma deneyi sonucundaki belirsizliğin ölçüsü 1,79 çıkmaktadır.)
- Görüldüğü gibi zar atma deneyi için entropi değeri, para atma deneyinin entropi değerinden daha yüksek çıkmıştır. Tablo 2.6'da görülebileceği gibi deney sonucu daha fazla olası sonucu olan zar atma deneyi için belirsizlik daha fazla olduğundan entropi değeri de daha yüksek çıkmaktadır.

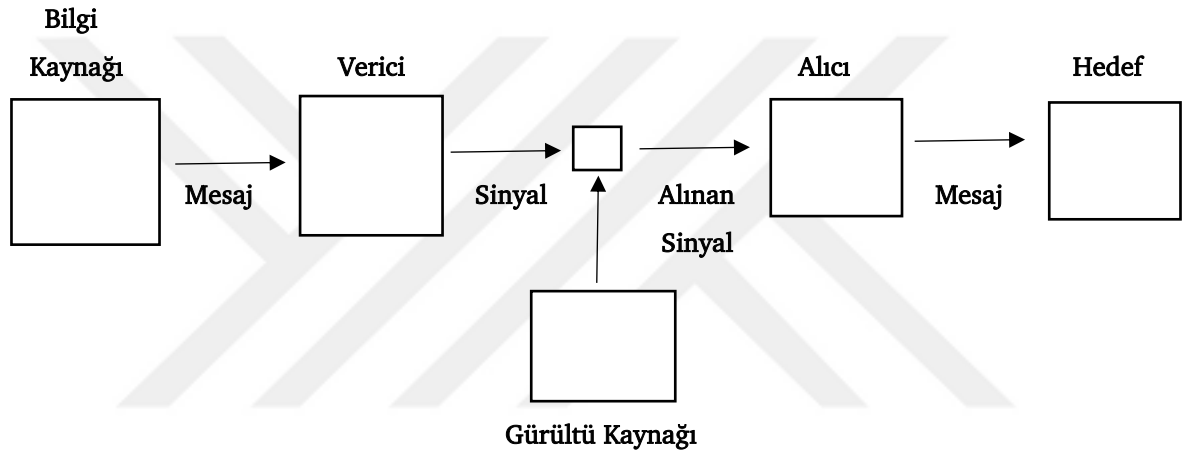
Tablo 2.6 Zar atma ve para atma deneylerinin entropi değerleri

Deney	Olası Sonuçlar	Olası Sonuç Sayısı (n)	Entropi Değeri H (xi)
Para Atma Deneyi	Yazı, Tura	2	0,69
Zar Atma Deneyi	1, 2, 3, 4, 5,6	6	1,79

2.11 Bilgi Teorisi ve Entropi İlişkisi

2.11.1 İletişim Sistemi ve Gürültü

İletişim, 1949 yılında Claude Shannon ve Warren Weaver tarafından İletişimin Matematiksel Teorisi (The Mathematical Theory of Communication) adlı eserlerinde matematikselleştirilmiştir. Bu iletişim modeli, Shannon-Weaver İletişim Modeli, Matematiksel İletişim Kuramı veya Enformasyon Teorisi olarak da bilinmektedir. Shannon-Weaver Modeli'nde iletişim kaynaktan hedefe doğru doğrusal bir yapıda akan enformasyondur. İletişim sistemi, sembolik olarak Şekil 2.4'teki gibi temsil edilmektedir.



Şekil 2.4 İletişim sistemi (Shannon ve Weaver, 1964: 7)

Şekil 2.4'te görülen iletişim sisteminde bilgi kaynağı, bir dizi olası mesajlar arasından istediği mesajı seçmekte ve verici, bu mesajı iletişim kanalı üzerinden vericiden alıcıya sinyale dönüştürmektedir. Alıcı ise gönderilen sinyali tekrardan mesaja dönüştürerek hedefe teslim eder. Bu iletişim sistemindeki sinyallerin iletimi sürecinde, bazı istenmeyen sesler sinyallere eklenebilir bu istenmeyen sinyaller; telefonda, radyodaki ses bozulmaları veya televizyonda görüntülerdeki bozulmalar olabilmektedir. İletişim sistemlerinde iletilen sinyallerdeki bu bozulmaların tümüne gürültü denilmektedir (Shannon ve Weaver; 1964: 7-8).

2.11.2 İletişim Sisteminde Bilgi Miktarının Ölçümü

Shannon ve Wiever'ın çalışmasında Şekil 2.4'teki gibi bir iletişim sisteminde bu sistem ile ilgili farklı sorular sorulurken bu sistem üzerinde bilginin ölçüsünün ne

olacağı konusu da araştırılmıştır. Öncelikle bilgi kelimesi tanımlanmış olup bu tanıma göre kişinin mesajını seçme özgürlüğünün bir ölçüsü olmaktadır. Bu durumda matematiksel olarak bilgi miktarı, mevcut seçeneklerin sayısının 2 tabanında logaritması olarak tanımlanmıştır. Örneğin; bir kişinin seçiminde eşit özgürlüğe sahip olduğu 16 alternatif uygun mesaj seçeneği varsa bu durum ($\log_2 16 = 4$ bit) ile hesaplanmakta ve 4 bit bilgi ile ifade edilmektedir (Shannon ve Weaver, 1964: 8-10).

Tablo 2.7’de görülebileceği gibi eğer bilgi kaynağının eşit seçim özgürlüğüne sahip olduğu 16 alternatif mesaj varsa bilgi miktarı 4 bit, 8 alternatif mesaj varsa bilgi miktarı 3 bit, 4 alternatif mesaj varsa bilgi miktarı 2 bit, 2 alternatif mesaj varsa bilgi miktarı 1 bit olmaktadır. Bu durumda kişinin mesajını seçerken alternatif uygun mesajlarının sayısının azalması bilgi miktarının azalmasına ve alternatif uygun mesajlarının sayısının artması ise bilgi miktarının artışına neden olmaktadır. Buradan kişinin mesajını seçerken alternatif uygun mesajlarının sayısının fazla olduğu durumda bilgi miktarının da bit olarak daha fazla olacağı sonucuna ulaşılmaktadır. Tablo 2.7’de iletişim modelinde kişinin alternatif mesaj sayısına göre bilgi miktarlarının hesaplanması ve bilgi miktarları görülmektedir.

Tablo 2.7 Alternatif mesaj sayılarına göre bilgi miktarı

Alternatif Mesaj Sayısı	Bilgi Miktarı ($\log_2 n$)	Bilgi Miktarı (bit)
2	$\log_2 2 = 1$	1
4	$\log_2 4 = 2$	2
8	$\log_2 8 = 3$	3
16	$\log_2 16 = 4$	4

Bu durumda iletişim teorisinden yola çıkarak genel bir sistemdeki bilgi miktarını; n tane alternatif sonuç var ise (2.76) denklemiyle hesaplanabilmektedir.

$$B = \log_2 n \quad (2.76)$$

İstatistikte olasılık teorisinde bilinen deneylerin bilgi miktarlarını (2.76) eşitliğini kullanarak hesaplayalım. Bu eşitliğe göre para atma deneyi için bilgi miktarı 1 bit iken zar atma deneyi için bilgi miktarı ise 2,58 bit olarak hesaplanmaktadır. Tablo

2.8’de görülebileceği gibi zar atma deneyinde olası sonuç sayısı, para atma deneyi olası sonuç sayısından fazla olduğundan bilgi miktarı da daha fazla olmaktadır.

Tablo 2.8 Bilinen istatistiksel deneylerin bilgi miktarları (Bit)

Deney	Deney Sonuçları (Durumlar)	Durum Sayısı (Sonuç Sayısı)	Bilgi Miktarı ($\log_2 n$)	Bilgi Miktarı (bit)
Para atma deneyi	Y, T	2	$\log_2 2 = 1$	1 bit
Zar atma deneyi	1,2,3,4,5,6	4	$\log_2 6 = 2$	2,58 bit

Claude Shannon’a göre, bilgi ve entropi aynı madalyonun farklı yüzleridir. Bir sisteme daha fazla bilgi geldiğinde sistemdeki belirsizlik azalacağından belirsizliğin bir ölçüsü olan entropi de azalacaktır. Bu nedenle faydalı bilgi sistemin entropisini azalttığından negatif entropi olarak ta adlandırılmaktadır. Bu durumda bir sistemde bilgi miktarı fazla ise sistemin entropisi az, bilgi miktarı az ise sistemin entropisi fazla demektir.

2.12 Sistemsel Açından İnfomasyon ve Entropi

Eğer sistemin sahip olduğu durumların gerçekleşme olasılıkları değişirse sistemin entropisi de değişim gösterecektir. Sistemdeki entropinin değişimi enformasyon ile ifade edilmektedir. n durumu olan bir X sisteminin ilk entropisi $H(p)$, $p = (p_1, \dots, p_n)$, bazı faktörlerle durum olasılıklarının değişimiyle son entropisi ise $H(p')$, $p' = (p'_1, \dots, p'_n)$ şeklinde ise;

$$I = H(p) - H(p') \quad (2.77)$$

farkına sistem hakkında infomasyon denir. İnfomasyon, sistemin entropisinin değişimini göstermekte olup (2.77) eşitliğinden;

- $I > 0$ ise infomasyon pozitif ve sistemin entropisi I kadar azalmıştır.
- $I < 0$ ise infomasyon negatif ve sistemin entropisi I kadar artmıştır.
- $I = 0$ ise infomasyon miktarı sıfır olup sistemin entropisi değişmemiştir.

sonuçlarına ulaşılmaktadır (Şamilov, 2015: 31)

(2.77) eşitliğinden sistemin entropisi ikinci durumda sıfır olmuş $H(p') = 0$ ise $I = H(p)$ olup buradan sistemin entropisini sıfır yapmak için gerekli enformasyon miktarının $H(p)$ olduğu sonucuna ulaşılmaktadır. Yani bir sistemin belirsizliğini gidermek için gerekli enformasyon miktarı sayısal olarak sistemin entropisi kadar olmaktadır (Şamilov, 2015: 31).

2.12.1 Tam ve Kısmi İnfomasyon

X sisteminin durumları $x_1, x_2, \dots, x_n$ ve $P(X \sim x_i) = p_i$ öü;

$$I_X = - \sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i \quad (2.78)$$

(2.78) eşitliğinde I_X tam infomasyon miktarının hesaplanması yer almaktadır ve tam infomasyon hesaplanırken sistemdeki tüm durumlar $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ alınmaktadır. Kısmi infomasyon ise (2.79) nolu denklemdeki gibi hesaplanmakta olup sistemin sadece bir x_i durumunda bulunması olasılığını ifade etmektedir.

$$I_{x_i} = - \log_2 p_i \quad (2.79)$$

(2.79) eşitliğinden görülebileceği gibi $\lim_{p_i \rightarrow 0} (-\log_2 p_i) = +\infty$ olduğu için eğer p_i çok küçük değerler alırsa I_{x_i} çok büyük değerler alacaktır. Bu demektir ki gerçekleşme olasılığı çok düşük bir olay gerçekleşmişse bu durumu açıklamak için gereken enformasyon miktarı çok büyük olacaktır (Şamilov, 2015: 32).

2.13 Negentropi (Negatif Entropi)

Entropi sistemlerdeki belirsizliğin veya düzensizliğin bir ölçüsü iken negentropi de düzenin, belirliliğin bir ölçüsüdür. Bilgi teorisi açısından entropi, sistemdeki bilginin yetersiz veya eksik olmasıdır. Sistemde yeterince bilgi yoksa belirsizlik (entropi) var demektir. Sisteme bilgi girişi olduğunda belirsizlikler azalıyor, negatif entropi artıyor demektir. Evrendeki entropi de sürekli artmakta ve bu belirsizliklerin de arttığı anlamına gelmektedir. Evrendeki bu belirsizlikleri (entropiyi) azaltan negatif entropi faktörü ise sistemde yararlı bilginin üretiliyor olmasıdır. Negatif entropinin de bir fonksiyonu bulunmakta olup bu fonksiyon (2.80) eşitliğinde yer almaktadır.

Σ kovaryans matrisi ile normal dağılan normal X rastlantı vektörü için negentropi fonksiyonu (2.80) denklemindeki gibi olmaktadır.

$$H(x_{\text{normal}}) = \frac{n}{2} (1 + \log 2\pi) + \frac{1}{2} \log |\det \Sigma| \quad (2.80)$$

2.14 Ağırlıklı Entropi

X bir rastlantı değişkeni ve $x_1, \dots, x_n$ olaylar olsun. Her bir x_i olayına ait olasılık değeri p_i ve her bir x_i olayına ait ağırlık değeri ise w_i olmak üzere; her bir x_i olayı, $i = 1, \dots, n$ için $\{p_i, w_i\}$ ile tanımlansın ($\sum_{i=1}^n p_i = 1$ ve $w_i \geq 0$).

Bu durumda verilen X rastlantı değişkenine ilişkin ağırlıklı entropi, (2.81) eşitliğindeki gibi hesaplanmaktadır (Karmeshu ve Pal, 2003).

$$H_w(w_1, \dots, w_n; p_1, \dots, p_n) = - \sum_{k=1}^n w_k p_k \log p_k \quad (2.81)$$

Ağırlıklı entropinin önemli özelliklerinden bir kısmı aşağıda yer almaktadır (Karmeshu ve Pal, 2003)

- $H_w(w_1, \dots, w_n; p_1, \dots, p_n) \geq 0$
- Eğer $\forall i, j$ için, $w_i = w_j = w$ ise $H_w = H$
- Eğer $p_k = 1$ ve $\forall j \neq k$ için $p_j = 0$

2.15 Bulanık Entropi

2.15.1 Bulanık Mantık (Fuzzy Logic)

Bulanık entropinin anlaşılabilmesi için önce bulanık mantığın (Fuzzy Logic) bilinmesi gereklidir. Bulanık mantık, ikili mantık sistemine karşılık geliştirilmiştir. İkili mantık sisteminde; bir olayın sonuçları yalnızca iki tanedir ve bir nesne, bir kümeye aittir ya da değildir mantığına dayanmaktadır. Nesne, kümenin elemanı ise (1), değilse (0) değerini alır. Bulanık mantık yaklaşımı, bulanık küme teorisine dayanmakta olup bulanık kümelerde elemanların bir kümeye ait olma durumu 0 ve 1 aralığında aldığı değerlerle gösterilmektedir. Klasik küme yaklaşımında nesnenin aitlik derecesini gösteren küme $\{0, 1\}$ iken bulanık kümede ise aynı nesnenin aitlik derecesi $[0, 1]$ aralığında değerler almaktadır. Bulanık küme yaklaşımında nesnelerin üyelik dereceleri 0 ve 1 aralığında sonsuz değer almakta olup bulanık mantıkta bir derecelendirme söz konusudur.

Bulanık Mantık, 1965 yılında sibernetik ve mantık alanında çalışan Lotfi A. Zadeh'in bir makalesindeki Bulanık Mantık ve Bulanık Kümeler Kuramı'nda ilk kez ortaya konulmuştur. Zadeh makalesinde bulanık mantık ile ilgili tanımlar gerçekleştirmiş ve bulanık mantık kuramıyla iki değerli Aristo mantık sisteminden sonsuz değerli mantık sistemine geçişi sağlamıştır. Bulanık mantık, ikili mantık sistemine karşılık geliştirilmiş çoklu bir mantık sistemidir. Bulanık küme teorisinin ortaya çıkma nedeni gerçek dünyanın karmaşık sistemlerinin çözümlenmesinin amacıdır. Zadeh'in bulanık mantığında her şey $[0,1]$ aralığında gösterilir. Bulanık mantık, bulunduğu ilk zamanlarda sıkça mühendislik alanında kullanılmakta iken günümüzde özellikle sibernetik ve yapay zeka çalışmaları başta olmak üzere bilgisayar, internet teknolojileri, yüz tanıma sistemleri, uzay araçları, evrenin oluşumu, elektron teknolojileri, robot teknolojileri, savaş teknolojileri gibi farklı alanlarda da kullanılmaktadır (Işıklı, 2008).

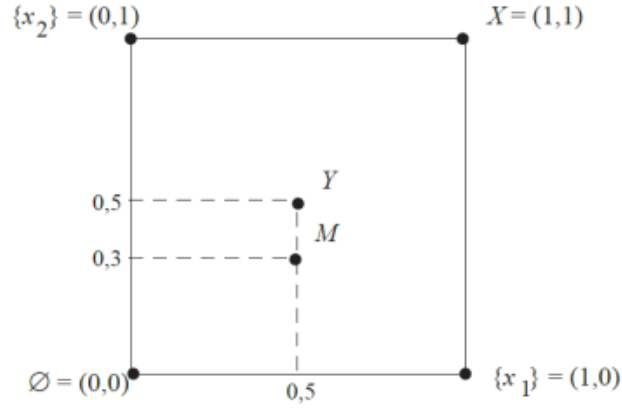
2.15.2 Bulanık Entropi

Tanım: A bulanık bir küme o.ü. $\mu_A(x)$ üyelik fonksiyonu bu küme için tanımlanmış olsun. $H: A \rightarrow R^+$ şeklinde tanımlanan H fonksiyonu için aşağıdaki koşullar sağlanıyor ise;

- $H(A) = 0$ ise kesin (crisp) kümedir,
- $H(A)$ eğer $x \in R$ için $\mu_A(x) = 1/2$ ise bu noktada tek bir maksimuma,
- A ve B bulanık kümeler ise $\mu_B(x) < \mu_A(x)$ eşitsizliği $\mu_A(x) < 1/2$ için ve $\mu_A(x) < \mu_B(x)$, $\mu_A(x) \geq 1/2$ olmak üzere $H(A) \geq H(B)$,
- A^C , A bulanık kümesinin tümleyeni olmak üzere, $H(A^C) = H(A)$,

ise $H(A)$ için A bulanık kümesinin entropisidir (Earis ve Cheetham, 2000).

Bulanık entropi uzaklık ölçüleri ile de hesaplanabilmektedir. Şekil 2.5'te entropinin geometrik gösterimi görülmekte olup ikili sistemde $X = (1,1)$ noktası evrensel kümeyi ve $\emptyset = (0,0)$ noktası ise boş kümeyi temsil etmektedir.



Şekil 2.5 Entropinin geometrik gösterimi

d_1 = M noktasının en yakın köşeye uzaklığı

d_2 = M noktasının en uzak köşeye uzaklığı olmak üzere;

M noktası için entropi değeri $E(M)$ olup 2.82'deki gibi hesaplanmaktadır ve Y noktasında entropi en yüksek değerini almaktadır (Zimmermann, 1991).

$$E(M) = \frac{d_1}{d_2} \quad (2.82)$$

2.16 Diğer Bazı Entropi Türleri

Önceki bölümlerdeki bahsi geçen entropi türleri dışında bazı entropi türleri aşağıda yer almaktadır (Crooks GE., 2018).

- Burg Entropisi

$$\text{Burg (B)} = \sum_x \ln P(B_x) \quad (2.83)$$

- Çapraz Entropi

$$\text{CrossEnt (A; B)} = - \sum P(A_x) \ln P(B_x) = S(A) + D(A \setminus B) \quad (2.84)$$

- Çarpışma Entropisi

$$\text{CollisionEntropy (A)} = - \ln \sum_x P(A_x)^2 = \text{Renyi}_2(A) \quad (2.85)$$

- Gibbs Entropisi

$$S = k_B \sum_i p_i \ln p_i \quad (2.86)$$

k_B : Boltzman Sabiti

- Hartley Entropisi

$$\text{Hartley } (A) = \ln |\Omega_A| \quad (2.87)$$

- Jeffreys Entropi

$$\text{Jeffreys } (A; B) = \frac{1}{2} D(A \parallel B) + \frac{1}{2} D(B \parallel A) \quad (2.88)$$

- Min-Entropi (MinEn)

$$\text{MinEntropy } (A) = -\ln \max_x P(A_x) \quad (2.89)$$

- Spesifik Entropi

$$s(A_x) = -\ln P(A_x) \quad (2.90)$$



3.

ENTROPİNİN ARAŞTIRMA YÖNTEMLERİNDE KULLANIMI

Literatürde entropinin kullanıldığı farklı araştırma yöntemlerinin olduğu görülmektedir. Araştırmalarda değişkenlerin ağırlıklandırılmasına ihtiyaç duyulduğunda entropi yöntemi objektif ağırlıklandırma yöntemleri arasındadır. Endeks çalışmalarında endeksi etkileyen değişkenlerin ağırlıklarının belirlenmesinde sübjektif bir yöntem olan uzman görüşüne başvurulacağı gibi entropi yöntemi ile de ağırlıklandırma gerçekleştirilebilmektedir. Objektif mi yoksa sübjektif yöntemlerin mi kullanılacağı duruma göre değişebilmektedir.

Entropi ile ağırlıklandırma; ÇKKV problemlerinde, problemlere girdi teşkil eden kriterlerin ağırlıklandırılmasında da kullanılmaktadır. ÇKKV yöntemleri ise karar verme birçok alanda gerekli olduğundan birçok alanda kullanılmaktadır. Ulusal tez merkezi verilerine göre ÇKKV yöntemleri konusunda farklı mühendislik alanlarında, işletme, ekonomi, maliye, ulaşım vb. konularda tez çalışmaları olduğu görülmekte ancak bu çalışmaların bazılarında kriterler entropi ile ağırlıklandırılmıştır. ÇKKV yöntemlerinde entropi dışında ağırlıklandırma yöntemleri de bulunmaktadır.

Entropi, entropi optimizasyon yöntemlerinde de kullanılmaktadır. Entropi optimizasyon yöntemleri de istatistiksel analizlerde (regresyonda, zaman serilerinde, rassal değişkenlerin dağılımlarının incelenmesinde, yaşam süreçlerinde vb.) kullanılmaktadır. Ulusal tez merkezi verilerine göre istatistik alanında entropi konusundaki tez çalışmalarının daha çok entropi optimizasyonu konusunda olduğu görülmektedir. Ayrıca entropi konusunda kısıtlı sayıda tez çalışması olduğu da görülmektedir.

Literatürde araştırmalar sonucunda entropiye dayalı olan BBA'nın farklı mühendislik alanlarında imge tanıma (yüz tanıma) uygulamalarında çok yaygın kullanıldığı ve yine bu tür uygulamalarda sık kullanılan TBA'ne göre daha ileri

düzeyde bir yüz tanıma imkanı sunduğundan bahsedilmiştir. Bununla birlikte BBA, istatistik alanında bir çok değişkenli istatistiksel analiz yöntemi olmasına rağmen bu konuda fazla tez çalışmasında bulunulmamıştır. Sadece 2019 yılında “Bağımsız Bileşenler Analizi ile çoklu bağlantı sorununa bir yaklaşım” konulu doktora tez çalışması bulunmaktadır. Bu tez çalışmasının amacı ise çok değişkenli istatistiksel bir yöntem olmasına rağmen istatistikçiler tarafından pek fazla bilinmeyen BBA’nın bilinirliğinin artırılmasıdır.

Literatürde entropi yöntemlerinin kullanıldığı istatistiksel analizlerin klasik yöntemlerle karşılaştırmalarının yapılması ve yorumlanmasına dair çalışmalar bulunmaktadır. Bu çalışmalarda entropiye dayalı istatistiksel analiz yöntemlerinin klasik istatistiksel analiz yöntemlerine alternatifler sunduğu bunun nedeninin ise entropiye dayalı yöntemlerin klasik yöntemlerdeki önkoşulları istememesi nedeniyle kullanımının rahat olduğu ifade edilmektedir. Ayrıca daha doğru sonuçlar verdiğini belirten çalışmalar da bulunmaktadır. Bu noktada istatistik alanında entropiye dayalı istatistiksel analiz yöntemleri konusunda daha fazla çalışma yapılması ve kullanımının yaygınlaştırılması önerilmektedir. Literatürde entropinin kullanıldığı araştırmalar aşağıda yer almaktadır ve tez çalışması kapsamında bu araştırmalardan bahsedilmiştir.

- Endeks çalışmalarında kriterlerin ağırlıklandırılmasında
- Entropiye dayalı ÇKKV yöntemlerinde
- Entropi optimizasyon yöntemlerinde
- Çoklu regresyon analizinde (Entropi optimizasyon yöntemi ile)
- Bağımsız bileşen analizinde (BBA)

3.1 Entropi ile Ağırlıklandırma

3.1.1 ÇKKV Yöntemlerinde Entropi ile Ağırlıklandırma

ÇKKV yöntemlerinde kriterlerin ağırlıklandırılmasında farklı ağırlıklandırma yöntemleri bulunmaktadır. Bu ağırlıklandırma yöntemlerinden biri de entropi ile ağırlıklandırmadır. Kriterler entropi yöntemi ile ağırlıklandırılarak ÇKKV problemlerinin çözümünde gerekli formüllerde kullanılmaktadır.

3.1.1.1 Çok Kriterleri Karar Verme Yöntemleri

Karar vermek gerek bireylerin hayatlarını sürdürmesinde gerekse işletmelerin, endüstrilerin, yöneticilerin faaliyetlerinde sürekli olarak karşılaştıkları bir eylemdir. Karar verici dediğimiz bu kişi, işletme, yönetici vb. hedef ve amaçlarını gerçekleştirmek doğrultusunda kararlar almaktadır. Ancak karar verici, hedef ve amaçlarına ulaşmak amacıyla karar verirken karmaşık bir süreç ile karşılaşmaktadır. Sürecin karmaşık olma nedeni; günümüzde karar vericinin seçim yapabileceği hem alternatiflerinin hem de alternatiflerden beklediği kriterlerin çok çeşitlenmiş olmasıdır.

Karar verme süreçlerinde karar vericinin hedefi ise alternatifler arasından istediği kriterleri karşılayan en iyi alternatifi seçmek veya alternatifleri kriterleri açısından sıralamak olacaktır. Bir karar verme sürecinde bir karar verici, karar vericinin amacı/hedefi, karar vericinin seçim yapabileceği alternatifleri ile karar vericinin alternatiflerden beklediği kriterleri ile belirlilik durumu söz konusudur. Bunlara karar verme bileşenleri de denilmektedir (Özden, 2015).

Belirli kriterler açısından alternatifler arasında karar vermek her alanda ve birçok karar verici için gerekli olduğundan ÇKKV yöntemleri birçok alanda ve sektörde uygulama bulmaktadır. Literatür incelendiğinde bu yöntemler ile ilgili farklı alan ve sektörde çok sayıda uygulama olduğu ve bu uygulamalarda alternatiflerin birbiri ile kıyaslanmakta veya performansı en iyi alternatif seçilmektedir. 50'ye yakın ÇKKV yöntemi bulunmaktadır. Karar vericinin; amacını, kriterleri, alternatifleri, karar verme öncesi bilgi derecesini (belirlilik, belirsizlik, risk altında karar vermesi) dikkate alarak bu çok sayıdaki ÇKKV yöntemlerinden en uygun olanını seçmesi gerekmektedir. Karar verici, ÇKKV yöntemleri ile kriterlerine göre alternatiflerinin en iyisini seçebilir veya alternatiflerini en iyiden en kötüye sıralayabilir. Literatürde ÇKKV yöntemlerinden bazıları daha sık kullanılmakta iken çok sayıda ÇKKV yönteminin kullanıldığı görülmektedir. Topsis, Moora, Multimoor, Vaspas, Edas, Copras, Swara, Aras, Critic, Raw, Maut, Elektre, Vıkor yöntemleri örnek olarak gösterilebilmektedir (Özden, 2015; Dilmen ve Çetinyokuş, 2020; Ulutaş, 2018).

ÇKKV yöntemlerinin kullanıldığı problemlere ise ÇKKV problemleri denilmektedir. ÇKKV problemlerinde karar vericinin kriterlerinin ve seçim yapabileceği alternatiflerinin de çok sayıda olduğu düşünülürse karar verici için kriterleri ve alternatiflerinden oluşan bir matris oluşturmak oldukça kolaylaştırıcı olmaktadır. Bu nedenle karar vericinin m tane alternatifinin ve n tane kriterinin olduğu bir karar matrisi (3.1) eşitliğindeki gibi $m \times n$ boyutlu bir matris olarak gösterilebilmektedir (Özden, 2015:4).

X matrisi = $m \times n$ boyutlu karar matrisi

A_i = Karar vericinin seçebileceği alternatifleri (m tane)

C_j = Karar vericinin seçim kriterleri (n tane)

X_{ij} = Karar vericinin i. alternatifinin j. kritere göre performans değeri

Performans değerini karar verici belirlemektedir.

$$X = [X_{ij}]_{m \times n} = \begin{matrix} & C_1 & C_2 & \dots & C_n \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{matrix} & \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.1)$$

Oluşturulan karar matrisi ÇKKV yöntemlerinde kullanılmakta ve bu yöntemlere girdi oluşturmaktadır. Ancak karar vericinin alternatiflerin seçiminde kullandığı kriterler eşit önem düzeyine sahip olmayıp bazıları daha önemli olabilir. Bu nedenle de kriterlerin (C_j) önem düzeylerine göre ağırlıklandırılması gerekli olabilir. İşte bu kriterlerin ağırlıklandırılmasında kullanılan yöntemlerden biri de entropi yöntemidir. Çalışmanın uygulama bölümü olan 4. bölümde analizlerde ÇKKV yöntemlerinden entropiye dayalı TOPSİS ve ARAS yöntemleri kullanılmıştır. Çalışmada kriterlerin ağırlıklandırılması entropi yöntemi ile gerçekleştirilmiştir. Bu yöntemler bu bölümde anlatılmaktadır.

- **Entropiye Dayalı TOPSİS Yöntemi**

TOPSİS yöntemi de bir ÇKKV yöntemi olup entropiye dayalı TOPSİS yönteminde kriterlerin ağırlıklandırılmasında entropi yöntemi kullanıldığından bu adı almaktadır. Ağırlıklandırmada entropi dışında farklı yöntemler de

kullanılabilmektedir. Yöntem 6 adımdan oluşmaktadır (Mahmoodzadeh vd.,2007).

1. Adım: Yöntemin ilk adımında karar matrisi oluşturulmaktadır. Öncelikle m tane alternatifin ve n tane kriterin olduğu karar matrisi oluşturulmaktadır. Bu matris $m \times n$ boyutlu aşağıdaki gibi bir matris olacaktır. Karar matrisinde $(A_1, A_2, \dots, A_m)$ alternatifler ve $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ kriterler olmak üzere D karar matrisi (3.2) eşitliğindeki gibi $m \times n$ boyutlu bir matris olarak gösterilmektedir.

$$D = [X_{ij}]_{m \times n} = \begin{matrix} & \begin{matrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_j & \cdots & X_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_m \end{matrix} & \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2j} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mj} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.2)$$

x_{ij} = i. alternatifin j. kriterine göre başarı değeri (performansı)

$i = 1, 2, \dots, m$

$j = 1, 2, \dots, n$

2. Adım: Karar matrisinin elemanları olan her bir x_{ij} için (3.3) eşitliği yardımıyla standardize (normalize) edilmiş karar matrisi oluşturulur. (3.4)'te görüldüğü gibi elemanları r_{ij} olan R_{ij} normalize karar matrisi elde edilir.

$$r_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m x_{ij}^2}} \quad (3.3)$$

Bu matriste m alternatif ve n kriter bulunmaktadır.

$$R_{ij} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m1} & \cdots & r_{mn} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

r_{ij} = Normalize karar matrisinin i.satır ve j. sütun elemanı

3. Adım: Bir önceki adımdaki normalize karar matrisinin (R) her bir sütunundaki elemanlar ilgili kriterin ağırlık değeri (w_j) ile çarpılarak ağırlıklı standardize karar matrisi (V), (3.6)'daki gibi elde edilir. Kriterlerin ağırlık değerleri olarak entropi

yöntemi ile ağırlıklandırma ile elde edilen değerler kullanılmaktadır. Bu değerler n kriter için eşitlik (3.5)'te görülmektedir.

$$W = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_n] \quad (3.5)$$

$$V_{ij} = \begin{bmatrix} w_1 r_{11} & w_2 r_{12} & \dots & w_n r_{1n} \\ w_1 r_{21} & w_2 r_{22} & \dots & w_n r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_1 r_{m1} & w_2 r_{m2} & \dots & w_n r_{mn} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

4. Adım: Bir önceki adımdaki ağırlıklı standardize karar matrisindeki her bir sütun kriteri için ideal (A^+) ve negatif ideal (A^-) çözümler (3.7) ve (3.8) eşitliklerindeki gibi oluşturulur. Her bir sütun kriteri için ideal (A^+) çözümler bulunurken eğer kriter fayda yönlü ise ağırlıklı standardize karar matrisinde kriterlerin bulunduğu sütundaki maksimum değer alınır; eğer maliyet yönlü ise sütundaki minimum değer alınır. Her bir sütun için negatif ideal çözümler (A^-) bulunurken kriter maliyet yönlü ise ağırlıklı standardize karar matrisinde kriterin bulunduğu sütundaki maksimum değer alınır.

$$A^+ = \{(\max_{vij} \mid j \in J), (\min_{vij} \mid j \in J')\} \quad A^+ = \{v_1^+, v_2^+, \dots, v_n^+\} \quad (3.7)$$

$$A^- = \{(\min_{vij} \mid j \in J), (\max_{vij} \mid j \in J')\} \quad A^- = \{v_1^-, v_2^-, \dots, v_n^-\} \quad (3.8)$$

5. Adım: 3. adımda elde edilen ağırlıklı standardize karar matrisi (V) elemanları (v_{ij}) ile 4. adımdaki kriterler için elde edilen ideal (v_j^+) ve negatif ideal (v_j^-) değerler ile ayırım ölçüleri hesaplanır. İdeal ayırım (S_i^+) ve negatif ideal ayırım (S_i^-) ölçüleri, (3.9) ve (3.10) eşitliklerindeki gibi hesaplanmaktadır.

$$S_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_{ij} - v_j^+)^2} \quad (3.9)$$

$$S_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_{ij} - v_j^-)^2} \quad (3.10)$$

6. Adım: 5. Adımda bulunmuş olan ideal (S_i^+) ile negatif ideal ayırım (S_i^-) değerleri (3.11) eşitliği yardımıyla (A_i)'nin (C_i^*)'ye göreceli yakınlık değeri hesaplanır.

$$C_i^* = \frac{S_i^-}{S_i^+ + S_i^-} \quad (3.11)$$

- **Entropiye Dayalı ARAS Yöntemi**

ARAS yöntemi de bir ÇKKV yöntemi olup entropiye dayalı ÇKKV'de kriterlerin ağırlıklandırılması entropi yöntemi ile olmaktadır. Bu yöntemde 5 adım bulunmaktadır (Zavadskas vd.,2010).

1. Adım: Her bir kritere ait optimal değerler matrisin ilk satırında olacak şekilde karar matrisi oluşturulur. Optimal değerler oluşturulurken kriterlerin fayda ve maliyet özelliğine göre kriterler için (3.12) ve (3.13) eşitlikleri yardımıyla hesaplanmaktadır.

$$j. \text{ kriter fayda yönlü ise } x_{0j} = \max_i x_{ij} \quad (3.12)$$

$$j. \text{ kriter maliyet yönlü ise } x_{0j} = \min_i x_{ij} \quad (3.13)$$

$$i=1,2,\dots,27 \quad j=1,2,\dots,6$$

$(A_1, A_2, \dots, A_m)$ alternatifler ve $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ kriterler ve ilk satırda optimal değerler olmak üzere karar matrisi (3.14)'teki gibi oluşturulmaktadır.

$$X = \begin{bmatrix} x_{01} & \cdots & x_{0j} & \cdots & x_{0n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{i1} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mj} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$i=0,1,\dots,m \quad j=0,1,\dots,n$$

2. Adım: 1. Adımda oluşturulan karar matrisi normalize edilir. Normalizasyon işlemiyle karar matrisinin tüm elemanları 0-1 aralığında standart hale getirilir. Normalize etme işlemi için kullanılan formüller kriterlerin fayda/maliyet kriteri oluşuna göre değişmektedir. Fayda kriterleri için (3.15) ve maliyet kriterleri için ise (3.16) eşitliği kullanılmaktadır.

$$\text{Maksimum (fayda) kriterleri için: } \bar{x}_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sum_{i=0}^m x_{ij}} \quad (3.15)$$

$$\text{Minumum (maliyet) kriterleri için: } \bar{x}_{ij} = \frac{1/x_{ij}}{\sum_{i=0}^m 1/x_{ij}} \quad (3.16)$$

x_{ij} = Normalize karar matrisi elemanı

3. Adım: 2. adımda normalize edilen karar matrisinin değerleri olan normalize değerler bu adımda ağırlıklandırılmaktadır. Ağırlıklandırma işlemi için entropi yöntemiyle bulunan kriterlerin ağırlıkları kullanılmaktadır. Ağırlıklandırılmış normalize karar matrisi (3.17) eşitliği ile elde edilmektedir.

$$\widehat{x}_{ij} = \bar{x}_{ij} w_{ij} \quad (3.17)$$

w_{ij} = Entropi yöntemi ile elde edilen kriter ağırlıkları

$\bar{x}_{ij}$ = Normalize değerler

$\widehat{x}_{ij}$ = Ağırlıklı normalize değerler

4. Adım: Bu adımda alternatiflerin optimallik dereceleri (3.18) eşitliği ile hesaplanır.

$$S_i = \sum_{j=1}^n \widehat{x}_{ij} \quad (3.18)$$

S_i : i. alternatifin optimallik fonksiyon derecesidir.

$\widehat{x}_{ij}$ = Ağırlıklı normalize değerler

5. Adım: 4. Adımda bulunan S_i değerleri, S_0 optimal değerine oranlanarak fayda dereceleri (K_i) hesaplanır ve alternatiflerin sıralanması (K_i)'lerin büyükten küçüğe doğru sıralanmasıyla elde edilir. Fayda dereceleri (K_i) (3.19)'daki eşitlik ile hesaplanmaktadır.

$$K_i = \frac{S_i}{S_0} \quad (3.19)$$

3.1.1.2 Entropi Yöntemi ile Ağırlıklandırma

Karar verme problemlerinde ÇKKV yöntemleri uygulanmadan önce ilk olarak kriterlerin ağırlıklandırılması gereklidir. Çünkü bu kriter ağırlıkları, ÇKKV yöntemindeki formüller için gereklidir. Kriterlerin ağırlıklandırılmasında çok fazla yöntem vardır ve bu yöntemler sübjektif ve objektif olmak üzere iki grupta toplanmaktadır. Sübjektif yöntemlerde kriter ağırlıkları için uzman görüşü alınmaktadır. Objektif yöntemlerde ise kişisel görüş söz konusu olmadığından daha doğru sonuçlar vermektedir. Kriterlerin ağırlıklandırılmasında objektif yöntemlerden en fazla tercih edilen entropi yöntemidir (Alp, Öztel ve Köse, 2015).

Kriterler entropi yöntemi ile ağırlıklandırıldıktan sonra çok kriterli karar verme yöntemine girdi olmak üzere aktarılmaktadır. Bunlara entropi tabanlı ÇKKV yöntemleri denilmekte ve literatürde de entropi tabanlı ÇKKV yöntemleri ile ilgili çalışmalar bulunmakta olup entropi tabanlı TOPSİS, EDAS, MOORE, MULTIMOORE, VIKOR gibi yöntemler örnek verilebilmektedir (Ulutaş, 2018).

Entropi ile ağırlıklandırma yöntemi için 5 adım bulunmaktadır (Karami ve Johansson, 2014:523-524):

1. Adım: Öncelikle m tane alternatifin ve n tane kriterin olduğu karar matrisi oluşturulmaktadır. Bu matris $m \times n$ boyutlu aşağıdaki gibi bir matris olacaktır. Karar matrisinde $(A_1, A_2, \dots, A_m)$ alternatifler $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ kriterler olmak üzere D karar matrisi $m \times n$ boyutlu bir matris olarak (3.20) eşitliğindeki gibi gösterilmektedir.

$$D = [X_{ij}]_{m \times n} = \begin{matrix} & X_1 & X_2 & \dots & X_j & \dots & X_n \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_m \end{matrix} & \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2j} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{i1} & x_{i2} & \dots & x_{ij} & \dots & x_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mj} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.20)$$

x_{ij} = i. alternatifin j. kriter açısından başarı değeri (performansı)

2. Adım: Karar matrisinin her bir elemanı (x_{ij} değerleri) normalize edilerek y_{ij} değerleri (3.21) eşitliğine göre elde edilmektedir.

$$y_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sum_{i=1}^m x_{ij}} \quad (3.21)$$

3. Adım: Kriterler için entropi değerleri (E_j) hesaplanır. Bu entropi değerlerinin hesaplanmasında 3. adımda elde edilen y_{ij} değerleri kullanılmaktadır. Her bir kriter için entropi değerlerinin hesaplanmasında (3.22) eşitliği ve eşitlikte ise entropi fonksiyonu kullanılmaktadır.

$$E_j = -k \sum_{i=1}^m y_{ij} \ln y_{ij} \quad (3.22)$$

E_j = j. kriterin entropi değeri

$$k = \frac{1}{\ln m} \text{ (entropi katsayısı)}$$

4. Adım: 3. adımda hesaplanan entropi değerlerinden (E_j) faydalanılarak (3.23) denklemi ile her bir kriter için bilginin farklılaşma derecesi bulunur.

$$d_j = 1 - E_j \quad (3.23)$$

$$j=1,2,\dots,n$$

d_j = Bilginin farklılaşma derecesi

5. Adım: Son adımda 4. adımda hesaplanan kriterlerin entropi değerleri (E_j ler) yardımıyla kriter ağırlıkları (w_j) (3.24)'teki gibi hesaplanmaktadır.

$$W_j = \frac{1 - E_j}{\sum_{j=1}^n (1 - E_j)} \quad (3.24)$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

w_j : j. kriter için ağırlık değeri

E_j : j. kriter için entropi değeri

Sonuç olarak entropi yöntemi ile karar matrisinde bulunan ($X_1, X_2, \dots, X_n$) n kriter için ağırlıklar ($W_1, W_2, \dots, W_n$) olarak hesaplanmış olup bu ağırlık değerleri ÇKKV yöntemlerinde girdi olarak kullanılacaktır.

3.1.2 Çok Kriterli Endeks Çalışmalarında Entropi ile Ağırlıklandırma

Çok kriterli araştırmalarda kriterlerin önceliklendirilmesinde, kriterlerin önem düzeylerinin belirlenmesinde kriterlerin ağırlıklandırılması çalışmalarında farklı yöntemler kullanılabilmektedir. Uzman görüşüne başvurularak kriterleri konu ile ilgili olarak önemine göre ağırlıklandırmaları istenebilir. Ancak bu ağırlıklandırma yöntemi subjektif olup objektif olmamakla birlikte bazı gerekli durumlarda yine de kullanılabilmektedir. Kriterlerin ağırlıklandırılması için objektif yöntemlerden biri de entropi ile ağırlıklandırmadır. Entropi ile hesaplanan ağırlıklar, Analitik Hiyerarşi Süreci (AHP) ve Delphi yöntemi gibi sübjektif yöntemlerle belirlenen ağırlıklardan daha doğru ve güvenilir sonuçlar vermektedir.

3.2 Entropinin İstatistiksel Analizlerde Kullanımı

İstatistik alanında klasik istatistiksel analiz yöntemlerinde entropiye dayalı yöntemler bulunmamaktadır. Ancak literatürde gerçekleştirilen analiz çalışmalarında entropiye dayalı yaklaşımlar, klasik yöntemlere yeni alternatif yöntemler olarak hem dikkat çekmekte hem de klasik yöntemlere göre daha doğru ve güvenilir sonuçlar vermektedir. Ayrıca entropi zaten belirsizliğin bir ölçümünü sağladığından, klasik istatistiksel yöntemlerdeki gibi önkoşullara da ihtiyaç duymamaktadır.

3.2.1 Entropinin Çoklu Regresyon Analizinde Kullanımı

3.2.1.1 Entropi Optimizasyon Yöntemleri

Literatürde entropinin optimizasyon yöntemlerinde sıklıkla kullanıldığı görülmektedir. Entropi optimizasyon yöntemleri istatistik, matematik, coğrafya, uzay bilimleri, ekonomi, gibi farklı alanlarda önemli uygulamalara sahiptir.

İstatistik literatüründe ise entropi konusunda gerçekleştirilen sayılı tez çalışmalarının önemli bir bölümünün entropi optimizasyon konusunda olduğu görülmektedir. Entropinin optimizasyon yöntemlerinde kullanılması Jaynes'in 1957 yılında invers problemlerin çözümünde shannon'ın entropi fonksiyonunu maksimize etmesiyle başlamıştır. Bu tahmin yöntemi maksimum entropi (ME) yöntemi olarak bilinmektedir. 1996 yılında ise Golan, Judge ve Miller, Genelleştirilmiş Maksimum Entropi (GME) yöntemini bulmuştur. Bu optimizasyon yöntemleri arasından; genelleştirilmiş maksimum entropi yönteminin (3.2.2.2) bölümünde anlatılmaktadır.

Entropi optimizasyonun çoklu regresyon analizinde uygulamaları bulunmaktadır. Bilindiği gibi istatistikte regresyon analizinin uygulanabilmesi için bazı varsayımlar sağlanmalıdır. Bu varsayımlar; (Gujarati, 2001: 59-72)

- Bağımsız değişkenler (x_i 'ler) arasında ilişki yoktur $Cov(x_i, x_j) = 0$. Bu duruma çoklu bağlantı olmaması denilmektedir.
- Hata terimleri (u_i 'ler) arasında ilişki yoktur $Cov(u_i, u_j) = 0$. Bu durum otokorelasyonun olmamasıdır.
- Bağımsız değişkenlerle hata terimleri ilişkisi yoktur $Cov(x_i, u_i) = 0$.

- Hatalar standart normal dağılıma sahiptir.
- Hatalar sabit varyanslıdır. Bu duruma eşvaryanslılık varsayımı denilmektedir.

Bu varsayımlardan bir ya da birkaçı sağlanamadığında klasik regresyon analizi uygulanamamaktadır. İşte böyle bir durumda, regresyon analizindeki katsayıların tahmini yapılırken hiçbir varsayıma gerek duymayan farklı entropiye dayalı optimizasyon yöntemleri uygulanabilmektedir. Bu yöntemler; Maksimum entropi, Genelleştirilmiş maksimum entropi (GME), Genelleştirilmiş çapraz entropi, MinxEnt, MaxEnt, Maksimum Entropi, Alfa (MaxEnt- α) MinMin, MinMax, MaxMin, MaxMax yöntemleridir (Depren, 2014: 43-44).

3.2.2.2 Çoklu Regresyon Analizine Genelleştirilmiş Maksimum Entropinin Uygulanması

Denklem (3.25)'teki gibi bir çoklu regresyon modeli yeniden parametrelendirilir. Bu parametrelendirme işlemleri aşağıdaki gibi olmaktadır (Golan, Judge ve Miller; 1996: 87-89).

$$y_{(TX1)} = X_{(TxK)} \beta_{(KX1)} + u_{(TX1)} \quad (3.25)$$

y: Bağımlı değişken vektörü

X: Gözlem matrisi

β : Katsayılar vektörü

u: Hata vektörü

$$y_{(TX1)} = X_{(TxK)} \beta_{(KX1)} + u_{(TX1)} \rightarrow y_{(TX1)} = X_{(TxK)} Z_{(KXKM)} P_{(KMX1)} + V_{(TxTJ)} W_{(TJx1)} \quad (3.26)$$

(Klasik Regresyon Modeli) (Yeniden parametrendirilen regresyon modeli)

$$y_{(TX1)} = X_{(TxK)} \beta_{(KX1)} + u_{(TX1)} = X_{(TxK)} Z_{(KXKM)} P_{(KMX1)} + V_{(TxTJ)} W_{(TJx1)} \quad (3.27)$$

Yeniden parametrelendirme sırasında 2 dönüşüm gerçekleştirilmektedir. Bu dönüşümler (3.28) ve (3.29) denklemlerindeki gibidir:

β katsayılar vektörü, z destek matrisi ile p olasılık vektörünün çarpımı

$$\beta = Zp \quad (3.28)$$

u hata vektörü ise V hata destek matrisi ile w vektörünün çarpımı

$$u = Vw \quad (3.29)$$

Modelin GME tahminleri ise tıpkı optimizasyon problemlerinde olduğu gibi (3.31), (3.32) ve (3.33) kısıtları altında; p ve w olasılıklarından elde edilen entropi fonksiyonu (3.30)'daki gibi amaç fonksiyonu olmak üzere hedeflenen amaç fonksiyonunun maksimize edilmesidir. Optimizasyon probleminin çözümü regresyon analizinde elde edilen tahmin sonuçlarını vermektedir.

Amaç Fonksiyonu:

$$\begin{aligned} H(p \times w) &= - \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^J p_m w_j \log (p_m w_j) \\ &= \sum_{m=1}^M p_m \log (p_m) - \sum_{j=1}^J w_j \log (w_j) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Kısıtlar:

$$\sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^M x_{tk} z_{km} p_{km} \log (p_m w_j) + \sum_{j=1}^J v_{tj} w_{tj} = y_t \quad t=1,2,\dots,T \quad (3.31)$$

$$\sum_{m=1}^M p_{km} = 1 \quad k = 1,2,\dots,K \quad (3.32)$$

$$\sum_{j=1}^J w_{tj} = 1 \quad j = 1,2,\dots,J \quad (3.33)$$

3.2.2 Entropinin Çok Değişkenli İstatistiksel Analizlerde Kullanımı

3.2.2.1 Çok Değişkenli İstatistiksel Analizler

Çok değişkenli araştırmalar, geniş uygulama alanlarına sahiptir ve aynı zamanda çok çeşitli analizleri kapsamaktadır. Birçok disiplin tarafından bilimsel araştırmalarda çok değişkenli araştırmalar kullanılmaktadır. Hangi alanda olursa olsun bilimsel araştırmalarda her zaman incelenen olay birçok faktörün etkisi altında kalmaktadır. Örneğin; tıp alanında bir hastalığı olay olarak düşünürsek bu hastalığı etkileyen faktörler değişkenler olarak düşünülebilir. Eğitim alanında öğrenci başarısını etkileyen faktörlerin belirlenmesi için birçok faktör dikkate alınmalıdır. Bu tür araştırmalarda doğru sonuçlar elde edilebilmesi için incelenen olay ne ise onu etkileyen faktörler mümkün olduğunca araştırmaya dahil edilmelidir.

Ancak bir olayla ilgili olan veya olduğu düşünülen tüm değişkenler araştırmaya dahil edilse de bu değişkenler arası bir veya birden fazla ilişki bulunması bir

karmaşa yaratacak ve yorumlanması sorun oluşturacaktır. İşte oluşturulan sistemde bu karmaşanın giderilmesi ve sistemin değişkenler bakımından daha az karmaşık veya daha basit hale getirilmesi çok değişkenli istatistiksel analiz yontemleri ile mümkün olmaktadır.

Literatürde çok değişkenli istatistiksel analizlerle ilgili farklı tanımlar bulunmaktadır. Bunun nedeni çok değişkenli istatistiksel analizlerin en genel ifade ile 2 veya daha fazla değişkenin olduğu durumlarda gerçekleştirilen tüm istatistiksel analizleri kapsaması ancak bu analizlerin kullanım amacı olarak kendi içinde çok farklı türde özelliklere sahip olmalarıdır.

Literatürdeki bazı tanımlar aşağıda yer almaktadır:

Çok değişkenli istatistik, iki veya daha fazla değişkenin aynı anda analizini sağlayan yontemleri tanımlayan genel bir terim olmaktadır (Shaw, 2003).

Çok değişkenli istatistiksel analizler, incelenen olayın içsel faktörleri ile çevresindeki dışsal faktörleri göz önünde bulundurarak, problemi doğasına ilişkin bilgilere uygun olarak incelemek ve çözümlere ulaşmak için geliştirilmiş yontemler bütünüdür (zdamar, 1999).

Çok değişkenli istatistiksel analizlerde sistem içerisinde birbiriyle ilişkisi olan çok sayıda değişken bulunmaktadır ve bu analizlerde kullanılan tekniklerle sistemin yapısının belirlenmesi ve basit bir forma dönüştürülmesi amaçlanmaktadır (Tatlıdil, 1996).

İstatistikte araştırma konusu olan deney birimlerini (nesne, kişi, durum, vb.) etkileyen bir ya da iki veya daha fazla değişken olabilmektedir. İstatistiksel araştırmalarda deney birimini etkileyen tek bir değişken varsa tek değişkenli istatistiksel analizler kullanılmaktadır. Ancak genellikle incelenen deney birimi iki veya ikiden daha çok değişkenin etkisi altında kalmaktadır. Böyle durumlarda çok değişkenli istatistiksel analiz teknikleri kullanılmakta olup bu analizlerde n tane birim (birey/nesne) ve p tane değişken bir matris yapısı göstermektedir. Bu durum (3.34)'teki gibi bir D matris yapısında gösterilmektedir. $a_1, a_2, \dots, a_n$ birey/nesneler ve $x_1, x_2, \dots, x_p$ değişkenler olarak yer almaktadır. Çok değişkenli istatistiksel analizlerde değişkenler matrislerle ifade edilmekte ve istatistiksel

hesaplamalar matrisler üzerinden yapılmaktadır. Çok değişkenli istatistiksel analizlerde ortalamalar da bir vektör ifade etmektedir (Tablo 3.1).

$$D = [X_{ij}]_{m \times n} = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & \cdots & \cdots & x_p \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_1x_1 & a_1x_2 & \cdots & \cdots & a_1x_p \\ a_2x_1 & a_2x_2 & \cdots & \cdots & a_2x_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_nx_1 & a_nx_2 & \cdots & \cdots & a_nx_p \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.34)$$

Tablo 3.1 Tek ve çok değişkenli istatistiksel analizlerin karşılaştırılması

	Tek Değişkenli İstatistiksel Analiz	Çok Değişkenli İstatistiksel Analiz
Değişken Sayısı (p)	$p = 1$	$p \geq 2$
Varsayımı	Değişkeni etkileyen diğer faktörler (değişkenler) türdeş ya da sabittir.	N birimli p tane değişken normal dağılım gösterir.
Örneklem Ortalaması	Tek değerdir.	Bir vektör belirtir. ($\mu_1, \dots, \mu_p$)

- **Çok Değişkenli İstatistiksel Analizlerin Çeşitleri**

Çok değişkenli istatistiksel analizlerin hem uygulama alanları çok geniş olup hem de çok sayıda analiz çeşiti bulunmaktadır. Çok değişkenli istatistiksel analizler değişkenler arasındaki ilişkinin durumuna göre bağımlılık ve bağımsızlık analizleri olarak 2 ana grup altında toplanmaktadır. Adından da anlaşılacağı gibi bağımlılık analizlerinde değişkenlerden bir kısmı diğerlerine bağımlıdır. Bağımsızlık analizlerinde ise değişkenler arasında bir bağımlılık durumu söz konusu değildir. Bağımlılık analizlerinde bir ya da daha fazla değişken, bağımlı değişken olarak diğer bağımsız değişkenlerce açıklanmakta veya tahmin edilmektedir. Mesela çoklu regresyon analizinde tek bir bağımlı değişkene birden çok bağımsız değişkenin etkisi incelenmektedir. Bağımsızlık analizlerinde ise bağımlı değişken bulunmamaktadır. Değişkenlerin bir kısmı diğerleri ile açıklanamamakta veya tahmin edilememekte sadece değişkenler arasındaki ilişkiye bakılmaktadır (Kurt, 1992; Ünlükaplan, 2008) (Tablo 3.2).

Tablo 3.2 Çok değişkenli istatistiksel analizler

Bağımlılık Analizleri	Çok Değişkenli Regresyon Analizi
	Ayırma Analizi
	Lojistik Regresyon Analizi
	Çok Değişkenli Varyans Analizi
	Kanonik Korelasyon Analizi
	Birliktelik Analizi
	Probit Regresyon Modeli
	Yapısal Eşitlik Modeli
	Çok Değişkenli Covaryans Analizi
	Hotelling T ²
	Doğrusal Olasılık Modelleri (Logit Analysis)
Bağımsızlık Analizleri	Temel Bileşenler Analizi
	Faktör Analizi
	Bağımsız Bileşen Analizi
	Kümeleme Analizi
	Çok Boyutlu Ölçekleme Analizi
	Uyum Analizi

- **Çok Değişkenli İstatistiksel Analizlerin Kullanım Amaçları**

Çok değişkenli istatistiksel analizlerde çok sayıda değişkenin analizi gerçekleştirildiğinden farklı amaçlarla kullanılmaktadır. Çok değişkenli istatistiksel analizlerin kullanım amaçları aşağıda yer almaktadır (Tatlıdil, 1996).

- **Basitleştirme ve Boyut İndirgeme:** Araştırmalarda çok fazla değişken ile çalışılması hem karmaşıklık yaratırken hem de değişkenler arasında ilişki olması sorun olmaktadır. Böyle bir durumda veri kümesinin daha az sayıda ve birbiri ile ilişkisi olmayan değişkenlerle p değişken ve k kütle olmak üzere, p sayıda değişken

içeren veri setinin varyasyonunu açıklayan ve aralarında ilişki bulunmayan daha az sayıda değişkenle ($k < p$) veri yapısını açıklamayı sağlamak. Temel bileşenler analizi ve faktör analizinde bu kullanım amaçları bulunmaktadır.

- **Birimlerin Kümelenmesi ve Sınıflandırılması:** Bazı araştırmalarda veri setindeki değişkenler, benzer özellikleri açısından belirli kümelerde toplanmak veya sınıflandırmak istenebilmektedir. Kümeleme analizi örnek olarak gösterilebilmektedir.

- **Bağımlılık Yapısının İncelenmesi:** Veri setinde değişkenler arasında ilişkilerin durumunu ve ilişkilerin türünü tespit etmektedir.

- **Sıralama ve Ölçekleme:** Araştırmadaki birimler belirli özellikler açısından sıralanabilir. Araştırmada çok sayıda değişken varsa birimlerin daha az boyutla gösterilmesi ise ölçeklemedir.

- **Hipotez Testleri ve Hipotez Oluşturma:** k tane değişkenin ortalamalar vektörlerinin eşitliği/farklılığı ile kurulan hipotezlerin hipotez testleri ile test edilmesi.

3.2.2.2 Entropinin Çok Değişkenli İstatistiksel Analizlerde Kullanımı

İstatistikte klasik çok değişkenli istatistiksel analiz tekniklerini biliyoruz. Klasik istatistiksel analiz yöntemlerinde “entropi” kavramı ile karşılaşmamışsınız. Ancak son dönemlerde gerçekleştirilen çalışmalarda entropiye dayalı yöntemler yeni bir yöntem olarak hem dikkat çekmekte hem de diğer istatistiksel yöntemlere göre doğruluk ve güvenilirlikleri karşılaştırılmaktadır. Ayrıca entropi zaten belirsizliğin bir ölçümünü sağladığından, klasik istatistiksel yöntemlerdeki gibi önkoşullara ihtiyaç duymamaktadır.

Literatürde entropiye dayalı çok değişkenli istatistiksel analiz çalışmaları ile karşılaşmaktadır. Bu çalışmalarda daha çoklu regresyon analizlerinde önkoşulların sağlanamadığı durumlarda herhangi bir önkoşula ihtiyaç duymaması nedeniyle entropiye dayalı optimizasyon yöntemlerinin kullanıldığı görülmektedir. Ayrıca gerçekleştirilen çalışmalarda klasik yöntemlere göre daha doğru sonuçlar vermektedirler. Mühendislikte sıkça kullanılan yüz tanıma uygulamalarında TBA sıklıkla kullanılırken yüzün yüksek dereceden

özniteliklerinin tanınmasında TBA yeterli olmamakta ve entropiye dayalı BBA kullanılmaktadır.

- **İstatistikte Temel Bileşenler Analizinin Kullanımı**

TBA, çok değişkenli istatistiksel analizler arasında en eski yöntemlerdendir. Karl Pearson, 1901 yılında TBA ile ilgili çalışmaları başlatmış ve Hotelling tarafından da geliştirilmiştir.

Çok değişkenli istatistiksel analizler arasında temel bileşenler analizi en sık kullanılan yöntemlerdendir ve çok değişkenli istatistiksel analizlerin temelini oluşturmaktadır. Temel bileşenler analizi, boyut indirgenmesini ve bağımlı değişkenler arasındaki bağımlılık yapısının giderilmesini sağlamakta olup faktör analizi, kanonik korelasyon analizi, ayırma analizi, lojistik regresyon analizi ve çok değişkenli regresyon analizleri için de bir ilk adım olarak kullanılmaktadır.

Temel bileşenler analizi; çalışma kapsamında incelenen birçok özellik bakımından bir X değişken kümesinin varyans yapısını, p sayıda orijinal değişken yerine, k sayıda değişken ($k < p$) ve bu değişkenlerin doğrusal bileşenleri olan yeni değişkenler ile ifade etmeyi sağlamaktadır (Özdamar, 2004).

Çok değişkenli istatistiksel analizlerde araştırma gerçekleştirilirken oluşturulacak modelde hangi değişkenlerin önemli olduğunu başlangıçta anlamak zor olabilir. Bu nedenle başlangıçta çok sayıda değişkenin modele alınması ve sonrasında değişken sayısının azaltılması daha uygun olacaktır. İstatistiksel araştırmalarda çalışılan değişkenler arasında ilişki olması araştırmanın sağlıklı ve güvenilir olmasını engellemektedir. Bu bakımdan çalışılan değişkenler arasında ilişki olması sorun oluşturmakta ve çok sayıda değişkenin araştırma modelinde kalması sonuçların yorumlanmasını da zorlaştıracaktır. Bu nedenle çok değişkenli istatistiksel analizlerde birbiri ile ilişkisi olmayan az sayıda değişkene ihtiyaç duyulmaktadır. Temel bileşenler analizi ile de bir araştırmada birbiri ile ilişkili değişkenlerden birbiri ile ilişkisiz ve daha az değişkenin elde edilmesi amaçlanmaktadır. Temel bileşenler analizinde boyut indirgenmesi ile başlangıçtaki modelde değişkenlerin içerdiği bilgi miktarına mümkün olduğunca yakın ve en az miktarda bilgi kaybı ile birbiri ile ilişkisiz yeni değişkenlerle (temel bileşenlerle) model ifade edilmektedir.

- **Mühendislikte Temel Bileşenler Analizinin Kullanımı**

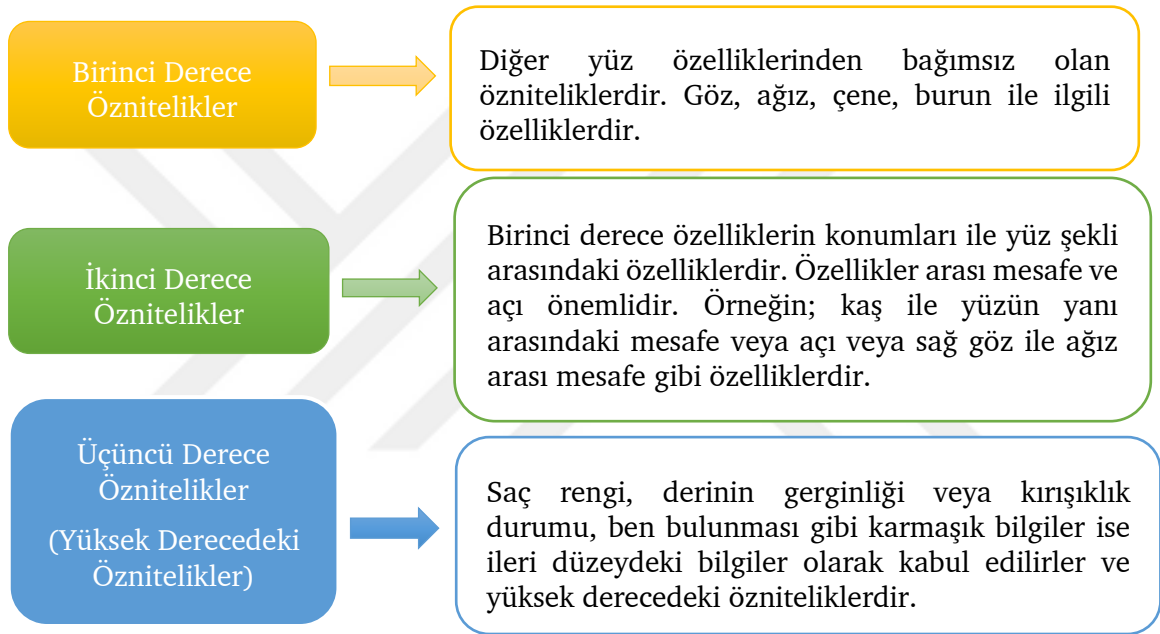
Temel bileşenler analizi, istatistikte çok değişkenli istatistiksel analiz yöntemleri arasında hem temel hem de en eski yöntemlerden biri olmakla birlikte farklı mühendislik alanlarında sıklıkla kullanılmaktadır. Mühendislik alanında imgelere ilişkin boyut indirgeme işlemleri oldukça önemlidir. Mühendislik alanında önemli yeri olan imge tanınması ve sınıflandırılmasında karşılaşılan en büyük sorun ise imgelerin boyutlarının anlamlı bir şekilde azaltılmasıdır. Veri tabanlarında tutulan imgelerin boyutlarının çok büyük olması nedeniyle doğrudan imge tanınması ve sınıflandırılması işlemlerine alınamazlar. Çünkü veri tabanlarındaki imgeler oldukları gibi kullanılır ise hem veri tabanlarından fazla yer kaplayacaklar hem de işlem süreleri çok uzayacaktır. Bu nedenle imge tanınması ve sınıflandırılmasında önce mutlaka imgelerin boyutları azaltılmalıdır. Boyut azaltmada en önemli husus ise imgenin mümkün olan en düşük boyutta saklanırken özniteliklerinin karakteristik özelliklerinin korunmasıdır. İmgelerin boyutlarının indirgenmesinde temel bileşenler analizi kullanımı yaygındır (Çatalbaş, 2014).

İmge tanıma veri tabanlarında tutulan imgelerin benzerlerinin ya da aranan imgenin bulunması işlemi iken imge sınıflandırma ise veri tabanındaki aynı türde imgelerin sınıflandırılmasıdır. Farklı mühendislik alanlarında son dönemlerde hem trend hem de önemli konuları arasında olan makine öğrenmesinde yüz tanıma uygulamalarının ne derece önemli olduğu bilinmektedir. İşte yüz tanıma uygulamalarında da imge tanıma uygulamaları yaklaşımları kullanılmaktadır. Temel bileşenler analizi ise yüz tanıma uygulamalarında özniteliklerin seçimi ve boyut indirgenmesinde de yaygın bir şekilde kullanılmaktadır.

Öncelikle yüz tanıma sistemlerinin nasıl çalıştığına bakalım. Yüz tanıma sistemi, kendi alanında bir yüz olursa çalışmaya başlar ve ilk aşamada öncelikle yüzü algılar. Yüzü algılamasının hemen ardından yüzü bazı yüz özellikleri bakımından taramaya başlar. Bu tarama sırasında göz rengi, burun şekli ve uzunluğu, yüz uzunluğu ve şekli, saç rengi, derinin sıklığı vb. birçok özelliğe bakmaktadır. Bu özelliklere öznitelikler denilmektedir. İşte makine öğrenmesinde yüz tanıma uygulamalarında arka planda yapay zeka tabanlı yazılımlar çalışmakta ve bu yazılımlar sayesinde yapay zeka veri tabanlarını saniyeler içinde tarayarak kişileri

birbirinden ayırabilmekte ve yüzleri tanımaktadırlar. Ancak yüz tanıma yüzün hangi özniteliklerinin kullanıldığı önemlidir. Çünkü özniteliklerin başarılı bir şekilde seçilmesi yüz tanıma oranlarını etkileyecek yani artıracak veya azaltacaktır (Yazar, 2008).

Yüz tanıma ile ilgili uygulamalarda bu çok sayıda özellikler arasından hangi özelliklerin seçileceği önemlidir. Bu seçilen özelliklere öznitelikler denilmektedir ve özniteliklerin iyi bir şekilde seçilmesi yüz tanıma uygulamalarının yüz tanıma oranını arttıracaktır. Öznitelikler; birinci, ikinci ve üçüncü dereceden öznitelikler (yüksek dereceden öznitelikler)'dir (Şekil 3.1) (Yaman, 2006).



Şekil 3.1 Yüz tanıma öznitelikleri ve türleri

Çok değişkenli istatistiksel yöntemlerde bildiğimiz temel bileşenler analizi de yüz tanıma uygulamalarında bu tür çalışmalarda kullanılmaktadır ancak temel bileşenler analizi kovaryans tabanlı bir yöntem olduğundan yüksek derecedeki özellikler için kullanılamamaktadır. Yüksek derecedeki öznitelikler için ise bağımsız bileşen analizi kullanılmaktadır (Yazar, 2008).

Sir Francis Galton, 1888 yılında ilk defa yüz tanıma yüz sınıflandırma yöntemlerini kullanmıştır. Galton, yüz sınıflandırılmasında insan yüzü farklılıklarını gösteren istatistiksel modelleri kullanmıştır. Bilgisayar ortamında yüz tanıma çalışmaları ise 1960-1970 yıllarında gerçekleştirilmiş olup 1990

yılından sonra yüz tanıma uygulamalarına ilgi giderek artmıştır (Küçükköşker, 2006: 14).

Yüz tanıma uygulamalarında iki temel yaklaşım yöntemi kullanılmaktadır. Özellik tabanlı yüz tanıma, bunlardan biri olup bu yöntemde yüzün organlarının (kaş, göz, vb.) kendi özellikleri ve bu organların birbirleri ile ilişkilerine dair bilgiler kullanılarak tanıma sağlanmaktadır. Bu yaklaşım geometriye dayanmaktadır. Diğer yöntem ise temel bileşen analizi metodudur (Yaman, 2006).

Temel bileşenler analizi ile amaçlanan boyutun azaltılması ve yüksek boyutlu verinin, daha düşük boyutlu alt uzaylarda ifade edilmesidir. TBA, karşılıklı ilişkisi olan verinin N-boyutlu uzay yerine daha düşük boyutlu uzayda önemli bir bilgi kaybı olmadan, boyut azaltmanın en uygun yoludur. Azaltılmış alt uzayı kullanarak, yüz veritabanları üzerindeki hesaplamalar daha verimli hale gelmektedir (Turk ve Pentland, 1991).

Yüz tanımda kullanılan ve uygulamaları olan en etkili yöntem 1991 yılında M. Turk ve A. Pertland tarafından ortaya konulan temel bileşenler analizine dayalı özyüz (eigenface) yöntemidir.

Özyüzler yöntemi, resmin karakteristik özelliklerinin küçük bir kümesinin kovaryans matrisinin özvektörlerinin kullanıldığı bir temel bileşenler analizidir. Yüz tanıma çalışmalarında, TBA'de hesaplanan öz vektörler yüzlerdeki değişimi göstermektedir. Öz vektörler yardımı ile her yüz için özyüzler elde edilmektedir. Kısacası yüz tanıma uygulamalarında TBA uygulanarak elde edilen öz vektörlerden özyüzler elde edilmektedir. Yüz tanıma uygulamalarında TBA uygulanırken kullanılan analiz algoritmasının adımları aşağıdaki gibidir. Özyüzler yönteminde TBA ile asıl amaçlanan tüm görüntü uzayında yüz görüntülerini en iyi açıklayan vektörün bulunmasıdır. Analiz algoritmasının adımlarına dikkat edildiğinde 4. Adımda kovaryans matrisinin elde edildiği 5. Adımda ise kovaryans matrisi için öz vektörlerin hesaplandığı 6. ve 7. Adımda ise özvektörlerden özyüz ve özyüz uzayının elde edildiği görülmektedir (Küçükköşker, 2006: 16; Yaman, 2006: 37).

1. Adım: Girdi imgesi olan yüz imgeleri vektör haline dönüştürülür.

$$\text{imge}_{\text{in}} \Longrightarrow r_i \quad (3.35)$$

Eğitim görüntüleri sırayla okunarak her NxN eğitim görüntüsü N²x1 boyutlarına getirilir. M örnek imge (yüz) sayısı ise N²x M boyutlarında eğitim seti oluşturulur.

2. Adım: Ortalama yüz vektörü elde edilerek ortalama yüz bulunur. Ψ , ortalama matrisi temsil etmektedir.

$$\Psi = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M r_n = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \vdots \\ \Psi_n \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

M = imge sayısı

3. Adım: Ortalama yüz vektörü girdi imgelerinden çıkartılır. Kısacası ortalama yüz eğitim setindeki yüzlerden çıkarılır.

$$\phi_i = r_i - \Psi \quad (3.37)$$

4. Adım: 3. Adımda elde edilen matris (ϕ_i), transpozesi ile çarpılarak kovaryans matrisi (C) elde edilir.

$$C = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M \phi_i \phi_i^T = AA^T \quad (3.38)$$

5. Adım: Kovaryans matrisi için öz vektörler hesaplanır.

6. Adım: Öz vektörlerin, eğitim görüntü sayısı-sınıf sayısı kadarı özyüzlerinin oluşturulmasında kullanılır.

7. Adım: Seçilen öz vektörler, çıkarma işleminden elde edilen matris ile çarpılarak azaltılmış özyüz uzayı elde edilir.

8. Adım: Tanıma aşamasında, alınan örnek görüntü için özyüz oluşturulur ve her bir özyüz ile arasındaki öklit uzaklığı hesaplanır. Uzaklığın en küçük olduğu değer örnek verinin en çok benzediği kişidir.

3.2.2.3. Entropiye Dayalı Bağımsız Bileşen Analizi

Temel bileşenler analizi uygulanabilmesi için verilerin normal dağılması ön koşulu bulunmaktadır. Oysaki eğer veriler normal dağılıma uymuyorsa entropiye dayalı bağımsız bileşenler analizi kullanılabilmektedir. Ayrıca araştırmalarda gerçekleştirilen karşılaştırmalar sonucu entropiye dayalı BBA ile daha doğru ve

güvenilir sonuçlara ulaşıldığı bilinmektedir. BBA, çok değişkenli verilerin birbirinden bağımsız olan bileşenlerin lineer (doğrusal) bir birleşimi olarak ifade eden istatistiksel bir analiz yöntemidir. Bağımsız bileşen analizi modelinin bir uygulaması olan kokteyl parti problemi, bu analiz yönteminin en iyi şekilde anlaşılmasını sağlamaktadır.

- **Kokteyl Parti Problemi**

Kokteyl parti problemlerinde aynı odadaki bir veya daha fazla kişinin seslerinin ayırt edilmesi amaçlanmaktadır. Bir odada üç kişinin aynı anda konuştuğunu düşünelim. Ayrıca odanın farklı yerlerinde kişilerin ses kayıtlarını almak için bulundurulmuş üç mikrofon olsun. Mikrofonlar, üç kayıtlı zaman sinyali vermektedir. Bu zaman sinyalleri; x_1 , x_2 ve x_3 genlikler ve t zaman indeksi olmak üzere $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ ile belirtilebilir. Bu kaydedilen sinyallerin her biri, üç hoparlör tarafından yayılan konuşma sinyallerinin ağırlıklı toplamı olarak ifade edilirse bu ağırlıklı toplamlar; $s_1(t)$, $s_2(t)$, $s_3(t)$ olarak gösterilebilir. Bunu (3.39), (3.40) ve (3.41) lineer denklemleri ile ifade edebiliriz.

$$X_1(t) = a_{11} s_1(t) + a_{12} s_2(t) + a_{13} s_3(t) \quad (3.39)$$

$$X_2(t) = a_{21} s_1(t) + a_{22} s_2(t) + a_{23} s_3(t) \quad (3.40)$$

$$X_3(t) = a_{31} s_1(t) + a_{32} s_2(t) + a_{33} s_3(t) \quad (3.41)$$

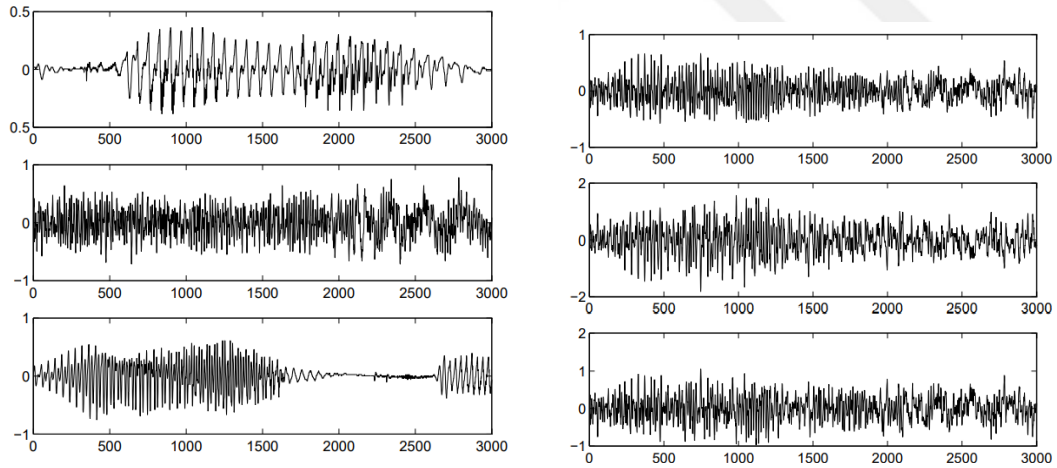
$i, j = 1,2,3$ olmak üzere a_{ij} = Hoparlörlerden gelen mikrofonlardan mesafelere bağlı bazı parametrelerdir. Sadece kaydedilen sesler olan $x_i(t)$ 'leri kullanarak orijinal ses sinyalleri olan $s_1(t)$, $s_2(t)$, $s_3(t)$ 'yi tahmin etmek, kokteyl parti problemi olarak adlandırılmaktadır (Hyvarinen, Karhunen ve Oja, 2001:147-150).

Kokteyl parti problemlerinde dikkat edilmesi gereken kişilerden çıkan seslerin mikrofonlara ulaşmaya kadar ortamdaki kaynak dışı seslerle karışarak mikrofonlara ulaşmasıdır. Bu nedenle yukarıdaki denklemlerde kaydedilen sesler olan $x_i(t)$ 'ler karışık ses sinyalleri iken $s_i(t)$ 'ler orijinal ses sinyalleridir.

- **Kokteyl Parti Probleminin BBA ile Çözülmesi**

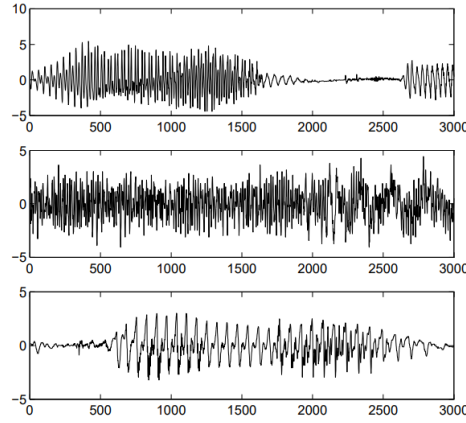
Kokteyl parti probleminin BBA ile çözümü ortamdaki alınan ses dalgalarının görselleştirildiği bir örnek üzerinden net olarak anlaşılabilir. Şekil 3.2 ve

Şekil 3.3'te ses dalgası biçimleri görülmektedir. Mikrofonlar ile ortamdan alınan karışık sinyaller şeklin sağında, orijinal konuşma sinyalleri ise şeklin solunda görülen dalga sinyalleridir. Amaç; Şekil 3.2'de sağda görselleştirilen karışım verilerini kullanarak, şeklin solundaki “kaynak” (orijinal) sinyalleri çıkarmaktır. Bunun için a_{ij} karıştırma parametreleri bulunabilirse, sadece (3.39), (3.40) ve (3.41) denklemlerinden oluşan lineer sistemi tersine çevirerek lineer denklemi çözebiliriz. Ancak denklemlerdeki a_{ij} ve $s_i(t)$ 'ler bilinmemekte ve bu sorunun çözümü, hem a_{ij} hem de $s_i(t)$ 'yi tahmin etmek için $x_i(t)$ sinyallerinin istatistiksel özelliklerini kullanmakla olacaktır. Bunun için $s_1(t)$, $s_2(t)$, $s_3(t)$ 'nin her t anında istatistiksel olarak bağımsız olduğunu varsaymak yeterli olacaktır. A_{ij} 'yi tahmin etmek için BBA kullanılabilir ve bu üç orijinal sinyali, $s_1(t)$, $s_2(t)$, $s_3(t)$ karışımlarından $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ ayırmamızı sağlamaktadır. Şekil 3.3'te görülebileceği gibi BBA ile tahmin edilen sinyaller, Şekil 3.2'deki orijinal kaynak sinyallerine çok benzemektedir. Bu sinyaller, yalnızca Şekil 3.2'de sağdaki karışım sinyali verilerinin kullanılmasıyla ve kaynak sinyallerinin bağımsızlığının çok zayıf varsayımları ile birlikte tahmin edilmektedir (Hyvarinen vd., 2001: 147-150).



Şekil 3.2 Orijinal sinyaller ve orijinal sinyallerin gözlenen karışımları

(Hyvarinen vd., 2001: 147-150).



Şekil 3.3 Orijinal sinyallerin BBA ile tahminleri (Hyvarinen vd., 2001: 147-150).

- **Bağımsız Bileşen Analizi Teknikleri**

BBA için farklı analiz yöntemleri bulunmakta olup bunlar; maksimum olasılıklı kestirim, normal dağılıma sahip olmamanın maksimize edilmesi, enformasyonun (ortak bilginin) minimizasyonu, kurtosisin maksimize veya minimize edilmesi, doğrusal olmayan ilintisizleştirme gibi farklı yöntemlerdir (Elmas, 2010: 16). Bu analiz yöntemleri arasında entropiye dayalı olan analiz yöntemi ortak bilginin (enformasyonun) minimize edilmesidir.

- **Bağımsız Bileşen Analizinin Uygulama Alanları**

Bağımsız Bileşen Analizi, literatürde farklı mühendislik alanlarında sık kullanılmakta ancak sadece mühendislik alanında da değil tıpta ve diğer alanlarda da farklı uygulamaları bulunmaktadır.

1. Genelliği nedeniyle BBA modelinin birçok farklı alanda uygulamaları vardır. Bunlar; (Hyvarinen vd., 2001: 7).

- Beyin görüntülemeye, genellikle beyinde sinyalleri yayan kaynaklar, başın dışındaki sensörlerde tıpkı kör kaynak ayırma modelinde olduğu gibi karışırlar.
- Ekonometride, genellikle paralel zaman serilerine sahibiz ve BBA, bu zaman serilerini veri setinin yapısı hakkında bir fikir veren bağımsız bileşenlere ayrıştırabilir.
- Görüntü özellik çıkarmada mümkün olduğunca bağımsız olan özellikleri bulmak için kullanılabilir.

2. BBA, herhangi bir ses, görüntü vb. den oluşan karışımların kaynaklarına ayrıştırılmasında kullanıldığından tıp alanında da yoğun kullanıma sahiptir. Mesela tıbbi uygulamalarda organların titreşim sinyallerinin elektrotlarla alınması esnasında bu ölçümlere diğer organların seslerinin de karışması da kör kaynak ayırma problemi gibi düşünülebilir. Örneğin; İnsan vücudunun dışında sadece elektrotun bulunduğu noktadaki kas sinyallerini değil yakınındaki diğer kaslardan gelen elektriksel sinyallerini de ölçmesi (farklı kasların farklı titreşim sinyalleri yaydığı ve farklı kasların yanyana veya farklı biçimlerde dizilmiş oldukları düşünülünce) bir sinyal karışımı ortaya çıkarmaktadır. Bu nedenle ölçülen bu sinyallere BBA uygulanarak daha bağımsız yani sadece ilgilenilen kasa ait sinyaller elde edilebilir (Başpınar, 2014: 60).

- **TBA ve BBA Analizi Karşılaştırması**

TBA ve BBA, çok değişkenli istatistiksel analiz yöntemleridir. TBA, istatistik literatüründe bilinmekte ve bu alanda yaygın kullanımı ve bilinirliğinin yanında mühendislik alanında yüz tanıma uygulamalarında da kullanımı çok yaygındır. BBA ise mühendislikte yüksek dereceden öznelilikleri kullanan yüz tanıma uygulamalarında sıkça kullanılmakta iken istatistik literatüründe TBA kadar yaygın kullanımı ve bilinirliği bulunmamaktadır. Bu nedenle TBA'nın devamı niteliğinde olan BBA'nın daha iyi anlaşılması için, TBA ile karşılaştırılmaktadır.

Aşağıda iki analiz yönteminin karşılaştırması sonucunda benzerlik ve farklılıkları yer almaktadır (Bursa, 2019: 48-49).

- Her iki analiz de istatistiksel dönüşüm tekniğidir.
- Her iki analizde bileşenler elde edilmekte olup TBA'da temel bileşenler ve BBA'da ise bileşenler elde edilmektedir. TBA'da bulunan temel bileşenler birbirine dik olurken BBA'da elde edilen bileşenler birbirine dik değildir.
- TBA'da bulunan temel bileşenler için sıralama yapılabilen ve çünkü bileşenlerin bir kısmı daha önemlidir. BBA'da ise bileşenler sıralanamamakta olup tüm bağımsız bileşenlerin eşit öneminin olduğu kabul edilmektedir.

- TBA uygulanması için verilerin normal dağılması koşulu bulunmakta iken BBA uygulanması için özellikle verilerin normal dağılmaması koşulu bulunmaktadır.
- TBA, kovaryans ve korelasyon matrisi gibi ikinci dereceden istatistiklerin analizlerine dayanmaktadır. BBA ise TBA ve faktör analizinin daha gelişmiş bir hali olduğundan, raslantı değişkenlerinin basıklık, çarpıklık gibi daha yüksek dereceden istatistiklerini kullanmaktadır.

• **Bir Çok Değişkenli İstatistiksel Analiz Modeli olarak Bağımsız Bileşen Analizi**

- **BBA'nın Doğrusal Bir Model Olarak Gösterimi**

BBA, çok değişkenli verilerin, birbirinden bağımsız olan bileşenlerin lineer (doğrusal) bir birleşimi olarak ifade edilmesini sağlamaktadır. Bileşenler birbirinden bağımsız olduğundan da bu ismi almaktadır.

$$X_i = a_{i1} s_1 + a_{i2} s_2 + \dots + a_{in} s_n \quad (3.42)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n$$

- $x_1, x_2, \dots, x_n$ rastlantı değişkenleri gözlenen değerler (karışım değerleri)
- a_{ij} değerleri karışım katsayıları (ağırlıklar)
- $s_1, s_2, \dots, s_n$ rastlantı değişkenleri bağımsız bileşenler
- $s_1, s_2, \dots, s_n$ rastlantı değişkenleri birbirlerinden istatistiksel olarak bağımsızdırlar. BBA'nın amacı (3.42)'deki doğrusal modelden gözlenen değerler (karışım değerleri) olan x_i raslantı değişkenlerini kullanarak karışım katsayılarını (a_{ij}) ve bağımsız bileşenleri tahmin etmektir. BBA'nın doğrusal modelinin çıkış noktası Hyvarinen, Karhunen ve Oja (2001)'in kokteyl parti problemindeki oluşturulan denklemlerin {(3.39), (3.40) ve (3.41)} genelleştirilmiş hali olarak düşünülebilir.
- **BBA'nın Vektör-Matris Gösterimi**

BBA'nın doğrusal model gösteriminde her bir i değerine karşılık olarak bir denklem olmak üzere toplamda n tane denklem bulunmaktadır. n sayıda denklem (3.43) ve (3.45) arasındaki denklemlerdir.

$$x_1 = a_{11} s_1 + a_{12} s_2 + \dots + a_{1n} s_n \quad (3.43)$$

$$x_2 = a_{21} s_1 + a_{22} s_2 + \dots + a_{2n} s_n \quad (3.44)$$

.

.

.

$$x_n = a_{n1} s_1 + a_{n2} s_2 + \dots + a_{nn} s_n \quad (3.45)$$

Bu denklemlerin her birini ifade eden eşitlik (3.46)'da görülmektedir.

$$x_i = \sum_{i=1}^n a_i s_i \quad (3.46)$$

BBA'nın doğrusal model gösteriminde her bir i değerine karşılık olarak bir denklem toplamda n tane denkleme karşılık gelen matrissel gösterim (3.47)'de görülmektedir. Burada x bir vektör, A ve s ise birer matristir.

$$\mathbf{x} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{S} \quad (3.47)$$

X vektörü: Karışımların vektörü (nx1 boyutlu bir vektör)

A matrisi: Karışım matrisi (nxn boyutlu bir matris)

s matrisi: Bağımsız bileşen matrisi (nxn boyutlu bir matris)

- BBA'nın Amacı

BBA ile amaçlanan (3.47) denkleminde görülen X karışım matrisinden A karışım katsayıları ve s bağımsız bileşen matrisinin tahmin edilmesidir.

Tahmin için aşamalar; görüldüğü gibi BBA'da tahmin için bir tek gözlem değerlerinden (karışım değerlerinden) oluşan X matrisi kullanılır.

1. Aşama: A matrisinin tersi alınarak ayrıştırma matrisi (W matrisi) (3.48)'deki eşitlik yardımıyla elde edilir.

$$\mathbf{W} = \mathbf{A}^{-1} \quad (3.48)$$

2. Aşama: Ayrıştırma matrisi (W matrisi) ile U matrisi yani S matrisinin, bağımsız bileşen matrisinin tahmini (3.49) eşitliği yardımıyla elde edilmektedir.

$$\mathbf{U} = \mathbf{W} \mathbf{X} \quad (3.49)$$

- **Bağımsız Bileşen Analizi'nde Kullanılan Negentropi Temelli FastICA Algoritması**

BBA için FastICA algoritması, hızlı sabit nokta algoritması olup Hyvärinen tarafından 1999 yılında geliştirilmiştir. Bu algoritma, BBA modelindeki bağımsız bileşenleri ortaya çıkarmaktadır. FastICA algoritması; ortak bilgi miktarının minimize edildiği tahmin yönteminin optimizasyonunda kullanıldığı gibi normal olmamanın maksimize edildiği veya en çok olabilirlik tahmin edicisinin kullanıldığı tahmin yöntemlerinin hepsinin optimizasyonunda kullanılabilir.

Literatürde BBA modelindeki bağımsız bileşenlerin bulunmasında farklı algoritmalar kullanıldığı ancak bunların içinde en fazla kullanılan algoritmanın FastICA algoritması olduğu görülmektedir. Bu algoritma dışında kullanılan diğer algoritmalar; FOBİ, Infomax, Jade, Radical, SOBİ'dir. Her algoritmanın dönüşüm için farklı yaklaşımları bulunmaktadır. Bağımsız bileşenlerin bulunmasında kullanılan FastICA algoritmalarının da farklı türleri bulunmakta olup bunlardan biri de negentropi temelli FastICA algoritmasıdır.

Negentropi Temelli FastICA Algoritmasının aşamaları aşağıdaki 8 adımdan oluşmaktadır (Hyvärinen vd., 2001).

1. Verileri ortalaması sıfır olacak şekilde merkezileştir.
2. Verileri beyazlat ve z matrisini elde et.
3. Tahmin edilecek bağımsız bileşenlerin sayısını (m) belirle, p'yi 1'e eşitle.
4. Rasgele olarak birim normlu bir w_p başlangıç vektörü seç.
5. $w_p = E (Zg (w_p Z)) - E (g' (w_p Z))$ 'yi (3.50) ve (3.51) eşitlikleri yardımıyla hesapla.

$$g_2 (u) = \tanh a_1 u \quad g_1(u) = a_1 (1 - \tanh a_1 u) \quad (3.50)$$

$$g_2 (u) = u \exp \left(-\frac{u^2}{2} \right) \quad g'_2 (u) = (1 - u^2) \quad (3.51)$$

6. $w_p^0 = w_p - \sum_{j=1}^{p-1} (w_p w_j) w_j$ ortogonalleştir.

7. $w_p^n = w_p^0 / || w_p^0 ||$ normlaştırma işlemini gerçekleştir.

8. Yakınsama sağlanmaz ise 5. adıma geri dön.

9. p 'yi $p+1$ 'e eşitle ve eğer $p \leq m$ ise 4. Adıma geri dön. Diğer durumda dur.



Bu çalışmanın uygulama bölümünde, AB üyesi ülkeler ve Türkiye'nin mutluluk düzeylerinin alternatif yöntemler ile karşılaştırılması amaçlanmaktadır. Literatürde ülkelerin, illerin, ilçelerin vb. belirli özellikleri bakımından sıralamaları konusunda çeşitli yöntemler kullanıldığı bilinmektedir. Bu sıralama yöntemleri arasında TBA sıklıkla kullanılmakta iken entropiye dayalı olan ÇKKV yöntemlerinin de kullanımı oldukça yaygındır. Ayrıca kümeleme analizi de ülkelerin, il veya ilçelerin belirli özellikler açısından gruplanmasını sağlamaktadır. ÇKKV yöntemleri öncesinde ülke, il, ilçeler sıralanmadan önce belirli kriter özellikleri bakımından entropi yöntemi ile ağırlıklandırılmaktadır. Yine diğer bir sıralama yöntemi olan TBA da uygulamada kullanılarak entropiye dayalı ÇKKV yöntemlerinin kendi arasında ve TBA ile karşılaştırması gerçekleştirilmiştir. Ayrıca ülkeler kümeleme analizi ile 3 grupta (yüksek, orta, düşük) kümelenmiştir.

Bu 4 yöntem birbirleri ile ve Dünya Mutluluk Raporu'ndaki mutluluk skor değerleri ile elde edilen ülke sıralamaları ile karşılaştırılmıştır. Mutluluk düzeylerinin ölçümü için Dünya Mutluluk Raporu (World Happiness Report 2022)'nda 2022 yılı verileri kullanılmıştır. Buradan özellikle TBA ve kümeleme analizleri ile tez çalışmasının asıl konusu olan entropi konusu ile ilgili olarak entropiye dayalı ÇKKV yöntemlerinin karşılaştırılması amaçlanmaktadır.

Türkiye ve AB üyesi ülkeler için mutluluk endeksindeki değişkenler kullanılarak 4 farklı yöntemle sıralama yapılarak sıralamalar hem birbirleri ile hem de Dünya Mutluluk Raporu'nun kendi Mutluluk Endeksinin sıralamaları ile karşılaştırılmaktadır. Bu sıralamalar üzerinden yöntemler birbirleri ile karşılaştırılabilmiştir. Bu yöntemler;

1. Entropiye dayalı TOPSİS Yöntemi
2. Entropiye dayalı ARAS Yöntemi
3. Temel Bileşenler Analizi

4. Hiyerarşik Kümeleme Analizi

4.1 Veri Seti

Çalışma kapsamında Dünya Mutluluk Raporu (World Happiness Report)'da Dünya Mutluluk Endeksi 2022 yılı verileri kullanılmıştır. Dünya Mutluluk Endeksi Raporu, 2012 yılından beri UN SDSN tarafından her yıl hazırlanmakta olup raporda Dünyadaki yaklaşık 150 civarı ülke için mutluluk skor değerleri hesaplanarak bu skor değerlerine göre ülkeler mutluluk düzeylerine göre sıralanmaktadır. Ülkelerin mutluluk skor değerleri hesaplanırken ülkelerin kişi başına GSYİH, sosyal destek, sağlıklı yaşam beklentisi, yaşam seçimleri yapma özgürlüğü, cömertlik ve yolsuzluk algıları değişkenleri kullanılmıştır. Raporda dünyadaki 146 ülke için mutluluk skor değerleri ve mutluluk skorlarının hesaplandığı 6 değişken için değerler yer almaktadır. Ancak çalışmamız kapsamında AB üyesi 27 ülke ve Türkiye'nin durumları anlaşılacak istendiğinden 28 ülkenin değerleri üzerinden araştırma çalışmaları gerçekleştirilmiştir. Bu sebeple de çalışma kapsamında ilk olarak Dünya Mutluluk Raporu'nun 2022 yılı dünya ülkelerinin mutluluk skor değerleri veri setinden AB üyesi ülkelerin ve Türkiye'nin değerleri çekilmiş ve Tablo 4.1'de çalışma kapsamında kullanılan veri seti oluşturulmuştur.

Tablo 4.1 AB üyesi ülkeler ve Türkiye'nin dünya mutluluk endeksi mutluluk skor değerleri ve değişkenlerin değerleri

Ülke	Mutluluk Skorları	Kişi Başına GSYİH	Sosyal Destek	Sağlıklı Yaşam Beklentisi	Yaşam Seçimi Özgürlüğü	Cömertlik	Yolsuzluk Algısı
Almanya	7,034	1,924	1,088	0,776	0,585	0,163	0,358
Avusturya	7,163	1,931	1,165	0,774	0,623	0,193	0,329
Belçika	6,805	1,907	1,106	0,764	0,492	0,049	0,204
Bulgaristan	5,371	1,625	1,163	0,64	0,563	0,123	0,021
Çekya	6,92	1,815	1,26	0,715	0,66	0,158	0,048
Danimarka	7,636	1,953	1,243	0,777	0,719	0,188	0,532

Tablo 4.1 AB üyesi ülkeler ve Türkiye'nin dünya mutluluk endeksi mutluluk skor değerleri ve değişkenlerin değerleri (devamı)

Estonya	6,341	1,793	1,232	0,728	0,689	0,123	0,333
Finlandiya	7,821	1,892	1,258	0,775	0,736	0,109	0,534
Fransa	6,687	1,863	1,219	0,808	0,567	0,07	0,266
Hırvatistan	6,125	1,705	1,183	0,709	0,535	0,109	0
Hollanda	7,415	1,945	1,206	0,787	0,651	0,271	0,419
İrlanda	7,041	2,129	1,166	0,779	0,627	0,19	0,408
İspanya	6,476	1,808	1,211	0,808	0,505	0,101	0,149
İsveç	7,384	1,92	1,204	0,803	0,724	0,218	0,512
İtalya	6,467	1,834	1,052	0,801	0,412	0,085	0,059
Kıbrıs	6,221	1,815	0,909	0,819	0,448	0,123	0,062
Letonya	6,18	1,732	1,221	0,637	0,502	0,075	0,09
Litvanya	6,446	1,804	1,204	0,659	0,496	0,053	0,077
Lüksemburg	7,404	2,209	1,155	0,79	0,7	0,12	0,388
Macaristan	6,086	1,748	1,233	0,668	0,485	0,078	0,064
Malta	6,447	1,838	1,169	0,789	0,679	0,174	0,166
Polonya	6,123	1,758	1,174	0,712	0,523	0,124	0,14
Portekiz	6,016	1,76	1,078	0,777	0,655	0,016	0,039
Romanya	6,477	1,719	1,006	0,655	0,605	0,039	0,006
Slovakya	6,391	1,736	1,232	0,707	0,479	0,118	0,025
Slovenya	6,63	1,81	1,249	0,769	0,685	0,118	0,115
Türkiye	4,744	1,707	0,865	0,702	0,209	0,087	0,115
Yunanistan	5,948	1,703	0,98	0,774	0,249	0,015	0,108

Kaynak: <https://worldhappiness.report/ed/2022/#appendices-and-data> sitesinden alınan verilerle oluşturulmuştur.

4.2 Çalışma Kapsamında Kullanılan Değişkenler

Tablo 4.2’de çalışma kapsamında kullanılan Dünya Mutluluk Endeksine etkisi olan kriterler görülmektedir. Kriterlerin birbirleri ile ilişki durumlarının belirlenmesi için 6 kriter için korelasyonlarına korelasyon analizi ile bakılmıştır. Analiz, SPSS 26 Programı ile gerçekleştirilmiş ve pearson’un korelasyon katsayısı kullanılmıştır. Analiz sonuçları Tablo 4.3’te görülmektedir.

Tablo 4.2 Dünya mutluluk endeksi değişkenleri

1	Kişi Başına GSYİH
2	Sosyal Destek
3	Sağlıklı Yaşam Beklentisi
4	Yaşam Seçimleri Yapma Özgürlüğü
5	Cömertlik
6	Yolsuzluk Algısı

Tablo 4.3 Değişkenler arası korelasyon değerleri

	Kişi Başına GSYİH	Sosyal Destek	Sağlıklı Yaşam Beklentisi	Yaşam Seçimi Özgürlüğü	Cömertlik	Yolsuzluk Algısı
Kişi Başına GSYİH	1	0,200	0,579**	0,492**	0,493**	0,741**
Sosyal Destek	0,200	1	-0,087	0,653**	0,351	0,315
Sağlıklı Yaşam Beklentisi	0,579**	-,087	1	0,223	0,323	0,514**
Yaşam Seçimi Özgürlüğü	0,492**	0,653*	0,223	1	0,511**	0,552**
Cömertlik	0,493**	0,351	0,323	0,511**	1	0,608**
Yolsuzluk Algısı	0,741**	0,315	0,514**	0,552**	0,608**	1

** : Korelasyonlar 0,01 seviyesinde anlamlıdır.

Korelasyon analizi sonucu Tablo 4.3'te korelasyon matrisinde değişkenlerin birbiriyle ilişkilerinin yönünü ve düzeyini gösteren korelasyon katsayıları görölmektedir. Bu katsayılar şu şekilde yorumlanmaktadır:

- Kişi başına GSYİH ile yolsuzluk algısı değişkenleri arasında pozitif yönde (biri arttıkça diğeri de artan) yüksek düzeyde bir ilişki ($r=0,741$)
- Kişi başına GSYİH ile sağlıklı yaşam beklentisi değişkenleri arasında pozitif yönde orta düzeyde bir ilişki ($r=0,579$)
- Kişi başına GSYİH ile cömertlik değişkenleri arasında pozitif yönde orta düzeyde bir ilişki ($r=0,493$)
- Sağlıklı yaşam beklentisi ile yolsuzluk algısı değişkenleri arasında pozitif yönde orta düzeyde bir ilişki ($r=0,514$)
- Sosyal destek ile yaşam seçimi özgürlüğü arasında pozitif yönde yüksek düzeyde bir ilişki ($r=0,653$)
- Yaşam seçimi özgürlüğü ile kişi başına GSYİH değişkenleri arasında pozitif yönde orta düzeyde ilişki ($r= 0,492$)
- Yaşam seçimi özgürlüğü ile cömertlik değişkenleri arasında pozitif yönde orta düzeyde ilişki ($r= 0,511$)
- Yaşam seçimi özgürlüğü ile yolsuzluk algısı değişkenleri arasında pozitif yönde orta düzeyde ilişki ($r= 0,552$)
- Cömertlik ile yolsuzluk algısı değişkenleri arasında pozitif yönde yüksek düzeyde ilişki ($r= 0,608$)

bulunmaktadır.

4.3 Entropi Yöntemi ile Ağırlıklandırma

1. Adım: İlk olarak satırlarda ölkeler ve sütunlarda kriterlerin bulunduğu karar matrisi oluşturulur. Ölkeler, 27 tane olup 26 AB ölkesi¹ ve Türkiye'den oluşmaktadır. Çalışmada kolaylık olması açısından karar matrisinde değişkenler

¹ AB üyesi ölkeler 27 tanedir ancak bu ölkelerden Hırvatistan'ın yolsuzluk algısı değerinin "0" olması nedeniyle entropi ile ağırlıklandırmada formüllerde matematiksel hesaplamalarda tanımsız değer çıkmasından dolayı çalışma kapsamından çıkarılmıştır. Tüm yöntemlerde de aynı ölkelerin karşılaştırılması gerektiğinden Hırvatistan çalışma kapsamı dışında bırakılmıştır.

Tablo 4.4'te görülebileceği gibi parametrelendirilmiştir. Bu durumda karar matrisi Tablo 4.5'teki gibi olmaktadır.

Karar matrisinde;

X_{ij} = karar matrisinin i. satır j. sütun elemanı

i = alternatifler (ülkeler) $i = 1, 2, \dots, m$ (m=27)

j = kriterler (değişkenler) $j = 1, 2, \dots, n$ (n=6)

Tablo 4.4 Kriter parametreleri

K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6
Kişi Başına GSYİH	Sosyal Destek	Sağlıklı Yaşam Beklentisi	Yaşam Seçimleri Yapma Özgürlüğü	Cömertlik	Yolsuzluk Algısı

Tablo 4.5 Karar matrisi

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6
Almanya	1,924	1,088	0,776	0,585	0,163	0,358
Avusturya	1,931	1,165	0,774	0,623	0,193	0,329
Belçika	1,907	1,106	0,764	0,492	0,049	0,204
Bulgaristan	1,625	1,163	0,640	0,563	0,123	0,021
Çekya	1,815	1,260	0,715	0,660	0,158	0,048
Danimarka	1,953	1,243	0,777	0,719	0,188	0,532
Estonya	1,793	1,232	0,728	0,689	0,123	0,333
Finlandiya	1,892	1,258	0,775	0,736	0,109	0,534
Fransa	1,863	1,219	0,808	0,567	0,070	0,266
Hollanda	1,945	1,206	0,787	0,651	0,271	0,419
İrlanda	2,129	1,166	0,779	0,627	0,190	0,408
İspanya	1,808	1,211	0,808	0,505	0,101	0,149

Tablo 4.5 Karar matrisi (devamı)

İsveç	1,920	1,204	0,803	0,724	0,218	0,512
İtalya	1,834	1,052	0,801	0,412	0,085	0,059
Kıbrıs	1,815	0,909	0,819	0,448	0,123	0,062
Letonya	1,732	1,221	0,637	0,502	0,075	0,090
Litvanya	1,804	1,204	0,659	0,496	0,053	0,077
Lüksemburg	2,209	1,155	0,790	0,700	0,120	0,388
Macaristan	1,748	1,233	0,668	0,485	0,078	0,064
Malta	1,838	1,169	0,789	0,679	0,174	0,166
Polonya	1,758	1,174	0,712	0,523	0,124	0,140
Portekiz	1,760	1,078	0,777	0,655	0,016	0,039
Romanya	1,719	1,006	0,655	0,605	0,039	0,006
Slovakya	1,736	1,232	0,707	0,479	0,118	0,025
Slovenya	1,810	1,249	0,769	0,685	0,118	0,115
Türkiye	1,707	0,865	0,702	0,209	0,087	0,115
Yunanistan	1,703	0,980	0,774	0,249	0,015	0,108

2. Adım: Karar matrisinin tüm elemanları (4.1) eşitliği yardımıyla sütun toplamalarına bölünerek normalize edilmektedir. Tablo 4.6’da normalize karar matrisi yer almaktadır.

$$P_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sum_{i=1}^m x_{ij}} \quad (4.1)$$

x_{ij} = Karar matrisi

Tablo 4.6 Normalize karar matrisi

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆
Almanya	0,039	0,035	0,038	0,038	0,051	0,064
Avusturya	0,039	0,038	0,038	0,041	0,061	0,059

Tablo 4.6 Normalize karar matrisi (devamı)

Belçika	0,038	0,036	0,038	0,032	0,015	0,037
Bulgaristan	0,033	0,037	0,032	0,037	0,039	0,004
Çekya	0,037	0,041	0,035	0,043	0,050	0,009
Danimarka	0,039	0,040	0,038	0,047	0,059	0,096
Estonya	0,036	0,040	0,036	0,045	0,039	0,060
Finlandiya	0,038	0,041	0,038	0,048	0,034	0,096
Fransa	0,038	0,039	0,040	0,037	0,022	0,048
Hollanda	0,039	0,039	0,039	0,043	0,085	0,075
İrlanda	0,043	0,038	0,039	0,041	0,060	0,073
İspanya	0,036	0,039	0,040	0,033	0,032	0,027
İsveç	0,039	0,039	0,040	0,047	0,069	0,092
İtalya	0,037	0,034	0,040	0,027	0,027	0,011
Kıbrıs	0,037	0,029	0,041	0,029	0,039	0,011
Letonya	0,035	0,039	0,032	0,033	0,024	0,016
Litvanya	0,036	0,039	0,033	0,032	0,017	0,014
Lüksemburg	0,044	0,037	0,039	0,046	0,038	0,070
Macaristan	0,035	0,040	0,033	0,032	0,025	0,011
Malta	0,037	0,038	0,039	0,044	0,055	0,030
Polonya	0,035	0,038	0,035	0,034	0,039	0,025
Portekiz	0,035	0,035	0,038	0,043	0,005	0,007
Romanya	0,035	0,032	0,032	0,040	0,012	0,001
Slovakya	0,035	0,040	0,035	0,031	0,037	0,004
Slovenya	0,036	0,040	0,038	0,045	0,037	0,021
Türkiye	0,034	0,028	0,035	0,014	0,027	0,021
Yunanistan	0,034	0,032	0,038	0,016	0,005	0,019

3. Adım: 2.adımda oluşturulan normalize karar matrisi değerleri (p_{ij}) kullanılarak (4.2) eşitliğiyle Tablo 4.7’de görülebileceği gibi kriterlerin entropi değerleri bulunmaktadır.

$$E_j = -k \sum_{i=1}^m p_{ij} \ln p_{ij} \quad (4.2)$$

E_j = entropi değerleri

$$k = \frac{1}{\ln m} \text{ (entropi katsayısı)}$$

$m=27$ ve $n=6$

Tablo 4.7 Kriterlerin entropi değerleri

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6
E_j	0,998	0,997	0,998	0,989	0,955	0,895

4. Adım: 3. adımda hesaplanan entropi değerlerinden (E_j) faydalanılarak (4.3) eşitliğiyle her bir kriter için bilginin farklılaşma derecesi (d_j) hesaplanmaktadır. Tablo 4.8’de kriterler için bilginin farklılaşma dereceleri yer almaktadır.

$$D_j = 1 - E_j \quad (4.3)$$

$j = 1,2,\dots,n$

Tablo 4.8 Kriterlerin bilginin farklılaşma dereceleri (d_j)

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6
d_j	0,002	0,003	0,002	0,011	0,045	0,105

5. Adım: Entropi değerlerinden (4.4) denklemini ile kriterlerin ağırlık (W_j) değerleri elde edilmektedir. Kriterlerin objektif ağırlıkları Tablo 4.9’da yer almaktadır.

$$W_j = \frac{1 - e_j}{\sum_{j=1}^n (1 - e_j)} \quad (4.4)$$

$j=1,2,\dots,n$

W_j = Kriter ağırlıkları

e_j = Entropi değerleri

$n = 6$

Tablo 4.9 Kriterlerin ağırlıkları

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6
W_j	0,012	0,016	0,013	0,064	0,267	0,628

Tablo 4.10'da entropi yöntemiyle ağırlıklandırılan kriterler görülmektedir. Kriterlerin ağırlıkları toplamı 1 değerini almaktadır.

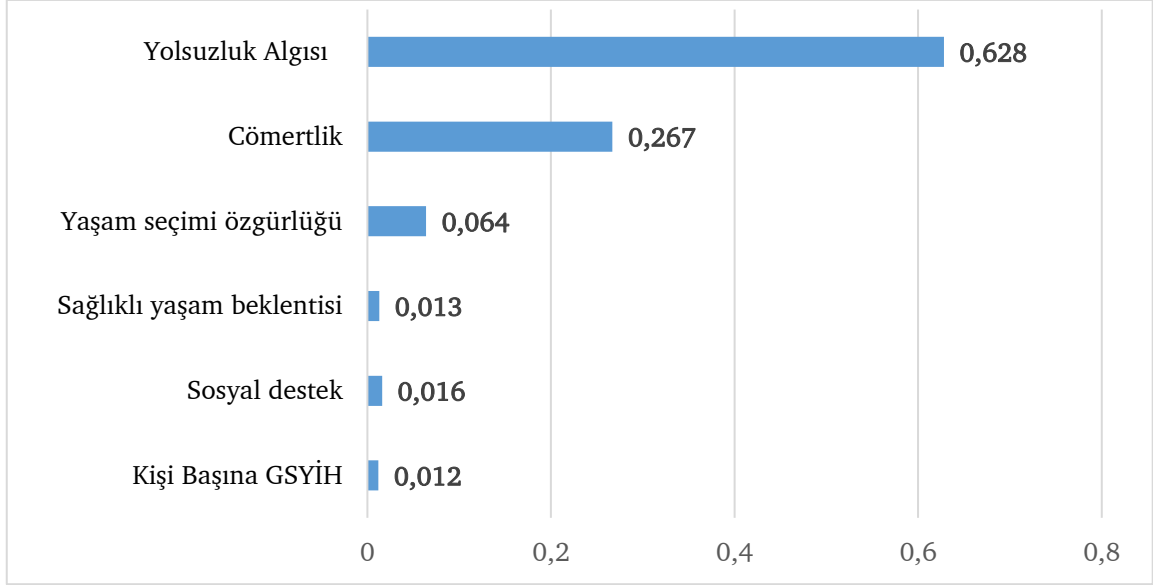
Tablo 4.10 Entropi yöntemine göre değişken ağırlıkları

Kriter Parametreleri	Kriterler (X_j)	Ağırlıklar (W_j)
K_1	Kişi başına GSYİH	0,012
K_2	Sosyal destek	0,016
K_3	Sağlıklı yaşam beklentisi	0,013
K_4	Yaşam seçimi özgürlüğü	0,064
K_5	Cömertlik	0,267
K_6	Yolsuzluk algısı	0,628
	Toplam	1

Entropi yöntemine göre kriterler arasında mutluluk skorlarına etkisi açısından Şekil 4.1'e göre şu sonuçlara ulaşılmaktadır:

- Yolsuzluk algısı (K_6) kriterinin ağırlığı en fazla olup kendisinden sonra 2. sırada gelen kriterin ağırlığının yaklaşık 3 katı ağırlığa sahiptir.
- Cömertlik (K_5) kriterinin ağırlığı ise 2. sırada en yüksek ağırlığa sahip olmaktadır.
- Ağırlığı en az olan kriter ise K_1 (kişi başına GSYİH) ve K_3 (sağlıklı yaşam beklentisi) olmuştur.

- Kriterler arasında en yüksek ağırlık değerlerine sahip olan en önemli 2 kriter yolsuzluk algısı (K_6) ve cömertlik (K_5)'tir. Şekil 4.1'den bu iki kriterin çok yüksek bir kırılım göstererek diğer kriterlere göre mutluluk düzeylerinde ağırlıklarının çok fazla olduğu yani diğer bir deyişle çalışma kapsamındaki ülkelerin mutluluk düzeyleri üzerinde çok yüksek etkilerinin olduğu görülmektedir.



Şekil 4.1 Entropi yöntemine göre kriter ağırlıkları

4.4 Entropiye Dayalı TOPSİS Yöntemi ile Ülkelerin Mutluluk Düzeylerinin Sıralanması

1. Adım: İlk olarak satırlarda 26 AB ülkesi ve Türkiye olmak üzere 27 ülke ve sütunlarda kriterlerin olduğu karar matrisi oluşturulmaktadır. Çalışmada kolaylık olması açısından kriterler $K_1, K_2, \dots, K_6$ olarak parametrelendirilmiştir. Bu durumda karar matrisi Tablo 4.11'deki gibi olmaktadır.

Tablo 4.11 Karar matrisi

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6
Almanya	1,924	1,088	0,776	0,585	0,163	0,358
Avusturya	1,931	1,165	0,774	0,623	0,193	0,329
Belçika	1,907	1,106	0,764	0,492	0,049	0,204
Bulgaristan	1,625	1,163	0,640	0,563	0,123	0,021

Tablo 4.11 Karar matrisi (devamı)

Çekya	1,815	1,260	0,715	0,660	0,158	0,048
Danimarka	1,953	1,243	0,777	0,719	0,188	0,532
Estonya	1,793	1,232	0,728	0,689	0,123	0,333
Finlandiya	1,892	1,258	0,775	0,736	0,109	0,534
Fransa	1,863	1,219	0,808	0,567	0,070	0,266
Hollanda	1,945	1,206	0,787	0,651	0,271	0,419
İrlanda	2,129	1,166	0,779	0,627	0,190	0,408
İspanya	1,808	1,211	0,808	0,505	0,101	0,149
İsveç	1,920	1,204	0,803	0,724	0,218	0,512
İtalya	1,834	1,052	0,801	0,412	0,085	0,059
Kıbrıs	1,815	0,909	0,819	0,448	0,123	0,062
Letonya	1,732	1,221	0,637	0,502	0,075	0,090
Litvanya	1,804	1,204	0,659	0,496	0,053	0,077
Lüksemburg	2,209	1,155	0,790	0,700	0,120	0,388
Macaristan	1,748	1,233	0,668	0,485	0,078	0,064
Malta	1,838	1,169	0,789	0,679	0,174	0,166
Polonya	1,758	1,174	0,712	0,523	0,124	0,140
Portekiz	1,760	1,078	0,777	0,655	0,016	0,039
Romanya	1,719	1,006	0,655	0,605	0,039	0,006
Slovakya	1,736	1,232	0,707	0,479	0,118	0,025
Slovenya	1,810	1,249	0,769	0,685	0,118	0,115
Türkiye	1,707	0,865	0,702	0,209	0,087	0,115
Yunanistan	1,703	0,980	0,774	0,249	0,015	0,108

2. Adım: 1. adımdaki karar matrisinin elemanları olan x_{ij} değerleri ve (4.5) eşitliği ile elemanları r_{ij} olan R_{ij} normalize karar matrisi (4.6)'daki gibi bulunmaktadır. Bu matriste $m=27$ ve $n=6$ olarak alınmaktadır. Tablo 4.12'de normalize karar matrisi görülmektedir.

$$r_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m x_{ij}^2}} \quad (4.5)$$

$$R_{ij} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Tablo 4.12 Normalize karar matrisi

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6
Almanya	0,386	0,197	0,155	0,113	0,039	0,092
Avusturya	0,389	0,226	0,154	0,129	0,054	0,078
Belçika	0,380	0,204	0,150	0,080	0,003	0,030
Bulgaristan	0,276	0,225	0,105	0,105	0,022	0,000
Çekya	0,344	0,265	0,131	0,144	0,036	0,002
Danimarka	0,398	0,258	0,155	0,171	0,051	0,204
Estonya	0,335	0,253	0,136	0,157	0,022	0,080
Finlandiya	0,374	0,264	0,154	0,180	0,017	0,206
Fransa	0,362	0,248	0,168	0,107	0,007	0,051
Hollanda	0,395	0,242	0,159	0,140	0,107	0,127
İrlanda	0,473	0,227	0,156	0,130	0,052	0,120
İspanya	0,341	0,244	0,168	0,085	0,015	0,016
İsveç	0,385	0,242	0,165	0,174	0,069	0,189
İtalya	0,351	0,184	0,165	0,056	0,010	0,003
Kıbrıs	0,344	0,138	0,172	0,067	0,022	0,003

Tablo 4.12 Normalize karar matrisi (devamı)

Letonya	0,313	0,248	0,104	0,084	0,008	0,006
Litvanya	0,340	0,242	0,111	0,082	0,004	0,004
Lüksemburg	0,509	0,222	0,160	0,162	0,021	0,109
Macaristan	0,319	0,253	0,115	0,078	0,009	0,003
Malta	0,353	0,228	0,160	0,153	0,044	0,020
Polonya	0,323	0,230	0,130	0,091	0,022	0,014
Portekiz	0,323	0,194	0,155	0,142	0,000	0,001
Romanya	0,308	0,169	0,110	0,121	0,002	0,000
Slovakya	0,314	0,253	0,128	0,076	0,020	0,000
Slovenya	0,342	0,260	0,152	0,156	0,020	0,010
Türkiye	0,304	0,125	0,126	0,014	0,011	0,010
Yunanistan	0,303	0,160	0,154	0,021	0,000	0,008

3. Adım: 2. adımda elde edilen R normalize karar matrisinin her bir sütunundaki elemanlar, ilgili değişkenin ağırlık değeri (w_j) ile çarpılarak ağırlıklı standardize karar matrisi (v) elde edilir. Ağırlık değerleri (w_j) olarak entropi yöntemi ile ağırlıklandırma ile elde edilen değerler kullanılmakta olup bu değerler (4.7)'deki W vektöründe yer almaktadır. (4.8)'deki (v) standardize karar matrisi oluşturulurken $m=27$ ve $n=6$ olarak alınmaktadır.

$$W = [0,012 \ 0,016 \ 0,013 \ 0,064 \ 0,267 \ 0,628] \quad (4.7)$$

$$V_{ij} = \begin{bmatrix} w_1 r_{11} & w_2 r_{12} & \cdots & \cdots & w_n r_{1n} \\ w_1 r_{21} & w_2 r_{22} & \cdots & \cdots & w_n r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_1 r_{m1} & w_2 r_{m2} & \cdots & \cdots & w_n r_{mn} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Bu işlemler sonucu elde edilen ağırlıklı standardize karar matrisi Tablo 4.13'te bulunmaktadır.

Tablo 4.13 Ağırlıklı standardize karar matrisi

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆
Almanya	0,005	0,003	0,002	0,007	0,010	0,058
Avusturya	0,005	0,004	0,002	0,008	0,014	0,049
Belçika	0,005	0,003	0,002	0,005	0,001	0,019
Bulgaristan	0,003	0,004	0,001	0,007	0,006	0,000
Çekya	0,004	0,004	0,002	0,009	0,010	0,001
Danimarka	0,005	0,004	0,002	0,011	0,014	0,128
Estonya	0,004	0,004	0,002	0,010	0,006	0,050
Finlandiya	0,004	0,004	0,002	0,011	0,005	0,129
Fransa	0,004	0,004	0,002	0,007	0,002	0,032
Hollanda	0,005	0,004	0,002	0,009	0,028	0,080
İrlanda	0,006	0,004	0,002	0,008	0,014	0,075
İspanya	0,004	0,004	0,002	0,005	0,004	0,010
İsveç	0,005	0,004	0,002	0,011	0,018	0,119
İtalya	0,004	0,003	0,002	0,004	0,003	0,002
Kıbrıs	0,004	0,002	0,002	0,004	0,006	0,002
Letonya	0,004	0,004	0,001	0,005	0,002	0,004
Litvanya	0,004	0,004	0,001	0,005	0,001	0,003
Lüksemburg	0,006	0,004	0,002	0,010	0,006	0,068
Macaristan	0,004	0,004	0,001	0,005	0,002	0,002
Malta	0,004	0,004	0,002	0,010	0,012	0,012
Polonya	0,004	0,004	0,002	0,006	0,006	0,009
Portekiz	0,004	0,003	0,002	0,009	0,000	0,001
Romanya	0,004	0,003	0,001	0,008	0,001	0,000

Tablo 4.13 Ağırlıklı standardize karar matrisi (devamı)

Slovakya	0,004	0,004	0,002	0,005	0,005	0,000
Slovenya	0,004	0,004	0,002	0,010	0,005	0,006
Türkiye	0,004	0,002	0,002	0,001	0,003	0,006
Yunanistan	0,004	0,003	0,002	0,001	0,000	0,005

4. Adım: Bir önceki adımdaki ağırlıklı standardize karar matrisindeki her bir sütun değişkeni için ideal (A^+) ve negatif ideal (A^-) çözümler (4.9) ve (4.10) eşitliklerine uygun olarak oluşturulur. Her bir sütun değişkeni için ideal (A^+) çözümler bulunurken eğer değişken mutluluk düzeylerine etkisi bakımından fayda yönlü ise ağırlıklı standardize karar matrisinde değişkenin bulunduğu sütundaki maksimum değer alınır iken eğer maliyet yönlü ise sütundaki minimum değer alınır. Her bir sütun için negatif ideal çözümler (A^-) bulunurken ise tam tersi değişken mutluluk skoruna etkisi bakımından maliyet yönlü ise ağırlıklı standardize karar matrisinde değişkenin bulunduğu sütundaki maksimum değer alınır.

$$A^+ = \{(\max_{vij} \mid j \in J), (\min_{vij} \mid j \in J')\} \quad A^+ = \{v_1^+, v_2^+, \dots, v_n^+\} \quad (4.9)$$

$$A^- = \{(\min_{vij} \mid j \in J), (\max_{vij} \mid j \in J')\} \quad A^- = \{v_1^-, v_2^-, \dots, v_n^-\} \quad (4.10)$$

Çalışma kapsamında mutluluk düzeylerine etkisi bakımından tüm değişkenlerin fayda yönlü olduğu bilinmektedir. Yani ülkelerin mutluluk düzeylerini kişi başına GSYİH, sosyal destek, sağlıklı yaşam beklentisi, yaşam seçimi özgürlüğü, cömertlik ve yolsuzluk algısı fayda yönünde etkilemektedir. Bu nedenle ideal çözümler bulunurken değişkenlerin sütundaki maksimum değerleri, negatif ideal çözümler bulunurken sütundaki minimum değerleri alınır. İdeal ve negatif ideal çözümler Tablo 4.14'te bulunmaktadır.

Tablo 4.14 İdeal (A^+) ve negatif ideal (A^-) çözümler

$A^+ (v_1^+)$	0,006	0,004	0,002	0,011	0,028	0,129
$A^- (v_1^-)$	0,003	0,002	0,001	0,001	0,000	0,000

5. Adım: 3. adımda elde edilen ağırlıklı standardize karar matrisi (V) elemanları (v_{ij}) ile 4. adımda değişkenler için elde edilen ideal (v_j^+) ve negatif ideal (v_j^-) değerler ile ayırım ölçüleri hesaplanır. İdeal ayırım (S_i^+) ve negatif ideal ayırım (S_i^-) ölçüleri, denklem (4.11) ve (4.12) ile hesaplanarak Tablo 4.15'teki gibi elde edilmektedir.

$$S_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_{ij} - v_j^+)^2} \quad (4.11)$$

$$S_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_{ij} - v_j^-)^2} \quad (4.12)$$

Tablo 4.15 İdeal ve negatif ideal ayırım ölçüleri

	S_i^+	S_i^-
Almanya	0,073	0,059
Avusturya	0,081	0,052
Belçika	0,113	0,020
Bulgaristan	0,131	0,009
Çekya	0,129	0,013
Danimarka	0,014	0,129
Estonya	0,082	0,051
Finlandiya	0,023	0,130
Fransa	0,101	0,033
Hollanda	0,049	0,085
İrlanda	0,056	0,077
İspanya	0,122	0,012
İsveç	0,014	0,121
İtalya	0,130	0,005
Kıbrıs	0,129	0,007

Tablo 4.15 İdeal ve negatif ideal ayırım ölçüleri (devamı)

Letonya	0,128	0,006
Litvanya	0,129	0,006
Lüksemburg	0,065	0,069
Macaristan	0,130	0,005
Malta	0,118	0,019
Polonya	0,122	0,012
Portekiz	0,131	0,008
Romanya	0,132	0,007
Slovakya	0,131	0,007
Slovenya	0,125	0,012
Türkiye	0,126	0,007
Yunanistan	0,128	0,005

6. Adım: 5. Adımda bulunmuş olan ideal (S_i^+) ile negatif ideal ayırım (S_i^-) değerleri ve (4.13) eşitliği yardımıyla (A_i)'nin (C_i^*)'ye göreceli yakınlık değeri hesaplanır. Ülkelerin göreceli yakınlık değerleri (C_i^*) Tablo 4.16'da yer almaktadır.

$$C_i^* = \frac{S_i^-}{S_i^- + S_i^+} \quad (4.13)$$

Tablo 4.16 Göreceli yakınlık değerleri

	C_i^*
Almanya	0,447
Avusturya	0,388
Belçika	0,147
Bulgaristan	0,062
Çekya	0,092
Danimarka	0,902

Tablo 4.16 Göreceli yakınlık değerleri (devamı)

Estonya	0,384
Finlandiya	0,849
Fransa	0,246
Hollanda	0,635
İrlanda	0,579
İspanya	0,088
İsveç	0,895
İtalya	0,037
Kıbrıs	0,052
Letonya	0,048
Litvanya	0,041
Lüksemburg	0,515
Macaristan	0,040
Malta	0,141
Polonya	0,091
Portekiz	0,059
Romanya	0,052
Slovakya	0,050
Slovenya	0,089
Türkiye	0,052
Yunanistan	0,040

Son aşamada TOPSİS Analizi sonucu elde edilen göreceli yakınlık değerleri (C_i^*) sıralanmıştır. Ülkelerin göreceli yakınlık değerleri mutluluk skorları olarak ta düşünülebilir. Göreceli yakınlık değerleri sıralanıp ülkelerin mutluluk düzeylerine göre sıralamaları elde edilmektedir. Bu sıralamalar Tablo 4.17'dedir.

Tablo 4.17 Ülkelerin entropiye dayalı TOPSİS yöntemine göre mutluluk sıralamaları

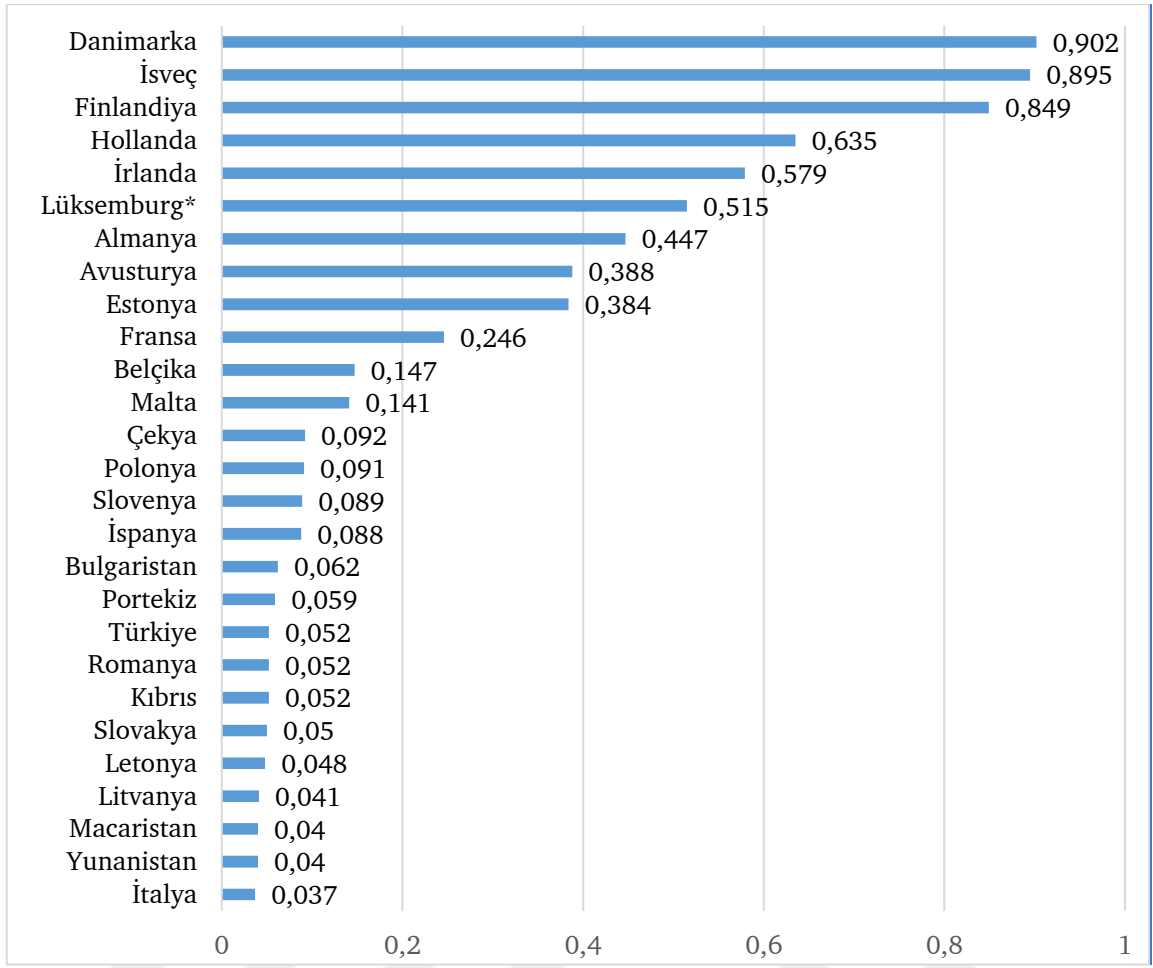
	Ci*	Sıra
Danimarka	0,902	1
İsveç	0,895	2
Finlandiya	0,849	3
Hollanda	0,635	4
İrlanda	0,579	5
Lüksemburg	0,515	6
Almanya	0,447	7
Avusturya	0,388	8
Estonya	0,384	9
Fransa	0,246	10
Belçika	0,147	11
Malta	0,141	12
Çekya	0,092	13
Polonya	0,091	14
Slovenya	0,089	15
İspanya	0,088	16
Bulgaristan	0,062	17
Portekiz	0,059	18
Kıbrıs	0,052	19
Romanya	0,052	20
Türkiye	0,052	21
Slovakya	0,050	22

Tablo 4.17 Ülkelerin entropiye dayalı TOPSİS yöntemine göre mutluluk sıralamaları (devamı)

Letonya	0,048	23
Litvanya	0,041	24
Yunanistan	0,040	25
Macaristan	0,040	26
İtalya	0,037	27

Şekil 4.2’de ise ülkelerin entropiye dayalı TOPSİS yöntemine göre göreceli yakınlık değerleri ile elde edilen mutluluk düzeyleri sıralamaları görülmektedir. Türkiye, mutluluk düzeyi sıralamasında (19-21) sıradadır. İlk 3 sırada olan Danimarka, İsveç ve Finlandiya’nın diğer ülkelere göre skor değerlerinde kırılım göstererek mutluluk düzeyinde daha önde olduğu görülmektedir. Mutluluk düzeyleri açısından son sıralarda ise Litvanya, Macaristan, Yunanistan ve İtalya yer almaktadır.

- Danimarka, 0,902 mutluluk skoru puanıyla mutluluk düzeyleri bakımında AB ülkeleri arasında 1. sırada,
- İsveç 0,895 mutluluk skoru puanıyla 2. sırada,
- Finlandiya 0,849 mutluluk skoru puanıyla 3. sırada yer almaktadır.
- Türkiye 0,052 mutluluk skoru puanıyla sondan 9. sırada yer almakta iken Türkiye’ye eşit veya daha az mutluluk skoru değerine sahip 8 ülke olduğu görülmektedir. Bu ülkeler; Romanya, Kıbrıs, Slovakya, Letonya, Litvanya, Macaristan, Yunanistan ve İtalya’dır.



Şekil 4.2 Ülkelerin entropiye dayalı Topsis yöntemine göre mutluluk sıralamaları

4.5 Entropiye Dayalı ARAS Yöntemi ile Ülkelerin Mutluluk Düzeylerinin Sıralanması

1. Adım: Öncelikle $A_1, A_2, \dots, A_m$ alternatifler ve $X_1, X_2, \dots, X_n$ kriterler olmak üzere karar matrisi oluşturulur. Bu karar matrisinin elemanları (x_{ij}) olmak üzere fayda ve maliyet özelliğine göre kriterler için optimal değerler denklem (4.14) ve (4.15) ile hesaplanmaktadır. Çalışmadaki tüm kriterler fayda yönlü olduğundan (4.14) eşitliği kullanılarak Tablo 4.18’de kriterler için hesaplanan optimal değerler yer almaktadır.

$$j. \text{ kriter fayda yönlü ise } x_{0j} = \max_i x_{ij} \quad (4.14)$$

$$j. \text{ kriter maliyet yönlü ise } x_{0j} = \min_i x_{ij} \quad (4.15)$$

$$i=1,2,\dots,m \quad (m=27)$$

$$j=1,2,\dots,n \quad (n=6)$$

Tablo 4.18 Kriterlerin fayda/maliyet durumuna göre optimal değerleri

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆
	max	max	max	max	max	max
Optimal Değer	2,209	1,260	0,819	0,736	0,271	0,534

Kriterler için hesaplanan optimal değerler ile oluşturulan karar matrisi Tablo 4.19'dadır.

Tablo 4.19 Karar matrisi

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆
Optimal Değer	2,209	1,260	0,819	0,736	0,271	0,534
Almanya	1,924	1,088	0,776	0,585	0,163	0,358
Avusturya	1,931	1,165	0,774	0,623	0,193	0,329
Belçika	1,907	1,106	0,764	0,492	0,049	0,204
Bulgaristan	1,625	1,163	0,640	0,563	0,123	0,021
Çekya	1,815	1,260	0,715	0,660	0,158	0,048
Danimarka	1,953	1,243	0,777	0,719	0,188	0,532
Estonya	1,793	1,232	0,728	0,689	0,123	0,333
Finlandiya	1,892	1,258	0,775	0,736	0,109	0,534
Fransa	1,863	1,219	0,808	0,567	0,070	0,266
Hollanda	1,945	1,206	0,787	0,651	0,271	0,419
İrlanda	2,129	1,166	0,779	0,627	0,190	0,408
İspanya	1,808	1,211	0,808	0,505	0,101	0,149
İsveç	1,920	1,204	0,803	0,724	0,218	0,512
İtalya	1,834	1,052	0,801	0,412	0,085	0,059
Kıbrıs	1,815	0,909	0,819	0,448	0,123	0,062
Letonya	1,732	1,221	0,637	0,502	0,075	0,090

Tablo 4.19 Karar matrisi (devamı)

Litvanya	1,804	1,204	0,659	0,496	0,053	0,077
Lüksemburg	2,209	1,155	0,790	0,700	0,120	0,388
Macaristan	1,748	1,233	0,668	0,485	0,078	0,064
Malta	1,838	1,169	0,789	0,679	0,174	0,166
Polonya	1,758	1,174	0,712	0,523	0,124	0,140
Portekiz	1,760	1,078	0,777	0,655	0,016	0,039
Romanya	1,719	1,006	0,655	0,605	0,039	0,006
Slovakya	1,736	1,232	0,707	0,479	0,118	0,025
Slovenya	1,810	1,249	0,769	0,685	0,118	0,115
Türkiye	1,707	0,865	0,702	0,209	0,087	0,115
Yunanistan	1,703	0,980	0,774	0,249	0,015	0,108

2. Adım: İlk adımda bulunan karar matrisinin tüm elemanları 0-1 aralığında standart hale getirilerek normalize edilir. Normalize etme işlemi için kullanılan formüller kriterlerin fayda/maliyet kriteri oluşuna göre değişmektedir. Çalışmada seçilen tüm kriterler fayda kriterleri olduğundan (4.16) denklemi ile bulunan normalize karar matrisi Tablo 4.20’de bulunmaktadır.

$$\text{Maksimum (fayda) kriterleri için: } x_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sum_{i=0}^m x_{ij}} \quad (4.16)$$

$$\text{Minumum (maliyet) kriterleri için: } x_{ij} = \frac{1 / x_{ij}}{\sum_{i=0}^m 1/x_{ij}} \quad (4.17)$$

Tablo 4.20 Normalize karar matrisi

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆
Optimal Değer	0,043	0,039	0,039	0,046	0,079	0,088
Avusturya	0,037	0,036	0,037	0,039	0,056	0,054
Belçika	0,037	0,034	0,036	0,031	0,014	0,033

Tablo 4.20 Normalize karar matrisi (devamı)

Bulgaristan	0,031	0,036	0,030	0,035	0,036	0,003
Kıbrıs	0,035	0,028	0,039	0,028	0,036	0,010
Çekya	0,035	0,039	0,034	0,041	0,046	0,008
Danimarka	0,038	0,038	0,037	0,045	0,054	0,087
Estonya	0,035	0,038	0,035	0,043	0,036	0,055
Finlandiya	0,036	0,039	0,037	0,046	0,032	0,088
Fransa	0,036	0,038	0,038	0,035	0,020	0,044
Almanya	0,037	0,034	0,037	0,037	0,047	0,059
Yunanistan	0,033	0,030	0,037	0,016	0,004	0,018
Macaristan	0,034	0,038	0,032	0,030	0,023	0,010
İrlanda	0,041	0,036	0,037	0,039	0,055	0,067
İtalya	0,035	0,033	0,038	0,026	0,025	0,010
Letonya	0,033	0,038	0,030	0,031	0,022	0,015
Litvanya	0,035	0,037	0,031	0,031	0,015	0,013
Lüksemburg	0,043	0,036	0,038	0,044	0,035	0,064
Malta	0,035	0,036	0,038	0,042	0,050	0,027
Hollanda	0,037	0,037	0,037	0,041	0,079	0,069
Polonya	0,034	0,036	0,034	0,033	0,036	0,023
Portekiz	0,034	0,033	0,037	0,041	0,005	0,006
Romanya	0,033	0,031	0,031	0,038	0,011	0,001
Slovakya	0,033	0,038	0,034	0,030	0,034	0,004
Slovenya	0,035	0,039	0,037	0,043	0,034	0,019
İspanya	0,035	0,037	0,038	0,032	0,029	0,024
İsveç	0,037	0,037	0,038	0,045	0,063	0,084
Türkiye	0,033	0,027	0,033	0,013	0,025	0,019

3. Adım: 2. adımda normalize edilen karar matrisi bu adımda ağırlıklandırılmaktadır. Ağırlıklandırma işlemi için Tablo 4.21’de bulunan ve daha önce entropi yöntemi ile bulunan kriter ağırlıkları ile (4.18) eşitliği kullanılarak Tablo 4.22’deki ağırlıklandırılmış normalize karar matrisi elde edilmektedir.

$$\widehat{X}_{ij} = \bar{x}_{ij} w_{ij} \quad (4.18)$$

Tablo 4.21 Entropi yöntemi ile elde edilen değişken ağırlıkları

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆
W _j	0,012	0,016	0,013	0,064	0,267	0,628

Tablo 4.22 Ağırlıklandırılmış normalize karar matrisi

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆
Optimal Değer	0,001	0,001	0,001	0,003	0,021	0,055
Almanya	0,000	0,001	0,000	0,002	0,013	0,037
Avusturya	0,000	0,001	0,000	0,002	0,015	0,034
Belçika	0,000	0,001	0,000	0,002	0,004	0,021
Bulgaristan	0,000	0,001	0,000	0,002	0,010	0,002
Çekya	0,000	0,001	0,000	0,003	0,012	0,005
Danimarka	0,000	0,001	0,000	0,003	0,014	0,055
Estonya	0,000	0,001	0,000	0,003	0,010	0,035
Finlandiya	0,000	0,001	0,000	0,003	0,009	0,055
Fransa	0,000	0,001	0,000	0,002	0,005	0,028
Hollanda	0,000	0,001	0,000	0,003	0,021	0,043
İrlanda	0,000	0,001	0,000	0,002	0,015	0,042
İspanya	0,000	0,001	0,000	0,002	0,008	0,015
İsveç	0,000	0,001	0,000	0,003	0,017	0,053
İtalya	0,000	0,001	0,000	0,002	0,007	0,006

Tablo 4.22 Ağırlıklandırılmış normalize karar matrisi (devamı)

Kıbrıs	0,000	0,000	0,001	0,002	0,010	0,006
Letonya	0,000	0,001	0,000	0,002	0,006	0,009
Litvanya	0,000	0,001	0,000	0,002	0,004	0,008
Lüksemburg	0,001	0,001	0,000	0,003	0,009	0,040
Macaristan	0,000	0,001	0,000	0,002	0,006	0,006
Malta	0,000	0,001	0,000	0,003	0,013	0,017
Polonya	0,000	0,001	0,000	0,002	0,010	0,014
Portekiz	0,000	0,001	0,000	0,003	0,001	0,004
Romanya	0,000	0,000	0,000	0,002	0,003	0,001
Slovakya	0,000	0,001	0,000	0,002	0,009	0,003
Slovenya	0,000	0,001	0,000	0,003	0,009	0,012
Türkiye	0,000	0,000	0,000	0,001	0,007	0,012
Yunanistan	0,000	0,000	0,000	0,001	0,001	0,011

4. Adım: Bu adımda alternatiflerin optimallik dereceleri (4.19) eşitliğiyle hesaplanır. Ülkelerin optimallik dereceleri Tablo 4.23'te sunulmaktadır.

$$S_i = \sum_{j=1}^n \widehat{x}_{ij} \quad (4.19)$$

S_i : i. alternatifin optimallik fonksiyon derecesidir.

Tablo 4.23 Optimallik dereceleri (S_i)

	S_i
Optimal Değer (S_o)	0,081
Almanya	0,053
Avusturya	0,053
Belçika	0,028
Bulgaristan	0,015

Tablo 4.23 Optimallik dereceleri (S_i) (devamı)

Çekya	0,021
Danimarka	0,073
Estonya	0,048
Finlandiya	0,068
Fransa	0,037
Hollanda	0,069
İrlanda	0,061
İspanya	0,026
İsveç	0,074
İtalya	0,016
Kıbrıs	0,019
Letonya	0,019
Litvanya	0,016
Lüksemburg	0,054
Macaristan	0,016
Malta	0,034
Polonya	0,028
Portekiz	0,009
Romanya	0,007
Slovakya	0,015
Slovenya	0,025
Türkiye	0,021
Yunanistan	0,015

5. Adım: Bir önceki adımdaki S_i değerleri, optimal değere (S_0) bölünerek fayda dereceleri (K_i) bulunur ve büyükten küçüğe sıralanır. Alternatiflerin fayda

dereceleri (K_i) (4.20) eşitliği ile hesaplanarak Tablo 4.24'teki gibi elde edilmektedir.

$$K_i = \frac{S_i}{S_0} \quad (4.20)$$

So: Bir önceki adımda hesaplanan optimal değer. Denklemden $S_0 = 0,081$ alınır.

Tablo 4.24 Fayda dereceleri (K_i)

	S_i	K_i
Optimal Değer	0,081	1
Avusturya	0,053	0,653
Belçika	0,028	0,345
Bulgaristan	0,015	0,186
Kıbrıs	0,019	0,235
Çekya	0,021	0,265
Danimarka	0,073	0,908
Estonya	0,048	0,598
Finlandiya	0,068	0,844
Fransa	0,037	0,454
Almanya	0,053	0,660
Yunanistan	0,015	0,182
Macaristan	0,016	0,195
İrlanda	0,061	0,751
İtalya	0,016	0,198
Letonya	0,019	0,231
Litvanya	0,016	0,192
Lüksemburg	0,054	0,666

Tablo 4.24 Fayda dereceleri (K_i) (devamı)

Malta	0,034	0,426
Hollanda	0,069	0,847
Polonya	0,028	0,341
Portekiz	0,009	0,113
Romanya	0,007	0,090
Slovakya	0,015	0,185
Slovenya	0,025	0,312
İspanya	0,026	0,326
İsveç	0,074	0,914
Türkiye	0,021	0,256

Son aşamada fayda dereceleri (K_i)'ler büyükten küçüğe sıralanarak ülkelerin mutluluk düzeylerine göre sıralamaları Tablo 4.25'teki gibi elde edilmektedir.

Tablo 4.25 Ülkelerin entropiye dayalı ARAS yöntemine göre mutluluk sıralamaları

Ülke	K_i	Sıra
İsveç	0,914	1
Danimarka	0,908	2
Hollanda	0,847	3
Finlandiya	0,844	4
İrlanda	0,751	5
Lüksemburg	0,666	6
Almanya	0,660	7
Avusturya	0,653	8
Estonya	0,598	9

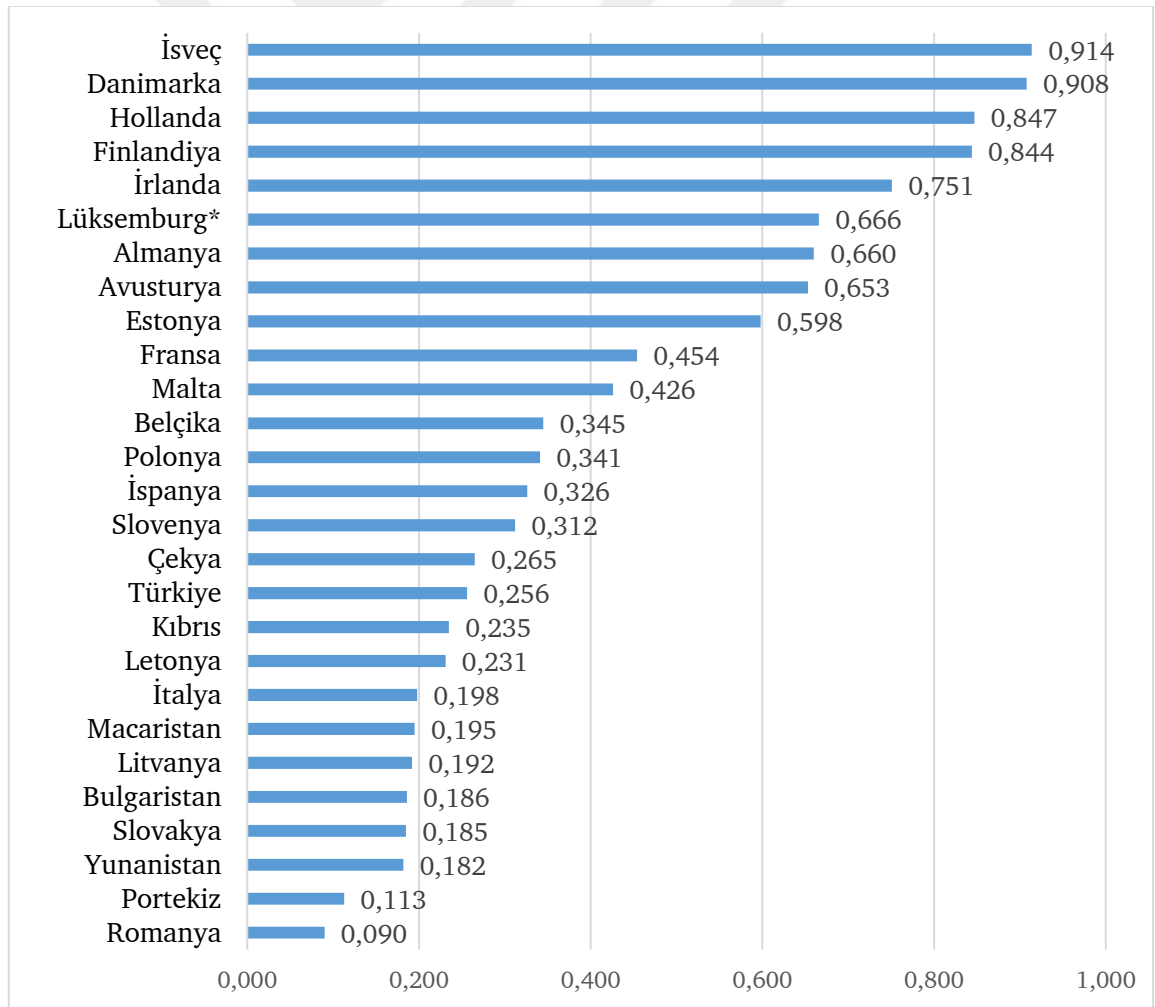
Tablo 4.25 Ülkelerin entropiye dayalı ARAS yöntemine göre mutluluk sıralamaları (devamı)

Fransa	0,454	10
Malta	0,426	11
Belçika	0,345	12
Polonya	0,341	13
İspanya	0,326	14
Slovenya	0,312	15
Çekya	0,265	16
Türkiye	0,256	17
Kıbrıs	0,235	18
Letonya	0,231	19
İtalya	0,198	20
Macaristan	0,195	21
Litvanya	0,192	22
Bulgaristan	0,186	23
Slovakya	0,185	24
Yunanistan	0,182	25
Portekiz	0,113	26
Romanya	0,090	27

Şekil 4.3'te ülkelerin entropiye dayalı ARAS yöntemine göre elde edilen fayda derece değerleri, ülkelerin mutluluk skor değerleri olarak alınabilmektedir. Ülkelerin fayda dereceleri ile elde edilen mutluluk düzeyleri sıralamalarına göre;

- İsveç, Danimarka, Hollanda ve Finlandiya'nın mutluluk skor değerlerinde diğer ülkelere göre kırılım göstererek mutluluk düzeylerinde daha önde olduğu görülmektedir. Bu ülkeler AB ülkeleri arasında en yüksek mutluluk düzeyine sahip ülkelerdir.

- Türkiye 0,256 mutluluk skor puanı ile 27 ülke arasında mutluluk düzeyi sıralamasında 17. sırada yer almaktadır.
- İsveç 0,914 mutluluk skoru puanıyla mutluluk düzeyleri bakımından AB ülkeleri arasında 1. sırada, Danimarka 0,908 mutluluk skoru puanıyla 2. sırada, Hollanda 0,847 mutluluk skoru puanıyla 3. Sırada ve Finlandiya 0,844 mutluluk skor puanıyla 4. Sırada yer almaktadır.
- Türkiye 0,256 mutluluk skoru puanıyla sondan 11. sırada yer almakta iken Türkiye'den daha az mutluluk düzeyinde olan 10 AB ülkesi olduğu görülmektedir. Bu ülkeler; Kıbrıs, Letonya, İtalya, Macaristan, Litvanya, Bulgaristan, Slovakya, Yunanistan, Portekiz ve Romanya'dır.
- AB ülkeleri arasında yüksek kırılım göstererek en düşük mutluluk düzeyine sahip olan ülkelerin Portekiz ve Romanya olduğu görülmektedir.



Şekil 4.3 Ülkelerin entropiye dayalı ARAS yöntemine göre mutluluk sıralamaları

4.6 Ülkelerin Kümeleme Analizi ile Mutluluk Düzeylerine göre Gruplandırılması

Kümeleme analizinde ana amaç; n sayıda birimin olduğu büyük bir gözlem grubunu kendi içlerinde homojen ve aralarında heterojen gruplara ayırmaktır. Bu gruplara küme de denilmektedir. Hiyerarşik ve hiyerarşik olmayan kümeleme analizi olarak 2 üst grup altında farklı kümeleme analizi türleri vardır.

Bu çalışma kapsamında hiyerarşik kümeleme analizi yöntemi uygulanmıştır. HKA, örneklem sayısının 250'den az olduğu durumlarda analizlerde etkin olarak kullanılmaktadır. HKA'nde sonuçlar ağaç diyagramı (dendogramlar) aracılığıyla gösterilmektedir. Diyagramlarda birimler arası uzaklıklar ve ilişkiler ortaya konulmaktadır. Dendogramın tabanında çok sayıda küme varken yukarı doğru bu kümeler birleşerek daha az sayıda kümeler oluşturmaktadırlar.

Çalışma kapsamında 27 ülkenin mutluluk düzeyini etkileyen 6 değişken bakımından benzer mutluluk düzeylerine sahip olan ülkelerin aynı gruplarda olduğu alt kümelere ayrılması amaçlanmıştır. Çalışmada analizler gerçekleştirilirken SPSS 26 İstatistiksel Analiz Programı kullanılmıştır. SPSS 26 ile gerçekleştirilen Hiyerarşik Kümeleme Analizi ile AB ülkeleri ve Türkiye, mutluluk seviyelerine göre 3 kümede toplanmıştır. Kümeler (1: yüksek, 2: orta ve 3: düşük) olmak üzere ülkelerin mutluluk seviyelerini ifade edecek şekilde parametrelendirilmiştir.

Tablo 4.26'da analiz sonuçlarına göre ülkelerin küme üyelikleri (ait oldukları) kümeler belirlenmiştir. Örneğin; Avusturya mutluluk seviyesi bakımından 1 nolu kümeye ait iken Belçika ve Bulgaristan 2 nolu kümeye ve Kıbrıs 3 nolu kümeye aittir. Benzer yorumlar diğer ülkeler için de gerçekleştirilebilir.

Ayrıca Avusturya'nın yüksek mutluluk düzeyine sahip kümede yer alırken Belçika ve Bulgaristan'ın orta mutluluk düzeyine sahip kümede yer alması gibi yorumlar da yapılabilmektedir.

Tablo 4.26 Ülkelerin gruplandığı kümeler

Küme Üyeliği	
Durum	3 Küme
1: Avusturya	1
2: Belçika	2
3: Bulgaristan	2
4: Kıbrıs	3
5: Çekya	2
6: Danimarka	1
7: Estonya	1
8: Finlandiya	1
9: Fransa	2
10: Almanya	1
11: Yunanistan	3
12: Macaristan	2
13: İrlanda	1
14: İtalya	3
15: Letonya	2
16: Litvanya	2
17: Lüksemburg	1
18: Malta	2
19: Hollanda	1
20: Polonya	2
21: Portekiz	2
22: Romanya	2

Tablo 4.26 Ülkelerin gruplandığı kümeler (devamı)

23: Slovakya	2
24: Slovenya	2
25: İspanya	2
26: İsveç	1
27: Türkiye	3

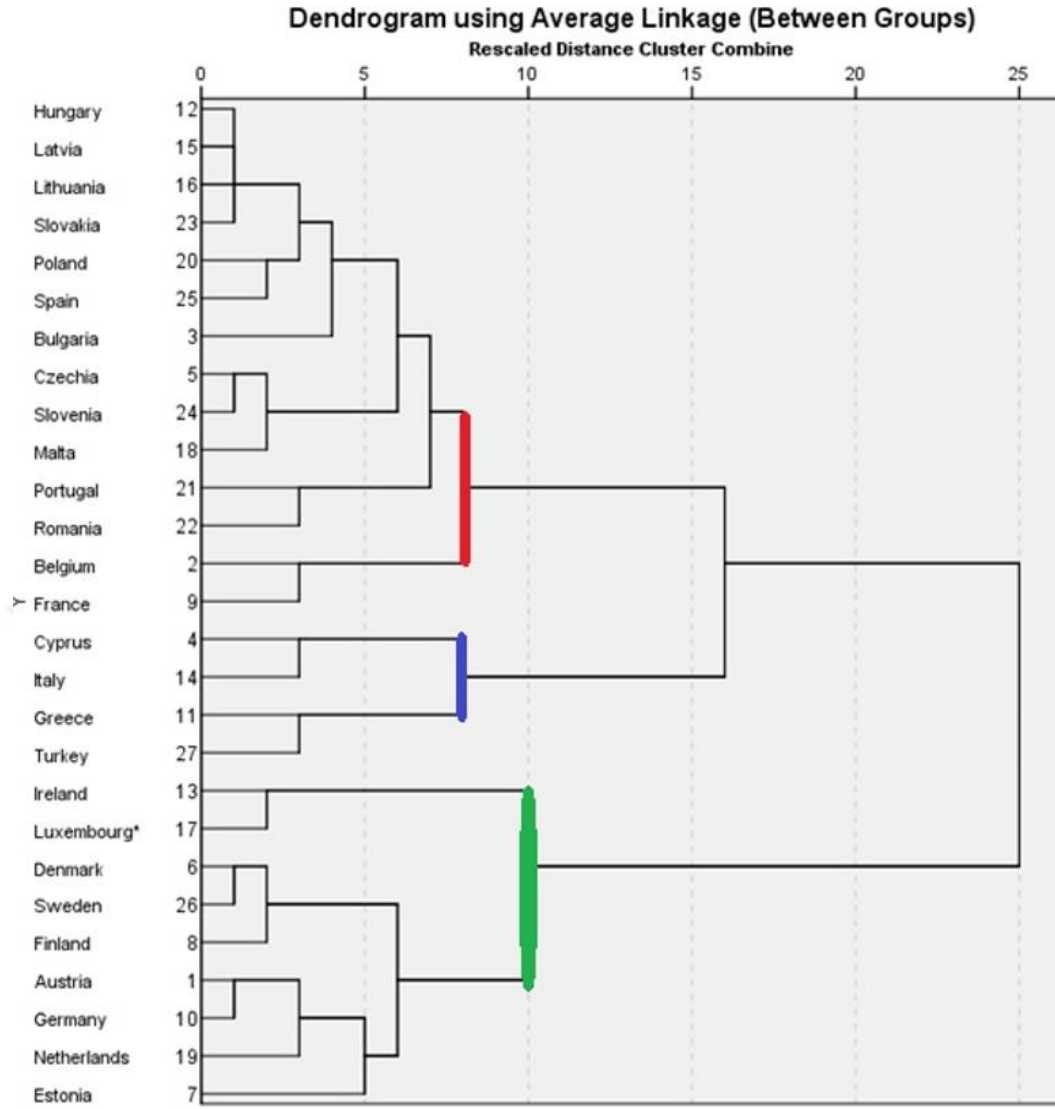
SPSS ile Hiyerarşik Kümeleme Analizi sonucu dendogram sonuçları Şekil 4.4'te görülmektedir. Dendogramda her bir ağaç diyagramı bir kümeyi ifade etmektedir ve o kümede bulunan ülkeler de görülebilmektedir.

Dendogramda sol tarafta tabanda kümelerin fazla olduğu ve bu kümelerin giderek biraraya gelerek daha az sayıda kümeler oluşturduğu görülmektedir.

Dendogram sonuçlarına göre ülkeler mutluluk seviyelerine göre 3 gruba ayrıldığında bu kümelerde bulunan ülkeler dendogram üzerindeki ağaç diyagramlarından anlaşılmaktadır.

Dendogram üzerinde kümelerin belirgin olması amaçlı 3 küme renklendirilmiştir:

- Kırmızı olan kümede (9:Fransa-12:Macaristan) arasındaki tüm ülkeler (14 ülke) yer almakta olup orta mutluluk seviyesindedirler.
- Mavi ile renklendirilmiş kümede (4:Kıbrıs-27:Türkiye) arası ülkeler (4 ülke) olup mutluluk seviyeleri düşüktür.
- Yeşil ile renklendirilmiş kümede ise (13:İrlanda-7:Estonya) arası ülkeler (9 ülke) yer almakta olup bu ülkeler yüksek mutluluk seviyesine sahiptir.



Şekil 4.4 Hiyerarşik kümeleme analizi sonucu dendrogram

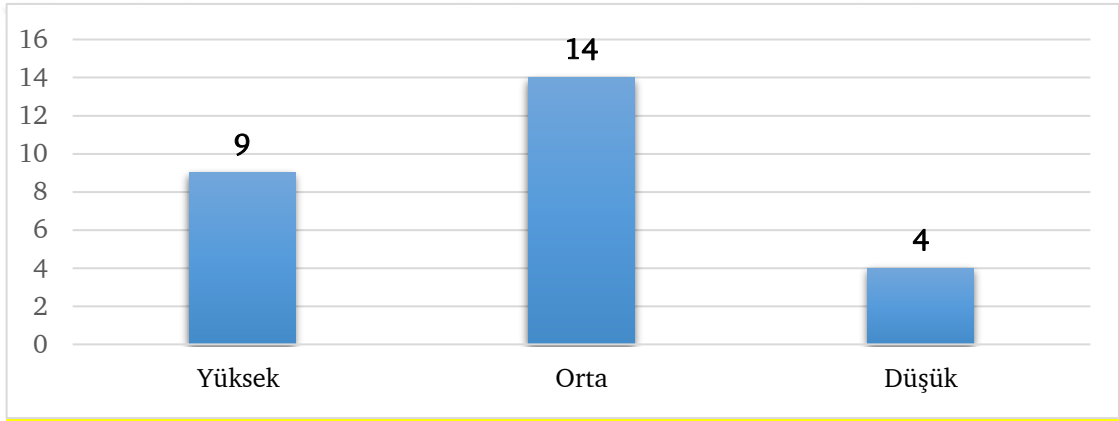
Tablo 4.27’de kümeleme analizi sonuçlarına göre mutluluk seviyelerine göre kümeler ve kümelerde bulunan ülkeler yer almaktadır. Bu tabloda hangi ülkelerin hangi kümelerde bulundukları ve bir ülkenin hangi kümede yer aldığı (hangi mutluluk düzeyinde olduğu) anlaşılabilmektedir. Kümeleme Analizi sonuçlarına göre mutluluk düzeylerine göre 3 küme oluşturulmuş olup AB ülkelerinden 9 tanesi yüksek, 14 tanesi orta, 3 tanesi ve Türkiye düşük mutluluk düzeyinde yer almaktadır. AB ülkelerinin daha çok yüksek ve orta mutluluk düzeylerine sahip iken sadece 3 tane AB ülkesinin (İtalya, Kıbrıs ve Yunanistan) mutluluk düzeyleri düşüktür. Türkiye ise düşük mutluluk düzeylerinin olduğu grupta yer almaktadır (Şekil 4.5).

Tablo 4.27 Kümeleme analizi sonuçlarına göre ülkelerin mutluluk düzeylerine göre kümeleri

Ülke	Küme	Küme Adı (Mutluluk Düzeyi)
Almanya	1	Yüksek
Avusturya	1	Yüksek
Danimarka	1	Yüksek
Estonya	1	Yüksek
Finlandiya	1	Yüksek
Hollanda	1	Yüksek
İrlanda	1	Yüksek
İsveç	1	Yüksek
Lüksemburg	1	Yüksek
Belçika	2	Orta
Bulgaristan	2	Orta
Çekya	2	Orta
Fransa	2	Orta
İspanya	2	Orta
Letonya	2	Orta
Litvanya	2	Orta
Macaristan	2	Orta
Malta	2	Orta
Polonya	2	Orta
Portekiz	2	Orta
Romanya	2	Orta

Tablo 4.27 Kümeleme analizi sonuçlarına göre ülkelerin mutluluk düzeylerine göre kümeleri (devamı)

Slovakya	2	Orta
Slovenya	2	Orta
İtalya	3	Düşük
Kıbrıs	3	Düşük
Türkiye	3	Düşük
Yunanistan	3	Düşük



Şekil 4.5 AB üyesi ülkeleri ve Türkiye'nin mutluluk düzeylerinin dağılımı

4.7 Ülkelerin Mutluluk Düzeylerinin Temel Bileşenler Analizi ile Sıralanması

TBA'dan elde edilen ağırlık değerleri ile de sıralamalar elde edilebilmektedir. TBA için SPSS 26 programı kullanılmıştır. Öncelikle SPSS sonuçlarından KMO ve Bartlett's Testi ile veri setine TBA uygulanmasının uygunluğuna bakılmaktadır. Bu ölçüt 0,50 ve üstü değere sahip ise veriler temel bileşenler analize uygundur ve analiz uygulanabilir demektir. Tablo 4.28'de görülebileceği gibi KMO Uygunluk Ölçütü 0,775 değerini almakta olduğundan verilerin temel bileşenler analizi uygulanmasına iyi derecede uygun olduğu söylenebilir.

Tablo 4.28 KMO ve Bartlett's testi sonuçları

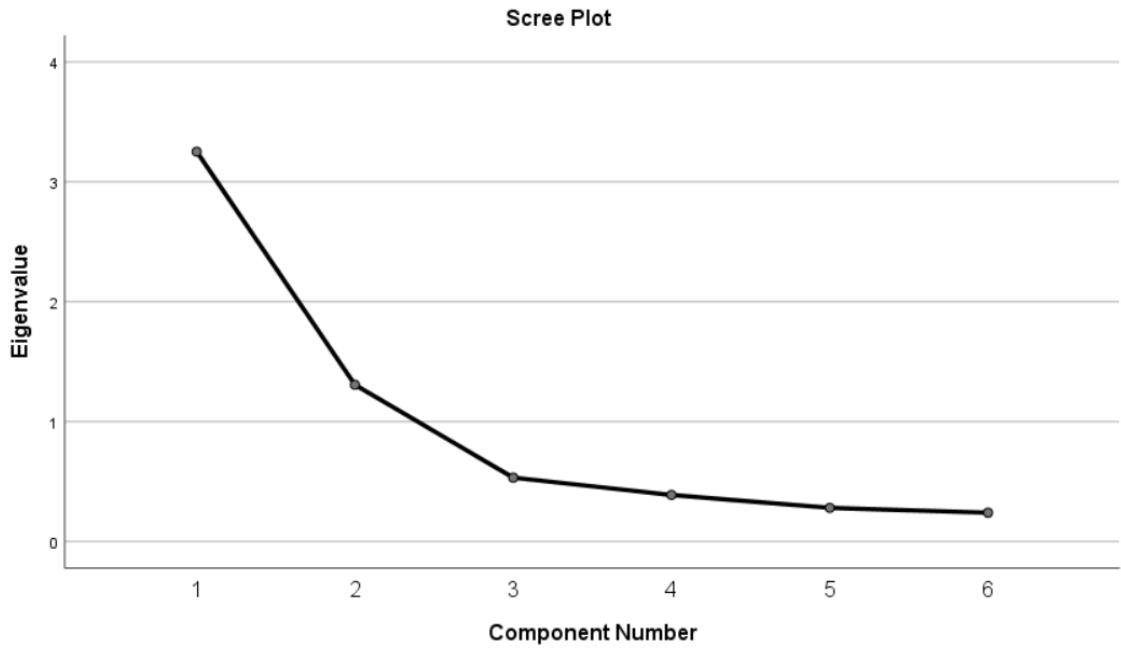
KMO and Bartlett's Test		
KMO Uygunluk Ölçütü		0,775
Bartlett Küresellik Testi	Yaklaşık Ki-Kare	65,515
	df	15
	Sig.	0,000

Açıklanan Toplam Varyans Tablosunda temel bileşen sayısının 6 olduğu bileşen sütunundan görülmektedir. Ayrıca temel bileşenlerin varyansı % açıklama oranı (% varyans) sütunundan bulunabilmektedir. 1. temel bileşen, toplam varyansın %54,197'sini, 2. temel bileşen %21,787'sini, 3. temel bileşen %8,873'ünü, 4. temel bileşen %6,466'sını, 5. temel bileşen %4,675 ve 6. temel bileşen ise toplam varyansın %4,002'sini açıklamaktadır. Kümülatif sütunundan ise temel bileşenlerin birlikte varyans açıklama oranları bulunmaktadır. 2 temel bileşen birden toplam varyansın %75,984'ünü, 3 temel bileşen birlikte %84,858'ini, 4 temel bileşen %91,323'ünü, 5 temel bileşen %95,998'ini ve 6 temel bileşen %100'ünü açıklamaktadır. Ancak varyansın önemli bir bölümü (%75,984'ü) ilk 2 temel bileşen tarafından açıklanmaktadır. Bu nedenle ilk 2 temel bileşen önemli temel bileşenlerdir ve analiz sonucuna göre önemli temel bileşen sayısı 2'dir (Tablo 4.29).

Tablo 4.29 Açıklanan toplam varyans tablosu

Bileşen	İlk Özdeğerler			Kare Yüklerin Ekstraksiyon Toplamları		
	Toplam	% Varyans	Kümülatif %	Toplam	% Varyans	Kümülatif %
1	3,252	54,197	54,197	3,252	54,197	54,197
2	1,307	21,787	75,984	1,307	21,787	75,984
3	0,532	8,873	84,858			
4	0,388	6,466	91,323			
5	0,281	4,675	95,998			
6	0,240	4,002	100,00			
Ekstraksiyon Yöntemi: Temel Bileşenler Analizi						

Yamaç grafiklerinde 1'den büyük özdeğere sahip temel bileşen sayısı, önemli temel bileşen sayısını vermektedir. Şekil 4.6'da yamaç grafiğinde (Scree plot) 1'den büyük özdeğere sahip temel bileşen sayısının 2 olduğu görülmektedir. 1. temel bileşenin özdeğeri 3,2 ve 2. temel bileşenin ise 1,307 olup 1'den büyük değer almaktadır. Tablo 4.29'da da ilk özdeğerler sütununda toplam sütununda 1. ve 2. temel bileşenlerin özdeğerleri bulunabilmekte ayrıca 1'den büyük olduklarında da önemli temel bileşen sayısının 2 olduğu sonucuna ulaşılmaktadır.



Şekil 4.6 Yamaç grafiği (Scree plot)

Bileşenler matrisinden de 2 temel bileşene ulaşıldığı ve her bir bileşende değişkenlerin ağırlıkları görülmektedir. Örneğin; 1. temel bileşende tüm kriterlerin ağırlıkları bulunmakla birlikte en fazla 6. Değişkenin (K_6) ve 1. Değişkenin (K_1) ağırlıkları bulunmaktadır. 2. temel bileşende ise 2. değişkenin (K_2) ve 4. değişkenin (K_4) ağırlıkları yüksektir (Tablo 4.30).

Tablo 4.30 Bileşenler Matrisi

	Bileşenler	
K_1	0,820	-0,313
K_2	0,538	0,747

K ₃	0,569	-0,669
K ₄	0,782	0,423
K ₅	0,765	0,049
K ₆	0,876	-0,151
Ekstraksiyon Metodu: Temel Bileşenler Analizi a: 2 bileşen extre edildi.		

TBA sonucunda 27 ülkenin ağırlık değerleri bulunmuş ve bu ağırlık değerlerine göre ülkeler sıralanmıştır. Bu sıralama ülkelerin mutluluk düzeyleri sıralamasıdır. Örneğin; Danimarka, 0,81 en yüksek ağırlık değeri ile ilk sıradadır (Tablo 4.31).

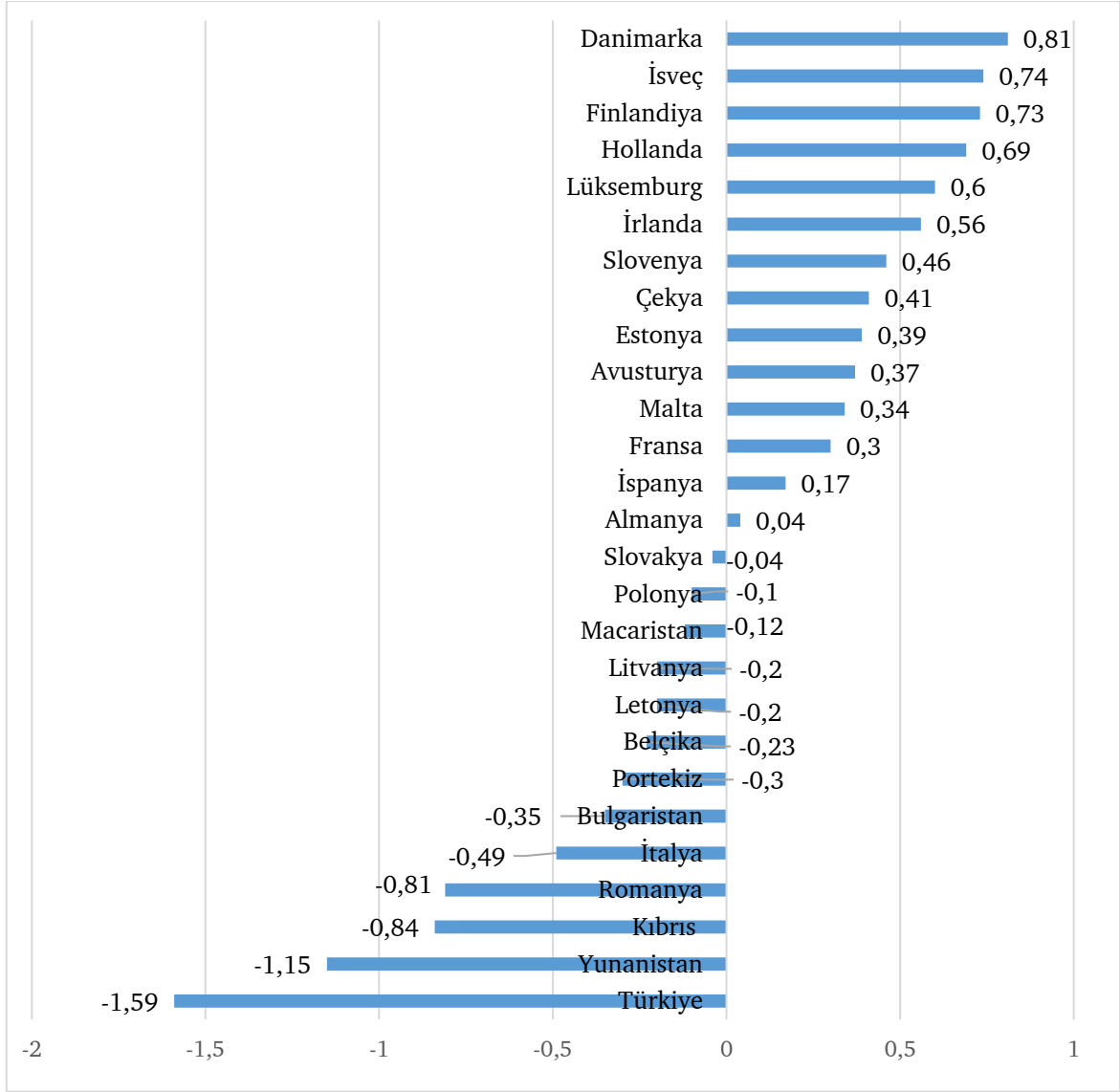
Tablo 4.31 Ülkelerin TBA'na göre ağırlıkları ve sıralamaları

Ülke	TBA Ağırlıkları	Sıra
Danimarka	0,81	1
İsveç	0,74	2
Finlandiya	0,73	3
Hollanda	0,69	4
Lüksemburg	0,6	5
İrlanda	0,56	6
Slovenya	0,46	7
Çekya	0,41	8
Estonya	0,39	9
Avusturya	0,37	10
Malta	0,34	11
Fransa	0,30	12
İspanya	0,17	13
Almanya	0,04	14

Tablo 4.31 Ülkelerin TBA'na göre ağırlıkları ve sıralamaları (devamı)

Slovakya	-0,04	15
Polonya	-0,10	16
Macaristan	-0,12	17
Letonya	-0,20	19
Litvanya	-0,20	18
Belçika	-0,23	20
Portekiz	-0,3	21
Bulgaristan	-0,35	22
İtalya	-0,49	23
Romanya	-0,81	24
Kıbrıs	-0,84	25
Yunanistan	-1,15	26
Türkiye	-1,59	27

Şekil 4.7’de TBA ile ağırlıklandırma sonucu elde edilen ülkeler sıralamasında mutluluk düzeyleri bakımından kırılım göstererek öne çıkan ilk 4 ülke Danimarka, İsveç, Finlandiya ve Hollanda’dır. Türkiye’nin ise 27. sırada bulunduğu görülmektedir.



Şekil 4.7 Ülkelerin TBA'na göre ağırlıkları ve sıralaması

4.8 Entropiye Dayalı TOPSİS ve ARAS Yöntemlerinin Karşılaştırılması

- TOPSİS ve ARAS yöntemleri sonuçlarına göre AB ülkeleri ve Türkiye'nin, mutluluk düzeyleri sıralamalarında sıra değerleri 3-4 ülke haricinde aynı veya birbirine çok yakın değerler almaktadır.
- İki yöntemde de mutluluk düzeyleri bakımından ilk 10'a giren ülkelerin aynı ülkeler olduğu görülmektedir. Bu ülkeler; Danimarka, İsveç, Finlandiya, Hollanda, İrlanda, Lüksemburg, Almanya, Avusturya, Estonya ve Fransa'dır. Hatta ilk 12 sıradaki ülkelerin de aynı ülkeler olduğu görülmektedir.

- AB ülkelerinin yer aldığı sıralamada Türkiye; entropiye dayalı TOPSİS yöntemine göre 19. sırada iken entropiye dayalı ARAS yöntemine göre 17. sırada yerini almaktadır. Türkiye'nin iki yöntem sonuçlarına göre mutluluk sıralamalarında birbirine çok yakın değer aldığı görülmektedir (Tablo 4.32).

Tablo 4.32 Entropiye dayalı TOPSİS ve ARAS yöntemleri karşılaştırması

Ülke	TOPSİS	ARAS
Danimarka	1	2
İsveç	2	1
Finlandiya	3	4
Hollanda	4	3
İrlanda	5	5
Lüksemburg	6	6
Almanya	7	7
Avusturya	8	8
Estonya	9	9
Fransa	10	10
Belçika	11	12
Malta	12	11
Çekya	13	16
Polonya	14	13
Slovenya	15	15
İspanya	16	14
Bulgaristan	17	23
Portekiz	18	26
Türkiye	19	17

Tablo 4.32 Entropiye dayalı TOPSİS ve ARAS yöntemleri karşılaştırması
(devamı)

Kıbrıs	20	18
Romanya	21	27
Slovakya	22	24
Letonya	23	19
Litvanya	24	22
Macaristan	25	21
Yunanistan	26	25
İtalya	27	20

4.9 Entropiye Dayalı TOPSİS ve ARAS Yöntemleri ile Temel Bileşenler Analizinin Karşılaştırılması

Tablo 4.33'te ülkelerin 3 analiz yöntemine göre mutluluk düzeylerinin sıralamaları görülmektedir. Buna göre aşağıdaki sonuçlara ulaşılmaktadır.

- Entropiye dayalı TOPSİS ve ARAS yöntemleri ile TBA sonucunda ülkelerin mutluluk düzeyleri birbiri ile karşılaştırıldığında 3 yöntemde ülkeler sıralamasında her bir ülkenin sıra değerlerinin birkaç ülke değeri haricinde birbirine yakın değerler aldığı görülmektedir.
- Entropiye dayalı TOPSİS ve ARAS yöntemlerinin mutluluk düzeylerine göre ülke sıralamalarında birbirine daha yakın sonuçlar verdiği TBA sonuçlarının ise bazı ülkeler için bu iki yöntemden farklı sonuç verdiği görülmektedir. Bunun nedeni TOPSİS ve ARAS yöntemlerinin birbirine benzer entropiye dayalı ÇKKV yöntemleri iken TBA'nın ise farklı çok değişkenli bir istatistiksel analiz tekniği olmasıdır.
- 3 yöneme göre de mutluluk düzeyi sıralamasında ilk 6 sıradaki ülkelerin sırası bazılarının aynı bazılarının 1 sıra değişse de aynı ülkeler olup Danimarka, Finlandiya, Hollanda, İsveç, İrlanda ve Lüksemburg'tur.

- Entropiye dayalı TOPSİS ve ARAS yöntemlerine göre mutluluk düzeyleri bakımından ilk 10 sıradaki ülkelerin TBA sonucu elde edilen sıralamalar ile karşılaştırıldığında birbirine yakın sıra değerleri aldığı sadece bu iki yönteme göre 7. sırada olan Almanya'nın TBA'da 14. sırada olduğu görülmektedir.
- Her ne kadar ülkelerin geneline bakıldığında entropiye dayalı TOPSİS ve ARAS yöntemleri birbirine daha yakın sıra sonuçları verse de bu iki yöntemin birbirine daha uzak sıra sonuçları verdiği durumlarda ise bu yöntemden birinin TBA ile yakın sıra değerleri verdiği görülmektedir. Mesela; Bulgaristan mutluluk sıralamasında TOPSİS yönteminde 17. sırada ve ARAS yöntemine göre 23. Sırada iken TBA'da 22. Sırada olup TOPSİS Yöntemi sıra değeri ARAS yöntemi sonucuna yakın sonuç vermiştir. Bu durum Letonya, Litvanya için de geçerlidir. Portekiz ve Romanya gibi ülkeler için ise TOPSİS yöntemi ve TBA sonuçları birbirine yakın sıra değerleri almaktadır.

Tablo 4.33 Entropiye dayalı TOPSİS ve ARAS yöntemleri ile TBA karşılaştırması

Ülke	TOPSİS	ARAS	TBA
Avusturya	8	8	10
Belçika	11	12	20
Bulgaristan	17	23	22
Kıbrıs	20	18	25
Çekya	13	16	8
Danimarka	1	2	1
Estonya	9	9	9
Finlandiya	3	4	3
Fransa	10	10	12
Almanya	7	7	14

Tablo 4.33 Entropiye dayalı TOPSİS ve ARAS yöntemleri ile TBA karşılaştırması (devamı)

Yunanistan	26	25	26
Macaristan	25	21	17
İrlanda	5	5	6
İtalya	27	20	23
Letonya	23	19	18
Litvanya	24	22	19
Lüksemburg	6	6	5
Malta	12	11	11
Hollanda	4	3	4
Polonya	14	13	16
Portekiz	18	26	21
Romanya	21	27	24
Slovakya	22	24	15
Slovenya	15	15	7
İspanya	16	14	13
İsveç	2	1	2
Türkiye	19	17	27

4.10 Kümeleme Analizi ile Diğer Yöntemlerin Karşılaştırılması

Kümeleme analizine göre aynı kümede (grupta) yer alan ülkelerin diğer 3 yönteme göre sıralamalarına bakılabilmektedir. Kümeleme analizine göre 1 nolu kümede yer alan ve yüksek mutluluk düzeyine sahip ülkelerin 9 tane ülke olduğu ve 3 yönteme göre sıralamalarının (Almanya hariç) birbirine yakın sıra değerleri aldığı görülmektedir. Orta mutluluk düzeyine sahip olan 14 ülke, düşük mutluluk

düzeyine sahip 4 ülke bulunmakta olup bu ülkelerin 3 yöntemle göre sıralamaları da sıra numaraları bakımından bazı farklı değerler olmakla birlikte uyum göstermektedir.

Kümeleme analizi sonuçlarına göre;

- Yüksek mutluluk düzeyinde olan ülkelerin sıra numaralarının (1-9) aralığında olması beklenirken Almanya ve Avusturya'nın sıra değerleri sırasıyla 14 ve 10 bu aralığın dışındadır. Ancak Avusturya'nın sıra numarası aralık değerine daha yakındır. Benzer şekilde yine orta mutluluk düzeyinde olan ülkelerin sıra numaralarının (10-23) aralığında olması beklenirken Macaristan, Portekiz ve Romanya'nın sıra değerleri 25, 26 ve 27 olup bu aralığın dışındadır ancak yine de sınır değeri olan 23'e yakın oldukları söylenebilmektedir.
- Düşük mutluluk düzeyine sahip olan ülkelerin diğer yöntemlere göre sıra numaralarının (24-27) aralığı dışında değerlere sahip 6 değer olduğu görülmektedir. Kümeleme analizine göre yer alması gereken grupta yer almayan sıra değerleri renkli gözelerde görülmektedir. Kümeleme analizi sonuçlarına göre kümelerdeki (yüksek, orta, düşük) ülkelerin 3 analiz yöntemine göre de sıralamalarının tutarlı olduğu görülmektedir. Sonuç olarak kümeleme analizi sonuçlarına göre kümelerdeki (yüksek, orta, düşük) ülkelerin diğer 3 analiz yöntemine göre sıralamalarının tutarlı olduğu sonucuna ulaşılmaktadır (Tablo 4.34).

Tablo 4.34 Kümeleme analizi ile diğer yöntemlerin karşılaştırılması

	Küme	Küme Adı	TOPSİS	ARAS	TBA	Küme Sıra Grubu
Avusturya	1	Yüksek	8	8	10	(1-9)
Danimarka	1	Yüksek	1	2	1	
Estonya	1	Yüksek	9	9	9	
Finlandiya	1	Yüksek	3	4	3	
Hollanda	1	Yüksek	4	3	4	

Tablo 4.34 Kümeleme analizi ile diğer yöntemlerin karşılaştırılması (devamı)

İrlanda	1	Yüksek	5	5	6	(1-9)
İsveç	1	Yüksek	2	1	2	
Lüksemburg	1	Yüksek	6	6	5	
Belçika	2	Orta	11	12	20	(10-23)
Bulgaristan	2	Orta	17	23	22	
Çekya	2	Orta	13	16	8	
Fransa	2	Orta	10	10	12	
İspanya	2	Orta	16	14	13	
Letonya	2	Orta	23	19	18	
Litvanya	2	Orta	24	22	19	
Macaristan	2	Orta	25	21	17	
Malta	2	Orta	12	11	11	
Polonya	2	Orta	14	13	16	
Portekiz	2	Orta	18	26	21	
Romanya	2	Orta	21	27	24	
Slovakya	2	Orta	22	24	15	
Slovenya	2	Orta	15	15	7	
İtalya	3	Düşük	27	20	23	(24-27)
Kıbrıs	3	Düşük	20	18	25	
Türkiye	3	Düşük	19	17	27	
Yunanistan	3	Düşük	26	25	26	

4.11 Dünya Mutluluk Raporu Sıralamaları ile Entropiye Dayalı TOPSİS ve ARAS Yöntemleri ile TBA Sıralamalarının Karşılaştırılması

Dünya Mutluluk Raporu'nda AB üyesi ülkeler ile Türkiye'nin mutluluk skor değerlerinin sıralanması ile çalışma kapsamındaki 3 analiz yöntemindeki sıralamalar karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırmada mutluluk skor sıra değerleri yakın (± 3) olan çalışma kapsamındaki 3 yöntemdeki sıra değerleri renkli gözelerde görülmektedir. (± 3) alınma nedeni ülkelerin skor değerlerinin bazen 3 ülkeye kadar aynı skor değerlerine sahip olması ancak sıra numaralarının ardışık verilmesi gerekliliğidir. Görülebileceği gibi yöntemlerde elde edilen sıra değerlerinin birkaç ülke hariç 3 yöntem de de yakın değerler aldığı söylenebilir (Tablo 4.35).

Ülkelerin mutluluk sıralamaları elde edilen 3 yöntemde, Dünya Mutluluk Endeksi 2022 sıralamaları ile karşılaştırıldığında;

- Entropiye Dayalı TOPSİS Yönteminde => 16
- Entropiye Dayalı ARAS Yöntemi'nde => 17
- Temel Bileşenler Analizinde => 15

ülkenin sıra değerlerine yakın değerler elde edilmiştir.

Tablo 4.35'teki bazı ülkeleri yorumlayacak olursak;

- Örneğin; Finlandiya; Dünya Mutluluk Raporu'nda AB ülkeleri ve Türkiye arasında 1. Sırada yer alırken 3 yönetime göre sıralamalarda yine ilk sıralarda bulunduğu görülmektedir (TOPSİS ve TBA'ya göre 3. Sırada, ARAS'a göre ise 4. Sırada). Hollanda, İrlanda, Danimarka, Lüksemburg, Fransa, İspanya ve Yunanistan için de 3 yönetime göre sıralamalar ile Dünya Mutluluk Endeksi Raporu'ndaki sıralamalar çok yakın değer almaktadır.
- Ancak birkaç ülke için (Estonya, Polonya, Romanya ve İtalya) 3 yöntemdeki sıralamalar ile Dünya Mutluluk Raporu sıralamaları birbirinden uzaktır. Bunun nedeni ve 3 yöntemle elde edilen ve Dünya Mutluluk Raporu sıralamalarından farklı olan ülke sıralamalarının farklı olma nedeni çalışmamız kapsamında Dünya Mutluluk Raporu'ndaki tüm değişkenlerin

kullanılmayıp öne çıkan ve daha bilinir ve kullanımı yaygın olan 6 tane değişkenin kullanılmasıdır.

Tablo 4.35 Dünya mutluluk raporu sıralamaları ile araştırmada kullanılan yöntemlerin karşılaştırılması

	Dünya Mutluluk Raporu'na göre Sırası	TOPSİS	ARAS	TBA
Almanya	8	7	7	14
Avusturya	6	8	8	10
Danimarka	2	1	2	1
Estonya	19	9	9	9
Finlandiya	1	3	4	3
Hollanda	3	4	3	4
İrlanda	7	5	5	6
İsveç	5	2	1	2
Lüksemburg	4	6	6	5
Belçika	10	11	12	20
Bulgaristan	26	17	23	22
Çekya	9	13	16	8
Fransa	11	10	10	12
İspanya	14	16	14	13
Letonya	21	23	19	18
Litvanya	17	24	22	19
Macaristan	23	25	21	17
Malta	16	12	11	11
Polonya	22	14	13	16

Tablo 4.35 Dünya mutluluk raporu sıralamaları ile araştırmada kullanılan yöntemlerin karşılaştırılması (devamı)

Portekiz	24	18	26	21
Romanya	13	21	27	24
Slovakya	18	22	24	15
Slovenya	12	15	15	7
İtalya	15	27	20	23
Kıbrıs	20	20	18	25
Türkiye	27	19	17	27
Yunanistan	25	26	25	26

4.12 Dünya Mutluluk Raporu Sıralamaları ile Kümeleme Analizi Sonuçlarının Karşılaştırılması

AB üyesi ülkeler ve Türkiye'nin Dünya Mutluluk Raporu'ndaki mutluluk skor değerleri kendi aralarında sıralanmış ve hiyerarşik kümeleme analiziyle yüksek, orta, düşük olmak üzere gruplandırılmıştır. Bu sonuçlara göre 1. grupta bulunan 9 ülkenin sıra numaralarının (1-9) aralığında, 2. grupta bulunan 13 ülkenin (10-23) aralığında ve 3. grupta bulunan 4 ülkenin de (24-27) aralığında olması beklenmektedir. Kümeleme analizi sonucu oluşan gruplardaki sıra numarası aralığına Dünya Mutluluk Raporu'nda sıralamaların uygunluğuna bakılmıştır. Tablo 4.36'da görülebileceği gibi Dünya Mutluluk Raporu sıralamalarında Almanya 8. sırada bulunmakta olup kümeleme analizinde (1-9) sıra numaralarında ülkelerin bulunduğu 1. kümede yer almaktadır. Benzer şekilde diğer ülkeler için de aynı yorumlar gerçekleştirilebilir.

Dünya Mutluluk Raporu'nda mutluluk skor değerlerine göre sıralamaların kümeleme analizi sonucu oluşan gruplara 3-4 tane ülke sıralaması haricinde genel olarak uygun olduğunu görüyoruz (Tablo 4.36).

- Estonya, küme gruplarında (1-9) sıra grubunda çıkarken mutluluk skorlarında 19. sıradadır.

- Bulgaristan küme gruplarında (10-23) sıra grubunda yer alırken mutluluk skorları sıralamasında 26. sırada yer almaktadır.
- İtalya ve Kıbrıs küme gruplarında (24-27) sıra grubunda yer alırken mutluluk skorlarında 15. ve 20. Sıralarında yer alırlar.

Tablo 4.36 Dünya mutluluk raporu sıralamaları ile kümeleme analizi sonuçlarının karşılaştırılması

	Küme	Küme Adı	Mutluluk Skoru Sırası	Küme Grubunda Sırası
Almanya	1	Yüksek	8	(1-9)
Avusturya	1	Yüksek	6	
Danimarka	1	Yüksek	2	
Estonya	1	Yüksek	19	
Finlandiya	1	Yüksek	1	
Hollanda	1	Yüksek	3	
İrlanda	1	Yüksek	7	
İsveç	1	Yüksek	5	
Lüksemburg	1	Yüksek	4	
Belçika	2	Orta	10	(10-23)
Bulgaristan	2	Orta	26	
Çekya	2	Orta	9	
Fransa	2	Orta	11	
İspanya	2	Orta	14	
Letonya	2	Orta	21	
Litvanya	2	Orta	17	
Macaristan	2	Orta	23	

Tablo 4.36 Dünya mutluluk raporu sıralamaları ile kümeleme analizi sonuçlarının karşılaştırılması (devamı)

Malta	2	Orta	16	
Polonya	2	Orta	22	
Portekiz	2	Orta	24	
Romanya	2	Orta	13	
Slovakya	2	Orta	18	
Slovenya	2	Orta	12	
İtalya	3	Düşük	15	(24-27)
Kıbrıs	3	Düşük	20	
Türkiye	3	Düşük	27	
Yunanistan	3	Düşük	25	

Çalışma kapsamında öncelikle entropi kavramı konusunda bilgi verilmiş, entropinin hem diğer alanlarda kullanımı hem de özellikle matematikteki kullanımı yani matematiksel ifadesi olarak entropi ölçüleri, fonksiyonları, türleri ile entropinin kullanıldığı analiz yöntemleri ve bu kapsamda entropinin kullanıldığı istatistiksel analiz yöntemleri bütüncül bir yaklaşımla ele alınmıştır.

Literatür taraması sonucunda entropi konusunda öne çıkan araştırma yöntemleri anlatılmıştır. Özet olarak literatürde entropinin kullanıldığı araştırmalar endeks çalışmalarında kriterlerin ağırlıklandırılmasında, entropiye dayalı ÇKKV yöntemlerinde, entropi optimizasyon yöntemlerinde, çoklu regresyon analizinde (Entropi optimizasyon yöntemi ile), bağımsız bileşen analizinde (BBA) olarak detaylıca anlatılmıştır.

Literatürdeki çalışmalarda klasik çoklu regresyon analizinde önkoşulların sağlanamadığı durumlarda entropi optimizasyon yöntemlerinin kullanılabildiği hem de bazı durumlarda klasik yöntemlere göre daha başarılı sonuçlar verdiği sonuçlarına ulaşılmıştır.

Literatürde mühendislik alanlarında makine öğrenmesi, sinyal işleme ve yüz tanıma gibi önemli konularda sıklıkla TBA kullanılmaktadır. Ancak özellikle yüz tanıma uygulamalarında yüksek dereceden özneliliklerin tanınmasında (yüzün daha detay özelliklerine bakılarak tanınmasında) BBA'nın TBA'ya göre daha iyi ve doğru sonuçlar verdiği görülmektedir. BBA, aslen istatistik alanında bir çok değişkenli istatistiksel analiz yöntemi olmasına rağmen bilinirliği fazla değildir ve literatürde bu konuda az sayıda çalışma bulunmaktadır. Bu nedenle bu tez çalışması kapsamında BBA'nın hem mühendislik alanında kullanımı anlatılmış hem de istatistik alanında analiz yöntemi olarak anlatılmıştır. Bununla amaçlanan bu konuya dikkat çekilerek mühendislik alanında oldukça önemli olan BBA'nın istatistik alanında da öneminin anlaşılmasının sağlanması ve kullanımı ile

bilinirliğinin artırılması hem bu konuda daha fazla çalışma yapılmasının teşvik edilmesi ve en az istatistikteki çok değişkenli araştırmalardan temel bileşenler analizi kadar bilinirliğinin ve tanınırliğinin artırılması olup istatistik alanında BBA konusunda daha fazla çalışma yapılması önerilmektedir.

Bu bağlamda istatistik alanında entropiye dayalı istatistiksel analiz yöntemleri konusunda daha fazla çalışma yapılması ve kullanımının yaygınlaştırılması önerilmektedir.

Uygulama bölümünde AB ülkeleri ve Türkiye'nin mutluluk sıralamaları farklı analiz yöntemleri ile karşılaştırılmıştır. Bunun için mutluluğu etkileyen değişkenler entropi yöntemi ile ağırlıklandırıldıktan sonra entropiye dayalı ÇKKV yöntemleri olan (TOPSİS, ARAS) yöntemlerine girdi olarak kullanılmıştır. AB ülkeleri ve Türkiye'nin mutluluk sıralamalarında TOPSİS, ARAS yöntemleri ile TBA sonuçlarının genelde tutarlı sonuçlar verdiği ancak TOPSİS ve ARAS yöntemlerinin daha yakın sonuçlar verdiği görülmüştür. Bu 3 yöntemdeki sıralamalar, Kümeleme Analizi sonucu elde edilen kümeler ile ve Dünya Mutluluk Raporu'nun kendi sıralamaları ile de karşılaştırıldığında büyük ölçüde yöntemlerin sıralamalarda tutarlı sonuçlar verdiği görülmüştür.

Çalışmanın uygulama bölümünde AB ülkeleri ve Türkiye için Dünya Mutluluk Raporu 2022'deki ülkelerin mutluluk düzeylerini etkileyen değişkenler, entropi yöntemi kullanılarak ağırlıklandırılmıştır. Bu kapsamda bu ülkelerin mutluluk düzeylerini en fazla etkileyen değişkenin yolsuzluk algısı ardından cömertlik olduğu görülmüştür. Hatta bu 2 değişkenin ağırlık değerleri diğer değişkenlere göre oldukça yüksektir ve bu nedenle ülkelerin mutluluk düzeylerine etkisi bakımından en önemli değişkenlerdir. Buradan bu ülkelerde yaşayan insanların yolsuzluk algılarının fazla olmasının ve cömert olmalarının ülkelerinin genel mutluluk düzeylerine en yüksek katkıyı yaptığı sonucuna da ulaşılmaktadır.

Sonuç olarak entropi kavramı, yasası, ölçüleri önemlidir ve bu konuda çeşitli araştırma yöntemleri de bulunmaktadır. Entropinin öneminin ve entropiye dayalı araştırma yöntemlerinin anlatıldığı bu çalışma sonucunda diğer alanlarda önem verilen entropi konusunda istatistik alanında daha fazla çalışma yapılması önerilmektedir.

- Alp, İ., Öztel, A., Köse, M. S. (2015). Entropi tabanlı MAUT yöntemi ile kurumsal sürdürülebilirlik performansı ölçümü: bir vaka çalışması. *Ekonomik ve Sosyal Araştırmalar Dergisi*, 11(2), 65-81.
- Alphan, G.; Efil, İ. (2011). Bir yönetim modeli önerisi: toplam entropi yönetimi. *Business and Economics Research Journal*, Volume 2. Number 1. pp. 53-87.
- Bailey, D. K. (1990). *Social entropy theory*. New York: State University of New York Press.
- Baray, Ş. A. (2003). Entropi ve karar verme. *Yönetim Dergisi: İstanbul Üniversitesi İşletme Fakültesi İşletme İktisadi Enstitüsü*, 14(44), 7-21.
- Başpınar, U. (2014). Elektromiyogram sinyallerinin sınıflandırılması ve bağımsız bileşen analizi ile işlenmesi (Doktora Tezi). Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, S: 60.
- Brillouin, L. (1960). *Science and information theory*. (2. Baskı). New York: Academic Press.
- Bursa, N. (2019). Bağımsız bileşenler analizi ile çoklu bağlantı sorununa bir yaklaşım (Doktora Tezi). Hacettepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, S: 48-49.
- Cover, T.M. & Thomas, J.A. (2006). *Elements of information theory*, Wiley Interscience (Second Edition), 226 New Jersey, Page: 16-41.
- Crooks GE, 2018. On measures of entropy and information. *Berkeley Teorik Bilimler Enstitüsü*, S: 2-19.
- Çamdalı, Ü. (2012). Termodinamik ve sosyal sistemlerin yakın çevre ilişkilerindeki ilginç benzeşim, değişim ve bir sonuç-bir ümit. *Ankara Üniversitesi SBF Dergisi*, 67 (2), 213-221, S: 213-214.
- Çatalbaş, M. C. (2014). Temel bileşenler analizi ve kanonik korelasyon analizi ile imge tanıma ve sınıflandırma (Yüksek Lisans Tezi). Hacettepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, S:13.
- Çay, M. A. (2008). Temel bileşen analizi ve bağımsız bileşen analizi yöntemlerini temel alan bazı görüntü tanıma uygulamaları ve karşılaştırmaları (Yüksek Lisans Tezi). Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, S:11.
- Çengel, Yunus A. ve Boles, Michael A. (1996). *Sayfa-2 Mühendislik Yaklaşımıyla Termodinamik*, çev. Taner Derbentli, Literatür Yayıncılık, İstanbul.
- Çini, P. (2019). Antroposentrik küresel çevre politikaları ve çevre koruma yaklaşımlarının ekosentrik görüş çerçevesinde değerlendirilmesi. (Yüksek Lisans Tezi). İzmir Katip Çelebi Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, İzmir, S: 104.
- Depren, Ö. (2014). Regresyonda maksimum entropi modellemesi (Doktora Tezi). Marmara Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, İstanbul, S: 43-44.

- Dilmen, E.; Çetinyokuş, T. (2020). Potansiyel çoklu havalimanı sisteminin çok kriterli karar verme yöntemleri ile değerlendirilmesi. Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi, 9(2), 859-876.
- Dinçer, G. (2015). Entropi kavramının istatistikte bazı uygulamaları (Yüksek Lisans Tezi). Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, S:28.
- Earis, J.E.; Cheetham B.M.G. (2000). Current methods used for computerized respiratory sound analysis, Eur. Respir. Rev., 10(77):586-590.
- Elmas, M. (2010). Gözü kapalı kaynak ayırtmada seyreklik tabanlı yöntemler ve duet algoritması (Doktora Tezi). İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, S: 16.
- Esteban, M. D.; Morales, D. (1995). A summary on entropy statistics. Kybernetika, Vol: 31 No:4, SS: 337-346.
- Garcia, A.L.,(1994). Probability and random processes for electrical engineering, Addison Wesley Longman (Second Edition), 169, Boston. S:203.
- Golan, A., Judge, G.; Miller, D. (1996). Maximum entropy econometrics, John Wiley and Sons.
- Gujarati, D. N. (2001). Temel ekonometri. (Ü. Şenesen, & G. G. Şenesen, Çev.). Literatür Yayıncılık. İstanbul.
- Hyvärinen, A., Karhunen, J., & Oja, E. (2001). Independent component analysis; A Wiley-Interscience Publication. S:147-150.
- Hyvärinen, A., Karhunen, J., & Oja, E. (2001). Independent component analysis; A Wiley-Interscience Publication. S:7.
- Işıklı, Ş. (2008). Bulanık mantık ve bulanık teknolojiler. Araştırma Ankara Üniversitesi Dil ve Tarih-Coğrafya Fakültesi Felsefe Bölümü Dergisi (Yayınlanmıyor).
- Karami, A.; Johansson, R. (2014). Utilization of multi attribute decision making techniques to integrate automatic and manual ranking of options, Journal of Information Science and Engineering, (30), ss.519-534.
- Karmeshu, J.; Pal, N.R. (2003). Entropy measures, maximum entropy principle and emerging applications, Springer, New York.
- Kurt, Günseli. (1992). Çok değişkenli istatistiksel analiz tekniklerinden çok boyutlu ölçekleme ve bir uygulama (Doktora Tezi). Marmara Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü.
- Küçükköşker, Kürşat. (2006). Haber videoları için yüz tanıma ve doğrulama yöntemleri ile arşivleme sistemi (Yüksek Lisans Tezi). Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Külcü, R. (2018). Hermeneutik okumalar I: Empedokles' de sevgi ve nefret kavramlarının entropi ekseninde okunması. Akademia Sosyal Bilimler Dergisi, (4), 53-61, S: 60.
- Lieb, E. H.; Yngvason, J. (2000). A fresh look at entropy and the second law of thermodynamics. Physics Today. 53(4), 32-37, S:32.

- Mahmoodzadeh, S.; Shahrabi, J.; Zaeri, M.S. (2007). Project selection by using fuzzy AHP and TOPSIS technique. World Academy of Science, Engineering and Tecnology, 30, p.333-338.
- Özdamar, K. (1999). Paket Programlar ile İstatistiksel Veri Analizi. Kaan Kitabevi, Eskişehir.
- Özdamar, K. (2004). Paket Programlar ile İstatistiksel Veri Analizi (Çok Değişkenli Analizler), Kaan Kitabevi, 502s. Eskişehir.
- Özden, Ü. H. (2015). Çok kriterli karar verme yöntemleri. İstanbul Ticaret Üniversitesi.
- Principe J.C., (2009). Information theory, Florida University Press, 5, Florida.
- Shannon, C. E. (1948). A mathematical theory of communication. The Bell System Technical Journal, 27 (1), 379-423, 623-656.
- Shannon, C.E., ve Weaver W. (1964). The mathematical theory of communication, 1964, S:7-10.
- Shaw, P. A. (2003). Multivariate statistics for the environmental sciences. New York: Hodder Arnold.
- Stewart, Ian. (2013). İn pursuit of the unknown-17 equations that changed the world. United Kingdom: Basic Books.
- Sustainable Development Solutions Network. World Happiness Report 2022, Erişim Adresi: <https://worldhappiness.report/ed/2022/> , Erişim Tarihi: 15 Ekim 2022.
- Şamilov, Aladdin. (2015). Entropi, informasyon ve entropi optimizasyon. Ankara: Nobel Yayıncılık. S: 16-46
- Tatlıldil, H. (1996). Uygulamalı çok değişkenli istatistiksel analiz. Ankara: Akademi Mat.
- Tsallis, C.; Mendes R.; Plastino A. (1988). The role of constraints within generalized nonextensive statistics, Physica 261A, 535-554.
- Turk M.; Pentland A. (1991). Eigenfaces for recognition, J. Cognitive Neuroscience, vol. 3, no. 1.
- Turk M.; Pentland A. (1991). Face recognition using eigenfaces, Proc. IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition, pp. 586-591.
- Ulutaş, A. (2018). Entropi tabanlı edas yöntemi ile lojistik firmalarının performans analizi. Uluslararası İktisadi ve İdari İncelemeler Dergisi, (23), 53-66.
- Uslu, S. (2009). Tsallis entropi eşitsizliği (Yüksek Lisans Tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İzmir.
- Ünlükaplan, Y. (2008). Çok değişkenli istatistiksel yöntemlerin peyzaj ekolojisi araştırmalarında kullanımı. (Doktora Tezi). Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Yaman, B. (2006). Özyüz kullanarak yüz tanıma (Yüksek Lisans Tezi). Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Sakarya, S:16-37.

Yazar, I. (2008). Temel bileşen analizi ve bağımsız bileşen analizi yöntemlerini temel alan bazı görüntü tanıma uygulamaları ve karşılaştırmaları (Yüksek Lisans Tezi). Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

Zavadskas, E.K., Turskis, Z., Vilutiene, T. (2010). Multiple criteria analysis of foundation instalment alternatives by applying additive ratio assessment (ARAS) method. Archives of civil and mechanical engineering, 10(3), 123-141.

Zimmermann, H.J. (1991). Fuzzy set theory-its applications, Second Revised Edition, Kluwer Academic Publishers, USA.



TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Konferans Bildirileri

1. Doğan Yıldız, Esra Öncül, Comparison of Happiness Levels of EU Member Countries and Turkey Using Alternative Methods. Uluslararası Akdeniz Kongresi, Mersin. 16-18 Kasım 2022

