T. C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NEWTONYEN OLMAYAN ANALİZDE BAZI KONVEKSLİK ÇEŞİTLERİ VE HERMİTE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

SEREN SALAŞ

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2022

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Seren SALAŞ

İMZALAYINIZ

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

NEWTONYEN OLMAYAN ANALİZDE BAZI KONVEKSLİK ÇEŞİTLERİ VE HERMİTE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

SEREN SALAŞ

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ, 62 SAYFA

TEZ DANIŞMANI: Dr. Öğr. Üyesi Erdal ÜNLÜYOL

1600-1700 yılları arası matematikte önemli gelişmelerin olduğu bir dönemdir. Bu dönemin en önemli gelişmelerinden biri Newton (1643-1727) ve Leibniz (1646-1716) 'in birbirlerinden bağımsız olarak, türev ile integral arasındaki ilişkiyi bulmalarıdır. Bunun bir sonucu olarak, " İntegral Kalkülüs" kavramı önem kazanmıştır. Bu gelişmeler matematiğin önünü açmış ve ilerlemesini sağlamıştır.

1970 li yıllarda Grosmann ve Katz, Newton ve Leibniz'in kurduğu klasik analize bir alternatif olarak, temelinde bire-bir ve örten olan üreteçler yardımıyla yeni bir analiz inşa etmişlerdir. Bu analize "'Newtonyen Olmayan Analiz" denir.

Bu tezde, ilk olarak klasik analizde eşitsizlik teorisinde iyi bilinen P fonksiyon, birinci anlamda s konveks, ikinci anlamda s konveks, J konveks, h konveks, harmonik konveks ve geometrik konveks fonksiyonlar Newtonyen olmayan analize göre yeniden tanımlanmıştır. İkinci olarak, bu konveks fonksiyonlar yardımıyla Hermite-Hadamard eşitsizliği Newtonyen olmayan analizde elde edilmiştir. Üçüncü olarak, tanım ve değer kümesindeki üreteçler uygun koşullar altında birim, üstel ve q_p olarak seçildiğinde ilk önce klasik anlamdaki hallerine sonra ise H-A konveks, H-H konkav, A-H konveks ve r-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğine indirgendiği ispat edilmiştir. Son olarak, Newtonyen olmayan analizde eşitsizliklerle elde edilen teoremlerin uygun üreteçler altında klasik anlamda bilinen teorem ve sonuçlara denk geldiği görülmüştür. Sonuç olarak, Newtonyen Olmayan (N-N) Analiz' de elde edilen tanım, lemma, teorem ve sonuçlar özel halde klasik anlamdaki durumuna dönüşmektedir.

Anahtar Kelimeler: Newtonyen Olmayan Analiz, $*$-Analiz, Hermite-Hadamard Eşitsizliği, (N-N) Konveks Fonksiyon, (N-N) P-Fonksiyon, (N-N) s-konveks Fonksiyon, (N-N) h-konveks Fonksiyon, (N-N) J-konveks Fonksiyon, (N-N) Geometrik Konveks Fonksiyon.

ABSTRACT

SOME TYPES OF CONVEXITY AND HERMITE-HADAMARD TYPE INEQUALITIES IN NON-NEWTONIAN ANALYSIS

SEREN SALAŞ

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE SCIENCE

MATHEMATICS

PHD THESIS, 62 PAGES

SUPERVISOR: Assist. Prof. Dr. Erdal ÜNLÜYOL

Between the years 1600-1700 is a period of important developments in mathematics. One of the most important developments of this period is that Newton (1643-1727) and Leibniz (1646-1716) independently found the relationship between derivative and integral. As a result of this, the concept of “Integral Calculus” has gained importance. These developments paved the way for mathematics and made it progress.

In the 1970s, Grosmann and Katz constructed a new analysis with the help of one-to-one and covering generators as an alternative to the classical analysis established by Newton and Leibniz. This analysis is called "Non-Newtonian Analysis".

In this thesis, firstly, the P function, which is well known in classical analysis in inequality theory, s convex in the first sense, s convex in the second sense, J convex, h convex, harmonic convex and geometric convex functions are redefined according to non-Newtonian analysis. Secondly, with the help of these convex functions, the Hermite-Hadamard inequality is obtained in non-Newtonian analysis. Thirdly, it has been proven that when the generators in the definition and value set are selected as unit, exponential and q_p under appropriate conditions, they are first reduced to their classical form and then to the Hermite-Hadamard inequality for H-A convex, H-H concave, A-H convex and r-convex functions. Finally, it has been seen that theorems obtained with inequalities in non-Newtonian analysis correspond to theorems and results known in the classical sense under appropriate generators. As a result, the definitions, lemmas, theorems, and results obtained in Non-Newtonian (N-N) Analysis turn into their classical meaning in appropriate generators.

Keywords: Non-Newtonian Analysis, $*$- Analysis, Hermite-Hadamard- inequality, (N-N) Convex Functions, (N-N) p-Function, (N-N) h-convex Function, (N-N) J- convex Function, (N-N) Geometric Convex Function.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca bilgi ve deneyimleriyle her türlü yanımda olan danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Erdal ÜNLÜYOL'a en içten duygularımla teşekkürlerimi iletiyorum.

Doktora eğitim-öğretim süresince değerli bilgilerinden istifade ettiğim Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyeleri ve araştırma görevlilerine teşekkür ederim.

Eğitim hayatım süresince maddi-manevi desteklerini esirgemeyen başta annem Tülin SALAŞ ve babam Mehmet SALAŞ olmak üzere aileme teşekkür ediyorum.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
α, β	:	Üreteçler
$\dot{<}, \ddot{<}$	:	Newtonyen olmayan küçüktür
$\dot{>}, \ddot{>}$	:	Newtonyen olmayan büyüktür
$\dot{+}, \ddot{+}$	:	Newtonyen olmayan toplama işlemi
$\dot{-}, \ddot{-}$	:	Newtonyen olmayan çıkarma işlemi
$\dot{\times}, \ddot{\times}$	:	Newtonyen olmayan çarpma işlemi
$\dot{\backslash}, \ddot{\backslash}$	:	Newtonyen olmayan bölme işlemi
ι(iota)	:	Newtonyen olmayan analizde üreteç arası geçiş fonksiyonu
$\mathbb{R}_{\alpha}$	:	Newtonyen olmayan reel sayılar kümesi
Id	:	Birim fonksiyon
$L[a,b]_{\alpha}$	:	$f: [a,b]_{\alpha} \subseteq \mathbb{R}_{\alpha} \to \mathbb{R}$ $[a,b]_{\alpha}$ aralığı üzerinde Id_{α}-integrallenebilen fonksiyonların kümesi
	:	$f: [a,b]_{\alpha} \subseteq \mathbb{R}_{\alpha} \to \mathbb{R}_{\alpha}$ $[a,b]_{\alpha}$ aralığı üzerinde α_{α}- integrallenebilen fonksiyonların kümesi
	:	$f: [a,b]_{\alpha} \subseteq \mathbb{R}_{\alpha} \to \mathbb{R}_{\beta}$ $[a,b]_{\alpha}$ aralığı üzerinde $*$- integrallenebilen fonksiyonların kümesi

1. GİRİŞ VE LİTERATÜR TARAMASI

1600-1700 yılları arası matematikte önemli gelişmelerin olduğu yıllardır. Bu asrın en önemli gelişmelerinden biri de I. Newton (1643-1727) ve G. Leibniz (1646-1716) tarafından birbirlerinden bağımsız olarak, türev ile integral arasındaki ilişkinin bulunmasıdır. Bunun bir sonucu olarak, İntegral kavramı önem kazanmıştır.

L. Euler ise fonksiyon kavramına merkezi bir yer vererek günümüzde kullanılan hesaplama yöntemlerinin temelini attı. Bu gelişmelerle o güne kadar kullanım alanı sınırlı olan matematiğin önünü açmış ve matematiği evrensel bir bilim konumuna getirmiştir. Türev ve integral analizin temelini teşkil eder. Gerçekten de bu iki işlem, toplama ve çıkarmanın sonsuz versiyonları gibidir. Bilindiği üzere matematikte herhangi bir problemin çözümü o an ki matematik bilgisine göre yapılamayabilir. Fakat bu bize o problemin çözümünün olmadığı anlamına gelmez.

1967-1970 yılları arasında M. Grossman ve R. Katz klasik analize bir alternatif olarak yeni bir analiz inşaa ettiler. İlerleyen yıllarda Grossman bu yapıları genişleterek geometrik, kuadratik ve harmonik analiz sınıflarını elde etmiştir. Bu ilerleme sürecinde M. Grossman ve R. Katz' ın bulduğu bu analiz, klasikte bilinen toplama ve çıkarma işlemlerinin; çarpma ve bölme işlemleri ile birebir rollerinin değişmesi esasına dayanan bir analiz olup buna Newtonyen Olmayan Analiz denir.

Newtonyen Olmayan Analizin temel yapılarını oluşturmak amacıyla bir çok çalışmalar yapılmıştır. Aşağıda yapılan bu çalışmaların kısa bir literatür taraması verilmiştir.

M. Grosmann ve R. Katz' ın, Non-Newtonian Calculus [23] isimli kitabı bu alanda yazılmış en önemli kitaptır.

M. Grossman [24], iki tam sıralı cisimden keyfi bir Newtonyen olmayan analizin oluşumu- nu açıklamış ve daha sonra Newtonyen olmayan analizin bazı özelliklerini vermiştir.

A. E. Bashirov ve arkadaşları [5], M. Grossman ve R. Katz'ın, toplama ve çıkarmanın rollerini, çarpma ve bölme ile değiştiren ve adı çarpımsal (multiplicative) olarak adlandırılan analizde integral ve türevin yeni tanımının kullanışlılığını göstermiş ve Newtonyen olmayan analize dikkat çekmek istemişlerdir.

M. Rıza ve arkadaşları [51], çarpımsal türev denklemlerin ve Volterra diferansiyel denklemlerinin sayısal çözümü için sonlu fark şemalarını çarpımsal analize dayalı elde etmişlerdir. Bu yeni yaklaşımları kullanılarak örnek problemler çözmüşlerdir.

A. Uzer [60], reel değerli fonksiyonlar için çarpımsal bir analizi, kompleks değerli fonksiyonlarla ilgili çarpımsal bir kompleks analize genişletmiştir. Bazı temel teoremleri verip klasik analizde olanlar ile arasındaki benzerliği araştırmıştır.

A. E. Bashirov ve M. Rıza [3], kompleks değerli fonksiyonlar için çarpımsal türevi ele almıştır. Karmaşık çarpımsal türevin özelliklerini inceleyip Cauchy-Riemann şartlarını elde etmişlerdir.

A. E. Bashirov ve arkadaşları [4], Newtonyen analizin yerine, çarpımsal analzi kullanarak farklı alanlarda çeşitli problemlerin daha verimli bir şekilde modellenebileceğini göstermişlerdir. Üstel aritmetik, çarpımsal analiz ve çarpımsal türev eşitlikleri gibi onun bazı prensiplerini finansal, tarımsal, ekonomik, sigorta istatikleri ve sosyal bilim örneklerini çarpımsal analizi kullanarak çözüme kavuşturmuşlardır.

M. Mora ve arkadaşları [44], çarpımsal analizi kullanarak Newton tipi olmayan yeni bir operatör tanımlamış ve bu operatör yardımı ile haritalamada kullanılan yükseklik çizgisinin tespitinde geleneksel yolla elde edilen operatörden daha etkili olduğunu kanıtlamışlardır.

A. F. Çakmak ve F. Başar [12], Newtonyen olmayan metrik kavramını ve Newtonyen olmayan reel sayılar cismini elde etmişlerdir. Newtonyen olmayan analizde Minkowski ve üçgen eşitsizliğini ispat etmişlerdir.

D. Filip ve C. Piatecki [20], L. Pacioli tarafından on beşinci yüzyılda tanıtılan çift girişli defter tutma yöntemiyle muhasebe tutma modelini Newtonyen olmayan analiz yardımıyla ele almışlardır.

M. Özavşar ve A. C. Çevikel [49], çarpımsal metrik uzay ile ilgili bazı topolojik özellikler vererek çarpımsal metrik dönüşümünü ele almışlardır. Çalışmanın bir sonucu olarak, pozitif gerçek sayı kümesinin çarpımsal mutlak değer fonksiyonuna göre tam bir çarpımsal metrik uzay olduğunu göstermişlerdir. Ek olarak çarpımsal büzülme dönüşümü kavramını vermiş ve çarpımsal metrik uzay tanımı üzerinde böyle dönüşümlerin bazı sabit nokta teoremlerini ispatlamışlardır.

A. E. Bashirov [6] klasik analizdeki iki katlı integralleri, Newtonyen olmayan analiz açısından elde edip bunlarla ilgili teoremleri ispatlamıştır.

S. Tekin ve F. Başar [55], kompleks diziler uzayı olan w kümesi üzerinde, l_∞, c, c_0, l_p şeklinde ifade edilen ve sırasıyla tüm sınırlı, yakınsak, sıfıra yakınsak ve p-mutlak toplanabilir dizi uzaylarını Newtonyen olmayan analize taşımışlardır. Yani, w^* Newtonyen olmayan kompleks diziler kümesi üzerinde l_∞^*, c^*, c_0^* ve l_p^* uzaylarını tanımlamış ve bu uzaylar için bazı sonuçlar vermişleridr.

A. F. Çakmak ve F. Başar [11], klasik anlamdaki komleks sayılar ve kompleks fonksiyonların bazı karakteristik özelliklerini Newtonyen olmayan analiz açısından incelemişlerdir. $*$-kompleks sayılar cismi ve $*$-metrik uzay kavramını elde etmişlerdir. Aynı zamanda $*$-sınırlılık ve $*$-sürekliliğin bazı önemli tanımları ve bazı önemli özelliklerini elde etmişlerdir. Daha sonra $\mathbb{C}^*(\Omega)$ $*$-sürekli fonksiyonları ve bu küme üzerinde tanımlanan Newtonyen olmayan toplam ve skalerle çarpma işlemine göre bir vektör uzayı olduğunu ayrıca $\mathbb{C}^*(\Omega)$ nın bir Banach uzayı olduğunu ispat etmişlerdir.

U. Kadak ve M. Özlük [31], diferansiyel denklemler için Runge-Kutta metodunu farklı üreteç fonksiyonlar için Newtonyen olmayan analizde elde ettiler ve bu sonuçları klasik analizdeki durum ile karşılaştırdılardır.

U. Kadak ve H. Efe [32], Newtonyen olmayan analiz açısından $\mathbb{R}^*$ ve C^* kümeleri üzerinde vektör uzayı, iç çarpım ve Hilbert uzayı tanımlarını vermişlerdir. Daha sonra Non-Newtonyen öklid geometri düzlemi için Newtonyen olmayan kartezyen düzlemini tanımlayıp öklidyen, üniter ve dizi uzayları tanımını vermiştir. Son olarak Newtonyen olmayan kompleks yapıların norm özelliğini kullanarak Cauchy Schwarz ve üçgen eşitsizliklerini incelemişlerdir.

U. Kadak [33], sınırlı, yakınsak, sıfıra yakınsak ve p-sınırlı varyasyonlu dizilerin $\mathbb{C}^*$ kompleks sayılar cismi üzerindeki tanımı ve tam olduklarının ispatını vermişlerdir. Daha sonra Köthe-Toeplitz duallerini Newtonyen olmayan analiz açısından inceleyip klasik durumla karşılaştırmışlardır.

U. Kadak ve H. Efe [34], $\mathbb{C}^*$ cismi üzerinde dizi uzaylarının matris dönüşümü tanımını ve Newtonyen olmayan analize göre sonsuz matrislerin bazı karakteristik sınıflarını incelemişlerdir. Aynı zamanda $\mathbb{C}^*$ üzerideki klasik kümelerden birini diğerine dönüştüren sonsuz bir matris üzerinde gerekli ve yeterli koşulları elde etmişlerdir. Ayrıca, diziden diziye ve seriden seriye toplanabilirlik yöntemini örneklerle açıklamışlardır.

D. Filip ve C. Piatecki [21], neoklasik olmayan büyüme modelini Newtonyen olmayan analiz açısından yeniden ifade ve ispatını vermişlerdir.

D. Filip ve C. Piatecki [22], Newtonyen olmayan analizi kullanarak klasik ekonomi teorisini, özellikle de ekonomik büyümeyi, istatistiğin maksimum olasılık yönteminde inceleyerek yeni bir bakış açısı kazandırmışlardır.

M. Abbas ve arkadaşları [1], çarpımsal metrik uzaylar üzerinde kapalı bir topun yarı-zayıf değişmeli dönüşümlerin sabit nokta sonuçlarını elde etmişler ve bu sonuçları örneklerle desteklemişlerdir. Daha sonra çarpımsal sınır değer probleminin çözümünün varlığı için şartları ortaya koymuşlardır. Böylelikle literatürde var olan sonuçları genişleterek ilerletmişlerdir.

M. Rıza ve B. Eminaga [52], Newtonyen olmayan analizin bir dalı olan bigeometrik analizi kullanarak Runge-Kutta yöntemini yeniden ifade edip belirli başlangıç değer problemleri altınde çözümünü araştırmış, bu çözümü klasik yöntemle kıyaslamışlardır.

M. Rıza ve H. Aktöre [53], klasik anlamdaki Runge-Kutta problemini geometrik çarpımsal analizi kullanarak ifade edip çözümünü araştırmıştır. Yine bu çözümü klasik durum ile karşılaştırmıştır.

U. Kadak ve arkadaşları [35], Newtonyen olmayan kompleks cisim üzerinde paranormlu dizi uzayları ve bunların duallerini elde etmişlerdir.

U. Kadak [36], Newtonyen olmayan kompleks cisim üzerinde *Cesáro* tipi toplanabilir dizi uzaylarını elde etmiştir.

A. Uzer [61], çarpımsal analizi kullanarak yarı düzlemde silindirik dalga problemini incelemiştir.

U. Kadak [37], 2015 yılında yapmış olduğu "Newtonyen olmayan analiz ve çeşitli uygulamaları" isimli doktora tezinde Newtonyen olmayan analizin temel özelliklerini ve bu yapının klasik analizle ilişkilerini incelemistir. İlk önce tek bir üretece bağlı fonksiyonel analizin bazı önemli eşitsizliklerini vermiştir. Newtonyen olmayan analiz yöntemlerinden biri olan ve $*$-aritmetik adı verilen analiz tarzı kullanılarak kompleks cisim üzerinde tanımlı bazı dizi uzaylarını ve duallerini tanımlamıştır. Bunun yanında sonsuz matris yapısı inşa edilerek tanımlanan dizi uzayları arasındaki bazı matris dönüşümlerinin sınıflandırmasını yapmıştır. Vektör uzayı ve iç çarpım uzayının Newtonyen olmayan anlamda karşılıklarını ve bazı geometrik özellikleri göstermiştir. Özellikle klasik analizde iyi bilinen ağırlıklı ortalama kavramlarını genelleştirerek farklı üreteçlere bağlı olarak yeni türde ağırlıklı ortalamalar elde etmiştir.

N. Yalçın ve arkadaşları [68], çarpımsal analizi kullanarak klasik anlamdaki Laplace dönüşümünü elde edip bazı temel tanım ve özelliklerini vermişlerdir. Elde ettikleri bu çarpımsal Laplace dönüşümü yardımı ile bazı çarpımsal diferansiyel denklemlerin çözümlerini elde etmişlerdir.

U. Kadak ve Y. Gürefe [38], ağırlıklı ortalamaların ve konveks fonksiyonların bazı karakteristik özelliklerini, Newtonyen olmayan analiz açısından incelemişlerdir. Bu göstermiştir ki üretilen fonksiyonların seçimine bağlı olarak, bu tür ağırlıklı ortalamaların ve konveks fonksiyonların bir çok kullanışlı çeşitleri vardır. Dahası, klasik ağırlıklı ortalama ve onun Newtonyen olmayan versiyonu arasındaki bazı ilişkileri karşılaştırmış ve konveks fonksiyonların bazı geometrik yorumlarını Newtonyen olmayan eğime göre vermişlerdir. Son olarak, çarpımsal sürekli konveks fonksiyonları kullanarak bir uygulama vermişlerdir.

K. Boruah ve B. Hazarika [9], Newtonyen olmayan analizi kullanarak G-Calculus olarak adlandırılacak yeni bir tür analizi elde etmişlerdir.

Y. Gürefe ve arkadaşları [25], klasik analizin bazı temel teoremlerini ve kavramlarını çarpımsal analize taşımış ve onlar arasındaki benzerlikleri ortaya çıkarmışlardır.

M. Erdoğan'ın [18], "Newtonyen olmayan reel sayı serileri ve has olmayan integraller" isimli yüksek lisans tezinde Newtonyen olmayan reel sayı serileri ile has olmayan integraller incelenmiş ve onların yakınsaklık koşulları araştırılmıştır. Yani, Newtonyen olmayan reel sayı serileri ve has olmayan integraller için gerekli olan temel tanımlara, teoremlere ve özelliklere yer verilip onların yakınsaklık koşullarına dair testler verilmiştir. Ayrıca, Newtonyen olmayan reel sayılarda ara değer teoremi ve ortalama değer teoremi gibi temel teoremler incelenmiştir.

F. Erdoğan' ın [19], "Newtonyen olmayan reel sayılarda fonksiyon dizi ve serileri" isimli yüksek lisans tezinde Newtonyen olmayan reel sayılarda fonksiyon dizi ve serileri incelenmiştir. Ayrıca Newtonyen olmayan reel sayılar cismi üzerinde $*$-fonksiyon dizisi tanıtılıp, bazı tanım ve teoremler verilerek $*$-fonksiyon serisi, $*$-noktasal yakınsama, $*$-düzgün yakınsama kavramları tanıtılmış ve $*$-noktasal yakınsama ile $*$-düzgün yakınsamanın önemli farklarını ortaya çıkaran teoremler ispatlanmıştır. Ayrıca $*$-düzgün yakınsaklık için $*$-Cauchy kriteri, $*$-Weierstrass M-kriteri gibi $*$-yakınsaklık testleri elde edilip sırasıyla $*$-düzgün yakınsaklığın $*$-süreklilik, $*$-integral ve $*$-türev ile arasındaki ilişki irdelenmiştir. $*$-Abel ve $*$-Dirichlet testleri tanımlanıp $*$-kuvvet serileri tanıtılarak, bunun bir uygulaması olan *Cesáro* ve Abel anlamında toplanabilme özellikleri elde edilmiştir.

K. Boruah [8], çarpımsal reel dizi kavramını ve onların temel özelliklerini vermiştir.

M. Kirişçi [41], Newtonyen olmayan metrik uzayların bazı özelliklerini ve bazı Newtonyen olmayan metrik uzayların topolojik yapılarını vermiştir.

E. Ünlüyol ve arkadaşları [63], konveks fonksiyonlar ve bazı eşitsizlikleri Newtonyen olmayan analiz yardımıyla elde etmişlerdir. Daha sonra Newtonyen ve Newtonyen olmayan analiz ile kıyaslamışlardır.

E. Ünlüyol ve arkadaşları [64], bazı operatörleri, Newtonyen olmayan analize taşımışlardır. Ayrıca onları Newtonyen ve Newtonyen olmayan analize göre kıyaslamışlardır.

T. Yaying ve B. Hazarika [69], aritmetik yakınsak diziler ve aritmetik toplanabilirliği Newtonyen olmayan analizde inşa etmişlerdir.

M. Waseem ve arkadaşları [67], çarpımsal analizi kullanarak bazı lineer olmayan denklemlerin çözümlerini elde edip bu çözümleri klasik anlamdaki çözüm ile kıyaslamışlardır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Konvekslik ve Bazı Konvekslik Çeşitleri

Tanım 2.1.1 Eğer $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, bu f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Eğer yukarıdaki eşitsizlik yön değiştirirse, f fonksiyonuna konkav fonksiyon denir.

Teorem 2.1.1 [26] I, $\mathbb{R}$ de bir aralık ve $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ bir konveks fonksiyon olsun. Bu durumda $a < b$ ve her $a, b \in I$ için

$$f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna Hermite Hadamard Eşitsizliği denir.

Tanım 2.1.2 [57] I bir aralık, $\varphi : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve kesin monotonik fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f\Big(\varphi^{-1}\Big(t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y)\Big)\Big) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise, o zaman $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna $M_\varphi A$ konveks fonksiyon denir. Eğer eşitsizlik yön değiştirirse, o zaman f fonksiyonuna $M_\varphi A$-konkav fonksiyon denir.

Tanım 2.1.3 [54] : $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ reel değerli bir fonksiyon, $J = f(x) : x \in [a,b]$ $[a,b]$ üzerinde bir aralık, g, sürekli ve J üzerinde kesin monoton fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(tx + (1-t)y) \leq (\geq)\Big(g^{-1}\Big(tg(f(x)) + (1-t)g(f(y))\Big)\Big)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise, o zaman f fonksiyonuna g konveks(konkav) fonksiyon denir. Burada g^{-1}, g-nin ters fonksiyonudur.

Tanım 2.1.4 [43] $I, \mathbb{R}$'de bir aralık ve $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x, y \in I$ için

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

eşitsizliğini sağlayan bir f fonksiyonuna I üzerinde Jensen anlamında konveks veya J-konveks fonksiyon denir. Ayrıca eğer $x \neq y$ için yukarıdaki eşitsizlik sağlanıyorsa, f ye I üzerinde kesin J-konveks fonksiyon denir.

Tanım 2.1.5 [72] $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olmak üzere eğer her $x, y \in I$ ve $t \in (0, 1)$ için,

$$f(tx + (1 - t)y) \leq f(x) + f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f ye P-fonksiyonu veya $P(I)$ sınıfına aittir denir.

Tanım 2.1.6 [48] $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $0 < s \leq 1$ olsun. $\alpha^s + \beta^s = 1$ olmak üzere her $u, v \in \mathbb{R}_0^+$ ve her $\alpha, \beta \geq 0$ için

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyonuna birinci anlamda s-konveks fonksiyon denir.

Tanım 2.1.7 [10] $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $0 < s \leq 1$ olsun. $\alpha + \beta = 1$ olmak üzere her $u, v \in \mathbb{R}_0^+$ ve her $\alpha, \beta \geq 0$ için

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyonuna ikinci anlamda s-konveks fonksiyon denir.

Tanım 2.1.8 [66] $h \not\equiv 0$ ve $h : J \longrightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in I$, $\alpha \in (0, 1)$ için

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq h(\alpha) \times f(x) + h(1 - \alpha) \times f(y) \tag{2.1.1}$$

eşitsizliğini sağlayan negatif olmayan $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna bir h-konveks fonksiyon denir. Burada I ve J $\mathbb{R}$'de iki aralık ve $(0, 1) \subseteq J$ dır.

Tanım 2.1.9 [45] $f : I \subseteq \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu, her $x, y \in I$ ve $t \in (0, 1)$ için,

$$f(x^t y^{1-t}) \leq f(x)^t f(y)^{1-t}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna G-G konveks fonksiyon denir.

Teorem 2.1.2 [14] $f : I \subseteq (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu G-G konveks fonksiyon, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. Bu durumda $f \in L[a, b]$ için,

$$f\left(\sqrt{ab}\right) \leq \frac{1}{lnb - lna} \int_a^b f(t)\frac{1}{t}dt \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}, \ (t \in [1, e]),$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğe G-G konveks fonksiyonlar için Hermite Hadamard eşitsizliği denir.

Tanım 2.1.10 [45] $f : I \subseteq \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu, her $x, y \in I$ ve $t \in (0,1)$ için,

$$f(x^t y^{1-t}) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna G-A konveks fonksiyon denir.

Tanım 2.1.11 [46] $f : I \subseteq \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu, her $x, y \in I$ ve $t \in (0,1)$ için,

$$f(tx + (1-t)y) \leq f(x)^t f(y)^{1-t}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna A-G konveks fonksiyon denir.

Tanım 2.1.12 [39] $I \neq \emptyset$, $\mathbb{R}$ de aralık ve $f : I \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyon bir fonksiyon. Eğer f fonksiyonu, her $x, y \in I$ ve $t \in (0,1)$ için,

$$f(tx + (1-t)y) \leq f(x)f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna çarpımsal P fonksiyon denir.

Tanım 2.1.13 [28] $f : I \subseteq (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu, her $x, y \in I$ ve $t \in (0,1)$ için,

$$f(x^t y^{1-t}) \leq f(x) + f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna P geometrik aritmetik ya da P-GA fonksiyon denir.

Tanım 2.1.14 [40] $f : I \subseteq (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu, her $x, y \in I$ ve $t \in (0,1)$ için,

$$f\Big(\frac{xy}{ty + (1-t)x}\Big) \leq f(x) + f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna harmonik P fonksiyon ya da H-P(I) fonksiyon denir.

Teorem 2.1.3 [57] $f : I \subseteq (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $M_\varphi A$ konveks fonksiyon, $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve kesin monoton fonksiyon, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. Bu durumda $f, \varphi' \in L[a, b]$ için,

$$f\Big(\varphi^{-1}\Big(\frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2}\Big)\Big) \leq \int_0^1 f(\varphi^{-1}(t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y)))dt \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

sağlanan bu eşitsizliğe $M_\varphi A$ konveks fonksiyonlar için Hermite Hadamard eşitsizliği denir.

Teorem 2.1.4 [30] $f : I \subseteq (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu harmonik konveks fonksiyon, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. Bu durumda $f \in L[a,b]$ için,

$$f\left(\frac{2xy}{x+y}\right) \leq \int_a^b \frac{ab}{b-a}\frac{f(x)}{x^2}dt \leq \frac{f(a)+f(b)}{2},\ (t \in [0,1])$$

sağlanan bu eşitsizliğe Harmonik konveks fonksiyonlar için Hermite Hadamard eşitsizliği denir.

Tanım 2.1.15 [29] $I \subseteq (0,\infty)$, $\mathbb{R}$ de bir aralık, $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f([tx^p + (1-t)y^p]^{\frac{1}{p}}) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna p-konveks fonksiyon denir.

Teorem 2.1.5 [15] Eğer $f : I \subseteq (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu p konveks fonksiyon, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. Eğer $f \in L[a,b]$ ise,

$$f\left(\left(\frac{(a)^p + (b)^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right) \leq \int_0^1 f\left(\left(\frac{(a)^p + (b)^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right)dt \leq \frac{f(a)+f(b)}{2},\ (t \in [0,1])$$

eşitsizliğine p fonksiyonlar için Hermite Hadamard eşitsizliği denir.

Tanım 2.1.16 [13] $I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bir aralık olsun. Eğer $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in I$ ve $t \in (0,1)$ için,

$$f\left(\frac{xy}{tx+(1-t)y}\right) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, f ye H-A konveks fonksiyon denir.

Tanım 2.1.17 [71] $I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bir aralık olsun. Eğer $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in I$ ve $t \in (0,1)$ için,

$$f\left(\frac{xy}{tx+(1-t)y}\right) \geq \frac{f(x)f(y)}{(1-t)f(y)+tf(x)}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, f ye H-H konkav fonksiyon denir.

Tanım 2.1.18 [71] $I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bir aralık olsun. Eğer $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in I$ ve $t \in (0,1)$ için,

$$f\left(tx+(1-t)\right) \leq \frac{f(x)f(y)}{(1-t)f(y)+tf(x)}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, f ye A-H konveks fonksiyon denir.

Tanım 2.1.19 [70] $f : [0,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $r > 0$ ve $b > 0$ olsun. Eğer her $x, y \in [0,b]$ için

$$f(tx+(1-t)y) \leq \left(t(f(x))^r + (1-t)(f(y))^r\right)^{\frac{1}{r}},\ (t \in [0,1])$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, bu eşitsizliğe r konveks fonksiyon denir.

2.2 Aritmetik Sistem

Aritmetik, tanım kümesi reel sayıların bir alt kümesi olan tam sıralı bir cisimdir. Aritmetik sistem ise bu cisim üzerinde tanımlı cebirsel işlemlerle elde edilen yapıya denir. Aslında bu cisim, reel sayı cisminin farklı bir yorumu olarak da düşünülebilir öyle ki sayılabilir sayıda sonsuz tam sıralı cisim oluşturulabilir ve bu yapılar birbiriyle denk ya da izomorfiktir. Aritmetik sistemleri oluşturmaya yarayan üreteç(doğurucu) fonksiyonu, tanım kümesi reel sayılar ve değer kümesi reel sayıların bir alt kümesi olan bire-bir ve örten bir dönüşümdür. I birim fonksiyonu ve e^x(*exp(x)*) üstel fonksiyonu üreteç fonksiyonuna birer örnektir. Her bir üreteç tek bir aritmetik ürettiği gibi her aritmetik de tek bir üreteç yardımıyla üretilebilir[37].

2.2.1 α-Aritmetik

α, tanım kümesi $A \subseteq \mathbb{R}$ olan ve değer kümesi $\mathbb{R}_\alpha = \{\alpha(a) : a \in A\}$ olan bir üreteç (doğurucu) olsun. $\mathbb{R}_\alpha$ üzerinde tanımlı $\dot{+}, \dot{-}, \dot{\times}, \dot{/}$ işlemleri ve $\dot{<}$ sıralama bağıntısı aşağıdaki gibi olan aritmetiğe bir α aritmetik denir. Her $x, y \in \mathbb{R}_\alpha$ için

$$\begin{array}{rrl} \alpha-\texttt{toplam} & x\dot{+}y = & \alpha\{\alpha^{-1}(x)+\alpha^{-1}(y)\}, \\ \alpha-\texttt{fark} & x\dot{-}y = & \alpha\{\alpha^{-1}(x)-\alpha^{-1}(y)\}, \\ \alpha-\texttt{çarpım} & x\dot{\times}y = & \alpha\{\alpha^{-1}(x)\times\alpha^{-1}(y)\}, \\ \alpha-\texttt{bölüm} & x\dot{/}y = & \alpha\{\alpha^{-1}(x)/\alpha^{-1}(y)\}, \\ \alpha-\texttt{sıralama} & x\dot{<}y \Longleftrightarrow & \alpha^{-1}(x)<\alpha^{-1}(y). \end{array} \tag{2.2.1}$$

Bu işlemler altında $(\mathbb{R}_\alpha, \dot{+}, \dot{-}, \dot{\times}, \dot{/}, \dot{<})$ tam sıralı bir cisimdir yani bir aritmetiktir. Bu aritmetiği α fonksiyonu ürettiği için buna α-aritmetik denir[23].

Her bir üreteç fonksiyonu yalnız bir aritmetik üretir ya da her bir aritmetik yalnız bir üreteç vasıtasıyla üretilir.

Doğurucu fonksiyon $\alpha = exp$ olmak üzere,

$$\begin{array}{cc} \alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{exp} & \alpha^{-1} : \mathbb{R}_{exp} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \to \alpha(x) = e^x & e^x \to \ln(e^x) = x \end{array} \tag{2.2.2}$$

şeklinde verilsin. Her $x, y \in \mathbb{R}^+$ için aşağıdaki cebirsel işlemler geçerlidir.

$$\begin{array}{rrl} \texttt{geometrik toplam} & x\dot{+}y = & e^{\{\ln x+\ln y\}} = x.y, \\ \texttt{geometrik fark} & x\dot{-}y = & e^{\{\ln x\times\ln y\}} = x/y, \\ \texttt{geometrik çarpım} & x\dot{\times}y = & e^{\{\ln x \ln y\}} = x^{\ln y} = y^{\ln x}, \\ \texttt{geometrik oran} & x\dot{/}y = & e^{\{\ln x/\ln y\}} = x^{\frac{1}{\ln y}}, \\ \texttt{geometrik sıralama} & x\dot{<}y \Longleftrightarrow & ln(x) < ln(y). \end{array} \tag{2.2.3}$$

Şimdi ise başka bir üreteç fonksiyon örneği verelim.

$q_p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_q \subseteq \mathbb{R}$ fonksiyonu ve tersi olan q_p^{-1} fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır $(p \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$:

$$q_p(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{p}}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -(-x)^{\frac{1}{p}}, & x < 0 \end{cases}, \quad q_p^{-1}(x) = \begin{cases} x^p, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -(-x)^p, & x < 0. \end{cases} \tag{2.2.4}$$

Sonsuz sayıda q_p-aritmetik verebiliriz. Özel olarak $p = 2$ ve $p = -1$ için bu aritmetiğe sırasıyla kuadratik aritmetik ve harmonik aritmetik denir [37].

Tanım 2.2.1 [37] Klasik aritmetikteki her bir işlemin doğal karşılığını α-aritmetikte bulmak mümkündür. Her $p \in \mathbb{Z}$ için $\alpha(p) = \dot{p}$ olmak üzere $y \in \mathbb{R}_\alpha$, $y\dot{+}\dot{0} = y$ ve $y\dot{\times}\dot{1} = y$ ise $\dot{0}$ (α-sıfır) ve $\dot{1}$ (α-bir) sayılarına, sırasıyla α-toplama göre etkisiz ve α-çarpmaya göre birim eleman denir.

Tanım 2.2.2 [37] Her $n \in \mathbb{Z}$ için $\dot{-}\dot{n} = \dot{0}\dot{-}\dot{n} = \alpha(-n)$ olmak üzere $\mathbb{Z}_\alpha$ tamsayılar kümesi

$$\mathbb{Z}_\alpha = \left\{ \dots, \dot{-}\dot{2}, \dot{-}\dot{1}, \dot{0}, \dot{1}, \dot{2} \dots \right\} = \left\{ \dots, \alpha(-2), \alpha(-1), \alpha(0), \alpha(1), \alpha(2), \dots \right\}.$$

şeklinde tarif edilir. Buna göre α-tamsayıların $\mathbb{Z}_\alpha$ kümesi,

$$\mathbb{Z}_\alpha = \left\{ \dot{n} : \dot{n} = \alpha(n),\ n \in \mathbb{Z} \right\}$$

şeklindedir .

Tanım 2.2.3 [37] Keyfi $x \in \mathbb{R}_\alpha$ sayısı için x'in α-karesi $x\dot{\times}x$ şeklindedir ve $x^{\dot{2}}$ ile gösterilir. Yani, $x^{\dot{2}} = x\dot{\times}x = \alpha\{[\alpha^{-1}(x)]^2\}$ dir.

Tanım 2.2.4 [37] Açık bir $(r, s) \subset \mathbb{R}_\alpha$ aralığında $f : (r, s) \longrightarrow \mathbb{R}'_\alpha$ya tanımlı bir fonksiyon olsun. $x, x_0 \in (r, s)$ olmak üzere

$${}^{\alpha}lim_{x\longrightarrow x_0} \frac{f(x)\dot{-}f(x_o)}{x\dot{-}x_0}$$

olacak şeklinde α-limiti varsa, bu değere f fonksiyonunun x_0 noktasındaki α-türevi denir ve f_α^* ile gösterilir.

Eğer f fonksiyonu x_0 noktasında α-türevlenebilir ise f aynı noktada α-diferensiyellenebilir. Ayrıca bu limit değeri α-üreteci yardımıyla

$$\begin{aligned} f_\alpha^*(x_o) =^* \lim_{x\longrightarrow a} \frac{f(x)\dot{-}f(a)}{x\dot{-}x_o}. &= \lim_{x\longrightarrow a} \alpha\left\{\frac{\alpha^{-1}(f(x))-\alpha^{-1}(f(a))}{\alpha^{-1}(x)-\alpha^{-1}(a)}\right\} \\ &= \lim_{x\longrightarrow a} \alpha\left\{\frac{\alpha^{-1}(f(x))-\alpha^{-1}(f(a))}{x-a}\frac{x-a}{\alpha^{-1}(x)-\alpha^{-1}(a)}\right\} \\ &= \alpha\left\{\frac{(\alpha^{-1}of(x))'(a)}{(\alpha^{-1})'(a)}\right\} \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

şeklinde hesaplanır. Bu işlem n kere tekrarlanırsa, verilen noktada n. mertebeden α türev elde edilir. O halde $f_a^{*n}(a)$ varsa

$$f_a^{*n}(x_o) = \alpha\left\{\frac{(\alpha^{-1}of_a^{*(n-1)})'(x_o)}{(\alpha^{-1})'(x_o)}\right\},\ n = 1, 2, ...$$

Sonuç 2.2.1 [37] f_a^{*n} türev operatörü doğrusal lineer bir operatördür. $c \in \mathbb{R}_\alpha$ sabit olmak üzere $f_a^{*n}(g+h) = f_a^{*n}g + f_a^{*n}h$, ve $c\dot{\times}f_a^{*n}(g) = f_a^{*n}c\dot{\times}g$ eşitlikleri geçerlidir.

2.3 $*$-Analiz

α, β keyfi seçilen üreteçler ve $*$(star) sıralı aritmetik çiftidir, yani α-aritmetik ve β-aritmetik. Bu çalışma boyunca aşağıdaki notasyonlar kullanılacaktır.

	α-Aritmetik	β-Aritmetik
Gösterim	A	B
Toplam	$\dot{+}$	$\ddot{+}$
Fark	$\dot{-}$	$\ddot{-}$
Çarpım	$\dot{\times}$	$\ddot{\times}$
Bölüm	$\dot{/}$	$\ddot{/}$
Sıralama	$\dot{<}$	$\ddot{<}$

α-aritmetik için verilen bütün tanımlar β-aritmetik için de geçerlidir. $*$-hesaplama tarzında α-aritmetik tanım kümesinin elemanları, β-aritmetik değer kümesinin elemanları için kullanılır [23].

Uyarı 2.3.1 [23] α ve β üreteçlerini birim fonksiyon olarak seçebiliriz, peki ya aynı değilse? Bu durumda, M. Grossman ve R. Katz, bu soruyla ilgili izomorfizmin tanımını vermiştir.

Tanım 2.3.1 [23] α-aritmetikten β-aritmetiğe tanımlanan izomorfizma dönüşümü

1) ι fonksiyonu, bire-birdir.

2) ι fonksiyonu, $\mathbb{R}_\alpha$'dan $\mathbb{R}_\beta$ üzerinedir.

3) $\mathbb{R}_\alpha$'dan seçilmiş herhangi u ve v'ler için,

$$\begin{array}{rcl}
\iota(u\dot{+}v) & = & \iota(u)\ddot{+}\iota(v), \\
\iota(u\dot{-}v) & = & \iota(u)\ddot{-}\iota(v), \\
\iota(u\dot{\times}v) & = & \iota(u)\ddot{\times}\iota(v), \\
\iota(u\dot{/}v) & = & \iota(u)\ddot{/}\iota(v), \ v \neq \dot{0}, \\
u\dot{<}v & \Leftrightarrow & \iota(u)\ddot{<}\iota(v)
\end{array}$$

özelliklerini sağlayan bir tek ι(iota) fonksiyonudur. α ve β'nın değer kümesi sırasıyla $\mathbb{R}_\alpha$ ve $\mathbb{R}_\beta$ olmak üzere tüm $x \in \mathbb{R}_\alpha$ için

$$\iota(x) = \beta\{\alpha^{-1}(x)\}$$

şeklindedir. Bu durumda her n tamsayısı için

$$\iota(\dot{n}) = \ddot{n}$$

ifadesi geçerlidir. Örneğin,

$$u\dot{+}v = \iota^{-1}\{\iota(u)\ddot{+}\iota(v)\}$$

şeklindedir.

Tanım 2.3.2 [62] α bir üreteç ve $x, y \in \mathbb{R}_\alpha$ olsun. Bu durumda aşağıdaki şekilde ifade edilen kümelere, α-aralıklar denir,

1. $\dot{(}x, y\dot{)} := \{z \in \mathbb{R}_\alpha : x\dot{<}z\dot{<}y\}$,

2. $\dot{(}x, y\dot{]} := \{z \in \mathbb{R}_\alpha : x\dot{<}z\dot{\leq}y\}$,

3. $\dot{[}x, y\dot{)} := \{z \in \mathbb{R}_\alpha : x\dot{\leq}z\dot{<}y\}$,

4. $\dot{[}x,y\dot{]} := \{z \in \mathbb{R}_\alpha : x \dot{\leq} z \dot{\leq} y\}$,

5. $\dot{(}x, \dot{+}\dot{\infty}\dot{)} := \{z \in \mathbb{R}_\alpha : x \dot{<} z \dot{<} \dot{+}\dot{\infty}\}$,

6. $\dot{(}\dot{-}\dot{\infty}, y\dot{)} := \{z \in \mathbb{R}_\alpha : \dot{-}\dot{\infty} \dot{<} z \dot{<} y\}$,

7. $\dot{[}x, \dot{+}\dot{\infty}\dot{)} := \{z \in \mathbb{R}_\alpha : x \dot{\leq} z \dot{<} \dot{+}\dot{\infty}\}$,

8. $\dot{(}\dot{-}\dot{\infty}, y\dot{]} := \{z \in \mathbb{R}_\alpha : \dot{-}\dot{\infty} \dot{<} z \dot{\leq} y\}$.

Uyarı 2.3.1 [62] Yukarıda sekiz tane tanımı verilen α-aralıklarını kısaca aşağıdaki gibi gösterebiliriz;

$$(x,y)_\alpha, (x,y]_\alpha, [x,y)_\alpha, [x,y]_\alpha, (x,+\infty)_\alpha, (-\infty,y)_\alpha, [x,+\infty)_\alpha, (-\infty,y]_\alpha.$$

Uyarı 2.3.2 [62] Ayrıca $[x,y]_\alpha, (x,y)_\alpha$ aralıklarına sırasıyla α-kapalı aralık ve α-açık aralık denir.

Tanım 2.3.3 [55] $f : A \subseteq \mathbb{R}_\alpha \to B \subseteq \mathbb{R}_\beta$ bir fonksiyon ve $a \in \mathbb{R}_\alpha$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} {}^{*}\lim_{x \longrightarrow a} = b \quad \Longleftrightarrow \quad & \forall \varepsilon \ddot{>} \ddot{0},\ \exists \delta \dot{>} \dot{0} : \forall x \in \mathbb{R}_\alpha, \\ & |x \dot{-} a|_\alpha \dot{<} \delta, \quad |f(x) \ddot{-} b|_\beta \ddot{<} \varepsilon \end{aligned}$$

olacak şekilde bir $b \in \mathbb{R}_\beta$ elemanı vardır ve bu b sayısına f fonksiyonun $*$-limiti denir. ${}^{*}\lim_{x \longrightarrow a} = b$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.3.4 [37] Bir $f : A \subseteq \mathbb{R}_\alpha \to B \subseteq \mathbb{R}_\beta$ fonksiyonuna,

$${}^{*}\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

olması durumunda $a \in A$ noktasında $*$-süreklidir denir. f, A'nın her noktasında $*$-sürekli ise o zaman f, A üzerinde $*$-süreklidir denir.

Tanım 2.3.5 [19] $X \subset \mathbb{R}(N)_\alpha$, $f : X \to X \subset \mathbb{R}(N)_\beta$ fonksiyonu ve $a \in X$ noktası verilsin. Herhangi $\varepsilon \ddot{>} \ddot{0}$ sayısına karşılık $|x \dot{-} a|_\alpha \dot{<} \delta$ olan her $x \in X$ için $|f(x) \ddot{-} f(a)|_\beta \ddot{<} \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $\delta = \delta(\varepsilon) \dot{>} \dot{0}$ sayısı bulunabiliyorsa f fonksiyonuna $a \in X$ noktasında $*$-süreklidir denir.

Tanım 2.3.6 [11] Bir f fonksiyonunun $a \in X$ noktasında $*$-sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul $a \in X$ noktasının f fonksiyonunun tanım kümesinin elemanı ve

$${}^{*}\lim_{x \to x_a} f(x) = f(a)$$

olmasıdır.

Tanım 2.3.7 [37] Verilen bir fonksiyonun aşağıdaki gibi $*$-limiti varsa, bu ifade $f^*(a)$ ile gösterilir ve f fonksiyonunun a'da $*$-türevi olarak adlandırılır. Yani, f fonksiyonunun a'da $*$-türevi

$$\begin{aligned} {}^*\lim_{x\longrightarrow a} \frac{f(x)\ddot{-}f(a)}{\imath(x)\ddot{-}\imath(a)}\ddot{} &= \lim_{x\longrightarrow a} \beta\left\{\frac{\beta^{-1}(f(x))-\beta^{-1}(f(a))}{\alpha^{-1}(x)-\alpha^{-1}(a)}\right\} \qquad (2.3.1)\\ &= \lim_{x\longrightarrow a} \beta\left\{\frac{\beta^{-1}(f(x))-\beta^{-1}(f(a))}{x-a}\frac{x-a}{\alpha^{-1}(x)-\alpha^{-1}(a)}\right\} \\ &= \beta\left\{\frac{(\beta^{-1}of(x))'(a)}{(\alpha^{-1})'(a)}\right\} \end{aligned}$$

şeklindedir.

Tanım 2.3.8 [37] f fonksiyonu $[r,s]$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere $L \in \mathbb{R}_\alpha$ ve $\epsilon\dot{>}\dot{0}$ için verilen aralıkta en az bir $\wp_\epsilon$ bölüntüsü vardır öyle ki

$$d_\alpha(N(f;\wp),L)\dot{\leq}\epsilon$$

koşulu her $\wp \subset \wp_\epsilon$ için sağlanırsa f fonksiyonuna Riemann anlamında α integrallenebilir denir ve

$$\int_r^s f(x)^{dx}$$

şeklinde gösterilir. Açıkça görülür ki f fonksiyonu klasik anlamda Riemann integrallenebilr ise aynı aralıkta α integrallenebilirdir. Ayrıca α üretecinin tanımından eğer f klasik anlamda Rieman integrallenebilir ise $(\alpha^{-1}\circ f)$ bileşke fonksiyonu da Riemann integrallenebilirdir ve

$$\int_r^s f(x)^{dx} \;=\; \alpha\left\{\int_r^s(\alpha^{-1}\circ f)(x)dx\right\}$$

elde edilir. Tersine olarak f Riemann integrallenebilir ise

$$\int_r^s f(x)dx \;=\; \alpha^{-1}\left\{\int_r^s(\alpha(f(x))^{dx}\right\}$$

sağlanır. Buradan da klasik yapı ile bu yapı arasında birebir ilişki kurulur. Şimdi, klasik anlamda belirsiz integral yapısına denk olan ve α-antitürev adını vereceğimiz temel integral yapısını inceleyeceğiz. $\int f(x)^{dx} = F(x)$ ifadesinin anlamı $F^*_\alpha(x) = f(x)$'dir. Diğer bir ifadeyle verilen bir f fonksiyonu klasik anlamda integrallenebilir olmak üzere

$$\int f(x)^{dx} \;=\; \alpha\left\{\int(\alpha^{-1}\circ f)(x)dx\right\}\dot{+}C$$

elde edilir ve bu integrale f'nin α-belirsiz integrali denir. Burada α üretecinin tersi sürekli integrallenebilir ve f nin integrallenebilirliğinden $(\alpha^{-1}\circ f)$ integrallenebilirdir.

Tanım 2.3.9 [37]f fonksiyonu $[r,s]$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere her $\epsilon\ddot{>}\ddot{0}$ için verilen aralıkta en az bir $\wp_\epsilon$ bölüntüsü vardır öyle ki

$$d_\beta(N_*(f;\wp),P)\ddot{\leq}\epsilon$$

koşulu her $\wp\subset\wp_\epsilon$ için sağlanırsa f fonksiyonuna Riemann yıldız integrallenebilir ($*-$ *integral*) denir ve

$$_*\int_r^s f(x)dx$$

şeklinde gösterilir. Açıkça görülür ki f fonksiyonu klasik anlamda Riemann integrallenebilr ise aynı aralıkta yıldız integrallenebilirdir ve

$$_*\int_r^s f(x)dx \;=\; \beta\left\{\int_r^s(\beta^{-1}\circ f)(x)dx\right\}$$

yazılır. Tersine f Riemann integrallenebilir ise

$$\int_r^s f(x)dx \;=\; \beta^{-1}\left\{{}_*\int_r^s \beta(f(x))dx\right\}$$

elde edilir. Temel olarak $_*\int f(x)dx = F(x)$ ifadesinin anlamı $F^*(x) = f(x)$'dir. Diğer bir ifade ile verilen bir f fonksiyonunun klasik antitürevi $\int f(x)dx$ olmak üzere f'nin $*$-antitürevi

$$_*\int \beta\{f(x)\}dx \;=\; \beta\left\{\int f(x)dx\right\}\ddot{+}C$$

ve buradan da

$$_*\int f(x)dx \;=\; \beta\left\{\int(\beta^{-1}\circ f)(x)dx\right\}\ddot{+}C$$

olur. Ayrıca β üreteci sürekli olduğundan integrallenebilirdir ve f klasik anlamda integrallenebilir olduğundan bileşke fonksiyon $\beta^{-1}\circ f$ integrallenebilirdir.

Uyarı 2.3.2 Bu tezdeki bazı teorik alt yapılar için yani aralığın Newtonyen olmayan parçalanışı, Newtonyen olmayan alt ve üst toplamlar, bunların özellikleri, $*$-integral vb. kavram ve tanımlar için Grosmann ve Katz'ın [23] kitabına ve Kadak'ın [37] doktora tezine bakılabilir.

Uyarı 2.3.3 Biz bu tez boyunca kullanılan α-integral ve $*$-integral ifadelerini aşağıdaki gibi kabul edeceğiz,

$$\begin{aligned}\int_r^s f(\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b)^{dt} &= \alpha\left\{\int_{\alpha^{-1}(r)}^{\alpha^{-1}(s)}(\alpha^{-1}\circ f)(\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b)dt\right\} \quad (2.3.2)\\ &= \alpha\left\{\int_{\alpha^{-1}(r)}^{\alpha^{-1}(s)}(\alpha^{-1}\circ f\circ\alpha)(t\alpha^{-1}(a)+(1-t)\alpha^{-1}(b))dt\right\}.\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
{}_{*}\int_{r}^{s} f(\alpha(t)\dot{\times} a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times} b)dt &= \beta\left\{\int_{\alpha^{-1}(r)}^{\alpha^{-1}(s)}(\beta^{-1}\circ f)(\alpha(t)\dot{\times} a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times} b)dt\right\} \quad (2.3.3)\\
&= \beta\left\{\int_{\alpha^{-1}(r)}^{\alpha^{-1}(s)}(\beta^{-1}\circ f\circ\alpha)(t\alpha^{-1}(a)+(1-t)\alpha^{-1}(b))dt\right\}.
\end{aligned}
$$

Tanım 2.3.10 [38] $I_\alpha \subseteq \mathbb{R}_\alpha \backslash \{\dot{0}\}$ bir α-aralık olsun. Eğer bir $f : I_\alpha \to \mathbb{R}_\beta$ fonksiyonu her $a, b \in I_\alpha$ için

$$
f(\lambda_1 \dot{\times} a \dot{+} \lambda_2 \dot{\times} b) \ddot{\leq} \theta_1 \ddot{\times} f(a) \ddot{+} \theta_2 \ddot{\times} f(b) \quad (2.3.4)
$$

eşitsizliğini sağlanıyorsa f ye $*$-konveks fonksiyon denir. Burada $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]_\alpha$, $\theta_1, \theta_2 \in [0,1]_\beta$, $\lambda_1 \dot{+} \lambda_2 = \dot{1}$ ve $\theta_1 \ddot{+} \theta_2 = \ddot{1}$.

3. YAPILAN ÇALIŞMALAR

3.1 α Üreteci Yardımıyla Konvekslik ve Temel Tanımları

Tanım 3.1.1 L_α bir α-lineer uzay ve $A \subseteq L_\alpha$ olsun. Eğer her $x, y \in A$ için

$$B_\alpha = \{z \in L_\alpha : z = \theta_1 \dot{\times} x \dot{+} \theta_2 \dot{\times} y,\ \dot{0} \dot{\leq} \theta_1, \theta_2 \dot{\leq} \dot{1}\} \subseteq A$$

ise, A kümesine α-konveks küme denir. Eğer $z \in B_\alpha$ ise, x, y nin katsayıları için $\theta_1 \dot{+} \theta_2 = \dot{1}$ dir.

Tanım 3.1.2 I, $\mathbb{R}$'de bir aralık ve $f : I \longrightarrow \mathbb{R}_\alpha$ fonksiyon olsun. Bu durumda her $x, y \in I$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$f(tx + (1-t)y) \dot{\leq} \alpha(t) \dot{\times} f(x) \dot{+} \alpha(1-t) \dot{\times} f(y) \tag{3.1.1}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f ye α-konveks fonksiyon denir. (3.1.1) eşitsizliğini, α üretecinin tanımına göre yazarsak

$$f\big(tx + (1-t)y\big) \dot{\leq} \alpha \Big\{ t\alpha^{-1}\{f(x)\} + (1-t)\alpha^{-1}\{f(y)\} \Big\}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Eğer 3.1.1 eşitsizliği $x \neq y$ için sağlanıyorsa, f fonksiyonuna kesin α-konveks fonksiyon denir. Eğer (3.1.1) eşitsizliği yön değiştirirse, o zaman f-ye α-konkav fonksiyon denir. Eğer α-konkav fonksiyon $x \neq y$ için sağlanıyorsa, f fonksiyonuna kesin α-konkav fonksiyon denir.

Sonuç 3.1.1 Tanım 3.1.2 de $\alpha = Id$ alınırsa, o zaman konveks fonksiyon tanımını elde ederiz.

Sonuç 3.1.2 Tanım 3.1.2 de $\alpha = exp$ alınırsa, (3.1.1) eşitsizliği A-G konveks fonksiyonuna indirgenir.

Sonuç 3.1.3 Tanım 3.1.2 de $\alpha = q_r$ alınırsa, (3.1.1) eşitsizliği r konveks fonksiyonuna indirgenir.

Sonuç 3.1.4 Tanım 3.1.2 de $\alpha = g^{-1}$ olarak alınırsa, (3.1.1) eşitsizliği g konveks fonksiyonuna dönüşür.

Tanım 3.1.3 $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}_\alpha$ bir fonksiyon ve her $x, y \in \mathbb{R}^+, t \in [0, 1]$, $\alpha(t)^{\dot{s}} \dot{+} \alpha(1-t)^{\dot{s}} = \dot{1}$ olsun. Bu durumda $\dot{s} \in [\dot{0}, \dot{1}]$ sabiti için

$$f(tx + (1-t)y) \dot{\leq} \alpha(t)^{\dot{s}} \dot{\times} f(x) \dot{+} (\alpha(1) \dot{-} \alpha(t)^{\dot{s}}) \dot{\times} f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyonuna birinci anlamda s_α-konveks fonksiyon denir. Bu kümeye ait olan fonksiyonlar sınıfını $K^1_{s_\alpha}$ ile göstereceğiz.

Tanım 3.1.4 $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}_\alpha$ fonksiyonu, $x, y \in \mathbb{R}^+, t \in [0,1]$, $\alpha(t)^{\dot{s}} \dot{+} \alpha(1-t)^{\dot{s}} = \dot{1}$ olsun. Bu durumda $\dot{s} \in (\dot{0}, \dot{1}]$ sabiti için

$$f(tx + (1-t)y) \dot{\leq} \alpha(t)^{\dot{s}} \dot{\times} f(x) \dot{+} (\alpha(1) \dot{-} \alpha(t))^{\dot{s}} \dot{\times} f(y) \tag{3.1.2}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyonuna ikinci anlamda s_α-konveks fonksiyon denir. Bu kümeye ait olan fonksiyonlar sınıfını $K^2_{s_\alpha}$ ile göstereceğiz.

Sonuç 3.1.5 Eğer tanım 3.1.4 te $\alpha = Id$ seçilirse, (3.1.2) eşitsizliği ikinci anlamda s-konveks fonksiyonuna dönüşür.

Sonuç 3.1.6 Eğer tanım 3.1.4 te $\dot{s} = \dot{1}$ seçilirse, (3.1.2) eşitsizliği α-konveks fonksiyonuna dönüşür.

Sonuç 3.1.7 Eğer tanım 3.1.4 te $\alpha = Id$ ve $s = 1$ seçilirse, (3.1.2) eşitsizliği konveks fonksiyonuna indirgenir.

Tanım 3.1.5 $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}_\alpha$ bir fonksiyon olmak üzere, her $x \in (a,b)$ için $f(x) \dot{>} \dot{0}$ ise f fonksiyonuna α-negatif olmayan fonksiyon denir.

Tanım 3.1.6 $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_\alpha$ α-negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in [a,b]$, $\lambda \in (0,1)$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \dot{\leq} f(x) \dot{+} f(y) \tag{3.1.3}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, o zaman f fonksiyonuna $[a,b]$ üzerinde P_α fonksiyon denir.

Uyarı 3.1.1 P_α fonksiyonu aslında α-negatif olmayan fonksiyondur.

Gerçekten $f : (a,b)_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}_\alpha$ bir fonksiyon olmak üzere, her $x \in (a,b)_\alpha$ için

$$f(\alpha(t) \dot{\times} x \dot{+} \alpha(1-t) \dot{\times} y) \dot{\leq} f(x) \dot{+} (y) \tag{3.1.4}$$

eşitsizliğinde $x = y$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
\alpha^{-1}(f(x)) &\leq \alpha^{-1}(\alpha(\alpha^{-1}(f(x) + \alpha^{-1}(f(x))) \\
\alpha^{-1}(f(x)) &\leq 2\alpha^{-1}(f(x)) \\
\alpha^{-1}(f(x)) &\geq 0 \\
f(x) &\dot{\geq} \alpha(0)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise P_α nın α-negatif olmayan bir fonksiyon olduğunu gösterir.

Sonuç 3.1.8 Eğer tanım 3.1.6 da $\alpha = Id$ seçilirse, (3.1.3) eşitsizliği P fonksiyonuna dönüşür.

Sonuç 3.1.9 Eğer tanım 3.1.6 da $\alpha = exp$ seçilirse, (3.1.3) eşitsizliği çarpımsal P fonksiyonuna dönüşür.

Tanım 3.1.7 $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_\alpha$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in [a, b]$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \dot{\leq} \frac{f(x) \dot{+} f(y)}{2}. \tag{3.1.5}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, o zaman f ye $[a, b]$ üzerinde J_α-konveks fonksiyon denir.

Sonuç 3.1.10 Eğer tanım 3.1.7 de $\alpha = Id$ seçilirse, (3.1.5) eşitsizliği J konveks fonksiyonuna dönüşür.

Tanım 3.1.8 Eğer her $x, y \in [a, b]$, $x \neq y$ ve $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_\alpha$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \dot{<} \frac{f(x) \dot{+} f(y)}{2}. \tag{3.1.6}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, o zaman f ye $[a, b]$ üzerinde, kesin J_α-konveks fonksiyon denir.

Sonuç 3.1.11 Eğer tanım 3.1.8 de $\alpha = Id$ seçilirse, (3.1.6) eşitsizliği kesin J-konveks fonksiyonuna dönüşür.

Tanım 3.1.9 $h_\alpha \not\equiv \alpha(0)$ ve $h_\alpha : J \longrightarrow \mathbb{R}_\alpha$ α-negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in [a, b]$, $t \in (0, 1)$ için

$$f(tx + (1-t)y) \dot{\leq} h_\alpha(t) \dot{\times} f(x) \dot{+} h_\alpha(1-t) \dot{\times} f(y) \tag{3.1.7}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, o zaman $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_\alpha$ fonksiyonuna h_α-konveks fonksiyon denir. Burada $[a, b]$ ve J $\mathbb{R}$'de iki aralık ve $(0, 1) \subseteq J$ dır.

Sonuç 3.1.12 Eğer tanım 3.1.9 da $\alpha = Id$ seçilirse, (3.1.7) eşitsizliği h-konveks fonksiyonuna dönüşür.

Sonuç 3.1.13 Eğer tanım 3.1.9 da $h_\alpha(t) = t$ seçilirse, (3.1.7) eşitsizliği α-konveks fonksiyonuna dönüşür.

Sonuç 3.1.14 Eğer tanım 3.1.9 da $\dot{s} \in (\dot{0}, \dot{1})$, $h_\alpha(t) = \alpha(t)^{\dot{s}}$ seçilirse, (3.1.7) eşitsizliği ikinci anlamda s_α-konveks fonksiyonuna dönüşür.

Sonuç 3.1.15 Eğer tanım 3.1.9 da $h_\alpha(t) = \dot{1}$ seçilirse, (3.1.7) eşitsizliği P_α fonksiyonuna dönüşür.

Sonuç 3.1.16 Eğer tanım 3.1.9 da $\alpha = Id$ alınırsa $h_\alpha(t) = h(t)$ olup, $h(t) = 1$ seçilirse, (3.1.7) eşitsizliği P fonksiyonuna dönüşür.

Sonuç 3.1.17 Eğer tanım 3.1.9 da $\alpha = Id$ alınırsa $h_\alpha(t) = h(t)$ olup, $h(t) = t$ seçilirse, (3.1.7) eşitsizliği konveks fonksiyonuna dönüşür.

Tanım 3.1.10 $f : (a,b) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_\alpha$ bir fonksiyon olsun. O zaman her $x_1, x_2 \in (a,b)$ için:

a) Eğer $x_2 > x_1$ olduğunda $f(x_2) \dot{>} f(x_1)$ ise, f fonksiyonuna (a,b) üzerinde α-artan denir.

b) Eğer $x_2 > x_1$ olduğunda $f(x_2) \dot{<} f(x_1)$ ise, f fonksiyonuna (a,b) üzerinde α-azalan denir.

c) Eğer $x_2 > x_1$ olduğunda $f(x_2) \dot{\geq} f(x_1)$ ise, f fonksiyonuna (a,b) üzerinde α-azalmayan denir.

d) Eğer $x_2 > x_1$ olduğunda $f(x_2) \dot{\leq} f(x_1)$ ise, f fonksiyonuna (a,b) üzerinde α-artmayan denir.

3.2 Id_α Konveks Fonksiyon ve Bazı Özellikleri

Tanım 3.2.1 $[a,b]_\alpha \subseteq \mathbb{R}_\alpha$ bir α-kapalı aralık ve $f : [a,b]_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in [a,b]_\alpha$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$f(\alpha(t) \dot{\times} x \dot{+} \alpha(1-t) \dot{\times} y) \leq t f(x) + (1-t) f(y) \tag{3.2.1}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, o zaman f' ye Id_α-konveks fonksiyon denir. Eğer (3.2.1) eşitsizliği yön değiştirirse, o zaman f ye Id_α-konkav fonksiyon denir. Ayrıca $x \neq y$ için (3.2.1) eşitsizliği sağlanıyorsa, f ye kesin Id_α-konveks denir. Eğer $x \neq y$ için eşitsizlik yön değiştirirse, o zaman f ye kesin Id_α-konkav fonksiyon denir.

(3.2.1) eşitsizliğini α üreteci tanımıyla,

$$f\Big(\alpha\Big\{t\alpha^{-1}(x) + (1-t)\alpha^{-1}(y)\Big\}\Big) \leq t f(x) + (1-t) f(y) \tag{3.2.2}$$

şeklinde de yazabiliriz.

Sonuç 3.2.1 Eğer tanım 3.2.1 de $\alpha = Id$ seçilirse, (3.2.1) eşitsizliği konveks fonksiyonuna dönüşür.

Sonuç 3.2.2 Eğer tanım 3.2.1 de $\alpha = q_p$ alınırsa, (3.2.1) eşitsizliği p konveks fonksiyonuna dönüşür.

Sonuç 3.2.3 Eğer tanım 3.2.1 de $\alpha = exp$ seçilirse, (3.2.1) eşitsizliği G-A konveks fonksiyonuna dönüşür.

Sonuç 3.2.4 Eğer tanım 3.2.1 de $\alpha = \varphi^{-1}$ seçilirse, (3.2.1) eşitsizliği $M_\varphi A$ konveks fonksiyonuna dönüşür.

Sonuç 3.2.5 Eğer tanım 3.2.1 de $\alpha = \frac{1}{x}$ seçilirse, (3.2.1) eşitsizliği Harmonik konveks fonksiyonuna dönüşür..

Önerme 3.2.1 $\mathbb{R}_\alpha$ üzerinde $I_\alpha := [x, y]_\alpha$ aralığı bir α-konveks kümedir.

İspat: $u \in \{\theta_1 \dot{\times} x \dot{+} \theta_2 \dot{\times} y : \theta_1, \theta_2 \in [0,1]_\alpha, \theta_1 \dot{+} \theta_2 = \alpha(1)\}$ olsun. O halde $u = \theta_1 \dot{\times} x \dot{+} \theta_2 \dot{\times} y$ dir. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
u &= \alpha\Big\{\alpha^{-1}(\theta_1)\alpha^{-1}(x) + \alpha^{-1}(\theta_2)\alpha^{-1}(y)\Big\} \\
\alpha^{-1}\{u\} &= \alpha^{-1}(\theta_1)\alpha^{-1}(x) + \alpha^{-1}(\theta_2)\alpha^{-1}(y) \\
&\leq \min\{\alpha^{-1}(x), \alpha^{-1}(y)\} = \alpha^{-1}(x) \leq \max\{\alpha^{-1}(x), \alpha^{-1}(y)\} = \alpha^{-1}(y) \\
&\Longleftrightarrow \alpha^{-1}(x) \leq \alpha^{-1}(u) \leq \alpha^{-1}(y) \\
&\Longleftrightarrow x \dot{\leq} u \dot{\leq} y \\
&\Longleftrightarrow u \in [x, y]_\alpha.
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. Buradan aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.2.6 $A \subseteq \mathbb{R}_\alpha$ nın α-konveks küme olması için gerek ve yeter koşul her $x, y \in A$, $x \dot{\leq} y$ için $[x, y]_\alpha \subseteq A$ olmasıdır.

Teorem 3.2.1 $A \subseteq \mathbb{R}_\alpha$ nın α-konveks küme olması için gerek ve yeter koşul her $a, b \in A$, $\theta_1, \theta_2 \in [0,1]_\alpha$ ve $\theta_1 \dot{+} \theta_2 = \alpha(1)$ için

$$\theta_1 \dot{\times} a \dot{+} \theta_2 \dot{\times} b \in A$$

bağıntısının doğru olmasıdır. Başka bir ifade ile yukarıdaki durumu aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$A \subseteq \mathbb{R}_\alpha$ olsun. O zaman her $a, b \in A$ ve $\theta_1 \dot{+} \theta_2 = \alpha(1)$, $\theta_1, \theta_2 \in [0,1]_\alpha$ için

$$\theta_1 \dot{\times} a \dot{+} \theta_2 \dot{\times} b \in A$$

olması için gerek ve yeter koşul her $a, b \in A$ ve $t \in [0,1]$ için

$$\alpha(t)\dot{\times}a \dot{+} \alpha(1-t)\dot{\times}b \in A$$

olmasıdır.

İspat: İlk olarak, her $a, b \in A$ ve $\theta_1, \theta_2 \in [0,1]_\alpha$, $\theta_1 \dot{+} \theta_2 = \alpha(1)$ için

$$\theta_1 \dot{\times} a \dot{+} \theta_2 \dot{\times} b \in A$$

olduğunu kabul edelim. $\theta_1, \theta_2 \in [0,1]_\alpha$ olduğundan,

$$\alpha(\alpha^{-1}(\theta_1) + \alpha^{-1}(\theta_2)) = \alpha(1)$$

yazılır. α nın birebirliğinden,

$$\alpha^{-1}(\theta_1) + \alpha^{-1}(\theta_2) = 1$$

yazılır. Daha sonra $\theta_1 = \alpha(t)$, $\theta_2 = \alpha(1-t)$ seçilir ve yerine yazılırsa

$$\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b \in A$$

elde edilir. Ayrıca tersi de doğrudur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.2 $f : [a,b]_\alpha \subset \mathbb{R}_\alpha \to \mathbb{R}$ fonksiyonun Id_α-konveks olması için gerek ve yeter koşul $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_\alpha$ için,

$$f \circ \alpha : \alpha^{-1}([a,b]_\alpha) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

fonksiyonunun konveks olmasıdır.

İspat: İlk olarak, f 'nin Id_α-konveks fonksiyon olduğunu kabul edelim. O halde her $t \in [0,1]$ ve $a, b \in [a,b]_\alpha$ için

$$f(\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Buradan α-toplam ve α-çarpım tanımından

$$\begin{aligned} f\Big(\alpha(t\alpha^{-1}(a) + (1-t)\alpha^{-1}(b))\Big) &\leq tf(a) + (1-t)f(b) \\ (f \circ \alpha)(t\alpha^{-1}(a) + (1-t)\alpha^{-1}(b)) &\leq t(f \circ \alpha)(\alpha^{-1}(a)) + (1-t)(f \circ \alpha)(\alpha^{-1}(b)) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $\big(f \circ \alpha\big)$ nin $\alpha^{-1}([a,b]_\alpha)$ da konveks olduğunu gösterir. Tersi de benzer şekilde yapılır. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

3.2.1 Id_α Hermite-Hadamard Eşitsizliği ve Bazı Özellikleri

Teorem 3.2.3 $(a,b)_\alpha$, $\mathbb{R}_\alpha$ da bir açık aralık ve $f:(a,b)_\alpha \to \mathbb{R}$, Id_α-konveks fonksiyon olsun. O zaman her $a,b \in [a,b]_\alpha$ için

$$f\Big(\alpha\Big(\frac{1}{2}\Big)\dot{\times}(a\dot{+}b)\Big) \leq \int_0^1 f(\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b)dt \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{3.2.3}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat: f bir Id_α-konveks fonksiyon olduğundan

$$f(\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b) \leq tf(a)+(1-t)f(b) \tag{3.2.4}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Daha sonra (3.2.4) eşitsizliğinde $t\in[0,1]$ üzerinde integral alınırsa, o zaman $a,b\in(a,b)_\alpha$ için

$$\begin{aligned}\int_0^1 f\big(\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b\big)dt &\leq \int_0^1 \big(tf(a)+(1-t)f(b)\big)dt\\ \int_0^1 f\big(\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b\big)dt &\leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \qquad (3.2.5)\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer (3.2.4) te $t=\frac{1}{2}$, $a=\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b$ ve $b=\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a$ seçilirse,

$$\begin{aligned}f\big(\alpha(\frac{1}{2})\dot{\times}a\dot{+}\alpha(\frac{1}{2})\dot{\times}b\big) &= f(\alpha(\frac{1}{2})\dot{\times}(a\dot{+}b))\\ &= f\big(\alpha(\frac{1}{2})\dot{\times}(\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b)\dot{+}\alpha(\frac{1}{2})\dot{\times}(\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b)\big)\\ &\leq \frac{1}{2}[f(\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b)+f(\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b)] \qquad (3.2.6)\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer (3.2.6) da $[0,1]$ üzerinde t ye göre integral alınırsa

$$\int_0^1 f\big(\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b\big)dt = \int_0^1 f\big(\alpha(1-t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(t)\dot{\times}b\big)dt$$

olur ve (3.2.5) eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}f\big(\alpha(\frac{1}{2})\dot{\times}a\dot{+}\alpha(\frac{1}{2})\dot{\times}b\big) &\leq \int_0^1 f\big(\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b\big)dt\\ &= \int_0^1 f(\lambda_1\dot{\times}a\dot{+}\lambda_2\dot{\times}b)dt \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. Bundan sonra (3.2.3) eşitsizliğine Id_α-Hermite-Hadamard eşitsizliği diyeceğiz.

Sonuç 3.2.7 Eğer teorem 3.2.3 te $\alpha = Id$ olarak alınırsa, (3.2.3) eşitsizliği Hermite-Hadamard eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 3.2.8 Eğer teorem 3.2.3 te $\alpha = exp$ olarak alınırsa, (3.2.3) eşitsizliği G-G konveks fonksiyonu için Hermite-Hadamard eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 3.2.9 Eğer teorem 3.2.3 te $\alpha = \varphi^{-1}$ olarak alınırsa, (3.2.3) eşitsizliği $M_\varphi A$ konveks fonksiyonu için Hermite-Hadamard eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 3.2.10 Eğer teorem 3.2.3 te $\alpha = \frac{1}{x}$ olarak alınırsa, (3.2.3) eşitsizliği harmonik konveks fonksiyonu için Hermite-Hadamard eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 3.2.11 Eğer teorem 3.2.3 te $\alpha = q_p$ olarak alınırsa, (3.2.3) eşitsizliği p konveks fonksiyonu için Hermite-Hadamard eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 3.2.4 $(a,b)_\alpha$ bir α açık aralık, $v, u : (a,b)_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}_\alpha$ birinci dereceden α-türevli, α-türevi de α-sürekli iki fonksiyon ve $a, b, x \in (a,b)_\alpha$ olsun. Bu durumda

$$\int_a^b u(x)\dot{\times}v^*(x)^{dx} = u(x)\dot{\times}v(x)|_a^b \dot{-} \int_a^b v(x)\dot{\times}u^*(x)^{dx} \tag{3.2.7}$$

ya da $v^*(x)^{dx} ={}^{dv}$ ve $u^*(x)^{dx} ={}^{du}$ için

$$\int u^{dv} = u\dot{\times}v\dot{-}\int v^{du} \tag{3.2.8}$$

eşitlikleri doğrudur.

İspat: Kabul edelim ki $f, g : (a,b)_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}_\alpha$ iki fonksiyon ve $f(x) := u$, $g(x) := v$ olsun. f, g α-türevli iki fonksiyon olduğundan

$$f^*(x)^{dx} ={}^{du}, \; g^*(x)^{dx} ={}^{dv}$$

elde edilir. Eğer

$$[f(x)\dot{\times}g(x)]^* = f^*(x)\dot{\times}g(x)\dot{+}f(x)\dot{\times}g^*(x) \tag{3.2.9}$$

eşitliği dikkate alınırsa, o zaman

$$f^*(x)\dot{\times}g(x) = [f(x)\dot{\times}g(x)]^*\dot{-}f(x)\dot{\times}g^*(x) \tag{3.2.10}$$

yazılır. Buradan, (3.2.10) nun x e göre α-integrali alınırsa

$$\int f^*(x)\dot{\times}g(x)^{dx} = \int [f(x)\dot{\times}g(x)]^{*dx}\dot{-}\int f(x)\dot{\times}g^*(x)^{dx}$$

ve

$$\int f(x)\dot{\times}g^*(x)^{dx} = [f(x)\dot{\times}g(x)]\dot{-}\int f^*(x)\dot{\times}g(x)^{dx} \tag{3.2.11}$$

eşitlikleri bulunur. $f(x) = u$, $g(x) = v$ olduğundan, $g^*(x)^{dx} =^{dv}$ ve $f^*(x)^{dx} =^{du}$ dir. Bunlar (3.2.11) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\int u^{dv} = u\dot{\times}v\dot{-}\int v^{du}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. Bundan sonra bu intagrale biz α-kısmi integrasyon adını vereceğiz.

Lemma 3.2.1 $(a,b)_\alpha$, $\mathbb{R}_\alpha$ de bir α-açık aralık ve $f:(a,b)_\alpha \to \mathbb{R}_\alpha$ bir fonksiyon olsun. O zaman her $a,b \in (a,b)_\alpha$ ve $t \in [0,1]_\alpha$ için,

$$\frac{b\dot{-}a}{\dot{2}}.\dot{\times}\int_{\dot{0}}^{\dot{1}}(\dot{1}\dot{-}\dot{2}\dot{\times}t)\dot{\times}f^*(t\dot{\times}a\dot{+}(\dot{1}\dot{-}t)\dot{\times}b)^{dt} = \frac{f(a)\dot{+}f(b)}{\dot{2}}.\dot{-}\frac{\dot{1}}{b\dot{-}a}.\dot{\times}\int_a^b f(x)^{dx} \tag{3.2.12}$$

eşitliği doğrudur.

İspat: Her $a,b \in (a,b)_\alpha$ ve $t \in [0,1]_\alpha$ için,

$$J := \int_{\dot{0}}^{\dot{1}}(\dot{1}\dot{-}\dot{2}\dot{\times}t)\dot{\times}f(t\dot{\times}a\dot{+}(\dot{1}\dot{-}t)\dot{\times}b)^{dt}$$

olsun. Şimdi, J üzerinde α-kısmı integrasyon uygulanır ve

$$u = (\dot{1}\dot{-}\dot{2}\dot{\times}t) \text{ ve } {}^{dv} = f^*(t\dot{\times}a\dot{+}(\dot{1}\dot{-}t)\dot{\times}b)^{dt}$$

seçilirse, o zaman

$${}^{du} = \dot{-}\dot{2}^{dt} \text{ ve } v = f(t\dot{\times}a\dot{+}(\dot{1}\dot{-}t)\dot{\times}b)\dot{\times}\frac{\dot{1}}{a\dot{-}b}.$$

yazılır. Daha sonra, α-kısmı integrasyondan

$$\begin{aligned}\int_{\dot{0}}^{\dot{1}}(\dot{1}\dot{-}\dot{2}\dot{\times}t)\dot{\times}f^*(t\dot{\times}a\dot{+}(\dot{1}\dot{-}t)\dot{\times}b)^{dt} =& (\dot{1}\dot{-}\dot{2}t)\dot{\times}f(t\dot{\times}a\dot{+}(\dot{1}\dot{-}t)\dot{\times}b)\dot{\times}\frac{\dot{1}}{a\dot{-}b}.\Big|_{\dot{0}}^{\dot{1}} \\ &\dot{+}\dot{2}\dot{\times}\frac{\dot{1}}{a\dot{-}b}.\dot{\times}\int_{\dot{0}}^{\dot{1}} f(t\dot{\times}a\dot{+}(\dot{1}\dot{-}t)\dot{\times}b)^{dt}\end{aligned} \tag{3.2.13}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\int_{\dot{0}}^{\dot{1}} f(t\dot{\times}a\dot{+}(\dot{1}\dot{-}t)\dot{\times}b)^{dt} = \frac{\dot{1}}{b\dot{-}a}.\dot{\times}\int_a^b f(x)^{dx}$$

eşitliği göz önüne alındığında istenilen sonuca ulaşılır.

Önerme 3.2.2 $(a,b)_\alpha$, $\mathbb{R}_\alpha$ da bir α-aralık ve $f:(a,b)_\alpha \to \mathbb{R}$ herhangi Id_α-konveks fonksiyon olsun. O zaman her $a,b \in (a,b)_\alpha$ ve $t \in [0,1]$ için

$$\int_0^1 f(\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b)dt = \frac{-1}{\alpha^{-1}(b)-\alpha^{-1}(a)}\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)} f(\alpha(u))du \qquad (3.2.14)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Her $a,b \in (a,b)_\alpha$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$K := \int_0^1 f\big(\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b\big)dt$$

olsun. Başka bir ifade ile

$$K = \int_0^1 f\Big(\alpha\big\{\alpha^{-1}(\alpha(t))\alpha^{-1}(a)+\alpha^{-1}(\alpha(1-t))\alpha^{-1}(b)\big\}\Big)dt$$

yazılabilir. Eğer $\alpha^{-1}(\alpha(t))\alpha^{-1}(a))+\alpha^{-1}(\alpha(1-t))\alpha^{-1}(b))=u$ seçilirse

$$K = \int_0^1 f(\alpha(u))dt$$

olup, $u = t\alpha^{-1}(a)+(1-t)\alpha^{-1}(b)$ yeniden yazılırsa,

$$du = [\alpha^{-1}(a)-\alpha^{-1}(b)]dt \Rightarrow dt = \frac{-1}{\alpha^{-1}(b)-\alpha^{-1}(a)}du$$

bulunur. Böylece

$$K = \frac{1}{\alpha^{-1}(b)-\alpha^{-1}(a)}\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)} f(\alpha(u))du$$

yani,

$$\int_0^1 f(\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b)dt = \frac{1}{\alpha^{-1}(b)-\alpha^{-1}(a)}\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)} f(\alpha(u))du$$

eşitliği elde edilir. Buradan ispat tamamlanmış olur.

3.3 α_α Konveks Fonksiyon ve Bazı Özellikleri

Tanım 3.3.1 $[a,b]_\alpha$, $\mathbb{R}_\alpha$'da kapalı bir α aralık olsun. Eğer $f:[a,b]_\alpha \subseteq \mathbb{R}_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}_\alpha$ fonksiyonu her $x,y \in [a,b]_\alpha$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$f(\alpha(t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}y)\dot{\le}(\dot{\ge})\alpha(t)\dot{\times}f(x)\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}f(y) \qquad (3.3.1)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman f fonksiyonuna α_α-konveks (α_α-konkav) fonksiyon denir. Başka bir ifadeyle (3.3.1) eşitsizliğini

$$f\big(\alpha\{\alpha^{-1}(\lambda_1).\alpha^{-1}\{x\}\dot{+}\alpha^{-1}(\lambda_2).\alpha^{-1}\{y\}\}\big)\dot{\le}(\dot{\ge})\alpha\{\alpha^{-1}(\lambda_1).\alpha^{-1}\{f(x)\}\dot{+}\alpha^{-1}(\lambda_2).\alpha^{-1}\{f(y)\}\}$$

şeklinde de yazabiliriz.

Sonuç 3.3.1 Eğer tanım 3.3.1 de $\alpha = Id$ alınırsa, (3.3.1) eşitsizliği konveks fonksiyona dönüşür.

Sonuç 3.3.2 Eğer tanım 3.3.1 de $\alpha = exp$ alınırsa, (3.3.1) eşitsizliği G-G konveks fonksiyonuna dönüşür.

Teorem 3.3.1 A ve B iki α-konveks küme olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur:

1. A kümesinin $\lambda \dot{\times} A$ genişlemesi α-konvekstir. Yani,

$$\lambda \dot{\times} A = \{\lambda \dot{\times} x : x \in A\}$$

kümesi α-konveks kümedir.

2. A ve B kümelerinin $A \dot{+} B$ toplamı α-konvekstir. Yani,

$$A \dot{+} B = \{a \dot{+} b : a \in A, b \in B\}$$

kümesi α-konveks kümedir.

3. α_α-konveks kümelerin keyfi kesişimleri α_α-konvekstir.

İspat:

1. λ, $\mathbb{R}$ de keyfi bir sabit olsun. Herhangi $x, y \in \lambda \dot{\times} A$ noktalarını alalım. Burada A, α-konveks küme olduğu için $x_A \in A$ ve $y_A \in A$ olmak üzere $\lambda \dot{\times} x_A = x$ ve $\lambda \dot{\times} y_A = y$ dir. Ayrıca $\theta_1 \dot{+} \theta_2 = \alpha(1)$ olduğundan,

$$\theta_1 \dot{\times} x_A \dot{+} \theta_2 \dot{\times} y_A = z_A \in A$$

eşitliğini yazılabilir. Bu eşitliği λ ile çarparsak,

$$\lambda \dot{\times} \theta_1 \dot{\times} x_A \dot{+} \lambda \dot{\times} \theta_2 \dot{\times} y_A = \lambda \dot{\times} z_A$$

eşitliğini elde edilir. Buradan $\theta_1, \theta_2 \in [0, 1]_\alpha$ için

$$\theta_1 \dot{\times} x \dot{+} \theta_2 \dot{\times} y = z \in \lambda \dot{\times} A$$

yazılabilir. Böylece ispatımız tamamlanmış olur.

2. A, B α-konveks kümeleri için, $x, y \in A\dot{+}B$ olsun. Bu durumda

$$x = x_A\dot{+}x_B$$

$$y = y_A\dot{+}y_B$$

olacak şekilde $x_A, y_A \in A$ ve $x_B, y_B \in B$ elemanları vardır. A ve B α-konveks küme olduğundan, her $\theta_1, \theta_2 \in [0,1]_\alpha$ için,

$$\theta_1\dot{\times}x_A\dot{+}\theta_2\dot{\times}y_A \in A$$

ve

$$\theta_1\dot{\times}x_B\dot{+}\theta_2\dot{\times}y_B \in B$$

yazabiliriz. Bu eşitlikleri taraf tarafa toplarsak,

$$(\theta_1\dot{\times}x_A\dot{+}\theta_2\dot{\times}y_A)\dot{+}(\theta_1\dot{\times}x_B\dot{+}\theta_2\dot{\times}y_B) = \theta_1\dot{\times}x\dot{+}\theta_2\dot{\times}y \in A\dot{+}B$$

eşitliğini elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

3. α_α-konveks kümelerinin keyfi kesişimleri α_α-konvekstir. Gerçekten, $\{A_k\}_\alpha$ α_α-konveks kümelerinin bir ailesi olsun. Bu durumda $x, y \in \bigcap_k\{A_k\}_\alpha$, herhangi $k\in [0,1]_\alpha$ ve $\bigcap_k\{A_k\}_\alpha$ için $t\dot{\times}x\dot{+}(1\dot{-}t)\dot{\times}y \in \bigcap_k\{A_k\}_\alpha$ olup bu küme α_α-konveks kümedir.

Tanım 3.3.2 $f : (a,b) \subseteq \mathbb{R}_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}_\alpha$ fonksiyonu verilmiş olsun. O zaman her $x_1, x_2 \in (a,b)_\alpha$ için:

a) Eğer $x_2\dot{>}x_1$ olduğunda $f(x_2)\dot{>}f(x_1)$ ise, f fonksiyonuna (a,b) üzerinde α_α-artan denir.

b) Eğer $x_2\dot{>}x_1$ olduğunda $f(x_2)\dot{<}f(x_1)$ ise, f fonksiyonuna (a,b) üzerinde α_α-azalan denir.

c) Eğer $x_2\dot{>}x_1$ olduğunda $f(x_2)\dot{\geq}f(x_1)$ ise, f fonksiyonuna (a,b) üzerinde α_α-azalmayan denir.

d) Eğer $x_2\dot{>}x_1$ olduğunda $f(x_2)\dot{\leq}f(x_1)$ ise, f fonksiyonuna (a,b) üzerinde α_α-artmayan denir.

Teorem 3.3.2 Eğer $f, g : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_\alpha$ fonksiyonları α-konveks ise, o zaman $f\dot{+}g$ ve $\lambda \geq 0$ için $\lambda\dot{\times}f$ fonksiyonları $[a,b]$ üzerinde α-konvekstir.

İspat: $f,g:[a,b]\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}_\alpha$ α-konveks fonksiyonları için $t\in[0,1]$ ve her $x,y\in[a,b]$ olsun. Her $x\in[a,b]$ için $(f\dot{+}g)(x):=f(x)\dot{+}g(x)$ olduğundan,

$$(f\dot{+}g)(tx+(1-t)y):=f(tx+(1-t)y)\dot{+}g(tx+(1-t)y)$$

yazılır. Bu durumda

$$\begin{aligned} f(tx+(1-t)y)\dot{+}g(tx+(1-t)y) \;&\dot{\leq}\; \alpha(t)\dot{\times}f(x)\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}f(y)\dot{+}\alpha(t)\dot{\times}g(x) \\ &\quad\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}g(y) \\ &= \alpha(t)\dot{\times}[f(x)\dot{+}g(x)]\dot{+}[\alpha(1-t)\dot{\times}[f(y)\dot{+}g(y)] \\ &= \alpha(t)\dot{\times}(f\dot{+}g)(x)\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}(f\dot{+}g)(y). \end{aligned}$$

eşitliği doğrudur. $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}_\alpha$, $t\in[0,1]$ ve her $x,y\in[a,b]$ olsun. f fonksiyonu α-konveks fonksiyon olduğundan,

$$\begin{aligned} \lambda\dot{\times}f(tx+(1-t)y) \;&\dot{\leq}\; \lambda\dot{\times}[\alpha(t)\dot{\times}f(x)\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}f(y)] \\ &= \lambda\dot{\times}\alpha(t)\dot{\times}f(x)\dot{+}\lambda\dot{\times}\alpha(1-t)\dot{\times}f(y) \\ &= \lambda\dot{\times}[(\alpha(t)\dot{\times}f)(x)\dot{+}(\alpha(1-t)\dot{\times}f)(y)] \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.3.3 Eğer $f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}_\alpha$ fonksiyonu α-konveks, $g:[a,b]_\alpha\subseteq\mathbb{R}_\alpha\longrightarrow\mathbb{R}_\alpha$ fonksiyonu α_α-konveks ve α_α-artan ise, o zaman gof bileşke fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde α-konvekstir.

İspat: $f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}_\alpha$ α-konveks ve $g:[a,b]_\alpha\subseteq\mathbb{R}_\alpha\longrightarrow\mathbb{R}_\alpha$ α_α-konveks fonksiyon olsun. Her $x,y\in[a,b],t\in[0,1]$ için

$$\begin{aligned} g[f(tx+(1-t)y)] \;&\dot{\leq}\; g[\alpha(t)\dot{\times}f(x)\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}f(y)] \\ &= \alpha(t)\dot{\times}g[f(x)]\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}g[f(y)] \end{aligned}$$

bağıntısını yazabiliriz. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.3.4 Eğer $f,g:[a,b]_\alpha\subseteq\mathbb{R}_\alpha\longrightarrow\mathbb{R}_\alpha$ fonksiyonları α_α-negatif olmayan, α_α-azalan (α_α-artan) ve α_α-konveks ise, o zaman $h(x)=f(x)\dot{\times}g(x)$ fonksiyonu α_α-konvekstir.

İspat: $f,g:[a,b]_\alpha\subseteq\mathbb{R}_\alpha\longrightarrow\mathbb{R}_\alpha$ fonksiyonları α_α-negatif olmayan, α_α-azalan (α_α-artan) ve α_α-konveks olduğundan, her $x,y\in[a,b]_\alpha$, $x\dot{<}y$ için

$$[f(x)\dot{-}f(y)]\dot{\times}[g(y)\dot{-}g(x)]\dot{\leq}\dot{0}$$

eşitsizliği yazılır. Buradan

$$f(x)\dot{\times}g(y)\dot{+}g(x)\dot{\times}f(y)\dot{\leq}f(x)\dot{\times}g(x)\dot{+}f(y)\dot{\times}g(y) \tag{3.3.2}$$

bulunur. (3.3.2) eşitsizliğinde, her $x, y \in [a,b]_\alpha$, $\theta_1, \theta_2 \dot{>} \dot{0}$ ve $\theta_1 \dot{+} \theta_2 = \alpha(1)$ için

$$\begin{aligned}
h(\theta_1\dot{\times}x\dot{+}\theta_2\dot{\times}y) &= f(\theta_1\dot{\times}x\dot{+}\theta_2\dot{\times}y)\dot{\times}g(\theta_1\dot{\times}x\dot{+}\theta_2\dot{\times}y) \\
&\dot{\leq} (\theta_1\dot{\times}f(x)\dot{+}\theta_2 f(y))\dot{\times}(\theta_1\dot{\times}g(x)\dot{+}\theta_2 g(y)) \\
&= \theta_1^{\dot{2}}\dot{\times}f(x)\dot{\times}g(x)\dot{+}\theta_1\dot{\times}\theta_2\dot{\times}f(x)\dot{\times}g(y)\dot{+}\theta_1\dot{\times}\theta_2\dot{\times}f(y)\dot{\times}g(x)\dot{+}\theta_2^{\dot{2}}f(y)\dot{\times}g(y) \\
&= \theta_1^{\dot{2}}\dot{\times}f(x)\dot{\times}g(x)\dot{+}\theta_1\dot{\times}\theta_2\dot{\times}f(x)\dot{\times}g(x)\dot{+}\theta_1\dot{\times}\theta_2\dot{\times}f(y)\dot{\times}g(y)\dot{+}\theta_2^{\dot{2}}f(y)\dot{\times}g(y) \\
&= \theta_1\dot{\times}f(x)\dot{\times}g(x)\dot{+}\theta_2\dot{\times}f(y)\dot{\times}g(y) \\
&\dot{\leq} \theta_1\dot{\times}h(x)\dot{+}\theta_2\dot{\times}h(y)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.3.5 $C \subseteq \mathbb{R}_\alpha$ α-açık aralığı olsun.

1. $f : C \subseteq \mathbb{R}_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}_\alpha$ nin $\alpha_\alpha-$ konkav olması için gerek ve yeter koşul $a, b, c \in C$ ve $a\dot{<}b\dot{<}c$ için
$$\frac{f(b)\dot{-}f(a)}{b\dot{-}a}\dot{\geq}\frac{f(c)\dot{-}f(b)}{c\dot{-}b}.$$
ve
$$\frac{f(b)\dot{-}f(a)}{b\dot{-}a}\dot{\geq}\frac{f(c)\dot{-}f(a)}{c\dot{-}a}.$$
olmasıdır. Ayrıca α_α-kesin konkavlık için eşitlik yoktur.

2. $f : C \subseteq \mathbb{R}_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}_\alpha$ is $\alpha_\alpha-$ konveks olması için gerek ve yeter koşul $a, b, c \in C$ ve $a\dot{<}b\dot{<}c$ için,
$$\frac{f(b)\dot{-}f(a)}{b\dot{-}a}\dot{\leq}\frac{f(c)\dot{-}f(b)}{c\dot{-}b}.$$
ve
$$\frac{f(b)\dot{-}f(a)}{b\dot{-}a}\dot{\leq}\frac{f(c)\dot{-}f(a)}{c\dot{-}a}.$$
olmasıdır. Ayrıca α_α-kesin konvekslik için eşitlik yoktur.

İspat:

1. Herhangi $a, b, c \in C$ için $a\dot{<}b\dot{<}c$ olsun. $c\dot{-}b\dot{<}0$ olduğu için,

$$[f(b)\dot{-}f(a)]\dot{\times}(c\dot{-}b)\dot{\geq}[f(c)\dot{-}f(b)]\dot{\times}(b\dot{-}a)$$

olup, buradan

$$f(b)\dot{\times}(c\dot{-}a)\dot{\geq}f(a)\dot{\times}(c\dot{-}b)\dot{+}f(c)\dot{\times}(b\dot{-}a)$$

yazılır. $c\dot{-}a\dot{\geq}0$ olduğundan,

$$f(b)\dot{\geq}\left[\frac{c\dot{-}b}{c\dot{-}a}.\right]\dot{\times}f(a)\dot{+}\left[\frac{b\dot{-}a}{c\dot{-}a}.\right]\dot{\times}f(c)$$

olur. $\theta=\frac{c\dot{-}b}{c\dot{-}a}.\in\dot{(}0,1\dot{)}$ için, $b=\theta\dot{\times}a\dot{+}(1\dot{-}\theta)\dot{\times}c$ dır. f, α-konkav fonksiyon olduğu için son eşitsizlik sağlanır. Tersine, herhangi $a\dot{<}c$, $\theta\in\dot{(}0,1\dot{)}$ için $b=\theta\dot{\times}a\dot{+}(1\dot{-}a)\dot{\times}c$ olup, ispat tamamlanır.

2. Bu iddianın ispatı yukarıdakine benzer şekilde yapılır.

Teorem 3.3.6 Eğer f fonksiyonu, $[a,b]_\alpha\subseteq\mathbb{R}_\alpha$ üzerinde α_α-konveks ise, o zaman:

1. f, $(a,b)_\alpha\subseteq\mathbb{R}_\alpha$ üzerinde α-süreklidir.
2. f, $[a,b]_\alpha\subseteq\mathbb{R}_\alpha$ üzerinde α-sınırlıdır.

İspat:

1. $I=[x_0\dot{-}\delta,x_0\dot{+}\delta]_\alpha\subseteq(a,b)_\alpha$, $\delta\dot{>}\alpha(0)$ ve $M=\max\{f(x_0\dot{-}\delta),f(x_0\dot{-}\delta)\}$ olsun. Her $x\in\{x_0,x_0\dot{+}\delta\}$, $t\in(0,1)_\alpha$, $x=(1\dot{-}t)\dot{\times}x_0\dot{+}t\times(x_0\dot{+}\delta)$ için

$$x_0=\frac{1}{1+t}.\dot{\times}x\dot{+}\frac{t}{1\dot{+}t}.(x_0\dot{-}\delta).$$

f, $\alpha_\alpha-$konveks ve M nin tanımından

$$f(x)\dot{\leq}(1\dot{-}t)\dot{\times}f(x_0)\dot{\times}t\dot{\times}f(x_0\dot{+}\delta)\dot{\leq}(1\dot{-}t)\dot{\times}f(x_0)\dot{+}t\dot{\times}M$$

dır.

$$f(x_0)=\frac{1}{1\dot{+}t}.\dot{\times}f(x)\dot{+}\frac{t}{1\dot{+}t}\dot{\times}f(x_0\dot{-}\delta)\dot{\leq}\frac{f(x)\dot{+}t\dot{\times}M}{1\dot{+}t} \tag{3.3.3}$$

ve

$$t(M\dot{-}f(x_0))\dot{\geq}f(x)\dot{-}f(x_0)\dot{\geq}t\dot{\times}(f(x_0)\dot{-}M) \tag{3.3.4}$$

yazılır. (3.3.3) ve (3.3.4) eşitsizliklerinden

$$|f(x)\dot{-}f(x_0)|_\alpha\dot{\geq}|t\dot{\times}(M\dot{-}f(x_0))|_\alpha=\frac{(M\dot{-}F(x_0))\dot{\times}|x\dot{-}x_0|_\alpha}{\delta}. \tag{3.3.5}$$

elde edilir. $x \in (x_0 \dot{-} \delta, x_0)_\alpha$ için benzer şekilde (3.3.5) ispatı yapılabilir. Böylece $x \in [a,b]_\alpha$, $x \neq x_0$ için

$$\frac{|f(x) \dot{-} f(x_0)|_\alpha}{|x \dot{-} x_0|_\alpha}.$$

sınırlıdır. Bu ise f nin x_0 noktasının $(a,b)_\alpha$ α-açık aralığı üzerinde α-sürekli olduğunu gösterir.

2. α-sınırsızlığı ispatlamak için, α-kapalı aralığında $\alpha_\alpha-$konveks tanımından dolayı f sınırlıdır. Daha sonra, herhangi $p \dot{<} q$ için $[p,q]_\alpha \subset (a,b)_\alpha$ dir. Ayrıca $[p,q]_\alpha$ aralığında f sınırlıdır. Kalan kısmı ispatlamak için $[a,p]_\alpha$ ve $[p,b]_\alpha$ aralıklarında sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için $x \in [a,p]_\alpha \subset [a,q]_\alpha$ olmak üzere,

$$p = \gamma \dot{\times} x \dot{+} (1 \dot{-} \gamma) \dot{\times} q \text{ ile } \frac{q \dot{-} p}{q \dot{-} a} \dot{\leq} \gamma \dot{\leq} 1 \tag{3.3.6}$$

olup, $x = a$ için

$$\gamma = \frac{q \dot{-} p}{q \dot{-} a} . \dot{>} 0$$

yazabiliriz. Şimdi f nin α_α-konveksliğinden

$$f(p) \dot{\leq} \gamma \dot{\times} f(x) \dot{+} (1 \dot{-} \gamma) \dot{\times} f(q)$$

olup,

$$f(x) \geq \frac{1}{\gamma} \dot{\times} f(p) \dot{+} (1 \dot{-} \frac{1}{\gamma}) \dot{\times} f(q) \tag{3.3.7}$$

yazılır. $\frac{(q \dot{-} a)}{q \dot{-} p} . \dot{\geq} \frac{1}{\gamma} . \dot{\geq} 1$ olduğundan, (3.3.7) nin sağ tarafı, $[a,p]_\alpha$ α-kapalı aralığı üzerinde f-nin bir alt sınırını verir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

3.4 *-Konveks Fonksiyonlar ve Bazı *-Eşitsizlikler

Bu kısımda α üreteci yardımıyla elde edilen konveks fonksiyonlar ve eşitsizliklerin bir genellemesi olan yani tanım ve değer kümesi üreteç olan $*$ konveks fonksiyon ve eşitsizlikleri ayrıntılı bir şekilde inceleyeceğiz.

3.4.1 *-Konveks Fonksiyon ve Bazı Özellikleri

Literatüre bakıldığında $*$-konvekslik tanımı (2.3.4) olarak verilmektedir. Fakat bu tanım hatalıdır. Doğru tanımı, Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı doktora öğrencisi Yeter ERDAŞ ile birlikte aşağıdaki şekilde verdi:

Tanım 3.4.1 $I_\alpha \subseteq \mathbb{R}_\alpha \backslash \{\dot{0}\}$ bir α-aralık olsun. Eğer bir $f : I_\alpha \to \mathbb{R}_\beta$ fonksiyonu her $a, b \in I_\alpha$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b) \quad \ddot{\leq} \quad \beta(t)\ddot{\times}f(a)\ddot{+}\beta(1-t)\ddot{\times}f(b) \tag{3.4.1}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa bu f'ye $*$-konveks fonksiyon denir.

Sonuç 3.4.1 Eğer tanım 3.4.1 de $\alpha = Id$ ve $\beta = Id$ seçilirse, (3.4.1) eşitsizliği konveks fonksiyona dönüşür.

Sonuç 3.4.2 Eğer tanım 3.4.1 de $\alpha = Id$, $\beta = \alpha$, $\alpha(t) = h_\alpha(t)$ seçilirse, (3.4.1) eşitsizliği h_α-konveks fonksiyonuna dönüşür.

Sonuç 3.4.3 Eğer tanım 3.4.1 de $\alpha = Id$, $\beta = \alpha$, $\alpha(t) = \alpha(t)^{\dot{s}}$ seçilirse, (3.4.1) eşitsizliği ikinci anlamda s_α-konveks fonksiyonuna dönüşür..

Sonuç 3.4.4 Eğer tanım 3.4.1 de $\alpha = Id$, $\beta = Id$, $t = \frac{1}{2}$ seçilirse, (3.4.1) eşitsizliği J-konveks fonksiyonuna dönüşür.

Sonuç 3.4.5 Eğer tanım 3.4.1 de $\alpha, \beta = exp$ seçilirse, (3.4.1) eşitsizliği G-G-konveks fonksiyonuna dönüşür.

Sonuç 3.4.6 Eğer tanım 3.4.1 de $\alpha = Id$ ve $\beta = exp$ seçilirse, (3.4.1) eşitsizliğinde A-G-konveks fonksiyonuna dönüşür.

Sonuç 3.4.7 Eğer tanım 3.4.1 de $\alpha = exp$ ve $\beta = Id$ seçilirse, (3.4.1) eşitsizliği G-A-konveks fonksiyonuna dönüşür.

3.4.2 *-Eşitsizlikler ve Bazı Özellikleri

Tanım 3.4.2 $f : \mathbb{R}_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}_\beta$ bir fonksiyon ve her $x, y \in [0, \infty)_\alpha$, $t \in [0,1]$ için

$$\beta(t)^{\ddot{s}}\ddot{+}\beta(1-t)^{\ddot{s}} = \beta(1)$$

olsun. Bu durumda herhangi $\ddot{s} \in [0,1]_\beta$ sabiti için,

$$f(\alpha(t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}y)\ddot{\leq}\beta(t)^{\ddot{s}}\ddot{\times}f(x)\ddot{+}\beta(1)\ddot{-}\beta(t)^{\ddot{s}}\ddot{\times}f(y) \tag{3.4.2}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyonuna birinci anlamda s_*-konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonlar sınıfını $K^1_{s_*}$ ile göstereceğiz.

Tanım 3.4.3 $f : \mathbb{R}_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}_\beta$ bir fonksiyonu her $x, y \in [0, \infty)_\alpha$ için $\beta(t)\ddot{+}\beta(1-t) = \beta(1)$ olsun. Bu durumda herhangi $\ddot{s} \in (0, 1]_\beta$ sabiti için,

$$f(\alpha(t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}y)\ddot{\leq}\beta(t)^{\ddot{s}}\ddot{\times}f(x)\ddot{+}(\beta(1)\ddot{-}\beta(t))^{\ddot{s}}\ddot{\times}f(y) \tag{3.4.3}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyonuna ikinci anlamda s_*-konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonlar sınıfını $K^2_{s_*}$ ile göstereceğiz.

Sonuç 3.4.8 Eğer tanım 3.4.3 te $\alpha = Id$ ve $\beta = Id$ seçilirse, (3.4.3) eşitsizliği ikinci anlamda s-konveks fonksiyonuna dönüşür.

Sonuç 3.4.9 Eğer tanım 3.4.3 te $\alpha = Id$ ve $\beta = \alpha$ seçilirse, (3.4.3) eşitsizliği ikinci anlamda s_α-konveks fonksiyonuna dönüşür.

Sonuç 3.4.10 Eğer tanım 3.4.3 te $\alpha = Id$, $\beta = \alpha$, $\beta(t)^{\ddot{s}} = \alpha(t)$ seçilirse, (3.4.3) eşitsizliği α-konveks fonksiyonuna dönüşür.

Tanım 3.4.4 $f : \mathbb{R}_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}_\beta$ $*$-negatif olmayan fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in \mathbb{R}_\alpha$ ve $\lambda \in (0, 1)_\alpha$ için

$$f(\lambda\dot{\times}x\dot{+}(\dot{1}\dot{-}\lambda)\dot{\times}y)\ddot{\leq}f(x)\ddot{+}f(y) \tag{3.4.4}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, o zaman f fonksiyonuna P_*-fonksiyon denir.

Sonuç 3.4.11 Eğer tanım 3.4.4 te $\alpha = Id$ ve $\beta = Id$ seçilirse, (3.4.4) eşitsizliği P-fonksiyonuna dönüşür.

Sonuç 3.4.12 Eğer tanım 3.4.4 te $\alpha = Id$ ve $\beta = \alpha$ seçilirse, (3.4.4) eşitsizliği P_α fonksiyonuna dönüşür.

Sonuç 3.4.13 Eğer tanım 3.4.4 te $\alpha = exp$ ve $\beta = Id$ seçilirse, (3.4.4) eşitsizliği $P - GA$ fonksiyonuna dönüşür.

Sonuç 3.4.14 Eğer tanım 3.4.4 te $\alpha = Id$ ve $\beta = exp$ seçilirse, (3.4.4) eşitsizliği çarpımsal P fonksiyonuna dönüşür.

Sonuç 3.4.15 Eğer tanım 3.4.4 te $\alpha = \frac{1}{x}$ ve $\beta = Id$ seçilirse, (3.4.4) eşitsizliği harmonik P fonksiyonuna dönüşür.

Tanım 3.4.5 $h_* : J \subseteq \mathbb{R}_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}_\beta$ $*$-negatif olmayan bir fonksiyon ve $h_* \not\equiv \beta(0)$ olsun. Eğer her $x, y \in [a, b]_\alpha$ ve $t \in (0, 1)_\alpha$ için

$$f(\alpha(t)\dot{\times}x\dot{+}(\dot{1}\dot{-}\alpha(t))\dot{\times}y)\ddot{\leq}h_*(\alpha(t))\ddot{\times}f(x)\ddot{+}h_*(\dot{1}\dot{-}\alpha(t))\ddot{\times}f(y) \tag{3.4.5}$$

ise, o zaman $f : [a,b]_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}_\beta$ fonksiyonuna h_*-konveks fonksiyon denir. Burada J, $\mathbb{R}_\alpha$'da bir aralık ve $(0,1)_\alpha \subseteq J$ dır.

Sonuç 3.4.16 Eğer tanım 3.4.5 da $\alpha = Id$ ve $\beta = Id$ seçilirse, (3.4.5) eşitsizliği h-fonksiyonuna dönüşür.

Sonuç 3.4.17 Eğer tanım 3.4.5 da $\alpha = Id$ ve $\beta = \alpha$ seçilirse, (3.4.5) eşitsizliği h_α fonksiyonuna dönüşür.

Sonuç 3.4.18 Eğer tanım 3.4.5 da $h_*(t) = \beta(t)$ seçilirse, (3.4.5) eşitsizliği *-konveks fonksiyonuna dönüşür.

Sonuç 3.4.19 Eğer tanım 3.4.5 da $\alpha = Id$, $\beta = \alpha$, $h_*(t) = \alpha(t)$ seçilirse, (3.4.5) eşitsizliği α-konveks fonksiyonuna dönüşür.

Sonuç 3.4.20 Eğer tanım 3.4.5 da $\alpha = Id$, $\beta = Id$, $h_*(t) = t$ seçilirse,(3.4.5) eşitsizliği konveks fonksiyonuna dönüşür.

3.4.3 *-Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Teorem 3.4.1 $f : \mathbb{R}_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}_\beta$ herhangi bir *-konveks fonksiyon olsun. Bu durumda $\beta^{-1} o f$, $Id_\alpha-$konveks fonksiyondur.

İspat: f, $^*-$konveks fonksiyon olduğundan, her $x, y \in \mathbb{R}_\alpha$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(\alpha(t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}y)\ddot{\leq}\beta\{t\}\ddot{\times}f(x)\ddot{+}\beta\{1-t\}\ddot{\times}f(y)$$

veya

$$\beta^{-1}\big\{f(\alpha(t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}y)\big\} \leq \beta^{-1}\big(\beta\{t\}\ddot{\times}f(x)\ddot{+}\beta\{1-t\}\ddot{\times}f(y)\big)$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan

$$\begin{aligned}
\beta^{-1}\big(f(\alpha(t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}y)\big) &\leq \beta^{-1}\big(\beta\{t\}\ddot{\times}f(x)\ddot{+}\beta\{1-t\}\ddot{\times}f(y)\big) \\
&= \beta^{-1}\big(\beta\big\{\beta^{-1}(\beta\{t\})\beta^{-1}(f(x)) \\
&\quad +\beta^{-1}(\beta\{1-t\})\beta^{-1}(f(y))\big\}\big) \\
&= t\beta^{-1}(f(x)) + (1-t)\beta^{-1}(f(y))
\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Tanım 3.4.6 $f : (a,b)_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}_\beta$ bir fonksiyon olmak üzere, her $x \in (a,b)_\alpha$ için $f(x)\ddot{\geq}\ddot{0}$ ise f fonksiyonuna $*$- negatif olmayan fonksiyon denir.

Teorem 3.4.2 $f : \mathbb{R}_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}_\beta$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\beta^{-1}of$, Id_α-konveks fonksiyon ise, bu taktirde her $a,b \in \mathbb{R}_\alpha$ için

$$\begin{aligned} \beta^{-1}\left(f\left(\frac{a\dot{+}b}{\dot{2}}\right)\right) &\leq \frac{1}{\alpha^{-1}(b)-\alpha^{-1}(a)}\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)}\beta^{-1}(f(\alpha(u)))du \\ &\leq \frac{\beta^{-1}(f(a))+\beta^{-1}(f(b))}{2} \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat: İlk olarak, (3.4.6) eşitsizliğinin sağ tarafını ispatlayalım. $\beta^{-1}of$, Id_α konvekliği ve (3.4.1) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \beta^{-1}\left({}_*\int_{\dot{0}}^{\dot{1}} f(\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b)dt\right) &= \int_0^1(\beta^{-1}of)(\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b)dt \\ &\leq \beta^{-1}(f(a))\int_0^1 tdt+\beta^{-1}(f(b))\int_0^1(1-t)dt \\ &= \frac{\beta^{-1}(f(a))+\beta^{-1}(f(b))}{2} \end{aligned}$$

yazılır. Ayrıca

$$\begin{aligned} \beta^{-1}\left({}_*\int_{\dot{0}}^{\dot{1}} f(\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b)dt\right) &= \int_0^1(\beta^{-1}of)(\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b)dt \\ &= \frac{1}{\alpha^{-1}(b)-\alpha^{-1}(a)}\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)}\beta^{-1}(f(\alpha(u)))du \end{aligned}$$

eşitliğinden istenilen sonuç elde edilir. Şimdi de (3.4.6) eşitsizliğinin sol tarafını ispatlayalım. Bunun için yukarıdaki eşitliği

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\alpha^{-1}(b)-\alpha^{-1}(a)}\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)}\beta^{-1}(f(\alpha(u)))du = \frac{1}{\alpha^{-1}(b)-\alpha^{-1}(a)} \\ &\times\Bigg[\underbrace{\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\frac{\alpha^{-1}(a)+\alpha^{-1}(b)}{2}}\beta^{-1}(f(\alpha(u)))du}_{A_1}+\underbrace{\int_{\frac{\alpha^{-1}(a)+\alpha^{-1}(b)}{2}}^{\alpha^{-1}(b)}\beta^{-1}(f(\alpha(u)))du}_{A_2}\Bigg] \end{aligned} \tag{3.4.7}$$

şeklinde yazıp, (3.4.7) eşitliğindeki A_1 integralinde $\alpha(u)$ yerine $a\dot{+}\frac{\alpha(t)\dot{\times}(b\dot{-}a)}{\dot{2}}.$ ve A_2 integralinde $\alpha(u)$ yerine $b\dot{-}\frac{\alpha(t)\dot{\times}(b\dot{-}a)}{\dot{2}}.$ yazılırsa

$$\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\frac{\alpha^{-1}(a)+\alpha^{-1}(b)}{2}}\beta^{-1}(f(\alpha(u)))du = \frac{\alpha^{-1}(b)-\alpha^{-1}(a)}{2}\left[\int_0^1\beta^{-1}\left(f\left(a\dot{+}\frac{\alpha(t)\dot{\times}(b\dot{-}a)}{\dot{2}}.\right)\right)dt\right]$$

ve

$$\int_{\frac{\alpha^{-1}(a)+\alpha^{-1}(b)}{2}}^{\alpha^{-1}(b)} \beta^{-1}(f(\alpha(u)))du = -\frac{\alpha^{-1}(b)-\alpha^{-1}(a)}{2}\left[\int_0^1 \beta^{-1}\left(f\left(b\dot{-}\frac{\alpha(t)\dot{\times}(b\dot{-}a)}{\dot{2}}.\right)\right)dt\right]$$

eşitlikleri elde edilir. (3.4.7) eşitliği ve konvekslik tanımından,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\alpha^{-1}(b)-\alpha^{-1}(a)}\int_{\alpha^{-1}(b)}^{\alpha^{-1}(a)} \beta^{-1}(f(\alpha(u)))du \\
= \; & \frac{1}{2}\left[\int_0^1 \left[\beta^{-1}\left(f\left(a\dot{+}\frac{\alpha(t)\dot{\times}(b\dot{-}a)}{\dot{2}}.\right)\right)du + \beta^{-1}\left(f\left(b\dot{-}\frac{\alpha(t)\dot{\times}(b\dot{-}a)}{\dot{2}}.\right)\right)du\right]\right] \\
\geq \; & \int_0^1 \beta^{-1}\left(f\left(\frac{a}{\dot{2}}.\dot{+}\frac{b}{\dot{2}}.\right)\right)dt = \beta^{-1}\left(f\left(\frac{a\dot{+}b}{\dot{2}}.\right)\right)
\end{aligned}$$

yazılır. Böylece ispat tamamlanmış olur. Bundan sonra (3.4.6) eşitsizliğine *-konveks fonksiyonlar için Hermite Hadamard eşitsizliği diyeceğiz.

Sonuç 3.4.21 Eğer teorem 3.4.2 de $\alpha = Id$ ve $\beta = Id$ alınırsa, 3.4.6 eşitsizliği Hermite-Hadamard eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 3.4.22 Eğer teorem 3.4.2 de $\alpha = exp$ ve $\beta = Id$ alınırsa, 3.4.6 eşitsizliği G-G konveks fonksiyonlar için Hermite Hadamard eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 3.4.23 Eğer teorem 3.4.2 de $\alpha = \varphi^{-1}$ ve $\beta = Id$ seçilirse, 3.4.6 eşitsizliği $M_\varphi A$ konveks fonksiyonlar için Hermite Hadamard eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 3.4.24 Eğer teorem 3.4.2 de $\alpha = q_p$ ve $\beta = Id$ alınırsa, 3.4.6 eşitsizliği p-konveks fonksiyonlar için Hermite Hadamard eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 3.4.3 $f : [a,b]_\alpha \subseteq [0,\infty)_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}_\alpha$ fonksiyonu ikinci anlamda s_*-konveks fonksiyon olsun. Bu durumda her $x, y \in [a,b]_\alpha$ için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^{s-1}}\left(\beta^{-1}of\left(\frac{x\dot{+}y}{\alpha(2)}.\right)\right) &\leq \int_0^1 \beta^{-1}\left(f(\alpha(t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}y)\right)dt \qquad (3.4.8)\\
&\leq \frac{[\beta^{-1}(f(x))+\beta^{-1}(f(y))]}{s+1}
\end{aligned}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat: f, $[a,b]_\alpha$ üzerinde s_*-konveks fonksiyon olduğundan, her $x, y \in [a,b]_\alpha$, $t \in [0,1]$ ve $s \in [0,1]$ sabiti için

$$f(\alpha(t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}y)\ddot{\leq}\beta\{t^s\}\ddot{\times}f(x)\ddot{+}\beta\{(1-t)^s\}\ddot{\times}f(y)$$

yazılır. Daha sonra, $\beta-$sıralama tanımından,

$$\beta^{-1}(f(\alpha(t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}y)) \leq \beta^{-1}(\beta\{t^s\}\ddot{\times}f(x)\ddot{+}\beta\{(1-t)^s\}\ddot{\times}f(y))$$

eşitsizliği yazılır. Buradan,

$$\begin{aligned}\beta^{-1}(f(\alpha(t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}y)) &\leq \beta^{-1}(\beta\{\beta^{-1}(\beta\{t^s\})\beta^{-1}(f(x)) \\ &\quad +\beta^{-1}(\beta\{(1-t)^s\})\beta^{-1}(f(y))\})\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin $t \in [0,1]$ e göre integrali alınırsa,

$$\int_0^1 \beta^{-1}(f(\alpha(t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}y))dt \leq \int_0^1 \left[t^s\beta^{-1}(f(x)) + (1-t)^s\beta^{-1}(f(y))\right]dt$$

ve

$$\int_0^1 \beta^{-1}(f(\alpha(t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}y)t))dt \leq \frac{[\beta^{-1}(f(x)) + \beta^{-1}(f(y))]}{s+1}$$

eşitsizlikleri bulunur. Dolayısıyla (3.4.8) eşitsizliğinin sağ tarafını elde ederiz. Şimdi de (3.4.8) eşitsizliğinin sol tarafını ispatlayalım. Her $x, y \in [a,b]_\alpha$ için

$$f\left(\frac{a\dot{+}b}{\alpha(2)}\dot{}\right)\ddot{\leq}\frac{f(a)\ddot{+}f(b)}{\beta(2^s)}\ddot{} \qquad (3.4.9)$$

yazılabilir. Daha sonra $a := \alpha(t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}y$ ve $b := \alpha(1-t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(t)\dot{\times}y$ alınırsa,

$$f\left(\frac{x\dot{+}y}{\alpha(2)}\dot{}\right)\ddot{\leq}\frac{f(\alpha(t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}y)\ddot{+}f(\alpha(1-t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(t)\dot{\times}y)}{\beta(2^s)}\ddot{}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğe β-sıralama ve β-toplam tanımı uygulanırsa

$$\beta^{-1}\left(f\left(\frac{a\dot{+}b}{\alpha(2)}\dot{}\right)\right) \leq \beta^{-1}\left(\frac{(f(\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b)\ddot{+}f(\alpha(1-t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(t)\dot{\times}b))}{\beta(2^s)}\ddot{}\right)$$

ve

$$\beta^{-1}\left(f\left(\frac{x\dot{+}y}{\alpha(2)}\dot{}\right)\right) \leq \frac{\beta^{-1}(f(\alpha(t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}y)) + \beta^{-1}(f(\alpha(1-t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(t)\dot{\times}y))}{2^s}$$

eşitsizlikleri bulunur. Son eşitsizliğin $t \in [0,1]$ e göre integrali alınırsa,

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \beta^{-1}\left(f\left(\frac{x\dot{+}y}{\alpha(2)}\dot{}\right)\right)dt \\ \leq\ &\int_0^1 \frac{\beta^{-1}(f(\alpha(t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}y)) + \beta^{-1}(f(\alpha(1-t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(t)\dot{\times}y))}{2^s}dt \\ \leq\ &\frac{1}{2^{s-1}}\int_0^1 \beta^{-1}(f(\alpha(t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}y))dt\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise (3.4.8) eşitsizliğinin sol tarafının da doğru olduğunu gösterir. Sonuç olarak ispat tamamlanmış olur. Bundan sonra (3.4.8) eşitsizliğine s_*-konveks fonksiyonlar için Hermite Hadamard eşitsizliği diyeceğiz.

Sonuç 3.4.25 Eğer teorem 3.4.3 te $\alpha = Id$ ve $\beta = Id$ seçilirse, (3.4.8) eşitsizliği s-konveks fonksiyonlar için Hermite Hadamard eşitsizliğine[16] dönüşür.

Sonuç 3.4.26 Eğer teorem 3.4.3 te $\alpha = Id$, $\beta = Id$ ve $s = 1$ seçilirse, (3.4.8) eşitsizliği Hermite Hadamard eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 3.4.4 $f : [a,b]_\alpha \subseteq \mathbb{R}_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}_\beta$, h_*-konveks fonksiyon olsun. Bu durumda her $x, y \in [a,b]_\alpha$, $t \in [0,1]$ için,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\beta^{-1}\{h_*(\alpha(\frac{1}{2}))\}} f\left(\alpha\left(\frac{1}{2}\right)\dot{\times}x\dot{+}\alpha\left(\frac{1}{2}\right)\dot{\times}y\right) && (3.4.10) \\ \leq & \int_0^1 \beta^{-1}(f(\alpha(t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}y)t))dt \\ \leq & [\beta^{-1}(f(x)) + \beta^{-1}(f(y))] \int_0^1 \beta^{-1}(h_*(\alpha(t))dt. && (3.4.11) \end{aligned}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat: İlk olarak (3.4.10) eşitsizliğinin sağ tarafını ispatlayalım. f, h_*-konveks fonksiyon olduğundan, her $x, y \in [a,b]_\alpha$, $t \in [0,1]$ için

$$f(\alpha(t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}y)\ddot{\leq}h_*(\alpha(t))\ddot{\times}f(x)\ddot{+}h_*(\alpha(1-t))\ddot{\times}f(y)$$

yazılır. Bu durumda, $\beta-$ sırama tanımında,

$$\beta^{-1}(f(\alpha(t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}y)) \leq \beta^{-1}(h_*(\alpha(t))\ddot{\times}f(x)\ddot{+}h_*(\alpha(1-t))\ddot{\times}f(y))$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Buradan

$$\begin{aligned} \beta^{-1}(f(\alpha(t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}y)) \leq\ & \beta^{-1}(\beta\{\beta^{-1}(h_*(\alpha(t)))\beta^{-1}(f(x)) \\ & +\beta^{-1}(h_*(\alpha(1-t)))\beta^{-1}(f(y))\}) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Daha sonra, yukarıdaki eşitsizliğin $t \in [0,1]$ e göre integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \beta^{-1}(f(\alpha(t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}y))dt \leq\ & \int_0^1 \big[\beta^{-1}(h_*(\alpha(t)))\beta^{-1}(f(x)) \\ & +\beta^{-1}(h_*(\alpha(1-t)))\beta^{-1}(f(y))\big]dt \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \int_0^1 \beta^{-1}(f(\alpha(t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}y))t)dt \leq\ & [\beta^{-1}(f(x)) + \beta^{-1}(f(y))] \times \\ & \int_0^1 \beta^{-1}(h_*(\alpha(t)))dt \end{aligned}$$

bulunur. Böylece (3.4.10) eşitsizliğinin sağ tarafı elde edilmiş olur. Şimdi de (3.4.10) eşitsizliğinin sol tarafını ispatlayalım. f, h_*-konveks fonksiyon olduğundan, eğer (3.4.7) eşitsizliğinde $t = \frac{1}{2}$, $x = \alpha(t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}y$ ve $y = \alpha(1-t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(t)\dot{\times}y$ seçilirse,

$$\begin{aligned}
& f\big(\alpha(\frac{1}{2})\dot{\times}x\ddot{+}\alpha(\frac{1}{2})\dot{\times}y\big) \\
= \;& f(\alpha(\frac{1}{2}\dot{\times}[(\alpha(t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}y) + (\alpha(1-t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(t)\dot{\times}y) \\
\ddot{\leq} \;& h_*(\alpha(\frac{1}{2}))\ddot{\times}[f(\alpha(t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}y)\ddot{+}f(\alpha(1-t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(t)\dot{\times}y)]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $\beta-$sıralama tanımından

$$\begin{aligned}
& \beta^{-1}(f\big(\alpha(\frac{1}{2})\dot{\times}x\dot{+}\alpha(\frac{1}{2})\dot{\times}y\big)) \\
\leq \;& \beta^{-1}(h_*(\alpha(\frac{1}{2}))\ddot{\times}[f(\alpha(t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}y)\ddot{+}f(\alpha(1-t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(t)\dot{\times}y)])
\end{aligned} \tag{3.4.12}$$

eşitsizliği yazılır. Eğer (3.4.12) eşitsizliğini t ye göre $[0,1]$ aralığı üzerinde integralini alırsak,

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \beta^{-1}(f\big(\alpha(\frac{1}{2})\dot{\times}x\dot{+}\alpha(\frac{1}{2})\dot{\times}y\big))dt \\
\leq \;& \int_0^1 \beta^{-1}(h_*(\alpha(\frac{1}{2})))[\beta^{-1}\{f(\alpha(t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}y)\} \\
& +\beta^{-1}(f(\alpha(1-t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(t)\dot{\times}y))]dt \\
= \;& \int_0^1 2\beta^{-1}(h_*(\alpha(\frac{1}{2})))\beta^{-1}(f(\alpha(t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}y))dt
\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak ispat tamamlanmış olur. Bundan sonra (3.4.10) eşitsizliğine h_*-konveks fonksiyonlar için Hermite Hadamard eşitsizliği diyeceğiz.

Sonuç 3.4.27 Eğer teorem 3.4.4 te $\alpha = Id$ ve $\beta = Id$ alınırsa, (3.4.10) eşitsizliği h-konveks fonksiyonlar için Hermite Hadamard eşitsizliğine[47] dönüşür.

Sonuç 3.4.28 Eğer teorem 3.4.4 te $\alpha = Id$, $\beta = Id$ ve $h_*(\alpha(t)) = t$ alınırsa, (3.4.10) eşitsizliği Hermite Hadamard eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 3.4.5 $[a,b]_\alpha$, $\mathbb{R}_\alpha$ da α-kapalı bir aralık ve $f : [a,b]_\alpha \to \mathbb{R}_\beta$ herhangi bir P_* fonksiyon olsun. Bu durumda her $x, y \in [a,b]_\alpha$ ve $t \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\beta^{-1}\left(f\left(\alpha(\frac{1}{2})\dot{\times}x\dot{+}\alpha(\frac{1}{2})\dot{\times}y\right)\right) \\
\leq \;& \int_0^1 \beta^{-1}(f(\alpha(t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}y))dt \leq \beta^{-1}(f(x)) + \beta^{-1}(f(y))
\end{aligned} \tag{3.4.13}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat: İlk olarak, (3.4.13) eşitsizliğinin sağ tarafını isapatlayalım. f, P_* fonksiyon olduğundan her $x, y \in [a,b]_\alpha$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(\alpha(t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}y)\ddot{\leq}f(x)\ddot{+}f(y)$$

yazılır. Bu durumda $\beta-$sıralama tanımından,

$$\beta^{-1}(f(\alpha(t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}y)) \leq \beta^{-1}(f(x)\ddot{+}f(y))$$

eşitsizliği ve $\beta-$toplam tanımından,

$$\beta^{-1}(f(\alpha(t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}y)) \leq \beta^{-1}(\beta\{\beta^{-1}(f(x)) + \beta^{-1}(f(y))\})$$

eşitsizliği elde edilir. Yukarıdaki eşitsizliğin $[0,1]$ aralığı üzerinde t ye göre intagrali alınırsa,

$$\int_0^1 \beta^{-1}(f(\alpha(t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}y))dt \leq \int_0^1 \beta^{-1}(f(x)) + \beta^{-1}(f(y))dt,$$

ve

$$\int_0^1 \beta^{-1}(f(\alpha(t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}y)t))dt \leq \beta^{-1}(f(x)) + \beta^{-1}(f(y))$$

eşitsizlikleri elde edilir. Böylece istenilen eşitsizliğin sağ tarafı elde edilmiş olur. Şimdi de (3.4.13) eşitsizliğinin sol tarafını ispatlayalım.

f, P_* fonksiyon olduğundan, (3.4.7) eşitsizliğinde $t = \frac{1}{2}$, $x = \alpha(t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}y$ ve $y = \alpha(1-t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(t)\dot{\times}y$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
& f\big(\alpha(\frac{1}{2})\dot{\times}x\dot{+}\alpha(\frac{1}{2})\dot{\times}y\big) \\
= \ & f(\alpha(\frac{1}{2})\dot{\times}[(\alpha(t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}y) + (\alpha(1-t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(t)\dot{\times}y)]) \\
\ddot{\leq} \ & f(\alpha(t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}y)\ddot{+}f(\alpha(1-t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(t)\dot{\times}y)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Daha sonra $\beta-$sıralama tanımından

$$\begin{aligned}
& \beta^{-1}(f\big(\alpha\big(\frac{1}{2}\big)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(\frac{1}{2})\dot{\times}y\big)) \\
\leq \ & \beta^{-1}(f(\alpha(t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}y)\ddot{+}f(\alpha(1-t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(t)\dot{\times}y))
\end{aligned} \tag{3.4.14}$$

yazılır. Eğer (3.4.14) eşitsizliğinin $[0,1]$ üzerinde t ye göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \beta^{-1}(f\big(\alpha\big(\frac{1}{2}\big)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(\frac{1}{2})\dot{\times}y\big))dt \\
\leq \ & \int_0^1 [\beta^{-1}(f(\alpha(t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}y)) + \beta^{-1}(f(\alpha(1-t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(t)\dot{\times}y))]dt
\end{aligned}$$

ve

$$\beta^{-1}(f\big(\alpha(\frac{1}{2})\dot{\times}x\dot{+}\alpha(\frac{1}{2})\dot{\times}y\big)) \leq \int_0^1 2\beta^{-1}(f(\alpha(t)\dot{\times}x\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}y))dt$$

bulunur. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur. Bundan sonra (3.4.13) eşitsizliğine P_*-fonksiyonlar için Hermite Hadamard eşitsizliği diyeceğiz.

Sonuç 3.4.29 Eğer teorem 3.4.5 te $\alpha = Id$ ve $\beta = Id$ alınırsa, (3.4.13) eşitsizliği P-fonksiyonlar için Hermite Hadamard eşitsizliğine[17] dönüşür.

Sonuç 3.4.30 Eğer teorem 3.4.5 te $\alpha = exp$ ve $\beta = Id$ alınırsa, (3.4.13) eşitsizliği $P-GA$-fonksiyonlar için Hermite Hadamard eşitsizliğine[28] dönüşür.

Sonuç 3.4.31 Eğer teorem 3.4.5 te $\alpha = \frac{1}{x}$ ve $\beta = Id$ alınırsa, (3.4.13) eşitsizliği harmonik P-fonksiyonlar için Hermite Hadamard eşitsizliğine[40] dönüşür.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

1600 lü yıllarda Newton ve Leibnitz'in inşaa etmiş olduğu klasik analize alternatif olarak Grossman ve Katz'ın 1967-1970 yılları arasında elde ettiği Newtonyen olmayan analiz, temelinde bire-bir örten üreteçler yardımıyla ifade edilir. Bu alanda yapılan çalışmalara bakıldığında klasik analizdeki konvekslik ve eşitsizlikler konusunun Newtonyen olmayan analizde çalışılmadığı görülmüştür. Dolayısıyla bu doktora tezinde;

1. α Üreteci Yardımıyla Konvekslik ve Temel Tanımları
2. Id_α Konveks Fonksiyon ve Bazı Özellikleri
3. Id_α Hermite-Hadamard Eşitsizliği
4. α_α Konveks Fonksiyon ve Bazı Özellikleri
5. *-Konveks Fonksiyonlar ve Bazı *-Eşitsizlikler
6. *-Hermite-Hadamard Eşitsizliği

kavramları ilk defa burada verilmiş olup ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Bu tezin üçüncü bölümünde elde edilen tüm tanım, teorem ve lemmalarda üreteç veya üreteçler özel olarak birim fonksiyon olarak alınırsa klasik anlamdaki tanım, teorem ve lemmalara indirgenir. Dolayısıyla, klasik anali-zin bijektif dönüşümler(üreteçler) yardımıyla genellemesi elde edilmiştir.

"Newtonyen Olmayan Analiz" in temelinin atılmış olmasına rağmen hala çalışılacak bir çok bölümü araştırmacıları beklemektedir. Bu yapılan tezde görüldi ki; üreteçler büyük önem arz etmektedir. Dolayısıyla klasik analizde çalışılan herhangi bir konunun, bijektif olan üreteçlerin seçimi ve bu teorinin temelleri doğrultusunda genelleştirilebileceğini düşünüyoruz.

KAYNAKLAR

[1] Abbas, M., Ali, B. & Suleiman, Y. (2014), Common fixed points of locally contractive mappings in multiplicati*ve Metric Spaces with Application, Hindawi Publishing Corporation, International Journal of Mathematical Sciences* Volume 2015, Article ID 218683, pages http://dx.doi.org/10.1155/2015/218683.

[2] Aniszewska, D. (2007), Multiplicative Runge-Kutta metods, *Nonlinear Dynamics*, 50, 265-272.

[3] Bashirov, A. E. & Rıza, M. (2011), On complex multiplicative differentiation, *Turkic World Mathematical Society Journal of Applied and Engineering Mathematics* V.1, N.1, 2011, 75-85.

[4] Bashirov, A. E., Mısırlı, E., Tandoğdu, Y. & Özyapıcı, A. (2011), On modeling with multiplicative differential equations, *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities* 2011, 26(4): 425-438.

[5] Bashirov, A. E., Kurpınar, E. M. & Özyapıcı, A. (2008), Multiplicative calculus and its applications, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 337, 36-48.

[6] Bashirov, A. E. (2013), On line and double multiplicative integrals, *Turkic World Mathematical Society Journal of Applied and Engineering Mathematics* V.3, N.1, 2013, 103-107.

[7] Bayraktar, M., (2000), Fonksiyonel Analiz, ISBN 975-442-035-1.

[8] Boruah, K. (2017), On some basic properties of geometric real sequences, *International Journal of Mathematics Trends and Technology (IJMTT)*-Volume 46 Number 2, 111-117.

[9] Boruah, K.& Hazarika, B., (2016), Some basic properties of G-Calculus and its applications in numerical analysis *Afrika Matematika* 28 Jul 2016.

[10] Breckner, W. W., (1978), Stetigkeitsaussagen für eine klasse verallgemeinerter konvexer funktionen in topologischen linearen räumen, *Publications de l'Institut Mathéma tique*, Beograd, 23, 13-20.

[11] Çakmak, A. F. & Başar, F. (2014), Certain spaces of functions over the field of non-Newtonian complex numbers, *Abstract and Applied Analysis*, Volume 2014, Article ID 236124, 12 pages.

[12] Çakmak, A. F. & Başar, F. (2012), Some new results on sequence spaces with respect to non-Newtonian calculus, *Journal of Inequalities and Applications*, 2012:228.

[13] Dragomir, S. S., (2017) Inequalities of Hermite-Hadamard Type for HA-Convex Functions, *Journal Math Analysis Applications* 3(1), 83-101, 2351-8227.

[14] Dragomir, S.S.,(2019) Inequalities of Hermite-Hadamard Type for GG-Convex Functions *Analele Universităt¸ii de Vest, Timi¸soara Seria Matematică - Informatică* LVII, 2, 34-52

[15] Dragomir, S. S., Pečarić, J. and Persson, L. E., *Some inequalities of Hadamard type*, Soochow J. Math., 21, 335-341.

[16] Dragomir, S.S. & Fitzpatrick, S., (1999), The Hadamard's inequality for s-convex functions in the second sense. *Demonstratio Mathematica* 32(4), 687-696.

[17] Eken Z., Kemali S., Tınaztepe G., Adilov G., (2021), The Hermite-Hadamard inequalities for p-convex functions *Hacettepe Journal of Mathematics & Statistics* 50 (5), 1268-1279.

[18] Erdoğan, M. (2016), Newtonyen olmayan reel sayı serileri ve has olmayan integraller, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun, 89 sayfa, Yüksek lisans tezi.

[19] Erdoğan, F. (2016), Newtonyen olmayan reel sayılarda fonksiyon dizi ve serileri, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun, 79 sayfa, Yüksek lisans tezi.

[20] Filip, D. & Piatecki, C. (2012), In defense of a non-Newtonian economic analysis, *HAL Archives-Ouvertes,* https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00945782.

[21] Filip, D. & Piatecki, C. (2014), A non-newtonian examination of the theory of exogenous economic growth, *HAL Archives-Ouvertes,* https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00945781.

[22] Filip, D. & Piatecki, C. (2014), An overview on the non-Newtonian calculus and its potential applications to economics, *HAL Archives-Ouvertes,* https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00945788.

[23] Grosmann, M. & Katz, R. (1972), Non-Newtonian calculus, *Lee Press Pigeon Cove*, Massachusetts.

[24] Grosmann, M. (1979), An introduction to non-Newtonian calculus, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 10(4), 525-528.

[25] Gurefe, Y., Kadak, U., Mısırlı, E. & Kurdi, A. (2016), A New look at classical sequence spaces by using multiplicative calculus, Hindawi Publishing Corporation, *International Journal of Analysis* Volume 2016, Article ID 5416751, 9 pages.

[26] Hadamard, J., (1893) Étude sur les proprietes des fonctions entieres en particulier d'une fonction considérée par Riemann. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 58, 171-215.

[27] Hudzik, H. & Maligranda, L., (1994). Some remarks on s-convex functions, *Aequationes Mathematics*, 48, 100-111.

[28] İşcan, İ.,Hermite-Hadamard and Simpson Type Inequalities for Differentiable P-GA-Functions, (2014) *Hindawi Publishing Corporation International Journal of Analysis*, Article ID 125439, 6 pages, http://dx.doi.org/10.1155/2014/125439

[29] İşcan, İ., Ostrowski type inequalities for p-convex functions, *New Trends in Mathematical Sciences*,4(3):140-140. DOI:10.20852/ntmsci.2016318838

[30] İşcan, İ. Hermite-Hadamard Type Inequalities for harmonically convex functions, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 43(2014), 6, 935-942.

[31] Kadak, U. & Özlük, M. (2014), Generalized Runge-Kutta method with respect to the non-Newtonian calculus, *Abstract and Applied Analysis* Volume 2015, Article ID 594685, 10 pages.

[32] Kadak, U. & Efe, H. (2014), The Construction of Hilbert Spaces over the non-Newtonian field, *International Journal of Analytical* vol. 2014, Article ID 746059, 10 pages, doi:10.1155/2014/746059.

[33] Kadak, U. (2014), Determination of the Köthe-Toeplitz Duals over the non-Newtonian complex field, *International Journal of Analysis*, Volume 2014, ArticleID 746059, 10 pages, http://dx.doi.org/10.1155/2014/746059.

[34] Kadak, U. & Efe, H. (2014), Matrix transformations between certain sequence spaces over the Non- Newtonian complex field, *The Scientific World Journal*, vol. 2014, Article ID 705818, 12 pages, doi:10.1155/2014/705818.

[35] Kadak, U., Kirişçi, M. & Çakmak, A. F. (2015), On the classical paranormed sequence spaces and related duals over the non-Newtonian complex field, *Hindawi Publishing Corporation, Journal of Probability and Statistics* Volume 2015, Article ID 416906, 11 pages http://dx.doi.org/10.1155/2015/416906.

[36] Kadak, U. (2016), Cesàro summable sequence spaces over the non-Newtonian complex field, Hindawi Publishing Corporation, *Journal of Probability and Statistics* Volume 2016, Article ID 5862107, 10 pages.

[37] Kadak, U. (2015), Newtonyen olmayan analiz ve çeşitli uygulamaları, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 100 sayfa, Doktora tezi.

[38] Kadak, U. & Gürefe, Y. (2016), A Generalization on weighted means and convex functions with respect to the non-Newtonian calculus, *International Advanced Research Journal in Science, Engineering and Technology* ISO 3297:2007 Certified Vol. 4, Issue 7, July 2017.

[39] Kadakal, H., (2018) Multiplicatively P-functions and some new inequalities, *New Trends in Mathematical Sciences*, 6, 4, 111-118

[40] İşcan, İ., Numan S. and Bekar K., (2014) Hermite-Hadamard and Simpson type inequalities for differentiable harmonically P-functions, *British Journal of Mathematics & Computer Science*, 4.14, 1908-1920.

[41] Kirişçi, M. (2017), Topolojical structures of non-Newtronian metric spaces electronic, *Journal of Mathematical Analysis and Application*, 5(2), 156-169.

[42] Mısırlı, E. & Gurefe, Y. (2011), Multiplicative Adams Bashforth Moulton methods, *Numerical Algorithms*, 57, 425-439.

[43] Mitrinović, D, S., (1970), Analytic Inequalities, Springer-Verlang, Berlin.

[44] Mora, M., Córdova-Lepe, F. & Del-Valle, R. (2012), A non-Newtonian gradient for contour detection in images with multiplicative noise, *Pattern Recognition Letters* 33, 1245-1256.

[45] Niceluscu, P.C.,(2000) Convexity according to the geometric mean, *Mathematical Inequalities and Applications*, 2, 155-167. 1.2.

[46] Niculescu, P.C.,(2003) Convexity according to means, *Mathematical Inequalities and Applications*, 4, 571-579. 1.2.

[47] Noor, M.A, Khalıda, I.N. & Awan, M.U.,(2015), A new Hermite-Hadamard type inequality for h-convex functions *Creative Mathematics and Informatics* 24, 2, 191-197.

[48] Orlicz, W., (1961) A note on modular spaces I, *Bulletin LAcadémie Polonaise des Science, Série des Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques*, 9, 157-162.

[49] Özavşar, M. & Çevikel, A. C. (2012), Fixed points of multiplicative contraction mappings on multiplicative metric space, *Journal of Engineering Technology and Applied Sciences* 2(2), https://doi.org/10.30931/jetas.338608

[50] Pecaric, J., Proschan, F., Tang, Y.L. (1992), Convex Functions, Partial Ordering and Statistical Applications, *Academic Press, Inc*

[51] Rıza, M., Özyapıcı, A. & Mısırlı, E. (2009), Multiplicative finite difference methods, *Quarterly of Applied Mathematichs*, 67, 745-754.

[52] Rıza, M. & Eminaga, B. (2015), Bigeometric calculus and Runge Kutta method, *arXiv:1402.2877v2 [math.GM]* 20 Jan 2015.

[53] Riza, M. & Aktöre, H. (2015), The Runge-Kutta method in geometric multiplicative calculus, *LMS Journal of Computation and Mathematics* 18 (1) (2015) 539-554.

[54] Sun, M., Chu Y.,(2020) Inequalities for the generalized weighted mean values of g-convex functions with applications, RACSAM 114:172 https://doi.org/10.1007/s1339 8020-00908-1

[55] Tekin, S. & Başar, F. (2013), Certain sequence spaces over the non-Newtonian complex field, *Hindawi Publishing Corporation* Volume 2013, Article ID 739319, 11 pages.

[56] Tekin, S. & Başar, F. (2012), Some basic results on the sets of sequences with geometric calculus, *American Institute of Physics Conference Proceedings*, 1470, 95-98.

[57] Turhan, S. İşcan, İ. & Kunt, M. Hermite-Hadamard type inequalities for $M_\varphi A$ convex functions, *https://doi.org/10.13140/rg.2.2.14526.28486*

[58] Turhan, S., İ. İşcan, Kunt, M., Hermite-Hadamard Type Inequalities for $M\phi A$ convex functions, https://doi.org/10.13140/rg.2.2.14526.28486

[59] Türkmen, C. and Başar, F. , Some basic results on the geometric calculus, *Communicatıons Faculty Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistic*, 61(2), 17-34.

[60] Uzer, A. (2010), Multiplicative type complex calculus as an alternative to the classical calculus, *Computers and Mathematics with Applications*, 60, 2725-2737.

[61] Uzer, A. (2015), Exact solution of conducting half plane problems in terms of a rapidly convergent series and an application of the multiplicative calculus, *Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences* 23, 1294-1311.

[62] Ünlüyol, E. & Salaş, S. 2019, Convexity and Hermite-Hadamard Type Inequality via Non-Newtonian Calculus, *Konuralp Mathematical Journal*, 7(2), 352-358.

[63] Ünlüyol, E., Salaş, S. & İşcan, İ. (2017), Convex functions and some inequalities in terms of the non-Newtonian calculus, April 2017, *American Institute of Physics Conference Proceedings* 1833(1):020043, DOI,10.1063/1.4981691.

[64] Ünlüyol, E., Salaş, S. & İşcan, İ. (2017), A new view of some operators and their properties in terms of the non-Newtonian calculus, *Journal of Algebra and Its Applications* 2017 (5), 49-54.

[65] Ünlüyol, E., Salaş, S. & İşcan, İ., (2017), Convex functions and some inequalities in terms of the Non-Newtonian calculus, April 2017, *AIP Conference Proceedings* 1833(1):020043, Doi:10.1063/1.4981691.

[66] Varoŝanec, S., (2007), On h-convexity, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 326, 303-311.

[67] Waseem, M., Noor, M. A., Shah, F. A. & Noor, K. I. (2018), An efficient technique to solve nonlinear equations using multiplicative calculus, *Turkish Journal of Mathematics* 42: 679-691 doi:10.3906/mat-1611-95.

[68] Yalcin, N., Celik, E. & Gokdogan, A. (2016), Multiplicative Laplace transform and its applications , *Optik* 127 (2016) 9984-9995.

[69] Yaying, T. & Hazarika, B. (2018), Arithmetic summable sequence space over non-Newtonian field *Afrika Matetika* 31, 263-272, https://doi.org/10.1007/s13370-019-00722-y.

[70] Zabandan, G., Bodaghi, A., & Kılıçman, A. (2012), The Hermite-Hadamard inequality for r-convex functions, *Journal of Inequalities and Applications*,1,215

[71] Zhang, T.Y. and Qi, F.,(2014) Integral Inequalities of Hermite-Hadamard Type for m-AH Convex Functions, *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, 2-3, 60-64

[72] Zhang, K.S. & Wan, J.P., (2012) p-convex functions and their properties, *Pure Applied Mathematics Journal* 23(1) (2007), 130-133

[73] Zhang, T.-Y., Ji, A.-P. and Qi, Fi. *On Integral Inequalities of Hermite-Hadamard Type Inequalities for s-Geometrically Convex Functions*, Abstr. Appl. Anal., doi:10.1155/2012/560586.