



T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



**3 – BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA ADJOİNT
EĞRİLERİN SMARANDACHE EĞRİLERİ**

Gürkan GÜLCEMAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Şubat-2023
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza
Gürkan GÜLCEMAL
Tarih: 17/02/2023

ÖZET

YÜKSEL LİSANS TEZİ

3 – BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA ADJOİNT EĞRİLERİN SMARANDACHE EĞRİLERİ

Gürkan GÜLCEMAL

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MATEMATİK
ANABİLİM DALI

Danışman: Doç. Dr. Muhammed Talat SARIAYDIN

2023, viii+41 Sayfa

Jüri

Prof. Dr. Faik Nejat EKMEKÇİ

Doç. Dr. Muhammed Talat SARIAYDIN

Dr. Öğr. Üyesi Gülay KORU YÜCEKAYA

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm çalışmanın giriş kısmıdır, bu bölümde; Öklid uzaylarında adjoint eğriler üzerine yapılan çalışmalar hakkında literatür bilgileri verildi, bu çalışmanın amacı ve özgün değeri belirtildi. İkinci bölümde; çalışmada sıklıkla kullanılan temel tanımlar ve teoremler verildi. Üçüncü bölüm çalışmanın orijinal kısmı olup Öklid uzayında bir adjoint eğrinin smarandache eğrileri Frenet çatı yardımıyla elde edildi. Böylece elde edilen yeni eğrilerin geometrik özellikler incelendi. Daha sonra bu eğrilerin şekilleri çizildi. Dördüncü bölüm ise çalışmanın değerlendirme ve sonuç kısmına ayrıldı.

Anahtar Kelimeler: Adjoint eğri, Frenet çatı, Smarandache eğri

ABSTRACT

MS THESIS

SMARANDACHE CURVES OF ADJOINT CURVES IN EUCLIDEAN 3-SPACE

Gürkan GÜLCEMAL

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
SELÇUK UNIVERSITY**

THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE MATHEMATICS

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Muhammed Talat SARIAYDIN

2023, viii+41 Pages

Jury

Prof. Dr. Faik Nejat EKMEKÇİ

Assoc. Prof. Dr. Muhammed Talat SARIAYDIN

Asst. Prof. Dr. Gülay KORU YÜCEKAYA

This study consists of four chapters. The first chapter is the introductory part of the study, in this chapter; the information in the literature about the studies on adjoint curves in Euclidean space is given, the aim and original value of this study are stated. In the second chapter; the basic definitions and theorems that are used frequently in the study are given. In the third chapter; we obtained the smarandache curves of a adjoint curve according to Frenet frame in Euclidean space. Thus, the geometric properties of the new curves examined. The these curves drawn with the help of program. In the third chapter is devoted to the evaluation and conclusion of the study.

Keywords: Adjoint curve, Frenet frame, Smarandache curves.

ÖNSÖZ

Tez konumun oluşmasında engin bilgi ve tecrübesiyle bana destek olan, çalışmalarım sırasında ihtiyaç duyduğum her türlü imkan ve motivasyonu sağlayan, destek ve yardımlarını esirgemeyen çok değerli sayın hocam Doç. Dr. Muhammed Talat SARIAYDIN'a, en içten teşekkürlerimi sunarım.

Her zaman olduğu gibi bu süreçte desteklerini esirgemeyen sevgili eşim Ayten GÜLCEMAL'e, kıymetli yavrularım Taha Furkan, Muhammed Ali ve Fatih Bedreddin'e, destekleri için Sümeyra Karaman ve Zekeriya Özkan'a ve varlık sebebim rahmetli anneciğime ve canım babama en içten teşekkürlerimi sunarım.

Gürkan GÜLCEMAL
KONYA-2023

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iii
ABSTRACT.....	iv
ÖNSÖZ	v
İÇİNDEKİLER	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR	vii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	4
3. ADJOİNT EĞRİNİN SMARANDACHE EĞRİLERİ.....	10
3.1 $T_\gamma N_\gamma$ -Smarandache Eğri.....	10
3.2 $T_\gamma B_\gamma$ -Smarandache Eğri.....	15
3.3 $N_\gamma B_\gamma$ -Smarandache Eğri	19
3.4 $T_\gamma N_\gamma B_\gamma$ -Smarandache Eğri	24
3.5 Uygulama	30
4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	36
KAYNAKLAR	38

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\{T, N, B\}$: Frenet çatısı
κ	: Bir eğrinin Frenet çatısına göre birinci eğriliği
τ	: Bir eğrinin Frenet çatısına göre burulması
\mathbb{R}^n	: n-Boyutlu reel iç çarpım uzayı
\mathbb{E}^3	: 3-Boyutlu Öklid uzayı
\wedge	: Vektörel çarpım
\langle, \rangle	: Öklid iç çarpımı
$\ \cdot \ $: Öklid normu



1. GİRİŞ

Frenet vektörleri yardımıyla bir eğriden başka bir eğri elde etme diferensiyel geometride ele alınan konulardan biridir. Örneğin \mathbb{E}^3 'de karşılık gelen iki eğrinin normal vektörleri lineer bağımsız ise bu eğrilere bir bertrand eğri çifti denir (Nurkan vd., 2019). Bunun bir diğer örneği, bir eğrinin yay uzunluğu parametresi ile parametrelendirilmiş binormal vektörün integrali olarak (Choi vd. 2012, Deshmukh vd., 2018, Nurkan vd., 2019) da tanımlanan adjoint eğridir (Arıkan vd., 2020). Adjoint eğriler singüleritelerin yapısına sıkı sıkıya bağlıdır. Bu nedenle Algoritmanın ana kısmi hedeflerinden biri bir düzlem eğrisinin tüm singülitelerini tanımlayan bir veri yapısını belirlemek veya denk olarak singüler olmayan bir modelin tanımını belirlemektir (Mňuk, 1997).

Eğriler, geometri başta olmak üzere, çeşitli bilim dallarında yaygın olarak kullanıldığından, birçok eğri türü ve dolayısıyla kullanım alanı ortaya çıkmıştır. \mathbb{E}^3 Öklid uzayındaki eğriler teorisinin birçok önemli sonucu Monge tarafından ortaya çıkarılmıştır ve Darboux hareketli çatı fikrine öncülük etmiştir. Frenet ve Serret, kendi adlarıyla anılan hareketli çatı ile mekanik, kinematik ve diferensiyel geometride önemli rol oynayan özel denklemler elde etmişlerdir. Frenet-Serret çatısının tanımlanamadığı durumlarda, Bishop tarafından tanımlanan Bishop çatısı kullanılmıştır. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında regüler bir eğrinin konum vektörü diğer bir eğrinin Frenet çatısı ile belirlenebiliyorsa, bu eğri Smarandache eğrisi olarak adlandırılmıştır (Ali, 2010). Bu özel eğri türü ile ilgili çalışmalar, geometrik modellemeye katkı sağlamaktadır. Literatürde sıklıkla çalışılan Smarandache eğrilerin bazıları aşağıdaki gibi özetlenebilir.

Solouma üç boyutlu E_1^3 Minkowski uzayında spacelike bir M yüzeyindeki ζ eğrisinin eş formdaki Frenet çatısına yardımıyla eş formulu Smarandache eğrilerini tanıtmıştır. Ayrıca E_1^3 deki Smarandache eğrilerinin Frenet invaryantlarını çalışmıştır (Solouma, 2017). Abdel-Aziz ve Saad üç boyutlu E_1^3 Minkowski uzayında Darboux çatısına göre Smarandache eğrilerini incelemişlerdir (Abdel-Aziz and Saad, 2017). Yakut, Savaş ve Tamirci, Saban çatısına göre özel Smarandache eğrilerini tanıtmışlar ve De Sitter ve hiperbolik uzaylarda Smarandache eğrilerinin geodezik eğriliklerini incelemişlerdir. Ayrıca De Sitter ve hiperbolik uzaylarındaki Smarandache eğrileri arasındaki duallığın varlığı gösterilmiştir (Yakut, Savaş and Tamirci, 2014). Solouma ve

Mahmoud \mathbb{R}_1^3 Minkowski uzayında bir r eğrisinin eş formulu Bishop çatısını çalışmışlardır. Bu çatıyı kullanarak, \mathbb{R}_1^3 'deki spacelike bir taban eğrisinin özel spacelike eş formulu Bishop Smarandache eğrilerini çalışmıştır (Solouma and Mahmoud, 2019). Al-Dayel ve Solouma, spacelike Smarandache ψ eğrilerinin \mathbb{R}_1^3 Minkowski uzayındaki μ spacelike eğrisinin Bishop çatısına göre özelliklerini incelenmiştir (Al-Dayel and Solouma, 2021). Altun, Cevahir ve Şenyurt uzaysal kuaterniyonik eğri ve uzaysal kuaterniyonik eğrinin involüt eğrisinin Frenet çatıları arasındaki ilişkiyi Darboux vektörü ile temel eğrinin binormal vektörü arasındaki açıyı kullanarak ifade etmişlerdir. Ayrıca, içeri involüt eğrinin Frenet vektörleri konum vektörü olarak alınmış ve elde edilen Smarandache eğrilerinin eğriliği ve burulmasını hesaplamışlardır (Altun, Cevahir ve Şenyurt, 2019). Nurkan ve Güven, üç boyutlu Öklid uzayında Smarandache eğrilerin integral eğrileri yardımıyla adjoint eğriler üretmişlerdir. Bu yeni adjoint eğrilerin Frenet çatı ile ana eğri arasında bazı bağlantılarını elde etmişlerdir. Bu eğrilerin hangi koşullarda genel helis ve slant helis olarak nitelendirildiği gösterilmiştir (Nurkan ve Güven, 2022). Turgut ve Yılmaz, E_1^4 uzayında TB_2 olarak adlandırılan Smarandache eğrilerin özel bir durumunu tanımlamışlardır (Turgut ve Yılmaz, 2008). Taşköprü ve Tosun S^2 de Sabban çatısına göre özel Smarandache eğrilerini tanıtmışlar ve Smarandache eğrilerinin bazı karakterizasyonlarını ifade etmişlerdir (Taşköprü ve Tosun, 2012). Öztürk, Sarıkaya, Haskul ve Emir üç boyutlu Afin uzayında bulunan bir C^∞ eğrisinin Smarandache eğrilerini tanıtmışlardır. Ayrıca, elde edilen her eğrinin Frenet çatısı arasındaki ilişkiyi vermişlerdir (Öztürk, Sarıkaya, Haskul ve Emir, 2022). Şenyurt, Altun ve Cevahir Küresel göstergenin Mannheim eğrisini kullanarak Sabban çatısına göre özel Smarandache eğrilerini araştırmışlardır. Küresel göstergenin Mannheim eğrisi aracılığıyla Sabban çatısını oluşturmuşlardır (Şenyurt, Altun ve Cevahir, 2019). Kahraman ve Uğurlu bu çalışmada dual Darboux çatı yardımıyla bir birim dual kürede yatan dual Smarandache eğrileri çalışmışlardır. Dual küresel eğri ile onun dual Smarandache eğrisi arasındaki ilişkiyi vermişlerdir (Kahraman ve Uğurlu, 2014). Elzawy ve Mosa, G_4 4 boyutlu Galile uzayında Smarandache eğrilerini incelemiş ve G_4 'teki Smarandache eğrisi için Frenet-Serret değişmezlerini elde etmiştir (Elzawy and Mosa, 2017). Öztürk ve Koç, 3 boyutlu Minkowski uzayında spacelike yüzeydeki bir eğrinin Darboux çatısına göre Smarandache eğrilerini tanıtmışlardır (Öztürk ve Koç, 2014). Şenyurt alternatif çatıya göre Darboux vektörünü ifade etmiştir. Daha sonra, diferensiyellenebilir bir eğri ile tanımlanan D-alternatif vektörünün küresel gösterge

eğrisinin Sabban çatısını oluşturmuştur (Şenyurt, 2018). Şenyurt ve Öztürk, Salkowski eğrisinin küresel göstergeleri yardımıyla Smarandache eğrileri Sabban çatısına göre tanımlamışlardır (Şenyurt ve Öztürk, 2020).

Bir adjoint eğrinin çalışmasında farklı yaklaşımlar Karacan tarafından yeniden incelenmiştir. Karacan bir taban eğrisi ve adjoint taban eğrisi ile normal ve binormal yüzeyler olarak regle yüzeyleri verdi. Daha sonra spine eğrisi bir adjoint eğri olan tubular yüzeyleri ortaya çıkardı (Nurkan vd., 2019). Mňuk adjoint eğriden verilen bir indirgenemez cebirsel düzlem eğrisinin sistemini hesaplamak için cebirsel bir yaklaşım tanımlamıştır (Mňuk, 1997). Bayram asimptotik, geodezik ve eğrilik çizgisi olarak verilen belirli bir uzay eğrisinin adjoint eğrisine sahip olan yüzeyler oluşturmuştur. Ayrıca regle yüzeylerin açılabilir olma koşullarını elde etmiştir (Bayram, 2020). Körpınar, Sazak ve Körpınar, 3 boyutlu Minkowski uzayında q- çatıya göre adjoint eğrilerin focal eğrilerini karakterize etmişlerdir (Körpınar, Sazak ve Körpınar, 2022). Çakmak ve Şahin, 3 boyutlu Öklid uzayında alternatif hareketli çatıyı kullanarak birim hızlı uzay eğrisinin adjoint eğrisini tanımlanmıştır (Çakmak ve Şahin, 2022). Keskin, Yüksel, Karacan ve İkiz, adjoint eğrilerin paralel eğrilerinin bazı geometrik karakterizasyonlarını elde etmişlerdir (Keskin, Yüksel, Karacan ve İkiz, 2016). Cox ise Rees cebirinin bazı özelliklerini gözden geçirmiş ve hareketli eğri idealinin yapısı ve bunun adjoint eğrilerle ilişkisini vermiştir (Cox, 2008). Güler, 3 boyutlu Minkowski uzayında asimptotik geodezik ve eğrilik çizgisi olarak verilen adjoint eğriler boyunca kalem yüzeylerini incelemiştir (Güler, 2022). Baş, 3 boyutlu Öklid uzayında adjoint eğrilerin inextensible eğri akışının geometrik özelliklerini araştırmıştır. Ayrıca verilen eğrinin Frenet çatısını kullanarak kısmi diferansiyel denklemlerini elde etmiştir (Baş, 2019).

Bu tez çalışmasında ilk olarak çeşitli uzaylarda adjoint ve Smarandache eğri ilgili literatür çalışması tekrar gözden geçirilmiştir. Daha sonra elde edilen veriler ışığında bu güne kadar incelenmeyen Öklid uzayında bir adjoint eğrinin Smarandache eğrileri Frenet çatı yardımıyla elde edilmiştir. Böylece elde edilen yeni eğrilerin geometrik özellikleri incelenecektir. Daha sonra bu eğrilerin şekilleri Mathematica programı yardımıyla çizilecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmada sıklıkla kullanılan temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 2.1 A boştan farklı bir cümle, V de K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

Eğer,

$$f: A \times A \rightarrow V$$

$$(P, Q) \rightarrow f(P, Q) = \overrightarrow{PQ}$$

fonksiyonu

- i. $\forall P, Q, R \in A$ için $f(P, Q) + f(P, R) = f(P, R)$
- ii. $\forall P \in A, \forall \vec{\alpha} \in V$ için $f(P, Q) = \vec{\alpha}$ olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası vardır.

özelliklerini sağlıyorsa A 'ya V vektör uzayı ile birleşen n -boyutlu afin uzay denir. Burada i. ve ii. özelliklerine afin aksiyomları denir (Hacısalihoglu, 2000).

Tanım 2.2 A, V vektör uzayı ile birleşen n -boyutlu afin uzay olsun. $P_0, P_1, \dots, P_n \in A$ noktaları için $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ vektör sistemi ($\overrightarrow{P_0P_1} \in V$), V vektör uzayının bir bazı (tabanı) ise $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ nokta $(n + 1)$ -lisine A afin uzayında bir afin çatı denir. Burada P_0 noktasına afin çatının başlangıç noktası P_0, P_1, \dots, P_n noktalarına da afin çatının uç noktaları denir (Hacısalihoglu, 2000).

Teorem 2.3 A, V vektör uzayı ile birleşen n -boyutlu afin uzay olsun. A afin uzayında belli bir $P_0 \in A$ noktası tespit edildiğinde başlangıcı $P_0 \in A$ noktası olan bir afin çatı vardır (Hacısalihoglu, 2000).

İspat:

V, n -boyutlu bir vektör uzayı olduğundan $\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n\}$ sistemi V nin bir bazı olsun. $P_0 \in A$ noktası seçildiğinde ii. aksiyomu gereğince;

$$\vec{\alpha}_1 = \overrightarrow{P_0P_1} \text{ olacak şekilde bir tek } P_1 \in A,$$

$$\vec{\alpha}_2 = \overrightarrow{P_0P_2} \text{ olacak şekilde bir tek } P_2 \in A,$$

⋮

$\vec{\alpha}_n = \overrightarrow{P_0 P_n}$ olacak şekilde bir tek $P_n \in A$

noktası vardır. $\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n\}$ sistemi V 'nin bir bazı olduğundan $\{\overrightarrow{P_0 P_1}, \overrightarrow{P_0 P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0 P_n}\}$ sistemi de V nin bir bazıdır. O halde $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ sistemi başlangıç noktası $P_0 \in A$ olan bir A' da bir afin çatıdır.

Tanım 2.4 A, V vektör uzayı ile birleşen n –boyutlu afin uzay olsun. Eğer A afin uzayının birleştiği V vektör uzayı bir iç çarpımı uzayı ise bu A afin uzayına Öklid uzayı denir. Her afin uzay bir Öklid uzayı değilken her Öklid uzayı bir afin uzayıdır (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 2.5 $\mathbb{E}^n, \mathbb{R}^n$ iç çarpım uzayı ile birleşen bir Öklid uzayı ve $E_0, E_1, \dots, E_n \in \mathbb{E}^n$ olsun. Eğer $\{\overrightarrow{E_0 E_1}, \overrightarrow{E_0 E_2}, \dots, \overrightarrow{E_0 E_n}\}$ vektör sistemi \mathbb{R}^n uzayının bir ortonormal bazı ise yani, $\{\overrightarrow{E_0 E_1}, \overrightarrow{E_0 E_2}, \dots, \overrightarrow{E_0 E_n}\}, \mathbb{R}^n$ nin bir bazı ve $\langle \overrightarrow{E_0 E_i}, \overrightarrow{E_0 E_j} \rangle = \delta_{ij}$ (kronecker deltası) ise $\{E_0, E_1, \dots, E_n\}$ nokta kümesine \mathbb{E}^n de bir Öklid çatısı (dik çatı) denir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Uyarı 2.6 Her Öklid uzayı bir afin uzay olduğundan her Öklid çatısı da bir afin çatıdır.

Tanım 2.7

$$d : \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}, d(x, y) = \|\overrightarrow{xy}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonuna \mathbb{E}^n Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve $d(x, y) \in \mathbb{R}$ sayısına da x ile y noktaları arasındaki uzaklık denir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Teorem 2.8 \mathbb{E}^n uzaklık fonksiyonu bir metriktir (Hacısalıhoğlu, 2000).

İspat:

- i. \mathbb{E}^n ile birleşen \mathbb{R}^n iç çarpım uzayında iç çarpım fonksiyonu pozitif tanımlı olduğundan $\forall \alpha \in \mathbb{R}^n$ için $\|\alpha\| \geq 0$ yani

$$\|\alpha\| = \|\overrightarrow{xy}\| = d(x, y) \geq 0$$

dır. Bu durumda

$$d(x, y) = \|\vec{xy}\| = 0 \text{ ise } x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

$$x = y \text{ ise } x - y = 0 \text{ ve } d(x, y) = \|\vec{xy}\| = 0$$

yazılabilir.

- ii. $d(x, y) = \|\vec{xy}\| = \|\vec{yx}\| = d(y, x)$
- iii. $\|\vec{xz}\| = |\vec{xy} + \vec{yz}| \leq \|\vec{xy}\| + \|\vec{yz}\|$ dır.

Bu üç özellik sağlandığından \mathbb{E}^n de uzaklık fonksiyonu bir metriktir.

Tanım 2.9 n boyutlu Öklid uzayı \mathbb{E}^n de $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{E}^n$ için,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona standart iç çarpım veya Öklid iç çarpımı denir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 2.10 \mathbb{R}^n, n –boyutlu Öklid uzayı ve $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ için \vec{x} vektörünün normu

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$$

biçiminde tanımlanır (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 2.11 V bir iç çarpım uzayı olsun. $\vec{x}, \vec{y} \in V, \vec{x}, \vec{y} \neq 0$ olmak üzere bu iki vektör arasındaki açı

$$\cos \theta = \frac{\langle x, y \rangle}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}$$

eşitliği ile tanımlanır (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 2.12 3 boyutlu Öklid uzayı \mathbb{E}^3 de $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{E}^3$ için Öklid vektörel çarpımı,

$$x \wedge y = (x_2y_3 - y_2x_3, x_3y_1 - y_3x_1, x_1y_2 - y_1x_2)$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalihoglu, 2000).

Tanım 2.13 \mathbb{E}^n , n -boyutlu Öklid uzayı ve I , \mathbb{R} nin bir açık aralığı olmak üzere $\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ dönüşümü diferensiyellenebilir ise $\alpha(I)$ kümesine \mathbb{E}^n uzayı içinde bir eğri denir. Ayrıca (I, α) ikilisine eğrinin koordinat komşuluğu, I alt kümesine eğrinin parametre aralığı ve $t \in I$ reel sayısına eğrinin parametresi denir (Hacısalihoglu, 2000).

Tanım 2.14 \mathbb{E}^{n+1} de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^{n+1}$ nin Öklidiyen koordinat fonksiyonları $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ olmak üzere $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1})$, $\alpha(t) \in M$ eğrisinin diferansiyeli aşağıdaki gibidir,

$$\alpha'(t) = \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial t}, \frac{\partial \alpha_2}{\partial t}, \dots, \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial t} \right)$$

$\alpha'(t)$ tanjant vektörüne M eğrisinin $t \in I$ parametre değerine karşılık gelen $\alpha(t)$ noktasında, (I, α) koordinat komşuluğuna göre hız vektörü denir (Hacısalihoglu, 2000).

Tanım 2.15 \mathbb{E}^{n+1} de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. Eğer $\forall s \in I$ için,

$$\|\alpha'(t)\| = 1$$

ise M eğrisi (I, α) ya göre birim hızlı eğridir denir. Bu durumda eğrinin $s \in I$ parametresine yay-parametresi adı verilir (Hacısalihoglu, 2000).

Tanım 2.16 Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye regüler eğri denir (Hacısalihoglu, 2000).

Tanım 2.17 V bir iç çarpım uzayı $E \subset V$ olsun. E içindeki farklı her vektör çifti ortogonal ise E' ye ortogonal vektör kümesi denir. Ayrıca ortogonal E kümesindeki her vektörün uzunluğu 1 ise E' ye ortonormal bir küme denir (Hacısalihoglu, 2000).

Tanım 2.18 $M \subset \mathbb{E}^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda $\psi = \{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(r)}\}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall \alpha^{(k)}, k > r$, için: $\alpha^{(k)} \in S_p \psi$ olmak üzere ψ den elde edilen $\{V_1, \dots, V_r\}$ ortonormal sistemine, M eğrisinin Serret-Frenet r –ayaklı alanı ve $m \in M$ için $\{V_1(m), \dots, V_r(m)\}$ ye ise $m \in M$ noktasındaki Serret-Frenet r –ayaklısı denir. Her bir $V_i, 1 \leq i \leq r$, ye Serret-Frenet vektörü denir.

Özel hal: $n = 3$ özel halinde, 3 –boyutlu Öklid uzayında Serret-Frenet 3 –ayaklısı elde edilebilir. Bu özel halde; M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş ise $s \in I$ yay parametresi olmak üzere,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(s) &= \alpha'(s), \\ \mathbf{N}(s) &= \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}, \\ \mathbf{B}(s) &= \mathbf{T}(s) \wedge \mathbf{N}(s) \end{aligned} \quad (2.1)$$

şeklinindedir. Böylece $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$ sistemi, $\alpha(s)$ noktasında, M eğrisinin Serret-Frenet 3 –ayaklısıdır. Burada $\mathbf{T}(s)$ vektörüne, teğet vektör alanı, $\mathbf{N}(s)$ vektörüne asli normal vektör alanı ve $\mathbf{B}(s)$ vektörüne binormal vektör alanı adı verilir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 2.19 $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı regüler bir eğri olsun. Eğrinin birinci ve ikinci eğriliği sırasıyla $\kappa(s) = \|\mathbf{T}'(s)\|$ ve $\tau(s) = -\langle \mathbf{B}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle$ şeklinde tanımlanmak üzere $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$ Serret-Frenet çatısı için değişim formülleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T}'(s) \\ \mathbf{N}'(s) \\ \mathbf{B}'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T}(s) \\ \mathbf{N}(s) \\ \mathbf{B}(s) \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Birim hızlı α eğrisi için eğrisinin birinci eğriliği olan $\kappa(s)$ ifadesi eğrinin s parametresine karşılık gelen noktasındaki eğriliği adını alır ve $\kappa(s) = \|\alpha''(s)\|$ şeklinde hesaplanır. Eğrinin birinci eğriliği teğetten sapma miktarını ölçer. Eğrinin ikinci eğriliği olan $\tau(s)$ skaler çarpanına ise eğrinin s parametresine karşılık gelen noktasındaki burulması denir. Burulma kısaca eğrinin Oskülatör düzlemden ayrılma miktarının ölçüsü olarak da ifade edebilir ve aşağıdaki şekilde hesaplanır, (Hacısalıhoğlu, 2000),

$$\tau = \frac{\langle \alpha'(s) \wedge \alpha''(s), \alpha'''(s) \rangle}{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|^2}. \quad (2.3)$$

Tanım 2.20 (I, α) koordinat komşuluğu ile $M \subset \mathbb{E}^n$ eğrisi verilsin. $s \in I$ yay parametresine karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r –ayaklısı $\{\mathbf{V}_1(s), \dots, \mathbf{V}_r(s)\}$ olsun. Buna göre

$$k_i: I \rightarrow \mathbb{R} \quad 1 < i < r$$

$$s \rightarrow k_i(s) = \langle \mathbf{V}'_i(s), \mathbf{V}_{i+1}(s) \rangle$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna M eğrisinin i –yinci eğrilik fonksiyonu ve $s \in I$ için $k_i(s)$ reel sayısına da $\alpha(s)$ noktasında M nin i –yinci eğrilik denir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Teorem 2.21 (I, α) koordinat komşuluğu $M \subset \mathbb{E}^n$ eğrisi verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere, $\alpha(s)$ noktasında i –yinci eğrilik fonksiyonu $k_i(s)$ ve Frenet r –ayaklısı $\{\mathbf{V}_1(s), \dots, \mathbf{V}_r(s)\}$ ise

$$\begin{aligned} \mathbf{V}'_1(s) &= k_1(s) \mathbf{V}_2(s), \\ \mathbf{V}'_i(s) &= -k_{i-1}(s) \mathbf{V}_{i-1}(s) + k_i(s) \mathbf{V}_{i+1}(s), \quad 1 < i < r \\ \mathbf{V}'_r(s) &= -k_{r-1}(s) \mathbf{V}_{r-1}(s) \end{aligned}$$

olur (Hacısalıhoğlu, 2000).

3. ADJOİNT EĞRİNİN SMARANDACHE EĞRİLERİ

Bu bölümde bir uzay eğrisinin adjoint eğrisinin Smarandache eğrileri elde edilecek daha sonra elde edilen eğrilerin örnekleri verilecek ve şekilleri çizilecektir.

Tanım 3.1 Konum vektörü, herhangi bir α eğrisinin Frenet çatıları tarafından oluşturulan ve bu vektör tarafından çizilen regüler eğriye Smarandache eğrisi denir (Turgut ve Yılmaz, 2008).

Tanım 3.2 \mathbb{E}^3 'te birim hızlı bir α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet çatısı $\{\mathbf{T}_\alpha(s), \mathbf{N}_\alpha(s), \mathbf{B}_\alpha(s)\}$ olsun. O halde α eğrisinin adjoint eğrisi $\gamma(s) = \int_{s_0}^s \mathbf{B}_\alpha(s) ds$ 'dir. γ birim hızlı eğrisinin $\gamma(s)$ noktasında Frenet çatısı $\{\mathbf{T}_\gamma(s), \mathbf{N}_\gamma(s), \mathbf{B}_\gamma(s)\}$ ise bu durumda

$$\mathbf{T}_\gamma = \mathbf{B}_\alpha, \mathbf{N}_\gamma = -\mathbf{N}_\alpha, \mathbf{B}_\gamma = \mathbf{T}_\alpha \text{ ve } \kappa_\gamma = \tau_\alpha, \tau_\gamma = \kappa_\alpha$$

dır (Nurkan, 2019).

3.1 $T_\gamma N_\gamma$ -Smarandache Eğri

Tanım 3.1.1 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı adjoint eğrinin $\gamma(s)$ noktasında Frenet çatısı $\{\mathbf{T}_\gamma(s), \mathbf{N}_\gamma(s), \mathbf{B}_\gamma(s)\}$ olsun. Bu durumda γ eğrisinin $T_\gamma N_\gamma$ -Smarandache eğrisi

$$\beta_{T_\gamma N_\gamma}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{T}_\gamma(s) + \mathbf{N}_\gamma(s))$$

dir. Tanım 3.2 göz önüne alınırsa $T_\gamma N_\gamma$ -Smarandache eğrisi

$$\beta_{T_\gamma N_\gamma}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\mathbf{N}_\alpha(s) + \mathbf{B}_\alpha(s))$$

olarak yeniden yazılabilir.

Teorem 3.1.2 \mathbb{E}^3 'te birim hızlı bir α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet çatısı $\{\mathbf{T}_\alpha(s), \mathbf{N}_\alpha(s), \mathbf{B}_\alpha(s)\}$, eğriliği κ_α torsiyonu $\tau_\alpha \neq 0$ olsun. Ayrıca α eğrisinin adjoniti

olan $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrinin $\gamma(s)$ noktasında Frenet çatısı $\{\mathbf{T}_\gamma(s), \mathbf{N}_\gamma(s), \mathbf{B}_\gamma(s)\}$, eğriliği κ_γ torsiyonu τ_γ olsun. Bu durumda $\mathbf{T}_\gamma \mathbf{N}_\gamma$ -Smarandache eğrisinin eğriliği $\kappa_{\beta_{\mathbf{T}_\gamma \mathbf{N}_\gamma}}$ ve torsiyonu $\tau_{\beta_{\mathbf{T}_\gamma \mathbf{N}_\gamma}}$ ise sırasıyla;

$$\kappa_{\beta_{\mathbf{T}_\gamma \mathbf{N}_\gamma}} = \frac{\sqrt{2}}{(\kappa_\alpha^2 + 2\tau_\alpha^2)^2} \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}$$

ve

$$\begin{aligned} \tau_{\beta_{\mathbf{T}_\gamma \mathbf{N}_\gamma}} = & \frac{\sqrt{2} ((2\tau_\alpha^3 + \kappa_\alpha^2 \tau_\alpha) \overline{\lambda_1} + (\kappa_\alpha \tau'_\alpha - \kappa'_\alpha \tau_\alpha) \overline{\lambda_2})}{\sigma_1} \\ & + \frac{(\kappa_\alpha^3 + 2\kappa_\alpha \tau_\alpha^2 - \kappa_\alpha \tau'_\alpha + \kappa'_\alpha \tau_\alpha) \overline{\lambda_3}}{\sigma_1} \end{aligned}$$

olup burada

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= (2\tau_\alpha^3 + \kappa_\alpha^2 \tau_\alpha)^2 + (\kappa_\alpha \tau'_\alpha + \kappa'_\alpha \tau_\alpha)^2 + (\kappa_\alpha^3 + 2\kappa_\alpha \tau_\alpha^2 - \kappa_\alpha \tau'_\alpha + \kappa'_\alpha \tau_\alpha)^2, \\ \lambda_1 &= (\kappa_\alpha^2 + 2\tau_\alpha^2) \kappa_\alpha \tau_\alpha + 2\tau_\alpha (\tau_\alpha \kappa'_\alpha - \kappa_\alpha \tau'_\alpha), \\ \lambda_2 &= (\kappa_\alpha^2 + 2\tau_\alpha^2) (\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2) + \kappa_\alpha (\kappa'_\alpha \tau_\alpha - \kappa_\alpha \tau'_\alpha), \\ \lambda_3 &= (\kappa_\alpha^2 + 2\tau_\alpha^2) (-\tau_\alpha^2) + \kappa_\alpha (\tau_\alpha \kappa'_\alpha - \kappa_\alpha \tau'_\alpha), \\ \overline{\lambda_1} &= -\kappa_\alpha^3 + (\tau_\alpha^2 + 2\tau'_\alpha) \kappa_\alpha + \tau_\alpha \kappa'_\alpha + \kappa''_\alpha, \\ \overline{\lambda_2} &= \kappa_\alpha (\kappa_\alpha + 3\kappa'_\alpha + \tau_\alpha) + \tau_\alpha (3\tau'_\alpha + \tau_\alpha^2) - \tau''_\alpha, \\ \overline{\lambda_3} &= \tau_\alpha (\kappa_\alpha^2 - 3\tau'_\alpha + \tau_\alpha^2) - \tau''_\alpha \end{aligned}$$

dır.

İspat $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı adjoint eğrinin $\gamma(s)$ noktasında Frenet çatısı $\{\mathbf{T}_\gamma(s), \mathbf{N}_\gamma(s), \mathbf{B}_\gamma(s)\}$ olmak üzere $\mathbf{T}_\gamma \mathbf{N}_\gamma$ -Smarandache eğrisi

$$\beta_{\mathbf{T}_\gamma \mathbf{N}_\gamma}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{T}_\gamma(s) + \mathbf{N}_\gamma(s))$$

şeklinde tanımlanır. Tanım 3.1.1 den

$$\beta_{\mathbf{T}_\gamma \mathbf{N}_\gamma}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\mathbf{N}_\alpha(s) + \mathbf{B}_\alpha(s))$$

yazılır. $\beta_{T_\gamma N_\gamma}(s), T_\gamma N_\gamma$ -Smarandache eğrisinin eğrilik ve torsiyonunu hesaplamak için s parametresine göre birinci türev alınırsa;

$$\frac{d\beta_{T_\gamma N_\gamma}}{ds} \frac{ds_\beta}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\kappa_\alpha T_\alpha - \tau_\alpha N_\alpha - \tau_\alpha B_\alpha)$$

elde edilir. Burada

$$\left\| \frac{d\beta_{T_\gamma N_\gamma}}{ds_\beta} \right\| = 1$$

olduğundan

$$\frac{ds_\beta}{ds} = \sqrt{\frac{1}{2} (\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2 + \tau_\alpha^2)} = \sqrt{\frac{\kappa_\alpha^2 + 2\tau_\alpha^2}{2}}$$

bulunur. Yani $\beta_{T_\gamma N_\gamma}(s)$ eğrisinin teğet vektörü

$$\mathbf{T}_{\beta_{T_\gamma N_\gamma}} = \frac{\kappa_\alpha T_\alpha - \tau_\alpha N_\alpha - \tau_\alpha B_\alpha}{\sqrt{\kappa_\alpha^2 + 2\tau_\alpha^2}}$$

dır. Teğet vektörünün türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{T}'_{\beta_{T_\gamma N_\gamma}} &= ((\kappa'_\alpha T_\alpha + \kappa_\alpha T'_\alpha - \tau'_\alpha N_\alpha - \tau_\alpha N'_\alpha - \tau'_\alpha B_\alpha - \tau_\alpha B'_\alpha) \sqrt{\kappa_\alpha^2 + 2\tau_\alpha^2}) \\ &\quad - \frac{2\kappa_\alpha \kappa'_\alpha + 4\tau_\alpha \tau'_\alpha}{2\sqrt{\kappa_\alpha^2 + 2\tau_\alpha^2}} (\kappa_\alpha T_\alpha - \tau_\alpha N_\alpha - \tau_\alpha B_\alpha) \frac{1}{\kappa_\alpha^2 + 2\tau_\alpha^2} \\ &= ((\kappa'_\alpha T_\alpha + \kappa_\alpha^2 N_\alpha - \tau'_\alpha N_\alpha + \kappa_\alpha \tau_\alpha T_\alpha - \tau_\alpha^2 B_\alpha - \tau'_\alpha B_\alpha + \tau_\alpha^2 N_\alpha) \sqrt{\kappa_\alpha^2 + 2\tau_\alpha^2} \\ &\quad - \frac{\kappa_\alpha^2 \kappa'_\alpha T_\alpha - \kappa_\alpha \tau_\alpha \kappa'_\alpha N_\alpha - \kappa_\alpha \tau_\alpha \kappa'_\alpha B_\alpha + 2\tau_\alpha \kappa_\alpha \tau'_\alpha T_\alpha - 2\tau_\alpha^2 \tau'_\alpha N_\alpha - 2\tau_\alpha^2 \tau'_\alpha B_\alpha}{\sqrt{\kappa_\alpha^2 + 2\tau_\alpha^2}}) \\ &\quad \times \frac{1}{\kappa_\alpha^2 + 2\tau_\alpha^2} \\ &= ((\kappa'_\alpha T_\alpha + \kappa_\alpha^2 N_\alpha - \tau'_\alpha N_\alpha + \kappa_\alpha \tau_\alpha T_\alpha - \tau_\alpha^2 B_\alpha - \tau'_\alpha B_\alpha + \tau_\alpha^2 N_\alpha) (\kappa_\alpha^2 + 2\tau_\alpha^2) \\ &\quad - \kappa_\alpha^2 \kappa'_\alpha T_\alpha + \kappa_\alpha \tau_\alpha \kappa'_\alpha N_\alpha + \kappa_\alpha \tau_\alpha \kappa'_\alpha B_\alpha - 2\tau_\alpha \kappa_\alpha \tau'_\alpha T_\alpha + 2\tau_\alpha^2 \tau'_\alpha N_\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2\tau_\alpha^2 \tau'_\alpha \mathbf{B}_\alpha) \frac{1}{(\kappa_\alpha^2 + 2\tau_\alpha^2)^{\frac{3}{2}}} \\
= & (\kappa_\alpha^2 \kappa'_\alpha \mathbf{T}_\alpha + \kappa_\alpha^4 \mathbf{N}_\alpha - \kappa_\alpha^2 \tau'_\alpha \mathbf{N}_\alpha + \kappa_\alpha^3 \tau_\alpha^4 \mathbf{T}_\alpha - \kappa_\alpha^2 \tau_\alpha^2 \mathbf{B}_\alpha - \kappa_\alpha^2 \tau'_\alpha \mathbf{B}_\alpha \\
& + \kappa_\alpha^2 \tau_\alpha^2 \mathbf{N}_\alpha + 2\tau_\alpha^2 \kappa'_\alpha \mathbf{T}_\alpha + 2\kappa_\alpha^2 \tau_\alpha^2 \mathbf{N}_\alpha - 2\tau_\alpha^2 \tau'_\alpha \mathbf{N}_\alpha + 2\kappa_\alpha \tau_\alpha^3 \mathbf{T}_\alpha - 2\tau_\alpha^4 \mathbf{B}_\alpha \\
& - 2\tau_\alpha^2 \tau'_\alpha \mathbf{B}_\alpha + 2\tau_\alpha^4 \mathbf{N}_\alpha - \kappa_\alpha^2 \kappa'_\alpha \mathbf{T}_\alpha + \kappa_\alpha \tau_\alpha \kappa'_\alpha \mathbf{N}_\alpha + \kappa_\alpha \tau_\alpha \kappa'_\alpha \mathbf{B}_\alpha - 2\tau_\alpha \kappa_\alpha \tau'_\alpha \mathbf{T}_\alpha \\
& + 2\tau_\alpha^2 \tau'_\alpha \mathbf{N}_\alpha + 2\tau_\alpha^2 \tau'_\alpha \mathbf{B}_\alpha) \frac{1}{(\kappa_\alpha^2 + 2\tau_\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= (\kappa_\alpha^2 + 2\tau_\alpha^2) \kappa_\alpha \tau_\alpha + 2\tau_\alpha (\tau_\alpha \kappa'_\alpha - \kappa_\alpha \tau'_\alpha), \\
\lambda_2 &= (\kappa_\alpha^2 + 2\tau_\alpha^2) (\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2) + \kappa_\alpha (\kappa'_\alpha \tau_\alpha - \kappa_\alpha \tau'_\alpha), \\
\lambda_3 &= (\kappa_\alpha^2 + 2\tau_\alpha^2) (-\tau_\alpha^2) + \kappa_\alpha (\tau_\alpha \kappa'_\alpha - \kappa_\alpha \tau'_\alpha)
\end{aligned}$$

dersek $\mathbf{T}'_{\beta_{T_\gamma N_\gamma}}$ vektörü

$$\mathbf{T}'_{\beta_{T_\gamma N_\gamma}} = \frac{\sqrt{2}}{(\kappa_\alpha^2 + 2\tau_\alpha^2)^2} (\lambda_1 \mathbf{T}_\alpha + \lambda_2 \mathbf{N}_\alpha + \lambda_3 \mathbf{B}_\alpha) \quad (3.1)$$

olarak elde edilir. (3.1) eşitliğinin her iki yanının normu alınırsa

$$\kappa_{\beta_{T_\gamma N_\gamma}} = \|\mathbf{T}'_{\beta_{T_\gamma N_\gamma}}\| = \frac{\sqrt{2}}{(\kappa_\alpha^2 + 2\tau_\alpha^2)^2} \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} \quad (3.2)$$

elde edilir. (3.1) ve (3.2) eşitliklerinden $\beta_{T_\gamma N_\gamma}$ eğrisinin asli normal vektör alanı

$$\mathbf{N}_{\beta_{T_\gamma N_\gamma}} = \frac{\mathbf{T}'_{\beta_{T_\gamma N_\gamma}}}{\|\mathbf{T}'_{\beta_{T_\gamma N_\gamma}}\|} = \frac{\lambda_1 \mathbf{T}_\alpha + \lambda_2 \mathbf{N}_\alpha + \lambda_3 \mathbf{B}_\alpha}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}}$$

şeklinde bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{\beta_{T_\gamma N_\gamma}} &= \mathbf{T}_{\beta_{T_\gamma N_\gamma}} \wedge \mathbf{N}_{\beta_{T_\gamma N_\gamma}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\kappa_\alpha^2 + 2\tau_\alpha^2} \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}} \begin{vmatrix} \mathbf{T}_\alpha & \mathbf{N}_\alpha & \mathbf{B}_\alpha \\ \kappa_\alpha & -\tau_\alpha & -\tau_\alpha \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \frac{(\tau_\alpha \lambda_2 - \tau_\alpha \lambda_3) \mathbf{T}_\alpha - (\tau_\alpha \lambda_1 + \kappa_\alpha \lambda_3) \mathbf{N}_\alpha + (\tau_\alpha \lambda_1 + \kappa_\alpha \lambda_2) \mathbf{B}_\alpha}{\sqrt{\kappa_\alpha^2 + 2\tau_\alpha^2} \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}}$$

dir. Diğer taraftan $\mathbf{T}_\gamma \mathbf{N}_\gamma$ Smarandache eğrisinin torsiyonu bulmak için ilk olarak $\beta_{\mathbf{T}_\gamma \mathbf{N}_\gamma}$ eğrisinin birinci, ikinci ve üçüncü türevleri

$$\begin{aligned} \beta'_{\mathbf{T}_\gamma \mathbf{N}_\gamma} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\kappa_\alpha \mathbf{T}_\alpha - \tau_\alpha \mathbf{N}_\alpha - \tau_\alpha \mathbf{B}_\alpha) \\ \beta''_{\mathbf{T}_\gamma \mathbf{N}_\gamma} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\kappa'_\alpha \mathbf{T}_\alpha + \mathbf{T}'_\alpha \kappa_\alpha - \tau'_\alpha \mathbf{N}_\alpha - \mathbf{N}'_\alpha \tau_\alpha - \tau'_\alpha \mathbf{B}_\alpha - \mathbf{B}'_\alpha \tau_\alpha) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\kappa'_\alpha \mathbf{T}_\alpha + \kappa_\alpha^2 \mathbf{N}_\alpha - \mathbf{T}'_\alpha \mathbf{N}_\alpha + \kappa_\alpha \tau_\alpha \mathbf{T}_\alpha - \tau_\alpha^2 \mathbf{B}_\alpha - \tau'_\alpha \kappa_\alpha + \tau_\alpha^2 \mathbf{N}_\alpha) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} ((\kappa_\alpha \tau_\alpha + \kappa'_\alpha) \mathbf{T}_\alpha + (\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2 - \tau'_\alpha) \mathbf{N}_\alpha - (\tau_\alpha^2 + \tau'_\alpha) \mathbf{B}_\alpha) \\ \beta'''_{\mathbf{T}_\gamma \mathbf{N}_\gamma} &= \frac{1}{\sqrt{2}} ((\kappa'_\alpha \tau_\alpha + \kappa_\alpha \tau'_\alpha + \kappa''_\alpha) \mathbf{T}_\alpha + (\kappa_\alpha + \tau_\alpha + \kappa'_\alpha) \mathbf{T}'_\alpha \\ &\quad + (2\kappa_\alpha \kappa'_\alpha + 2\tau_\alpha \tau'_\alpha - \tau''_\alpha) \mathbf{N}_\alpha + (\kappa_\alpha^2 \tau_\alpha^2 - \tau'_\alpha) \mathbf{N}'_\alpha \\ &\quad - (2\tau_\alpha \tau'_\alpha - \tau''_\alpha) \mathbf{B}_\alpha - (\tau_\alpha^2 + \tau_\alpha^2) \mathbf{B}'_\alpha) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} ((\kappa'_\alpha \tau_\alpha + \kappa_\alpha \tau'_\alpha + \kappa''_\alpha) \mathbf{T}_\alpha + (\kappa_\alpha^2 + \kappa_\alpha \tau_\alpha + \kappa_\alpha \kappa'_\alpha) \mathbf{N}_\alpha \\ &\quad + (2\kappa_\alpha \kappa'_\alpha + 2\tau_\alpha \tau'_\alpha - \tau''_\alpha) \mathbf{N}_\alpha + (-\kappa_\alpha^3 - \kappa_\alpha \tau_\alpha^2 + \kappa_\alpha \tau'_\alpha) \mathbf{T}_\alpha \\ &\quad + (\kappa_\alpha^2 \tau_\alpha + \tau_\alpha^3 - \tau_\alpha \tau'_\alpha) \mathbf{B}_\alpha - (2\tau_\alpha \tau'_\alpha + \tau''_\alpha) \mathbf{B}_\alpha + (\tau_\alpha^3 + \tau_\alpha \tau'_\alpha) \mathbf{N}_\alpha) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} ((-\kappa_\alpha^3 - \kappa_\alpha \tau_\alpha^2 + 2\kappa_\alpha \tau'_\alpha + \tau_\alpha \kappa'_\alpha + \kappa''_\alpha) \mathbf{T}_\alpha + (\kappa_\alpha^2 + 3\kappa_\alpha \kappa'_\alpha + \kappa_\alpha \tau_\alpha \\ &\quad + 3\tau_\alpha \tau'_\alpha \tau''_\alpha + \tau_\alpha^3 - \tau''_\alpha) \mathbf{N}_\alpha + (\kappa_\alpha^2 \tau_\alpha - 3\tau_\alpha \tau'_\alpha + \tau_\alpha^3 - \tau''_\alpha) \mathbf{B}_\alpha) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\overline{\lambda}_1 \mathbf{T}_\alpha + \overline{\lambda}_2 \mathbf{N}_\alpha + \overline{\lambda}_3 \mathbf{B}_\alpha) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} \overline{\lambda}_1 &= -\kappa_\alpha^3 + (\tau_\alpha^2 + 2\tau'_\alpha) \kappa_\alpha + \tau_\alpha \kappa'_\alpha + \kappa''_\alpha, \\ \overline{\lambda}_2 &= \kappa_\alpha (\kappa_\alpha + 3\kappa'_\alpha + \tau_\alpha) + \tau_\alpha (3\tau'_\alpha + \tau_\alpha^2) - \tau''_\alpha, \\ \overline{\lambda}_3 &= \tau_\alpha (\kappa_\alpha^2 - 3\tau'_\alpha + \tau_\alpha^2) - \tau''_\alpha \end{aligned}$$

dir. $\beta_{\mathbf{T}_\gamma \mathbf{N}_\gamma}$ eğrisinin torsiyonu

$$\begin{aligned}
\beta'_{T_\gamma N_\gamma} \wedge \beta''_{T_\gamma N_\gamma} &= \begin{vmatrix} \mathbf{T}_\alpha & \mathbf{N}_\alpha & \mathbf{B}_\alpha \\ \kappa_\alpha & -\tau_\alpha & -\tau_\alpha \\ \kappa_\alpha \tau_\alpha + \kappa'_\alpha & \kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2 - \tau'_\alpha & -\tau_\alpha^2 - \tau'_\alpha \end{vmatrix} \\
&= (\tau_\alpha^3 + \tau_\alpha \tau'_\alpha + \kappa_\alpha^2 \tau_\alpha + \tau_\alpha^3 - \tau_\alpha \tau'_\alpha) \mathbf{T}_\alpha \\
&\quad + (\kappa_\alpha \tau_\alpha^2 - \kappa'_\alpha \tau_\alpha - \kappa_\alpha \tau_\alpha^2 + \kappa_\alpha \tau'_\alpha) \mathbf{N}_\alpha \\
&\quad + (\kappa_\alpha^3 + \kappa_\alpha \tau_\alpha^2 - \kappa_\alpha \tau'_\alpha + \kappa_\alpha \tau_\alpha^2 + \kappa'_\alpha \tau_\alpha) \mathbf{B}_\alpha
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\tau_{\beta_{T_\gamma N_\gamma}} &= \frac{\langle \beta'_{T_\gamma N_\gamma} \wedge \beta''_{T_\gamma N_\gamma}, \beta'''_{T_\gamma N_\gamma} \rangle}{\| \beta'_{T_\gamma N_\gamma} \wedge \beta''_{T_\gamma N_\gamma} \|^2} \\
&= \frac{\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \mathbf{T}_\alpha & \mathbf{N}_\alpha & \mathbf{B}_\alpha \\ \kappa_\alpha & -\tau_\alpha & -\tau_\alpha \\ \kappa_\alpha \tau_\alpha + \kappa'_\alpha & \kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2 - \tau'_\alpha & -\tau_\alpha^2 - \tau'_\alpha \end{vmatrix}, (\bar{\lambda}_1 \mathbf{T}_\alpha + \bar{\lambda}_2 \mathbf{N}_\alpha + \bar{\lambda}_3 \mathbf{B}_\alpha) \rangle}{\| \beta'_{T_\gamma N_\gamma} \wedge \beta''_{T_\gamma N_\gamma} \|^2} \\
&= \frac{\langle \frac{1}{\sqrt{2}} (2\tau_\alpha^3 + \kappa_\alpha^2) \mathbf{T}_\alpha + (\kappa_\alpha \tau'_\alpha - \kappa'_\alpha \tau_\alpha) \mathbf{N}_\alpha + (\kappa_\alpha^3 + 2\kappa_\alpha \tau_\alpha^2 - \kappa_\alpha \tau'_\alpha + \kappa'_\alpha \tau_\alpha) \mathbf{B}_\alpha, \bar{\lambda}_1 \mathbf{T}_\alpha + \bar{\lambda}_2 \mathbf{N}_\alpha + \bar{\lambda}_3 \mathbf{B}_\alpha \rangle}{(2\tau_\alpha^3 + \kappa_\alpha^2 \tau_\alpha)^2 + (\kappa_\alpha \tau'_\alpha + \kappa'_\alpha \tau_\alpha)^2 + (\kappa_\alpha^3 + 2\kappa_\alpha \tau_\alpha^2 - \kappa_\alpha \tau'_\alpha + \kappa'_\alpha \tau_\alpha)^2} \\
&= \frac{\sqrt{2} ((2\tau_\alpha^3 + \kappa_\alpha^2 \tau_\alpha) \bar{\lambda}_1 + (\kappa_\alpha \tau'_\alpha - \kappa'_\alpha \tau_\alpha) \bar{\lambda}_2 + (\kappa_\alpha^3 + 2\kappa_\alpha \tau_\alpha^2 - \kappa_\alpha \tau'_\alpha + \kappa'_\alpha \tau_\alpha) \bar{\lambda}_3)}{(2\tau_\alpha^3 + \kappa_\alpha^2 \tau_\alpha)^2 + (\kappa_\alpha \tau'_\alpha + \kappa'_\alpha \tau_\alpha)^2 + (\kappa_\alpha^3 + 2\kappa_\alpha \tau_\alpha^2 - \kappa_\alpha \tau'_\alpha + \kappa'_\alpha \tau_\alpha)^2}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

3.2 $T_\gamma B_\gamma$ -Smarandache Eğri

Tanım 3.2.1 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı adjoint eğrisinin $\gamma(s)$ noktasında Frenet çatısı $\{\mathbf{T}_\gamma(s), \mathbf{N}_\gamma(s), \mathbf{B}_\gamma(s)\}$ olsun. Bu durumda γ eğrisinin $T_\gamma B_\gamma$ -Smarandache eğrisi

$$\beta_{T_\gamma B_\gamma}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{T}_\gamma(s) + \mathbf{B}_\gamma(s))$$

dir. Tanım 3.2 göz önüne alınırsa $T_\gamma B_\gamma$ -Smarandache eğrisi

$$\beta_{T_\gamma B_\gamma}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{T}_\alpha(s) + \mathbf{B}_\alpha(s))$$

olarak yeniden yazılabilir.

Teorem 3.2.2 \mathbb{E}^3 'te birim hızlı bir α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet çatısı $\{\mathbf{T}_\alpha(s), \mathbf{N}_\alpha(s), \mathbf{B}_\alpha(s)\}$, eğriliği κ_α torsiyonu $\tau_\alpha \neq 0$ olsun. Ayrıca α eğrisinin adjoniti olan $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrinin $\gamma(s)$ noktasında Frenet çatısı $\{\mathbf{T}_\gamma(s), \mathbf{N}_\gamma(s), \mathbf{B}_\gamma(s)\}$, eğriliği κ_γ torsiyonu τ_γ olsun. Bu durumda $\mathbf{T}_\gamma \mathbf{B}_\gamma$ -Smarandache eğrisinin eğriliği $\kappa_{\beta_{\mathbf{T}_\gamma \mathbf{B}_\gamma}}$ ve torsiyonu $\tau_{\beta_{\mathbf{T}_\gamma \mathbf{B}_\gamma}}$ ise sırasıyla;

$$\kappa_{\beta_{\mathbf{T}_\gamma \mathbf{B}_\gamma}} = \frac{\sqrt{2(\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2)}}{\kappa_\alpha - \tau_\alpha}$$

ve

$$\begin{aligned} \tau_{\beta_{\mathbf{T}_\gamma \mathbf{B}_\gamma}} &= \frac{\sqrt{2} ((\kappa_\alpha^2 \tau_\alpha - \kappa_\alpha \tau_\alpha^2 - \kappa_\alpha \tau_\alpha^2 + \tau_\alpha^3) \delta_1)}{\sigma_2} \\ &+ \frac{(\kappa_\alpha^3 - 2\kappa_\alpha^2 \tau_\alpha + \kappa_\alpha \tau_\alpha^2) \delta_3}{\sigma_2} \end{aligned}$$

olup burada

$$\sigma_2 = (\kappa_\alpha^2 \tau_\alpha - \kappa_\alpha \tau_\alpha^2 - \kappa_\alpha \tau_\alpha^2 + \tau_\alpha^3)^2 + (\kappa_\alpha^3 - 2\kappa_\alpha^2 \tau_\alpha + \kappa_\alpha \tau_\alpha^2)^2,$$

$$\delta_1 = -3\kappa_\alpha \kappa'_\alpha + \kappa'_\alpha \tau_\alpha + 2\kappa_\alpha \tau'_\alpha,$$

$$\delta_2 = \tau_\alpha^3 - \kappa_\alpha^3 + \kappa_\alpha^2 \tau_\alpha - \kappa_\alpha \tau_\alpha^2 - \tau_\alpha'' + \kappa_\alpha'',$$

$$\delta_3 = \kappa_\alpha \tau'_\alpha + 2\tau_\alpha \kappa'_\alpha - 3\tau_\alpha \tau'_\alpha$$

dir.

İspat $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı adjoint eğrinin $\gamma(s)$ noktasında Frenet çatısı $\{\mathbf{T}_\gamma(s), \mathbf{N}_\gamma(s), \mathbf{B}_\gamma(s)\}$ olmak üzere $\mathbf{T}_\gamma \mathbf{B}_\gamma$ -Smarandache eğrisi

$$\beta_{\mathbf{T}_\gamma \mathbf{B}_\gamma}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{T}_\gamma(s) + \mathbf{B}_\gamma(s))$$

şeklinde tanımlanır. Tanım 3.2.1 den

$$\beta_{\mathbf{T}_\gamma \mathbf{B}_\gamma}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{T}_\alpha(s) + \mathbf{B}_\alpha(s))$$

yazılır. $\beta_{T_\gamma B_\gamma}(s), T_\gamma B_\gamma$ -Smarandache eğrisinin eğrilik ve torsiyonunu hesaplamak için s parametresine göre birinci türev alınırsa;

$$\frac{d\beta_{T_\gamma B_\gamma}}{ds_\beta} \frac{ds_\beta}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\kappa_\alpha - \tau_\alpha) \mathbf{N}_\alpha$$

elde edilir. Burada

$$\left\| \frac{d\beta_{T_\gamma B_\gamma}}{ds_\beta} \right\| = 1$$

olduğundan

$$\frac{ds_\beta}{ds} = \sqrt{\frac{(\kappa_\alpha - \tau_\alpha)^2}{2}} = \frac{|\kappa_\alpha - \tau_\alpha|}{\sqrt{2}}$$

bulunur. Yani $\beta_{T_\gamma B_\gamma}(s)$ eğrisinin teğet vektörü

$$\mathbf{T}_{\beta_{T_\gamma B_\gamma}} = \begin{cases} \mathbf{N}_\alpha & \kappa_\alpha > \tau_\alpha \\ -\mathbf{N}_\alpha & \kappa_\alpha < \tau_\alpha \end{cases}$$

dır. Tezin geri kalan kısmında $\mathbf{T}_{\beta_{T_\gamma B_\gamma}} = \mathbf{N}_\alpha$ alınacaktır. Teğet vektörünün türevi alınırsa

$$\mathbf{T}'_{\beta_{T_\gamma B_\gamma}} = \frac{\sqrt{2}}{\kappa_\alpha - \tau_\alpha} (-\kappa_\alpha \mathbf{T}_\alpha + \tau_\alpha \mathbf{B}_\alpha) \quad (3.3)$$

olarak elde edilir. (3.3) eşitliğinin her iki yanının normu alınırsa

$$\kappa_{\beta_{T_\gamma B_\gamma}} = \left\| \mathbf{T}'_{\beta_{T_\gamma B_\gamma}} \right\| = \frac{\sqrt{2(\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2)}}{\kappa_\alpha - \tau_\alpha} \quad (3.4)$$

elde edilir. (3.3) ve (3.4) eşitliklerinden $\beta_{T_\gamma B_\gamma}$ eğrisinin asli normal vektör alanı

$$\mathbf{N}_{\beta_{T_\gamma B_\gamma}} = \frac{\mathbf{T}'_{\beta_{T_\gamma B_\gamma}}}{\left\| \mathbf{T}'_{\beta_{T_\gamma B_\gamma}} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{2(\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2)}} (-\kappa_\alpha \mathbf{T}_\alpha + \tau_\alpha \mathbf{B}_\alpha)$$

şeklinde bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}_{\beta_{T_\gamma B_\gamma}} &= \mathbf{T}_{\beta_{T_\gamma B_\gamma}} \wedge \mathbf{N}_{\beta_{T_\gamma B_\gamma}} \\
 &= \frac{1}{\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2} \begin{vmatrix} \mathbf{T}_\alpha & \mathbf{N}_\alpha & \mathbf{B}_\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\kappa_\alpha & 0 & \tau_\alpha \end{vmatrix} \\
 &= \frac{\tau_\alpha \mathbf{T}_\alpha + \kappa_\alpha \mathbf{B}_\alpha}{\sqrt{\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2}}
 \end{aligned}$$

dir. Diğer taraftan $\mathbf{T}_\gamma \mathbf{B}_\gamma$ -Smarandache eğrisinin torsiyonu bulmak için ilk olarak $\beta_{T_\gamma B_\gamma}$ eğrisinin birinci, ikinci ve üçüncü türevleri

$$\begin{aligned}
 \beta'_{T_\gamma B_\gamma} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\kappa_\alpha - \tau_\alpha) \mathbf{N}_\alpha \\
 \beta''_{T_\gamma B_\gamma} &= \frac{1}{\sqrt{2}} ((\kappa'_\alpha - \tau'_\alpha) \mathbf{N}_\alpha + (\kappa_\alpha - \tau_\alpha) \mathbf{N}'_\alpha) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\kappa'_\alpha \mathbf{N}_\alpha - \tau'_\alpha \mathbf{N}_\alpha + (\kappa_\alpha - \tau_\alpha) (-\kappa_\alpha \mathbf{T}_\alpha + \tau_\alpha \mathbf{B}_\alpha)) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\kappa'_\alpha \mathbf{N}_\alpha - \tau'_\alpha \mathbf{N}_\alpha - \kappa_\alpha^2 \mathbf{T}_\alpha + \kappa_\alpha \tau_\alpha \mathbf{T}_\alpha + \kappa_\alpha \tau_\alpha \mathbf{B}_\alpha - \tau_\alpha^2 \mathbf{B}_\alpha) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} ((-\kappa_\alpha^2 + \kappa_\alpha \tau_\alpha) \mathbf{T}_\alpha + (\kappa'_\alpha - \tau'_\alpha) \mathbf{N}_\alpha + (\kappa_\alpha \tau_\alpha - \tau_\alpha^2) \mathbf{B}_\alpha) \\
 \beta'''_{T_\gamma B_\gamma} &= \frac{1}{\sqrt{2}} ((-2\kappa_\alpha \kappa'_\alpha + \kappa'_\alpha \tau_\alpha + \kappa_\alpha \tau'_\alpha) \mathbf{T}_\alpha + (-\kappa_\alpha^2 + \kappa_\alpha \tau_\alpha) \mathbf{T}'_\alpha + (\kappa''_\alpha - \tau''_\alpha) \mathbf{N}_\alpha \\
 &\quad + (\kappa'_\alpha - \tau'_\alpha) \mathbf{N}'_\alpha + (\kappa_\alpha \tau'_\alpha + \kappa'_\alpha \tau_\alpha - 2\tau_\alpha \tau'_\alpha) \mathbf{B}_\alpha + (\kappa_\alpha \tau_\alpha - \tau_\alpha^2) \mathbf{B}'_\alpha) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} ((-2\kappa_\alpha \kappa'_\alpha + \kappa'_\alpha \tau_\alpha + \kappa_\alpha \tau'_\alpha) \mathbf{T}_\alpha + (-\kappa_\alpha^3 + \kappa_\alpha^2 \tau_\alpha) \mathbf{N}_\alpha + (\kappa''_\alpha - \tau''_\alpha) \mathbf{N}_\alpha \\
 &\quad + (-\kappa_\alpha \kappa'_\alpha + \kappa_\alpha \tau'_\alpha) \mathbf{T}_\alpha + (\tau_\alpha \kappa'_\alpha - \tau_\alpha \tau'_\alpha) \mathbf{B}_\alpha \\
 &\quad + (\kappa_\alpha \tau'_\alpha + \kappa'_\alpha \tau_\alpha - 2\tau_\alpha \tau'_\alpha) \mathbf{B}_\alpha + (-\kappa_\alpha \tau_\alpha^2 + \tau_\alpha^3) \mathbf{N}_\alpha) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} ((-3\kappa_\alpha \kappa'_\alpha + \kappa'_\alpha \tau_\alpha + 2\kappa_\alpha \tau'_\alpha) \mathbf{T}_\alpha + (\tau_\alpha^3 - \kappa_\alpha^3 + \kappa_\alpha^2 \tau_\alpha - \kappa_\alpha \tau_\alpha^2 \\
 &\quad - \tau_\alpha'' + \kappa_\alpha'') \mathbf{N}_\alpha + (\kappa_\alpha \tau'_\alpha + 2\tau_\alpha \kappa'_\alpha - 3\tau_\alpha \tau'_\alpha) \mathbf{B}_\alpha) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\delta_1 \mathbf{T}_\alpha + \delta_2 \mathbf{N}_\alpha + \delta_3 \mathbf{B}_\alpha)
 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\delta_1 = -3\kappa_\alpha \kappa'_\alpha + \kappa'_\alpha \tau_\alpha + 2\kappa_\alpha \tau'_\alpha,$$

$$\begin{aligned}\delta_2 &= \tau_\alpha^3 - \kappa_\alpha^3 + \kappa_\alpha^2 \tau_\alpha - \kappa_\alpha \tau_\alpha^2 - \tau_\alpha'' + \kappa_\alpha'', \\ \delta_3 &= \kappa_\alpha \tau_\alpha' + 2\tau_\alpha \kappa_\alpha' - 3\tau_\alpha \tau_\alpha'\end{aligned}$$

dir. $\beta_{T_\gamma B_\gamma}$ eğrisinin torsiyonu

$$\begin{aligned}\beta'_{T_\gamma B_\gamma} \wedge \beta''_{T_\gamma B_\gamma} &= \begin{vmatrix} T_\alpha & N_\alpha & B_\alpha \\ 0 & \kappa_\alpha - \tau_\alpha & 0 \\ (-\kappa_\alpha^2 + \kappa_\alpha \tau_\alpha) & \kappa_\alpha' - \tau_\alpha' & \kappa_\alpha \tau_\alpha - \tau_\alpha^2 \end{vmatrix} \\ &= (\kappa_\alpha - \tau_\alpha)(\kappa_\alpha \tau_\alpha - \tau_\alpha^2) T_\alpha - (\kappa_\alpha - \tau_\alpha)(-\kappa_\alpha^2 + \kappa_\alpha \tau_\alpha) B_\alpha \\ &= (\kappa_\alpha^2 \tau_\alpha - \kappa_\alpha \tau_\alpha^2 - \kappa_\alpha \tau_\alpha^2 + \tau_\alpha^3) T_\alpha + (\kappa_\alpha^3 - 2\kappa_\alpha^2 \tau_\alpha + \kappa_\alpha \tau_\alpha^2) B_\alpha\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\tau_{\beta_{T_\gamma B_\gamma}} &= \frac{\langle \beta'_{T_\gamma B_\gamma} \wedge \beta''_{T_\gamma B_\gamma}, \beta'''_{T_\gamma B_\gamma} \rangle}{\|\beta'_{T_\gamma B_\gamma} \wedge \beta''_{T_\gamma B_\gamma}\|^2} \\ &= \frac{\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{vmatrix} T_\alpha & N_\alpha & B_\alpha \\ 0 & \kappa_\alpha - \tau_\alpha & 0 \\ (-\kappa_\alpha^2 + \kappa_\alpha \tau_\alpha) & \kappa_\alpha' - \tau_\alpha' & \kappa_\alpha \tau_\alpha - \tau_\alpha^2 \end{vmatrix}, (\delta_1 T_\alpha + \delta_2 N_\alpha + \delta_3 B_\alpha) \right) \rangle}{\|\beta'_{T_\gamma B_\gamma} \wedge \beta''_{T_\gamma B_\gamma}\|^2} \\ &= \frac{\sqrt{2} ((\kappa_\alpha^2 \tau_\alpha - \kappa_\alpha \tau_\alpha^2 - \kappa_\alpha \tau_\alpha^2 + \tau_\alpha^3) \delta_1 + (\kappa_\alpha^3 - 2\kappa_\alpha^2 \tau_\alpha + \kappa_\alpha \tau_\alpha^2) \delta_3)}{(\kappa_\alpha^2 \tau_\alpha - \kappa_\alpha \tau_\alpha^2 - \kappa_\alpha \tau_\alpha^2 + \tau_\alpha^3)^2 + (\kappa_\alpha^3 - 2\kappa_\alpha^2 \tau_\alpha + \kappa_\alpha \tau_\alpha^2)^2}\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

3.3 $N_\gamma B_\gamma$ -Smarandache Eğri

Tanım 3.3.1 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı adjoint eğrinin $\gamma(s)$ noktasında Frenet çatısı $\{T_\gamma(s), N_\gamma(s), B_\gamma(s)\}$ olsun. Bu durumda γ eğrisinin $N_\gamma B_\gamma$ -Smarandache eğrisi

$$\beta_{N_\gamma B_\gamma}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} (N_\gamma(s) + B_\gamma(s))$$

dir. Tanım 3.2 göz önüne alınırsa $N_\gamma B_\gamma$ -Smarandache eğrisi

$$\beta_{N_\gamma B_\gamma}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{T}_\alpha(s) - \mathbf{N}_\alpha(s))$$

olarak yeniden yazılabilir.

Teorem 3.3.2 \mathbb{E}^3 'te birim hızlı bir α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet çatısı $\{\mathbf{T}_\alpha(s), \mathbf{N}_\alpha(s), \mathbf{B}_\alpha(s)\}$, eğriliği κ_α torsiyonu $\tau_\alpha \neq 0$ olsun. Ayrıca α eğrisinin adjoniti olan $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrinin $\gamma(s)$ noktasında Frenet çatısı $\{\mathbf{T}_\gamma(s), \mathbf{N}_\gamma(s), \mathbf{B}_\gamma(s)\}$, eğriliği κ_γ torsiyonu τ_γ olsun. Bu durumda $N_\gamma B_\gamma$ -Smarandache eğrisinin eğriliği $\kappa_{\beta_{N_\gamma B_\gamma}}$ ve torsiyonu $\tau_{\beta_{N_\gamma B_\gamma}}$ ise sırasıyla;

$$\kappa_{\beta_{N_\gamma B_\gamma}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(2\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2)^2}} \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}$$

ve

$$\tau_{\beta_{N_\gamma B_\gamma}} = \frac{\sqrt{2} ((\tau_\alpha^3 + 2\kappa_\alpha^2\tau_\alpha - \kappa_\alpha\tau'_\alpha + \kappa'_\alpha\tau_\alpha))\overline{\Delta}_1}{\sigma_3} - \frac{(\kappa_\alpha\tau'_\alpha - \kappa'_\alpha\tau_\alpha)\overline{\Delta}_2}{\sigma_3} + \frac{(2\kappa_\alpha^3 + \kappa_\alpha\tau_\alpha^2)\overline{\Delta}_3}{\sigma_3}$$

olup burada

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= (\tau_\alpha^3 + 2\kappa_\alpha^2\tau_\alpha - \kappa_\alpha\tau'_\alpha + \kappa'_\alpha\tau_\alpha)^2 + (\kappa_\alpha\tau'_\alpha - \kappa'_\alpha\tau_\alpha)^2 + (2\kappa_\alpha^3 + \kappa_\alpha\tau_\alpha^2)^2, \\ \Delta_1 &= -\kappa_\alpha^2(2\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2) + \tau_\alpha(\kappa'_\alpha\tau_\alpha - \kappa_\alpha\tau'_\alpha), \\ \Delta_2 &= \kappa_\alpha^2(2\kappa_\alpha^2 + 3\tau_\alpha^2) + \tau_\alpha(\tau_\alpha^3 - \kappa_\alpha\tau'_\alpha + \tau_\alpha\kappa'_\alpha), \\ \Delta_3 &= \kappa_\alpha(\tau_\alpha(2\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2 + 2\kappa'_\alpha) - 2\kappa_\alpha\tau'_\alpha), \\ \overline{\Delta}_1 &= -\kappa_\alpha^3 - \kappa_\alpha(\tau_\alpha^2 + 3\kappa'_\alpha) + \kappa''_\alpha, \\ \overline{\Delta}_2 &= -\kappa_\alpha^3 - \kappa_\alpha(-\tau_\alpha^2 + 3\kappa'_\alpha) - \tau_\alpha\tau'_\alpha + \kappa''_\alpha, \\ \overline{\Delta}_3 &= \tau_\alpha(\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2 + 2\kappa'_\alpha) - \kappa_\alpha\tau'_\alpha - \tau''_\alpha \end{aligned}$$

dır.

İspat $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı adjoint eğrinin $\gamma(s)$ noktasında Frenet çatısı $\{\mathbf{T}_\gamma(s), \mathbf{N}_\gamma(s), \mathbf{B}_\gamma(s)\}$ olmak üzere $\mathbf{N}_\gamma \mathbf{B}_\gamma$ -Smarandache eğrisi

$$\beta_{\mathbf{N}_\gamma \mathbf{B}_\gamma}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{N}_\gamma(s) + \mathbf{B}_\gamma(s))$$

şeklinde tanımlanır. Tanım 3.3.1 den

$$\beta_{\mathbf{N}_\gamma \mathbf{B}_\gamma}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{T}_\alpha(s) - \mathbf{N}_\alpha(s))$$

yazılır. $\beta_{\mathbf{N}_\gamma \mathbf{B}_\gamma}(s), \mathbf{N}_\gamma \mathbf{B}_\gamma$ -Smarandache eğrisinin eğrilik ve torsiyonunu hesaplamak için s parametresine göre birinci türev alınırsa;

$$\frac{d\beta_{\mathbf{N}_\gamma \mathbf{B}_\gamma}}{ds_\beta} \frac{ds_\beta}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\kappa_\alpha \mathbf{N}_\alpha + \kappa_\alpha \mathbf{T}_\alpha - \tau_\alpha \mathbf{B}_\alpha)$$

elde edilir. Burada

$$\left\| \frac{d\beta_{\mathbf{N}_\gamma \mathbf{B}_\gamma}}{ds_\beta} \right\| = 1$$

olduğundan

$$\frac{ds_\beta}{ds} = \sqrt{\frac{2\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2}{2}}$$

bulunur. Yani $\beta_{\mathbf{N}_\gamma \mathbf{B}_\gamma}(s)$ eğrisinin teğet vektörü

$$\mathbf{T}_{\beta_{\mathbf{N}_\gamma \mathbf{B}_\gamma}} = \frac{\kappa_\alpha \mathbf{T}_\alpha + \kappa_\alpha \mathbf{N}_\alpha - \tau_\alpha \mathbf{B}_\alpha}{\sqrt{2\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2}}$$

dır. Teğet vektörünün türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}'_{\beta_{N_\gamma B_\gamma}} &= \frac{1}{2\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2} ((\kappa'_\alpha \mathbf{T}_\alpha + \kappa_\alpha \mathbf{T}'_\alpha + \kappa'_\alpha \mathbf{N}_\alpha + \kappa_\alpha \mathbf{N}'_\alpha - \tau'_\alpha \mathbf{B}_\alpha - \tau_\alpha \mathbf{B}'_\alpha) \sqrt{2\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2} \\
&\quad - (\kappa_\alpha \mathbf{T}_\alpha + \kappa_\alpha \mathbf{N}_\alpha - \tau_\alpha \mathbf{B}_\alpha) \frac{2\kappa_\alpha \kappa'_\alpha + \tau_\alpha \tau'_\alpha}{\sqrt{2\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2}}) \\
&= \frac{1}{(2\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2)^{\frac{3}{2}}} ((\kappa'_\alpha \mathbf{T}_\alpha + \kappa_\alpha \mathbf{T}'_\alpha + \kappa'_\alpha \mathbf{N}_\alpha + \kappa_\alpha \mathbf{N}'_\alpha - \tau'_\alpha \mathbf{B}_\alpha - \tau_\alpha \mathbf{B}'_\alpha) (2\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2) \\
&\quad - (\kappa_\alpha \mathbf{T}_\alpha + \kappa_\alpha \mathbf{N}_\alpha - \tau_\alpha \mathbf{B}_\alpha) (2\kappa_\alpha \kappa'_\alpha + \tau_\alpha \tau'_\alpha)) \\
&= \frac{1}{(2\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2)^{\frac{3}{2}}} ((\kappa'_\alpha \mathbf{T}_\alpha + \kappa_\alpha^2 \mathbf{N}_\alpha + \kappa'_\alpha \mathbf{N}_\alpha - \kappa_\alpha^2 \mathbf{T}_\alpha + \kappa_\alpha \tau_\alpha \mathbf{B}_\alpha - \tau'_\alpha \mathbf{B}_\alpha + \tau_\alpha^2 \mathbf{N}_\alpha) \\
&\quad \times (2\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2) - (2\kappa_\alpha^2 \kappa'_\alpha \mathbf{T}_\alpha + 2\kappa_\alpha^2 \kappa'_\alpha \mathbf{N}_\alpha - 2\kappa_\alpha \tau_\alpha \kappa'_\alpha \mathbf{B}_\alpha + \kappa_\alpha \tau_\alpha \tau'_\alpha \mathbf{T}_\alpha \\
&\quad + \kappa_\alpha \tau_\alpha \tau'_\alpha \mathbf{N}_\alpha - \tau_\alpha^2 \tau'_\alpha \mathbf{B}_\alpha)) \\
&= \frac{1}{(2\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2)^{\frac{3}{2}}} (2\kappa_\alpha^2 \kappa'_\alpha \mathbf{T}_\alpha + 2\kappa_\alpha^4 \mathbf{N}_\alpha + 2\kappa_\alpha^2 \kappa'_\alpha \mathbf{N}_\alpha - 2\kappa_\alpha^4 \mathbf{T}_\alpha + 2\kappa_\alpha^3 \tau_\alpha \mathbf{B}_\alpha \\
&\quad - 2\kappa_\alpha^2 + 2\kappa_\alpha^2 \tau_\alpha^2 \mathbf{N}_\alpha + \kappa'_\alpha \tau_\alpha^2 \mathbf{T}_\alpha + \kappa_\alpha^2 \tau_\alpha^2 \mathbf{N}_\alpha + \kappa'_\alpha \tau_\alpha^2 \mathbf{N}_\alpha - \kappa_\alpha^2 \tau_\alpha^2 \mathbf{T}_\alpha + \kappa_\alpha \tau_\alpha^3 \mathbf{B}_\alpha \\
&\quad - \tau_\alpha^2 \tau'_\alpha \mathbf{B}_\alpha + \tau_\alpha^4 \mathbf{N}_\alpha - 2\kappa_\alpha^2 \kappa'_\alpha \mathbf{T}_\alpha - 2\kappa_\alpha^2 \kappa'_\alpha \mathbf{N}_\alpha + 2\kappa_\alpha \tau_\alpha \kappa'_\alpha \mathbf{B}_\alpha - \kappa_\alpha \tau_\alpha \tau'_\alpha \mathbf{T}_\alpha \\
&\quad - \kappa_\alpha \tau_\alpha \tau'_\alpha \mathbf{N}_\alpha + \tau_\alpha^2 \tau'_\alpha \mathbf{B}_\alpha) \\
&= (2\kappa_\alpha^2 \kappa'_\alpha - 2\kappa_\alpha^4 + \kappa'_\alpha \tau_\alpha^2 - \kappa_\alpha^2 \tau_\alpha^2 - 2\kappa_\alpha^2 \kappa'_\alpha - \kappa_\alpha \tau_\alpha \tau'_\alpha) \mathbf{T}_\alpha \\
&\quad + (2\kappa_\alpha^4 + 2\kappa_\alpha^2 \kappa'_\alpha + \kappa_\alpha^2 \tau_\alpha^2 + \kappa_\alpha^2 \tau_\alpha^2 + \kappa'_\alpha \tau_\alpha^2 + \tau_\alpha^4 - 2\kappa_\alpha^2 \kappa'_\alpha - \kappa_\alpha \tau_\alpha \tau'_\alpha) \mathbf{N}_\alpha \\
&\quad + (2\kappa_\alpha^3 \tau_\alpha - 2\kappa_\alpha^2 \tau'_\alpha + \kappa_\alpha \tau_\alpha^3 - \tau_\alpha^2 \tau'_\alpha + 2\kappa_\alpha \tau_\alpha \kappa'_\alpha + \tau_\alpha^2 \tau'_\alpha) \mathbf{B}_\alpha
\end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= -\kappa_\alpha^2 (2\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2) + \tau_\alpha (\kappa'_\alpha \tau_\alpha - \kappa_\alpha \tau'_\alpha), \\
\Delta_2 &= \kappa_\alpha^2 (2\kappa_\alpha^2 + 3\tau_\alpha^2) + \tau_\alpha (\tau_\alpha^3 - \kappa_\alpha \tau'_\alpha + \tau_\alpha \kappa'_\alpha), \\
\Delta_3 &= \kappa_\alpha (\tau_\alpha (2\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2 + 2\kappa'_\alpha) - 2\kappa_\alpha \tau'_\alpha)
\end{aligned}$$

dersek $\mathbf{T}'_{\beta_{N_\gamma B_\gamma}}$ vektörü

$$\mathbf{T}'_{\beta_{N_\gamma B_\gamma}} = \frac{\sqrt{2}}{(2\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2)^2} (\Delta_1 \mathbf{T}_\alpha + \Delta_2 \mathbf{N}_\alpha + \Delta_3 \mathbf{B}_\alpha) \quad (3.5)$$

olarak elde edilir. (3.5) eşitliğinin her iki yanının normu alınırsa

$$\kappa_{\beta_{N_\gamma B_\gamma}} = \|\mathbf{T}'_{\beta_{N_\gamma B_\gamma}}\| = \frac{\sqrt{2}}{(2\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2)^2} \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2} \quad (3.6)$$

elde edilir. (3.5) ve (3.6) eşitliklerinden $\beta_{N_\gamma B_\gamma}$ eğrisinin asli normal vektör alanı

$$\mathbf{N}_{\beta_{N_\gamma B_\gamma}} = \frac{\mathbf{T}'_{\beta_{N_\gamma B_\gamma}}}{\|\mathbf{T}'_{\beta_{N_\gamma B_\gamma}}\|} = \frac{\Delta_1 \mathbf{T}_\alpha + \Delta_2 \mathbf{N}_\alpha + \Delta_3 \mathbf{B}_\alpha}{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}}$$

şeklinde bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\beta_{N_\gamma B_\gamma}} &= \mathbf{T}_{\beta_{N_\gamma B_\gamma}} \wedge \mathbf{N}_{\beta_{N_\gamma B_\gamma}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2} \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}} \begin{vmatrix} \mathbf{T}_\alpha & \mathbf{N}_\alpha & \mathbf{B}_\alpha \\ \kappa_\alpha & \kappa_\alpha & -\tau_\alpha \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 \end{vmatrix} \\ &= \frac{(\kappa_\alpha \Delta_3 + \tau_\alpha \Delta_2) \mathbf{T}_\alpha - (\kappa_\alpha \Delta_3 + \tau_\alpha \Delta_1) \mathbf{N}_\alpha + (\kappa_\alpha \Delta_2 - \kappa_\alpha \Delta_1) \mathbf{B}_\alpha}{\sqrt{2\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2} \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}} \end{aligned}$$

dir. Diğer taraftan $N_\gamma B_\gamma$ -Smarandache eğrisinin torsiyonu bulmak için ilk olarak $\beta_{N_\gamma B_\gamma}$ eğrisinin birinci, ikinci ve üçüncü türevleri

$$\begin{aligned} \beta'_{N_\gamma B_\gamma} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\kappa_\alpha \mathbf{T}_\alpha + \kappa_\alpha \mathbf{N}_\alpha - \tau_\alpha \mathbf{B}_\alpha) \\ \beta''_{N_\gamma B_\gamma} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\kappa'_\alpha \mathbf{T}_\alpha + \kappa_\alpha \mathbf{T}'_\alpha + \kappa'_\alpha \mathbf{N}_\alpha + \kappa_\alpha \mathbf{N}'_\alpha - \tau'_\alpha \mathbf{B}_\alpha - \tau_\alpha \mathbf{B}'_\alpha) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\kappa'_\alpha \mathbf{T}_\alpha + \kappa_\alpha^2 \mathbf{N}_\alpha + \kappa'_\alpha \mathbf{N}_\alpha - \kappa_\alpha^2 \mathbf{T}_\alpha + \kappa_\alpha \tau_\alpha \mathbf{B}_\alpha - \tau'_\alpha \mathbf{B}_\alpha + \tau_\alpha^2 \mathbf{N}_\alpha) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} ((\kappa'_\alpha - \kappa_\alpha^2) \mathbf{T}_\alpha + (\kappa'_\alpha + \kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2) \mathbf{N}_\alpha + (\kappa_\alpha \tau_\alpha - \tau'_\alpha) \mathbf{B}_\alpha) \\ \beta'''_{N_\gamma B_\gamma} &= \frac{1}{\sqrt{2}} ((\kappa''_\alpha - 2\kappa_\alpha \kappa'_\alpha) \mathbf{T}_\alpha + (\kappa'_\alpha - \kappa_\alpha^2) \mathbf{T}'_\alpha + (2\kappa_\alpha \kappa'_\alpha + \kappa''_\alpha - 2\tau_\alpha \tau'_\alpha) \mathbf{N}_\alpha \\ &\quad + (\kappa_\alpha^2 + \kappa'_\alpha + \tau_\alpha^2) \mathbf{N}_\alpha + (\kappa'_\alpha \tau_\alpha + \kappa_\alpha \tau'_\alpha - \tau''_\alpha) \mathbf{B}_\alpha + (\kappa_\alpha \tau_\alpha - \tau'_\alpha) \mathbf{B}'_\alpha) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} ((\kappa''_\alpha - 2\kappa_\alpha \kappa'_\alpha) \mathbf{T}_\alpha + (\kappa_\alpha \kappa'_\alpha - \kappa_\alpha^3) \mathbf{N}_\alpha + (2\kappa_\alpha \kappa'_\alpha + \kappa''_\alpha - 2\tau_\alpha \tau'_\alpha) \mathbf{N}_\alpha \\ &\quad + (-\kappa_\alpha^3 - \kappa_\alpha \kappa'_\alpha - \kappa_\alpha \tau_\alpha^2) \mathbf{T}_\alpha + (\kappa_\alpha^2 \tau_\alpha + \kappa'_\alpha \tau_\alpha + \tau_\alpha^3) \mathbf{B}_\alpha \\ &\quad + (\kappa'_\alpha \tau_\alpha + \kappa_\alpha \tau'_\alpha - \tau''_\alpha) \mathbf{B}_\alpha + (-\kappa_\alpha \tau_\alpha^2 + \tau_\alpha \tau'_\alpha) \mathbf{N}_\alpha) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} ((-\kappa_\alpha^3 - 3\kappa_\alpha \kappa'_\alpha - \kappa_\alpha \tau_\alpha^2 + \kappa''_\alpha) \mathbf{T}_\alpha \\ &\quad + (-\kappa_\alpha^3 \kappa_\alpha \tau_\alpha^2 + 3\kappa_\alpha \kappa'_\alpha - \tau_\alpha \tau'_\alpha + \kappa''_\alpha) \mathbf{N}_\alpha \\ &\quad + (\kappa_\alpha^2 \tau_\alpha + \tau_\alpha^3 + 2\kappa'_\alpha \tau_\alpha + \kappa_\alpha \tau'_\alpha - \tau''_\alpha) \mathbf{B}_\alpha) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\overline{\Delta}_1 \mathbf{T}_\alpha + \overline{\Delta}_2 \mathbf{N}_\alpha + \overline{\Delta}_3 \mathbf{B}_\alpha) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}\overline{\Delta}_1 &= -\kappa_\alpha^3 - \kappa_\alpha(\tau_\alpha^2 + 3\kappa'_\alpha) + \kappa''_\alpha, \\ \overline{\Delta}_2 &= -\kappa_\alpha^3 - \kappa_\alpha(-\tau_\alpha^2 + 3\kappa'_\alpha) - \tau_\alpha\tau'_\alpha + \kappa''_\alpha, \\ \overline{\Delta}_3 &= \tau_\alpha(\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2 + 2\kappa'_\alpha) - \kappa_\alpha\tau'_\alpha - \tau''_\alpha\end{aligned}$$

dir. $\beta_{N_\gamma B_\gamma}$ eğrisinin torsiyonu

$$\begin{aligned}\beta'_{N_\gamma B_\gamma} \wedge \beta''_{N_\gamma B_\gamma} &= \begin{vmatrix} \mathbf{T}_\alpha & \mathbf{N}_\alpha & \mathbf{B}_\alpha \\ \kappa_\alpha & \kappa_\alpha & -\tau_\alpha \\ \kappa'_\alpha + \kappa_\alpha^2 & \kappa_\alpha^2 + \kappa'_\alpha + \tau_\alpha^2 & \kappa_\alpha\tau_\alpha - \tau'_\alpha \end{vmatrix} \\ &= (\kappa_\alpha^2\tau_\alpha - \kappa_\alpha\tau'_\alpha + \kappa_\alpha^2\tau_\alpha + \kappa'_\alpha\tau_\alpha + \tau_\alpha^3)\mathbf{T}_\alpha \\ &\quad + (\kappa_\alpha^2\tau_\alpha - \kappa_\alpha\tau'_\alpha + \kappa_\alpha^2\tau_\alpha + \kappa'_\alpha\tau_\alpha)\mathbf{N}_\alpha \\ &\quad + (\kappa_\alpha^3 + \kappa_\alpha\kappa'_\alpha + \kappa_\alpha\tau_\alpha^2 - \kappa_\alpha\kappa'_\alpha + \kappa_\alpha^3)\mathbf{B}_\alpha\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\tau_{\beta_{N_\gamma B_\gamma}} &= \frac{\langle \beta'_{N_\gamma B_\gamma} \wedge \beta''_{N_\gamma B_\gamma}, \beta'''_{N_\gamma B_\gamma} \rangle}{\|\beta'_{N_\gamma B_\gamma} \wedge \beta''_{N_\gamma B_\gamma}\|^2} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \left\langle \begin{vmatrix} \mathbf{T}_\alpha & \mathbf{N}_\alpha & \mathbf{B}_\alpha \\ \kappa_\alpha & \kappa_\alpha & -\tau_\alpha \\ \kappa'_\alpha + \kappa_\alpha^2 & \kappa_\alpha^2 + \kappa'_\alpha + \tau_\alpha^2 & \kappa_\alpha\tau_\alpha - \tau'_\alpha \end{vmatrix}, \overline{\Delta}_1 \mathbf{T}_\alpha + \overline{\Delta}_2 \mathbf{N}_\alpha + \overline{\Delta}_3 \mathbf{B}_\alpha \right\rangle}{\|\beta'_{N_\gamma B_\gamma} \wedge \beta''_{N_\gamma B_\gamma}\|^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}((\tau_\alpha^3 + 2\kappa_\alpha^2\tau_\alpha - \kappa_\alpha\tau'_\alpha + \kappa'_\alpha\tau_\alpha)\overline{\Delta}_1 - (\kappa_\alpha\tau'_\alpha - \kappa'_\alpha\tau_\alpha)\overline{\Delta}_2 + (2\kappa_\alpha^3 + \kappa_\alpha\tau_\alpha^2)\overline{\Delta}_3)}{(\tau_\alpha^3 + 2\kappa_\alpha^2\tau_\alpha - \kappa_\alpha\tau'_\alpha + \kappa'_\alpha\tau_\alpha)^2 + (\kappa_\alpha\tau'_\alpha - \kappa'_\alpha\tau_\alpha)^2 + (2\kappa_\alpha^3 + \kappa_\alpha\tau_\alpha^2)^2}\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

3.4 $T_\gamma N_\gamma B_\gamma$ -Smarandache Eğri

Tanım 3.4.1 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı adjoint eğrinin $\gamma(s)$ noktasında Frenet çatısı $\{\mathbf{T}_\gamma(s), \mathbf{N}_\gamma(s), \mathbf{B}_\gamma(s)\}$ olsun. Bu durumda γ eğrisinin $T_\gamma N_\gamma B_\gamma$ -Smarandache eğri

$$\beta_{T_\gamma N_\gamma B_\gamma}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}} (T_\gamma(s) + N_\gamma(s) + B_\gamma(s))$$

dir. Tanım 3.2 göz önüne alınırsa $T_\gamma N_\gamma B_\gamma$ -Smarandache eğrisi

$$\beta_{T_\gamma N_\gamma B_\gamma}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}} (T_\alpha(s) - N_\alpha(s) + B_\alpha(s))$$

olarak yeniden yazılabilir.

Teorem 3.4.2 \mathbb{E}^3 'te birim hızlı bir α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet çatısı $\{T_\alpha(s), N_\alpha(s), B_\alpha(s)\}$, eğriliği κ_α torsiyonu $\tau_\alpha \neq 0$ olsun. Ayrıca α eğrisinin adjoniti olan $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrinin $\gamma(s)$ noktasında Frenet çatısı $\{T_\gamma(s), N_\gamma(s), B_\gamma(s)\}$ eğriliği κ_γ torsiyonu τ_γ olsun. Bu durumda $T_\gamma N_\gamma B_\gamma$ -Smarandache eğrisinin eğriliği $\kappa_{\beta_{T_\gamma N_\gamma B_\gamma}}$ ve torsiyonu $\tau_{T_\gamma N_\gamma B_\gamma}$ ise sırasıyla;

$$\kappa_{\beta_{T_\gamma N_\gamma B_\gamma}} = \frac{\sqrt{3}}{4(\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2 - \kappa_\alpha \tau_\alpha)^2} \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2}$$

ve

$$\begin{aligned} \tau_{T_\gamma N_\gamma B_\gamma} = & \frac{\sqrt{3}((2\kappa_\alpha \tau_\alpha (\kappa_\alpha - \tau_\alpha) - \kappa_\alpha \tau'_\alpha + -\kappa'_\alpha \tau_\alpha + 2\tau_\alpha^3)\overline{\mu}_1 + (\kappa_\alpha \tau'_\alpha - \kappa'_\alpha \tau_\alpha)\overline{\mu}_2)}{\sigma_4} \\ & + \frac{(2\kappa_\alpha^3 + 2\kappa_\alpha \tau_\alpha (\tau_\alpha - \kappa_\alpha) - \kappa_\alpha \tau'_\alpha + \kappa'_\alpha \tau_\alpha)\overline{\mu}_3}{\sigma_4} \end{aligned}$$

olup burada

$$\begin{aligned} \sigma_4 = & (2\kappa_\alpha \tau_\alpha (\kappa_\alpha - \tau_\alpha) - \kappa_\alpha \tau'_\alpha + -\kappa'_\alpha \tau_\alpha + 2\tau_\alpha^3)^2 + (\kappa_\alpha \tau'_\alpha - \kappa'_\alpha \tau_\alpha)^2 \\ & + (2\kappa_\alpha^3 + 2\kappa_\alpha \tau_\alpha (\tau_\alpha - \kappa_\alpha) - \kappa_\alpha \tau'_\alpha + \kappa'_\alpha \tau_\alpha)^2, \\ \mu_1 = & \kappa_\alpha \tau_\alpha (4\kappa_\alpha (\kappa_\alpha - \tau_\alpha) + 2(\tau_\alpha^2 - \tau'_\alpha)) - \kappa_\alpha^2 (2\kappa_\alpha^2 + 2\kappa'_\alpha - \tau'_\alpha) \\ & - \kappa'_\alpha \tau_\alpha (\kappa_\alpha - 2\tau_\alpha), \\ \mu_2 = & -\kappa_\alpha \tau_\alpha (2(\tau_\alpha - \kappa_\alpha)^2 - (\kappa'_\alpha + \tau'_\alpha)) + 2(\kappa_\alpha^4 + \tau_\alpha^4) + \tau_\alpha^2 \kappa'_\alpha - \kappa_\alpha^2 \tau'_\alpha, \\ \mu_3 = & \tau_\alpha (2\kappa_\alpha (\kappa_\alpha^2 + 2\tau_\alpha^2 - 2\kappa_\alpha \tau_\alpha + \kappa'_\alpha + \tau'_\alpha) - 2\tau_\alpha^3 - \kappa'_\alpha \tau_\alpha) - \kappa_\alpha^2 \tau'_\alpha, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\mu}_1 &= -\kappa_\alpha^3 - \kappa_\alpha \tau_\alpha^2 - 3\kappa_\alpha \kappa'_\alpha - \kappa'_\alpha \tau_\alpha + \kappa''_\alpha, \\ \overline{\mu}_2 &= -\kappa_\alpha^3 + \tau_\alpha^3 + 3\kappa_\alpha \kappa'_\alpha + \tau_\alpha \tau'_\alpha + \kappa_\alpha \tau_\alpha (\kappa_\alpha - \tau_\alpha) + \kappa''_\alpha - \tau''_\alpha, \\ \overline{\mu}_3 &= \kappa_\alpha^2 \tau_\alpha + \kappa_\alpha \tau'_\alpha + 2\kappa'_\alpha \tau_\alpha - 3\tau_\alpha \tau'_\alpha + \tau_\alpha^3 - \tau''_\alpha\end{aligned}$$

dır.

İspat $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı adjoint eğrinin $\gamma(s)$ noktasında Frenet çatısı $\{\mathbf{T}_\gamma(s), \mathbf{N}_\gamma(s), \mathbf{B}_\gamma(s)\}$ olmak üzere $\mathbf{T}_\gamma \mathbf{N}_\gamma \mathbf{B}_\gamma$ -Smarandache eğrisi

$$\beta_{\mathbf{T}_\gamma \mathbf{N}_\gamma \mathbf{B}_\gamma}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}} (\mathbf{T}_\gamma(s) + \mathbf{N}_\gamma(s) + \mathbf{B}_\gamma(s))$$

şeklinde tanımlanır. Tanım 3.4.1 den

$$\beta_{\mathbf{T}_\gamma \mathbf{N}_\gamma \mathbf{B}_\gamma}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}} (\mathbf{T}_\alpha(s) - \mathbf{N}_\alpha(s) + \mathbf{B}_\alpha(s))$$

yazılır. $\beta_{\mathbf{T}_\gamma \mathbf{N}_\gamma \mathbf{B}_\gamma}(s), \mathbf{T}_\gamma \mathbf{N}_\gamma \mathbf{B}_\gamma$ -Smarandache eğrisinin eğrilik ve torsiyonunu hesaplamak için s parametresine göre birinci türev alınırsa;

$$\begin{aligned}\frac{d\beta_{\mathbf{T}_\gamma \mathbf{N}_\gamma \mathbf{B}_\gamma}}{ds_\beta} \frac{ds_\beta}{ds} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\kappa_\alpha \mathbf{N}_\alpha + \kappa_\alpha \mathbf{T}_\alpha - \tau_\alpha \mathbf{B}_\alpha - \tau_\alpha \mathbf{N}_\alpha) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\kappa_\alpha \mathbf{T}_\alpha + (\kappa_\alpha - \tau_\alpha) \mathbf{N}_\alpha - \tau_\alpha \mathbf{B}_\alpha)\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\left\| \frac{d\beta_{\mathbf{T}_\gamma \mathbf{N}_\gamma \mathbf{B}_\gamma}}{ds_\beta} \right\| = 1$$

olduğundan

$$\frac{ds_\beta}{ds} = \sqrt{\frac{1}{3} (\kappa_\alpha^2 + \kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2 - 2\kappa_\alpha \tau_\alpha + \tau_\alpha^2)}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}(\kappa_\alpha^2 - \kappa_\alpha \tau_\alpha + \tau_\alpha^2)}$$

bulunur. Yani $\beta_{T_\gamma N_\gamma B_\gamma}(s)$ eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_{T_\gamma N_\gamma B_\gamma}} = \frac{\kappa_\alpha T_\alpha + (\kappa_\alpha - \tau_\alpha) N_\alpha - \tau_\alpha B_\alpha}{\sqrt{2\kappa_\alpha^2 + 2\tau_\alpha^2 - 2\kappa_\alpha \tau_\alpha}}$$

dır. Teğet vektörünün türevi alınırsa

$$\begin{aligned} T'_{\beta_{T_\gamma N_\gamma B_\gamma}} &= \frac{1}{2\kappa_\alpha^2 + 2\tau_\alpha^2 - 2\kappa_\alpha \tau_\alpha} ((\kappa'_\alpha T_\alpha + \kappa_\alpha T'_\alpha + (\kappa'_\alpha - \tau'_\alpha) N_\alpha + (\kappa_\alpha - \tau_\alpha) N'_\alpha - \tau'_\alpha B_\alpha \\ &\quad - \tau_\alpha B'_\alpha) \sqrt{2\kappa_\alpha^2 + 2\tau_\alpha^2 - 2\kappa_\alpha \tau_\alpha} - (\kappa_\alpha T_\alpha + (\kappa_\alpha - \tau_\alpha) N_\alpha \\ &\quad - \tau_\alpha B_\alpha) \frac{(2\kappa'_\alpha \kappa_\alpha + 2\tau'_\alpha \tau_\alpha - \kappa'_\alpha \tau_\alpha - \kappa_\alpha \tau'_\alpha)}{\sqrt{2\kappa_\alpha^2 + 2\tau_\alpha^2 - 2\kappa_\alpha \tau_\alpha}}) \\ &= \frac{1}{(2\kappa_\alpha^2 + 2\tau_\alpha^2 - 2\kappa_\alpha \tau_\alpha)^{\frac{3}{2}}} ((\kappa'_\alpha T_\alpha + \kappa_\alpha^2 N_\alpha + (\kappa'_\alpha - \tau'_\alpha) N_\alpha - \kappa_\alpha^2 T_\alpha + \kappa_\alpha \tau_\alpha T_\alpha \\ &\quad + \kappa_\alpha \tau_\alpha B_\alpha - \tau_\alpha^2 B_\alpha - \tau'_\alpha B_\alpha + \tau_\alpha^2 N_\alpha)(2\kappa_\alpha^2 + 2\tau_\alpha^2 - 2\kappa_\alpha \tau_\alpha) - 2\kappa_\alpha^2 \kappa'_\alpha T_\alpha \\ &\quad - 2\kappa_\alpha^2 \kappa'_\alpha N_\alpha + 2\kappa_\alpha \kappa'_\alpha \tau_\alpha N_\alpha + 2\kappa_\alpha \kappa'_\alpha \tau_\alpha B_\alpha - 2\kappa_\alpha \tau_\alpha \tau'_\alpha T_\alpha - 2\kappa_\alpha \tau_\alpha \tau'_\alpha N_\alpha \\ &\quad + 2\tau_\alpha^2 \tau'_\alpha N_\alpha + 2\tau_\alpha^2 \tau'_\alpha B_\alpha + \kappa_\alpha \kappa'_\alpha \tau_\alpha T_\alpha + \kappa_\alpha \kappa'_\alpha \tau_\alpha N_\alpha - \kappa'_\alpha \tau_\alpha^2 N_\alpha - \kappa'_\alpha \tau_\alpha^2 B_\alpha \\ &\quad + \kappa_\alpha^2 \tau'_\alpha T_\alpha + \kappa_\alpha^2 \tau'_\alpha N_\alpha - \kappa_\alpha \tau_\alpha \tau'_\alpha N_\alpha - \kappa_\alpha \tau_\alpha \tau'_\alpha B_\alpha), \\ &= \frac{1}{(2\kappa_\alpha^2 + 2\tau_\alpha^2 - 2\kappa_\alpha \tau_\alpha)^{\frac{3}{2}}} (2\kappa_\alpha^2 \kappa'_\alpha T_\alpha + 2\kappa_\alpha^4 N_\alpha + 2\kappa_\alpha^2 \kappa'_\alpha N_\alpha - 2\kappa_\alpha^2 \tau'_\alpha N_\alpha - 2\kappa_\alpha^4 T_\alpha \\ &\quad + 2\kappa_\alpha^3 \tau_\alpha T_\alpha + 2\kappa_\alpha^3 \tau_\alpha B_\alpha - 2\kappa_\alpha^2 \tau_\alpha^2 B_\alpha - 2\kappa_\alpha^2 \tau'_\alpha B_\alpha + 2\kappa_\alpha^2 \tau_\alpha^2 N_\alpha + 2\kappa'_\alpha \tau_\alpha^2 T_\alpha \\ &\quad + 2\kappa_\alpha^2 \tau_\alpha^2 N_\alpha + 2\kappa'_\alpha \tau_\alpha^2 N_\alpha - 2\tau_\alpha^2 \tau'_\alpha N_\alpha - 2\kappa_\alpha^2 \tau_\alpha^2 T_\alpha + 2\kappa_\alpha \tau_\alpha^3 T_\alpha + 2\kappa_\alpha \tau_\alpha^3 B_\alpha \\ &\quad - 2\tau_\alpha^4 B_\alpha - 2\tau_\alpha^2 \tau'_\alpha B_\alpha + 2\tau_\alpha^4 N_\alpha - 2\kappa_\alpha \kappa'_\alpha \tau_\alpha T_\alpha - 2\kappa_\alpha^3 \tau_\alpha N_\alpha - 2\kappa_\alpha \kappa'_\alpha \tau_\alpha N_\alpha \\ &\quad + 2\kappa_\alpha \tau_\alpha \tau'_\alpha N_\alpha + 2\kappa_\alpha^3 \tau_\alpha T_\alpha - 2\kappa_\alpha^2 \tau_\alpha^2 T_\alpha - 2\kappa_\alpha^2 \tau_\alpha^2 B_\alpha + 2\kappa_\alpha \tau_\alpha^3 B_\alpha \\ &\quad + 2\kappa_\alpha \tau_\alpha \tau'_\alpha B_\alpha - 2\kappa_\alpha \tau_\alpha^3 N_\alpha - 2\kappa_\alpha^2 \kappa'_\alpha T_\alpha - 2\kappa_\alpha^2 \kappa'_\alpha N_\alpha + 2\kappa_\alpha \kappa'_\alpha \tau_\alpha N_\alpha \\ &\quad + 2\kappa_\alpha \kappa'_\alpha \tau_\alpha B_\alpha - 2\kappa_\alpha \tau_\alpha \tau'_\alpha T_\alpha - 2\kappa_\alpha \tau_\alpha \tau'_\alpha N_\alpha + 2\tau_\alpha^2 \tau'_\alpha N_\alpha + 2\tau_\alpha^2 \tau'_\alpha B_\alpha \\ &\quad + \kappa_\alpha \kappa'_\alpha \tau_\alpha T_\alpha + \kappa_\alpha \kappa'_\alpha \tau_\alpha N_\alpha - \kappa'_\alpha \tau_\alpha^2 N_\alpha - \kappa'_\alpha \tau_\alpha^2 B_\alpha + \kappa_\alpha^2 \tau'_\alpha T_\alpha + \kappa_\alpha^2 \tau'_\alpha N_\alpha \\ &\quad - \kappa_\alpha \tau_\alpha \tau'_\alpha N_\alpha - \kappa_\alpha \tau_\alpha \tau'_\alpha B_\alpha) \end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \kappa_\alpha \tau_\alpha (4\kappa_\alpha (\kappa_\alpha - \tau_\alpha) + 2(\tau_\alpha^2 - \tau'_\alpha)) - \kappa_\alpha^2 (2\kappa_\alpha^2 + \kappa'_\alpha - \tau'_\alpha) \\
&\quad - \kappa'_\alpha \tau_\alpha (\kappa_\alpha - 2\tau_\alpha), \\
\mu_2 &= -\kappa_\alpha \tau_\alpha (2(\tau_\alpha - \kappa_\alpha)^2 - (\kappa'_\alpha + \tau'_\alpha)) + 2(\kappa_\alpha^4 + \tau_\alpha^4) + \tau_\alpha^2 \kappa'_\alpha - \kappa_\alpha^2 \tau'_\alpha, \\
\mu_3 &= \tau_\alpha (2\kappa_\alpha (\kappa_\alpha^2 + 2\tau_\alpha^2 - 2\kappa_\alpha \tau_\alpha + \kappa'_\alpha + \tau'_\alpha) - 2\tau_\alpha^3 - \kappa'_\alpha \tau_\alpha) - \kappa_\alpha^2 \tau'_\alpha,
\end{aligned}$$

dersek $\mathbf{T}'_{\beta_{T_\gamma N_\gamma B_\gamma}}$ vektörü

$$\mathbf{T}'_{\beta_{T_\gamma N_\gamma B_\gamma}} = \frac{\sqrt{3}}{4(\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2 - \kappa_\alpha \tau_\alpha)^2} (\mu_1 \mathbf{T}_\alpha + \mu_2 \mathbf{N}_\alpha + \mu_3 \mathbf{B}_\alpha) \quad (3.7)$$

olarak elde edilir. (3.7) eşitliğinin her iki yanının normu alınırsa

$$\kappa_{\beta_{T_\gamma N_\gamma B_\gamma}} = \|\mathbf{T}'_{\beta_{T_\gamma N_\gamma B_\gamma}}\| = \frac{\sqrt{3}}{4(\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2 - \kappa_\alpha \tau_\alpha)^2} \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2} \quad (3.8)$$

elde edilir. (3.7) ve (3.8) eşitliklerinden $\beta_{T_\gamma N_\gamma B_\gamma}$ eğrisinin asli normal vektör alanı

$$\mathbf{N}_{\beta_{T_\gamma N_\gamma B_\gamma}} = \frac{\mathbf{T}'_{\beta_{T_\gamma N_\gamma B_\gamma}}}{\|\mathbf{T}'_{\beta_{T_\gamma N_\gamma B_\gamma}}\|} = \frac{\mu_1 \mathbf{T}_\alpha + \mu_2 \mathbf{N}_\alpha + \mu_3 \mathbf{B}_\alpha}{\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2}}$$

şeklinde bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{\beta_{T_\gamma N_\gamma B_\gamma}} &= \mathbf{T}_{\beta_{T_\gamma N_\gamma B_\gamma}} \wedge \mathbf{N}_{\beta_{T_\gamma N_\gamma B_\gamma}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\kappa_\alpha^2 + 2\tau_\alpha^2 - 2\kappa_\alpha \tau_\alpha} \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2}} \begin{vmatrix} \mathbf{T}_\alpha & \mathbf{N}_\alpha & \mathbf{B}_\alpha \\ \kappa_\alpha & \kappa_\alpha - \tau_\alpha & -\tau_\alpha \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix} \\
&= \frac{((\kappa_\alpha - \tau_\alpha)\mu_3 + \tau_\alpha \mu_2) \mathbf{T}_\alpha - (\tau_\alpha \mu_1 + \kappa_\alpha \mu_3) \mathbf{N}_\alpha - ((\kappa_\alpha - \tau_\alpha)\mu_1 - \kappa_\alpha \mu_2) \mathbf{B}_\alpha}{\sqrt{2\kappa_\alpha^2 + 2\tau_\alpha^2 - 2\kappa_\alpha \tau_\alpha} \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2}}
\end{aligned}$$

dir. Diğer taraftan $T_\gamma N_\gamma B_\gamma$ -Smarandache eğrisinin torsiyonu bulmak için ilk olarak $\beta_{T_\gamma N_\gamma B_\gamma}$ eğrisinin birinci, ikinci ve üçüncü türevleri

$$\beta'_{T_\gamma N_\gamma B_\gamma} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\kappa_\alpha \mathbf{T}_\alpha + (\kappa_\alpha - \tau_\alpha) \mathbf{N}_\alpha - \tau_\alpha \mathbf{B}_\alpha)$$

$$\begin{aligned}
\beta''_{T_\gamma N_\gamma B_\gamma} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\kappa'_\alpha T_\alpha + \kappa_\alpha T'_\alpha + \kappa'_\alpha N_\alpha + \kappa_\alpha N'_\alpha - \tau'_\alpha N_\alpha - \tau_\alpha N'_\alpha - \tau'_\alpha B_\alpha - \tau_\alpha B'_\alpha) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} (\kappa'_\alpha T_\alpha + \kappa_\alpha^2 N_\alpha + \kappa'_\alpha N_\alpha - \kappa_\alpha^2 T_\alpha + \kappa_\alpha \tau_\alpha B_\alpha - \tau'_\alpha N_\alpha + \kappa_\alpha \tau_\alpha T_\alpha \\
&\quad - \tau_\alpha^2 B_\alpha - \tau'_\alpha B_\alpha + \tau_\alpha^2 N_\alpha) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} ((\kappa_\alpha \tau_\alpha - \kappa_\alpha^2 + \kappa'_\alpha) T_\alpha + (\kappa_\alpha^2 + \kappa'_\alpha + \tau_\alpha^2 - \tau'_\alpha) N_\alpha \\
&\quad + (\kappa_\alpha \tau_\alpha - \tau_\alpha^2 - \tau'_\alpha) B_\alpha) \\
\beta'''_{T_\gamma N_\gamma B_\gamma} &= \frac{1}{\sqrt{3}} ((\kappa'_\alpha \tau_\alpha + \kappa_\alpha \tau'_\alpha - 2\kappa'_\alpha \kappa_\alpha + \kappa''_\alpha) T_\alpha + (\kappa_\alpha \tau_\alpha - \kappa_\alpha^2 + \kappa'_\alpha) T'_\alpha \\
&\quad + (2\kappa'_\alpha \kappa_\alpha + \kappa''_\alpha + 2\tau_\alpha \tau'_\alpha - \tau''_\alpha) N_\alpha + (\kappa_\alpha^2 + \kappa'_\alpha + \tau_\alpha^2 - \tau'_\alpha) N'_\alpha \\
&\quad + (\kappa'_\alpha \tau_\alpha + \kappa_\alpha \tau'_\alpha - 2\tau_\alpha \tau'_\alpha - \tau''_\alpha) B_\alpha + (\kappa_\alpha \tau_\alpha - \tau_\alpha^2 - \tau'_\alpha) B'_\alpha) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} ((\kappa'_\alpha \tau_\alpha + \kappa_\alpha \tau'_\alpha - 2\kappa'_\alpha \kappa_\alpha + \kappa''_\alpha - \kappa_\alpha^3 - \kappa_\alpha \kappa'_\alpha - \kappa_\alpha \tau_\alpha^2 - \kappa_\alpha \tau'_\alpha) T_\alpha \\
&\quad + (2\kappa'_\alpha \kappa_\alpha + \kappa''_\alpha + 2\tau_\alpha \tau'_\alpha - \tau''_\alpha - \kappa_\alpha^3 + \kappa_\alpha^2 \tau_\alpha + \kappa_\alpha \kappa'_\alpha - \kappa_\alpha \tau_\alpha^2 + \tau_\alpha^3 \\
&\quad - \tau_\alpha \tau'_\alpha) N_\alpha + (\kappa'_\alpha \tau_\alpha + \kappa_\alpha \tau'_\alpha - 2\tau_\alpha \tau'_\alpha - \tau''_\alpha + \kappa_\alpha^2 \tau_\alpha + \kappa'_\alpha \tau_\alpha + \tau_\alpha^3 \\
&\quad - \tau_\alpha \tau'_\alpha) B_\alpha) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} (\overline{\mu}_1 T_\alpha + \overline{\mu}_2 N_\alpha + \overline{\mu}_3 B_\alpha)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
\overline{\mu}_1 &= -\kappa_\alpha^3 - \kappa_\alpha \tau_\alpha^2 - 3\kappa_\alpha \kappa'_\alpha - \kappa'_\alpha \tau_\alpha + \kappa''_\alpha, \\
\overline{\mu}_2 &= -\kappa_\alpha^3 + \tau_\alpha^3 + 3\kappa_\alpha \kappa'_\alpha + \tau_\alpha \tau'_\alpha + \kappa_\alpha \tau_\alpha (\kappa_\alpha - \tau_\alpha) + \kappa''_\alpha - \tau''_\alpha, \\
\overline{\mu}_3 &= \kappa_\alpha^2 \tau_\alpha + \kappa_\alpha \tau'_\alpha + 2\kappa'_\alpha \tau_\alpha - 3\tau_\alpha \tau'_\alpha + \tau_\alpha^3 - \tau''_\alpha
\end{aligned}$$

dir. $\beta'_{T_\gamma N_\gamma B_\gamma} \wedge \beta''_{T_\gamma N_\gamma B_\gamma}$ eğrisinin torsiyonu

$$\begin{aligned}
\beta'_{T_\gamma N_\gamma B_\gamma} \wedge \beta''_{T_\gamma N_\gamma B_\gamma} &= \begin{vmatrix} T_\alpha & N_\alpha & B_\alpha \\ \kappa_\alpha & \kappa_\alpha - \tau_\alpha & -\tau_\alpha \\ \kappa_\alpha \tau_\alpha - \kappa_\alpha^2 + \kappa'_\alpha & \kappa_\alpha^2 + \kappa'_\alpha + \tau_\alpha^2 - \tau'_\alpha & \kappa_\alpha \tau_\alpha - \tau_\alpha^2 - \tau'_\alpha \end{vmatrix} \\
&= (\kappa_\alpha^2 \tau_\alpha - \kappa_\alpha \tau_\alpha^2 - \kappa_\alpha \tau'_\alpha - \kappa_\alpha \tau_\alpha^2 + \kappa'_\alpha \tau_\alpha + \tau_\alpha^3 + \tau_\alpha \tau'_\alpha + \kappa_\alpha^2 \tau_\alpha \\
&\quad + \tau_\alpha^3 - \tau_\alpha \tau'_\alpha) T_\alpha + (\kappa_\alpha^2 \tau_\alpha - \kappa_\alpha \tau_\alpha^2 - \kappa'_\alpha \tau_\alpha - \kappa_\alpha^2 \tau_\alpha \\
&\quad + \kappa_\alpha \tau_\alpha^2 + \kappa_\alpha \tau'_\alpha) N_\alpha + (\kappa_\alpha^3 + \kappa_\alpha \kappa'_\alpha + \kappa_\alpha \tau_\alpha^2 - \kappa_\alpha \tau'_\alpha - \kappa_\alpha^2 \tau_\alpha \\
&\quad + \kappa_\alpha^3 - \kappa_\alpha \kappa'_\alpha + \kappa_\alpha \tau_\alpha^2 - \kappa_\alpha^2 \tau_\alpha + \kappa'_\alpha \tau_\alpha) B_\alpha \\
&= (2\kappa_\alpha \tau_\alpha (\kappa_\alpha - \tau_\alpha) - \kappa_\alpha \tau'_\alpha + \kappa'_\alpha \tau_\alpha + 2\tau_\alpha^3) T_\alpha \\
&\quad + (\kappa_\alpha \tau'_\alpha - \kappa'_\alpha \tau_\alpha) N_\alpha
\end{aligned}$$

$$+(2\kappa_\alpha^3 + 2\kappa_\alpha\tau_\alpha(\tau_\alpha - \kappa_\alpha) - \kappa_\alpha\tau'_\alpha + \kappa'_\alpha\tau_\alpha)\mathbf{B}_\alpha$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\tau_{\beta_{T_\gamma N_\gamma B_\gamma}} &= \frac{\langle \beta'_{T_\gamma N_\gamma B_\gamma} \wedge \beta''_{T_\gamma N_\gamma B_\gamma}, \beta'''_{T_\gamma N_\gamma B_\gamma} \rangle}{\|\beta'_{T_\gamma N_\gamma B_\gamma} \wedge \beta''_{T_\gamma N_\gamma B_\gamma}\|^2} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} T_\alpha & N_\alpha & B_\alpha \\ \kappa_\alpha & \kappa_\alpha - \tau_\alpha & -\tau_\alpha \\ \kappa_\alpha\tau_\alpha - \kappa_\alpha^2 + \kappa'_\alpha & \kappa_\alpha^2 + \kappa'_\alpha + \tau_\alpha^2 - \tau'_\alpha & \kappa_\alpha\tau_\alpha - \tau_\alpha^2 - \tau'_\alpha \end{vmatrix} \langle \overline{\mu}_1 T_\alpha + \overline{\mu}_2 N_\alpha + \overline{\mu}_3 B_\alpha \rangle}{\|\beta'_{T_\gamma N_\gamma B_\gamma} \wedge \beta''_{T_\gamma N_\gamma B_\gamma}\|^2} \\ &= \frac{\sqrt{3}[(2\kappa_\alpha\tau_\alpha(\kappa_\alpha - \tau_\alpha) - \kappa_\alpha\tau'_\alpha + \kappa'_\alpha\tau_\alpha + 2\tau_\alpha^3)]\overline{\mu}_1}{\sigma_4} + \frac{(\kappa_\alpha\tau'_\alpha - \kappa'_\alpha\tau_\alpha)\overline{\mu}_2}{\sigma_4} \\ &\quad + \frac{(2\kappa_\alpha^3 + 2\kappa_\alpha\tau_\alpha(\tau_\alpha - \kappa_\alpha) - \kappa_\alpha\tau'_\alpha + \kappa'_\alpha\tau_\alpha)\overline{\mu}_3}{\sigma_4}\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

3.5 Uygulama

Örnek 3.5.1. \mathbb{E}^3 'te birim hızlı bir

$$\alpha(s) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \text{sins}, \frac{s}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \text{coss} \right)$$

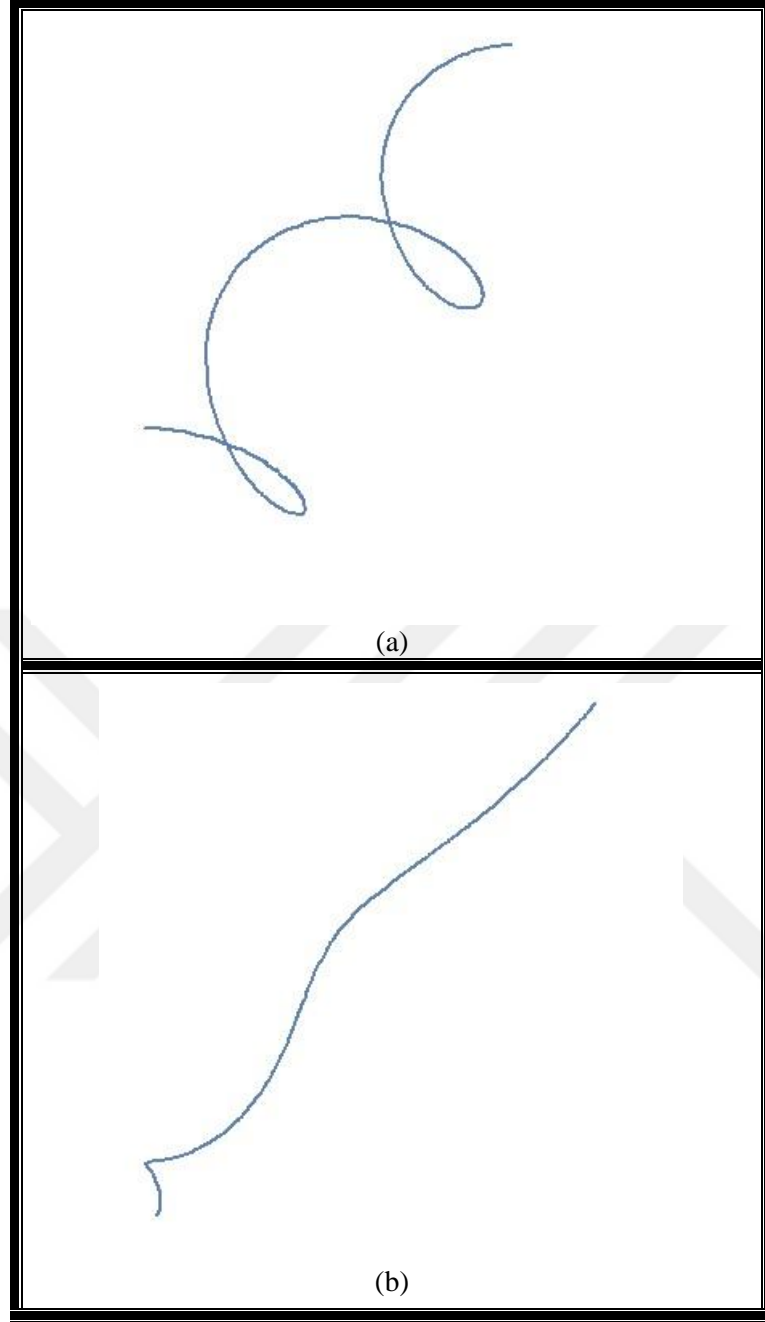
eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet çatısı,

$$\begin{aligned}T_\alpha(s) &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \text{coss}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{sins} \right) \\ N_\alpha(s) &= (-\text{sins}, 0, -\text{coss}) \\ B_\alpha(s) &= \left(-\frac{1}{2} \text{coss}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \text{sins} \right)\end{aligned}$$

eğriliği $\kappa_\alpha(s) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ torsiyonu $\tau_\alpha(s) = \frac{1}{2}$ dir. Ayrıca α eğrisinin adjoniti olan

$$\gamma(s) = \int_{s_0}^s \mathbf{B}_\alpha(s) ds$$

dir.



Şekil 1. α Uzay eğrisi (a), bu eğrinin adjoint (b) eğrisi

$\gamma(s)$ noktasında Frenet çatısı

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_\gamma(s) &= \mathbf{B}_\alpha(s) = \left(-\frac{1}{2} \text{coss}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \text{sins} \right) \\
 \mathbf{N}_\gamma(s) &= -\mathbf{N}_\alpha(s) = (\text{sins}, 0, \text{coss}) \\
 \mathbf{B}_\gamma(s) &= \mathbf{T}_\alpha(s) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \text{coss}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{sins} \right)
 \end{aligned}$$

eğriliği $\kappa_\gamma(s) = \tau_\alpha(s) = \frac{1}{2}$ torsiyonu $\tau_\gamma(s) = \kappa_\alpha(s) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dir. Bu durumda $\beta_{T_\gamma N_\gamma}$, $T_\gamma N_\gamma$ -Smarandache eğrisinin Frenet çatısı,

$$\mathbf{T}_{\beta_{T_\gamma N_\gamma}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\text{coss} + \text{sins}, 0, \text{coss} - 2\text{sins})$$

$$\mathbf{N}_{\beta_{T_\gamma N_\gamma}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\text{coss} - 2\text{sins}, 0, -2\text{coss} - \text{sins})$$

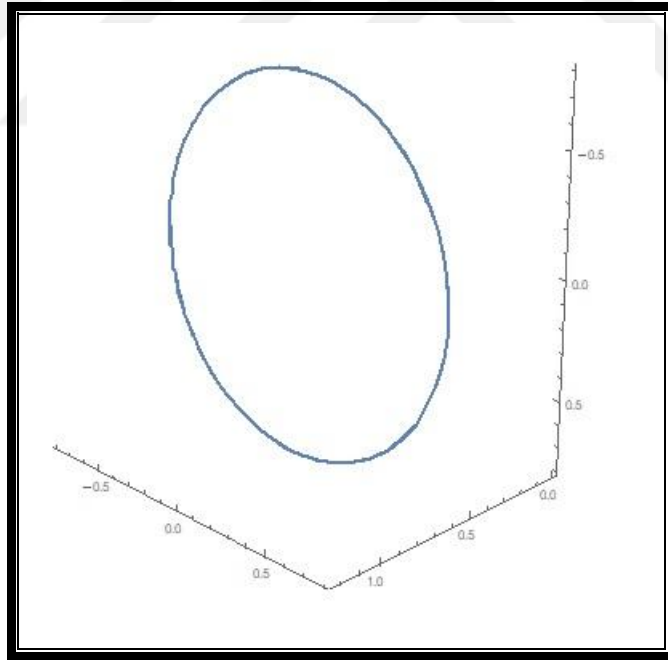
$$\mathbf{B}_{\beta_{T_\gamma N_\gamma}} = (0, 1, 0)$$

eğriliği $\kappa_{\beta_{T_\gamma N_\gamma}}$ ve torsiyonu $\tau_{\beta_{T_\gamma N_\gamma}}$ ise

$$\kappa_{\beta_{T_\gamma N_\gamma}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

$$\tau_{\beta_{T_\gamma N_\gamma}} = 0$$

dir.



Şekil 2. $T_\gamma N_\gamma$ -Smarandache eğri

$\beta_{T_\gamma B_\gamma}$, $T_\gamma B_\gamma$ -Smarandache eğrisinin Frenet çatısı,

$$\mathbf{T}_{\beta_{T_\gamma B_\gamma}} = (-\text{sins}, 0, -\text{coss})$$

$$N_{\beta_{T_\gamma B_\gamma}} = (-\text{coss}, 0, \text{sins})$$

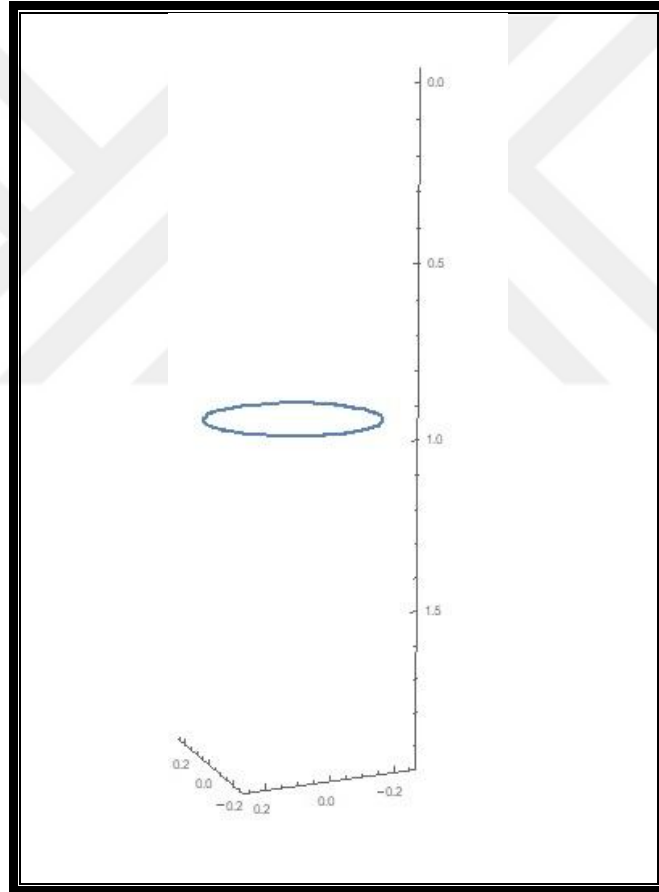
$$B_{\beta_{T_\gamma B_\gamma}} = (0, 1, 0)$$

eğriliği $\kappa_{\beta_{T_\gamma B_\gamma}}$ ve torsiyonu $\tau_{\beta_{T_\gamma B_\gamma}}$ ise

$$\kappa_{\beta_{T_\gamma B_\gamma}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$$

$$\tau_{\beta_{T_\gamma B_\gamma}} = 0$$

dır.



Şekil 3. $T_\gamma B_\gamma$ -Smarandache eğri

$\beta_{N_\gamma B_\gamma}$, $N_\gamma B_\gamma$ -Smarandache eğrisinin Frenet çatısı,

$$T_{\beta_{N_\gamma B_\gamma}} = \frac{1}{\sqrt{7}}(2\text{coss} - \sqrt{3}\text{sins}, 0, -\sqrt{3}\text{coss} - 2\text{sins})$$

$$\mathbf{N}_{\beta_{N_\gamma B_\gamma}} = \frac{1}{\sqrt{7}}(-\sqrt{3}\text{coss} - 2\text{sins}, 0, -2\text{coss} + \sqrt{3}\text{sins})$$

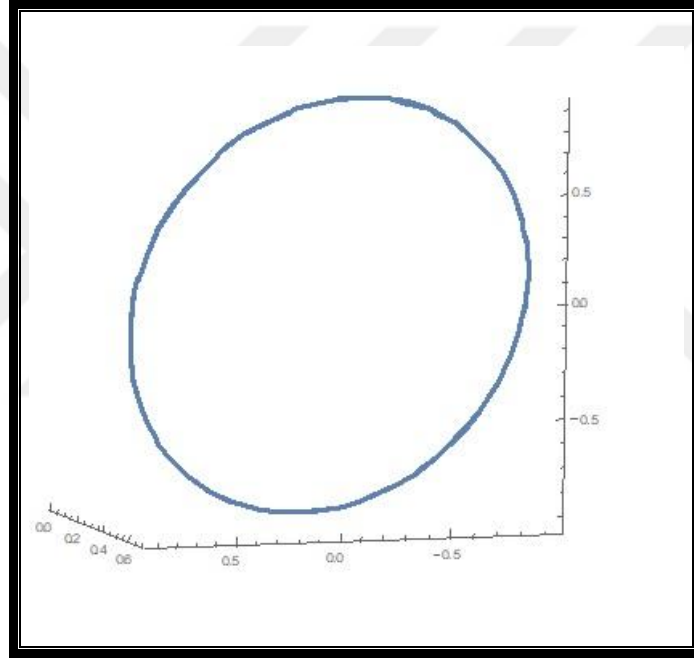
$$\mathbf{B}_{\beta_{N_\gamma B_\gamma}} = (0, 1, 0)$$

eğriliği $\kappa_{\beta_{N_\gamma B_\gamma}}$ ve torsiyonu $\tau_{\beta_{N_\gamma B_\gamma}}$ ise

$$\kappa_{\beta_{N_\gamma B_\gamma}} = \frac{2\sqrt{14}}{7}$$

$$\tau_{\beta_{N_\gamma B_\gamma}} = 0$$

dır.



Şekil 4. $N_\gamma B_\gamma$ -Smarandache eğri

$\beta_{T_\gamma N_\gamma B_\gamma}$, $T_\gamma N_\gamma B_\gamma$ -Smarandache eğrisinin Frenet çatısı,

$$\mathbf{T}_{\beta_{T_\gamma N_\gamma B_\gamma}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4-\sqrt{3}}} \left(\text{coss} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}\text{sins}, 0, -\text{sins} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}\text{coss} \right)$$

$$\mathbf{N}_{\beta_{T_\gamma N_\gamma B_\gamma}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4-\sqrt{3}}} \left(-\text{sins} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}\text{coss}, 0, -\text{coss} - \frac{1-\sqrt{3}}{2}\text{sins} \right)$$

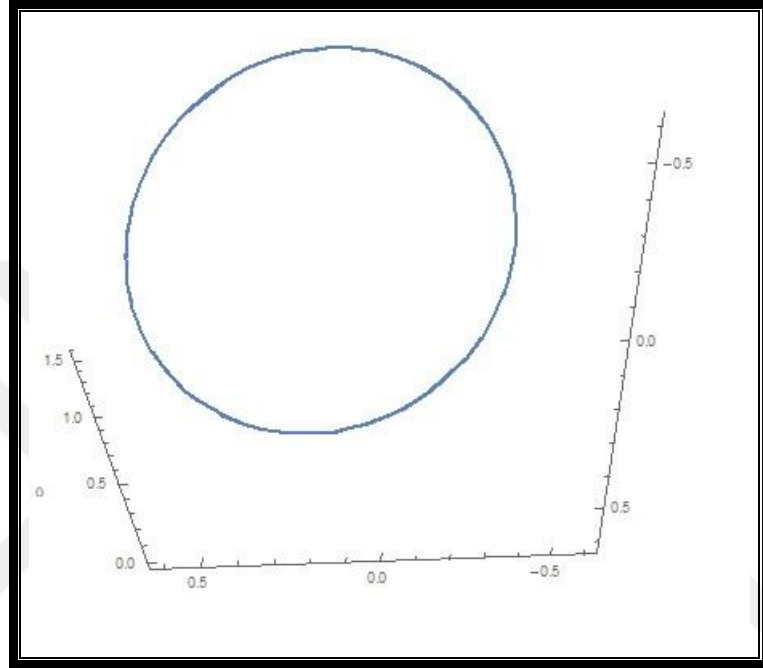
$$\mathbf{B}_{\beta_{T_\gamma N_\gamma B_\gamma}} = (0, 1, 0)$$

eğriliği $\kappa_{\beta_{T_\gamma N_\gamma B_\gamma}}$ ve torsiyonu $\tau_{\beta_{T_\gamma N_\gamma B_\gamma}}$ ise

$$\kappa_{\beta_{T_\gamma N_\gamma B_\gamma}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{4 - \sqrt{3}}}$$

$$\tau_{\beta_{T_\gamma N_\gamma B_\gamma}} = 0$$

dır.



Şekil 5. $T_\gamma N_\gamma B_\gamma$ -Smarandache eğri

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında;

- \mathbb{E}^3 'te birim hızlı bir α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet çatısı $\{\mathbf{T}_\alpha(s), \mathbf{N}_\alpha(s), \mathbf{B}_\alpha(s)\}$, eğriliği κ_α torsiyonu $\tau_\alpha \neq 0$ olmak üzere α eğrisinin γ adjoint eğrisinin $\mathbf{T}_\gamma \mathbf{N}_\gamma$ - Smarandache eğrisi ve bu eğrinin eğrilikleri

$$\begin{aligned}\beta_{\mathbf{T}_\gamma \mathbf{N}_\gamma}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (-\mathbf{N}_\alpha(s) + \mathbf{B}_\alpha(s)) \\ \kappa_{\beta_{\mathbf{T}_\gamma \mathbf{N}_\gamma}} &= \frac{\sqrt{2}}{(\kappa_\alpha^2 + 2\tau_\alpha^2)^2} \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3}, \\ \tau_{\beta_{\mathbf{T}_\gamma \mathbf{N}_\gamma}} &= \frac{\sqrt{2} ((2\tau_\alpha^3 + \kappa_\alpha^2 \tau_\alpha) \overline{\lambda_1} + (\kappa_\alpha \tau_\alpha' - \kappa_\alpha' \tau_\alpha) \overline{\lambda_2})}{\sigma_1} \\ &\quad + \frac{(\kappa_\alpha^3 + 2\kappa_\alpha \tau_\alpha^2 - \kappa_\alpha \tau_\alpha' + \kappa_\alpha' \tau_\alpha) \overline{\lambda_3}}{\sigma_1}\end{aligned}$$

olarak elde edilmiştir.

- \mathbb{E}^3 'te birim hızlı bir α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet çatısı $\{\mathbf{T}_\alpha(s), \mathbf{N}_\alpha(s), \mathbf{B}_\alpha(s)\}$, eğriliği κ_α torsiyonu $\tau_\alpha \neq 0$ olmak üzere α eğrisinin γ adjoint eğrisinin $\mathbf{T}_\gamma \mathbf{B}_\gamma$ - Smarandache eğrisi ve bu eğrinin eğrilikleri

$$\begin{aligned}\beta_{\mathbf{T}_\gamma \mathbf{B}_\gamma}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{T}_\alpha(s) + \mathbf{B}_\alpha(s)), \\ \kappa_{\beta_{\mathbf{T}_\gamma \mathbf{B}_\gamma}} &= \frac{\sqrt{2(\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2)}}{\kappa_\alpha - \tau_\alpha}, \\ \tau_{\beta_{\mathbf{T}_\gamma \mathbf{B}_\gamma}} &= \frac{\sqrt{2} ((\kappa_\alpha^2 \tau_\alpha - \kappa_\alpha \tau_\alpha^2 - \kappa_\alpha \tau_\alpha^2 + \tau_\alpha^3) \delta_1)}{\sigma_2} \\ &\quad + \frac{(\kappa_\alpha^3 - 2\kappa_\alpha^2 \tau_\alpha + \kappa_\alpha \tau_\alpha^2) \delta_3}{\sigma_2}\end{aligned}$$

olarak elde edilmiştir.

- \mathbb{E}^3 'te birim hızlı bir α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet çatısı $\{\mathbf{T}_\alpha(s), \mathbf{N}_\alpha(s), \mathbf{B}_\alpha(s)\}$, eğriliği κ_α torsiyonu $\tau_\alpha \neq 0$ olmak üzere α eğrisinin γ adjoint eğrisinin $\mathbf{N}_\gamma \mathbf{B}_\gamma$ - Smarandache eğrisi ve bu eğrinin eğrilikleri

$$\beta_{\mathbf{N}_\gamma \mathbf{B}_\gamma}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{T}_\alpha(s) - \mathbf{N}_\alpha(s)),$$

$$\begin{aligned}\kappa_{\beta_{N_\gamma B_\gamma}} &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(2\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2)^2}} \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2} \\ \tau_{\beta_{N_\gamma B_\gamma}} &= \frac{\sqrt{2}((\tau_\alpha^3 + 2\kappa_\alpha^2\tau_\alpha - \kappa_\alpha\tau'_\alpha + \kappa'_\alpha\tau_\alpha)\overline{\Delta_1})}{\sigma_3} - \frac{(\kappa_\alpha\tau'_\alpha - \kappa'_\alpha\tau_\alpha)\overline{\Delta_2}}{\sigma_3} \\ &\quad + \frac{(2\kappa_\alpha^3 + \kappa_\alpha\tau_\alpha^2)\overline{\Delta_3}}{\sigma_3}\end{aligned}$$

olarak elde edilmiştir.

- \mathbb{E}^3 'te birim hızlı bir α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet çatısı $\{\mathbf{T}_\alpha(s), \mathbf{N}_\alpha(s), \mathbf{B}_\alpha(s)\}$, eğriliği κ_α torsiyonu $\tau_\alpha \neq 0$ olmak üzere α eğrisinin γ adjoint eğrisinin $\mathbf{T}_\gamma\mathbf{N}_\gamma\mathbf{B}_\gamma$ - Smarandache eğrisi ve bu eğrinin eğrilikleri

$$\begin{aligned}\beta_{\mathbf{T}_\gamma\mathbf{N}_\gamma\mathbf{B}_\gamma}(s) &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{T}_\alpha(s) - \mathbf{N}_\alpha(s) + \mathbf{B}_\alpha(s)) \\ \kappa_{\beta_{\mathbf{T}_\gamma\mathbf{N}_\gamma\mathbf{B}_\gamma}} &= \frac{\sqrt{3}}{4(\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2 - \kappa_\alpha\tau_\alpha)^2} \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2} \\ \tau_{\beta_{\mathbf{T}_\gamma\mathbf{N}_\gamma\mathbf{B}_\gamma}} &= \frac{\sqrt{3}((2\kappa_\alpha\tau_\alpha(\kappa_\alpha - \tau_\alpha) - \kappa_\alpha\tau'_\alpha + \kappa'_\alpha\tau_\alpha + 2\tau_\alpha^3)\overline{\mu_1})}{\sigma_4} \\ &\quad + \frac{(\kappa_\alpha\tau'_\alpha - \kappa'_\alpha\tau_\alpha)\overline{\mu_2}}{\sigma_4} \\ &\quad + \frac{(2\kappa_\alpha^3 + 2\kappa_\alpha\tau_\alpha(\tau_\alpha - \kappa_\alpha) - \kappa_\alpha\tau'_\alpha + \kappa'_\alpha\tau_\alpha)\overline{\mu_3}}{\sigma_4}\end{aligned}$$

olarak elde edilmiştir.

Yukarıda elde edilen eğriler De-Sitter uzayı, Galile uzayı gibi başka uzay yapılarında ve farklı çatılar kullanılarak ayrıca incelenebilir. Ek olarak bu eğrilerin akış denklemleri araştırılabilir.

KAYNAKLAR

- Abdel-Aziz, H. S., & Saad, M. K. (2017). Computation Of Smarandache Curves According To Darboux Frame In Minkowski 3-Space. *Journal Of The Egyptian Mathematical Society*, 25(4), 382-390.
- Al-Dayel, I., & Solouma, E. M. (2021). Geometric Properties İn Minkowski Space-Time Of Spacelike Smarandache Curves. *International Journal Of Applied And Computational Mathematics*, 7(4), 1-16.
- Ali, A. T. (2010). Special Smarandache curves in the Euclidean space. *International J.Math. Combin.*, Vol.2, 30-36
- Altun, Y., Cevahir, C., & Senyurt, S. (2019). On The Smarandache Curves Of Spatial Quaternionic Involute Curve.
- Arıkan, M., & Nurkan, S. K. (2020) Adjoint Curve According to Modified Orthogonal Frame with Torsion in 3-Space. *Uşak Üniversitesi Fen ve Doğa Bilimleri Dergisi*, 4(2), 54-64.
- Baş, S. (2019, July). A new method for inextensible flows of adjoint curves in space. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 2116, No. 1, p. 240003). AIP Publishing LLC.
- Bayram, E. (2020). Surface Pencil With A Common Adjoint Curve. *Turkish Journal of Mathematics*, 44(5), 1649-1659.
- Choi, J. H., & Kim, Y. H. (2012). Associated curves of a Frenet curve and their applications. *Applied Mathematics and Computation*, 218(18), 9116-9124.
- Cox, D. A. (2008). The moving curve ideal and the Rees algebra. *Theoretical Computer Science*, 392(1-3), 23-36..
- Çakmak, A., & Şahin, V. (2022). Characterizations of Adjoint Curves According to Alternative Moving Frame. *Fundamental Journal of Mathematics and Applications*, 5(1), 42-50.
- Deshmukh, S., Chen, B. Y., & Alghanemi, A. (2018). Natural mates of Frenet curves in Euclidean 3-space. *Turkish Journal of Mathematics*, 42(5), 2826-2840.
- Elzawy, M., & Mosa, S. (2017). Smarandache Curves In The Galilean 4-Space G_4 . *Journal Of The Egyptian Mathematical Society*, 25(1), 53-56.
- Güler, F. (2022). Construction of surface pencil with a given spacelike adjoint curve. *Advanced Studies: Euro-Tbilisi Mathematical Journal*, 15(2), 1-11.
- Hacısalihoğlu, H. H. (2000). Diferensiyel Geometri. 3. Baskı.

- Kahraman, T., & Uğurlu, H. (2014). Dual smarandache curves and smarandache ruled surfaces. *Mathematical Sciences and Applications E-Notes*, 2(1).
- Keskin, O., Yuuksel, N., Karacan, M. K., & Ikiz, H. (2016). Characterization Of The Parallel Curve Of The Adjoint Curve In \mathbb{E}^3 . *General Mathematics Notes*, 35(1), 9-19.
- Körpınar, T., Sazak, A., & Korpınar, Z. (2022). Quası Focal Curves Of Adjoint Curves Of Timelike Curves In 3d Minkowski Space. *Journal of Science and Arts*, 22(2), 407-412.
- Mñuk, M. (1997). An Algebraic Approach To Computing Adjoint Curves. *Journal of Symbolic Computation*, 23(2-3), 229-240.
- Nurkan, S. K., & Güven, İ. A (2022). New Approach For Smarandache Curves. *Turkish Journal Of Mathematics And Computer Science*, 14(1), 155-165.
- Nurkan, S. K., Güven, İ. A., & Karacan, M. K. (2019). Characterizations Of Adjoint Curves In Euclidean 3-Space. *Proceedings of the National Academy of Sciences, India Section A: Physical Sciences*, 89(1), 155-161.
- Öztürk, U., & Koç Öztürk, E. B. (2014). Smarandache Curves According To Curves On A Spacelike Surface İn Minkowski 3-Space. *Journal Of Discrete Mathematics*, 2014.
- Öztürk, U., Sarıkaya, B., Haskul, P., & Emir, A. (2022). On Smarandache Curves In Affine 3-Space. *Journal Of New Theory*, (38), 61-69.
- Solouma, E. M. (2017). Special Equiform Smarandache Curves In Minkowski Space-Time. *Journal Of The Egyptian Mathematical Society*, 25(3), 319-325.
- Solouma, E. M., & Mahmoud, W. M. (2019). On Spacelike Equiform-Bishop Smarandache Curves On S_1^2 . *Journal Of The Egyptian Mathematical Society*, 27(1), 1-17.
- Şenyurt, S. (2018). D-Smarandache Curves According To The Sabban Frame Of The Spherical Indicatrix Curve. *Turkish Journal Of Mathematics And Computer Science*, 9, 39-49.
- Şenyurt, S., Altun, Y., & Cevahir, C. (2019). Smarandache Curves According To Sabban Frame Belonging To Mannheim Curves Pair. *Communications Faculty Of Sciences University Of Ankara Series A1 Mathematics And Statistics*, 68(1), 500-513.

- Şenyurt, S., & Öztürk, B. (2020). Smarandache Curves According To The Sabban Frame Belonging To Spherical Indicatrix Curve Of The Salkowski Curve. *Tbilisi Mathematical Journal*, 13(3), 111-131.
- Turgut, M., & Yilmaz, S. (2008). Smarandache Curves In Minkowski Space-Time. *Int. J. Math. Combin.* 3, 51-55.
- Tasköprü, K., & Tosun, M. (2012). Smarandache Curves According To Sabban Frame On S^2 . *Arxiv Preprint Arxiv:1206.6229*.
- Yakut, A. T., Savas, M., & Tamirci, T. (2014). The Smarandache Curves On S_1^2 And Its Duality On H^2 . *Journal Of Applied Mathematics*.

