

T.C.
İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

LİNEER OLMAYAN SCHRODINGER DENKLEMLERİ İÇİN BAZI ÇÖZÜM
TEKNİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
ÖZLEM ERTÜRK
1900006213

Anabilim Dalı: Matematik ve Bilgisayar Bilimleri

Program: Matematik ve Bilgisayar Bilimleri

Tez Danışmanı: Dr. Öğr Üyesi Canan AKKOYUNLU

NİSAN 2023

T.C.

İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

LİNEER OLMAYAN SCHRODINGER DENKLEMLERİ İÇİN BAZI ÇÖZÜM
TEKNİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Özlem ERTÜRK
1900006213

Anabilim Dalı: Matematik ve Bilgisayar Bilimleri

Program: Matematik ve Bilgisayar Bilimleri

Tez Danışmanı : Dr. Öğr. Üyesi Canan AKKOYUNLU

Tez Jüri Üyeleri : Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Fatih UÇAR

Doç Dr. Gülden GÜN POLAT

NİSAN 2023

ÖNSÖZ

Tez çalışmamın her aşamasında benimle değerli bilgilerini ve tecrübelerini paylaşan, ne zaman kendisine bir şeyler danışsam o kıymetli vaktini ayırıp sabırla ve büyük bir ilgiyle bana faydalı olmak için elinden geleni yapmaya çalışan, bu süreçte asla güler yüzünü, hoş sohbetini ve samimiyetini benden esirgemeyen çok kıymetli danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Canan AKKOYUNLU'ya en içten şükranlarımı sunuyorum.

İstanbul Kültür Üniversitesi Matematik-Bilgisayar Bilimleri Bölümü hocalarıma katkıları ve emekleri için çok teşekkür ediyorum.

Hayattaki en büyük destekcim olan ve bana daima güvenen canım aileme sonsuz teşekkürler. İyi ki varsınız.

Ve son olarak çalışmam süresince yanımda olduğunu hissettirdiği ve bana güvendiği için Emrah KILIÇ'a sonsuz teşekkürler. İyi ki varsın.

NİSAN 2023

Özlem ERTÜRK

ÖZET

LİNEER OLMAYAN SCHRODINGER DENKLEMLERİ İÇİN BAZI ÇÖZÜM TEKNİKLERİ

Özlem ERTÜRK

Yüksek lisans Tezi, Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Canan AKKOYUNLU

NISAN 2023, 41 sayfa

Lineer olmayan Schrödinger (NLS) denklemleri fizik, optik ve akışkanlar dinamiği gibi pek çok alanda kullanılan önemli denklemlerden biridir. NLS denkleminin çözümlerini elde etmek için uzun yıllardır çalışmalar yapılmaktadır. Bu denklemin enerji korunumu, kütle korunumu gibi geometrik özellikleri vardır. Yapılan çalışmalarda bu korunumların sağlandığı da gösterilmeye çalışılmaktadır. Son yıllarda geometrik yapıları koruyan yöntemler üzerine yapılan araştırmalar hız kazanmıştır. Bu tezde [38]. makalede tanımlanmış olan yapı koruyan yöntemler incelenmiştir. Bölünmüş ortalama vektör alanı yöntemi ve bu yöntemin eşleniği dikkate alınarak eşlenik yöntem ilk kez NLS denklemini uygulanmıştır. Ayrıca makalede yer alan bu iki yöntemin birleşimi ve ortalamalarından oluşan yöntemler de NLS denklemine için uygulanmıştır. Makalede yer alan veriler doğrultusunda bu yöntemlerin ortalama vektör alanı yöntemine göre daha etkili olduğu anlaşılmaktadır.

Anahtar kelimeler: Lineer Olmayan Schrödinger Denklemleri, Ortalama Vektör Alanı, Sonlu Fark Yöntemi

JÜRİ : Dr. Öğr. Üyesi Canan AKKOYUNLU

Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Fatih UÇAR

Doç Dr. Gülden GÜN POLAT

ABSTRACT

Some Methods For Nonlinear Schrödinger Equations

Özlem ERTÜRK

MSc. Thesis in Department of Mathematics and Computer Science.

Supervisor : Assist. Prof. Dr. Canan AKKOYUNLU

APRIL 2023, 41 pages

Nonlinear Schrödinger (NLS) equations are one of the important equations used in many fields such as physics, optics and fluid dynamics. Studies have been carried out for many years to obtain the solutions of the NLS equation. This equation has geometric properties such as conservation of energy and conservation of mass. In the studies carried out, it is tried to show that these protections are provided. In recent years, researches on methods that preserve geometric structures have accelerated. In this thesis, the structure-preserving methods described in the article [38] are examined. Considering the partitioned average vector field method and the conjugate of this method, the conjugate method was first used in the NLS equation. In addition, the methods consisting of the combination and average of these two methods in the article were also applied to the NLS equation. According to the data in the article, these methods are more effective than the average vector field method.

Keywords: Nonlinear Schrodinger Equations, Average Vector Field Method, Finite Difference Method

COMMITTEE: Assist. Prof. Dr. Canan AKKOYUNLU

Assist. Prof. Dr. Mehmet Fatih UÇAR

Assoc. Prof. Dr. Gülден GÜN POLAT

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
AKADEMİK BEYAN	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1. Lineer Denklem	3
2.2. Lineer Denklem Sistemleri	3
2.3. Homojen Lineer Denklem Sistemi	4
2.4. Diferansiyel Denklem Sistemi	5
2.5. Lineer Diferansiyel Denklem Sistemi	5
2.6. Lineer Olmayan Diferansiyel Denklem Sistemi	6
2.7. Açık Euler Yöntemi	6
2.8. Kapalı Euler Yöntemi	6
2.9. Orta Nokta Yöntemi	6
2.10. Jakobiyen Matris	6
2.11. Newton Yöntemi	8
2.12. Kısmi Diferansiyel Denklem	10
2.12.1. Lineer Kısmi Diferansiyel Denklem	11
2.12.2. Lineer Olmayan Kısmi Diferansiyel Denklem	11
3. SONLU FARKLAR YÖNTEMİ	14
4. SONSUZ BOYUTLU HAMILTONİAN SİSTEMLER	17
5. SONLU BOYUTLU HAMILTONİAN SİSTEMLER	18
6. ENERJİ KORUYAN SAYISAL YÖNTEMLER	20
6.1. Ortalama Vektör Alanı(OVA) Yöntemi	20
6.2. Bölünmüş Ortalama Vektör Alanı Yöntemi (BOVA)	23
7. LİNEER OLMAYAN SCHRODINGER (NLS) DENKLEMLERİ	26
7.1. Bir Boyutlu Lineer olmayan Schrödinger (NLS) Denklemi	26
7.2. İki Boyutlu Lineer Olmayan Schrödinger (NLS) Denklemi	28
7.3. Kesirli Mertebeden Schrödinger Denklemi	28
8. SAYISAL ÇÖZÜMLER	29
8.1. NLS Denklem Sistemine Bölünmüş Ortalama Vektör Alanı (BOVA) Yönteminin Uygulanması	29
8.2. NLS Denklem Sistemine $\Phi_{\Delta t}^*$ (BOVA*) Ek Yöntemin Uygulanması	32
8.4. BOVA* Yönteminin Uygulanmasında Jakobiyen Matrisinin Hesaplanması	36
9. SONUÇ	38
10. KAYNAKLAR	39

AKADEMİK BEYAN

Yüksek lisans Tezi olarak sunduğum “LİNEER OLMAYAN SCHRODINGER DENKLEMLERİ İÇİN BAZI ÇÖZÜM TEKNİKLERİ ” adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

.../.../2023
Özlem ertürk
İmza



ŞEKİLLER DİZİNİ

3.1. Ayrık problemler ile sürekli problemler arasındaki ilişki [24].	14
3.2. Türev tanımı	14



1. GİRİŞ

Evrenin oluşum sistemi belli sistematik bir düzene bağlı kurallarla şekillenmiş bir makine düzeneğine bağlı gibidir. Evrenin oluşum mekanizması ve yaşam alanlarında ortaya çıkan yasaları anlamlandırmak için bilim insanları tarafından farklı çalışmalar geliştirilmiştir. Yapılan çalışmalar sonucunda önerilen birçok yöntemden elde edilen çözümler matematik bilim dalıyla anlamlandırılmaya çalışılmıştır. Farklı alanlarda karşılaştığımız problemlerin matematik bilim dalıyla modellenip çözüme kavuşturulması bilim insanları için çözüm kaynakları arasında yer almıştır. Yapılan çözüm modellemeleri diferansiyel denklemleri oluşturarak birçok problemin çözülmesine imkan sağlamaktadır [26].

Matematik gibi pek çok bilim dalında da karşılaşılan problemler sayısal yöntemlerle çözülmektedir. Bu sayısal yöntemlerdeki denklemlerin hesaplamaları, problemlerin karmaşıklığı, çözümlere en kısa zamanda ve doğru olarak ulaşılmak istenmesi teknoloji alanındaki gelişmeyide beraberinde getirmiştir. Bu süreçte bilgisayar teknolojisi ile problemlerin tahmini çözümlerini elde edebilmek amacıyla sonlu farklar yöntemi tercih edilmiştir. [41]. İnsanlar asırlardır karşılaştıkları problemler için en optimal çözüme varabilmek gibi bir ihtiyaçla karşılaşmış, bu karşılaşılan problemler de yüzyıllar boyunca kendine özgü metodlarla çözülmüş ve tüm problemlerin çözümüne de varabileceğimiz yaklaşımlar elde edilememiştir [32].

Teknolojinin hızla gelişmesi sonucunda bilgisayar sisteminde gelişmesiyle işlem yapan bilgisayarların kullanımının gün geçtikçe yaygınlaşması sonucu ortaya çıkmış böylelikle birçok sayısal yöntemin gelişmesine katkı sağlamıştır. Ortaya çıkan bu sayısal yöntemlerden en yaygın olarak kullanılan yöntemler ise sonlu farklar ve sonlu elemanlar yöntemleridir [12].

Sonlu farklar yöntemini, 1950'li yıllarda havacılık endüstrisi kapsamında geliştirilmiş ve diferansiyel denklemin tanım aralığı için kullanım sağlanmıştır.

Bir diferansiyel denklemin sayısal çözümünde kullanılan yöntemlerden biri de sonlu farklar yöntemidir. Bu metodun sık sık kullanılmasının nedeni ise teorik çözümü elde edilemeyen problemlerin çözümlerine erişilebilir olmasıdır. Tam bu noktada kısmi diferansiyel denklemlerde, sonlu farklar metodunun uygulanması bir problem alanı meydana çıkarır. Bu problem alanı eşit şekilde ya da çeşitli boyutlarda ağlara bölünür ve bölünen bu ağlardaki noktalara Düğüm noktası denir.

Teorik fizikte ve matematikte, lineer olmayan Schrödinger Denklemi olarak bilinen bu denklem aslında kuantum mekaniğinden çok iyi bilinen Schrödinger Denklemi'nin iki ya da daha fazla boyutta lineer olmayan bir uyarlaması olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu nedenle lineer olmayan Schrödinger denklemi hem fizikte, optik ve su dalgalarının kuramında, hem de matematikte, integre edilebilen modellerde uygulama alanları bulmaktadır. Kuantum beklentilerini tanımlayan dalga sistemi Schrödinger denkleminin bir çözümünü belirtmektedir [22].

Schrödinger denklemi kuantum fiziğin temel denklemlerinden biri olup bir kuantum mekanik sistemi açıklamak için kullanılır. Bu denkleme Schrödinger dalga denk-

lemi adı da verilmektedir. Bu dalga deklemini zamanla gelişen bir fiziksel sistemin dalga fonksiyonunu tanımlayan bir kısmi diferansiyel denklemdir [29].

Bu çalışmada NLS denklemlerinin çeşitlerine yer verilmiştir. Ayrıca enerji korunumunu sağlayan ortalama vektör alanı yöntemi üzerinde çalışılmıştır. 2017 yılında yapılan çalışmada yöntem farklı formlarda ele alınmış ve çeşitli denklemlere uygulanmıştır. Tez de makalede yer alan bölünmüş ortalama vektör alanı yöntemi, eşlenik yöntem, ortalama değerlerinden oluşan yöntem ve birleşimlerinden oluşan yöntem periyodik sınır koşullu bir boyutlu NLS denklemine uygulanmıştır.

Çalışma dokuz bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde çalışılan konu hakkında bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde temel kavramlar ve diferansiyel denklemin tanımı verilmiştir.

Üçüncü bölümde sonlu farklar yöntemi açıklanmıştır.

Dördüncü ve beşinci bölümde sonlu-sonsuz boyutlu Hamilton sistemler ile ilgili bilgiler yer almaktadır.

Altıncı bölümde enerji koruyan sayısal yöntemlerden olan ortalama vektör alanı yöntemi, bölünmüş ortalama vektör alanı yöntemi ve ek yöntem hakkında bilgiler verilmiştir.

Yedinci bölümde bir boyutlu lineer olmayan Schrödinger denklemi ve bu denkleme bölünmüş ortalama vektör alanı yöntemi ile ek yöntemin uygulanması yer almaktadır. Ayrıca lineer olmayan güçlü ikili Schrödinger denklem ve kesirli mertebeden Schrödinger denklem ile ilgili edinilen bilgiler bulunmaktadır.

Sekizinci bölümde NLS Denklem sistemine BOVA, BOVA* ve Ek yöntemlerinin uygulanması ve sayısal çözümlerin detayları yer almaktadır.

Dokuzuncu bölümde tezde elde edilen sonuçlar özetlenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Lineer Denklem

Tanım 2.1. $d_i, z \in \mathbb{R}$ ve $k_1, k_2, \dots, k_n$ değişkenler olmak üzere,

$$d_1 k_1 + d_2 k_2 + \dots + d_n k_n = z$$

şeklindeki bir ifadeye **lineer denklem** denir.

2.2. Lineer Denklem Sistemleri

Tanım 2.2. $z_1, z_2, \dots, z_m$ ve $d_{ij} \in \mathbb{R} (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$, $k_1, k_2, \dots, k_n$ bilinmeyenler olmak üzere;

$$\left. \begin{aligned} d_{11}k_1 + d_{12}k_2 + \dots + d_{1n}k_n &= z_1 \\ d_{21}k_1 + d_{22}k_2 + \dots + d_{2n}k_n &= z_2 \\ &\vdots \\ d_{m1}k_1 + d_{m2}k_2 + \dots + d_{mn}k_n &= z_m \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

şeklinde verilen bir ifadeye n bilinmeyenli m tane denklemden oluşan sisteme **lineer denklem sistemi** denir.

Denklem sistemi aşağıdaki şekilde de yazılabilir.

$$\sum_{j=1}^n d_{ij} k_j = z_i \quad (1 \leq i \leq m)$$

Bu ifadede

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} \cdots & d_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{matrisi katsayılar matrisi}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} \quad \text{matrisi bilinmeyenler sütun matrisi}$$

ve

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix} \text{ matrisi sabitler sütun matrisi}$$

olarak tanımlanırsa $DK = Z$ şeklinde ifade edilir.

K matrisi $|D| \neq 0$ olmak üzere şu şekilde de bulunur:

$$K = D^{-1}Z$$

2.3. Homojen Lineer Denklem Sistemi

(2.1) ile verilen sistemde $z = [z_1, z_2, \dots, z_m]^T$ sütun vektörü sıfır vektör ise sisteme **homojen lineer denklem sistemi** denir. Yani ;

$$\left. \begin{aligned} d_{11}k_1 + d_{12}k_2 + \dots + d_{1n}k_n &= 0 \\ d_{21}k_1 + d_{22}k_2 + \dots + d_{2n}k_n &= 0 \\ \vdots \\ d_{m1}k_1 + d_{m2}k_2 + \dots + d_{mn}k_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

şeklinde z_i ' lerin sıfır olduğu lineer denklem sistemidir.

Tanım 2.3. m denklem ve n bilinmeyenden oluşan

$$\left. \begin{aligned} d_{11}k_1 + d_{12}k_2 + \dots + d_{1n}k_n &= 0 \\ d_{21}k_1 + d_{22}k_2 + \dots + d_{2n}k_n &= 0 \\ \vdots \\ d_{m1}k_1 + d_{m2}k_2 + \dots + d_{mn}k_n &= 0 \end{aligned} \right\}$$

denklem sistemini göz önüne alalım. $k_1, k_2, \dots, k_n$ bilinmeyenleri, d_{ij} ve z_i ler ise sabitleri ifade etmek üzere lineer denklem sistemi matrislerle aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} \cdots & d_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow DK = 0$$

2.4. Diferansiyel Denklem Sistemi

Bağımsız değişkeni x , bilinmeyen $z = f(x)$ fonksiyonu olsun. Tanımladığımız bu fonksiyonun türevleri $(z', z'', z''', \dots, z^{(m)})$ arasındaki bağıntıya **diferansiyel denklem** denir.

Bir diferansiyel denklem genel olarak ;

$$F\left(x, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^3z}{dx^3}, \dots, \frac{d^mz}{dx^m}\right) = 0$$

şeklinde ifade edilir.

$$z'' + z' - 3z = 5$$

eşitliği bir diferansiyel denklem örneğidir. Diferansiyel denklemdeki en yüksek mertebeden türevine o diferansiyel denklemin **mertebe**si denir. Bir diferansiyel denklemde bulunan en yüksek mertebeli türevin üssüne ise o diferansiyel denklemin **derece**si denir.

$$f(x, z, z', z'', \dots, z^{(m)}) = 0 \text{ (} m \text{. mertebeden diferansiyel denklem)}$$

2.5. Lineer Diferansiyel Denklem Sistemi

Bağımlı değişkeninin tüm türevlerinin birinci dereceden olması halinde diferansiyel denklem **lineer diferansiyel denklem** halini alır. Bilinmeyen bir fonksiyon tek değişkene bağlı ise bu diferansiyel denkleme **adi diferansiyel denklem** denir.

m . mertebeden adi lineer diferansiyel denklem , bağımsız değişken x ve bağımlı değişken z olmak üzere ;

$$c_0(x) \frac{d^m z}{dx^m} + c_1(x) \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \dots + c_{m-1}(x) \frac{dz}{dx} + c_m(x) z = k(x)$$

ya da

$$c_0(x) z^{(m)} + c_1(x) z^{(m-1)} + \dots + c_{m-1}(x) z' + c_m(x) z = k(x)$$

şeklinde ifade edilir.

2.6. Lineer Olmayan Diferansiyel Denklem Sistemi

Diferansiyel denklemdeki bağımlı değişkenin derecesi birden büyük ise veya doğrusallığı bozan fonksiyonlar içeriyorsa bu denkleme **lineer olmayan diferansiyel denklem** adı verilir.

Örnek. Herhangi bir diferansiyel denklem $x^3, e^{2x}, \log(x), \tan(x)$ gibi üstel, logaritmik, trigonometrik fonksiyonlar içeriyorsa lineer olmayan olarak ifade edilir.

Lineer olmayan bir denklem sistemi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

burada $f \in \mathbb{R}^n$ ve $\forall f_i$, lineer olmayan bir gerçekte fonksiyon ve $i = 1, 2, \dots, n$ [8].

2.7. Açık Euler Yöntemi

$$z_{n+1} = z_n + hf(z_n)$$

şeklinde tanımlanır. Adım uzunluğu h olan bu yöntem $\psi_n : z_n \rightarrow z_{n+1}$ şeklinde tasvir ile gösterilirse bu tasvire *ayrık tasvir* ya da *sayısal tasvir* denir [15].

2.8. Kapalı Euler Yöntemi

$$z_{n+1} = z_n + hf(z_{n+1})$$

şeklinde tanımlanır [15].

2.9. Orta Nokta Yöntemi

$$z_{n+1} = z_n + hf\left(\frac{z_n + z_{n+1}}{2}\right)$$

şeklinde tanımlanır. Orta nokta yöntemi simetrik bir yöntemdir. $z_n \leftrightarrow z_{n+1}$ ve $h \leftrightarrow -h$ değişikliği yapıldığında da aynı formül elde edilir [15].

2.10. Jakobiye Matris

Tanım 2.4 (Jakobiye Matris). $\mathbb{R}^n$ uzayında birinci dereceden türevlenebilir bir fonksiyon $f_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($j = 1, 2, \dots, n$) olsun. Bu fonksiyon $x \in \mathbb{R}^n$ noktası için bir $f(x) \in \mathbb{R}^n$ vektörü oluştursun. Bu f fonksiyonunun Jakobiye matrisi $n \times n$ boyutlu

bir matris olarak tanımlanır ve J ile gösterilir.

$$J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}$$

Örnek.

$$\begin{aligned} 4x_1 + \sin(x_2) - \frac{2}{3} &= 0 \\ 2x_1^2 - 24(x_2 + 0.2)^2 + \cos(x_3) + 1.13 &= 0 \\ e^{-x_1} + 12x_3 + \pi &= 0 \end{aligned}$$

yukarıdaki lineer olmayan denklem sistemi için Jakobiyen matrisi şu şekilde hesaplanır:

Çözüm.

$$\begin{aligned} F_1(x) &= 4x_1 + \sin(x_2) - \frac{2}{3} = 0 \\ F_2(x) &= 2x_1^2 - 24(x_2 + 0.2)^2 + \cos(x_3) + 1.13 = 0 \\ F_3(x) &= e^{-x_1} + 12x_3 + \pi = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} = 4, \quad \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \cos(x_2), \quad \frac{\partial F_1}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_1} = 4x_1, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = -48(x_2 + 0.2), \quad \frac{\partial F_2}{\partial x_3} = -\sin(x_3)$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x_1} = -e^{-x_1}, \quad \frac{\partial F_3}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial F_3}{\partial x_3} = 12$$

$$J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_1} & \frac{\partial F_3}{\partial x_2} & \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & \cos(x_2) & 0 \\ 4x_1 & -48(x_2 + 0.2) & \sin(x_3) \\ -e^{-x_1} & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

2.11. Newton Yöntemi

$f(x) = 0$ ' ın çözümlerini bulmak her zaman kolay olmayabilir. Bu gibi durumlarda köklerin yaklaşık olarak elde edilebilmesi için **Newton yöntemi** kullanılabilir.

Nümerik analizde Newton yöntemi çok sık kullanılan bir yöntem olup, bu yöntem $f(x)$ 'in bir x_1 noktası noktasındaki Taylor serisi açılımından ortaya çıkmıştır [8].

Teorem 2.5 (Taylor Serisi). $f(x)$ 'in $x = x_0$ ' da her mertebeden türevi var ise $((k = 0, 1, 2, \dots)$ için $f^k(x_0)$ mevcut ise) o zaman;

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots$$

serisine $f(x)$ 'in x_0 noktasındaki Taylor Serisi denir.

Taylor serisi açılımının ilk iki terimini dikkate alalım:

$$f(x) \approx f(x_1) + (x - x_1) f'(x_1) \quad (2.3)$$

$f(x) = 0$ denklemin kökünü bulabilmek için

$$f(x_1) + (x - x_1) f'(x_1) \quad (2.4)$$

denklemini sıfıra eşitlemeliyiz:

$$f(x_1) + (x - x_1) f'(x_1) = 0 \quad (2.5)$$

(2.4) denklemini yeniden düzenlersek aşağıdaki yaklaşımı elde ederiz:

$$x = x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad (2.6)$$

(2.5) denklemini genelleyerek Newton'un yineleme yöntemini elde ederiz:

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}, i \in \mathbb{N} \quad (2.7)$$

$\bar{x}$, $f(x)$ fonksiyonunun köküne yaklaşım olmak üzere $x_i \rightarrow \bar{x} (i \rightarrow \infty)$ 'dır.

Lemma 2.6. *İterasyonda aynı değerler elde edilmeye başladığında yani $(x_i = x_{i+1} = \bar{x})$ olduğunda $f(x)$, $\bar{x}$ ye yakınsar. Bu durumda x_i , $f(x)$ fonksiyonun köküdür [8].*

Ancak (2.6) sadece tek değişkenli lineer olmayan denklemleri çözebilmek amacı ile kullanılır. En az iki değişken içeren lineer olmayan denklemleri çözebilmek için (2.6) denklemini değiştirmemiz gerekir.

$F(x) = 0$ olacak şekilde n bilinmeyenli lineer olmayan aşağıdaki denklem sistemini göz önüne alalım :

$$F(x) = F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix}$$

Bu denklem sisteminin bir kökü $\bar{x}$, yani $F(\bar{x}) = 0$ olsun. Bu denklem sistemindeki x_0 noktası noktasında Taylor açılımı

$$F(x) = F(x_0) + \frac{\delta F(x_0)}{\delta X} (x - x_0) + \dots$$

olsun. Burada,

$$\frac{\delta F(x_0)}{\delta X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_0)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x_0)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x_0)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x_0)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

olmak üzere bu matrise $J(x_0)$ diyelim. x_0 noktasındaki Taylor açılımı $F(x) \approx F(x_0) + J(x_0)(x - x_0)$ şeklinde yazılabilir.

$F(x) = 0$ denklem sisteminde $F(x)$ yerine x_0 noktasındaki birinci dereceden Taylor açılımı alınırsa sistem

$$F(x_0) + J(x_0)(x - x_0) = 0$$

olarak yazılır. Bu denklem sistemi tekrar düzenlenirse

$$\begin{aligned} J(x_0)(x - x_0) &= -F(x_0) \\ (x - x_0) &= -(J(x_0))^{-1}F(x_0) \\ x &= x_0 - (J(x_0))^{-1}F(x_0) \end{aligned} \tag{2.8}$$

elde edilir. (2.7) denklemi $\bar{x}$ kökü için yaklaşık bir değer olarak kullanılabilir. $\bar{x}$ köküne daha iyi bir yaklaşım sağlamak için;

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - (J(x^{(k-1)}))^{-1}F(x^{(k-1)}) \quad k = 1, 2, 3, \dots, n \tag{2.9}$$

eşitliği kullanılır.

Burada $x \in \mathbb{R}^n$, F vektör fonksiyonu ve $(J(x))^{-1}$ Jakobiyen matrisinin tersidir. Bu yöntem lineer olmayan diferansiyel denklem sistemi için Newton yöntemini temsil etmektedir [8].

2.12. Kısmi Diferansiyel Denklem

Kısmi diferansiyel denklemler ilk olarak geometrideki yüzey çalışmaları ve mekanikteki bazı problemlerde ortaya çıkmıştır. Bir diferansiyel denklemde en az iki bağımsız değişken ve bir veya birden fazla bağımlı değişkenin, bağımsız değişkene göre birinci veya daha fazla mertebeden kısmi türevleri yer alıyorsa bu denkleme **kısmi diferansiyel denklem** denir [2].

$z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ bağımsız değişkenler ve

$$V_{z_1} = \frac{\partial V}{\partial z_1}, V_{z_2} = \frac{\partial V}{\partial z_2}, V_{z_3} = \frac{\partial V}{\partial z_3}, \dots, V_{z_n} = \frac{\partial V}{\partial z_n}, V \text{ bağımlı değişkenin}$$

kısmi türevleri ve $(z_1, z_2, \dots)$ bağımsız değişkenler olmak üzere kısmi diferansiyel denklem,

$$F(z_1, z_2, \dots, z_n, V_{z_1}, V_{z_2}, \dots, V_{z_n}, V_{z_1 z_1}, V_{z_1 z_2}, \dots) = 0 \quad (2.10)$$

şeklinde yazılabilir. (z_1, z_2) bağımsız değişkenler olmak üzere

$$F(z_1, z_2, V, V_{z_1}, V_{z_2}) = 0$$

şeklindeki birinci mertebeden lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerinin ilk temeli Lagrange tarafından atılmıştır.

Örnek. v bağımlı değişken ve x, y, z bağımsız değişkenler olmak üzere

$$xv_{xx} + yv_{yy} = 0$$

$$v_x - yv_{xy} + 5xv_{yy} = 3 \cos x$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2xz \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + v = 1$$

denklemleri birer kısmi diferansiyel denklemdir.

Örnek. v bağımlı değişken ve w, z bağımsız değişkenler olmak üzere

$$v_w^2 + v_z^2 = 1$$

denklemleri birinci mertebeden ve ikinci dereceden bir kısmi diferansiyel denklemdir.

2.12.1. Lineer Kısmi Diferansiyel Denklem

Kısmi diferansiyel denklemdeki her bağımlı değişken ve her mertebeden kısmi türevler birinci dereceden ise ve aynı zamanda bağımlı değişkenler veya kısmi türevler çarpım halinde yer almıyorlarsa böyle denklemlere **lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem** adı verilir. [11].

Bir bağımlı ile iki bağımsız değişkene sahip birinci mertebeden lineer kısmi diferansiyel denklemlerin genel formları aşağıdaki gibidir:

$$S(y, z) v_y + Q(y, z) v_z + R(y, z) v = K(y, z) \quad (2.11)$$

2.12.2. Lineer Olmayan Kısmi Diferansiyel Denklem

Fiziksel denklemlerin nümerik çözümlerinde ve doğanın temel kanunlarının formüllendirilmesinde lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem sıkça kullanılmaktadır. z ve y bağımsız değişkenler ve v, v_z, v_y bağımlı değişkenler olmak üzere birinci mertebeden lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem kapalı formda,

$$F(z, y, v, v_z, v_y) = 0$$

şeklinde yazılır. z ve y bağımsız değişkenler olmak üzere ikinci mertebeden lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem ise ,

$$F(z, y, v, v_z, v_y, v_{zz}, v_{zy}, v_{yy}) = 0$$

şeklinde yazılır. Benzer şekilde yüksek mertebeden lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemleri genelleme yaparsak,

$$L_z v(z) = f(z) \quad (2.12)$$

operatör formda yazabiliriz. Burada L_z , lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem operatörü, $f(z)$, en az iki bağımsız değişkene sahip bir fonksiyondur. Bu arada $f(z) = 0$ ise (2.11) denklemi lineer olmayan homojen kısmi diferansiyel denklem ve $f(z) \neq 0$ ise (2.11) denklemi lineer homojen olmayan kısmi diferansiyel denklem olarak adlandırılır.

Örnek. Lineer homojen denkleme ısı denklemi örnek verilebilir:

$$v_t - av_{xx} = 0$$

$$v_t - vv_x = f(x, t)$$

denklemleri ise ($v > 0$ ve $f(x, t)$ bilinen bir fonksiyon olduğuna göre) homojen olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemdir.

Bazı önemli kısmi diferansiyel denklem modelleri aşağıdaki gibidir [1].

1. Advection Denklemi

$$v_t + vv_z = f(z, t)$$

2. Burgers Denklemi

$$v_t + vv_z = \alpha v_{zz}$$

3. Korteweg-de Vries Denklemi (KdV)

$$v_t + \alpha vv_z + \beta v_{zzz} = 0$$

4. Modifiye KdV (mKdV) Denklemi

$$v_t - 6v^2v_z + v_{zzz} = 0$$

5. Boussinesq Denklemi

$$v_{tt} - v_{zz} + 3(v^2)_{zz} - v_{zzz} = 0$$

6. Sine-Gordon Denklemi

$$v_{tt} - v_{zz} = \alpha \sin v$$

7. Sinh-Gordon Denklemi

$$v_{tt} - v_{zz} = \alpha \sinh v$$

8. Liouville Denklemi

$$v_{tt} - v_{zz} = e^{\pm v}$$

9. Fisher Denklemi

$$v_t = Dv_{zz} + v(1 - v)$$

10. Kadomtsev-Petviashvili (KP) Denklemi

$$(v_t + \alpha vv_z + \beta v_{zzz})_z + v_{yy} = 0$$

11. $K(m, m)$ Denklemi

$$v_t + \alpha(v^m)_z + \beta(v^m)_{zz} = 0, m > 1$$

12. Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi (NLS)

$$iv_t + v_{zz} + \gamma|v|^2v = 0$$

13. Camassa-Holm Denklemi (CH)

$$v_t - v_{zzt} + \alpha v_z + 3vv_z = 2v_zv_{zz} + vv_{zzz}$$

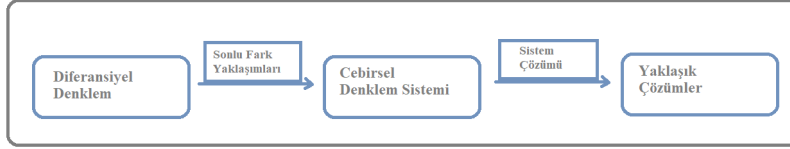
14. Degasperis-Procesi Denklemi (CH)

$$v_t - v_{zzt} + \alpha v_z + 4vv_z = 3v_zv_{zz} + vv_{zzz}$$

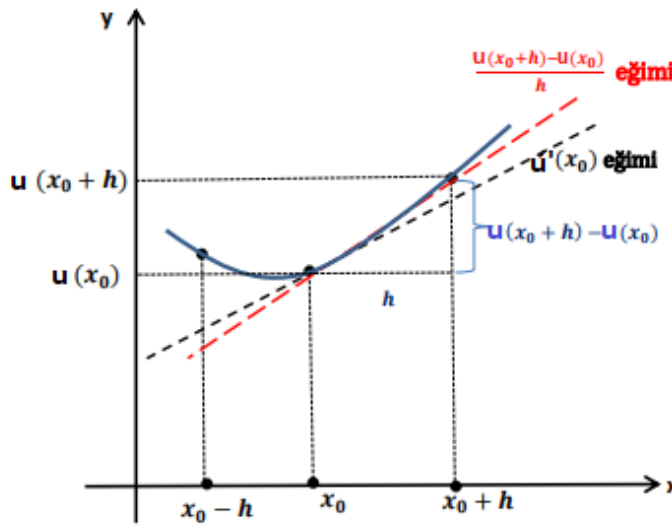


3. SONLU FARKLAR YÖNTEMİ

Sonlu farklar yöntemi, diferansiyel denklemin sayısal çözümlerinde kullanılan bir metottur. Taylor serisi yardımıyla, tek değişkenli ifadeler için sonlu fark yaklaşımları elde edilir.



Şekil 3.1: Ayırık problemler ile sürekli problemler arasındaki ilişki [24].



Şekil 3.2: Türev tanımı

$$\tilde{u}'(x) = \frac{d\tilde{u}(x)}{dx} = \lim_{x_2 - x_1 \rightarrow 0} \frac{\tilde{u}(x_2) - \tilde{u}(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$[b, c]$ tanım bölgesi için, K bir pozitif tam sayı ise,

$$h = \frac{c-b}{K}$$

x_i düğüm noktaları için

$$x_i = b + ih, \quad i = 0, 1, \dots, K \text{ olmak üzere}$$

$V(x)$ fonksiyonu ve bu fonksiyonun türevleri tanım bölgesi üzerinde sürekli olmak üzere

$$V(x_i + h) \text{ ve } V(x_i - h)$$

ifadesinde yer alan x_i noktasındaki Taylor seri açılımları aşağıda belirtildiği gibi hesaplanır:

$$V(x_i + h) = V(x_i) + hV_x(x_i) + \frac{h^2}{2!}V_{xx}(x_i) + \frac{h^3}{3!}V_{xxx}(x_i) + \dots \quad (3.1)$$

$$V(x_i - h) = V(x_i) - hV_x(x_i) + \frac{h^2}{2!}V_{xx}(x_i) - \frac{h^3}{3!}V_{xxx}(x_i) + \dots \quad (3.2)$$

Sırasıyla, (3.1) ve (3.2) eşitlikleri,

$$V_x(x_i) = \frac{v(x_i + h) - v(x_i)}{h} + \frac{h}{2!}V_{xx}(x_i) + \frac{h^2}{3!}V_{xxx}(x_i) + \dots \quad (3.3)$$

$$V_x(x_i) = \frac{v(x_i) - v(x_i - h)}{h} + \frac{h}{2!}V_{xx}(x_i) - \frac{h^2}{3!}V_{xxx}(x_i) + \dots \quad (3.4)$$

olarak yazılabileceğinden V 'nin x_i noktasındaki birinci türevi

$$V_x(x_i) = \frac{V(x_i + h) - V(x_i)}{h} + o(h) \quad (3.5)$$

$$V_x(x_i) = \frac{V(x_i) - V(x_i - h)}{h} + o(h) \quad (3.6)$$

sırasıyla ileri ve geri fark yaklaşımları olarak adlandırılmaktadırlar ve bu eşitliklerde serinin belli bir yerden kesildiği görülmektedir. Kesme işlemi sonucunda ortaya çıkan hatalar $o(.)$ ile gösterilir ve Taylor serisini kesildiği yerden sonraki ilk terime göre değerlendirilir.

Eğer (3.1) eşitliği ile ifade edilen değer (3.2) eşitliği ile ifade edilen değerden çıkarılır ve eşitlik tekrar revize edilirse

$$V_x(x_i) = \frac{v(x_i + h) - v(x_i - h)}{2h} + o(h^2) \quad (3.7)$$

olarak birinci türev için merkezi fark eşitliği elde edilir.

Eğer, (3.1) ve (3.2) ifadeleri alt alta toplanırsa

$$V_{xx}(x_i) = \frac{v(x_i + h) - 2v(x_i) + v(x_i - h))}{h^2} + o(h^2) \quad (3.8)$$

şeklinde ikinci türev için sonlu fark eşitliği elde edilir.

Taylor serileri iki değişken içeren ifadelerin sonlu fark yaklaşımlarını elde etmek için de kullanılır.

K, M pozitif tamsayılar $h = \frac{c-b}{K}, k = \frac{c'-b'}{M}$ olarak alınsın.

$b \leq x \leq c$ ve $b' \leq y \leq c'$ olmak üzere $[b, c]$ ve $[b', c']$ tanım aralığı olsun.

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, K \text{ ve } y_j = a' + jk, \quad j = 0, 1, \dots, M$$

olarak ifade ettiğimiz x_i ve y_j ler düğüm noktalarıdır. x ve y parametrelerine göre birinci türev ele alındığı zaman ileri, geri ve merkezi sonlu fark yaklaşımları sırasıyla aşağıda belirtilmiştir:

$$V_x(x_i, y_j) = \frac{v(x_i + h, y_j) - v(x_i, y_j)}{h} + o(h) \quad (3.9)$$

$$V_x(x_i, y_j) = \frac{v(x_i, y_j) - v(x_i - h, y_j)}{h} + o(h) \quad (3.10)$$

$$V_x(x_i, y_j) = \frac{v(x_i + h, y_j) - v(x_i - h, y_j)}{2h} + o(h^2) \quad (3.11)$$

$$V_y(x_i, y_j) = \frac{v(x_i, y_j + h) - v(x_i, y_j)}{k} + o(k) \quad (3.12)$$

$$V_y(x_i, y_j) = \frac{v(x_i, y_j) - v(x_i, y_j - h)}{k} + o(k) \quad (3.13)$$

$$V_y(x_i, y_j) = \frac{v(x_i, y_j + h) - v(x_i, y_j - h)}{2k} + o(k^2) \quad (3.14)$$

olacak şekilde elde edilebilir. İkinci ve üçüncü mertebeden türevleri için sonlu fark yaklaşımları da benzer şekilde hesaplanabilir[25, 37, 40].

4. SONSUZ BOYUTLU HAMILTONİAN SİSTEMLER

$w(x, t) \in \mathbb{R}^{\hat{q}}$, $t \in \mathbb{R}$ olmak şartıyla Hamilton sistem

$$\frac{\partial w}{\partial t} = J(w) \frac{\delta \tilde{H}}{\delta w}$$

şeklinde yazılır. $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{\hat{p}} \times \mathbb{R}$, $dx = dx_1 dx_2 \dots dx_{\hat{p}}$ olmak üzere

$$\tilde{H}(w) = \int_{\mathcal{U}} H(x, w^m) dx$$

Hamilton fonksiyoneli ve $J(w)$ da Hamilton operatörüdür. $\frac{\delta \tilde{H}}{\delta w}$ Hamilton akış tasvirinin varyasyonel türevini ifade eder. Varyasyonel türev $w(x)$ fonksiyonundaki ufak bir değişimi $\tilde{H}(w)$ fonksiyonunun değerini nasıl etkilediğini gösterir [4].

$\hat{p} = \hat{q} = 1$ için varyasyonel türev,

$$\frac{\delta \tilde{H}}{\delta w} = \frac{\partial H}{\partial w} - \partial x \left(\frac{\partial H}{\partial w_x} \right) - \partial^2 x \left(\frac{\partial H}{\partial w_{xx}} \right) + \dots$$

şeklinde bulunur. $k = 1, \dots, \hat{q}$ için genel olarak varyasyonel türev

$$\frac{\delta \tilde{H}}{\delta w_k} = \frac{\partial H}{\partial w_k} - \sum_{m=1}^{\hat{p}} \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\partial H}{\partial u_{k,m}} \right) + \dots$$

olarak tanımlanır.

5. SONLU BOYUTLU HAMILTONİAN SİSTEMLER

Yüzyıllar boyunca insanoğlu doğayı anlamlandırmaya çalışmıştır. Bu çalışmalarda en büyük yardımcıları ise matematik ve fiziktir. Fiziğin amacı doğanın genel analizini yapmak, matematiğin amacı ise doğayı denklemler yardımıyla modellemektir.

Tanım 5.1. $y = (y^1, y^2, \dots, y^n)$, $N \subset \mathbb{R}^n$ açık kümesi üzerinde herhangi bir nokta olsun. $H(y)$ Hamilton fonksiyonu, $S(y)$ yapı matrisi olmak şartıyla bir adi diferansiyel denklem sistemi olarak

$$\frac{dy}{dt} = S(y) \nabla H(y)$$

formunda yazılıyorsa bu sisteme $S(y)$ sabit matris olması halinde Kanonik Hamilton Sistem aksi halde Poison Sistem denir.

$x(t) \in \mathbb{R}^{2d}$ ve $\dot{x}(t) = f(x(t))$ adi diferansiyel denklem için,

$$H = H(w_1, w_2, \dots, w_d, z_1, z_2, \dots, z_d),$$

$w_i = w_i(t)$, $z_i = z_i(t)$ $i = 1, \dots, d$ olmak üzere Hamiltonian sistemi

$$\dot{w}_i = -\frac{\partial H}{\partial z_i}, \quad \dot{z}_i = \frac{\partial H}{\partial w_i} \quad (5.1)$$

şeklindedir. (5.1) sistemi kapalı halde

$$\dot{w} = -H_z(w, z), \quad \dot{z} = H_w(w, z) \quad (5.2)$$

olarak yazılabilir. Fonksiyonun t 'ye göre türevi burada $\cdot$ ile ifade edilmektedir.

$H = H(w, z)$ olmak üzere

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial H}{\partial w} \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial H}{\partial w} + \frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial H}{\partial w} = 0$$

elde edilir. Buradan varacağımız sonuç ise herhangi bir diferansiyel denklem sistemi için Hamiltonian zamana bağlı olarak değişmez [4].

Örnek. :

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= -\sin z(t) \\ \dot{z}(t) &= w(t) \end{aligned}$$

denklemler sistemi Hamiltonian denklemler sistemi olarak ifade edilebilir.

$H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ olmak üzere

$$H(w, z) = \frac{1}{2}w^2 - \cos z$$

Hamiltonian fonksiyonudur. $H_z = \sin z$, $H_w = w$ olduğundan

$$\dot{w} = -H_z(w, z), \dot{z} = H_w(w, z)$$

elde edilir.

Örnek. : $\Phi(-20, t) = \Phi(20, t)$ periyodik sınır koşulu ile Sine-Gordon diferansiyel denklemi

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - b \sin \Phi \quad (5.3)$$

şeklindedir. Denklem, Hamiltonian

$$\tilde{H} = \int \left[\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + b(1 - \cos \Phi) \right] dx$$

ve Hamiltonian operatörü $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $v = \begin{pmatrix} \Phi \\ \Pi \end{pmatrix}$ olmak üzere (4.3)

$$\frac{\partial v}{\partial t} = S \frac{\delta \tilde{H}}{\delta v}$$

şeklinde Hamiltonian sistemi olarak yazılır.

6. ENERJİ KORUYAN SAYISAL YÖNTEMLER

6.1. Ortalama Vektör Alanı(OVA) Yöntemi

Adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal integrasyonu için geliştirilen metotlar geleneksel olarak, sayısal stabiliteyi sağlayarak ve zaman adımlarını adım adım takip ederek toplam hatayı minimize etmek ile ilgilenmiştir [14]. 1980'li yıllardan günümüze kadar ise sayısal metodların tasarımlarında, ele alınan problemlerin doğasında var olan simplektik yapı, simetriler, korunan sayısal veriler, hacim ve faz uzayı yapıları gibi geometrik özelliklerin korunması seviyesine çıkmıştır. Bu metodlara geometrik veya yapıyı koruyan metodlar da denilmektedir [27].

Bütün Runge-Kutta metodlarının birleştirilmiş diferansiyel denklemlerin lineer integrallerini koruduğu ve simplektik Runge-Kutta metodlarının da kuadratik integralleri koruduğu bilinmektedir [5]. Ayrık gradient metodlar lineer olmayan evrimsel kısmi diferansiyel denklemlere de uygulandı [9]. Geliştirilmiş kolokasyon metodlar ve Hamilton sınır değer metodları olarak tanımlanan ve polinomsal Hamiltonian sistemlerin enerjisini tamamen koruyan yöntemler de geliştirilerek kullanıldı [18, 19].

Ancak yakın dönemde, orta nokta yönteminin (mid point method) bir uzantısı olan ortalama vektör alanı (OVA) metodu çok ilgi çekmeye başladı [33]. Ortalama vektör alanı (OVA) yöntemine olan merak son zamanlarda artış göstermektedir. Bu metot orta nokta yönteminin geliştirilmiş şeklidir ve yüksek mertebeden OVA yöntemleri Guassian quadrature kullanılarak elde edilip Hamiltonian sistemler için yüksek mertebeden OVA yöntemi uygulanarak analiz yapmışlardır [16]. Gaussian quadrature kullanılarak yüksek mertebeden OVA metodları geliştirildi ve bunlar sürekli-adım Runge-Kutta metodları şeklinde yorumlandı [16]. B-serisi metodlarıyla enerji korunumu ve simplektiklik arasında ilişki oluşturuldu. Ayrık gradient metodlar, amiltonian sistemlerin integrasyonunda kullanıldığında B-serilerine genişletilemezler [13].

B-serileri kullanılarak, Hamiltonian sistemler kapsamında OVA metodunun Poisson metodların eşleniği olduğu gösterilebilir [7]. Sayısal çözümlerin kararlı ve kesin olması avantajının yanı sıra, fiziksel açıdan belirli karakteristik davranışları olan enerji fonksiyoneliinden türetilen denklemlere ait sayısal çözümlerinin doğru bir şekilde geliştirilmesi büyük öneme sahiptir. Ortaya çıkan sayısal çözümlerin de söz konusu enerjinin karakteristik davranışını koruması gereken davranışlar arasından enerjinin azalması, enerjinin korunması veya simplektik yapının korunması gibi fiziksel olarak gerçekçi çözümler elde edilebilmesi için gerekli olan karakteristikler içerisinde nitelendirilir [10].

Ortalama Vektör Alanı (OVA) yöntemi ikinci mertebe yakınsaklığa sahip bir yöntem olması nedeniyle daha kesin sonuçlar ortaya çıkarmaktadır. Ayrıca, OVA yöntemi ile elde edilen sayısal sonuçlar denkleme ait olan enerjinin azalması veya korunması gibi karakteristik özelliklerini de korumaktadır [6]. OVA yöntemi, hem enerji azalma hem de enerji korunma özelliklerini koruyan ve ikinci mertebe yakınsaklığa sahip olan tek yöntemdir [14].

Enerji korumalı olarak nitelendirilen diferansiyel denklemler genel olarak, $H(y)$ Hamiltonian fonksiyonunun yeterince diferansiyellenme özelliği olması özelliğine bağlı olarak

$$g(y) = S \nabla H(y)$$

şeklinde ifade edilmektedir S , $n \times n$ boyutlu sabit bir matris ve ters simetrik ise Hamiltonian başka bir deyişle sistemin enerjisi olan değişmez olmak üzere, aşağıdaki adi diferansiyel denklem sistemi ele alınsın:

$$\frac{dy}{dt} = g(y), y \in \mathbb{R}^n$$

Diferansiyel denklemi için, ikinci mertebeden OVA yöntemi şu uygulanır [23, 34].

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} = \int_0^1 g((1 - \xi)y_n + \xi y_{n+1}) d\xi \quad (6.1)$$

Örneğin $g(y) = y$ için integral şu şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 g((1 - \xi)y_n + \xi y_{n+1}) d\xi \\ &= \int_0^1 ((1 - \xi)y_n + \xi y_{n+1}) d\xi \\ &= \left[\left(\xi - \frac{\xi^2}{2} \right) y_n + \frac{\xi^2}{2} y_{n+1} \right]_0^1 \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) y_n + \frac{1}{2} y_{n+1} = \frac{y_n + y_{n+1}}{2} \end{aligned}$$

Bu sonuç (6.1) in orta nokta kuralına eşit olduğunu gösterir.

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} = \frac{y_{n+1} + y_n}{2}$$

Eğer $g(u) = u^2$ (kuadratik) ise integral şöyle elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 g((1-\xi)y_n + \xi y_{n+1}) d\xi \\
&= \int_0^1 ((1-\xi)y_n + \xi y_{n+1})^2 d\xi \\
&= \int_0^1 ((1-\xi)^2 y_n^2 + 2(1-\xi)y_n \xi y_{n+1} + \xi^2 y_{n+1}^2) d\xi \\
&= \int_0^1 ((1-2\xi + \xi^2)y_n^2 + 2(\xi - \xi^2)y_n y_{n+1} + \xi^2 y_{n+1}^2) d\xi \\
&= \left[\left(\xi - \xi^2 + \frac{\xi^3}{2} \right) y_n^2 + 2 \left(\frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{3} \right) y_n y_{n+1} + \frac{\xi^3}{3} y_{n+1}^2 \right]_0^1 \\
&= \left[\left(1 - 1 + \frac{1}{3} \right) y_n^2 + 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) y_n y_{n+1} + \frac{1}{3} y_{n+1}^2 \right] \\
&= \frac{y_n^2 + y_n y_{n+1} + y_{n+1}^2}{3}
\end{aligned}$$

Eğer $g(u) = u^3$ (kübik) ise integral şöyle elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 g((1-\xi)y_n + \xi y_{n+1}) d\xi \\
&= \int_0^1 ((1-\xi)y_n + \xi y_{n+1})^3 d\xi \\
&= \int_0^1 ((1-\xi)^3 y_n^3 + 3(1-\xi)^2 \xi y_n^2 y_{n+1} + 3(1-\xi)\xi^2 y_n y_{n+1}^2 + \xi^3 y_{n+1}^3) d\xi \\
&= \int_0^1 ((1-3\xi + 3\xi^2 - \xi^3)y_n^3 + 3(1-2\xi + \xi^2)\xi y_n^2 y_{n+1} + 3(\xi^2 - \xi^3)y_n y_{n+1}^2 + \xi^3 y_{n+1}^3) d\xi \\
&= \frac{y_n^3 + y_n^2 y_{n+1} + y_n y_{n+1}^2 + y_{n+1}^3}{4}
\end{aligned}$$

OVA yöntemi ayrık bir gradyan yöntemidir. Ayrık gradyan yönteminin kullanılması formun vektör alanı için avantajlıdır.

$$g(y) = S(y) \nabla V(y)$$

$S(y)$ burada ters eşlenik bir matristir. Hamilton sistemi için

$$g(y) = S(y) \nabla H(y)$$

şeklindedir. H burada enerjidir. OVA yöntemini Hamilton sistemine uyguladığımızda, herhangi bir entegrasyon adımı boyutu seçimi için her adımda sayısal çözümün korunumu garanti edilir [34].

Enerji koruyan ayrık gradient metodlar $\nabla H(y)$ ve $S(y)$ nin uygun yaklaşımlarına dayanır. $y' = S(y) \nabla H(y)$ poisson sistemler için ayrık gradient yöntemler aşağıdaki şekilde tanımlanır [31, 33].:

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{h} = S \left(\frac{y^n + y^{n+1}}{2} \right) \cdot \bar{\nabla} H_p(y^n, y^{n+1}) \quad (6.2)$$

$$\bar{\nabla} H_p(y^n, y^{n+1}) := \frac{1}{2} (\bar{\nabla} H(y^n, y^{n+1}) + \bar{\nabla} H(y^{n+1}, y^n)) \quad (6.3)$$

$$\bar{\nabla} H_p(y^n, y^{n+1}) := \begin{pmatrix} \frac{H(y_1^{n+1}, y_2^n, \dots, y_i^n, \dots, y_m^n) - H(y_1^n, y_2^n, \dots, y_i^n, \dots, y_m^n)}{y_1^{n+1} - y_1^n} \\ \dots \\ \frac{H(y_1^{n+1}, y_2^{n+1}, \dots, y_i^{n+1}, \dots, y_m^n) - H(y_1^{n+1}, y_2^{n+1}, \dots, y_i^n, \dots, y_m^n)}{y_i^{n+1} - y_i^n} \\ \dots \\ \frac{H(y_1^{n+1}, y_2^{n+1}, \dots, y_i^{n+1}, \dots, y_m^{n+1}) - H(y_1^{n+1}, y_2^{n+1}, \dots, y_i^{n+1}, \dots, y_m^n)}{y_m^{n+1} - y_m^n} \end{pmatrix}$$

6.2. Bölünmüş Ortalama Vektör Alanı Yöntemi (BOVA)

Hamiltonian sistemini aşağıdaki formda ele alalım [38].

$$\dot{u} = f(u) = S_m \nabla H(u), \quad (6.4)$$

Burada $m = 2d$ ve $u = (w, z)^T = (u_1, u_2, \dots, u_d; u_{d+1}, u_{d+2}, \dots, u_m)^T$ olsun. Bu durumda sistem

$$\begin{pmatrix} \dot{w} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = S_{2d} \begin{pmatrix} H_w(w, z) \\ H_z(w, z) \end{pmatrix}, \quad w, z \in \mathbb{R}^d \quad (6.5)$$

şeklinde yazılır. Enerjinin zamana göre türevi

$$\frac{dH(w(t), z(t))}{dt} = H_w(w, z)^T \dot{w} + H_z(w, z)^T \dot{z} = \nabla H(w, z)^T S_{2d} \nabla H(w, z) = 0$$

şeklinde hesaplanır.

Hamiltonian sistemi (6.5) için Bölünmüş Ortalama Vektör alanı Yöntemi (BOVA) aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\frac{1}{\Delta t} \begin{pmatrix} w^{n+1} - w^n \\ z^{n+1} - z^n \end{pmatrix} = S_{2d} \begin{pmatrix} \int_0^1 H_w(\xi w^{n+1} + (1 - \xi)w^n, z^n) d\xi \\ \int_0^1 H_z(w^{n+1}, \xi z^{n+1} + (1 - \xi)z^n) d\xi \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

Teorem 6.1. *Bölünmüş Ortalama Vektör Alanı yöntemi (6.6), (6.5) $H(w, z)$ Hamilton sisteminin değeri tam olarak korunur*

İspat:

(6.5) in her iki tarafına

$$\left(\int_0^1 H_w(\xi w^{n+1} + (1 - \xi)w^n, z^n)^T d\xi, \int_0^1 H_z(w^{n+1}, \xi z^{n+1} + (1 - \xi)z^n)^T d\xi \right)^T$$

ile skaler çarpım yaparsak kalkülüsün temel teoreminden ve S_{2d} ters simetrik matrisinden aşağıdaki sonucu elde ederiz.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} \int_0^1 H_w(\xi w^{n+1} + (1-\xi)w^n, z^n)^T d\xi (w^{n+1} - w^n) \\
& + \frac{1}{\Delta t} \int_0^1 H_z(w^{n+1}, \xi z^{n+1} + (1-\xi)z^n)^T d\xi (z^{n+1} - z^n) \\
& = \frac{1}{\Delta t} \int_0^1 \frac{d}{d\xi} [H(\xi w^{n+1} + (1-\xi)w^n, z^n) + H(z^{n+1}, \xi z^{n+1} + (1-\xi)z^n)] d\xi \\
& = \frac{1}{\Delta t} [H(w^{n+1}, z^n) - H(w^n, z^n) + H(w^{n+1}, z^{n+1}) - H(w^{n+1}, z^n)] \\
& = \frac{1}{\Delta t} (H(w^{n+1}, z^{n+1}) - H(w^n, z^n)) = 0
\end{aligned}$$

Sonuçlar:

1. Bölünmüş Ortalama Vektör Alanı yöntemi (6.6), birinci dereceden tek adım yöntemidir.
2. Eğer (6.5), $H(w, z) = H_1(w) + H_2(z)$ şeklinde ayrılabilir bir Hamilton sistemi ise o durumda Bölünmüş Ortalama Vektör Alanı (6.1) yöntemine eşittir. Hamilton sistemi (6.5) ayrılabilir değildir.
3. Elde edilen bölünmüş ortalama vektör alanı yöntemi Hamiltonianı korur [38].

Bölünmüş OVA yöntemini (6.6), $\Phi_{\Delta t}$ ile gösterilirse $\Phi_{\Delta t}^*$ (BOVA*) ile de ek yöntemi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\frac{1}{\Delta t} \begin{pmatrix} w^{n+1} - w^n \\ z^{n+1} - z^n \end{pmatrix} = S_{2d} \begin{pmatrix} \int_0^1 H_w(\xi w^{n+1} + (1-\xi)w^n, z^{n+1}) d\xi \\ \int_0^1 H_z(w^n, \xi z^{n+1} + (1-\xi)z^n) d\xi \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

Buradan elde edilen sonuç ek yöntem olan (6.7) Hamiltonian $H(r)$ ' yi korur ve BOVA yönteminin bütün özelliklerine sahiptir. BOVA yöntemi ile bağlantılı olan bir diğer yöntem ise Bölünmüş Ortalama Vektör Alanı Bileşke Yöntemi (BOVA-C)'dir [38].

$$\psi_{\Delta t} := \Phi_{\frac{\Delta t}{2}}^* \circ \Phi_{\frac{\Delta t}{2}} \quad (6.8)$$

Ve diğer bir yöntem olan bölünmüş ortalama vektör alanı yöntemi ile ek yöntemin ortalaması şeklinde ifade edilen (BOVA-P) yöntemi de şu şekilde tanımlanır:

$$\tilde{\psi}_{\Delta t} := \frac{1}{2} (\Phi_{\Delta t}^* + \Phi_{\Delta t}) \quad (6.9)$$

7. LİNEER OLMAYAN SCHRODINGER (NLS) DENKLEMLERİ

Schrödinger denklemini birçok bilim insanı farklı metodlar kullanarak incelemiştir. Schrödinger denklemini, George Adomian (1992-1996) tarafından ortaya konulmuş ve geliştirilmiş olan Adomian ayrıştırma yöntemini kullanarak incelenmiştir [35]. Ayrıca homotopy Analiz yöntemi varyasyonel iterasyon yöntemi ve Galerkin yöntemi kullanılarak denklemin farklı şekildeki çözümleri elde edilmiştir [17, 20, 42]. Lineer olmayan Schrödinger denklemi(NLS), kuantum mekaniğinde parçacıkların herhangi bir andaki konumlarını ve serbest enerji seviyelerini bulmak için , fizikte elektrik alan ve transistörlerin mekanizmasında, kimya da modern atom kuramlarında ortalama bağ uzaklıkları, dipol ve moment hesaplarında kullanılır.

7.1. Bir Boyutlu Lineer olmayan Schrödinger (NLS) Denklemi

$\Phi = \Phi(y, t)$ kompleks fonksiyonu $\Phi(y, 0) = \Phi_0(y)$ başlangıç koşulu ve $\Phi(y, t) = \Phi(y + L, t)$ periyodik sınır koşulu olmak üzere

$$i\Phi_t + \Phi_{yy} + \lambda|\Phi|^2\Phi = 0 \quad (7.1)$$

lineer olmayan Schrödinger diferansiyel denklemi olarak ifade edilir. Burada $y \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ dır. Φ kompleks fonksiyon olduğundan $\Phi = w + iz$ şeklinde yazılabilir. Burada $w = w(y, t)$, $z = z(y, t)$ 'dir.

Bu durumda (7.1) denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned} w_t + z_{yy} + \lambda(w^2 + z^2)z &= 0 \\ z_t - w_{yy} + \lambda(w^2 + z^2)w &= 0 \end{aligned} \quad (7.2)$$

Şimdi (7.2) sisteminin kanonik Hamiltonian sistemi olduğunu gösterelim. Hamiltonian

$$\tilde{H} = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left[w_y^2 + z_y^2 - \frac{\lambda}{2} (w^2 + z^2) \right] dy \quad (7.3)$$

olarak alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{\delta \tilde{H}}{\delta w} &= -\lambda w (w^2 + z^2) - w_{yy} \\ \frac{\delta \tilde{H}}{\delta z} &= \lambda z (w^2 + z^2) - z_{yy} \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir, buradan (7.2) sistemi

$$w_t = \frac{\delta \tilde{H}}{\delta z}$$

$$z_t = -\frac{\delta \tilde{H}}{\delta w}$$

şeklinde yazılır.

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } p = (w, z)^T$$

olarak alınırsa kanonik Hamiltonian sistemi

$$\dot{p} = S^{-1} \frac{\delta \tilde{H}}{\delta p}, -\dot{S} = S^{-1}$$

şeklinde elde edilir.

İleri fark yöntemi kullanılarak (7.3) denkleminin türevleri hesaplanırsa sonlu boyutlu Hamiltonian sistemine ulaşılır. (7.3) de w_y ve z_y birinci mertebeden türevleri y_{j+1} ve y_j düğüm noktaları kullanılarak diskrize edilir. Uzay değişkenine göre adım uzunluğu $\Delta y = y_{j+1} - y_j$ olmak üzere $\Delta y = L/M$ olarak alınsın. Buradaki M düğüm sayısına karşılık gelmektedir. Daha kolay bir çözüm oluşturması için

$$\left. \begin{aligned} w_j &= w(jL/M, t) \\ z_j &= z(jL/M, t) \end{aligned} \right\}$$

notasyonu w ve z gerçek çözümünün jL/M düğüm noktasında aldığı değere bir yaklaşım olarak kullanılacaktır. Bu açıklamalara bağlı olarak Hamiltonian denklem sistemi aşağıdaki şekilde diskrize edilir:

$$\tilde{H} = \frac{1}{2\Delta y^2} \sum_{j=1}^M [(w_{j+1} - w_j)^2 + (z_{j+1} - z_j)^2] - \frac{\lambda}{4} \sum_{j=1}^M (w_j^2 + z_j^2)^2$$

Buradan Hamiltonianın gradiyenti

$$\nabla \tilde{H} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\Delta y^2} (w_{j-1} - 2w_j + w_{j+1}) - \lambda w_j (w_j^2 + z_j^2) \\ -\frac{1}{\Delta y^2} (z_{j-1} - 2z_j + z_{j+1}) - \lambda z_j (w_j^2 + z_j^2) \end{pmatrix}$$

olmak üzere yarı ayırık Hamiltonian sistemi

$$\dot{w} = w_t = -Az - \lambda z(w^2, z^2), \quad \dot{z} = z_t = Aw + \lambda w(w^2, z^2) \quad (7.4)$$

olarak elde edilir. Burada A matrisi şu şekildedir:

$$A = \frac{1}{\Delta y^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ 1 & & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

7.2. İki Boyutlu Lineer Olmayan Schrödinger (NLS) Denklemi

Schrödinger denklemi için sınır değer koşulları verilen diferansiyel denklemleri; kuantum mekaniğin, çağdaş fiziğin, lineer olmayan optiğin, nükleer fiziğin ve tekniğin farklı alanlarında ortaya çıkan çeşitli süreçleri anlamına gelmektedir. Bu süreçler içerisinde kuantum mekanik süreçler önem arz etmektedir ve bu süreçlerin optimal kontrolüne bağlı problemlerin araştırılması ve incelenmesi büyük derecede önemlidir. Böyle problemlerden biri kuantum mekaniğinde ortaya çıkan yüklü parçacıkların kontrolüdür. İki boyutlu NLS denklemi γ sabit ve $\varphi = \varphi(x, y, t)$ kompleks fonksiyon olmak üzere periyodik sınır koşulları ve başlangıç koşulu ile şu şekilde ifade edilir:

$$i\varphi_{tt} + \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \gamma|u|^2u = 0 \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned} \varphi(x + L, y, t) &= \varphi(x, y, t), & \varphi(x, y + L, t) &= \varphi(x, y, t) \\ \varphi(0, x, y) &= \varphi_0 \end{aligned}$$

7.3. Kesirli Mertebeden Schrödinger Denklemi

Schrödinger denkleminin genel olarak lineer olmayan optik alanlarda, katı cisimlerde ortaya çıkan ısı iletiminde, hidromanyetik dalgalarda, plazma dalgalarında, sıvı ile dolu elastik bir tüpteki lineer olmayan dalgalarda, lineer olmayan kararsızlık problemlerinde ortaya çıktığı belirlenmiştir [21].

Konuma ve zamana göre kesirli mertebeden Schrödinger denklemlerinin sayısal çözümleri operasyonel matrisler kullanarak kesirli mertebeden ikili Schrödinger denkleminin çözümlerini Laplace dönüşüm yöntemleriyle kullanarak bulunmaktadır.[3]. Lineer olmayan Schrödinger denklemlerin gibi birçok bilimsel alanda çeşitli uygulamalarda kullanılmaktadır [39].

Çağımızda bilimsel alanlarda gerçekleştirilen uygulamalar sonucunda kesirli hesaplamalar önem kazanmıştır. Kesirli türevleri içeren problemlerin analitik çözümlerinin bulunmasına yönelik çözümlerin sınırlılık içermesi nedeniyle incelemeler ve hesaplamalar için nümerik çözüm teknikleri ve yöntemlerinin uygun görülmüştür [36].

8. SAYISAL ÇÖZÜMLER

8.1. NLS Denklem Sistemine Bölünmüş Ortalama Vektör Alanı (BOVA) Yönteminin Uygulanması

Konuma göre diskriize edilen aşağıdaki NLS denklemini dikkate alalım.

$$\begin{aligned}\dot{w} &= w_t = -Az - \lambda z(w^2 + z^2) \\ \dot{z} &= z_t = Aw + \lambda w(w^2 + z^2)\end{aligned}$$

Bu sistemi matris formunda şu şekilde ifade ederiz:

$$\begin{pmatrix} \dot{w} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Aw + \lambda w(w^2 + z^2) \\ Az + \lambda z(w^2 + z^2) \end{pmatrix}$$

Burada $S_{2d} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $H_w = Aw + \lambda w(w^2 + z^2)$, $H_z = Az + \lambda z(w^2 + z^2)$

olmak üzere sistem

$$\begin{pmatrix} \dot{w} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = S_{2d} \begin{pmatrix} H_w \\ H_z \end{pmatrix}$$

olarak ifade edilir. Ayrıca $\dot{w} = \frac{w^{n+1} - w^n}{\Delta t}$, $\dot{z} = \frac{z^{n+1} - z^n}{\Delta t}$ dir.

Bu sisteme BOVA methodu şu şekilde uygulanır:

$$\frac{1}{\Delta t} \begin{pmatrix} w^{n+1} - w^n \\ z^{n+1} - z^n \end{pmatrix} = S_{2d} \begin{pmatrix} \int_0^1 H_w(\xi w^{n+1} + (1-\xi)w^n, z^n) d\xi \\ \int_0^1 H_z(w^{n+1}, \xi z^{n+1} + (1-\xi)z^n) d\xi \end{pmatrix} \quad (8.1)$$

Matristeki ilk integral aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned}\int_0^1 H_w(\xi w^{n+1} + (1-\xi)w^n, z^n) d\xi &= A \int_0^1 (\xi w^{n+1} + (1-\xi)w^n) d\xi \\ &\quad + \lambda \int_0^1 (\xi w^{n+1} + (1-\xi)w^n)^3 d\xi \\ &\quad + \lambda \int_0^1 [(\xi w^{n+1} + (1-\xi)w^n)(z^n)^2] d\xi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bullet \lambda \int_0^1 (\xi w^{n+1} + (1-\xi)w^n)^3 d\xi = \\
& = \lambda \int_0^1 \left[\xi^3 (w^{n+1})^3 + 3\xi^2 (w^{n+1})^2 (1-\xi)w^n + 3\xi (w^{n+1})(1-\xi)^2 (w^n)^2 + (1-\xi)^3 (w^n)^3 \right] d\xi \\
& = \lambda \int_0^1 \left[\xi^3 (w^{n+1})^3 + 3(\xi^2 - \xi^3)(w^{n+1})^2 w^n + 3(\xi - 2\xi^2 + \xi^3)w^{n+1} \right. \\
& \quad \left. + (1 - 3\xi + 3\xi^2 - \xi^3)(w^n)^3 \right] d\xi \\
& = \lambda \left[\frac{\xi^4}{4} (w^{n+1})^3 + 3 \left(\frac{\xi^3}{3} - \frac{\xi^4}{4} \right) w^{n+1} w^n + 3 \left(\frac{\xi^2}{2} - \frac{2\xi^3}{3} + \frac{\xi^4}{4} \right) w^{n+1} (w^n)^2 \right. \\
& \quad \left. + \left(\xi - \frac{3\xi^2}{2} + \frac{3\xi^3}{3} - \frac{\xi^4}{4} \right) (w^n)^3 \right]_0^1 d\xi \\
& = \lambda \left[\frac{1}{4} (w^{n+1})^3 + 3 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) w^{n+1} w^n + 3 \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) w^{n+1} (w^n)^2 \right. \\
& \quad \left. + \left(1 - \frac{3}{2} + 1 - \frac{1}{4} \right) (w^n)^3 \right] \\
& = \lambda \left[\frac{1}{4} (w^{n+1})^3 + \frac{1}{4} (w^{n+1})^2 w^n + \frac{1}{4} (w^{n+1})(w^n)^2 + \frac{1}{4} (w^n)^3 \right] \\
& = \frac{\lambda}{4} \left[(w^{n+1})^3 + (w^{n+1})^2 w^n + (w^{n+1})(w^n)^2 + (w^n)^3 \right] \\
\\
& \bullet A \int_0^1 (\xi w^{n+1} + (1-\xi)w^n) d\xi \\
& = A \left[\frac{\xi^2}{2} w^{n+1} + \left(\xi - \frac{\xi^2}{2} \right) w^n \right]_0^1 \\
& = A \left(\frac{1}{2} w^{n+1} + \frac{1}{2} w^n \right) \\
& = \frac{A}{2} (w^{n+1} + w^n) \\
\\
& \bullet \lambda \int_0^1 [(\xi w^{n+1} + (1-\xi)w^n (z^n)^2)] d\xi \\
& = \lambda \left[\left(\frac{\xi^2}{2} w^{n+1} + \left(\xi - \frac{\xi^2}{2} \right) w^n \right) (z^n)^2 \right] \\
& = \frac{\lambda}{2} [(w^{n+1} + w^n) (z^n)^2]
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu hesaplamalar kullanılarak integralin sol tarafı

$$\frac{\lambda}{4} \left[(w^{n+1})^3 + (w^{n+1})^2 w^n + (w^{n+1})(w^n)^2 + (w^n)^3 \right] + \frac{A}{2} (w^{n+1} + w^n) + \frac{\lambda}{2} [(w^{n+1} + w^n)(z^n)^2]$$

olarak elde edilir. Matristeki ikinci integrali göz önüne alalım:

$$\begin{aligned} \int_0^1 H_z(w^{n+1}, \xi z^{n+1} + (1-\xi)z^n) d\xi &= A \int_0^1 (\xi z^{n+1} + (1-\xi)z^n) d\xi \\ &+ \lambda \int_0^1 \left[(w^{n+1})^2 (\xi z^{n+1} + (1-\xi)z^n) \right] d\xi \\ &+ \lambda \int_0^1 \left[(\xi z^{n+1} + (1-\xi)z^n) \right] d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\bullet A \int_0^1 (\xi z^{n+1} + (1-\xi)z^n) d\xi \\ &= A \left[\frac{\xi^2}{2} z^{n+1} + \left(\xi - \frac{\xi^2}{2} \right) z^n \right]_0^1 \\ &= A \left(\frac{1}{2} z^{n+1} + \frac{1}{2} z^n \right) \\ &= \frac{A}{2} (z^{n+1} + z^n) \end{aligned}$$

$$\bullet \lambda \int_0^1 (\xi z^{n+1} + (1-\xi)z^n)^3 d\xi$$

$$\begin{aligned} &= \lambda \int_0^1 \left[\xi^3 (z^{n+1})^3 + 3\xi^2 (z^{n+1})^2 (1-\xi)z^n + 3\xi (z^{n+1})(1-\xi)^2 (z^n)^2 + (1-\xi)^3 (z^n)^3 \right] d\xi \\ &= \lambda \int_0^1 \left[\xi^3 (z^{n+1})^3 + 3(\xi^2 - \xi^3) (z^{n+1})^2 z^n + 3(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) z^{n+1} (z^n)^2 + (1 - 3\xi + 3\xi^2 - \xi^3) (z^n)^3 \right] d\xi \\ &= \lambda \left[\frac{\xi^4}{4} (z^{n+1})^3 + 3 \left(\frac{\xi^3}{3} - \frac{\xi^4}{4} \right) z^{n+1} z^n + 3 \left(\frac{\xi^2}{2} - \frac{2\xi^3}{3} + \frac{\xi^4}{4} \right) z^{n+1} (z^n)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\xi - \frac{3\xi^2}{2} + \frac{3\xi^3}{3} - \frac{\xi^4}{4} \right) (z^n)^3 \right]_0^1 d\xi \\ &= \lambda \left[\frac{1}{4} (z^{n+1})^3 + 3 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) z^{n+1} z^n + 3 \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) z^{n+1} (z^n)^2 + \left(1 - \frac{3}{2} + 1 - \frac{1}{4} \right) (z^n)^3 \right] \\ &= \lambda \left[\frac{1}{4} (z^{n+1})^3 + \frac{1}{4} (z^{n+1})^2 z^n + \frac{1}{4} (z^{n+1}) (z^n)^2 + \frac{1}{4} (z^n)^3 \right] \\ &= \frac{\lambda}{4} \left[(z^{n+1})^3 + (z^{n+1})^2 z^n + (z^{n+1}) (z^n)^2 + (z^n)^3 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\bullet \lambda \int_0^1 \left[(\xi z^{n+1} + (1-\xi)z^n) (w^{n+1})^2 \right] d\xi \\ &= \lambda \left[\left(\frac{\xi^2}{2} z^{n+1} + \left(\xi - \frac{\xi^2}{2} \right) z^n \right) (w^{n+1})^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{\lambda}{2} \left[(z^{n+1} + z^n) (w^{n+1})^2 \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Bu hesaplamalar kullanılarak integralin sol tarafı

$$\frac{\lambda}{4} \left[(z^{n+1})^3 + (z^{n+1})^2 z^n + (z^{n+1})(z^n)^2 + (z^n)^3 \right] + \frac{A}{2} (z^{n+1} + z^n) + \frac{\lambda}{2} \left[(z^{n+1} + z^n)(w^{n+1})^2 \right]$$

olarak elde edilir.

8.2. NLS Denklem Sistemine $\Phi_{\Delta t}^*$ (BOVA*) Ek Yöntemin Uygulanması

Sistem olarak yazılmış NLS denklemini dikkate alalım:

$$\begin{aligned} \dot{w} &= w_t = -Az - \lambda z(w^2 + z^2) \\ \dot{z} &= z_t = Aw + \lambda w(w^2 + z^2) \end{aligned}$$

Sistemin matris formu

$$\begin{pmatrix} \dot{w} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Aw + \lambda w(w^2 + z^2) \\ Az + \lambda z(w^2 + z^2) \end{pmatrix}$$

ve $H_W = Aw + \lambda w(w^2 + z^2)$, $H_Z = Az + \lambda z(w^2 + z^2)$ olmak üzere bu sisteme

BOVA* methodu şu şekilde uygulanır:

$$\frac{1}{\Delta t} \begin{pmatrix} w^{n+1} - w^n \\ z^{n+1} - z^n \end{pmatrix} = S_{2d} \begin{pmatrix} \int_0^1 H_w(\xi w^{n+1} + (1-\xi)w^n, z^{n+1}) d\xi \\ \int_0^1 H_z(w^n, \xi z^{n+1} + (1-\xi)z^n) d\xi \end{pmatrix} \quad (8.2)$$

Matristeki ilk integral aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned} \int_0^1 H_w(\xi w^{n+1} + (1-\xi)w^n, z^{n+1}) d\xi &= A \int_0^1 (\xi w^{n+1} + (1-\xi)w^n) d\xi \\ &\quad + \lambda \int_0^1 (\xi w^{n+1} + (1-\xi)w^n)^3 d\xi \\ &\quad + \lambda \int_0^1 [(\xi w^{n+1} + (1-\xi)w^n)(z^{n+1})^2] d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bullet \lambda \int_0^1 (\xi w^{n+1} + (1 - \xi)w^n)^3 d\xi \\
&= \lambda \int_0^1 \left[\xi^3 (w^{n+1})^3 + 3\xi^2 (w^{n+1})^2 (1 - \xi)w^n + 3\xi (w^{n+1})(1 - \xi)^2 (w^n)^2 + (1 - \xi)^3 (w^n)^3 \right] d\xi \\
&= \lambda \int_0^1 \left[\xi^3 (w^{n+1})^3 + 3(\xi^2 - \xi^3)(w^{n+1})^2 w^n + 3(\xi - 2\xi^2 + \xi^3)w^{n+1}(w^n)^2 + (1 - 3\xi + 3\xi^2 - \xi^3)(w^n)^3 \right] d\xi \\
&= \lambda \left[\frac{\xi^4}{4} (w^{n+1})^3 + 3 \left(\frac{\xi^3}{3} - \frac{\xi^4}{4} \right) w^{n+1} w^n + 3 \left(\frac{\xi^2}{2} - \frac{2\xi^3}{3} + \frac{\xi^4}{4} \right) w^{n+1} (w^n)^2 + \left(\xi - \frac{3\xi^2}{2} + \frac{3\xi^3}{3} - \frac{\xi^4}{4} \right) (w^n)^3 \right]_0^1 d\xi \\
&= \lambda \left[\frac{1}{4} (w^{n+1})^3 + 3 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) w^{n+1} w^n + 3 \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) w^{n+1} (w^n)^2 + \left(1 - \frac{3}{2} + 1 - \frac{1}{4} \right) (w^n)^3 \right] \\
&= \lambda \left[\frac{1}{4} (w^{n+1})^3 + \frac{1}{4} (w^{n+1})^2 w^n + \frac{1}{4} (w^{n+1})(w^n)^2 + \frac{1}{4} (w^n)^3 \right] \\
&= \frac{\lambda}{4} \left[(w^{n+1})^3 + (w^{n+1})^2 w^n + (w^{n+1})(w^n)^2 + (w^n)^3 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bullet A \int_0^1 (\xi w^{n+1} + (1 - \xi)w^n) d\xi \\
&= A \left[\frac{\xi^2}{2} w^{n+1} + \left(\xi - \frac{\xi^2}{2} \right) w^n \right]_0^1 \\
&= A \left(\frac{1}{2} w^{n+1} + \frac{1}{2} w^n \right) \\
&= \frac{A}{2} (w^{n+1} + w^n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bullet \lambda \int_0^1 \left[\left(\xi w^{n+1} + (1 - \xi)w^n (z^{n+1})^2 \right) \right] d\xi \\
&= \lambda \left[\left(\frac{\xi^2}{2} w^{n+1} + \left(\xi - \frac{\xi^2}{2} \right) w^n \right) (z^{n+1})^2 \right]_0^1 \\
&= \frac{\lambda}{2} \left[(w^{n+1} + w^n) (z^{n+1})^2 \right]
\end{aligned}$$

Bu hesaplamalar kullanılarak integralin sol tarafı

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{4} \left[(w^{n+1})^3 + (w^{n+1})^2 w^n + (w^{n+1})(w^n)^2 + (w^n)^3 \right] + \frac{A}{2} (w^{n+1} + w^n) \\ + \frac{\lambda}{2} \left[(w^{n+1} + w^n)(z^{n+1})^2 \right] \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Matristeki ikinci integral aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned} \int_0^1 H_z(w^n, \xi z^{n+1} + (1-\xi)z^n) d\xi &= A \int_0^1 (\xi z^{n+1} + (1-\xi)z^n) d\xi \\ &+ \lambda \int_0^1 (\xi z^{n+1} + (1-\xi)z^n)^3 d\xi \\ &+ \lambda \int_0^1 [(\xi z^{n+1} + (1-\xi)z^n)(w^n)^2] d\xi \end{aligned}$$

- $A \int_0^1 (\xi z^{n+1} + (1-\xi)z^n) d\xi$
 $= A \left[\frac{\xi^2}{2} z^{n+1} + \left(\xi - \frac{\xi^2}{2} \right) z^n \right]_0^1$
 $= A \left(\frac{1}{2} z^{n+1} + \frac{1}{2} z^n \right)$
 $= \frac{A}{2} (z^{n+1} + z^n)$

- $\lambda \int_0^1 (\xi z^{n+1} + (1-\xi)z^n)^3 d\xi$
 $= \lambda \int_0^1 \left[\xi^3 (z^{n+1})^3 + 3\xi^2 (z^{n+1})^2 (1-\xi)z^n + 3\xi (z^{n+1})(1-\xi)^2 (z^n)^2 + (1-\xi)^3 (z^n)^3 \right] d\xi$
 $= \lambda \int_0^1 \left[\xi^3 (z^{n+1})^3 + 3(\xi^2 - \xi^3) (z^{n+1})^2 z^n + 3(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) z^{n+1} \right. \\ \left. + (1 - 3\xi + 3\xi^2 - \xi^3) (z^n)^3 \right] d\xi$
 $= \lambda \left[\frac{\xi^4}{4} (z^{n+1})^3 + 3 \left(\frac{\xi^3}{3} - \frac{\xi^4}{4} \right) z^{n+1} z^n + 3 \left(\frac{\xi^2}{2} - \frac{2\xi^3}{3} + \frac{\xi^4}{4} \right) z^{n+1} (z^n)^2 \right. \\ \left. + \left(\xi - \frac{3\xi^2}{2} + \frac{3\xi^3}{3} - \frac{\xi^4}{4} \right) (z^n)^3 \right]_0^1 d\xi$
 $= \lambda \left[\frac{1}{4} (z^{n+1})^3 + 3 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) z^{n+1} z^n + 3 \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) z^{n+1} (z^n)^2 + \left(1 - \frac{3}{2} + 1 - \frac{1}{4} \right) (z^n)^3 \right]$
 $= \lambda \left[\frac{1}{4} (z^{n+1})^3 + \frac{1}{4} (z^{n+1})^2 z^n + \frac{1}{4} (z^{n+1})(z^n)^2 + \frac{1}{4} (z^n)^3 \right]$

$$= \frac{\lambda}{4} \left[(z^{n+1})^3 + (z^{n+1})^2 z^n + (z^{n+1})(z^n)^2 + (z^n)^3 \right]$$

$$\begin{aligned} & \bullet \lambda \int_0^1 \left[(\xi z^{n+1} + (1-\xi) z^n (w^n)^2) \right] d\xi \\ &= \lambda \left[\left(\frac{\xi^2}{2} z^{n+1} + \left(\xi - \frac{\xi^2}{2} \right) z^n \right) (w^n)^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{\lambda}{2} \left[(z^{n+1} + z^n) (w^n)^2 \right] \end{aligned}$$

Bu hesaplamalar kullanılarak integralin sol tarafı

$$\frac{\lambda}{4} \left[(z^{n+1})^3 + (z^{n+1})^2 z^n + (z^{n+1})(z^n)^2 + (z^n)^3 \right] + \frac{A}{2} (z^{n+1} + z^n) + \frac{\lambda}{2} \left[(z^{n+1} + z^n) (w^n)^2 \right]$$

olarak elde edilir.

$$\dot{w} = \frac{w^{n+1} - w^n}{\Delta t} \text{ ve } \dot{z} = \frac{z^{n+1} - z^n}{\Delta t}$$

denklemlerini (8.1) denklemini göz önüne alarak düzenleyelim.

$$\begin{aligned} w^{n+1} - w^n + \frac{A\Delta t}{2} (z^{n+1} + z^n) + \frac{\lambda\Delta t}{2} \left[(z^{n+1})^3 + (z^{n+1})^2 z^n + (z^{n+1})(z^n)^2 + (z^n)^3 \right] \\ + \frac{\lambda\Delta t}{4} \left[(z^{n+1} + z^n) (w^{n+1})^2 \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z^{n+1} - z^n - \frac{A\Delta t}{2} (w^{n+1} + w^n) - \frac{\lambda\Delta t}{2} \left[(w^{n+1})^3 + (w^{n+1})^2 w^n + (w^{n+1})(w^n)^2 + (w^n)^3 \right] \\ - \frac{\lambda\Delta t}{4} \left[(w^{n+1} + w^n) (z^n)^2 \right] = 0 \end{aligned}$$

$$k = \frac{\Delta t}{2}, b = \frac{\lambda\Delta t}{4} \text{ ve } 2b = \frac{\lambda\Delta t}{2} \text{ olsun. Denklemlerde yerine yazarsak ;}$$

$$w^{n+1} - w^n + kA(z^{n+1} + z^n) + 2b[(z^{n+1})^3 + (z^{n+1})^2 z^n + (z^{n+1})(z^n)^2 + (z^n)^3] \\ + b[(z^{n+1} + z^n)(w^{n+1})^2] = 0$$

$$z^{n+1} - z^n - kA(w^{n+1} + w^n) - 2b[(w^{n+1})^3 + (w^{n+1})^2 w^n + (w^{n+1})(w^n)^2 + (w^n)^3] \\ - b[(w^{n+1} + w^n)(z^n)^2] = 0$$

denklemlerini elde ederiz. Bu denklemlerden yola çıkarak BOVA Jakobiyen matrisi;

$$J = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & kA \\ -kA & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 3(z^{n+1})^2 + 2z^{n+1}z^n \\ -3(w^{n+1})^2 - 2w^{n+1}w^n & 0 \end{bmatrix} \\ + b \begin{bmatrix} 0 & (z^n)^2 \\ -(w^n)^2 & 0 \end{bmatrix} + 2b \begin{bmatrix} 2(w^{n+1})(z^{n+1} + z^n) & (w^{n+1})^2 \\ -(z^n)^2 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır.

8.4. BOVA* Yönteminin Uygulanmasında Jakobiyen Matrisinin Hesaplanması

(8.2) denklemden yola çıkarak aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz:

$$\dot{w} = \frac{w_{n+1} - w}{\Delta t} = -\frac{A}{2}(z^{n+1} + z^n) - \frac{\lambda}{4}[(z^{n+1})^3 + (z^{n+1})^2 z^n + (z^{n+1})(z^n)^2 + (z^n)^3] \\ - \frac{\lambda}{2}[(z^{n+1} + z^n)(w^n)^2]$$

$$\dot{z} = \frac{z_{n+1} - z}{\Delta t} = \frac{A}{2}(w^{n+1} + w^n) + \frac{\lambda}{4}[(w^{n+1})^3 + (w^{n+1})^2 w^n + (w^{n+1})(w^n)^2 + (w^n)^3] \\ + \frac{\lambda}{2}[(w^{n+1} + w^n)(z^{n+1})^2]$$

$$k = \frac{\Delta t}{2}, b = \frac{\lambda \Delta t}{4} \text{ ve } 2b = \frac{\lambda \Delta t}{2} \text{ olsun. BOVA* denklemlerinde yerine yazarsak ;}$$

$$w^{n+1} - w^n + kA(z^{n+1} + z^n) + 2b \left[(z^{n+1})^3 + (z^{n+1})^2 z^n + (z^{n+1})(z^n)^2 + (z^n)^3 \right] \\ + b \left[(z^{n+1} + z^n)(w^n)^2 \right] = 0$$

$$z^{n+1} - z^n - kA(w^{n+1} + w^n) - 2b \left[(w^{n+1})^3 + (w^{n+1})^2 w^n + (w^{n+1})(w^n)^2 + (w^n)^3 \right] \\ - b \left[(w^{n+1} + w^n)(z^{n+1})^2 \right] = 0$$

denklemlerini elde ederiz. Buradan BOVA* Jakobiye matrisi;

$$J = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & kA \\ -kA & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 3(z^{n+1})^2 + 2z^{n+1}z^n \\ -3(w^{n+1})^2 - 2w^{n+1}w^n & 0 \end{bmatrix} \\ + b \begin{bmatrix} 0 & (z^n)^2 \\ -(w^n)^2 & 0 \end{bmatrix} + 2b \begin{bmatrix} 0 & (w^n)^2 \\ -(z^{n+1})^2 & -2(z^{n+1})(w^{n+1} + w^n) \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

9. SONUÇ

Bu çalışmada, lineer olmayan Schrödinger denklem çeşitleri incelenmiştir. Hamiltonian formunda yazılan bu denklemler için Hamiltonian hakkında bilgiler edinilmiştir. Farklı denklemlerin bu formda yazılımları üzerinde çalışılmıştır. Schrödinger denklemlerinin enerji korudukları bildiği için seçilen nümerik yöntemin yapı koruyan yöntem olması önemlidir. Bu çalışmada son yıllarda ortaya çıkan OVA yönteminden türetilen BOVA ve BOVA* yöntemleri dikkate alınmıştır. Daha önce farklı denklemlere uygulanan yapı koruyan OVA yöntemine göre daha etkili olduğu üzerinde çalışılan makalede örneklerle ortaya konulmuştur. Tezde NLS denklemine BOVA, BOVA* yöntemleri uygulanmıştır. Bu iki yöntemin ortalamasından ve bileşiminden elde edilen diğer iki yöntem de NLS için çalışılmıştır. İleride kodlama üzerine yeterli bilgi edinildikten sonra yapılan çalışmaların sonuçlarının daha detaylı ortaya konulması planlanmaktadır.



10. KAYNAKLAR

- [1] A. M. WAZWAZ,(2009). Solitary Waves Theory. In: Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory. Library of congress control number:2009920462, Heidelberg, 1-761.
- [2] Ayşe Gamze ÇETİNKAYA, Kısmi Diferansiyel Denklemlerinin Çözümleri, Bahçeşehir Üniversitesi, Uygulamalı Matematik Yüksek Lisans Programı, 2014.
- [3] Aminikhah, H., Sheikhan, A.R. ve Rezazadeh, H.,(2014), An Efficient Method for Time-Fractional Coupled Schrödinger System, International Journal of Partial Differential Equations.
- [4] C. Akkoyunlu,(2013), Lineer Olmayan Schrödinger Denkleminin Enerji Korunaklı Yöntemlerle Çözümü ve Model İndirgeme Yönteminin Uygulanması.
- [5] Chartier, P., Faou, E., Murua, (2006), Tan Algebraic , Approach to Invariant Preserving Integrators: The Case of Quadratic and Hamiltonian Invariants, Numer. Math., 103, 575-590.
- [6] Cellodoni, E., McLachlan, D.I., Owren, B., Quispel, G.R.W,(2010), Structure of B-series for Some Classes of Geometric Integrators, Found. Comput. Math., Vol:10, 673-693.
- [7] Cohen, D., Hairer, E., (2011), Lineer Energy Preserving Integrators for Poisson Systems BIT.
- [8] Courtney Remani , (2012-2013), Numerical Methods for Solving Systems of Nonlinear Equations, Lakehead Üniversitesi, Kanada.
- [9] Dahlby, M., Owren, B., G., (2010), A General Framework for Deriving Integral Preserving Numerical Methods for PDEs, SIAM, Journal Sci. Comput., 33.
- [10] Egenç, T., Karasözen, B.,(2006), Poisson Integrators for Volterra-Lattice Equations, Applied Numerical Mathematics, 56.
- [11] Fedakar ÇAKIR,(2017), Lineer Olmayan Denklemlerin Çok Ölçekli Açılım Metodu ile Çözümleri, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Matematik Bilgisayar Anabilim Dalı Yüksek Programı.
- [12] Fish, J., Belytschko, T.,(2007), A First Course in Finite Elements, John Wiley Sons, Chichester, England.
- [13] Faou, E., Harrier, E., Pham, T.L., (2004), Energy Conservation With Nonsymplectic Methods: Examples and counter-examples, BIT.
- [14] Hairer, E., Lubich, C., Wanner, G., (2006), Geometric Numerical Integration. Structure Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations, Springer Series in Computational Mathematics 31, Springer-Verlag, Berlin, 2nd edition.
- [15] Hairer, C. Lubich and G. Wanner,(2002), Geometric Numerical Integration Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations, 31. Springer , New York.

- [16] Hairer, E., (2010), Energy Preserving Variant of Collocation Methods, Journal of Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics , 1-12.
- [17] Hosseinzadeh, K.,(2017), An analytic approximation to the solution of Schrodinger equation by VIM. Applied Mathematical Sciences, 11(16).
- [18] Iavernaro, F., Pace, B., (2007),ü s-stage Trapezoidal Methods for the Conservation of Hamiltonian Functions of Polynomial Type, Numerical Analysis and Applied Mathematics (AIP Conference Proceedings). , Vol:936.
- [19] Iavernaro, F., Trigiante, D., (2009), High-Order Symmetric Schemes for the Energy Conservation of Polynomial Hamiltonian Problems, Journal of Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics , Vol:4, No.1-2.
- [20] Ghanbari, B., (2014), An Analytical Study for (2+1)-dimensional Schrödinger equation. The Scientific World Journal.
- [21] Gingold, R.A. ve Monaghan, J.J. Smoothed,(1977), particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars. Monthly Notices R. Astron. Soc.,181.
- [22] Gürses M., Oğuz O., Salihoğlu S., (1990), “Nonlinear Partial Differential Equations on Homogeneous Spaces , Int. Jour. Of Mod. Phys. A.
- [23] Karasözen, B., Erdem, Ö., (2011), Energy Preserving Methods for Volterra-Lattice Equation, TWMS J. Appl. Eng. Math., Vol:1, No:2.
- [24] Kaş, H.B., (2015), Klein-Gordon Denkleminin Sonlu Farklar Metodu ile Çözümü. Yüksek Lisans Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [25] Lapidus, L. and Pinder, G.F., (1982), Numerical solution of partial differential equations in science and engineering, John Wiley and Sons.
- [26] Ma,W. X., Huang, T., Zhang, Y.,(2010), A Multiple Exp-Function Method for Non-linear Differential Equations and its Application, Phys. Script., 82(6), 065003
- [27] McLachlan, D.I., (2007), A New Implementation Symplectic Runge-Kutta Methods, 29.
- [28] Mousaa, M. M. and Ragab, S. F., (2008), Application of the homotopy perturbation method to linear and nonlinear schrödinger equations. Zeitschrift für Naturforschung A, 63a.
- [29] Mokhtari, R., Isvand, D., Chegini, N. G., Salaripناه, A., (2013), Numerical solution of the Schrödinger equations by using Delta-shaped basis functions, Non-linear Dynamics, 74(1-2).
- [30] N-agle Saff Snider, Diferansiyel Denklemlerin Temelleri, Nobel Akademik Yayıncılık
- [31] O. Gonzales, Time integration and discrete Haniltonian systems, J Nonlinear Sci, 449–467

- [32] Plotnikov, V. İ., (1976), Optimal kontrol teorisinde varyasyon ve eşlenik problem hakkında. Fonksiyonel Analiz ve onun uygulamaları.
- [33] Quispel, G.R.W., McLaren, D.I., (2008), A New Class of Energy Preserving Numerical Integration Methods, Journal of Physics A:Math Theor. 41, 045206.
- [34] R.I. Machlalan and Q.R.W. Quispel,(1999), Geometric integration using discrete gradients, 357, 1021–1046,
- [35] Sadighi, A., and Ganji, D. D., (2008), Analytic treatment of linear and nonlinear Schrödinger equations: a study with homotopy-perturbation and Adomian decomposition methods. Physics Letters A, 372(4).8.
- [36] Singh, J., Kumar, D., Hammouch, Z. ve Atangana, A. (2018), A fractional epidemiological model for computer viruses pertaining to a new fractional derivative, Applied Mathematics and Computation, 316.
- [37] Smith, G.D., (1978), Numerical solution of partial differential equations, finite difference methods, Oxford university press.
- [38] W. Cai, H. Li, Y. Wang,(2017),Partitioned AVF methods. arXiv preprint arXiv:1708.08059, School of Mathematical Sciences, Peking University, Beijing, 100871, China.
- [39] Whitham, G.B. (1974), Linear and nonlinear waves, Wiley-Interscience [John Wiley Sons], New York-London-Sydney, pure and Applied Mathematics.
- [40] Thomas, J.W., (1995), Numerical partial differential equations, Springer.
- [41] Turner, M. J., Clough, R. W., Martin, H. C., ve Topp, L. (1956), Stiffness and deflection analysis of complex structures. Journal of Aeronautical Sciences, 23(9).
- [42] Yagub, G., and Aksoy, E., (2017), The solvability of initial boundary value problem for three-dimensional nonlinear Schrödinger equation with a special gradient term. AIP Conference Proceedings.
- [43] J.Yang, Newton-Conjugate-gradient methods for solitary wave computations journal of Computational Physics,228,7007-7024,2009s.