

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA

BAZI BULANIK YAPILARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ
ÜZERİNE

Meryem ŞENOCAK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2023

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Doktora Tezi

BAZI BULANIK YAPILARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ ÜZERİNE

Meryem ŞENOCAK

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Erdal GÜNER

Bu tezde; literatürde var olan bazı büzülme dönüşümleri ve sabit nokta teoremlerinin genişletilmiş bulanık metrik uzaylara aktarılması ve yeni sonuçlar elde edilmesi planlanmıştır. Bu amaçla, giriş bölümünde; bulanık, bulanık metrik, büzülme dönüşümü gibi bazı kavramların tarihçesine dair bilgilere yer verilmiştir. İkinci bölümde; bulanık küme tanımlanmış, örnekler ve temel kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde; bulanık metrik uzaylar, bu uzaylarda Cauchy dizisi ve tamlık tanımları verilmiş, bazı büzülme dönüşümleri tanımlanmış ve örnekler sunulmuştur. Dördüncü bölüm; genişletilmiş bulanık metrik uzayların tanımlandığı, incelendiği bölümdür ve bu tezde çalışılan uzaylar olması sebebiyle önemlidir. Beşinci bölüm, özgün olan bölümdür. Bu bölümde; genişletilmiş bulanık metrik uzaylarda ilk kez tanımlanan üç büzülme dönüşümü kullanılarak sabit bir noktanın varlığını ve tekliğini iddia eden teoremler ispatlanmış ve örnekler verilmiştir. Altıncı bölüm, son bölüm ve sonuçtur.

Mart 2023, 57 sayfa

Anahtar Kelimeler: Sabit Nokta; Genişletilmiş Bulanık Metrik Uzay; Büzülme Dönüşümü.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

ON FIXED POINT THEOREMS IN SOME FUZZY STRUCTURES

Meryem ŞENOCAK

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Erdal GÜNER

In this thesis; It is planned to transfer some contraction mappings and fixed point theorems existing in the literature to extended fuzzy metric spaces and to obtain new results. For this purpose, information on the history of some concepts such as fuzzy, fuzzy metric and contraction mapping are given in the introduction. In the second chapter; fuzzy set is defined, examples and basic concepts are given. In the third chapter; fuzzy metric spaces, Cauchy sequence and completeness definitions are given and some contraction mappings are defined and examples are presented, in these spaces. The forth chapter is the part in which extended fuzzy metric spaces are defined, examined, and it is important because they are the spaces studied in this thesis. The fifth chapter is the original part. In this chapter; theorems claiming the existence and uniqueness of a fixed point are proved by using three contraction mapping defined for the first time in extended fuzzy metric spaces. The sixth chapter is the final chapter and the conclusion.

March 2023, 57 pages

Key Words: Fixed Point; Extended Fuzzy Metric Space; Contraction Mapping.

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmamın tüm aşamalarında yardımını ve emeğini esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Erdal GÜNER'e, Tez İzleme Komisyonu hocalarıma ve Ankara Üniversitesi Matematik Bölümü hocalarıma katkılarından dolayı teşekkür ederim. Beni destekleyen aileme de şükranlarımı sunarım.

Meryem ŞENOCAK
Ankara, Mart 2023



İÇİNDEKİLER

TEZ ONAYI	
ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	4
3. BULANIK METRİK UZAYLARDA BAZI BÜZÜLME DÖNÜŞÜMLERİ	9
3.1 Bulanık Metrik Uzaylar	9
3.2 Bulanık Metrik Uzaylarda Bazı Büzülme Dönüşümleri	14
4. GENİŞLETİLMİŞ BULANIK METRİK UZAYLAR ÜZERİNE	21
4.1 Genişletilmiş Bulanık Metrik Uzaylar	21
4.2 Genişletilmiş Bulanık Metrik Uzaylar Üzerine	25
5. GENİŞLETİLMİŞ BULANIK METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ ÜZERİNE	32
6. TARTIŞMA VE SONUÇ	53
KAYNAKLAR.....	54
ÖZGEÇMİŞ	56

SİMGELER DİZİNİ

$\check{A}$	Bulanık küme
$*$	t-norm
$(\hat{Y}, \check{A}, *)$	Bulanık metrik uzay
$(\hat{Y}, \check{A}^0, *)$	Genişletilmiş bulanık metrik uzay
$N_{\check{A}}(x, \xi)$	Sabit bulanık metrik
$B(\varkappa, r, t)$	$\varkappa$ merkezli r yarıçaplı açık yuvar
$B[\varkappa, r, t]$	$\varkappa$ merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar
$\tau_{\check{A}}$	$\check{A}$ bulanık metriğinin ürettiği topoloji

1. GİRİŞ

Günlük hayatta kesin olmayan, belirsiz durumlarla sıklıkla karşılaşırız. Karşımıza çıkan her durum için, modern bilgisayarların da dayandığı mantık olan “1” ya da “0” veya “doğru” ya da “yanlış” diyemeyiz. Belirsizliğin olduğu, kesinlikten söz edilemeyen tabiattaki karmaşık olayların, insana ait çeşitli verilerin; düşünce, eğilim, başarı vb. doğru bir şekilde açıklanabilmesi için “bulanık” kavramı çok önemli bir esneklik sunmaktadır. Bu kavram sayesinde, insan deneyimi makinelere aktarılabilmiş ve işlevsellik kazanmıştır.

Bulanık kavramını ilk kez Lütü Ali Askerzade (Zadeh) 1965 yılında tanımlamıştır. İnsanın yaşarken edindiği tecrübelerin makinelere aktarılması fikrinin temellerini atan, elektrik elektronik mühendisi olan bilim insanı, aslında bir çeşit karar verme mekanizması tasarlamıştır. Zadeh’in (1965) önceden bilinmez kabul edilen şeyleri açıklanabilir hale getiren bu çalışması, büyük değişikliklere yol açmış; buhar makinesinin kontrol sisteminde, güvenlik ve tasarruf açısından metro sisteminde kullanılmıştır. Uzay aracı ve uyduların irtifa kontrolü için havacılık alanında; hız ve trafik kontrolü için otomotiv sisteminde; karar verme ve kişisel değerlendirme için büyük şirketlerde; kurutma, kimyasal damıtma sürecini kontrol etmek için kimya endüstrisinde; yapay zeka uygulamalarında, modern kontrol sistemlerinde vs. yaygın olarak kullanılmakta ve bulanık kavramı mühendislikte hayat bulmaktadır.

Metrik kavramı sabit nokta teorisindeki en önemli bileşenlerden biri olarak kabul edilebilir. Metrik en genel haliyle; uzaydaki nokta çiftleri ile pozitif bir reel sayıyı ilişkilendirmek olarak ifade edilebilir.

Son elli yılda bu kavramın birçok genellemesi elde edilmiştir. Bulanık metrik kavramı da bunlardan biridir. Fakat metrik uzaylardan farklı olarak; bulanık metrik uzaylarda iki nesne arasındaki mesafe, kesin bir reel sayı ile ifade edilmez.

Bulanık metrik uzay kavramını ilk kez Kramosil ve Michalek (1975) tanımlamıştır (KM- bulanık metrik uzaylar). George ve Veeramani (1994) ise bu tanımda küçük bir değişiklik yaparak yeni bir uyarlamasını vermişlerdir (GV- bulanık metrik uzaylar).

Matematikte bir kümenin noktalarının aynı kümenin noktalarına dönüştürülmesiyle ilgilenen ve en az bir noktanın sabit kaldığının kanıtlanabildiği teoremler olan sabit nokta teoremleri, bir denklemin bir çözümü olup olmadığını bulmak için çok kullanışlıdır.

$\mathfrak{S}(\kappa) = \kappa$ dönüşümünde κ , $\mathfrak{S}$ nin bir sabit noktasıdır. Bir sabit nokta, bir dönüşümün ardışık durumda kilitlendiği bir değer olarak da kabul edilebilir.

$|\mathfrak{S}(\kappa) - \mathfrak{S}(\xi)| \leq \lambda |\kappa - \xi|$ olacak şekilde 1'den küçük pozitif bir λ sabiti varsa, $\mathfrak{S}$ bir büzülme olarak adlandırılır. Böylece κ ve ξ arasındaki mesafe, büzülme dönüşümü ile $\mathfrak{S}(\kappa)$ ve $\mathfrak{S}(\xi)$ arasındaki mesafeye dönüştürülmüş olur.

Metrik uzaylarda sabit nokta teoremi çalışmalarını Stefan Banach başlatmış ve bu araştırma alanı diğer birçok bilimsel araştırma alanına katkı sağlamıştır. Sadece fonksiyonel analizin değil, aynı zamanda genel topolojinin ve diğer birçok disiplinin çok önemli bir aracı haline gelmiştir.

Banach (1922) büzülme/daralma ilkesinin uygulama zenginliği şaşırtıcıdır. Basitliği dikkat çekicidir ve büzülme koşulunun test edilmesinin kolay olması sebebiyle, belki de tüm analizlerde en yaygın olarak uygulanan sabit nokta teoremidir.

$(\hat{Y}, d)$ tam metrik uzayında $\forall \kappa, \xi \in \hat{Y}$ ve $\nu \in (0, 1)$ için $d(\mathfrak{S}\kappa, \mathfrak{S}\xi) \leq \nu d(\kappa, \xi)$ şartını sağlayan $\mathfrak{S} : \hat{Y} \longrightarrow \hat{Y}$ dönüşümünün tek bir sabit noktaya sahip olduğunu iddia eden, Banach büzülme ilkesinin çok çeşitli genellemeleri elde edilmiştir.

Grabiec (1988), KM bulanık metrik uzaylara Banach büzülme dönüşümünü uyarladıktan sonra birçok yazar, KM bulanık metrik uzaylarda ve GV bulanık metrik uzaylarda sabit nokta teoremleri kanıtlamışlardır.

Gregori ve Sapena (2002) tarafından tanımlanan bulanık büzülme dönüşümünü genişleten Mihet (2008), KM bulanık metrik uzaylarda çalışmıştır ve Non-Archimedean bulanık metrik uzaylarda Banach büzülme teoremini ispatlamışlardır.

Gregori vd. (2019), Mihet'in (2008) dönüşümünü, tanımladıkları genişletilmiş bulanık metrik uzaylara uyarlamışlardır.

Sabit nokta teorisinde büzülmenin rolü çok önemlidir. Literatürde, farklı uzaylarda büzülme dönüşümlerinin farklı versiyonları olan birçok çalışma bulunmaktadır.

Samet vd. (2012) tarafından metrik uzaylarda tanımlandıktan sonra bir çok genellemesi elde edilen büzülme dönüşümleri, Gopal ve Vetro (2014) için ilham kaynağı olmuş ve yazarlar bu dönüşümleri bulanık metrik uzaylarda tanımlamışlardır.

Benzer şekilde, metrik uzaylarda bir büzülme dönüşümü tanımlayan ve sabit nokta teoremleri kanıtlayan Wardowski'nin (2012) çalışmasından sonra, Huang vd. (2021) bulanık metrik uzaylarda bu büzülme yoluyla sabit nokta teoremleri ispatlamışlardır. Bu tezin özgün olan bölümü; genişletilmiş bulanık metrik uzaylarda üç yeni bulanık büzülme dönüşümünün tanımlandığı, bazı sabit nokta teoremlerinin ispatlandığı ve bazı örneklerin sunulduğu beşinci bölümdür. Bu bölüm oluşturulurken; bulanık metrik uzaylardaki tanımlar, teoremler, sonuçlar vb. esas alınarak genişletilmiş bulanık metrik uzaylara uyarlanmış ve teoremler ispatlanırken bilinen matematiksel yöntemler kullanılmıştır.

Bu tezde genişletilmiş bulanık metrik uzaylarda sabit nokta teoremleri oluştururken; literatürde var olan büzülme dönüşümlerini genişletilmiş bulanık metrik uzaylarda tanımlamak isteyen yeni araştırmacılara fikir vermek ve genişletilmiş bulanık metrik uzaylarda yapılan çalışmalara katkı sağlamak amaçlanmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bulanık kümeleri, sürekli üyelik derecelerine sahip nesneler sınıfı olarak ifade eden Zadeh (1965), her nesnenin "0" ile "1" arasında değer alan bir üyelik fonksiyonu ile karakterize edildiğini öne sürmüştür. Kümelere ait birçok kavramı, bulanık kümelere uyarlayarak ya da genişleterek bulanık kümelere ilişkin özellikler tanımlamıştır.

Zadeh (1965), gerçek hayatta karşılaşılan nesne sınıflarının kesin olarak tanımlanmış üyelik kriterlerine sahip olmadığını ileri sürmüştür. Ayrıca, bulanık küme kavramının birçok açıdan klasik kümelere kullanılan çerçeveye paralel olmakla beraber daha genel bir kavramsal çerçeveye sahip olduğunu, özellikle örüntü sınıflandırma ve bilgi işleme alanlarında çok daha geniş bir uygulama kapsamına sahip olabileceğini ifade etmiştir.

Belirsizliğin olduğu, kesinlikten söz edilemeyen karmaşık olayların, insana ait çeşitli verilerin açıklanabilmesi ihtiyaç olduğunda bulanık kavramı dikkate değer bir esneklik sunmaktadır.

Zadeh'in (1965) bu çalışması, kendisinden önce bilinmez kabul edilenleri açıklanabilir hale getirmesi bakımından çok önemlidir.

Tanım 2.1 $\hat{Y} \neq \emptyset$ bir küme ve $\mathcal{I} = [0, 1]$ olmak üzere

$$\mu_{\check{A}} : \hat{Y} \longrightarrow [0, 1]$$

üyelik (karakteristik) fonksiyonu tarafından karakterize edilen

$$\check{A} = \left\{ (\varkappa, \mu_{\check{A}}(\varkappa)) \mid \varkappa \in \hat{Y} \right\} \subset \hat{Y} \times \mathcal{I}$$

kümesine **bulanık küme** denir. Her $\varkappa \in \hat{Y}$ için $\mu_{\check{A}}(\varkappa)$ değerine **üyelik derecesi** denir (Zadeh 1965).

Tanım 2.2 $\hat{Y} \neq \emptyset$ bir küme ve $\mathcal{I} = [0, 1]$ olmak üzere

$$\mu_{\hat{Y}} : \hat{Y} \longrightarrow [0, 1]$$

üyelik fonksiyonu ile karakterize edilen

$$\hat{Y} = \left\{ (\varkappa, \mu_{\hat{Y}}(\varkappa) = 1) \mid \varkappa \in \hat{Y} \right\} \subset \hat{Y} \times \mathcal{I}$$

kümesine **evrensel bulanık küme** denir (Zadeh 1965).

Tanım 2.3 $\hat{Y} \neq \emptyset$ bir küme ve $\mathcal{I} = [0, 1]$ olmak üzere

$$\mu_{\Phi} : \hat{Y} \longrightarrow [0, 1]$$

üyelik fonksiyonu ile karakterize edilen

$$\Phi = \left\{ (\varkappa, \mu_{\Phi}(\varkappa) = 0) \mid \varkappa \in \hat{Y} \right\} \subset \hat{Y} \times \mathcal{I}$$

kümesine **boş bulanık küme** denir (Zadeh 1965).

Örnek 2.1 20-70 yaş aralığında kişilerden oluşan bir topluluğa aşağıdaki sorular yöneltiliyor;

Soru I: "Tanısı konmuş bir hastalığınız var mı?"

Soru II: "Kendinizi sağlıklı hissediyor musunuz?"

Sorulara "Evet" yanıtı veren kişi sayısının dağılımı aşağıdaki tabloda verilmiştir:

Soru\Yaş	$20 \leq \varkappa < 30$	$30 \leq \varkappa < 40$	$40 \leq \varkappa < 50$	$50 \leq \varkappa < 60$	$60 \leq \varkappa \leq 70$
I.	0	0,234	0,449	0,671	1
II.	1	0,862	0,441	0,305	0

20-30 yaş aralığı ($\varkappa_{[20,30]}$), 30-40 yaş aralığı ($\varkappa_{[30,40]}$), 40-50 yaş aralığı ($\varkappa_{[40,50]}$), 50-60 yaş aralığı ($\varkappa_{[50,60]}$) ve 60-70 yaş aralığı ($\varkappa_{[60,70]}$) şeklinde ifade edilirse;

$$\emptyset \neq \hat{Y} = \{ \mathcal{X}_{[20,30]}, \mathcal{X}_{[30,40]}, \mathcal{X}_{[40,50]}, \mathcal{X}_{[50,60]}, \mathcal{X}_{[60,70]} \}$$

ve $\mathcal{I} = [0, 1]$ olmak üzere

$$\check{A} = \{ (\mathcal{X}_{[20,30]}, 0), (\mathcal{X}_{[30,40]}, 0.234), (\mathcal{X}_{[40,50]}, 0.449), (\mathcal{X}_{[50,60]}, 0.671), (\mathcal{X}_{[60,70]}, 1) \} \subset \hat{Y} \times \mathcal{I}$$

kümesi bir bulanık kümedir ve üyelik fonksiyonu;

$$\mu_{\check{A}} = \{0, 0.234, 0.449, 0.671, 1\}$$

dır.

Aynı şekilde,

$$\check{D} = \{ (\mathcal{X}_{[20,30]}, 1), (\mathcal{X}_{[30,40]}, 0.862), (\mathcal{X}_{[40,50]}, 0.441), (\mathcal{X}_{[50,60]}, 0.305), (\mathcal{X}_{[60,70]}, 0) \} \subset \hat{Y} \times \mathcal{I}$$

kümesi de bir bulanık kümedir ve üyelik fonksiyonu

$$\mu_{\check{D}} = \{1, 0.862, 0.441, 0.305, 0\}$$

şeklindedir.

Tanım 2.4 $\check{A}$ ve $\check{D}$, üyelik fonksiyonları sırasıyla $\mu_{\check{A}}$ ve $\mu_{\check{D}}$ olmak üzere $\hat{Y}$ de iki bulanık küme ve $\forall \xi \in \hat{Y}$ için

$$\check{A} = \check{D} \Leftrightarrow \mu_{\check{A}}(\xi) = \mu_{\check{D}}(\xi)$$

$$\check{A} \subset \check{D} \Leftrightarrow \mu_{\check{A}}(\xi) \leq \mu_{\check{D}}(\xi)$$

$$\check{A} \cup \check{D} = \max[\mu_{\check{A}}(\xi), \mu_{\check{D}}(\xi)]$$

$$\check{A} \cap \check{D} = \min[\mu_{\check{A}}(\xi), \mu_{\check{D}}(\xi)]$$

$$E = \check{A}' \Leftrightarrow \mu_E(\xi) = 1 - \mu_{\check{A}}(\xi)$$

dir (Chang 1968).

Örnek 2.2 Örnek 2.1. de verilen, $\hat{Y}$ de tanımlı $\check{A}$ ve $\check{D}$ bulanık kümelerine birleşim, kesişim ve tümleyen işlemleri sırasıyla uygulanırsa;

$$\check{A} \cup \check{D} \Leftrightarrow \mu_{\check{A} \cup \check{D}}(\varkappa) = \max [\mu_{\check{A}}(\varkappa), \mu_{\check{D}}(\varkappa)] = \{1, 0.862, 0.449, 0.671\}$$

$$\check{A} \cap \check{D} \Leftrightarrow \mu_{\check{A} \cap \check{D}}(\varkappa) = \min [\mu_{\check{A}}(\varkappa), \mu_{\check{D}}(\varkappa)] = \{0, 0.234, 0.441, 0.305\}$$

$$\check{A}' \Leftrightarrow \mu_{\check{A}'}(\varkappa) = 1 - \mu_{\check{A}}(\varkappa) = \{1, 0.766, 0.551, 0.329, 0\}$$

$$\check{D}' \Leftrightarrow \mu_{\check{D}'}(\varkappa) = 1 - \mu_{\check{D}}(\varkappa) = \{0, 0.138, 0.559, 0.695, 1\}$$

elde edilir.

Örnek 2.3 $\hat{Y} = \{\varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_n\}$, $\mathcal{I} = [0, 1]$ ve $\check{A}$ ve $\check{D}$, $\hat{Y}$ de iki bulanık küme;

$$\check{A} = \{(\varkappa_1, 0.1), (\varkappa_2, 0.01), \dots, (\varkappa_n, 0.00..01)\}$$

$$\check{D} = \{(\varkappa_1, 0.9), (\varkappa_2, 0.09), \dots, (\varkappa_n, 0.00..09)\}$$

olmak üzere birleşim, kesişim ve tümleyen işlemleri uygulandığında sırasıyla;

$$\check{A} \cup \check{D} = \max \{\mu_{\check{A}}(\varkappa), \mu_{\check{D}}(\varkappa)\} = \{0.9, 0.09, \dots, 0.00..09\} = \mu_{\check{D}}(\varkappa)$$

$$\check{A} \cap \check{D} = \min \{\mu_{\check{A}}(\varkappa), \mu_{\check{D}}(\varkappa)\} = \{0.1, 0.01, \dots, 0.00..01\} = \mu_{\check{A}}(\varkappa)$$

$$\check{A}' = \{(\varkappa_1, 0.9), (\varkappa_2, 0.99), (\varkappa_3, 0.999) \dots, (\varkappa_n, 0.99..99)\}$$

elde edilir.

t – normlar, bulanık mantığın temel operatörleridir.

Tanım 2.5 Bir $*$: $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ikili işlemi verilsin. $\forall \varkappa, \gamma, \varsigma, \zeta \in [0, 1]$ için,

(i) $*$ işlemi değişmeli ve birleşmelidir.

(ii) $*$ işlemi süreklidir.

(iii) $\varkappa * 1 = \varkappa$.

(iv) $\varkappa \leq \varsigma$ ve $\gamma \leq \zeta$ ise $\varkappa * \gamma \leq \varsigma * \zeta$.

şartlarını sağlayan $*$ işlemine **süreklili t-norm** denir (Schwizer ve Sklar 1960).

Örnek 2.4 En iyi bilinen t -norm örnekleri T_L, T_P ve T_M dönüşümleridir.

$$T_L(\delta, \zeta) = \text{Max} \{ \delta + \zeta - 1, 0 \} \quad (\text{Lukasiewicz } t\text{-norm})$$

$$T_P(\delta, \zeta) = \delta \cdot \zeta \quad (\text{Product } t\text{-norm})$$

$$T_M(\delta, \zeta) = \text{Min} \{ \delta, \zeta \} \quad (\text{Minimum } t\text{-norm})$$

Tanım 2.6 Bir t -norm, $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ biçiminde tanımlı bir fonksiyon olarak $[0, 1]$ de kesin olarak artıyorsa, kesin monotondur denir (Klement ve Mesiar).

Örnek 2.5 Minimum t – norm ve Lukasiewicz t – norm süreklidir fakat kesin monoton değildir (Klement ve Mesiar).

$$\textbf{Örnek 2.6} \quad T(\delta, \zeta) = \begin{cases} \frac{\delta \cdot \zeta}{2}, & \max \{ \delta, \zeta \} < 1 \\ \delta \cdot \zeta, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan t -norm, kesin monotondur fakat sürekli değildir (Klement ve Mesiar).

3. BULANIK METRİK UZAYLARDA BAZI BÜZÜLME DÖNÜŞÜMLERİ

3.1 Bulanık Metrik Uzaylar

Bulanık metrik uzay kavramını ilk kez Kramosil ve Michalek (1975) tanımlamıştır. Sonrasında küçük bir değişiklik ile George ve Veeramani (1994) tarafından yeniden tanımlanmıştır.

Aşağıda her iki tanımı verilen bulanık metriği, metriktan ayıran en önemli özellik; bulanık metriğin tanımında var olan "t" parametresidir.

Tanım 3.1 $\hat{Y} \neq \emptyset$ bir küme, sürekli bir t-norm olan $*$ işlemi ve $\check{A}, \hat{Y} \times \hat{Y} \times [0, \infty)$ üzerinde tanımlı bir bulanık küme olsun. Eğer $\forall \varkappa, \xi, \varsigma \in \hat{Y}$ ve $t, s > 0$ için,

$$(KM_i) \quad \check{A}(\varkappa, \xi, 0) = 0,$$

$$(KM_{ii}) \quad \check{A}(\varkappa, \xi, t) = 1 \iff \varkappa = \xi,$$

$$(KM_{iii}) \quad \check{A}(\varkappa, \xi, t) = \check{A}(\xi, \varkappa, t),$$

$$(KM_{iv}) \quad \check{A}(\varkappa, \xi, t) * \check{A}(\xi, \varsigma, s) \leq \check{A}(\varkappa, \varsigma, t + s),$$

$$(KM_v) \quad \check{A}(\varkappa, \xi, .) : [0, \infty) \rightarrow [0, 1] \text{ soldan sürekli}$$

koşulları sağlanıyorsa $\check{A}$ ya $\hat{Y}$ üzerinde Kramosil ve Michalek yaklaşımı ile bir bulanık metrik ve $(\hat{Y}, \check{A}, *)$ üçlüsüne KM **bulanık metrik uzay** denir (Kramosil ve Michalek 1975).

Kramosil ve Michalek (1975), bulanık küme kavramı ve bundan türetilen kavramları kullanarak bulanık metrik kavramını doğal ve sezgisel olarak kanıtlamayı ve sonrasında metrik kavramıyla mukayese etmeyi amaçlamışlardır. Bulanık kavramını, metrik uzayların klasik kavramlarına uygulamışlardır.

Bulanık metrik uzayları yeniden tanımlayan George ve Veeramani'nin (1994) tanımı aşağıda verilmiştir:

Tanım 3.2 $\hat{Y} \neq \emptyset$ bir küme, sürekli bir t-norm olan $*$ işlemi ve $\check{A}, \hat{Y} \times \hat{Y} \times (0, \infty)$ üzerinde tanımlı bir bulanık küme olmak üzere, $\forall \varkappa, \xi, \varsigma \in \hat{Y}$ ve $t, s > 0$ için,

$$(GV_i) \quad \check{A}(\varkappa, \xi, t) > 0,$$

$$(GV_{ii}) \quad \check{A}(\varkappa, \xi, t) = 1 \iff \varkappa = \xi,$$

$$(GV_{iii}) \quad \check{A}(\varkappa, \xi, t) = \check{A}(\xi, \varkappa, t),$$

$$(GV_{iv}) \quad \check{A}(\varkappa, \xi, t) * \check{A}(\xi, \varsigma, s) \leq \check{A}(\varkappa, \varsigma, t + s),$$

$$(GV_v) \quad \check{A}(\varkappa, \xi, \cdot) : (0, \infty) \rightarrow [0, 1] \text{ sürekli}$$

koşulları sağlanıyorsa $\check{A}$ ya $\hat{Y}$ üzerinde George ve Veeramani yaklaşımı ile bir bulanık metrik ve $(\hat{Y}, \check{A}, *)$ üçlüsüne **GV bulanık metrik uzay** denir.

t parametresine göre $\varkappa$ ve ξ arasındaki uzaklığın derecesi olarak, $\check{A}(\varkappa, \xi, t)$ tanımlanabilir (George ve Veeramani 1994).

George ve Veeramani (1994), GV bulanık metrik uzayları tanımladıkları çalışmada örnekler sunmuşlar, $\forall \varkappa, \xi \in \hat{Y}$ için $\check{A}(\varkappa, \xi, \cdot)$ nin azalmayan bir fonksiyon olduğunu belirtmişlerdir.

$\varkappa$ merkezli r yarıçaplı açık ve kapalı yuvar tanımlarını vermişler, bulanık metrik uzaylardaki her açık yuvarın açık bir küme olduğunu göstermişlerdir.

Birçok araştırmacı, GV bulanık metrik uzaylarda sabit noktanın varlığını ve tekliğini ispatlayan çalışmalar yapmışlardır.

Bu tez çalışmasında, GV yaklaşımı esas alınmıştır.

Örnek 3.1 $\hat{Y} = \mathbb{R}$, $\forall \delta, \zeta \in [0, 1]$ için $\delta * \zeta = \delta \cdot \zeta$ işlemi verilsin.

$\forall \varkappa, \xi \in \hat{Y}$ ve $t \in (0, \infty)$ için

$$\check{A}(\varkappa, \xi, t) = \frac{1}{e^{\frac{|\varkappa - \xi|}{t}}}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $(\hat{Y}, \check{A}, *)$ bir bulanık metrik uzaydır (George ve Veeramani 1994).

Örnek 3.2 Bir $(\hat{Y}, d)$ metrik uzayı ve $*$ çarpım t-normu olsun.

$\varkappa, \xi \in \hat{Y}$ ve $t > 0$ olmak üzere, $\hat{Y} \times \hat{Y} \times (0, \infty)$ üzerinde

$$\check{A}_d(\varkappa, \xi, t) = \frac{t}{t + d(\varkappa, \xi)}$$

olarak tanımlansın. $(\hat{Y}, \check{A}_d, *)$ bir bulanık metrik uzaydır. $\check{A}_d$ ye d metriği tarafından indirgenen standart bulanık metrik denir (George ve Veeramani 1994).

Bulanık metrik uzaylarda üçgen eşitsizliği, bir üçlünün herhangi iki noktası arasındaki mesafenin ilişkisini ifade eder. Fakat bazı durumlarda, üçgen eşitsizliği bazı problemlerin ispatını tamamlamak için yeterli olmayabilir. Bu durumlarda Non-Archimedean olma özelliği kullanılır (López de Hierro vd. 2021).

Tanım 3.3 $(\hat{Y}, \check{A}, *)$ KM -bulanık metrik uzayın (KM_{iv}) özelliği yerine $\forall \varkappa, \xi, \varsigma \in \hat{Y}$ ve $t, s > 0$ için,

$$\check{A}(\varkappa, \xi, t) * \check{A}(\xi, \varsigma, s) \leq \check{A}(\varkappa, \varsigma, \max\{t, s\}) \dots \dots (NA)$$

sağlanıyorsa $(\hat{Y}, \check{A}, *)$ üçlüsüne **Non-Archimedean bulanık metrik uzay** denir.

Yukarıdaki koşula denk olan bir diğer koşul da

$$\check{A}(\varkappa, \xi, t) * \check{A}(\xi, \varsigma, t) \leq \check{A}(\varkappa, \varsigma, t)$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla, her Non-Archimedean bulanık metrik uzay, bulanık metrik uzaydır (Mihet 2008).

Örnek 3.3 $\hat{Y} = (0, \infty)$, $\forall \delta, \zeta \in [0, 1]$ için $\delta * \zeta = \delta \cdot \zeta$ işlemi verilsin. $\forall \varkappa, \xi, \varsigma \in \hat{Y}$ için

$$\check{A}(\varkappa, \xi, t) = \frac{\min\{\varkappa, \xi\}}{\max\{\varkappa, \xi\}}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $(\hat{Y}, \check{A}, *)$ üçlüsü Non-Archimedean bulanık metrik uzaydır (Mihet 2008).

Grabiec (1988), Cauchy dizisi (G-Cauchy) ve bulanık metrik uzayların tamlık koşulunu (G-tamlık) vermiş, bulanık metrik uzaylarda başlattığı sabit nokta teorisi çalışmalarını metrik uzaylara paralel şekilde yürütmüştür.

Gregori ve Sapena (2002), GV yaklaşımı ile tam bulanık metrik uzaylarda ve ayrıca G-tam KM bulanık metrik uzaylarda sabit nokta teoremleri ispatlamışlar ve bulanık metrik uzaylara katkı sağlamışlardır.

Tanım 3.4 $(\hat{Y}, \check{A}, *)$ bir bulanık metrik uzay olsun. Eğer,

(i) $\hat{Y}$ de tanımlı bir $\{\varkappa_n\}$ dizisi, $\forall t > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \check{A}(\varkappa_n, \varkappa, t) = 1$$

sağlanıyorsa $\varkappa_n, \varkappa$ e yakınsar denir ve $\varkappa_n \rightarrow \varkappa$ ile gösterilir.

(ii) $\hat{Y}$ de tanımlı bir $\{\varkappa_n\}$ dizisi, $\forall \varepsilon \in (0, 1)$ ve $t > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n, m \geq n_0$ için

$$\check{A}(\varkappa_n, \varkappa_m, t) > (1 - \varepsilon)$$

şartını sağlıyorsa $\{\varkappa_n\}$ bir M-Cauchy dizisidir denir.

(iii) $\hat{Y}$ de tanımlı bir $\{\varkappa_n\}$ dizisi, $\forall t > 0$ ve $p \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \check{A}(\varkappa_n, \varkappa_{n+p}, t) = 1$$

şartını sağlıyorsa $\{\varkappa_n\}$ bir G-Cauchy dizisidir denir.

(iv) Bir bulanık metrik uzaydaki her M-Cauchy (G-Cauchy) dizisi yakınsak ise bu bulanık metrik uzay M-tamdır (G-tamdır) denir

[(George ve Veeramani 1994), (Grabiec 1988)].

"t" ye bağılı olmayan $\check{A}$ sabit (stationary) bulanık metrik, klasik metriklere en yakın olan bulanık metrik olarak kabul edilebilir.

Bulanık topolojideki en önemli sorunlardan birinin, uygun bir bulanık metrik kavramı elde etmek olduğunu ifade eden Gregori ve Romaguera (2004) tarafından tanımlanan, sabit bulanık metrik tanımı aşağıda verilmiştir.

Tanım 3.5 $\hat{Y} \neq \emptyset$ bir küme, $*$ işlemi sürekli bir t-norm ve $\check{A}, \hat{Y} \times \hat{Y}$ üzerinde tanımlı bir bulanık küme olmak üzere $\forall \varkappa, \xi, \varsigma \in \hat{Y}$ için

$$(S_i) \quad \check{A}(\varkappa, \xi) > 0,$$

$$(S_{ii}) \quad \check{A}(\varkappa, \xi) = 1 \Leftrightarrow \varkappa = \xi,$$

$$(S_{iii}) \quad \check{A}(\varkappa, \xi) = \check{A}(\xi, \varkappa),$$

$$(S_{iv}) \quad \check{A}(\varkappa, \varsigma) * \check{A}(\varsigma, \xi) \leq \check{A}(\varkappa, \xi),$$

koşulları sağlamıyorsa $(\hat{Y}, \check{A}, *)$ üçlüsüne **sabit** (stationary) **bulanık metrik uzay** denir.

Başka deyişle; $\check{A}, \hat{Y}$ üzerinde tanımlı bir bulanık metrik olsun. Eğer $\check{A}, t$ ye bağılı değilse, $\check{A}$ ya sabit bulanık metrik denir (Gregori ve Romaguera 2004).

Örnek 3.4 $\hat{Y} = (0, \infty), \forall \delta, \zeta \in [0, 1]$ için $\delta * \zeta = \delta \cdot \zeta$ işlemi verilsin.

$\forall \varkappa, \xi, \varsigma \in \hat{Y}$ için $\check{A}(\varkappa, \xi, t) = \frac{\min\{\varkappa, \xi\}}{\max\{\varkappa, \xi\}}$ olarak tanımlansın. Bu durumda $(\hat{Y}, \check{A}, *)$ üçlüsü sabit bulanık metrik uzaydır (Gregori ve Romaguera 2004).

Tanım 3.6 $(\hat{Y}, \check{A}, *)$ bir bulanık metrik uzay olsun. Eğer $\varkappa, \xi, \varsigma \in \hat{Y}$ ve her $t > 0$ için

$$\left(\frac{1}{\check{A}(\varkappa, \xi, t)} - 1\right) \leq \left(\frac{1}{\check{A}(\varkappa, \varsigma, t)} - 1\right) + \left(\frac{1}{\check{A}(\xi, \varsigma, t)} - 1\right)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $\check{A}$ bulanık metriğine **üçgensel** (triangular) denir (Di Bari ve Vetro 2005).

3.2 Bulanık Metrik Uzaylarda Bazı Büzülme Dönüşümleri

Temel Banach toereminden sonra, bire bir dönüşümlerin sabit noktalarının araştırılması için çok fazla çalışma yapılmış, literatüre katkı sağlanmıştır. Bire bir dönüşümün tanımlandığı geometrik yapı ve dönüşüm üzerinde tanımlanan büzülme şartı, bu alandaki çalışmalarda iki önemli noktayı teşkil etmektedir. Bu alanda birçok araştırmacı; büzülme koşulunu değiştirerek, üzerinde çalışılan uzayı değiştirerek ya da büzülme eşitsizliklerini genelleştirerek araştırma makaleleri yayınlamışlardır.

Metrik uzaylarda başlayan sabit nokta teorisi çalışmaları, daha sonra bulanık metrik uzayların da tanımlanması ile bulanık metrik uzaylara da taşınmıştır. KM bulanık metrik ve GV bulanık metrik şeklinde farklı iki versiyonu bulunan bulanık metrik uzaylar, sabit nokta teoremlerinde tercih sebebi olmuştur.

Grabiec (1988), KM bulanık metrik uzaylarda Banach büzülme teoremini aşağıdaki şekilde oluşturmıştır:

" $(\hat{Y}, \check{A}, *)$ tam bulanık metrik uzayında $\varkappa, \xi \in \hat{Y}$ için $\check{A}(\varkappa, \xi, t) = 1$ olmak üzere, $\check{A}(\mathfrak{S}\varkappa, \mathfrak{S}\xi, kt) \geq \check{A}(\varkappa, \xi, t)$ eşitsizliği $\forall \varkappa, \xi \in \hat{Y}, k \in (0, 1)$ ve $t > 0$ için sağlanıyorsa $\mathfrak{S} : \hat{Y} \longrightarrow \hat{Y}$ dönüşümü tek bir sabit noktaya sahiptir."

Grabiec (1988), böylece bulanık metrik uzaylarda sabit nokta teorisi çalışmalarını başlatmıştır.

Daha sonra, Gregori ve Sapena (2002), bulanık metrik uzaylarda Banach büzülme ilkesini aşağıdaki şekilde tanımlamıştır:

"Her bulanık büzülme dizisinin Cauchy dizisi olduğu tam bulanık metrik uzayda $k \in (0, 1), \forall \zeta \in \hat{Y}$ ve pozitif t parametresi için

$$\frac{1}{\check{A}(\zeta_{n+1}, \zeta_{n+2}, t)} - 1 \leq k. \left(\frac{1}{\check{A}(\zeta_n, \zeta_{n+1}, t)} - 1 \right)$$

sağlanıyorsa $\mathfrak{S} : \hat{Y} \longrightarrow \hat{Y}$ dönüşümü tek bir sabit noktaya sahiptir."

Gregori ve Sapena (2002), Banach sabit nokta teoremini, farklı yaklaşımlarla, tam bulanık metrik uzaylarda, bulanık büzülme dönüşümlerine genişletmişlerdir. GV – bulanık metrik uzaylarda ve Grabiec'in (1988) yaklaşımı ile tam olan KM – bulanık metrik uzaylarda sabit nokta teoremleri çalışmışlardır.

Gregori ve Sapena (2002) tarafından bulanık metrik uzaylarda tanımlanan bulanık büzülme dönüşümü aşağıda verilmiştir.

Tanım 3.7 $(\hat{Y}, \check{A}, *)$ bulanık metrik uzayında $\forall \varkappa, \xi \in \hat{Y}$ ve $t > 0$ için

$$\frac{1}{\check{A}(\mathfrak{S}\varkappa, \mathfrak{S}\xi, t)} - 1 \leq \sigma \cdot \left(\frac{1}{\check{A}(\varkappa, \xi, t)} - 1 \right)$$

olacak biçimde $\sigma \in (0, 1)$ varsa (σ , $\mathfrak{S}$ nin büzülme sabitidir)

$$\mathfrak{S} : \hat{Y} \longrightarrow \hat{Y}$$

dönüşümüne **bulanık büzülme dönüşümü** denir (Gregori ve Sapena 2002).

Mihet (2008), Gregori ve Sapena (2002) tarafından tanımlanan bulanık büzülme dönüşümünü genişleterek, KM bulanık metrik uzaylarda sabit nokta teorisi çalışmaları yapmıştır ve Non-Archimedean bulanık metrik uzaylarda Banach büzülme teoremi kanıtlamıştır. Bulanık metrik uzaylarda tanımladığı ψ - büzülme dönüşümü aşağıda verilmiştir.

Uyarı 3.1 Aşağıdaki özellikleri sağlayan tüm

$$\psi : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$$

fonksiyonlarının ailesi Ψ ile gösterilsin;

- (i) ψ azalmayan ve sürekli,
- (ii) $\forall \eta \in (0, 1)$ için $\psi(\eta) > \eta$ (Mihet 2008).

Tanım 3.8 $(\hat{Y}, \check{A}, *)$ bulanık metrik uzay olsun. Eğer $\psi \in \Psi$ ve $\forall \varkappa, \xi \in \hat{Y}$ ve $t > 0$ için

$$\check{A}(\varkappa, \xi, t) > 0 \implies \check{A}(\mathfrak{S}\varkappa, \mathfrak{S}\xi, t) \geq \psi(\check{A}(\varkappa, \xi, t)) \quad (3.1)$$

sağlanıyorsa

$$\mathfrak{S} : \hat{Y} \longrightarrow \hat{Y}$$

dönüşümüne **bulanık ψ - büzülme dönüşümü** denir (Mihet 2008).

Samet vd (2012) metrik uzaylarda tanımladıkları büzülme dönüşümleri sınıfı ile bu tür dönüşümler için sabit noktanın varlığını ve tekliğini ortaya koyan bir çalışma yapmışlardır. Söz konusu dönüşümü; " Her $t > 0$ için $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k(t) < \infty$ (λ^k, λ fonksiyonunun k . kuvveti) şartını sağlayan ve azalmayan $\lambda : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ dönüşümleri ve $\alpha : \hat{Y} \times \hat{Y} \longrightarrow \mathbb{R}$ biçiminde tanımlı olmak üzere, $\mathfrak{S} : \hat{Y} \longrightarrow \hat{Y}$ dönüşümü $\forall \varkappa, \xi \in \hat{Y}$ için $\alpha(\varkappa, \xi)d(\mathfrak{S}\varkappa, \mathfrak{S}\xi) \leq \lambda(d(\varkappa, \xi))$ eşitsizliğini sağlasın, bu durumda $\mathfrak{S}$ dönüşümüne $\alpha - \lambda$ -büzülme dönüşümü denir." şeklinde tanımlamışlardır.

Çok yankı uyandıran bu çalışmadan yararlanarak, birçok araştırmacı büzülme şartını veya üzerinde çalışılan uzayı değiştirerek literatüre katkı sağlamıştır. Katkı sunan çalışmalardan biri Gopal ve Vetro (2014) tarafından ortaya konmuştur. Bu araştırmacılar tanımladıkları iki dönüşüm türü için sabit bir noktanın varlığını ve tekliğini iddia eden teoremleri bulanık metrik uzaylarda ifade ederek ispatlamışlardır.

Uyarı 3.2 Tüm sağdan sürekli ϕ fonksiyonlarının ailesi Φ ve

$$\phi : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$$

ve $\forall \eta > 0$ için $\phi(\eta) < \eta$ olmak üzere, her $\phi \in \Phi$ ve her $\eta > 0$ için ($\phi^n(\eta)$ ile ϕ nin n . kuvveti temsil edilsin)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^n(\eta) = 0$$

dır (Gopal ve Vetro 2014).

Tanım 3.9 $(\hat{Y}, \check{A}, *)$ bir bulanık metrik uzay olsun. Eğer $\phi \in \Phi$ ve

$$\delta : \hat{Y} \times \hat{Y} \times (0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$$

fonksiyonları $\forall \varkappa, \xi \in \hat{Y}$ ve $t > 0$ için

$$\delta(\varkappa, \xi, t) \left(\frac{1}{\check{A}(\mathfrak{S}\varkappa, \mathfrak{S}\xi, t)} - 1 \right) \leq \phi \left(\frac{1}{\check{A}(\varkappa, \xi, t)} - 1 \right) \quad (3.2)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa

$$\mathfrak{S} : \hat{Y} \longrightarrow \hat{Y}$$

dönüşümüne $\delta - \phi$ - **bulanık büzülme dönüşümü** denir (Gopal ve Vetro 2014).

Uyarı 3.3 (3.2) de $\delta(\varkappa, \xi, t) = 1$ ve $\phi(\eta) = k\eta$ olacak biçimde $k \in (0, 1)$ varsa, Gregori ve Sapena (2002) tarafından tanımlanan bulanık büzülme dönüşümü elde edilir (Gopal ve Vetro 2014).

Örnek 3.5 $\hat{Y} = \{\frac{1}{\varsigma}, \varsigma \in \mathbb{N}\} \cup \{0, 2\}$ kümesi ve $\forall \delta, \zeta \in [0, 1]$ için $\delta * \zeta = \delta.\zeta$ işlemi verilsin. $\forall \varkappa, \xi \in \hat{Y}$ ve $t > 0$ için

$$\check{A}(\varkappa, \xi, t) = \frac{t}{t + |\varkappa - \xi|}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $(\hat{Y}, \check{A}, *)$ bir G-tam bulanık metrik uzaydır.

$$\mathfrak{S} : \hat{Y} \longrightarrow \hat{Y}$$

dönüşümü;

$$\mathfrak{S}\varsigma = \begin{cases} \frac{\varsigma^2}{4}, & \varsigma \in \hat{Y} - \{2\} \\ 2, & \varsigma = 2 \end{cases}$$

şeklinde ve

$$\delta : \hat{Y} \times \hat{Y} \times (0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$$

fonksiyonu $\forall \varkappa, \xi \in \hat{Y}$ ve $t > 0$ için

$$\delta(\varkappa, \xi, t) = \begin{cases} 1, & \varkappa, \xi \in \hat{Y} - \{2\} \\ 0, & \varkappa, \xi \notin \hat{Y} - \{2\} \end{cases}$$

ve $\forall \eta > 0$ için $\phi(\eta) = \frac{\eta}{2}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\mathfrak{S}$ dönüşümü $\delta - \phi$ -bulanık büzülme dönüşümüdür.

Her bir bulanık büzülme dönüşümü, $\delta - \phi$ -bulanık büzülme dönüşümüdür. Fakat bu ifadenin karşısı her zaman doğru değildir.

Yukarıdaki örnekteki $\mathfrak{S}$ dönüşümü, $\delta - \phi$ -bulanık büzülme dönüşümüdür ancak bulanık büzülme dönüşümü değildir (Gopal ve Vetro 2014).

Tanım 3.10 $(\hat{Y}, \check{A}, *)$ bir bulanık metrik uzay olsun. Eğer

$$\delta : \hat{Y} \times \hat{Y} \times (0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$$

fonksiyonu $\forall \varkappa, \xi \in \hat{Y}$ ve $t > 0$ için

$$\delta(\varkappa, \xi, t) \geq 1 \implies \delta(\mathfrak{S}\varkappa, \mathfrak{S}\xi, t) \geq 1$$

özelliğini sağlıyorsa

$$\mathfrak{S} : \hat{Y} \longrightarrow \hat{Y}$$

dönüşümüne δ - **geçişlidir** denir (Gopal ve Vetro 2014).

Uyarı 3.4 $\psi \in \Psi$ ise $\psi(1) = 1$ ve $\forall \eta \in (0, 1)$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi^n(\eta) = 1$ olduğu kolayca görülür (Gopal ve Vetro 2014).

Tanım 3.11 $(\hat{Y}, \check{A}, *)$ bir bulanık metrik uzay olsun. Eğer $\psi \in \Psi$ ve

$$\rho : \hat{Y} \times \hat{Y} \times (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$$

fonksiyonları $\forall \varkappa, \xi \in \hat{Y} (\varkappa \neq \xi)$ ve $t > 0$ için

$$\check{A}(\varkappa, \xi, t) > 0 \implies \rho(\varkappa, \xi, t) \check{A}(\mathfrak{S}\varkappa, \mathfrak{S}\xi, t) \geq \psi(\check{A}(\varkappa, \xi, t)) \quad (3.3)$$

özelliğini sağlıyorsa

$$\mathfrak{S} : \hat{Y} \longrightarrow \hat{Y}$$

dönüşümüne $\rho - \psi$ - **bulanık büzülme dönüşümü** denir (Gopal ve Vetro 2014).

Uyarı 3.5 (3.3) te $\rho(\varkappa, \xi, t) = 1$ oluyorsa, Mihet (2008) tarafından verilen bulanık ψ - büzülme dönüşümü elde edilir (Gopal ve Vetro 2014).

Örnek 3.6 $\hat{Y} = (0, \infty)$ olsun. $\forall \delta, \zeta \in [0, 1]$ için $\delta \star \zeta = \delta \cdot \zeta$ işlemi ile $\forall \varkappa, \xi \in \hat{Y}$ ve $t > 0$ için

$$\check{A}(\varkappa, \xi, t) = \frac{\min\{\varkappa, \xi\}}{\max\{\varkappa, \xi\}}$$

olarak tanımlansın.

Bu durumda $(\hat{Y}, \check{A}, *)$ M-tam Non-Archimedean bulanık metrik uzaydır.

$$\mathfrak{S} : \hat{Y} \longrightarrow \hat{Y}$$

dönüşümü;

$$\mathfrak{S}\xi = \begin{cases} \sqrt{\xi}, & \xi \in (0, 1] \\ 2, & \xi \in (1, \infty) \end{cases}$$

şeklinde ve

$$\rho : \hat{Y} \times \hat{Y} \times (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$$

fonksiyonu $\forall \varkappa, \xi \in \hat{Y}$ ve $t > 0$ için

$$\rho(\varkappa, \xi, t) = \begin{cases} 1, & \varkappa, \xi \in (0, 1] \\ 2, & \varkappa, \xi \in (1, \infty) \end{cases}$$

ve $\forall \eta \in (0, 1]$ için

$$\psi(\eta) = \sqrt{\eta}$$

şeklinde tanımlansın. $\mathfrak{S}$ dönüşümü $\rho - \psi$ -bulanık büzülme dönüşümüdür.

Her bir bulanık ψ - büzülme dönüşümü, $\delta - \phi$ - bulanık büzülme dönüşümüdür.

Fakat bu ifadenin karşısı her zaman doğru değildir.

Yukarıdaki örnekteki $\mathfrak{S}$ dönüşümü, $\delta - \phi$ - bulanık büzülme dönüşümüdür ancak bulanık ψ - büzülme dönüşümü değildir (Gopal ve Vetro 2014).

Tanım 3.12 $(\hat{Y}, \check{A}, *)$ bir bulanık metrik uzay olsun.

$$\rho : \hat{Y} \times \hat{Y} \times (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$$

fonksiyonu $\varkappa, \xi \in \hat{Y}$ ve her $t > 0$ için

$$\rho(\varkappa, \xi, t) \leq 1 \implies \rho(\mathfrak{S}\varkappa, \mathfrak{S}\xi, t) \leq 1$$

özellğini sağhyorsa

$$\mathfrak{S} : \hat{Y} \longrightarrow \hat{Y}$$

dönüşümüne ρ - **geçişlidir** denir (Gopal ve Vetro 2014).

Buraya kadar olan kısımda; literatürde yer almış, gerek metrik gerekse bulanık metrik uzaylarda tanımlanmış çeşitli büzülme dönüşümlerinden birkaç tanesi ifade edilmiştir. Aşağıda tanımı verilen $\mathbb{F}$ - büzülme dönüşümü de söz konusu dönüşümlerden biridir.

Wardovski (2012) tarafından metrik uzaylarda tanımlanan $\mathbb{F}$ - büzülme dönüşümü, Huang vd. (2021) tarafından yeniden düzenlenerek, bulanık metrik uzaylara aktarılmıştır. Bu aktarım sırasında daha sade bir büzülme dönüşümü hedeflenmiştir. $\mathbb{F}$ - bulanık büzülme dönüşümünde öne çıkan özellik " $\mathbb{F}$ 'nin kesin artan" olmasıdır.

Son olarak, Huang vd. (2021) tarafından bulanık metrik uzaylarda tanımlanan $\mathbb{F}$ – bulanık büzülme dönüşümü aşağıda verilmiştir.

Uyarı 3.6 Bütün

$$\mathbb{F} : [0, 1] \rightarrow (0, \infty)$$

dönüşümlerinin sınıfı $\mathcal{F}$ ile gösterilir. $\forall \varkappa, \xi \in [0, 1]$ için $\varkappa < \xi$ iken $\mathbb{F}(\varkappa) < \mathbb{F}(\xi)$ dır (Huang vd. 2021).

Tanım 3.13 $(\hat{Y}, \check{A}, *)$ bir bulanık metrik uzay ve $\mathbb{F} \in \mathcal{F}$ olsun. Eğer $\forall \varkappa, \xi \in \hat{Y}$ ($\varkappa \neq \xi$) ve $t > 0$ için

$$\tau.\mathbb{F}(\check{A}(\mathfrak{S}\varkappa, \mathfrak{S}\xi.t)) \geq \mathbb{F}(\check{A}(\varkappa, \xi, t))$$

şartını sağlayan $\tau \in (0, 1)$ varsa

$$\mathfrak{S} : \hat{Y} \longrightarrow \hat{Y}$$

dönüşümüne $\mathbb{F}$ – **bulanık büzülme dönüşümü** denir (Huang vd. 2021).

4. GENİŞLETİLMİŞ BULANIK METRİK UZAYLAR ÜZERİNE

Bu bölümde genişletilmiş bulanık metrik uzaylar ayrıntılı bir şekilde ele alınarak özellikleri incelenmiştir.

4.1 Genişletilmiş Bulanık Metrik Uzaylar

Gregori vd. (2019) tarafından, genişletilmiş bulanık metrik uzayların tanımlandığı makalede, $\hat{Y}$ üzerindeki $\check{A}$ bulanık metrik, GV yaklaşımı ile $\wedge_{t>0} \check{A}(\varkappa, \xi, t) > 0$ olacak şekilde incelenmiş ve $\check{A}$ nın sürekli genişletilmiş $\check{A}^0$, $\hat{Y} \times \hat{Y} \times [0, \infty)$ üzerinde genişletilmiş bulanık metrik olarak adlandırılmıştır.

Tanım 4.1 $\hat{Y} \neq \emptyset$ bir küme, $*$ işlemi sürekli bir t-norm ve $\check{A}^0, \hat{Y} \times \hat{Y} \times [0, \infty)$ üzerinde bir bulanık küme olmak üzere, $\forall \varkappa, \xi, \varsigma \in \hat{Y}$ ve $t, s \geq 0$ için

$$(i) \quad \check{A}^0(\varkappa, \xi, t) > 0,$$

$$(ii) \quad \check{A}^0(\varkappa, \xi, t) = 1 \iff \varkappa = \xi,$$

$$(iii) \quad \check{A}^0(\varkappa, \xi, t) = \check{A}^0(\xi, \varkappa, t),$$

$$(iv) \quad \check{A}^0(\varkappa, \xi, t) * \check{A}^0(\xi, \varsigma, s) \leq \check{A}^0(\varkappa, \varsigma, t + s),$$

$$(v) \quad \check{A}_{\varkappa, \xi}^0 : [0, \infty) \rightarrow (0, 1] \text{ süreklidir (Burada } \check{A}_{\varkappa, \xi}^0(t) = \check{A}^0(\varkappa, \xi, t) \text{ dır).}$$

koşulları sağlamıyorsa $\check{A}^0, \hat{Y}$ üzerinde **genişletilmiş bulanık metriktir** ve $(\hat{Y}, \check{A}^0, *)$ üçlüsüne de **genişletilmiş bulanık metrik uzay** denir (Gregori vd. 2019).

Örnek 4.1 $\hat{Y} = (0, \infty)$ olsun. $\hat{Y} \times \hat{Y} \times [0, \infty)$ üzerinde tanımlı

$$\check{A}^0(\varkappa, \xi, t) = \frac{\min \{\varkappa, \xi\} + t}{\max \{\varkappa, \xi\} + t}$$

bulanık kümesi, çarpım t-normuna göre, $\hat{Y}$ üzerinde genişletilmiş bir bulanık metriktir (Gregori vd. 2019).

Örnek 4.2 $(\hat{Y}, d)$ metrik uzay ve $\phi(0) > 0$ olmak üzere $\phi : [0, \infty) \rightarrow (0, 1]$ sürekli azalmayan bir fonksiyon ve $*$ çarpım t-normu verilsin. $\forall \varkappa, \xi \in \hat{Y}$ ve $t \geq 0$ için

$$\check{A}_{\phi}^0(\varkappa, \xi, t) = \frac{\phi(t)}{\phi(t) + d(\varkappa, \xi)}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $(\hat{Y}, \check{A}_{\phi}^0, *)$ genişletilmiş bir bulanık metriktir (Gregori vd. 2019).

Aşağıda verilen Teorem 4.1, bulanık metriklerle genişletilmiş bulanık metrikler arasındaki ilişkiyi vermesi açısından önemlidir.

Teorem 4.1 $\check{A}, \hat{Y} \times \hat{Y} \times (0, \infty)$ üzerinde tanımlı bir bulanık küme; $\check{A}$ nın genişletilmiş $\check{A}^0, \hat{Y} \times \hat{Y} \times [0, \infty)$ üzerinde tanımlı bir bulanık küme olmak üzere

$$\forall \varkappa, \xi \in \hat{Y} \text{ ve } t > 0 \text{ için } \check{A}^0(\varkappa, \xi, t) = \check{A}(\varkappa, \xi, t)$$

ve

$$\check{A}^0(\varkappa, \xi, 0) = \bigwedge_{t>0} \check{A}(\varkappa, \xi, t)$$

olsun. Bu durumda, aşağıdaki önermeler denktir:

- (i) $(\hat{Y}, \check{A}^0, *)$ genişletilmiş bulanık metrik uzaydır.
- (ii) $(\hat{Y}, \check{A}, *)$, $\forall \varkappa, \xi \in \hat{Y}$ için $\bigwedge_{t>0} \check{A}(\varkappa, \xi, t) > 0$ olacak biçimde bir bulanık metrik uzaydır. (Gregori vd. 2019).

İspat. $\implies$:

$(\check{A}^0, *)$, $\hat{Y}$ üzerinde genişletilmiş bir bulanık metrik olsun. Bu durumda $(\check{A}, *)$, $\hat{Y}$ üzerinde bulanık bir metriktir. O halde

$$\forall \varkappa, \xi \in \hat{Y} \text{ için } \bigwedge_{t>0} \check{A}(\varkappa, \xi, t) > 0$$

olduğu gösterilerek ispat tamamlanacaktır.

$\varkappa, \xi \in \hat{Y}$ ve $0 < t < s$ olsun.

Bulanık metrik uzayın (GV_{iv}) özelliğinden;

$$\check{A}(\varkappa, \xi, t) * \check{A}(\xi, \xi, s - t) \leq \check{A}(\varkappa, \xi, s),$$

(GV_{iii}) özelliğinden;

$$\check{A}(\xi, \xi, s - t) = 1$$

ve t -normun (iii) numaralı özelliğinden

$$\check{A}(\varkappa, \xi, t) \leq \check{A}(\varkappa, \xi, s)$$

elde edilir. Dolayısıyla $\check{A}(\varkappa, \xi, t)$ azalmayandır.

Ayrıca, genişletilmiş bulanık metrik uzayın (v) numaralı özelliğinden $\check{A}_{\varkappa, \xi}^0$ fonksiyonu, $t = 0$ noktasında süreklidir.

O halde;

$$\wedge_{t>0} \check{A}(\varkappa, \xi, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \check{A}(\varkappa, \xi, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \check{A}_{\varkappa, \xi}^0(t) = \check{A}_{\varkappa, \xi}^0(0) = \check{A}^0(\varkappa, \xi, 0) > 0$$

dır.

$\Leftarrow$:

$(\hat{Y}, \check{A}, *)$ bulanık metrik uzay ve $\forall \varkappa, \xi \in \hat{Y}$ için $\wedge_{t>0} \check{A}(\varkappa, \xi, t) > 0$ olsun. Bu durumda, $(\hat{Y}, \check{A}^0, *)$ üçlüsünün genişletilmiş bulanık metrik uzay olduğu gösterilecektir.

(i) $\forall \varkappa, \xi \in \hat{Y}$ için $\wedge_{t>0} \check{A}(\varkappa, \xi, t) > 0$ olduğuna göre; $t = 0$ olduğunda $\check{A}^0(\varkappa, \xi, 0) > 0$ ve

$t > 0$ durumunda $\check{A}^0(\varkappa, \xi, t) = \check{A}(\varkappa, \xi, t) > 0$ sağlanır. Dolayısıyla;

$$\forall \varkappa, \xi \in \hat{Y} \text{ ve } t \geq 0 \text{ için } \check{A}^0(\varkappa, \xi, t) > 0$$

dır.

(ii) $t = 0$ olduğunda $\check{A}^0(\varkappa, \xi, 0) = \wedge_{t>0} \check{A}(\varkappa, \xi, t) = 1 \Rightarrow \check{A}(\varkappa, \xi, t) = 1 \Rightarrow \varkappa = \xi$ ve

$t > 0$ durumunda $\check{A}^0(\varkappa, \xi, t) = \check{A}(\varkappa, \xi, t) = 1 \Rightarrow \varkappa = \xi$ sağlanır. Dolayısıyla,

$$\forall \varkappa, \xi \in \hat{Y} \text{ ve } t \geq 0 \text{ için } \check{A}^0(\varkappa, \xi, t) = 1 \Rightarrow \varkappa = \xi.$$

(iii) $\forall \varkappa, \xi \in \hat{Y}$ ve $t \geq 0$ için $\check{A}^0(\varkappa, \xi, t) = \check{A}^0(\xi, \varkappa, t)$ olduğu açıkça görülür.

(iv) $\varkappa, \xi, \varsigma \in \hat{Y}$ alalım. $t, s \geq 0$ için üç durum söz konusudur;

I. $t, s > 0$. Bu durumda, $\check{A}^0(\varkappa, \xi, t) = \check{A}(\varkappa, \xi, t)$ olduğundan özellik sağlanır.

II. $t = 0$ ve $s > 0$ olsun (ya da $t > 0$ ve $s = 0$ olsun).

$\varepsilon \in (0, s)$ olacak şekilde seçilirse,

$$\check{A}^0(\varkappa, \varsigma, 0 + s) = \check{A}^0(\varkappa, \varsigma, s) = \check{A}(\varkappa, \varsigma, s) \geq \check{A}(\varkappa, \xi, s - \varepsilon) * \check{A}(\xi, \varsigma, \varepsilon)$$

dır. $\varepsilon \rightarrow 0$ için limit alındığında,

$$\begin{aligned} \check{A}^0(\varkappa, \varsigma, s) &\geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\check{A}(\varkappa, \xi, s - \varepsilon) * \check{A}(\xi, \varsigma, \varepsilon) \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \check{A}(\varkappa, \xi, s - \varepsilon) * \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \check{A}(\xi, \varsigma, \varepsilon) \\ &= \check{A}(\varkappa, \xi, s) * \bigwedge_{\varepsilon > 0} \check{A}(\varkappa, \xi, \varepsilon) \\ &= \check{A}^0(\varkappa, \xi, s) * \check{A}^0(\xi, \varsigma, 0). \end{aligned}$$

III. $t = s = 0$ olsun.

$$\begin{aligned} \check{A}^0(\varkappa, \varsigma, 0) &= \bigwedge_{t > 0} \check{A}(\varkappa, \varsigma, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \check{A}(\varkappa, \varsigma, t) \\ &\geq \lim_{t \rightarrow 0} \left[\check{A}(\varkappa, \xi, \frac{t}{2}) * \check{A}(\xi, \varsigma, \frac{t}{2}) \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \check{A}(\varkappa, \xi, \frac{t}{2}) * \lim_{t \rightarrow 0} \check{A}(\xi, \varsigma, \frac{t}{2}) \\ &= \bigwedge_{t > 0} \check{A}(\varkappa, \xi, \frac{t}{2}) * \bigwedge_{t > 0} \check{A}(\xi, \varsigma, \frac{t}{2}) \\ &= \check{A}^0(\varkappa, \xi, 0) * \check{A}^0(\xi, \varsigma, 0). \end{aligned}$$

Böylece;

$$\forall \varkappa, \xi, \varsigma \in \hat{Y} \text{ ve } t, s \geq 0 \text{ için } \check{A}^0(\varkappa, \xi, t) * \check{A}^0(\xi, \varsigma, s) \leq \check{A}^0(\varkappa, \xi, t + s)$$

olduğu elde edilir.

(v) $\check{A}_{\varkappa, \xi}$ fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığında sürekli olduğundan;

$\forall \varkappa, \xi \in \hat{Y}$ için $\check{A}_{\varkappa, \xi}^0$ fonksiyonu, $(0, \infty)$ aralığının her bir noktasında süreklidir.

$t = 0$ olduğunda ise;

$$\lim_{t \rightarrow 0} \check{A}^0(\varkappa, \xi, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \check{A}(\varkappa, \xi, t) = \bigwedge_{t > 0} \check{A}(\varkappa, \xi, t) = \check{A}^0(\varkappa, \xi, 0)$$

elde edilir ki bu da $\check{A}_{\varkappa, \xi}^0$ fonksiyonunun $t = 0$ noktasında da sürekli olduğu anlamına gelir. İspat burada tamamlanmıştır. ■

Örnek 4.3 $(\hat{Y}, d)$ bir metrik uzay olsun. $(\hat{Y}, \check{A}_d, \wedge)$ standart bulanık metriği genişletilemez. Şöyle ki; $\varkappa \neq \xi$ olacak şekilde $\varkappa, \xi \in \hat{Y}$ alındığında $d(\varkappa, \gamma) \neq 0$ olur ve $\bigwedge_{t > 0} \check{A}_d(\varkappa, \xi, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{t + d(\varkappa, \xi)} = 0$ elde edilir (Gregori vd. 2019).

4.2 Genişletilmiş Bulanık Metrik Uzaylar Üzerine

Gregori vd. (2019), GV yaklaşımı ile, $\bigwedge_{t>0} \check{A}(\varkappa, \xi, t) > 0$ olacak şekilde $\hat{Y}$ de inceledikleri $\check{A}$ bulanık metrikleri; $\check{A}^0$ genişletilmiş bulanık metrikler olarak tanımlamışlardır. $\tau_{\check{A}^0}$ in $\hat{Y}$ üzerinde metriklenebilir bir topoloji olduğunu, klasik metriklere benzer yaklaşımla ispatlamışlardır.

Bulanık metrik uzaylarda verilen sabit nokta teoremlerinin genellemelerini elde etmek için, genişletilmiş bulanık metrik uzayların kullanışlı olduğunu ifade etmişlerdir. $\hat{Y}$ üzerindeki $\check{A}$ sabit bulanık metriğinin (t ye bağlı olmayan),

$$\check{A}^0(\varkappa, \xi, t) = \check{A}(\varkappa, \xi)$$

ile verilen $\forall \varkappa, \xi \in$ ve $t \geq 0$ için

$$\check{A}^0(\varkappa, \xi, t) > 0 \text{ ve}$$

$$\check{A}_{\varkappa, \xi}^0 : [0, \infty) \rightarrow (0, 1] \text{ sürekli}$$

şartlarını sağlayan, $\hat{Y} \times \hat{Y} \times [0, \infty)$ üzerinde tanımlı $\check{A}^0$ bulanık kümesi olduğunu belirtmişlerdir.

Gregori vd. (2019), bulanık metrik uzaylar ile genişletilmiş bulanık metrik uzaylar arasındaki ilişkiyi açıklayan bir teoremi de (Teorem 4.1) ispatlamışlardır. Ayrıca, genişletilmiş bulanık metrik uzaylarda; yakınsaklık, tamlık, Cauchy dizisi, açık yuvar, kapalı yuvar gibi kavramları tanımlamışlardır.

Daha sonra, sabit nokta teorisinde önemli bir yere sahip olan büzülme kavramını genişletilmiş bulanık metrik uzaylarda çalışmışlardır. Mihet'in (2008) bulanık metrik uzaylarda tanımladığı ψ - büzülme dönüşümünü ele alarak, $t = 0$ noktasındaki büzülmeyi işaret eden, $\psi - 0$ - büzülme dönüşümünü tanımlamışlardır ve örnekler vermişlerdir. Gregori vd. (2019), literatürdeki kavramları kullanarak, sabit nokta teoremlerinin daha genel bir versiyonda verilebileceğini iddia etmişlerdir.

Ayrıca tam genişletilmiş bulanık metrik uzaylarda her bulanık $\psi - 0$ -büzülme dönüşümünün tek bir sabit noktaya sahip olduğunu iddia eden bir teoremi ispatsız vermişlerdir. Bu teoremin tarafımızca yapılan ispatı, bölümün sonunda yer almaktadır.

Önerme 4.1 $(\hat{Y}, \check{A}, *)$ bulanık metrik uzay olsun.

$$N_{\check{A}}(\varkappa, \xi) = \bigwedge_{t>0} \check{A}(\varkappa, \xi, t)$$

şeklinde tanımlansın. $\forall \varkappa, \xi \in \hat{Y}$ için $\bigwedge_{t>0} \check{A}(\varkappa, \xi, t) > 0$ olması için gerek ve yeter şart; $(N_{\check{A}}, *)$ nın $\hat{Y}$ üzerinde sabit bulanık metrik olmasıdır (Gregori vd. 2019).

Tanım 4.2 $(\hat{Y}, \check{A}, *)$ bulanık metrik uzayında $\forall \varkappa, \xi \in \hat{Y}$ için

$$\bigwedge_{t>0} \check{A}(\varkappa, \xi, t) > 0$$

oluyorsa $\check{A}$ ya genişletilebilir denir. Böyle bir durumda; $\check{A}^0, \check{A}$ nın genişletilmişidir (Gregori vd. 2019).

Sonuç 4.1 (i) $\check{A}$ nın genişletilebilir olması için gerek ve yeter şart; $(N_{\check{A}}, *)$ nın $\hat{Y}$ üzerinde sabit bulanık metrik olmasıdır.

(ii) $(\hat{Y}, \check{A}, *)$ nın bulanık metrik uzay olması için gerek ve yeter şart; $(\hat{Y}, \check{A}^0, *)$ nın

$$\check{A}^0(\varkappa, \xi, t) = \begin{cases} N_{\check{A}}(\varkappa, \xi), & t = 0 \\ \check{A}(\varkappa, \xi, t), & t > 0 \end{cases}$$

olacak biçimde bir genişletilmiş bulanık metrik uzay olmasıdır.

(iii) $\forall \varkappa, \xi \in \hat{Y}$ için

$$\check{A}^0(\varkappa, \xi, 0) = \bigwedge_{t>0} \check{A}(\varkappa, \xi, t) = N_{\check{A}}(\varkappa, \xi) \quad (4.1)$$

dır.

(iv) $\check{A}^0_{\varkappa, \xi}$ reel fonksiyonu $[0, \infty)$ üzerinde sürekli olduğundan, genişletilebilir bir bulanık metrik $\check{A}$ nın genişletimişi $\check{A}^0$ tektir (Gregori vd. 2019).

Tanım 4.3 $(\hat{Y}, \check{A}^0, *)$ genişletilmiş bir bulanık metrik uzay, $\{\varkappa_n\}$ $\hat{Y}$ de bir dizi ve $\varepsilon \in (0, 1)$ olsun. Bir $n_0 \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\forall n, m \geq n_0$ için

$$\check{A}^0(\varkappa_n, \varkappa_m, t) > (1 - \varepsilon)$$

sağlamıyorsa $\{\varkappa_n\}$ bir $\check{A}^0$ -Cauchy dizisidir denir ve

$$\check{A}^0(\varkappa_n, \varkappa_m, t) = 1$$

ile gösterilir (Gregori vd. 2019).

Önerme 4.2 $(\hat{Y}, \check{A}^0, *)$ genişletilmiş bir bulanık metrik uzay olsun.

Her $\check{A}^0$ -yakınsak dizisi, $\check{A}^0$ -Cauchy dizisidir (Gregori vd. 2019).

Gregori vd. (2019), genişletilmiş bulanık metrik uzaylarda topolojik kavramları da tanımlamışlardır. Bu kavramlar, bulanık metrik uzaylardakine benzer şekilde oluşturulmuştur.

$(\hat{Y}, \check{A}^0, *)$ bir genişletilmiş bulanık metrik uzayında $\varkappa \in \hat{Y}$, $r \in (0, 1)$ ve $t \geq 0$ için olsun. Bu durumda;

$\varkappa$ merkezli, r yarıçaplı ve t parametrelili açık yuvar;

$$B_{\check{A}^0}(\varkappa, r, t) = \left\{ \xi \in \hat{Y} : \check{A}^0(\varkappa, \xi, t) > 1 - r \right\}$$

$\varkappa$ merkezli, r yarıçaplı ve t parametrelili kapalı yuvar;

$$B_{\check{A}^0}[\varkappa, r, t] = \left\{ \xi \in \hat{Y} : \check{A}^0(\varkappa, \xi, t) \geq 1 - r \right\}$$

şeklinde ifade edilir. $\forall t > 0$ için

$$B_{\check{A}^0}(\varkappa, r, t) = B_{\check{A}}(\varkappa, r, t) \text{ ve } B_{\check{A}^0}[\varkappa, r, t] = B_{\check{A}}[\varkappa, r, t]$$

dır. $t = 0$ için

$$B_{\check{A}^0}(\varkappa, r, 0) = B_{N_{\check{A}}}(\varkappa, r) \text{ ve } B_{\check{A}^0}[\varkappa, r, 0] = B_{N_{\check{A}}}[\varkappa, r]$$

dır. $\forall \varkappa \in \hat{Y}$, $r \in (0, 1)$ ve $t = 0$ olmak üzere;

$$B_{\check{A}^0}(\varkappa, r, 0) \subset B_{\check{A}}(\varkappa, r, t) \text{ ve } B_{\check{A}^0}[\varkappa, r, 0] = B_{N_{\check{A}}}[\varkappa, r] \text{ dır.}$$

Lemma 4.1 $\tau_{\check{A}^0}$ topolojisi metriklenebilirdir (Gregori vd. 2019).

İspat. $(\hat{Y}, \check{A}^0, *)$ genişletilmiş bir bulanık metrik uzay olsun.

$$\left\{ B_{N_{\check{A}}}(\varkappa, r) : \varkappa \in \hat{Y}, r \in (0, 1) \right\}$$

ailesi, $\hat{Y}$ üzerinde tanımlı $N_{\check{A}}$ sabit bulanık metrikten üretilen $\tau_{N_{\check{A}}}$ topolojisinin bir tabanıdır. Dolayısıyla

$$\left\{ B_{\check{A}^0}(\varkappa, r, 0) : \varkappa \in \hat{Y}, r \in (0, 1) \right\}$$

ailesi, $\hat{Y}$ üzerinde tanımlı $\tau_{N_{\check{A}}}$ topolojisinin bir bazıdır ve $\check{A}^0$ tarafından üretilmiştir.

Üstelik, $B_{\check{A}^0}(\varkappa, r, 0)$ açık yuvarları $\tau_{\check{A}^0}$ -açıktır ve benzer şekilde kapalı yuvarlar $\tau_{\check{A}^0}$ -kapalıdır. Böylece $\tau_{\check{A}^0}$ topolojisi metriklenebilirdir. ■

Önerme 4.3 $(\hat{Y}, \check{A}^0, *)$ genişletilmiş bir bulanık metrik uzay ve $\{\varkappa_n\}, \hat{Y}$ de bir dizi olsun.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \check{A}^0(\varkappa_n, \varkappa_0, 0) = 1 \iff \{\varkappa_n\} \text{ dizisi } \varkappa_0 \text{ a } \tau_{\check{A}^0}\text{-yakınsar (Gregori vd. 2019).}$$

İspat. $\tau_{N_{\check{A}}} = \tau_{\check{A}^0}$ olduğundan,

$\hat{Y}$ deki $\{\varkappa_n\}$ dizisi $\varkappa_0 \in \hat{Y}$ ye $\tau_{\check{A}}$ -yakınsar $\iff \{\varkappa_n\}, \varkappa_0$ a $\tau_{N_{\check{A}}}$ -yakınsar.

Bulanık metrik uzaylardan bilindiği gibi;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_{\check{A}}(\varkappa_n, \varkappa_0) = 1 \iff \{\varkappa_n\} \text{ dizisi } \varkappa_0 \text{ a } \tau_{N_{\check{A}}} - \text{yakınsar}$$

Dolayısıyla,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \check{A}^0(\varkappa_n, \varkappa_0, 0) = N_{\check{A}}(\varkappa_n, \varkappa_0) = 1 \iff \{\varkappa_n\} \text{ dizisi } \varkappa_0 \in \hat{Y} \text{ ye } \tau_{\check{A}^0} - \text{yakınsar.}$$

İspat tamamlanmıştır. ■

Gregori vd. (2019), genişletilmiş bulanık metrik uzaylar ile klasik metrik uzaylar arasındaki benzerliğin, topolojik açıdan bariz olduğunu vurgulamışlar ve bu durumu açıklarken; t parametresinin topolojik kavramlarda herhangi bir rol oynamaması ile ilişkilendirmişlerdir.

Gregori vd. (2019), genişletilmiş bulanık metrik uzayları tanımladıkları makalenin sonunda, Mihet'in (2008) bulanık metrik uzaylarda tanımladığı büzülme dönüşümünü, genişletilmiş bulanık metrik uzaylara uyarlamışlardır.

"*Tam genişletilmiş bulanık metrik uzaylarda her bulanık $\psi-0$ -büzülme dönüşümünün tek bir sabit noktaya sahip olduğunu*" iddia eden teoremin ispatı aşağıda verilmiştir:

İspat. $t = 0$ için;

$\varkappa_0 \in \hat{Y}$ ve $\{\varkappa_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \hat{Y}$ de dizi; $\varkappa_{n+1} = \mathfrak{S}\varkappa_n$ olsun.

Bazı $n \in \mathbb{N}$ için $\varkappa_{n+1} = \varkappa_n$ oluyorsa, bu durumda $\varkappa^* \in \hat{Y}$, $\varkappa^* = \varkappa_n$ $\mathfrak{S}'$ nin bir sabit noktasıdır.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $\varkappa_n \neq \varkappa_{n+1}$ olsun.

$\mathfrak{S}$, bulanık $\psi - 0$ -büzülme dönüşümü olduğundan,

(3.1) de $\varkappa = \gamma_{n-1}$, $\xi = \gamma_n$, $t = 0$ yazılırsa ve (4.1) kullanılırsa,

$$\check{A}(\mathfrak{S}\varkappa, \mathfrak{S}\xi, t) \geq \psi \left(\check{A}(\varkappa, \xi, t) \right)$$

$$\begin{aligned} \check{A}^0(\mathfrak{S}\gamma_{n-1}, \mathfrak{S}\gamma_n, 0) &= N_{\check{A}}(\mathfrak{S}\gamma_{n-1}, \mathfrak{S}\gamma_n) \\ &\geq \psi(N_{\check{A}}(\gamma_{n-1}, \gamma_n)) \\ &> N_{\check{A}}(\gamma_{n-1}, \gamma_n) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan, $\{N_{\check{A}}(\gamma_n, \gamma_{n+1})\}$ artan bir dizi olduğu elde edilir. Ayrıca bu dizi üstten sınırlı olduğundan yakınsaktır.

$\mu \in (0, 1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_{\check{A}}(\gamma_n, \gamma_{n+1}) = \mu$$

olsun. Açıktır ki, $n \in \mathbb{N}$ için,

$$N_{\check{A}}(\gamma_n, \gamma_{n+1}) < \mu.$$

$\mu < 1$ olsun.

(3.1) de $\varkappa = \gamma_n$, $\gamma = \gamma_{n+1}$, $t = 0$ yazılırsa ve (4.1) kullanılırsa,

$$\check{A}^0(\mathfrak{S}\gamma_n, \mathfrak{S}\gamma_{n+1}, 0) = N_{\check{A}}(\mathfrak{S}\gamma_n, \mathfrak{S}\gamma_{n+1}) \geq \psi(N_{\check{A}}(\gamma_n, \gamma_{n+1})) > N_{\check{A}}(\gamma_n, \gamma_{n+1})$$

bulunur. $n \rightarrow \infty$ için,

$$\mu \geq \psi(\mu) > \mu$$

olup $\mu = 0$ çelişkisi elde edilir. Buradan;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_{\check{A}}(\gamma_n, \gamma_{n+1}) = 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Şimdi $\{\gamma_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olmadığı kabul edilsin.

$\varepsilon \in (0, 1)$ ve $\{\gamma_{m_\lambda}\}, \{\gamma_{n_\lambda}\}$ iki dizi, $\forall k \in \mathbb{N}$ ve $m_\lambda > n_\lambda \geq k$ olsun.

$$N_{\check{A}}(\gamma_{m_\lambda}, \gamma_{n_\lambda}) \leq 1 - \varepsilon$$

$$N_{\check{A}}(\gamma_{m_{\lambda-1}}, \gamma_{n_{\lambda-1}}) > 1 - \varepsilon \text{ ve } N_{\check{A}}(\gamma_{m_{\lambda-1}}, \gamma_{n_\lambda}) > 1 - \varepsilon$$

sabit metrik uzay (S_{iv}) özelliğinden,

$$\begin{aligned}
1 - \varepsilon &\geq N_{\check{A}}(\gamma_{m_\lambda}, \gamma_{n_\lambda}) \geq N_{\check{A}}(\gamma_{m_\lambda}, \gamma_{m_{\lambda-1}}) * N_{\check{A}}(\gamma_{m_{\lambda-1}}, \gamma_{n_\lambda}) \\
&> N_{\check{A}}(\gamma_{m_{\lambda-1}}, \gamma_{m_\lambda}) * (1 - \varepsilon)
\end{aligned}$$

buradan,

$$1 - \varepsilon \geq N_{\check{A}}(\gamma_{m_\lambda}, \gamma_{n_\lambda}) \geq N_{\check{A}}(\gamma_{m_{\lambda-1}}, \gamma_{m_\lambda}) * (1 - \varepsilon)$$

dır. $\lambda \rightarrow \infty$ için,

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda \rightarrow \infty} (1 - \varepsilon) &\geq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} N_{\check{A}}(\gamma_{m_\lambda}, \gamma_{n_\lambda}) \geq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} N_{\check{A}}(\gamma_{m_{\lambda-1}}, \gamma_{m_\lambda}) * \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (1 - \varepsilon) \\
1 - \varepsilon &\geq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} N_{\check{A}}(\gamma_{m_\lambda}, \gamma_{n_\lambda}) \geq 1 * (1 - \varepsilon) \\
1 - \varepsilon &\geq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} N_{\check{A}}(\gamma_{m_\lambda}, \gamma_{n_\lambda}) \geq 1 - \varepsilon
\end{aligned}$$

buradan,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} N_{\check{A}}(\gamma_{m_\lambda}, \gamma_{n_\lambda}) = 1 - \varepsilon$$

dır. Ayrıca, (3.1) de $\varkappa = \gamma_{m_{\lambda-1}}$, $\gamma = \gamma_{n_{\lambda-1}}$, $t = 0$ yazıldığında ve $\forall \zeta \in (0, 1]$ için $\psi(\zeta) > \zeta$ olduğundan;

$$N_{\check{A}}(\mathfrak{S}\gamma_{m_{\lambda-1}}, \mathfrak{S}\gamma_{n_{\lambda-1}}) \geq \psi \left(N_{\check{A}}(\gamma_{m_{\lambda-1}}, \gamma_{n_{\lambda-1}}) \right) > N_{\check{A}}(\gamma_{m_{\lambda-1}}, \gamma_{n_{\lambda-1}})$$

$$1 - \varepsilon \geq N_{\check{A}}(\gamma_{m_\lambda}, \gamma_{n_\lambda}) > N_{\check{A}}(\gamma_{m_{\lambda-1}}, \gamma_{n_{\lambda-1}}) > 1 - \varepsilon$$

çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $\{\gamma_n\}$ bir Cauchy dizisidir. $\acute{Y}$ tam olduğundan,

$$\exists \gamma^* \in \acute{Y} \text{ öyle ki } \lambda \rightarrow \infty \text{ için } \gamma_\lambda \rightarrow \gamma^*$$

dır. $\mathfrak{S}\gamma^* = \gamma^*$ eşitliği ispatlanacak olursa,

$$N_{\check{A}}(\mathfrak{S}\gamma^*, \gamma^*) \geq N_{\check{A}}(\mathfrak{S}\gamma^*, \mathfrak{S}\gamma_\lambda) * N_{\check{A}}(\mathfrak{S}\gamma_\lambda, \gamma^*) \geq \psi(N_{\check{A}}(\gamma^*, \gamma_\lambda)) * N_{\check{A}}(\mathfrak{S}\gamma_\lambda, \gamma^*)$$

$\lambda \rightarrow \infty$ iken, $\psi(1) = 1$ olduğundan;

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} N_{\check{A}}(\mathfrak{S}\gamma^*, \gamma^*) = 1 \implies \mathfrak{S}\gamma^* = \gamma^*$$

dır.

γ^* 'nin tekliğini göstermek için $\mathfrak{S}$ nin birbirinden farklı iki sabit noktası olarak $\varkappa^*$ ve γ^* seçildiğinde;

$$N_{\check{A}}(\mathfrak{S}\varkappa^*, \mathfrak{S}\gamma^*) \geq \psi(N_{\check{A}}(\varkappa^*, \gamma^*)) > N_{\check{A}}(\varkappa^*, \gamma^*)$$

ve buradan da,

$$N_{\check{A}}(\mathfrak{S}\varkappa^*, \mathfrak{S}\gamma^*) > N_{\check{A}}(\varkappa^*, \gamma^*) = N_{\check{A}}(\mathfrak{S}\varkappa^*, \mathfrak{S}\gamma^*)$$

çelişkisi elde edilir.

Böylece γ^* noktasının tekliğı ortaya çıkmıştır.

İspat burada tamamlanmıştır. ■



5. GENİŞLETİLMİŞ BULANIK METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ ÜZERİNE

Bu bölüm, tezin özgün olan kısmıdır. 2019 yılında tanımlanan genişletilmiş bulanık metrik uzaylardan yararlanılarak bazı yeni sabit nokta teoremleri verilmiştir. Bu bölümde, literatürde metrik uzaylarda var olan ve araştırmacılar tarafından bulanık metrik uzaylara uygulanan bazı büzülme dönüşümleri ve sabit nokta teoremleri genişletilmiş bulanık metrik uzaylara uyarlanmıştır.

Bulanık metrik uzaylardaki tanımlar, teoremler, sonuçlar vb. esas alınarak genişletilmiş bulanık metrik uzaylara uyarlanmış ve teoremler ispatlanırken bilinen matematiksel yöntemler kullanılmıştır.

Genişletilmiş bulanık metrik uzaylarda sabit nokta teoremleri oluştururken, ispatlarken; literatürde var olan çeşitli büzülme dönüşümlerini genişletilmiş bulanık metrik uzaylarda tanımlamak isteyen yeni araştırmacılara fikir vermek ve genişletilmiş bulanık metrik uzaylarda yapılan çalışmalara katkı sağlamak amaçlanmıştır.

Samet vd. (2012) tarafından metrik uzaylarda tanımlanan büzülme dönüşümlerini, bulanık metrik uzaylarda tanımlayan Gopal ve Vetro'dan (2014) faydalananak; $\delta - \phi - \check{A}^0 -$ bulanık büzülme, $\delta - \check{A}^0 -$ geçişlilik, $\rho - \psi - \check{A}^0 -$ bulanık büzülme ve $\rho - \check{A}^0 -$ geçişlilik dönüşümlerinin tanımları ilk kez verilmiştir ve bu dönüşümler kullanılarak, bazı sabit nokta teoremleri genişletilmiş bulanık metrik uzaylarda ispatlanmıştır.

Wardowski (2012) tarafından metrik uzaylarda tanımlanan bir büzülme dönüşümünü bulanık metrik uzaylara taşıyan Huang vd. (2021)'den faydalananak; $\mathbb{F} - \check{A}^0 -$ bulanık büzülme dönüşümü ilk kez tanımlanmış ve bazı sabit nokta teoremleri genişletilmiş bulanık metrik uzaylarda ispatlanmıştır.

Bu bölümde; $\forall \varkappa, \xi \in \hat{Y}$ için

$$\wedge_{t>0} \check{A}(\varkappa, \xi, t) > 0$$

şartını sağlayan bulanık metrik uzaylarda, yani; $(\hat{Y}, \check{A}^0, *)$ genişletilmiş bulanık metrik uzaylarda çalışılmıştır.

$\delta - \phi - \check{A}^0 -$ Bulanık Büzülme Dönüşümü

Burada genişletilmiş bulanık metrik uzaylarda $\delta - \phi - \check{A}^0 -$ bulanık büzülme ve $\delta - \check{A}^0 -$ geçişlilik dönüşümlerinin tanımları ilk kez verilmiştir. Yeni tanımlanan bu dönüşümler kullanılarak, literatürde var olan bazı sabit nokta teoremleri genişletilmiş bulanık metrik uzaylarda ispatlanmıştır.

Tanım 5.1 $(\hat{Y}, \check{A}^0, *)$ genişletilmiş bir bulanık metrik uzay olsun.

Eğer $\phi \in \Phi$ ve

$$\delta : \hat{Y} \times \hat{Y} \times [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$$

fonksiyonları $\forall \varkappa, \xi \in \hat{Y}, t \geq 0$ için

$$\delta(\varkappa, \xi, t) \left(\frac{1}{\check{A}^0(\mathfrak{S}\varkappa, \mathfrak{S}\xi, t)} - 1 \right) \leq \phi \left(\frac{1}{\check{A}^0(\varkappa, \xi, t)} - 1 \right) \quad (5.1)$$

özelliğini sağlıyorsa

$$\mathfrak{S} : \hat{Y} \longrightarrow \hat{Y}$$

dönüşümüne $\delta - \phi - \check{A}^0 -$ bulanık büzülme dönüşümü denir.

Özel olarak $t = 0$ için sağlanıyorsa $\mathfrak{S}$ dönüşümüne $\delta - \phi - 0 -$ bulanık büzülme dönüşümü denir.

Tanım 5.2 $(\hat{Y}, \check{A}^0, *)$ genişletilmiş bir bulanık metrik uzay olsun. Eğer

$$\delta : \hat{Y} \times \hat{Y} \times [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$$

fonksiyonu $\forall \varkappa, \xi \in \hat{Y}, t \geq 0$ için

$$\delta(\varkappa, \xi, t) \geq 1 \implies \delta(\mathfrak{S}\varkappa, \mathfrak{S}\xi, t) \geq 1$$

özelliğini sağlıyorsa

$$\mathfrak{S} : \hat{Y} \longrightarrow \hat{Y}$$

dönüşümüne $\delta - \check{A}^0 -$ geçişlidir denir.

Özel olarak $t = 0$ için sağlanıyorsa $\mathfrak{S}$ dönüşümüne $\delta - 0 -$ geçişlidir denir.

Teorem 5.1 $(\hat{Y}, \check{A}^0, *)$ tam genişletilmiş bir bulanık metrik uzay ve

$$\mathfrak{S} : \hat{Y} \longrightarrow \hat{Y}$$

dönüşümü $\delta - \phi - \check{A}^0 -$ bulanık büzülme dönüşümü olsun. Eğer

- (i) $\mathfrak{S}$ dönüşümü $\delta - \check{A}^0 -$ geçişli,
- (ii) $\forall t \geq 0$ için $\exists x_0 \in X$ vardır öyle ki $\delta(x_0, \mathfrak{S}x_0, t) \geq 1$,
- (iii) $\mathfrak{S}$ sürekli

özellikleri sağlanıyorsa $\mathfrak{S}$ dönüşümünün sabit bir noktası vardır.

İspat. İspat iki durumda ele alınmıştır:

I. $t > 0$ ise

Bu durum; aslında genişletilmiş bulanık metrik uzayların, bulanık metrik uzaylara indirgendiği durumdur. Bu durumun ispatı yapılmıştır (Teorem 3.5, [5]).

II. $t = 0$ ise

$\delta(\varkappa_0, \mathfrak{S}\varkappa_0, 0) \geq 1$ olmak üzere $\varkappa_0 \in \hat{Y}$ alınsın.

$\{\varkappa_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\hat{Y}$ de dizi; $\varkappa_{n+1} = \mathfrak{S}\varkappa_n$ olsun.

Bazı $n \in \mathbb{N}$ için $\varkappa_{n+1} = \varkappa_n$ oluyorsa, bu durumda $\varkappa^* \in \hat{Y}$, $\varkappa^* = \varkappa_n$ $\mathfrak{S}$ nin bir sabit noktasıdır.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $\varkappa_n \neq \varkappa_{n+1}$ olsun. (ii) den,

$$\delta(\varkappa_0, \varkappa_1, 0) = \delta(\varkappa_0, \mathfrak{S}\varkappa_0, 0) \geq 1$$

dır. $\mathfrak{S}$ dönüşümü $\delta - \check{A}^0 -$ geçişli olduğundan,

$$\delta(\varkappa_0, \mathfrak{S}\varkappa_0, 0) \geq 1 \implies \delta(\mathfrak{S}\varkappa_0, \mathfrak{S}\varkappa_1, 0) \geq 1$$

dır. Bu şekilde devam edilirse,

$$\delta(\mathfrak{S}\varkappa_0, \mathfrak{S}\varkappa_1, 0) \geq 1 \implies \delta(\mathfrak{S}\varkappa_1, \mathfrak{S}\varkappa_2, 0) \geq 1$$

...

$$\delta(\mathfrak{S}\varkappa_{n-3}, \mathfrak{S}\varkappa_{n-2}, 0) \geq 1 \implies \delta(\mathfrak{S}\varkappa_{n-2}, \mathfrak{S}\varkappa_{n-1}, 0) \geq 1$$

ve böylece,

$$\delta(\mathfrak{S}\varkappa_{n-2}, \mathfrak{S}\varkappa_{n-1}, 0) = \delta(\varkappa_{n-1}, \varkappa_n, 0) \geq 1, \forall n \in \mathbb{N} \quad (5.2)$$

elde edilir. (5.1) de $\varkappa = \varkappa_{n-1}$, $\xi = \varkappa_n$ yazılırsa, (4.1) ve (5.2) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\check{A}^0(\varkappa_n, \varkappa_{n+1}, 0)} - 1 &= \frac{1}{N_{\check{A}}(\mathfrak{S}\varkappa_{n-1}, \mathfrak{S}\varkappa_n)} - 1 \\
&\leq \delta(\varkappa_{n-1}, \varkappa_n, 0) \left(\frac{1}{N_{\check{A}}(\mathfrak{S}\varkappa_{n-1}, \mathfrak{S}\varkappa_n)} - 1 \right) \\
&\leq \phi \left(\frac{1}{N_{\check{A}}(\varkappa_{n-1}, \varkappa_n)} - 1 \right) \\
&= \phi \left(\frac{1}{N_{\check{A}}(\mathfrak{S}\varkappa_{n-2}, \mathfrak{S}\varkappa_{n-1})} - 1 \right)
\end{aligned}$$

ve buradan,

$$\frac{1}{N_{\check{A}}(\mathfrak{S}\varkappa_{n-1}, \mathfrak{S}\varkappa_n)} - 1 \leq \phi^n \left(\frac{1}{N_{\check{A}}(\varkappa_0, \varkappa_1)} - 1 \right)$$

elde edilir. $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N_{\check{A}}(\mathfrak{S}\varkappa_{n-1}, \mathfrak{S}\varkappa_n)} - 1 \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \phi^n \left(\frac{1}{N_{\check{A}}(\varkappa_0, \varkappa_1)} - 1 \right)$$

dir. $n \rightarrow \infty$ için $\phi^n(\eta) \rightarrow 0$ olduğundan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N_{\check{A}}(\varkappa_n, \varkappa_{n+1})} - 1 \right) = 0$$

elde edilir ve böylece,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_{\check{A}}(\varkappa_n, \varkappa_{n+1}) = 1$$

dir. (4.1) de $n < m$ için $\varkappa = \varkappa_n$, $\xi = \varkappa_m$, $t = 0$ yazılırsa,

$$\check{A}^0(\varkappa_n, \varkappa_m, 0) = \wedge_{t>0} \check{A}(\varkappa_n, \varkappa_m, t) = N_{\check{A}}(\varkappa_n, \varkappa_m)$$

dir. (S_{iv}) özelliği kullanılırsa ve $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa,

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} N_{\check{A}}(\varkappa_n, \varkappa_m) &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} N_{\check{A}}(\varkappa_n, \varkappa_{n+1}) * \lim_{n \rightarrow \infty} N_{\check{A}}(\varkappa_{n+1}, \varkappa_{n+2}) * \dots * \lim_{n \rightarrow \infty} N_{\check{A}}(\varkappa_{m-1}, \varkappa_m) \\
&\geq 1 * 1 * \dots * 1 \\
&\geq 1
\end{aligned}$$

ve buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_{\check{A}}(\varkappa_n, \varkappa_m) = 1$$

elde edilir.

İspatın en önemli basamağı; $\{\varkappa_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olması sağlanmıştır.
 $\hat{Y}$ tam uzay olduğundan,

$$\exists \varkappa^* \in \hat{Y} : n \rightarrow \infty \text{ için } \varkappa_n \rightarrow \varkappa^* \text{ dir.}$$

$\mathfrak{S}$ dönüşümü sürekli olduğu için, $n \rightarrow \infty$ için $\mathfrak{S}\varkappa_n \rightarrow \mathfrak{S}\varkappa^*$ dir.
(4.1) den, $\forall \varkappa_n \in \hat{Y}$ için,

$$\check{A}^0(\mathfrak{S}\varkappa_n, \mathfrak{S}\varkappa^*, 0) = \wedge_{t>0} \check{A}(\mathfrak{S}\varkappa_n, \mathfrak{S}\varkappa^*, t) = N_{\check{A}}(\mathfrak{S}\varkappa_n, \mathfrak{S}\varkappa^*)$$

ve $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_{\check{A}}(\mathfrak{S}\varkappa_n, \mathfrak{S}\varkappa^*) = 1$$

dir. Limitin tekliğinden, $\varkappa^* = \mathfrak{S}\varkappa^*$ elde edilir yani; $\varkappa^*, \mathfrak{S}$ dönüşümünün sabit noktasıdır.

İspat burada tamamlanmıştır. ■

Teorem 5.2 $(\hat{Y}, \check{A}^0, *)$ tam genişletilmiş bir bulanık metrik uzay, $\check{A}$ üçgensel ve

$$\mathfrak{S} : \hat{Y} \longrightarrow \hat{Y}$$

dönüşümü $\delta - \phi - \check{A}^0$ -bulanık büzülme dönüşümü olsun. Eğer

- (i) $\mathfrak{S}$ dönüşümü $\delta - \check{A}^0$ -geçişli,
- (ii) $\forall t \geq 0$ için $\varkappa_0 \in \hat{Y}$ vardır öyle ki $\delta(\varkappa_0, \mathfrak{S}\varkappa_0, t) \geq 1$,
- (iii) Eğer $\hat{Y}$ de tanımlı $\{\varkappa_n\}$ dizisi $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\delta(\varkappa_n, \varkappa_{n+1}, t) \geq 1$ ve $n \rightarrow \infty$ iken $\varkappa_n \rightarrow \varkappa$ oluyorsa $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\delta(\varkappa_n, \varkappa, t) \geq 1$ özellikleri sağlanıyorsa $\mathfrak{S}$ dönüşümünün sabit bir noktası vardır.

İspat. İspat iki durumda ele alınmıştır:

I. $t > 0$ ise

Bu durum; aslında genişletilmiş bulanık metrik uzayların, bulanık metrik uzaylara indirgendiği durumdur. Bu durumun ispatı yapılmıştır (Teorem 3.6, [5]).

II. $t = 0$ ise

Teorem 5.1 in ispatında, $(\hat{Y}, \check{A}^0, *)$ tam genişletilmiş bulanık metrik uzayında $\{\varkappa_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu gösterilmişti. Bu durumda $n \rightarrow \infty$ için $\varkappa_n \rightarrow \varkappa^{**}$ olacak şekilde $\varkappa^{**} \in \hat{Y}$ vardır.

(iii) numaralı hipotezden,

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ için } \delta(\varkappa_n, \varkappa^{**}, 0) \geq 1 \quad (5.3)$$

elde edilir. (4.1) de $\varkappa = \varkappa^{**}$, $\xi = \mathfrak{S}\varkappa^{**}$, $t = 0$ yazılırsa, Tanım 3.6, (5.1) ve (5.3) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\wedge_{t>0}\check{A}(\varkappa^{**}, \mathfrak{S}\varkappa^{**}, t)} - 1 &= \frac{1}{\check{A}^0(\varkappa^{**}, \mathfrak{S}\varkappa^{**}, 0)} - 1 \\ &= \frac{1}{N_{\check{A}}(\varkappa^{**}, \mathfrak{S}\varkappa^{**})} - 1 \\ &\leq \left(\frac{1}{N_{\check{A}}(\mathfrak{S}\varkappa^{**}, \mathfrak{S}\varkappa_n)} - 1 \right) + \left(\frac{1}{N_{\check{A}}(\varkappa_{n+1}, \varkappa^{**})} - 1 \right) \\ &\leq \delta(\varkappa_n, \varkappa^{**}, 0) \left(\frac{1}{N_{\check{A}}(\mathfrak{S}\varkappa_n, \mathfrak{S}\varkappa^{**})} - 1 \right) + \left(\frac{1}{N_{\check{A}}(\varkappa_{n+1}, \varkappa^{**})} - 1 \right) \\ &\leq \phi \left(\frac{1}{N_{\check{A}}(\varkappa_n, \varkappa^{**})} - 1 \right) + \left(\frac{1}{N_{\check{A}}(\varkappa_{n+1}, \varkappa^{**})} - 1 \right) \end{aligned}$$

bulunur. $n \rightarrow \infty$ için limit alınır ve ϕ fonksiyonu $\xi = 0$ da sürekli olduğundan,

$$\left(\frac{1}{N_{\check{A}}(\mathfrak{S}\varkappa^{**}, \varkappa^{**})} - 1 \right) = 0.$$

Yani $\mathfrak{S}\varkappa^{**} = \varkappa^{**}$ dir. Bu ise $\varkappa^{**}$ in $\mathfrak{S}$ nin bir sabit noktası olduğunu ispatlar.

İspat burada tamamlanmıştır. ■

Örnek 5.1 $\hat{Y} = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{0, 4\}$, $*$ çarpım t -norm olsun. $\forall \varkappa, \xi \in \hat{Y}$ ve $t \geq 0$ için

$$\check{A}^0(\varkappa, \xi, t) = \frac{3t^2 + 1}{3t^2 + 1 + |\varkappa - \xi|}$$

$\hat{Y}$ üzerinde tam genişletilmiş bir bulanık metriktir.

$$\mathfrak{S} : \hat{Y} \longrightarrow \hat{Y}$$

dönüşümü

$$\mathfrak{S}\varkappa = \begin{cases} \frac{\varkappa^2}{3}, & \varkappa \in \hat{Y} - \{4\} \\ 4, & \varkappa = 4 \end{cases}$$

şeklinde ve

$$\delta : \hat{Y} \times \hat{Y} \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$$

fonksiyonu

$$\delta(\varkappa, \xi, t) = \begin{cases} 1, & \varkappa, \xi \in \hat{Y} - \{4\} \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $\forall r \geq 0$ için

$$\phi(r) = \frac{2}{3}r$$

olsun.

$\forall t \geq 0$ için $\delta(\varkappa, \xi, t) = 0$ olduğunda $\delta - \phi - \check{A}^0$ büzülme şartı açıkça sağlanır.

$\forall t \geq 0$ için $\delta(\varkappa, \xi, t) = 1$ olduğunda $\varkappa$ ve ξ elemanları $\hat{Y} - \{4\}$ kümesinden seçildiğinde, toplamaları ≤ 2 olacağından,

$$\begin{aligned} \delta(\varkappa, \xi, t) \left(\frac{1}{\check{A}^0(\mathfrak{S}\varkappa, \mathfrak{S}\xi, t)} - 1 \right) &= 1. \left(\frac{3t^2 + 1 + \frac{|\varkappa^2 - \xi^2|}{3}}{3t^2 + 1} - 1 \right) \\ &= \frac{|\varkappa^2 - \xi^2|}{3(3t^2 + 1)} = \frac{|\varkappa - \xi| |\varkappa + \xi|}{3(3t^2 + 1)} \\ &\leq \frac{2 |\varkappa - \xi|}{3(3t^2 + 1)} \\ &= \phi \left(\frac{1}{\check{A}^0(\varkappa, \xi, t)} - 1 \right) \end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla, $\mathfrak{S}$ dönüşümü $\delta - \phi - \check{A}^0$ -bulanık büzülme dönüşümüdür. $\forall t \geq 0$ için $\varkappa, \xi \in \hat{Y}$ öyle ki $\delta(\varkappa, \xi, t) \geq 1$ olsun. Bu durumda $\varkappa, \xi \in \hat{Y} - \{4\}$ ve $\mathfrak{S}$ ile δ nın tanımından; $\mathfrak{S}\varkappa = \frac{\varkappa^2}{3} \in \hat{Y} - \{4\}$, $\mathfrak{S}\xi = \frac{\xi^2}{3} \in \hat{Y} - \{4\}$ ve $t \geq 0$ için $\delta(\frac{\varkappa^2}{3}, \frac{\xi^2}{3}, t) = 1$ dir. Dolayısıyla $\mathfrak{S}$ dönüşümü $\delta - \check{A}^0$ - geçişlidir.

Üstelik $\forall t \geq 0$ için $\delta(x_0, \mathfrak{S}x_0, t) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in \hat{Y}$ vardır. Gerçekten $\varkappa_0 = 1$ olduğunda $\delta(x_0, \mathfrak{S}x_0, t) = 1$ elde edilir.

Şimdi $\{\varkappa_n\} \in \hat{Y}$ de bir dizi öyle ki $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\delta(x_n, x_{n+1}, t) \geq 1$ ve $n \rightarrow \infty$ iken $\varkappa_n \rightarrow \varkappa \in \hat{Y}$ olsun. δ nın tanımından $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\varkappa_n \in \hat{Y} - \{4\}$ ve buradan $\varkappa \in \hat{Y} - \{4\}$. Dolayısıyla $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\delta(\varkappa_n, \varkappa, t) = 1$ dir.

Böylece Teoremin koşulları sağlanmaktadır ve $\{0, 4\}$, $\mathfrak{S}$ nin sabit noktalarının kümesidir.

$\rho - \psi - \check{A}^0$ – Bulanık Büzülme Dönüşümü

Burada genişletilmiş bulanık metrik uzaylarda $\rho - \psi - \check{A}^0$ – bulanık büzülme ve $\rho - \check{A}^0$ – geçişlilik dönüşümlerinin tanımları ilk kez verilmiştir. Yeni tanımlanan bu dönüşümler kullanılarak, literatürde var olan bazı sabit nokta teoremleri genişletilmiş bulanık metrik uzaylarda ispatlanmıştır.

Tanım 5.3 $(\hat{Y}, \check{A}^0, *)$ genişletilmiş bir bulanık metrik uzay olsun.

Eğer $\psi \in \Psi$ ve

$$\rho : \hat{Y} \times \hat{Y} \times [0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$$

fonksiyonları $\forall \varkappa, \xi \in \hat{Y} (\varkappa \neq \xi)$ ve $t \geq 0$ için

$$\check{A}^0(\varkappa, \xi, t) > 0 \implies \rho(\varkappa, \xi, t) \left(\check{A}^0(\mathfrak{S}\varkappa, \mathfrak{S}\xi, t) \right) \geq \psi(\check{A}^0(\varkappa, \xi, t)) \quad (5.4)$$

özellikliğini sağlıyorsa

$$\mathfrak{S} : \hat{Y} \longrightarrow \hat{Y}$$

dönüşümüne $\rho - \psi - \check{A}^0$ – bulanık büzülme dönüşümü denir.

Özel olarak $t = 0$ için sağlanıyorsa $\mathfrak{S}$ dönüşümüne $\rho - \psi - 0$ – bulanık büzülme dönüşümü denir.

Tanım 5.4 $(\hat{Y}, \check{A}^0, *)$ genişletilmiş bir bulanık metrik uzay olsun.

$$\rho : \hat{Y} \times \hat{Y} \times [0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$$

fonksiyonu $\forall \varkappa, \xi \in \hat{Y}$ ve $t \geq 0$ için

$$\rho(\varkappa, \xi, t) \leq 1 \implies \rho(\mathfrak{S}\varkappa, \mathfrak{S}\xi, t) \leq 1$$

özellikliğini sağlıyorsa

$$\mathfrak{S} : \hat{Y} \longrightarrow \hat{Y}$$

dönüşümüne $\rho - \check{A}^0$ –geçişlidir denir.

Özel olarak $t = 0$ için sağlanıyorsa $\mathfrak{S}$ dönüşümüne $\rho - 0$ –geçişlidir denir.

Teorem 5.3 $(\hat{Y}, \check{A}^0, *)$ tam genişletilmiş Non-Archimedean bulanık metrik uzay ve

$$\mathfrak{S} : \hat{Y} \longrightarrow \hat{Y}$$

dönüşümü $\rho - \psi - \check{A}^0$ - bulanık büzülme dönüşümü olsun. Eğer

- (i) $\mathfrak{S}$ dönüşümü $\rho - \check{A}^0$ - geçişli,
- (ii) $\forall t \geq 0$ için $\varkappa_0 \in \hat{Y}$ vardır öyle ki $\rho(\varkappa_0, \mathfrak{S}\varkappa_0, t) \leq 1$,
- (iii) $\hat{Y}$ deki $\{\varkappa_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi, $\forall t \geq 0$ için $\rho(\varkappa_n, \varkappa_{n+1}, t) \leq 1$ ve $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall t \geq 0$ ve $m, n \in \mathbb{N}$ için $(m > n \geq k_0)$ $\rho(\varkappa_{m+1}, \varkappa_{n+1}, t) \leq 1$,
- (iv) $\hat{Y}$ deki $\{\varkappa_n\}$ dizisi $\forall t \geq 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $\rho(\varkappa_n, \varkappa_{n+1}, t) \leq 1$ ve $n \rightarrow \infty$ iken $\varkappa_n \rightarrow \varkappa$ oluyorsa bu durumda $\rho(\varkappa_n, x, t) \leq 1$,
- (v) $\forall \varkappa, \xi \in \hat{Y}$ ve $\forall t \geq 0$ için $\exists \varsigma \in \hat{Y}$ vardır öyle ki $\rho(\varkappa, \varsigma, t) \leq 1$ ve $\rho(\xi, \varsigma, t) \leq 1$ özellikleri sağlanıyorsa $\mathfrak{S}$ dönüşümü tek bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. İspat iki durumda incelenecektir;

I. $t > 0$ ise

Bu durum; aslında genişletilmiş bulanık metrik uzayların, bulanık metrik uzaylara indirgendiği durumdur. Bu durumun ispatı yapılmış (Teorem 4.4, [5]) ve $\mathfrak{S}\varkappa^* = \varkappa^*$ elde edilmiştir.

$\mathfrak{S}$ nin, $\varkappa^*$ ve $\varkappa^{**}$ gibi iki farklı sabit noktaya sahip olduğu kabul edildiğinde, $\rho(\varkappa^*, \varkappa^{**}, t) \leq 1$ ise;

$$\check{A}(\varkappa^*, \varkappa^{**}, t) \geq \rho(\varkappa^*, \varkappa^{**}, t) \check{A}(\mathfrak{S}\varkappa^*, \mathfrak{S}\varkappa^{**}, t)$$

dır. $\mathfrak{S}$ dönüşümü $\rho - \psi - \check{A}^0$ - bulanık büzülme dönüşümü olduğundan;

$$\check{A}^0(\varkappa^*, \varkappa^{**}, t) \geq \rho(\varkappa^*, \varkappa^{**}, t) \check{A}^0(\mathfrak{S}\varkappa^*, \mathfrak{S}\varkappa^{**}, t) \geq \psi(\check{A}^0(\varkappa^*, \varkappa^{**}, t))$$

dır. Ayrıca $\psi(\eta) > \eta$ olduğundan;

$$\check{A}^0(\varkappa^*, \varkappa^{**}, t) \geq \rho(\varkappa^*, \varkappa^{**}, t) \check{A}^0(\mathfrak{S}\varkappa^*, \mathfrak{S}\varkappa^{**}, t) \geq \psi(\check{A}^0(\varkappa^*, \varkappa^{**}, t)) > \check{A}^0(\varkappa^*, \varkappa^{**}, t)$$

ve buradan çelişki elde edilir.

Yani $\varkappa^*$ ve $\varkappa^{**}$ iki farklı sabit nokta değildir. $\varkappa^* = \varkappa^{**}$ dır.

Şimdi $\rho(\varkappa^*, \varkappa^{**}, t) > 1$ olsun.

(v) den;

$$\varsigma \in \hat{Y} \text{ vardır öyle ki } \rho(\mathcal{X}^*, \varsigma, t) \leq 1 \text{ ve } \rho(\mathcal{X}^{**}, \varsigma, t) \leq 1$$

dır. (i) den,

$$\rho(\mathcal{X}^*, \varsigma, t) \leq 1 \implies \rho(\mathfrak{S}\mathcal{X}^*, \mathfrak{S}\varsigma, t) = \rho(\mathcal{X}^*, \mathfrak{S}\varsigma, t) \leq 1$$

$$\rho(\mathcal{X}^*, \mathfrak{S}\varsigma, t) \leq 1 \implies \rho(\mathfrak{S}\mathcal{X}^*, \mathfrak{S}^2\varsigma, t) = \rho(\mathcal{X}^*, \mathfrak{S}^2\varsigma, t) \leq 1$$

...

$$\rho(\mathcal{X}^*, \mathfrak{S}^{n-1}\varsigma, t) \leq 1 \implies \rho(\mathfrak{S}\mathcal{X}^*, \mathfrak{S}^n\varsigma, t) = \rho(\mathcal{X}^*, \mathfrak{S}^n\varsigma, t) \leq 1$$

elde edilir. $\mathfrak{S}$ dönüşümü $\rho - \psi - \check{A}^0$ - bulanık büzülme dönüşümü olduğundan;

$$\begin{aligned} \check{A}^0(\mathcal{X}^*, \mathfrak{S}^n\varsigma, t) &= \check{A}(\mathcal{X}^*, \mathfrak{S}^n\varsigma, t) = \check{A}(\mathfrak{S}\mathcal{X}^*, \mathfrak{S}(\mathfrak{S}^{n-1}\varsigma), t) \\ &\geq \rho(\mathcal{X}^*, \mathfrak{S}^{n-1}\varsigma, t) \check{A}(\mathfrak{S}\mathcal{X}^*, \mathfrak{S}(\mathfrak{S}^{n-1}\varsigma), t) \\ &\geq \psi(\check{A}(\mathcal{X}^*, \mathfrak{S}^{n-1}\varsigma, t)) \\ &= \psi(\check{A}(\mathfrak{S}\mathcal{X}^*, \mathfrak{S}(\mathfrak{S}^{n-2}\varsigma), t)) \end{aligned}$$

indüksiyon yöntemiyle, $\forall n \in \mathbb{N}$ için;

$$\check{A}^0(\mathcal{X}^*, \mathfrak{S}^n\varsigma, t) \geq \psi^n(\check{A}^0(\mathcal{X}^*, \varsigma, t))$$

dır. $n \rightarrow \infty$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \check{A}^0(\mathcal{X}^*, \mathfrak{S}^n\varsigma, t) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \psi^n(\check{A}^0(\mathcal{X}^*, \varsigma, t))$$

$\psi^n(\varsigma) \rightarrow 1$ olduğundan;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \check{A}^0(\mathcal{X}^*, \mathfrak{S}^n\varsigma, t) = 1 \tag{5.5}$$

dır. Benzer yöntemle;

$$\rho(\mathcal{X}^{**}, \varsigma, t) \leq 1 \implies \rho(\mathfrak{S}\mathcal{X}^{**}, \mathfrak{S}\varsigma, t) = \rho(\mathcal{X}^{**}, \mathfrak{S}\varsigma, t) \leq 1$$

...

$$\rho(\varkappa^{**}, \mathfrak{S}^{n-2}\varsigma, t) \leq 1 \implies \rho(\mathfrak{S}\varkappa^{**}, \mathfrak{S}^{n-1}\varsigma, t) = \rho(\varkappa^{**}, \mathfrak{S}^{n-1}\varsigma, t) \leq 1$$

olup, elde edilen eşitsizlikten ve $\mathfrak{S}$ dönüşümü $\rho - \psi - \check{A}^0$ - bulanık büzülme dönüşümü olduğundan;

$$\begin{aligned} \check{A}^0(\varkappa^{**}, \mathfrak{S}^n\varsigma, t) &= \check{A}(\varkappa^{**}, \mathfrak{S}^n\varsigma, t) = \check{A}(\mathfrak{S}\varkappa^{**}, \mathfrak{S}(\mathfrak{S}^{n-1}\varsigma), t) \\ &\geq \rho(\varkappa^{**}, \mathfrak{S}^{n-1}\varsigma, t) \check{A}(\mathfrak{S}\varkappa^{**}, \mathfrak{S}(\mathfrak{S}^{n-1}\varsigma), t) \\ &\geq \psi(\check{A}(\varkappa^{**}, \mathfrak{S}^{n-1}\varsigma, t)) \end{aligned}$$

indüksiyon yöntemiyle, $\forall n \in \mathbb{N}$ için ;

$$\check{A}^0(\varkappa^{**}, \mathfrak{S}^n\varsigma, t) \geq \psi^n(\check{A}^0(\varkappa^{**}, \varsigma, t)).$$

$n \rightarrow \infty$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \check{A}^0(\varkappa^{**}, \mathfrak{S}^n\varsigma, t) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \psi^n(\check{A}^0(\varkappa^{**}, \varsigma, t))$$

$\psi^n(\xi) \rightarrow 1$ olduğundan;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \check{A}^0(\varkappa^{**}, \mathfrak{S}^n\varsigma, t) = 1 \quad (5.6)$$

elde edilir. (5.5), (5.6) ve limitin tekliğinden, $\varkappa^* = \varkappa^{**}$ sonucuna ulaşılır.

II. $t = 0$ ise

$\varkappa_0 \in \hat{Y}$ öyle ki $\rho(\varkappa_0, \mathfrak{S}\varkappa_0, 0) \leq 1$ olsun.

$\{\varkappa_n\}$, $\hat{Y}$ de bir dizi olmak üzere $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\varkappa_{n+1} = \mathfrak{S}\varkappa_n$ olsun.

Bazı $n \in \mathbb{N}$ için $\varkappa_{n+1} = \varkappa_n$ oluyorsa, o zaman $\varkappa^* \in \hat{Y}$, $\varkappa^* = \varkappa_n$ noktasının $\mathfrak{S}$ dönüşümünün bir sabit noktası olduğu açıktır.

Şimdi, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\varkappa_n \neq \varkappa_{n+1}$ olsun. (ii) den;

$$\rho(\varkappa_0, \varkappa_1, 0) = \rho(\varkappa_0, \mathfrak{S}\varkappa_0, 0) \leq 1$$

ve (i) den,

$$\rho(\varkappa_0, \mathfrak{S}\varkappa_0, 0) \leq 1 \implies \rho(\mathfrak{S}\varkappa_0, \mathfrak{S}\varkappa_1, 0) \leq 1$$

indüksiyon yöntemiyle;

$$\rho(\mathfrak{S}\varkappa_0, \mathfrak{S}\varkappa_1, 0) \leq 1 \implies \rho(\mathfrak{S}\varkappa_1, \mathfrak{S}\varkappa_2, 0) \leq 1$$

...

$$\rho(\mathfrak{S}\varkappa_{n-3}, \mathfrak{S}\varkappa_{n-2}, 0) \leq 1 \implies \rho(\mathfrak{S}\varkappa_{n-2}, \mathfrak{S}\varkappa_{n-1}, 0) \leq 1$$

ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$\rho(\mathfrak{S}\varkappa_{n-2}, \mathfrak{S}\varkappa_{n-1}, 0) \leq 1 \implies \rho(\mathfrak{S}\varkappa_{n-1}, \mathfrak{S}\varkappa_n, 0) \leq 1 \quad (5.7)$$

$\rho - \psi - \check{A}^0$ -bulanık büzülme dönüşümü tanımdan, (5.4) te $\varkappa = \varkappa_{n-1}$, $\xi = \varkappa_n$, $t = 0$ yazılırsa ve (5.7) kullanılırsa,

$$\check{A}^0(\mathfrak{S}\varkappa_{n-1}, \mathfrak{S}\varkappa_n, 0) \geq \rho(\varkappa_{n-1}, \varkappa_n, 0) \check{A}^0(\mathfrak{S}\varkappa_{n-1}, \mathfrak{S}\varkappa_n, t) \geq \psi(\check{A}^0(\varkappa_{n-1}, \varkappa_n, t))$$

elde edilir. (4.1) ve (5.4) kullanılırsa;

$$\begin{aligned} N_{\check{A}}(\mathfrak{S}\varkappa_{n-1}, \mathfrak{S}\varkappa_n) &\geq \rho(\varkappa_{n-1}, \varkappa_n, 0) N_{\check{A}}(\mathfrak{S}\varkappa_{n-1}, \mathfrak{S}\varkappa_n) \\ &\geq \psi(N_{\check{A}}(\varkappa_{n-1}, \varkappa_n)) \end{aligned}$$

buradan

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ için } N_{\check{A}}(\mathfrak{S}\varkappa_{n-1}, \mathfrak{S}\varkappa_n) \geq \psi^n(N_{\check{A}}(\varkappa_0, \varkappa_1))$$

elde edilir. $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_{\check{A}}(\mathfrak{S}\varkappa_{n-1}, \mathfrak{S}\varkappa_n) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \psi^n(N_{\check{A}}(\varkappa_0, \varkappa_1))$$

bulunur. $\psi^n(\xi) \rightarrow 1$ olduğundan;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_{\check{A}}(\varkappa_n, \varkappa_{n+1}) = 1$$

dır. Şimdi $\{\varkappa_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu gösterilecektir.

$\{\varkappa_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olmadığı kabul edilirse;

$\varepsilon \in (0, 1)$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ öyle ki $p_n > q_n \geq n_0$ olacak şekilde $\{\varkappa_{p_n}\}$ ve $\{\varkappa_{q_n}\}$ dizileri $\{\varkappa_n\}$ dizisinin iki alt dizisi olsun.

(4.1) den,

$$\check{A}^0(\varkappa_{p_n}, \varkappa_{q_n}, 0) = \wedge_{t>0} \check{A}(\varkappa_{p_n}, \varkappa_{q_n}, t) = N_{\check{A}}(\varkappa_{p_n}, \varkappa_{q_n}) \leq 1 - \varepsilon$$

$$\check{A}^0(\varkappa_{p_{n-1}}, \varkappa_{q_n}, 0) = \wedge_{t>0} \check{A}(\varkappa_{p_{n-1}}, \varkappa_{q_n}, t) = N_{\check{A}}(\varkappa_{p_{n-1}}, \varkappa_{q_n}) > 1 - \varepsilon$$

(iii) numaralı özellikten, $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $n \geq n_0$ olmak üzere $p_n, q_n \in \mathbb{N}$ dizileri vardır ve ayrıca $\rho(\varkappa_{p_n}, \varkappa_{q_n}, 0) \leq 1$

ve

$$1 - \varepsilon \geq N_{\check{A}}(\mathcal{X}_{p_n}, \mathcal{X}_{q_n}) \geq N_{\check{A}}(\mathcal{X}_{p_{n-1}}, \mathcal{X}_{q_n}) * N_{\check{A}}(\mathcal{X}_{p_{n-1}}, \mathcal{X}_{p_n})$$

olup $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \varepsilon) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} N_{\check{A}}(\mathcal{X}_{p_n}, \mathcal{X}_{q_n}) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} N_{\check{A}}(\mathcal{X}_{p_{n-1}}, \mathcal{X}_{q_n}) * \lim_{n \rightarrow \infty} N_{\check{A}}(\mathcal{X}_{p_{n-1}}, \mathcal{X}_{p_n})$$

dır. $\lim_{n \rightarrow \infty} N_{\check{A}}(\mathcal{X}_{p_{n-1}}, \mathcal{X}_{p_n}) = 1$ olduğundan,

$$(1 - \varepsilon) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} N_{\check{A}}(\mathcal{X}_{p_n}, \mathcal{X}_{q_n}) \geq (1 - \varepsilon)$$

elde edilir ve buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_{\check{A}}(\mathcal{X}_{p_n}, \mathcal{X}_{q_n}) = (1 - \varepsilon)$$

dır. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} (1 - \varepsilon) &\geq N_{\check{A}}(\mathcal{X}_{p_n}, \mathcal{X}_{q_n}) \\ &\geq N_{\check{A}}(\mathcal{X}_{p_n}, \mathcal{X}_{p_{n+1}}) * N_{\check{A}}(\mathcal{X}_{p_{n+1}}, \mathcal{X}_{q_{n+1}}) * N_{\check{A}}(\mathcal{X}_{q_{n+1}}, \mathcal{X}_{q_n}) \\ &\geq N_{\check{A}}(\mathcal{X}_{p_n}, \mathcal{X}_{p_{n+1}}) * \rho(\mathfrak{S}\mathcal{X}_{p_n}, \mathfrak{S}\mathcal{X}_{q_n}, 0) N_{\check{A}}(\mathfrak{S}\mathcal{X}_{p_n}, \mathfrak{S}\mathcal{X}_{q_n}) * N_{\check{A}}(\mathcal{X}_{q_{n+1}}, \mathcal{X}_{q_n}) \\ &\geq N_{\check{A}}(\mathcal{X}_{p_n}, \mathcal{X}_{p_{n+1}}) * \psi(N_{\check{A}}(\mathcal{X}_{p_n}, \mathcal{X}_{q_n})) * N_{\check{A}}(\mathcal{X}_{q_n}, \mathcal{X}_{q_{n+1}}) \end{aligned}$$

dır. $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \varepsilon) &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} N_{\check{A}}(\mathcal{X}_{p_n}, \mathcal{X}_{p_{n+1}}) * \lim_{n \rightarrow \infty} \psi(N_{\check{A}}(\mathcal{X}_{p_n}, \mathcal{X}_{q_n})) * \lim_{n \rightarrow \infty} N_{\check{A}}(\mathcal{X}_{q_n}, \mathcal{X}_{q_{n+1}}) \\ (1 - \varepsilon) &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \psi(N_{\check{A}}(\mathcal{X}_{p_n}, \mathcal{X}_{q_n})) \\ (1 - \varepsilon) &\geq \psi(1 - \varepsilon) \end{aligned}$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir.

Dolayısıyla $\{\mathcal{X}_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir. Üzerinde çalışılan uzay tam genişletilmiş Non-Archimedean bulanık metrik uzay olduğundan her Cauchy dizisi yakınsaktır.

Şimdi $\mathcal{X}^*$ in $\mathfrak{S}$ nin bir sabit noktası olduğu gösterilecektir. $\{\mathcal{X}_n\}$ dizisi yakınsak olduğundan $\mathcal{X}^* \in \hat{Y}$ olmak üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{X}_n = \mathcal{X}^*$ dir. Diğer taraftan (iv) numaralı özellikten;

$$n \in \mathbb{N} \text{ için } \rho(\mathcal{X}_n, \mathcal{X}^*, 0) \leq 1 \quad (5.8)$$

(5.4), (5.8) ve (S_{iv}) özelliğinden;

$$\begin{aligned} N_{\check{A}}(\mathfrak{S}\mathcal{X}^*, \mathcal{X}^*) &\geq N_{\check{A}}(\mathfrak{S}\mathcal{X}^*, \mathcal{X}_{n+1}) * N_{\check{A}}(\mathcal{X}_{n+1}, \mathcal{X}^*) \\ &\geq \rho(\mathcal{X}_n, \mathcal{X}^*, t) N_{\check{A}}(\mathfrak{S}\mathcal{X}_n, \mathfrak{S}\mathcal{X}^*) * N_{\check{A}}(\mathcal{X}_{n+1}, \mathcal{X}^*) \\ &\geq \psi(N_{\check{A}}(\mathcal{X}_n, \mathcal{X}^*)) * N_{\check{A}}(\mathcal{X}_{n+1}, \mathcal{X}^*) \end{aligned}$$

bulunur. $n \rightarrow \infty$ için limit alınır ve $\psi(1) = 1$ olduğu kullanılırsa,

$$\mathfrak{S}\mathcal{K}^* = \mathcal{K}^*$$

elde edilir. $\mathcal{K}^*$ noktası $\mathfrak{S}$ dönüşümünün sabit noktasıdır.

Sabit noktanın tekliğini göstermek için; $\mathfrak{S}$ nin $\mathcal{K}^*$ ve $\mathcal{K}^{**}$ gibi iki farklı sabit noktaya sahip olduğu kabul edilsin.

$$\rho(\mathcal{K}^*, \mathcal{K}^{**}, 0) \leq 1 \text{ ise;}$$

$\mathfrak{S}$ dönüşümü $\rho - \psi - 0$ - bulanık büzülme ve $\psi(\eta) > \eta$ olduğundan;

$$\begin{aligned} \check{A}^0(\mathcal{K}^*, \mathcal{K}^{**}, 0) &\geq \rho(\mathcal{K}^*, \mathcal{K}^{**}, 0) \check{A}^0(\mathfrak{S}\mathcal{K}^*, \mathfrak{S}\mathcal{K}^{**}, 0) \\ &\geq \psi(\check{A}^0(\mathcal{K}^*, \mathcal{K}^{**}, 0)) > \check{A}^0(\mathcal{K}^*, \mathcal{K}^{**}, 0) \end{aligned}$$

çelişkisi elde edilir.

Şimdi $\rho(\mathcal{K}^*, \mathcal{K}^{**}, 0) > 1$ olsun. (v) den;

$$\exists \varsigma \in \hat{Y} \text{ vardır öyle ki } \rho(\mathcal{K}^*, \varsigma, 0) \leq 1 \text{ ve } \rho(\mathcal{K}^{**}, \varsigma, 0) \leq 1$$

dır. (i) den, $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$\rho(\mathcal{K}^*, \mathfrak{S}^n \varsigma, 0) \leq 1 \text{ ve } \rho(\mathcal{K}^{**}, \mathfrak{S}^n \varsigma, 0) \leq 1$$

$$\rho(\mathcal{K}^*, \varsigma, t) \leq 1 \implies \rho(\mathfrak{S}\mathcal{K}^*, \mathfrak{S}^n \varsigma, t) = \rho(\mathcal{K}^*, \mathfrak{S}^n \varsigma, t) \leq 1$$

dır. $\mathfrak{S}$ dönüşümü $\rho - \psi - 0$ - bulanık büzülme olduğundan;

$$\begin{aligned} \check{A}^0(\mathcal{K}^*, \mathfrak{S}^n \varsigma, 0) &= N_{\check{A}}(\mathfrak{S}\mathcal{K}^*, \mathfrak{S}^n \varsigma) \geq \rho(\mathcal{K}^*, \mathfrak{S}^{n-1} \varsigma, 0) N_{\check{A}}(\mathfrak{S}\mathcal{K}^*, \mathfrak{S}^n \varsigma) \\ &\geq \psi(N_{\check{A}}(\mathcal{K}^*, \mathfrak{S}^{n-1} \varsigma)) \end{aligned}$$

İndüksiyonla, $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$N_{\check{A}}(\mathfrak{S}\mathcal{K}^*, \mathfrak{S}^n \varsigma) \geq \psi^n(N_{\check{A}}(\mathcal{K}^*, \varsigma))$$

$n \rightarrow \infty$ için $\mathfrak{S}^n \varsigma \rightarrow \mathcal{K}^*$ elde edilir.

Benzer şekilde $\mathfrak{S}^n \varsigma \rightarrow \mathcal{K}^{**}$ bulunur. Limitin tekliğinden $\mathcal{K}^* = \mathcal{K}^{**}$ dır.

Böylece $\mathcal{K}^*$ noktası $\mathfrak{S}$ dönüşümünün sabit noktasıdır.

İspat burada tamamlanmıştır. ■

Örnek 5.2 $\hat{Y} = (0, \infty)$ ve $*$ çarpım t -norm olsun. $\hat{Y}^2 \times [0, \infty)$ üzerinde tanımlı bulanık küme; $\forall \varkappa, \xi \in \hat{Y}$ ve $t \geq 0$ için

$$\check{A}^0(\varkappa, \xi, t) = \frac{t + \min\{\varkappa, \xi\}}{t + \max\{\varkappa, \xi\}}$$

olsun. $(\hat{Y}, \check{A}^0, *)$ tam genişletilmiş Non-Archimedean bulanık metrik uzaydır.

$\mathfrak{S} : \hat{Y} \longrightarrow \hat{Y}$ dönüşümü

$$\mathfrak{S}\varkappa = \begin{cases} \frac{\sqrt{\varkappa}}{2}, & \varkappa \in (0, 1] \\ 2, & \varkappa \in \hat{Y} - (0, 1] \end{cases}$$

şeklinde ve

$$\rho : \hat{Y} \times \hat{Y} \times [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$$

fonksiyonu $\forall t \geq 0$ için

$$\rho(\varkappa, \xi, t) = \begin{cases} 1, & \varkappa, \xi \in (0, 1] \\ 2, & \varkappa, \xi \in \hat{Y} - (0, 1] \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $\forall r \in (0, 1)$ için

$$\psi(r) = \frac{\sqrt{r}}{2}$$

$\rho(\varkappa, \xi, t) = 1$ olduğunda;

$$\rho(\varkappa, \xi, t) \check{A}^0(\mathfrak{S}\varkappa, \mathfrak{S}\xi, t) = 1. \frac{t + \min\left\{\frac{\sqrt{\varkappa}}{2}, \frac{\sqrt{\xi}}{2}\right\}}{t + \max\left\{\frac{\sqrt{\varkappa}}{2}, \frac{\sqrt{\xi}}{2}\right\}} = \frac{t + \frac{\sqrt{\varkappa}}{2}}{t + \frac{\sqrt{\xi}}{2}} > \frac{1}{2} \sqrt{\frac{t + \varkappa}{t + \xi}} = \psi(\check{A}^0(\varkappa, \xi, t)).$$

$\rho(\varkappa, \xi, t) = 2$ olduğunda;

$$\rho(\varkappa, \xi, t) \check{A}^0(\mathfrak{S}\varkappa, \mathfrak{S}\xi, t) = 2. \frac{t + \frac{\sqrt{\varkappa}}{2}}{t + \frac{\sqrt{\xi}}{2}} > \frac{t + \frac{\sqrt{\varkappa}}{2}}{t + \frac{\sqrt{\xi}}{2}} > \frac{1}{2} \sqrt{\frac{t + \varkappa}{t + \xi}} = \psi(\check{A}^0(\varkappa, \xi, t)).$$

O halde $\mathfrak{S}, \rho - \phi - \check{A}^0$ büzülme dönüşümüdür.

$\forall t \geq 0$ için $\varkappa, \xi \in \hat{Y}$ öyle ki $\rho(\varkappa, \xi, t) \leq 1$ olsun. Bu durumda $\varkappa, \xi \in (0, 1]$ ve $\mathfrak{S}$ ile ρ nın tanımından; $\mathfrak{S}\varkappa = \frac{\sqrt{\varkappa}}{2} \in (0, 1]$, $\mathfrak{S}\xi = \frac{\sqrt{\xi}}{2} \in (0, 1]$ ve $t \geq 0$ için $\rho(\frac{\sqrt{\varkappa}}{2}, \frac{\sqrt{\xi}}{2}, t) = 1$ dir. Dolayısıyla $\mathfrak{S}$ dönüşümü $\rho - \check{A}^0 -$ geçişlidir. Üstelik $\forall t \geq 0$ için $\rho(\varkappa_0, \mathfrak{S}\varkappa_0, t) \leq 1$ olacak şekilde $\varkappa_0 \in \hat{Y}$ vardır. Gerçekten $\varkappa_0 = 1$ olduğunda $\rho(1, \frac{1}{2}, t) = 1$.

Şimdi $\{\varkappa_n\}$, $\hat{Y}$ de bir dizi olsun; öyle ki $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\rho(\varkappa_n, \varkappa_{n+1}, t) \leq 1$, $n \rightarrow \infty$ için $\varkappa_n \rightarrow \varkappa \in \hat{Y}$ ve $\forall m, n \in \mathbb{N}$ için $m > n \geq k_0$ olacak şekilde bir $k_0 = 1$ alınsın.

ρ nın tanımından $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\varkappa_n \in (0, 1]$ dır. Dolayısıyla $\varkappa \in (0, 1]$ dır. Böylece $\rho(\varkappa_n, \varkappa, t) = 1$ ve $\forall m, n \in \mathbb{N}$ için $\rho(\varkappa_{m+1}, \varkappa_{n+1}, t) = 1$ dir. Üstelik $\forall t \geq 0$ ve $\varkappa, \xi \in \hat{Y}$ için $z \in \hat{Y}$ vardır; öyle ki $\rho(\varkappa, z, t) \leq 1$ ve $\rho(\xi, z, t) \leq 1$ sağlanır.

Yukarıdaki teoremin tüm koşulları sağlandığına göre $\mathfrak{S}$ dönüşümü tek bir sabit noktaya sahiptir ve "2" noktası $\mathfrak{S}$ nin sabit noktasıdır.

$\mathbb{F} - \check{A}^0 -$ Bulanık Büzülme Dönüşümü

Burada genişletilmiş bulanık metrik uzaylarda $\mathbb{F} - \check{A}^0 -$ bulanık büzülme dönüşümü ilk kez tanımlanmıştır. Yeni tanımlanan bu dönüşüm kullanılarak, literatürde var olan bazı sabit nokta teoremleri genişletilmiş bulanık metrik uzaylarda ispatlanmıştır.

Tanım 5.5 $(\hat{Y}, \check{A}^0, *)$ genişletilmiş bir bulanık metrik uzay ve $\mathbb{F} \in \mathcal{F}$ olsun. Eğer $\forall \varkappa, \xi \in \hat{Y}$ ($\varkappa \neq \xi$), $t \geq 0$ için

$$\tau \cdot \mathbb{F}(\check{A}^0(\mathfrak{S}\varkappa, \mathfrak{S}\xi, t)) \geq \mathbb{F}(\check{A}^0(\varkappa, \xi, t)) \quad (5.9)$$

şartını sağlayan $\tau \in (0, 1)$ varsa, $\mathfrak{S} : \hat{Y} \longrightarrow \hat{Y}$ dönüşümüne $\mathbb{F} - \check{A}^0 -$ bulanık büzülme dönüşümü denir. Özel olarak $t = 0$ için sağlanıyorsa, $\mathfrak{S}$ dönüşümüne $\mathbb{F} - 0 -$ bulanık büzülme dönüşümü denir.

Teorem 5.4 $(\hat{Y}, \check{A}^0, *)$ tam genişletilmiş bir bulanık metrik uzay ve $\forall \varkappa, \xi \in \hat{Y}$ için $\lim_{t \rightarrow 0^+} \check{A}^0(\varkappa, \xi, t) > 0$ olsun. Eğer $\mathfrak{S} : \hat{Y} \longrightarrow \hat{Y}$ dönüşümü sürekli ve bir $\mathbb{F} - \check{A}^0 -$ bulanık büzülme ise $\hat{Y}$ de tek bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. İspat iki durumda incelenecektir;

I. $t > 0$ ise

Bu durum; aslında genişletilmiş bulanık metrik uzayların, bulanık metrik uzaylara indirgendiği durumdur.

Yani; $\forall \varkappa, \gamma \in \hat{Y}$ için $\check{A}_{\varkappa, \gamma}^0(t) = \check{A}_{\varkappa, \gamma}(t)$ olduğu durum ispatlanmıştır (Teorem.1, [11]).

II. $t = 0$;

$\varkappa_0 \in \hat{Y}$ alınsın ve $\forall n \in \mathbb{N}_0$ için $\varkappa_{n+1} = \mathfrak{S}\varkappa_n$ olsun.

Bazı $n \in \mathbb{N}$ için $\varkappa_{n+1} = \varkappa_n = \mathfrak{S}\varkappa_n$ oluyorsa bu durumda $\varkappa^* = \varkappa_n$ bir sabit noktadır.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $\varkappa_n \neq \varkappa_{n+1}$ olsun. $\mathfrak{S}$ dönüşümü $\mathbb{F} - \check{A}^0$ -bulanık büzülme olduğundan (4.1) kullanılırsa ve (5.9) da $\varkappa = \varkappa_{n-1}$, $\xi = \varkappa_n$, $t = 0$ yazılırsa;

$$\begin{aligned} \mathbb{F} \left(\check{A}^0(\mathfrak{S}\varkappa_{n-1}, \mathfrak{S}\varkappa_n, 0) \right) &= \mathbb{F} (N_{\check{A}}(\mathfrak{S}\varkappa_{n-1}, \mathfrak{S}\varkappa_n)) \\ &> \tau \cdot \mathbb{F} (N_{\check{A}}(\mathfrak{S}\varkappa_{n-1}, \mathfrak{S}\varkappa_n)) \\ &\geq \mathbb{F} (N_{\check{A}}(\varkappa_{n-1}, \varkappa_n)) \end{aligned}$$

buradan

$$\mathbb{F} (N_{\check{A}}(\mathfrak{S}\varkappa_{n-1}, \mathfrak{S}\varkappa_n)) > \mathbb{F} (N_{\check{A}}(\varkappa_{n-1}, \varkappa_n))$$

elde edilir. $\mathbb{F}$ kesin artan olduğundan;

$$N_{\check{A}}(\varkappa_n, \varkappa_{n+1}) > N_{\check{A}}(\varkappa_{n-1}, \varkappa_n)$$

dır. $\{N_{\check{A}}(\varkappa_n, \varkappa_{n+1})\}$ kesin artan üstten sınırlı bir dizi olduğu için yakınsaktır. $\mu \in [0, 1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $n \rightarrow \infty$ için limit alınır;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_{\check{A}}(\varkappa_n, \varkappa_{n+1}) = \mu$$

olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$N_{\check{A}}(\varkappa_n, \varkappa_{n+1}) < \mu$$

dır. $\mathbb{F} \in \mathcal{F}$ ve $n \rightarrow \infty$ için limit alınır;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{F} (N_{\check{A}}(\varkappa_n, \varkappa_{n+1})) = \mathbb{F}(\mu)$$

dır. $\mu < 1$ olsun;

(4.1) kullanılırsa ve (5.9) da, $\varkappa = \varkappa_n$, $\xi = \varkappa_{n+1}$, $t = 0$ yazılırsa;

$$\mathbb{F} (N_{\check{A}}(\mathfrak{S}\varkappa_n, \mathfrak{S}\varkappa_{n+1})) > \tau \cdot \mathbb{F} (N_{\check{A}}(\mathfrak{S}\varkappa_n, \mathfrak{S}\varkappa_{n+1})) \geq \mathbb{F} (N_{\check{A}}(\varkappa_n, \varkappa_{n+1}))$$

dır.

$n \rightarrow \infty$ için,

$$\mathbb{F}(\mu) > \tau \cdot \mathbb{F}(\mu) \geq \mathbb{F}(\mu)$$

$\mathbb{F}(\mu) = 0$ çelişkisi elde edilir. Buradan;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_{\check{A}}(\varkappa_n, \varkappa_{n+1}) = 1, n \in \mathbb{N}$$

dır. Şimdi $\{\varkappa_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olmadığı kabul edilsin. Bu durumda

$\exists \omega \in (0, 1)$, $\forall p \in \mathbb{N}$ ve $m_p > n_p \geq p$ olmak üzere $\{\varkappa_{m_p}\}$, $\{\varkappa_{n_p}\}$ dizileri vardır

$$N_{\check{A}}(\varkappa_{m_p}, \varkappa_{n_p}) \leq (1 - \omega)$$

$$N_{\check{A}}(\varkappa_{m_{p-1}}, \varkappa_{n_{p-1}}) > (1 - \omega) \text{ ve } N_{\check{A}}(\varkappa_{m_{p-1}}, \varkappa_{n_p}) > (1 - \omega)$$

sabit bulanık metriğin (S_{iv}) özelliğinden,

$$\begin{aligned} 1 - \omega &\geq N_{\check{A}}(\varkappa_{m_p}, \varkappa_{n_p}) \geq N_{\check{A}}(\varkappa_{m_p}, \varkappa_{m_{p-1}}) * N_{\check{A}}(\varkappa_{m_{p-1}}, \varkappa_{n_p}) \\ &> N_{\check{A}}(\varkappa_{m_{p-1}}, \varkappa_{m_p}) * (1 - \omega) \end{aligned}$$

$p \rightarrow \infty$ için limit alınırsa,

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} (1 - \omega) &\geq \lim_{p \rightarrow \infty} N_{\check{A}}(\varkappa_{m_p}, \varkappa_{n_p}) > \lim_{p \rightarrow \infty} N_{\check{A}}(\varkappa_{m_{p-1}}, \varkappa_{m_p}) * \lim_{p \rightarrow \infty} (1 - \omega) \\ (1 - \omega) &\geq \lim_{p \rightarrow \infty} N_{\check{A}}(\varkappa_{m_p}, \varkappa_{n_p}) > 1 * (1 - \omega) \end{aligned}$$

olup buradan

$$\lim_{p \rightarrow \infty} N_{\check{A}}(\varkappa_{m_p}, \varkappa_{n_p}) = (1 - \omega)$$

elde edilir. Ayrıca, (4.1) kullanılırsa ve (5.9) da $\varkappa = \varkappa_{m_{p-1}}, \xi = \varkappa_{n_{p-1}}, t = 0$ yazılırsa;

$$\mathbb{F}(N_{\check{A}}(\mathfrak{S}\varkappa_{m_{p-1}}, \mathfrak{S}\varkappa_{n_{p-1}})) > \tau. \mathbb{F}(N_{\check{A}}(\mathfrak{S}\varkappa_{m_{p-1}}, \mathfrak{S}\varkappa_{n_{p-1}})) \geq \mathbb{F}(N_{\check{A}}(\varkappa_{m_{p-1}}, \varkappa_{n_{p-1}}))$$

dır.

$\mathbb{F}$, $[0, 1]$ de kesin artan olduğundan,

$$(1 - \omega) \geq N_{\check{A}}(\varkappa_{m_p}, \varkappa_{n_p}) > N_{\check{A}}(\varkappa_{m_{p-1}}, \varkappa_{n_{p-1}}) > (1 - \omega)$$

çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $\{\varkappa_n\}$ bir Cauchy dizisidir. $\hat{Y}$ tam olduğundan $\{\varkappa_n\}$ dizisi yakınsaktır ve

$$\exists \varkappa^* \in \hat{Y} : n \rightarrow \infty \text{ için } \varkappa_n \rightarrow \varkappa^*$$

dır. $\mathfrak{S}\varkappa^* = \varkappa^*$ olduğunu göstermek için, $\mathfrak{S}$ nin sürekliliğinden;

$$\varkappa^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \varkappa_{n+1} = \mathfrak{S}(\lim_{n \rightarrow \infty} \varkappa_n) = \mathfrak{S}\varkappa^*$$

bulunur.

Şimdi $\varkappa^*$ noktasının tekliğini göstermek üzere; $\varkappa^*$ ve $\varkappa^{**}$ iki farklı sabit nokta olsun. Bu durumda,

$$\mathbb{F}(N_{\hat{Y}}(\mathfrak{S}\varkappa^*, \mathfrak{S}\varkappa^{**})) > \tau \cdot \mathbb{F}(N_{\hat{Y}}(\mathfrak{S}\varkappa^*, \mathfrak{S}\varkappa^{**})) \geq \mathbb{F}(N_{\hat{Y}}(\varkappa^*, \varkappa^{**})) = \mathbb{F}(N_{\hat{Y}}(\mathfrak{S}\varkappa^*, \mathfrak{S}\varkappa^{**}))$$

elde edilir. Bu bir çelişkidir. O halde $\varkappa^*$ tektir.

İspat burada tamamlanmıştır. ■

Örnek 5.3 $\hat{Y} = \mathbb{R}^+$, $\forall \varkappa, \xi \in \hat{Y}$ ($\varkappa \neq \xi$) için $\partial(\varkappa, \xi) = |\varkappa - \xi|$ ve $*$ çarpım t -norm ve $\check{A}^0$ bulanık kümesi $\forall t \geq 0$ için

$$\check{A}^0(\varkappa, \xi, t) = e^{-\frac{\partial(\varkappa, \xi)}{t^2+1}}$$

olsun. $\check{A}^0$, $\hat{Y}$ üzerinde tam genişletilmiş bir bulanık metriktir. $\mathfrak{S} : \hat{Y} \longrightarrow \hat{Y}$ dönüşümü $\forall \gamma \in \hat{Y}$ için

$$\mathfrak{S}(\gamma) = \frac{\gamma}{4}$$

ve $\mathbb{F}$ fonksiyonu $\forall \zeta \in (0, 1)$ için

$$\mathbb{F}(\zeta) = -\frac{1}{\ln \zeta}$$

şeklinde tanımlansın ve $\tau = \frac{1}{2}$ olsun.

$$\check{A}^0(\mathfrak{S}\varkappa, \mathfrak{S}\xi, t) = e^{-\frac{1}{4} \frac{\partial(x, \xi)}{t^2+1}}$$

$$\implies \mathbb{F}(\check{A}^0(\mathfrak{S}\varkappa, \mathfrak{S}\xi, t)) = -\frac{1}{\ln e^{-\frac{1}{4} \frac{\partial(x, \xi)}{t^2+1}}} = \frac{4}{\frac{|x-\xi|}{t^2+1}}$$

olup

$$\tau \cdot \mathbb{F}(\check{A}^0(\mathfrak{S}\varkappa, \mathfrak{S}\xi, t)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\frac{|x-\xi|}{t^2+1}} = \frac{2}{\frac{|x-\xi|}{t^2+1}} > \frac{1}{\frac{|x-\xi|}{t^2+1}} = \mathbb{F}(\check{A}^0(\varkappa, \xi, t))$$

sağlandığından, $\mathfrak{S}$ dönüşümü $\mathbb{F}$ - $\check{A}^0$ -bulanık büzülmedir. Üstelik $\mathfrak{S}(\gamma) = \frac{\gamma}{4}$ dönüşümü süreklidir.

$\forall \varkappa, \xi \in \hat{Y}$ için $\lim_{t \rightarrow 0^+} \check{A}^0(\varkappa, \xi, t) > 0$ dır. Dolayısıyla $\mathfrak{S}$, $\hat{Y}$ de tek bir "0" sabit noktasma sahiptir.

Teorem 5.5 $(\hat{Y}, \check{A}^0, *)$ tam genişletilmiş bir bulanık metrik uzay, $\forall \varkappa, \xi \in \hat{Y}$ için $\lim_{t \rightarrow 0^+} \check{A}^0(\varkappa, \xi, t) > 0$, $\mathfrak{S} : \hat{Y} \longrightarrow \hat{Y}$ dönüşüm ve $\mathbb{F} \in \mathcal{F}$ olsun. Ayrıca $\forall \varkappa, \xi \in \hat{Y}$ ($\varkappa \neq \xi$) ve $t \geq 0$ için

$$\tau \cdot \mathbb{F}(\check{A}^0(\mathfrak{S}\varkappa, \mathfrak{S}\xi, t)) \geq \mathbb{F}\left(\min\left\{\check{A}^0(\varkappa, \xi, t), \check{A}^0(\xi, \mathfrak{S}\xi, t), \check{A}^0(\varkappa, \mathfrak{S}\varkappa, t)\right\}\right) \quad (5.10)$$

olacak şekilde $\tau \in (0, 1)$ var olsun. Bu durumda $\mathfrak{S}$ dönüşümü veya $\mathbb{F}$ sürekli ise $\mathfrak{S}$, $\hat{Y}$ de tek bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. İspat iki durumda incelenecektir;

I. $t > 0$ ise

Bu durum; aslında genişletilmiş bulanık metrik uzayların, bulanık metrik uzaylara indirgendiği durumdur.

Yani; $\forall \kappa, \xi \in \hat{Y}$ için $\check{A}_{\kappa, \xi}^0(t) = \check{A}_{\kappa, \xi}(t)$ olduğu durum ispatlanmıştır (Teorem.3, [11]).

II. $t = 0$;

$\kappa_0 \in \hat{Y}$ ve $\hat{Y}$ de tanımlı $\{\kappa_n\}$ dizisi $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\kappa_{n+1} = \mathfrak{S}\kappa_n$ olsun.

Bazı $n \in \mathbb{N}$ için $\kappa_{n+1} = \kappa_n = \mathfrak{S}\kappa_n$ oluyorsa o zaman $\kappa^* = \kappa_n$ bir sabit noktadır.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $\kappa_n \neq \kappa_{n+1}$ olsun.

$\mathfrak{S}$ dönüşümü $\mathbb{F} - \check{A}^0$ -bulanık büzülme olduğundan, (4.1) kullanılırsa ve (5.10) da $\kappa = \kappa_{n-1}$, $\xi = \kappa_n$, $t = 0$ yazılırsa;

$$\begin{aligned} \mathbb{F} \left(\check{A}^0(\mathfrak{S}\kappa_{n-1}, \mathfrak{S}\kappa_n, 0) \right) &= \mathbb{F} (N_{\check{A}}(\mathfrak{S}\kappa_{n-1}, \mathfrak{S}\kappa_n)) \\ &> \tau \cdot \mathbb{F} (N_{\check{A}}(\mathfrak{S}\kappa_{n-1}, \mathfrak{S}\kappa_n)) \\ &\geq \mathbb{F} (\min \{ N_{\check{A}}(\kappa_{n-1}, \kappa_n), N_{\check{A}}(\kappa_{n-1}, \mathfrak{S}\kappa_{n-1}), N_{\check{A}}(\kappa_n, \mathfrak{S}\kappa_n) \}) \\ &= \mathbb{F} (\min \{ N_{\check{A}}(\kappa_{n-1}, \kappa_n), N_{\check{A}}(\kappa_{n-1}, \kappa_n), N_{\check{A}}(\kappa_n, \kappa_{n+1}) \}) \\ &= \mathbb{F} (\min \{ N_{\check{A}}(\kappa_{n-1}, \kappa_n), N_{\check{A}}(\kappa_n, \kappa_{n+1}) \}) \end{aligned}$$

ve burada $\{N_{\check{A}}(\kappa_{n-1}, \kappa_n), N_{\check{A}}(\kappa_n, \kappa_{n+1})\}$ kümesinin en küçük elemanı ikinci bileşen olduğunda çelişki elde edilir.

Buradan;

$$N_{\check{A}}(\kappa_n, \kappa_{n+1}) > N_{\check{A}}(\kappa_{n-1}, \kappa_n)$$

dır. Teorem 5.4 ten, $\kappa^* \in \hat{Y}$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_n = \kappa^*$ elde edilmişti.

$\mathbb{F}$ sürekli olsun;

(4.1) kullanılırsa ve (5.10) da $\kappa = \kappa_n$, $\xi = \kappa^*$, $t = 0$ yazılırsa, $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned} \mathbb{F} \left(\check{A}^0(\kappa_{n+1}, \mathfrak{S}\kappa^*, 0) \right) &= \mathbb{F} (N_{\check{A}}(\kappa_{n+1}, \mathfrak{S}\kappa^*)) \\ &> \tau \cdot \mathbb{F} (N_{\check{A}}(\kappa_{n+1}, \mathfrak{S}\kappa^*)) \\ &\geq \mathbb{F} (\min \{ N_{\check{A}}(\kappa_n, \kappa^*), N_{\check{A}}(\kappa_n, \kappa_{n+1}), N_{\check{A}}(\kappa^*, \mathfrak{S}\kappa^*) \}) \end{aligned}$$

dır. Eğer $\mathfrak{S}\mathcal{X}^* \neq \mathcal{X}^*$ ise, $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{F}(N_{\check{A}}(\mathcal{X}_{n+1}, \mathfrak{S}\mathcal{X}^*)) &> \lim_{n \rightarrow \infty} \tau \cdot \mathbb{F}(N_{\check{A}}(\mathcal{X}_{n+1}, \mathfrak{S}\mathcal{X}^*)) \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{F}(\min\{N_{\check{A}}(\mathcal{X}_n, \mathcal{X}^*), N_{\check{A}}(\mathcal{X}_n, \mathcal{X}_{n+1}), N_{\check{A}}(\mathcal{X}^*, \mathfrak{S}\mathcal{X}^*)\}) \end{aligned}$$

dır. Buradan,

$$\begin{aligned} \mathbb{F}(N_{\check{A}}(\mathcal{X}^*, \mathfrak{S}\mathcal{X}^*)) &> \tau \cdot \mathbb{F}(N_{\check{A}}(\mathcal{X}^*, \mathfrak{S}\mathcal{X}^*)) \\ &\geq \mathbb{F}(\min\{N_{\check{A}}(\mathcal{X}^*, \mathcal{X}^*), N_{\check{A}}(\mathcal{X}^*, \mathcal{X}^*), N_{\check{A}}(\mathcal{X}^*, \mathfrak{S}\mathcal{X}^*)\}) \\ &= \mathbb{F}(\min\{1, 1, N_{\check{A}}(\mathcal{X}^*, \mathfrak{S}\mathcal{X}^*)\}) \\ &= \mathbb{F}(N_{\check{A}}(\mathcal{X}^*, \mathfrak{S}\mathcal{X}^*)) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\mathbb{F}(N_{\check{A}}(\mathcal{X}^*, \mathfrak{S}\mathcal{X}^*)) = 0$$

bulunur ki bu bir çelişkidir. O halde $\mathfrak{S}\mathcal{X}^* = \mathcal{X}^*$ dır. $\mathcal{X}^*$, $\mathfrak{S}$ nin sabit noktasıdır.

$\mathfrak{S}$ sürekli olsun;

$\{\mathcal{X}_n\}$, $\hat{Y}$ de bir dizi; $\mathcal{X}_{n+1} = \mathfrak{S}\mathcal{X}_n$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{X}_n = \mathcal{X}^*$ olduğundan, $\mathfrak{S}\mathcal{X}^* = \mathcal{X}^*$ elde edilir. $\mathcal{X}^*$, $\mathfrak{S}$ nin sabit noktasıdır.

Sabit noktanın tekliğini göstermek için, $\mathcal{X}^*$ ve ξ^* gibi $\mathfrak{S}$ nin iki farklı sabit noktası alınırsa ve (5.10) da $\mathcal{X} = \mathcal{X}^*$, $\xi = \xi^*$, $t = 0$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} \mathbb{F}(\check{A}^0(\mathfrak{S}\mathcal{X}^*, \mathfrak{S}\xi^*, 0)) &= \mathbb{F}(N_{\check{A}}(\mathfrak{S}\mathcal{X}^*, \mathfrak{S}\xi^*)) \\ &> \tau \cdot \mathbb{F}(N_{\check{A}}(\mathfrak{S}\mathcal{X}^*, \mathfrak{S}\xi^*)) \\ &\geq \mathbb{F}(\min\{N_{\check{A}}(\mathcal{X}^*, \xi^*), N_{\check{A}}(\mathcal{X}^*, \mathfrak{S}\mathcal{X}^*), N_{\check{A}}(\xi^*, \mathfrak{S}\xi^*)\}) \\ &= \mathbb{F}(\min\{N_{\check{A}}(\mathcal{X}^*, \xi^*), 1, 1\}) \\ &= \mathbb{F}(N_{\check{A}}(\mathcal{X}^*, \xi^*)) \end{aligned}$$

ve buradan,

$$\mathbb{F}(N_{\check{A}}(\mathcal{X}^*, \xi^*)) > \mathbb{F}(N_{\check{A}}(\mathcal{X}^*, \xi^*))$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $\mathfrak{S}$ tek bir sabit noktaya sabittir. İspat tamamlanmıştır. ■

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Sabit nokta teorisi alanında yapılan çalışmalarda; bire bir dönüşümün tanımlandığı geometrik yapı ve dönüşüm üzerinde tanımlanan büzülme şartı, iki önemli noktayı teşkil etmektedir. Metrik uzaylarda başlayan sabit nokta teorisi çalışmaları, daha sonra bulanık metrik uzayların da tanımlanması ile bulanık metrik uzaylara da taşınmıştır.

Bu tezde, 2019 yılında tanımlanan genişletilmiş bulanık metrik uzaylardan yararlanılmış; literatürde metrik uzaylarda var olan ve araştırmacılar tarafından bulanık metrik uzaylara uygulanan bazı büzülme dönüşümleri ve sabit nokta teoremleri genişletilmiş bulanık metrik uzaylara uyarlanmıştır. Genişletilmiş bulanık metrik uzaylarda üç yeni bulanık büzülme dönüşümü tanımlanmış, bazı sabit nokta teoremleri ispatlanmış ve bazı örnekler verilmiştir. Böylece literatürde var olan bazı kavramların genelleştirilmiş versiyonları elde edilmiştir ve bu kavramlar kullanılarak bazı sabit nokta teoremleri ispatlanmıştır.

Bu tezde genişletilmiş bulanık metrik uzaylarda sabit nokta teoremleri oluştururken; literatürde var olan büzülme dönüşümlerini genişletilmiş bulanık metrik uzaylarda tanımlamak isteyen yeni araştırmacılara fikir vermek ve genişletilmiş bulanık metrik uzaylarda yapılan çalışmalara katkı sağlamak amaçlanmıştır.

KAYNAKLAR

- Banach, S. 1922. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. *Fund Math.*, 3;133-181.
- Chang, C. L. 1968. Fuzzy topological spaces, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 24;182-190.
- Di Bari, C., Vetro, C. 2005. Fixed points, attractors and weak fuzzy contractive mappings in a fuzzy metric space. *J. Fuzzy Math.*, 13(4);973-982.
- George, A., Veeramani, P. 1994. On some results in fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 64;395-399.
- Gopal, D. and Vetro, C. 2014. Some new fixed point theorems in fuzzy metric spaces. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 11(3);95-107.
- Grabiec, M. 1988. Fixed points in fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 27(3);385-389.
- Gregori, V., Minana, J. J., Miravet, D. 2019. Extended fuzzy metrics and fixed point theorems. *Mathematics Journal*, 7(3);303. <https://doi.org/10.3390/math7030303>.
- Gregori, V., Minana, J. J., Morillas, S. 2014. A note on convergence in fuzzy metric spaces. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 11;75-85.
- Gregori, V., Romaguera, S. 2004. Characterizing completable fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*. 144; 411-420.
- Gregori, V., Sapena, A. 2002. On fixed point theorems in fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*. 125;245-252.
- Huang, H., Caric, B., Dosenovic, T., Rakic, D., Brdar, M. 2021. Fixed point theorems in fuzzy metric spaces via fuzzy F-contraction. *Mathematics Journal*, 9(6) ; 641. <https://doi.org/10.3390/math9060641>.
- Klement, P.E. Mesiar, R. 1997. Triangular Norms. *Tatra Mt. Math. Pub.* 13;169-193.
- Kramosil, I., Michalek, J. 1975. Fuzzy metrics and statistical metric spaces. *Kybernetika*, 11; 336-344.
- López de Hierro, A. F. R. Fulga, A. Karapinar, E. Shahzad, N. 2021. Proinov-Type Fixed-Point Results in Non-Archimedean Fuzzy Metric Spaces. *Mathematics*, 9;1594. doi:10.3390/math9141594.
- Mihet, D. 2008. Fuzzy ψ - contractive mappings in non-Archimedean fuzzy metric space. *Fuzzy Sets and Systems*, 159;739-744.
- Mihet, D. 2007. On fuzzy contractive mappings in fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 158;915-921.

- Rodriguez-López, J., Romaguera, S. 2004. The Hausdorff fuzzy metric on compact sets. *Fuzzy Sets Syst.* 147;273-283.
- Samet, B. Vetro, C. Vetro, P. 2012. Fixed point theorems for $\alpha - \psi$ contractive type mappings. *Nonlinear Analysis Theory, Methods and Applications*, 75;2154-2165.
- Schwizer, B., Sklar, A. 1960. Statistical metric spaces. *Pacific Journal of Mathematics* 10;315-367.
- Wardowski, D. 2012. Fixed points of a new type of contractive mappings in complete metric spaces. *Fixed Point Theory Appl.*,2012:94. doi:10.1186/1687-1812-2012-94
- Zadeh, L.A. 1965. Fuzzy sets, *Inform. Control*, 8; 338-353.

