

56976

SİMLİSEL KATEGORİLER

Kürşat YENİLMEZ
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
1996

SİMLİSEL KATEGORİLER

Kürşat YENİLMEZ

Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisans Üstü Yönetmeliği uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalı
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Zekeriya ARVASI

Ağustos 1996

Kürşat Yenilmez'in YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "Simplisel Kategoriler" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisans üstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

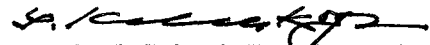
Üye: Yrd. Doç. Dr. Zekeriya Aruesi

Üye: Yrd. Doç. Dr. Osman Mucuk

Üye: Mahmut Koçak. un Kdr.

Y. Aruesi
O. Mucuk

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 3-9-1996..... gün ve
96-23/1..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.


Prof. M. Selami KILIÇKAYA
Enstitü Müdürü

İçindekiler

Özet	v
Summary	vi
Teşekkür	vii
1 Kategori Teoriye Giriş	1
1.1 Kategoriler	1
1.2 Funktorlar	5
1.3 Doğal Transformasyonlar	7
2 $\Delta[n]$ Kategorisi	9
2.1 Tanımlar	9
2.1.1 İki özel operatör	10
3 Simplisel Özdeşlikler	20
3.1 Özdeşlikler	20
4 Simplisel Kategoriler	58
4.1 Simplisel Obje ve Morfizmler	58

Özet

Dört bölümden oluşan bu yüksek lisans tezinde, literatürde “Simplisel Özdeşlikler” olarak bilinen birtakım eşitlikler ispatlanmış ve buna dayalı olarak “Simplisel Kategori” oluşturulmuştur. Daha açık olarak; Bölüm 1 de genel anlamda kategori teorisi tanıtılmış, Bölüm 2 de obje ve morfizmleri sıralı kümeler üzerinde tanımlanabilen $\Delta[n]$ ile göstereceğimiz kategori oluşturulmuş ve bu kategorideki herhangi bir morfizmin, bu bölümde verilen iki özel operatör cinsinden yazılabileceğini ifade eden önemli bir önerme verilmiştir. Bölüm 3 de $\Delta[n]$ kategorisi üzerinde tanımlı iki özel operatör yardımıyla simplisel özdeşlikler ispat edilerek örnekler verilmiştir. Son bölümde ise, simplisel obje ve morfizmler tanımlanmış ve bunlar yardımıyla “Simplisel Kategori” oluşturulmuştur.

Summary

In this master thesis containing four chapters, it is proved some equalities known simplicial identities in the literature and then by using these identities it is defined “The Simplicial Category”. In details, Chapter 1 gives the fundamental concepts of category theory. In Chapter 2, it is determined the category denoted by $\Delta[n]$ having as objects all finite ordinal numbers and as morphisms all monotone functions. In this category, it is also shown that any morphism can be expressed in terms of two special operators. In Chapter 3, on the category $\Delta[n]$, it is proved the simplicial identities by using these two special operators and given some examples for them. In the last chapter, simplicial object and morphisms are described and it is defined “The Simplicial Category” by means of the simplicial object and morphism.

Teşekkür

Yüksek lisans çalışmalarımın gerek ders ve gerekse tez aşamasında büyük ilgi ve destekleriyle birlikte, daima anlayış ve yardımlarını gördüğüm değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Zekeriya ARVASI 'ye teşekkürü bir borç bilirim.

Çalışmalarım sırasında her türlü fedakarlığı gösteren, her zaman yanımda olup beni destekleyen ve beni bu günlere getiren aileme en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Kürşat YENİLMEZ

Bölüm 1

Kategori Teoriye Giriş

Giriş

Bu bölümde, genel anlamda “Kategori Teorisi” hakkında bazı temel bilgiler vereceğiz. Kategori teorisi, 1940 yıllarında S. Mac Lane ve S. Eilenberg [10] tarafından oluşturulmuştur. Dolayısıyla kategori teori için literatürde verilen en iyi kitap, Saunders Mac Lane tarafından yazılmış olan “Categories for the Working Mathematician” [10] isimli kitaptır. Bu kitapta, Matematikğin birçok farklı dallarında araştırma yapan matematikçiler tarafından kullanılan çok yararlı bilgiler ve metodlar verilmiştir.

Giriş seviyesinde kategori teorisi, kategori, fonktor, doğal transformasyon ve fonktor kategorisi kavramları üzerine kurulmuş, bunlar arasında anlaşma sağlayan bir dildir.

Bu bölümde sadece kategori, fonktor ve doğal transformasyon kavramlarının tanımlarıyla birlikte ileriki bölümlerde sıkça kullanacağımız örnekler vereceğiz.

1.1 Kategoriler

Grup teorisinden bilindiği gibi monoid, birim ve asosyatif özelliğini sağlayan, üzerinde ikili işlem tanımlı bir kümedir. Kategori teori genel olarak, monoidin genelleştirilmiş bir çeşidi olarak gözönüne alınabilir. Genel anlamda kategorinin tanımı, *verilenler*

ve *istenilenler* olarak iki kısımdan oluşur. Buna göre kategorinin tanımını şu şekilde verebiliriz.

Tanım 1.1.1 Bir kategori oluşturabilmek için

- (a) *obje* olarak adlandıracağımız elemanlara,
- (b) *morfizm* olarak adlandıracağımız objeler arasındaki dönüşümlere,

$$\text{Mor}(X, Y) = \{f \mid f : X \rightarrow Y\}$$

- (c) morfizmlerin birleşiminin tanımlanmasına

$$\text{Mor}(X, Y) \times \text{Mor}(Y, Z) \longrightarrow \text{Mor}(X, Z)$$

$$(f, g) \longmapsto g \circ f$$

ihtiyaç vardır. Bu verilerin ışığı altında;

- i) X, Y, Z ve W objeleri için,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f} & W \\ f \downarrow & & \uparrow h \\ Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

diyagramı komütatif yani,

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

eşitliği mevcut ve

- ii) X, Y, Z objeleri için,

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & & \\ & \searrow f & \downarrow \text{id}_Y & \searrow g & \\ & & Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

diyagramı komütatif yani,

$$g \circ \text{id}_Y = g \quad \text{ve} \quad \text{id}_X \circ f = f$$

eşitlikleri mevcut ise, $\mathcal{C}$ ile göstereceğimiz bu sınıfa bir *kategori* denir. Burada id_Y olarak gösterilen morfizm, Y nin *özdeşlik morfizmi* olarak adlandırılır.

Dikkat edilirse tanımdan önce yukarıda sözünü ettiğimiz verilenler kısmı (a),(b) ve (c) bir yerde özellikleri oluşturmakta, istenilenler kısmı *i)* ve *ii)* ise şartları oluşturmaktadır.

Örnek 1.1.2 $\mathcal{C} = \text{Küme}$ ile göstereceğimiz kümeler kategorisini oluşturalım. Objeleri $A, B, C, \dots$ gibi harfler ile göstereceğimiz kümeler, morfizmler kümeler arasındaki bildiğimiz anlamda fonksiyonlar ve morfizmlerin birleşimi olarak da adi anlamda fonksiyon bileşkesi almak suretiyle yukarıda verilen *i)* ve *ii)* şartları kolayca sağlanır. Böylece $\mathcal{C} = \text{Küme}$ kümeler kategorisi elde edilir.

Örnek 1.1.3 $\mathcal{C} = \text{Grup}$ ile göstereceğimiz gruplar kategorisini oluşturalım. Objeleri $G, H, K, \dots$ gibi harfler ile göstereceğimiz gruplar, morfizmler gruplar arasında tanımlı bilinen anlamda homomorfizmler ve morfizmlerin birleşimi olarak homomorfizmlerin bileşkesi almak suretiyle *i)* ve *ii)* şartları kolayca sağlanır. Dolayısıyla $\mathcal{C} = \text{Grup}$ gruplar kategorisi elde edilir.

Örnek 1.1.4 $\mathcal{C} = \text{Top}$ ile göstereceğimiz topolojik uzaylar kategorisini oluşturalım. Objeleri $(X, \tau_1), (Y, \tau_2), (Z, \tau_3), \dots$ şeklinde göstereceğimiz topolojik uzaylar, morfizmler topolojik uzaylar arasında tanımlanan bildiğimiz anlamda sürekli fonksiyonlar ve morfizmlerin birleşimi olarak da adi anlamda sürekli fonksiyonların bileşkesi almak suretiyle *i)* ve *ii)* şartları kolayca sağlanır. Böylece $\mathcal{C} = \text{Top}$ topolojik uzaylar kategorisi elde edilir.

Tanım 1.1.5 Objeleri kümelerden oluşan bir kategori “küçük kategori” olarak adlandırılır.

Şimdi, bizim asıl ilgileneceğimiz ve bir sonraki bölümde kategorisini oluşturacağımız küçük kategorilerle ilgili örneğimizi verelim.

Örnek 1.1.6 n bir pozitif tamsayı olmak üzere; $\mathcal{C} = [n]$ ile göstereceğimiz sıralı kümeler kategorisini oluşturalım. objeleri pozitif tamsayılar, morfizmler bu tamsayılar arasındaki adi fonksiyonlar ve morfizmlerin birleşimi olarak da bu fonksiyonların bilinen anlamda bileşkesi olmak üzere $\mathcal{C} = [n]$ nin i) ve ii) şartlarını kolayca sağladığını dolayısıyla sıralı kümeler kategorisini oluşturduğunu görebiliriz. Özel olarak $n = -1$ için $[-1]$ kategorisi, *boş kategori* olarak isimlendirilir. (yani hiçbir objesi ve morfizmi yoktur)

Şimdi, n nin birkaç değeri için bu kategorileri inceleyelim.

$n = 0$ için; $[0]$ kategorisi, birtek obje ve birtek özdeşlik morfizminden oluşur. Simgesel olarak,

$$0 \xrightarrow{\text{id}_0} 0$$

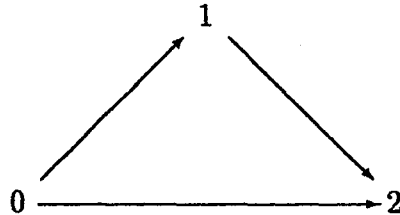
şeklinde gösterilir.

$n = 1$ için; $[1]$ kategorisi, iki obje ve özdeşlik morfizmleri hariç bir morfizmden oluşur. Simgesel olarak,

$$0 \longrightarrow 1$$

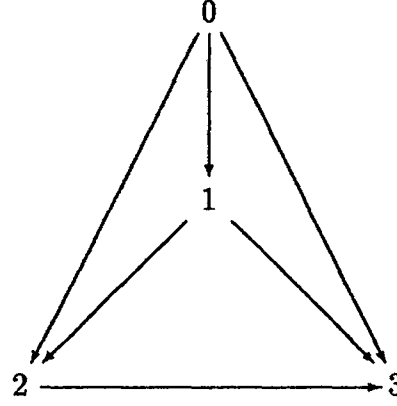
ile temsil edilir.

$n = 2$ için; $[2]$ kategorisi, üç obje ve özdeşlik morfizmleri hariç üç morfizmden oluşur. Simgesel olarak,



diyagramı ile gösterilir.

$n = 3$ için; $[3]$ kategorisi, dört obje ve özdeşlik morfizmleri hariç altı morfizmden oluşur. Simgesel olarak,



diyagramı ile gösterilir.

En çok bilinen kategori örneklerini böylece verdikten sonra, Bölüm 4' de sıkça kullanacağımız temel bir tanım verelim.

Tanım 1.1.7 $\mathcal{C}$ bir kategori olsun. $\mathcal{C}$ nin objeleri aynen alınmak suretiyle morfizmlerinin yönü değiştirilerek yeni bir kategori elde edilir. Elde edilen bu yeni kategori " $\mathcal{C}$ nin *oppozit kategorisi*" olarak adlandırılır ve $\mathcal{C}^{op}$ şeklinde gösterilir.

1.2 Funktorlar

Bir önceki kısımda kategori tanımladıktan sonra, bu aşamada iki kategori arasındaki bir dönüşümden söz edebiliriz. Aşağıda açık tanımını vereceğimiz bu tür dönüşümler, bir anlamda kategorilerin morfizmleri olarak da adlandırılır. Şimdi bu tanımı verelim.

Tanım 1.2.1 $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ iki kategori olsun. $\mathcal{C}$ kategorisinin bir A objesi, $A \in \text{obj } \mathcal{C}$ şeklinde gösterilmek üzere bir $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ dönüşümü için,

(a) $A \in \text{obj } \mathcal{C}$ ise, $F(A) \in \text{obj } \mathcal{D}$

(b) $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) = \{f \mid f : A \rightarrow B\}$ ise, $\text{Mor}_{\mathcal{D}}(FA, FB) = \{Ff \mid Ff : FA \rightarrow FB\}$

özellikleri gözönünde bulundurularak;

$$i) F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$$

ii) $\text{id}_A \in \text{Mor}(A, A)$ ise; $F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$ şartları sağlanıyorsa F morfizmine $\mathcal{C}$ kategorisinden $\mathcal{D}$ kategorisine bir *funktor* denir.

Örnek 1.2.2 $\mathcal{C}$ bir kategori olsun. $I_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ dönüşümü, $\mathcal{C}$ kategorisinin objelerini ve morfizmlerini kendisine eşleyecek şekilde tanımlandığında yani,

$A \in \text{obj } \mathcal{C}$ için $I_{\mathcal{C}}(A) = A$ ve $f : A \rightarrow B \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ için $I_{\mathcal{C}}(f) = f$ olarak alındığında

$$I_{\mathcal{C}}(f \circ g) = f \circ g = I_{\mathcal{C}}(f) \circ I_{\mathcal{C}}(g) \quad \text{ve} \quad I_{\mathcal{C}}(\text{id}_A) = \text{id}_A = \text{id}_{I_{\mathcal{C}}(A)}$$

olacağından $I_{\mathcal{C}}$ bir funktor belirtir ve bu funktor literatürde “özdeşlik funktoru” olarak adlandırılır.

Örnek 1.2.3 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ funktoru $\mathcal{C}$ kategorisindeki birtakım özellikleri ortadan kaldırarak (gözümdü ederek) $\mathcal{D}$ kategorisine tanımlanıyorsa bu dönüşüm bir “unutulabilir (forgetfull) funktor” olarak adlandırılır. Bu çeşit funktora birçok örnek verilebilir. Bunlardan birini verelim. Buna göre, G üzerinde toplama ve çarpma işlemleri tanımlanabilen bir cümle olsun. Halkalar kategorisi **Halka** ve abelyan gruplar kategorisi de **Ab** ile gösterilmek üzere

$$F : \text{Halka} \rightarrow \text{Ab}$$

$$F((G, +, \cdot)) = (G, +) \quad \text{ve} \quad Ff = f$$

şeklinde yani, bir halkanın ikinci işlemini (doğal olarak ikinci işlem ile ilgili özellikleri) unutturan bir funktor tanımlanabilir.

Bu durumda $f : (G, +, \cdot) \rightarrow (H, +, \cdot)$ halka homomorfizmi için

$$\begin{aligned} Ff : F((G, +, \cdot)) &\rightarrow F((H, +, \cdot)) \\ (G, +) &\rightarrow (H, +) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$F(f \circ g) = Ff \circ Fg \quad \text{ve} \quad F(\text{id}_{(G, +, \cdot)}) = \text{id}_{(G, +)}$$

olacağından F nin bir funktor olacağı açıktır. Bu türden funktolar literatürde “unutulabilir funktor” olarak isimlendirilir.

1.3 Doğal Transformasyonlar

Kategori ve fonktörler üzerinde durduktan sonra, yine temeli bu iki kavrama dayanan ve bir anlamda fonktörlerin morfizmleri olarak bilinen bir başka dönüşümü tanımlayabiliriz. İki fonktör üzerinde tanımlanan bu tür dönüşümleri genel olarak şu şekilde tanımlıyoruz.

Tanım 1.3.1 $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ iki kategori ve $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ iki fonktör olsun.

Bir $t : F \rightarrow G$ morfizmi, $A \in \text{obj } \mathcal{C}$ olmak üzere; $\mathcal{C}$ içindeki her $f : A \rightarrow B$ için, $Ff : FA \rightarrow FB$ ve $Gf : GA \rightarrow GB$ olmak üzere $t_A : FA \rightarrow GA$ morfizmi ile birlikte,

$$\begin{array}{ccccc} A & & FA & \xrightarrow{t_A} & GA \\ f \downarrow & & Ff \downarrow & & \downarrow Gf \\ B & & FB & \xrightarrow{t_B} & GB \end{array}$$

diyagramı komütatif ise yani, $A' \in FA$ için;

$$(t_B \circ Ff)(A') = (Gf \circ t_A)(A')$$

eşitliği doğru ise t morfizmine, F fonktöründen G fonktörüne bir *doğal transformasyon* (natural transformation) denir. Aralarında bir doğal transformasyon tanımlanabilen fonktörlere “doğal denk” (natural equivalent) fonktörler denir.

$t : F \rightarrow G$ ve $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ fonktörleri doğal denk ise, bu durum $F \simeq G$ ile gösterilir. Burada $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ kategorileri için, öyle $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ve $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ fonktörleri

$$GF \simeq I_{\mathcal{C}} \quad \text{ve} \quad FG \simeq I_{\mathcal{D}}$$

olacak şekilde bulunabiliyorsa, $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ kategorileri “denk kategoriler” (equivalent categories) olarak adlandırılır. Kategorilerin denkliği, bize belli alanlarda çözülemeyen problemleri başka kategorilerde çözmek imkanı sağlaması bakımından Kategori Teorisi içinde oldukça önemli bir yere sahiptir.

Doğal transformasyonu böylece tanımladıktan sonra şimdi, doğal transformasyonların en basit örneği olan ve *özdeşlik doğal transformasyonu* olarak bilinen örneği verebiliriz.

Örnek 1.3.2 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ herhangi bir fonktor olmak üzere $A \in \text{obj } \mathcal{C}$ için;
 $(I_F)_A = \text{id}_{FA}$ olarak tanımlanan $I_F : F \rightarrow F$ dönüşümü bir doğal transformasyon tanımlar ve bu, literatürde “*özdeşlik doğal transformasyonu*” olarak adlandırılır.

Genel anlamda Kategori Teorisi’nden bahsettikten sonra, bizim asıl ilgileneceğimiz $\Delta[n]$ kategorisini oluşturma işine geçebiliriz.



Bölüm 2

$\Delta[n]$ Kategorisi

Giriş

Bu bölümde; objeleri sıralı kümeler (ki bunların herbiri bir “küçük kategori” olarak da düşünülebilir), morfizmleri ise bu küçük kategoriler arasındaki “operatör” olarak adlandıracağımız dönüşümler olan bir kategori tanımlayacağız ve bu kategoriyi $\Delta[n]$ ile göstereceğiz. Şüphesiz ki; $\Delta[n]$ kategorisi bir yerde, $[n]$ küçük kategorilerinin bir kategorisi olacaktır.

2.1 Tanımlar

Tanım 2.1.1 $n \geq -1$ özelliğinde bir tamsayı olmak üzere; $\{0 < 1 < 2 < \dots < n\}$ şeklinde tanımlanan kümeye bir *sıralı küme* denir. Biz böyle bir sıralı kümeyi $[n]$ ile göstereceğiz. Burada $[-1]$ elemanı *boş küme* olarak tanımlanır. Her bir sıralı küme, aynı zamanda bir küçük kategori olarak da düşünülebilir.

Tanım 2.1.2 $[n] = \{0 < 1 < 2 < \dots < n\}$ olmak üzere herhangi iki sıralı küme arasındaki bir dönüşüm sıra-koruyan (monoton) bir dönüşümdür. Daha açık olarak, $f : [n] \rightarrow [m]$ monoton fonksiyonu $i \leq j$ iken $f(i) \leq f(j)$ özelliğindedir. Biz böyle dönüşümleri *operatör* olarak adlandıracağız.

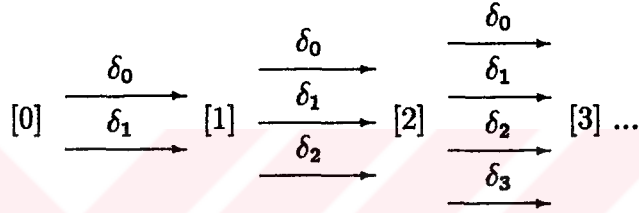
2.1.1 İki özel operatör

Genel olarak operatörleri incelemeye geçmeden önce, kullanım bakımından bize çok kolaylık sağlayacak iki özel operatör tanımlayalım:

İlk olarak, $\delta_i^n : [n-1] \rightarrow [n]$ operatörünü $0 \leq i \leq n \neq 0$ olmak üzere

$$\delta_i^n(x) = \begin{cases} x, & x < i \text{ iken} \\ x+1, & x \geq i \text{ iken} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda

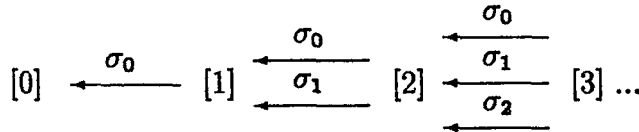


olacağı açıktır.

Diğer taraftan, $\sigma_j^n : [n+1] \rightarrow [n]$ operatörünü de $0 \leq j \leq n$ olmak üzere

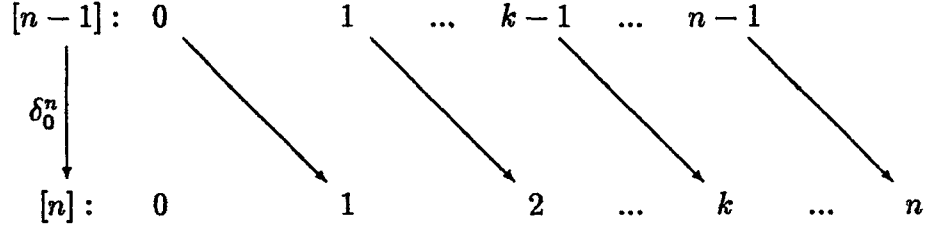
$$\sigma_j^n(x) = \begin{cases} x, & x \leq j \text{ iken} \\ x-1, & x > j \text{ iken} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda da

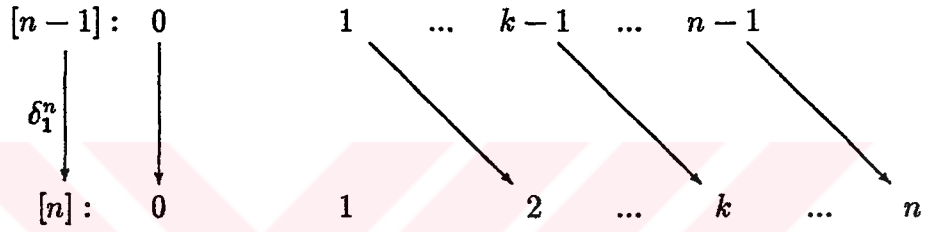


olacağı açıktır. $\Delta[n]$ kategorisi içinde oldukça önemli bir yere sahip olan bu operatörlerin i ve j nin birkaç değerine göre genel olarak davranışlarını inceleyecek olursak;

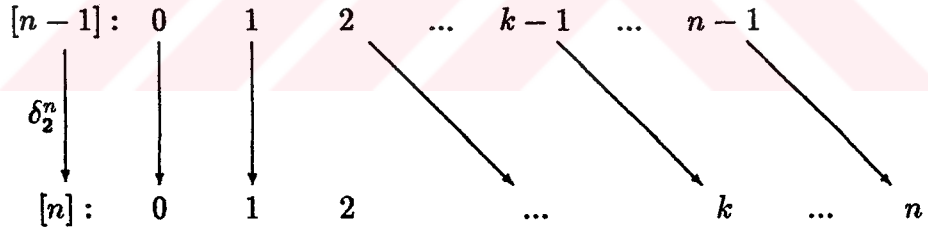
$i = 0$ için; $\delta_0^n : [n-1] \rightarrow [n]$



$i = 1$ için; $\delta_1^n : [n-1] \rightarrow [n]$



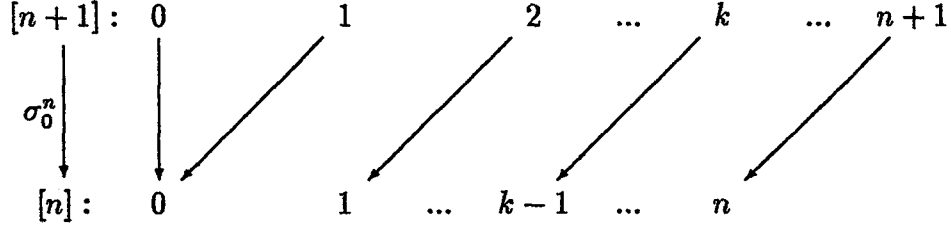
$i = 2$ için; $\delta_2^n : [n-1] \rightarrow [n]$



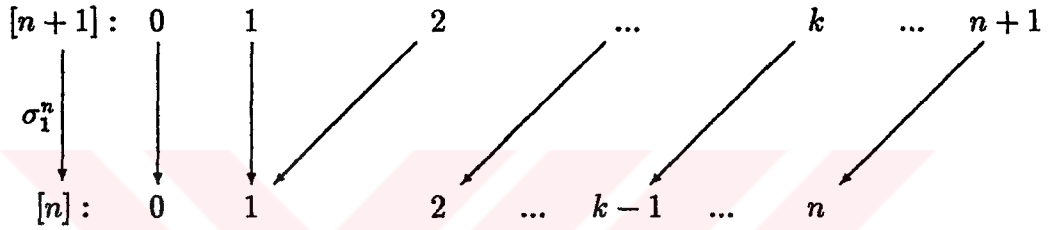
i nin diğer değerleri için eşlemeye devam edilirse; i hangi değeri alırsa görüntü kümesinde o değerin yer almadığı görülür. δ_i^n nin tanımından δ_i^n operatörünün bire-bir bir dönüşüm olduğu açıktır.

Şimdi, benzer değerlendirmeyi σ_j^n operatörü için yapalım;

$j = 0$ için; $\sigma_0^n : [n+1] \rightarrow [n]$



$j = 1$ için; $\sigma_1^n : [n+1] \rightarrow [n]$



j nin diğer değerleri için eşlemeye devam edilirse; j hangi değeri alırsa görüntü kümesinde o değere tanım kümesinden farklı iki değerın görüntüsünün karşılık geldiği görülür. σ_j^n nin tanımından σ_j^n operatörünün örten bir dönüşüm olduğu açıktır.

Şimdi, tüm özellikleriyle bu iki özel operatörü inceledikten sonra artık, objeleri küçük kategoriler ve morfizmleri de bu iki özel operatör tarafından üretilen operatörler olan kategori oluşturabiliriz.

a-) Objeler: $[n]$ küçük kategorileri.

b-) Morfizmler: $f : [n] \rightarrow [m]$ operatörleri

$$\text{Mor}([n], [m]) = \{f \mid f : [n] \rightarrow [m] \text{ operatörleri}\}$$

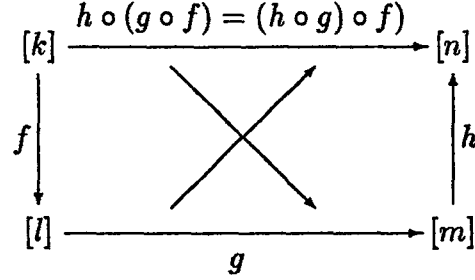
c-) Morfizmlerin Birleşimi: $[n], [m], [k]$ küçük kategorileri için;

$$\text{Mor}([n], [m]) \times \text{Mor}([m], [k]) \longrightarrow \text{Mor}([n], [k])$$

$$(f, g) \longmapsto g \circ f$$

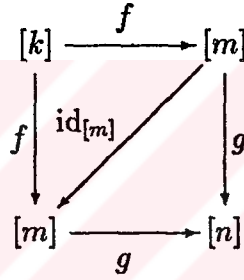
özelliklerini gözönünde bulundurarak

i) $[k], [l], [m], [n]$ küçük kategorileri için;



diyagramının komütatif olduğu ve

ii) $[k], [m], [n]$ küçük kategorileri için;



diyagramının komütatif olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla

$$\text{id}_{[m]} \circ f = f \text{ ve } g \circ \text{id}_{[m]} = g$$

eşitliklerinin sağlandığını görmeye çalışalım.

i) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ eşitliğini görebilmek için;

$x \in [k]$ için, $f(x) = y \in [l]$

$y \in [l]$ için, $g(y) = z \in [m]$

$z \in [m]$ için, $h(z) = t \in [n]$ olarak alalım. Böylece,

$$\begin{aligned} (h \circ (g \circ f))(x) &= h(g(f(x))) \\ &= h(g(y)) \\ &= h(z) \\ &= t \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
((h \circ g) \circ f)(x) &= (h \circ g)(f(x)) \\
&= h(g(y)) \\
&= h(z) \\
&= t
\end{aligned} \tag{2}$$

olur ki, (1) ve (2) eşitliklerinden; $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ bulunur.

ii) $\text{id}_{[m]} : [m] \rightarrow [m]$ öyleki $\text{id}_{[m]}(x) = x$ olacağından $\forall x \in [k]$ için, $(\text{id}_{[m]} \circ f)(x) = \text{id}_{[m]}(f(x))$ ve $f(x) \in [m]$ olduğundan $(\text{id}_{[m]} \circ f)(x) = f(x)$ olur ki bu da zaten $\text{id}_{[m]} \circ f = f$ demektir.

Tamamen benzer şekilde, $\forall x \in [m]$ için, $(g \circ \text{id}_{[m]})(x) = g(\text{id}_{[m]}(x))$ ve $x \in [m]$ olduğundan $(g \circ \text{id}_{[m]})(x) = g(x)$ olur ki bu da zaten $g \circ \text{id}_{[m]} = g$ demektir.

Böylece, objeleri küçük kategoriler ve morfizmleri de bu küçük kategoriler arasındaki operatörler olan bir kategori oluşturmuş oluruz. Bundan böyle bu kategoriye $\Delta[n]$ ile göstereceğiz. $\Delta[n]$ kategorisini oluşturduktan sonra, ilk bölümde genel olarak tanımını verdiğimiz oppozit kategoriden, daha doğrusu $\Delta[n]$ kategorisinin oppozit kategorisinden söz edebiliriz.

Tanım 2.1.3 Objeleri $\Delta[n]$ kategorisinin objeleri olan sıralı kümeler, morfizmleri ise $\Delta[n]$ kategorisinin morfizmleri olan operatörlerin ters yönlü hali olan ve morfizmlerin birleşimi olarak da yeni haldeki durum gözönüne alınarak yine operatörler arasındaki birleşim alınarak oluşturulan kategoriye $\Delta[n]$ kategorisinin “oppozit kategorisi” denir ve $\Delta^{\text{op}}[n]$ şeklinde gösterilir.

$\Delta[n]$ kategorisinin bu iki özel operatörünün durumunu i ve j nin değerlerine göre irdeledikten sonra $n = 2$ için şu örneği verebiliriz;

Örnek 2.1.4 $n = 2$ için; $\delta_i^j : [1] \rightarrow [2]$ operatörünü gözönüne alalım.

Bu durumda $0 \leq i \leq 2$ olacağından,

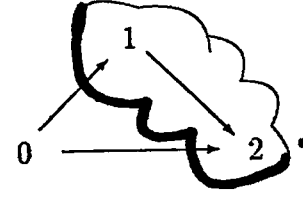
$i = 0$ için; $\delta_0^2 : [1] \rightarrow [2]$

$$\delta_0^2(0) = 1$$

$$\delta_0^2(1) = 2$$

olduğundan $0 \longrightarrow 1$

$$\delta_0^2$$



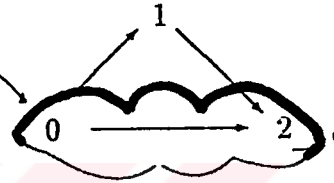
$i = 1$ için; $\delta_1^2 : [1] \rightarrow [2]$

$$\delta_1^2(0) = 0$$

$$\delta_1^2(1) = 2$$

olduğundan $0 \longrightarrow 1$

$$\delta_1^2$$



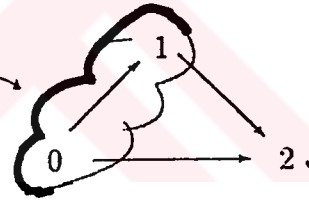
$i = 2$ için; $\delta_2^2 : [1] \rightarrow [2]$

$$\delta_2^2(0) = 0$$

$$\delta_2^2(1) = 1$$

olduğundan $0 \longrightarrow 1$

$$\delta_2^2$$



Yukarıda da görüldüğü gibi; i nin her değeri için $[1]$ deki $0 \rightarrow 1$ dönüşümü, $[2]$ de yine başka bir dönüşüme karşılık geliyor. (bak. PORTER, T. [12])

Benzer şekilde $n = 1$ için de şu örneği verebiliriz;

Örnek 2.1.5 $n = 1$ için $\sigma_j^1 : [2] \rightarrow [1]$ operatörünü gözönüne alalım.

Bu durumda $0 \leq j \leq 1$ olacağından;

$j = 0$ için; $\sigma_0^1 : [2] \rightarrow [1]$

$$\sigma_0^1(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \longrightarrow 2 \quad \curvearrowright \quad 0 \longrightarrow 1$$

$$\sigma_0^1(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \longrightarrow 1 \quad \curvearrowright \quad 0 \longrightarrow 0$$

$$\sigma_0^1(2) = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 \longrightarrow 2 \quad \curvearrowright \quad 0 \longrightarrow 1$$

$j = 1$ için; $\sigma_1^1 : [2] \rightarrow [1]$

$$\sigma_1^1(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \longrightarrow 2 \quad \curvearrowright \quad 0 \longrightarrow 1$$

$$\sigma_1^1(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \longrightarrow 1 \quad \curvearrowright \quad 0 \longrightarrow 1$$

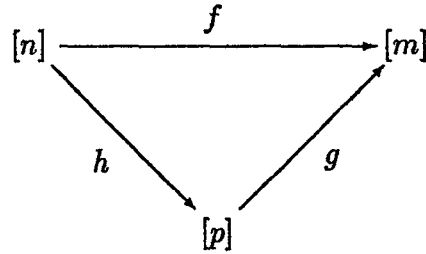
$$\sigma_1^1(2) = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 \longrightarrow 2 \quad \curvearrowright \quad 1 \longrightarrow 1$$

Yukarıda da görüldüğü gibi, $[2]$ deki $0 \rightarrow 1$, $0 \rightarrow 2$ ve $1 \rightarrow 2$ dönüşümlerinin herbiri $[1]$ de yine başka bir dönüşüme karşılık geliyor.

Dikkat edilirse bu iki özel operatör, sadece ardışık sırada iki sıralı küme arasında geçerlidir. Burada aklımıza hemen şu soru gelebilir: Acaba herhangi $[n]$, $[m]$ yani $n \neq m + 1$ ve $n \neq m - 1$ için $f : [n] \rightarrow [m]$ operatörünün bu iki özel operatörle ilişkisi nedir? Bu sorunun cevabı aslında çok açıktır. Şöyle ki; herhangi bir $f : [n] \rightarrow [m]$ operatörü δ_i^n ve σ_j^n özel operatörlerinin herhangi bir birleşimi şeklinde yazılabilir. Bir başka deyişle; bu iki özel operatör, $\Delta[n]$ nin diğer bütün operatörlerinin bulunduğu küme için bir taban oluşturur ve dolayısıyla bu kümeyi gerer. Şimdi bu özelliği karakterize eden bir Yardımcı Teorem ve bunun yardımıyla ispatlayabileceğimiz asıl Önerme'yi verelim;

Yardımcı Teorem 2.1.6 Her bir $f : [n] \rightarrow [m]$ monoton fonksiyonu, yine monoton ve örten bir $h : [n] \rightarrow [p]$ ile monoton ve bire-bir $g : [p] \rightarrow [m]$ fonksiyonlarının birleşimi olarak yazılabilir.

İspat:



Yukarıdaki gibi şematize edebileceğimiz durumda eğer f kendisi bire-bir veya örten ise, ispatlanacak birşey yoktur. Çünkü; f bire-bir olsa, $[p] = [n]$, $h = \text{id}_{[n]}$ ve $g = f$ seçilerek, f örten olsa, $[p] = [m]$, $h = f$ ve $g = \text{id}_{[m]}$ seçilerek ispat kolayca verilebilir. O halde f nin bire-bir ve örten olmadığı durumu ele alalım. O zaman;

$$[p] = \{f(j) \mid j \in [n]\}$$

$$h : [n] \rightarrow [p] \text{ öyleki } h(j) = f(j)$$

$$g : [p] \rightarrow [m] \text{ öyleki } g(f(j)) = f(j)$$

olarak tanımlanırsa gerçekten de $f = g \circ h$ olacağı açıktır. $\square$

Şimdi bu Yardımcı Teorem'den faydalanarak bizim asıl göstermek istediğimiz, verdiğimiz iki özel operatöre bağlı olan Önerme'yi verelim.

Önerme 2.1.7 $\Delta[n]$ kategorisindeki herhangi bir $f : [n] \rightarrow [m]$ morfizmi,

$$m > i_1 > \dots > i_k \geq 0, \quad 0 \leq j_1 < \dots < j_h < n$$

ve h, k doğal sayılar olmak üzere $n - h + k = m$ olacak şekilde n ve m sayıları için;

$$f = \delta_{i_1} \circ \dots \circ \delta_{i_k} \circ \sigma_{j_1} \circ \dots \circ \sigma_{j_h}$$

şeklinde bir gösterime sahiptir.

İspat: Hipotezdeki $f : [n] \rightarrow [m]$ monoton fonksiyonu için,

$$\sigma = \sigma_{j_1} \circ \cdots \circ \sigma_{j_h}$$

örten dönüşümü ve

$$\delta = \delta_{i_1} \circ \cdots \circ \delta_{i_k}$$

bire-bir dönüşümü olarak alınıp, $j \in [n]$ için,

$i_1, \dots, i_k \notin f([n])$ ve j_x indisleri $f(j) = f(j+1)$ özelliğindeki j ler olmak üzere,

$$f(j) = \begin{cases} \delta(j), & n < m \text{ ise } (h = 0 \text{ hali}) \\ \sigma(j), & n > m \text{ ise } (k = 0 \text{ hali}) \\ (\delta \circ \sigma)(j), & n = m \text{ ise } (h = k \text{ hali}) \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa, bir önceki Yardımcı Teorem 2.1.6 gereğince

$$f = \delta \circ \sigma = \delta_{i_1} \circ \cdots \circ \delta_{i_k} \circ \sigma_{j_1} \circ \cdots \circ \sigma_{j_h}$$

olacağı açıktır. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

Önerme 2.1.7 nin değişik bir ispatı, FRITSCH, R.-PICCININI, R.A. [5] de bulunabilir. Şimdi bu özelliği daha kolay görebileceğimiz birkaç örnek verelim.

Örnek 2.1.8 $f : [2] \rightarrow [5]$ öyleki $f(0) = 0$, $f(1) = 3$ ve $f(2) = 5$ olmak üzere f operatörünü δ_i^n operatörleri cinsinden yazmaya çalışalım.

$$n = 3 \text{ için } \delta_{i_3}^3 : [2] \rightarrow [3]$$

$$n = 4 \text{ için } \delta_{i_2}^4 : [3] \rightarrow [4]$$

$$n = 5 \text{ için } \delta_{i_1}^5 : [4] \rightarrow [5]$$

operatörleri için, dikkat edilirse verilen f operatörünün görüntü kümesinde yer almayan değerler 1, 2 ve 4 olduğundan Önerme 2.1.7 gereğince bu değerler sırasıyla

$$i_3 = 1 \quad i_2 = 2 \quad i_1 = 4$$

olarak alınırsa;

$$(\delta_4^5 \circ \delta_2^4 \circ \delta_1^3)(0) = 0$$

$$(\delta_4^5 \circ \delta_2^4 \circ \delta_1^3)(1) = 3$$

$$(\delta_4^5 \circ \delta_2^4 \circ \delta_1^3)(2) = 5$$

olacağından $f = \delta_4^5 \circ \delta_2^4 \circ \delta_1^3 : [2] \rightarrow [5]$ yazılabilir. Dikkat edilirse burada $i_1 > i_2 > i_3$ dir. Görüldüğü gibi $f : [2] \rightarrow [5]$ operatörü δ_1^3 , δ_2^4 ve δ_4^5 in birleşimi olarak ifade edilebiliyor. Burada aslında $i_3 = 1, i_2 = 1$ ve $i_1 = 4$ olarak alındığında da $f = \delta_4^5 \circ \delta_1^4 \circ \delta_1^3$ olarak yazılabilir. Ama dikkat edilirse son yazılımda Önerme 2.1.7 deki $i_1 > i_2 > i_3$ sırası sağlanmaz. O halde Önerme 2.1.7 nin şartlarını tam olarak sağlayan birtek $i_1 > i_2 > i_3$ üçlüsü mevcuttur.

Örnek 2.1.9 $f : [2] \rightarrow [2]$ öyleki $f(0) = 1$, $f(1) = 2$ ve $f(2) = 2$ olmak üzere f operatörünü δ_i^n ve σ_j^n operatörleri cinsinden yazmaya çalışalım.

$\sigma_j^1 : [2] \rightarrow [1]$, $0 \leq j \leq 1$ ve $\delta_i^2 : [1] \rightarrow [2]$, $0 \leq i \leq 2$ olmak üzere bu operatörler için, verilen operatörde görüntüde yer almayan 0 değeri i olarak ve de $f(1) = f(2)$ özelliğini sağlayan 1 değeri de j olarak alınırsa, $j = 1$ ve $i = 0$ için,

$$\begin{array}{ll} \sigma_1^1 : 0 \mapsto 0 & \delta_0^2 : 0 \mapsto 1 \\ & 1 \mapsto 2 \\ & 2 \mapsto 1 \end{array}$$

olacağından $f = \delta_0^2 \circ \sigma_1^1$ olarak yine, birtek gösterime sahiptir.

Bölüm 3

Simplisel Özdeşlikler

Giriş

Genel anlamda Kategori Teori'den ve $\Delta[n]$ kategorisinden söz ettikten sonra bu bölümde, $\Delta[n]$ kategorisi üzerinde önceki bölümde verdiğimiz iki özel operatör yardımıyla tanımlanan ve *Simplisel Özdeşlikler* (Simplicial Identities) olarak adlandırılan bazı eşitlikler üzerinde durarak herbir özdeşliği bir örnekle açıklamaya çalışacağız.

3.1 Özdeşlikler

Bölüm 2' de herhangi bir f monotonunun verdiğimiz iki özel operatörün sonlu sayıda birleşimi olarak yazılabileceğini Önerme 2.1.7 ile vermiştik. Şimdi Önerme 2.1.7 nin $h = 1$ ve $k = 1$ özel halini ele alacağız. Diğer bir deyişle, δ_i^n ve σ_j^n özel operatörlerinin ikili birleşimleri üzerinde duracağız. Bunu yaparken de, i ve j nin muhtemel durumlarını irdeleyeceğiz. Buna göre *simplisel özdeşlikler* olarak bilinen özdeşlikler şunlardır:

$$\delta_i^{n+1} \circ \delta_j^n = \delta_{j+1}^{n+1} \circ \delta_i^n, \quad i \leq j \quad (1)$$

$$\sigma_j^n \circ \sigma_i^{n+1} = \sigma_i^n \circ \sigma_{j+1}^{n+1}, \quad i \leq j \quad (2)$$

$$\sigma_j^n \circ \delta_i^{n+1} = \begin{cases} \delta_i^n \circ \sigma_{j-1}^{n-1}, & i < j \\ \text{id}_{[n]}, & i = j \text{ veya } i = j + 1 \\ \delta_{i-1}^n \circ \sigma_j^{n-1}, & i > j + 1 \end{cases} \quad (3)$$

$$= \begin{cases} \delta_i^n \circ \sigma_{j-1}^{n-1}, & i < j \\ \text{id}_{[n]}, & i = j \text{ veya } i = j + 1 \\ \delta_{i-1}^n \circ \sigma_j^{n-1}, & i > j + 1 \end{cases} \quad (4)$$

$$= \begin{cases} \delta_i^n \circ \sigma_{j-1}^{n-1}, & i < j \\ \text{id}_{[n]}, & i = j \text{ veya } i = j + 1 \\ \delta_{i-1}^n \circ \sigma_j^{n-1}, & i > j + 1 \end{cases} \quad (5)$$

Şimdi her bir özdeşliği ispatlayarak, konunun iyi anlaşılması bakımından birer örnek verelim.

Önerme 3.1.1 $i \leq j$ ise,

$$\delta_i^{n+1} \circ \delta_j^n = \delta_{j+1}^{n+1} \circ \delta_i^n$$

dir.

İspat: Bu özdeşliğin doğruluğunu göstermek için, $i \leq j$ iken eşitliğin her iki tarafındaki bileşke operatörlerin genel davranışlarını inceleyeceğiz. Muhtemel durumları incelemeye başlamadan önce δ_i^n operatörünün tanımını hatırlayacak olursak,

$$\delta_i^n(x) = \begin{cases} x, & x < i \text{ iken} \\ x + 1, & x \geq i \text{ iken} \end{cases}$$

şeklinde idi. Buna göre muhtemel durumlar şunlardır:

I- $x < j$ için, $\delta_j^n(x) = x$ olacaktır. $i \leq j$ olduğundan bu halde x ile i nin iki durumu mevcut olabilir. Bunlar;

I.1- $x < i$ ise, $\delta_i^{n+1}(x) = x$ dolayısıyla da $(\delta_i^{n+1} \circ \delta_j^n)(x) = x$ elde edilir.

I.2- $x \geq i$ ise, $\delta_i^{n+1}(x) = x + 1$ dolayısıyla da $(\delta_i^{n+1} \circ \delta_j^n)(x) = x + 1$ elde edilir.

II- $x \geq j$ için, $\delta_j^n(x) = x + 1$ olacaktır. $x + 1 \geq j + 1 \geq i + 1$ olduğundan $x + 1 > i$ olur ki buradan $\delta_i^{n+1}(x + 1) = x + 2$ elde edilir. Dolayısıyla $(\delta_i^{n+1} \circ \delta_j^n)(x) = x + 2$ olur.

Böylece (1) özdeşliğinin sol tarafındaki bileşke operatörünün genel davranışını belirlemiş olduk. Şimdi benzer değerlendirmeyi özdeşliğin sağ tarafındaki bileşke operatörü için yapalım.

III- $x < i$ için, $\delta_i^n(x) = x$ olacaktır. $x < i \leq j$ olduğundan $x < j + 1$ olur ki buradan $\delta_{j+1}^{n+1}(x) = x$ elde edilir. Dolayısıyla $(\delta_{j+1}^{n+1} \circ \delta_i^n)(x) = x$ olur. (**I.1** durumu)

IV- $x \geq i$ için, $\delta_i^n(x) = x + 1$ olacaktır. $i \leq j$ olduğundan bu halde $x + 1$ ile $j + 1$ nin şu iki durumu mevcut olabilir;

IV.1- $x + 1 < j + 1$ ise, $\delta_{j+1}^{n+1}(x + 1) = x + 1$ elde edilir. Dolayısıyla $(\delta_{j+1}^{n+1} \circ \delta_i^n)(x) = x + 1$ olur. (**I.2** durumu)

IV.2- $x + 1 \geq j + 1$ ise, $\delta_{j+1}^{n+1}(x + 1) = x + 2$ elde edilir. Dolayısıyla $(\delta_{j+1}^{n+1} \circ \delta_i^n)(x) = x + 2$ olur. (**II** durumu)

O halde toparlarsak $i \leq j$ olmak üzere;

$$\bullet x < j \text{ ve } x < i \Rightarrow (\delta_i^{n+1} \circ \delta_j^n)(x) = (\delta_{j+1}^{n+1} \circ \delta_i^n)(x)$$

$$\bullet x < j \text{ ve } x \geq i \Rightarrow (\delta_i^{n+1} \circ \delta_j^n)(x) = (\delta_{j+1}^{n+1} \circ \delta_i^n)(x)$$

$$\bullet x \geq j \text{ ve } x \geq i \Rightarrow (\delta_i^{n+1} \circ \delta_j^n)(x) = (\delta_{j+1}^{n+1} \circ \delta_i^n)(x)$$

elde ediyoruz ki, x in bunlardan başka bir durumu mevcut olamayacağından sonuç olarak;

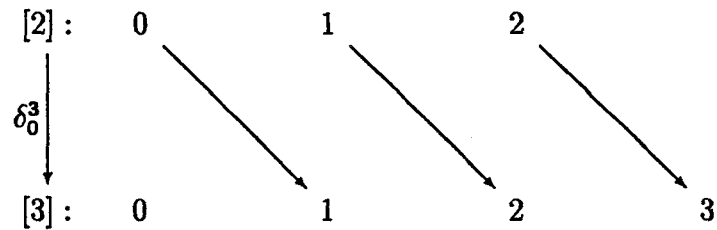
$$\delta_i^{n+1} \circ \delta_j^n = \delta_{j+1}^{n+1} \circ \delta_i^n$$

özdeşliği elde edilir. $\square$

Örnek 3.1.2 $\delta_i^3 : [2] \rightarrow [3]$ operatörünün davranışını hem cebirsel hem de geometrik açıdan inceleyelim. Bu durumda $0 \leq i \leq 3$ olacağından dört hal söz konusudur.

$i = 0$ için;

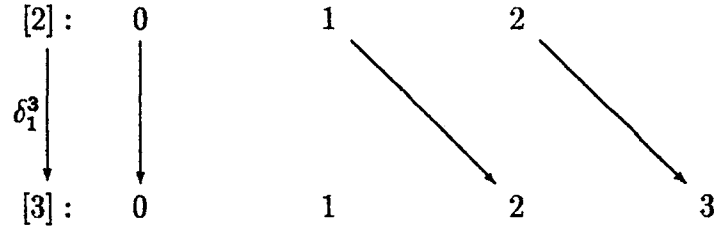
$\delta_0^3(0) = 1, \delta_0^3(1) = 2$ ve $\delta_0^3(2) = 3$ olacağından bu durum şematik olarak,



ile gösterilebilir.

$i = 1$ için;

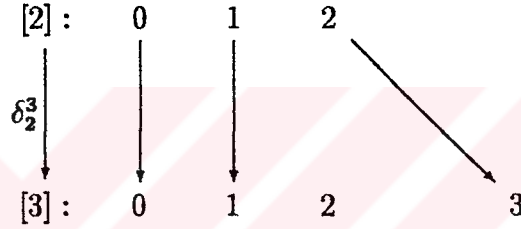
$\delta_1^3(0) = 0, \delta_1^3(1) = 2$ ve $\delta_1^3(2) = 3$ olacağından bu durum da şematik olarak,



ile gösterilebilir.

$i = 2$ için;

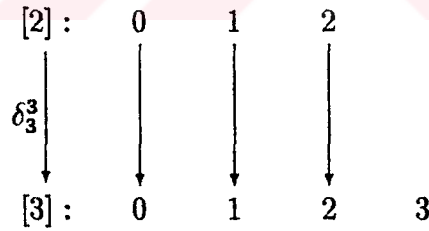
$\delta_2^3(0) = 0, \delta_2^3(1) = 1$ ve $\delta_2^3(2) = 3$ olacağından bu durum,



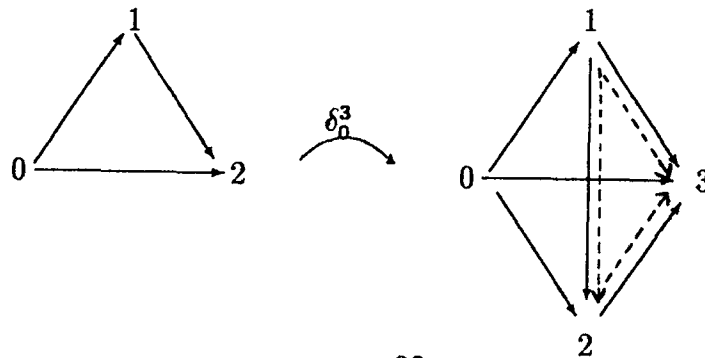
şeması ile gösterilebilir.

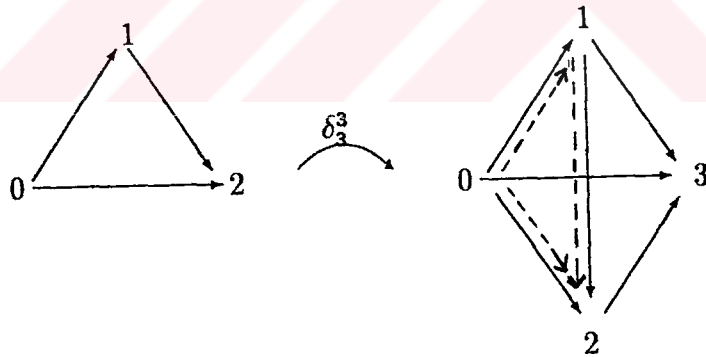
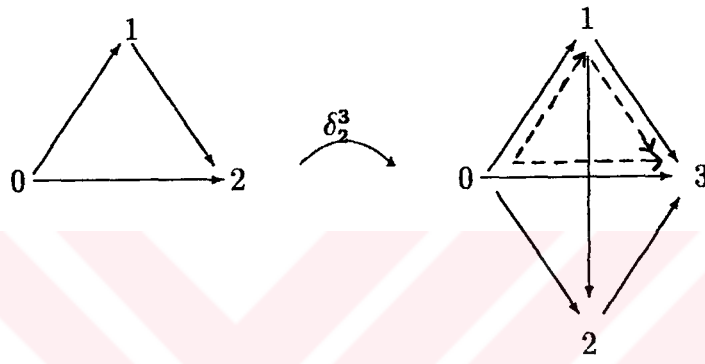
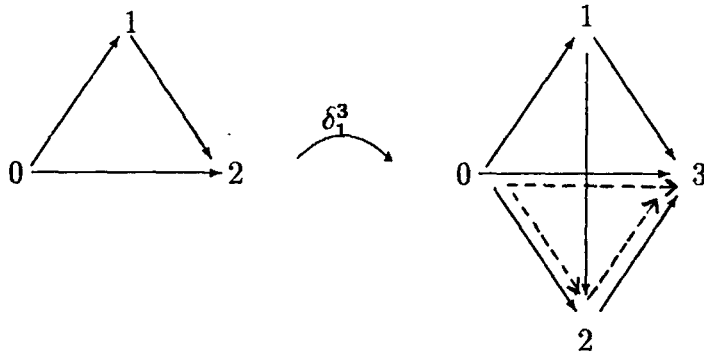
$i = 3$ için;

$\delta_3^3(0) = 0, \delta_3^3(1) = 1$ ve $\delta_3^3(2) = 2$ olacağından bu durum da,



şeması ile gösterilebilir. O halde sırasıyla i nin 0, 1, 2, 3 değerleri için δ_i^3 operatörleri geometrik olarak şöyle temsil edilebilirler :



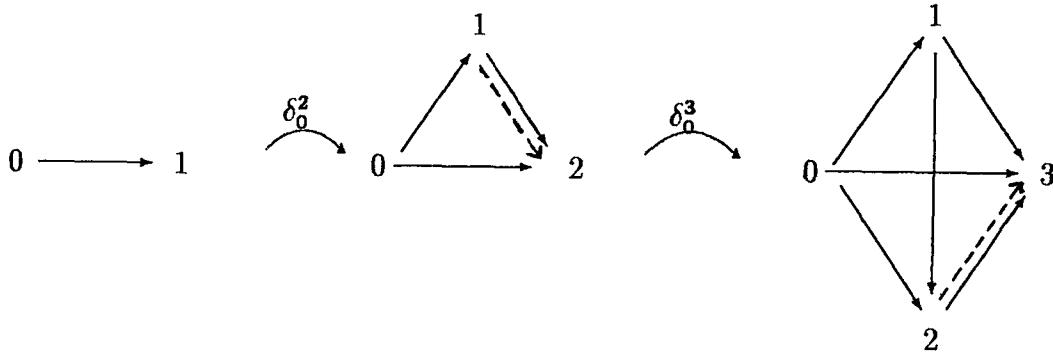


Dikkat edilirse i nin herbir değeri için δ_i^3 operatörü, geometrik olarak üçgeni bir prizmaya taşımaktadır.

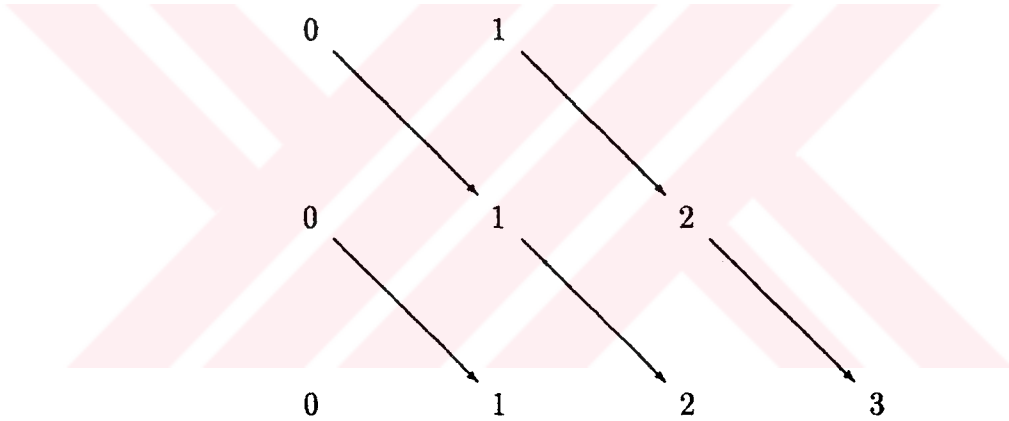
Örnek 3.1.3 $f : [1] \rightarrow [3]$ operatörünü gözönüne alalım. Bu durumda $0 \leq j \leq 2$ ve $0 \leq i \leq 3$ olacağı açıktır. $i = 0$ ve $j = 0$ için; $\delta_0^3 \circ \delta_0^2$ bileşke operatörünü

hesaplayalım.

$$\delta_0^2(0) = 1 \quad \delta_0^2(1) = 2 \quad \delta_0^3(1) = 2 \quad \delta_0^3(2) = 3$$

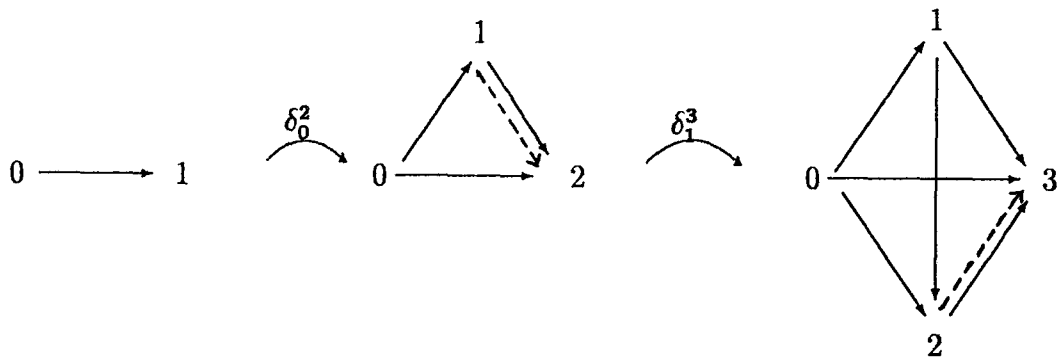


Buradan, $\delta_0^3 \circ \delta_0^2 : [1] \rightarrow [3]$ bileşkesi

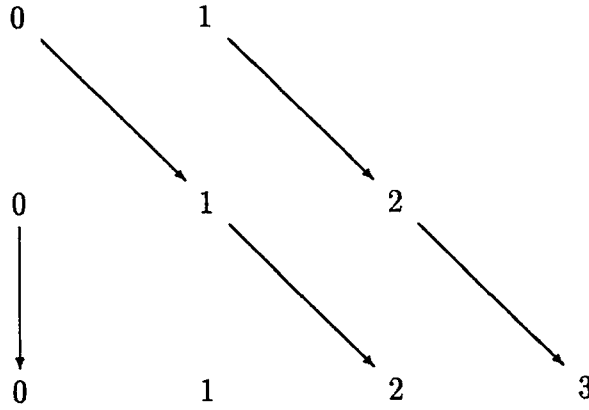


olarak bulunur. Şimdi de, $\delta_1^3 \circ \delta_0^2$ bileşke operatörünü hesaplayalım.

$$\delta_0^2(0) = 1 \quad \delta_0^2(1) = 2 \quad \delta_1^3(1) = 2 \quad \delta_1^3(2) = 3$$



Buradan, $\delta_1^3 \circ \delta_0^2 : [1] \rightarrow [3]$ bileşkesi

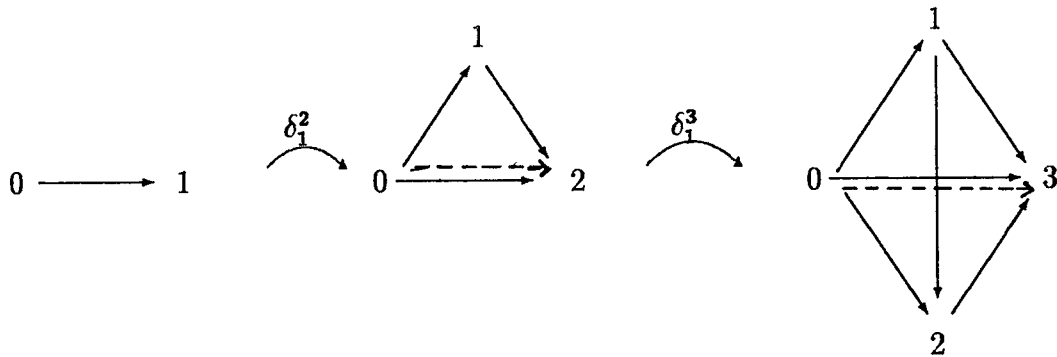


formunda bulunur. Görülüyor ki, $[1] \rightarrow [3]$ operatörü için; $\delta_0^3 \circ \delta_0^2$ bileşke operatörü ve $\delta_1^3 \circ \delta_0^2$ bileşke operatörü $0 \rightarrow 1$ dönüşümünü $[3]$ de aynı $2 \rightarrow 3$ dönüşümüne taşıyorlar. O halde,

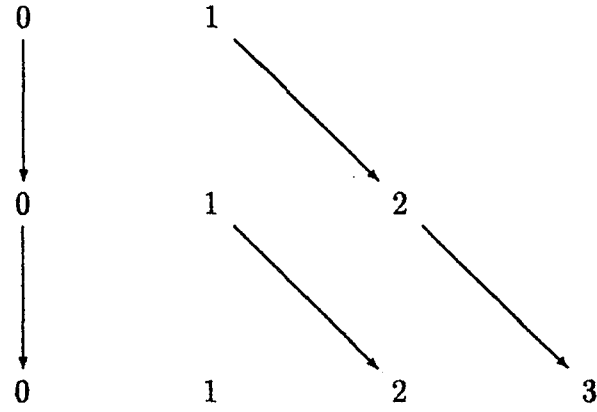
$$\left. \begin{array}{l} i = 0 \\ j = 0 \end{array} \right\} \text{ için, } \delta_0^3 \circ \delta_0^2 = \delta_1^3 \circ \delta_0^2$$

yazabiliriz. Benzer değerlendirmeyi $\delta_1^3 \circ \delta_1^2$ bileşke operatörünü oluşturmak için yapalım.

$$\delta_1^2(0) = 0 \quad \delta_1^2(1) = 2 \quad \delta_1^3(0) = 0 \quad \delta_1^3(2) = 3$$

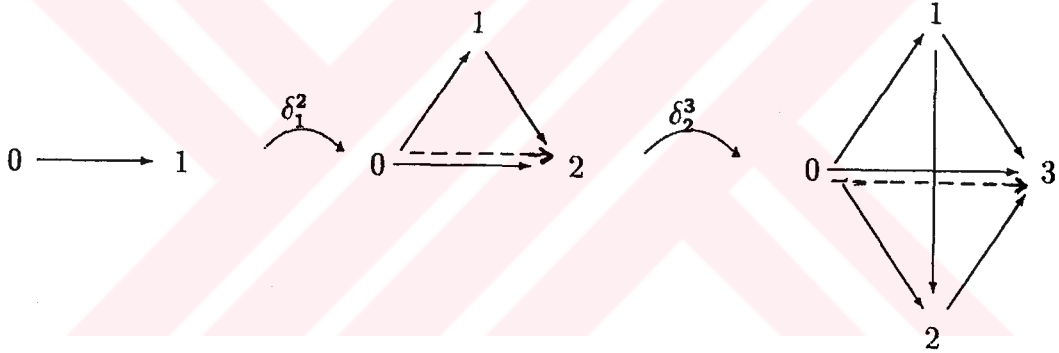


Buradan, $\delta_1^3 \circ \delta_1^2 : [1] \rightarrow [3]$ bileşkesi

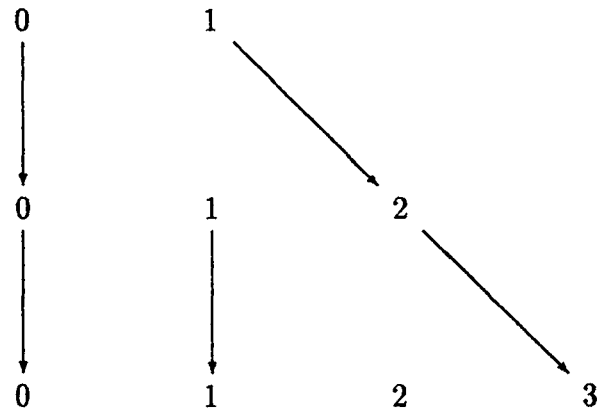


elde edilir. Şimdi de, $\delta_2^3 \circ \delta_1^2$ bileşke operatörünü hesaplayalım.

$$\delta_1^2(0) = 0 \quad \delta_1^2(1) = 2 \quad \delta_2^3(0) = 0 \quad \delta_2^3(2) = 3$$



Buradan, $\delta_2^3 \circ \delta_1^2 : [1] \rightarrow [3]$ bileşkesi



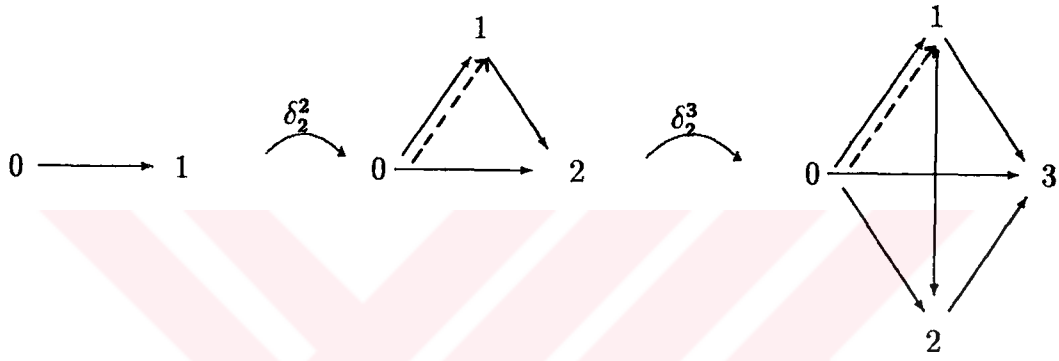
bulunur. Görülüyor ki, $[1] \rightarrow [3]$ operatörü için; $\delta_1^3 \circ \delta_1^2$ bileşke operatörü ve $\delta_2^3 \circ \delta_1^2$ bileşke operatörü $0 \rightarrow 1$ dönüşümünü $[3]$ de aynı $0 \rightarrow 3$ dönüşümüne taşıyorlar.

O halde,

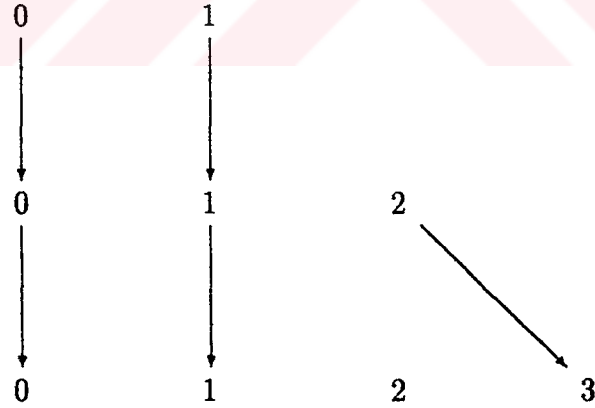
$$\left. \begin{array}{l} i = 1 \\ j = 1 \end{array} \right\} \text{ için, } \delta_1^3 \circ \delta_1^2 = \delta_2^3 \circ \delta_1^2$$

yazabiliriz. Benzer düşünceyle, $\delta_2^3 \circ \delta_2^2$ bileşke operatörünü oluşturalım.

$$\delta_2^2(0) = 0 \quad \delta_2^2(1) = 1 \quad \delta_2^3(0) = 0 \quad \delta_2^3(1) = 1$$

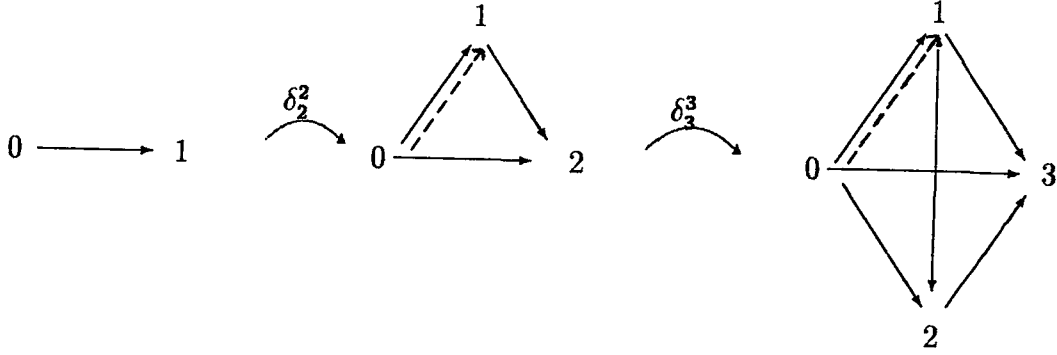


Buradan, $\delta_2^3 \circ \delta_2^2 : [1] \rightarrow [3]$ bileşkesi

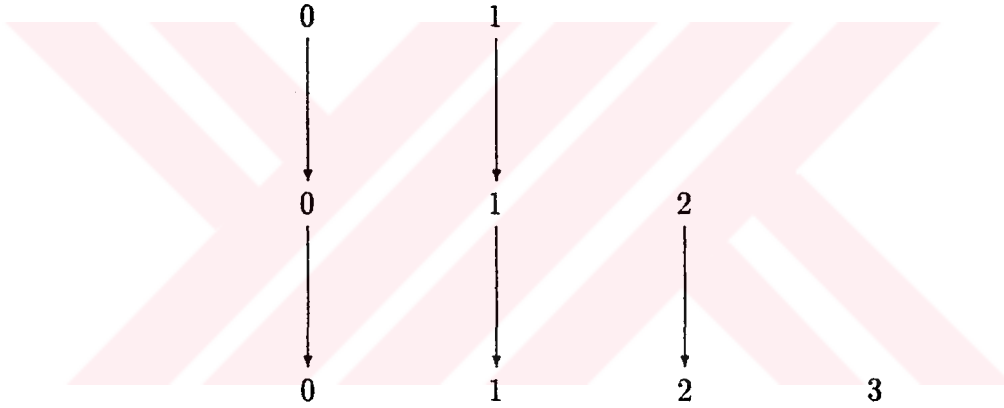


olarak elde edilir. Şimdi de, $\delta_3^3 \circ \delta_2^2$ bileşke operatörünü hesaplayalım.

$$\delta_2^2(0) = 0 \quad \delta_2^2(1) = 1 \quad \delta_3^3(0) = 0 \quad \delta_3^3(1) = 1$$



Buradan, $\delta_3^3 \circ \delta_2^2 : [1] \rightarrow [3]$ bileşkesi

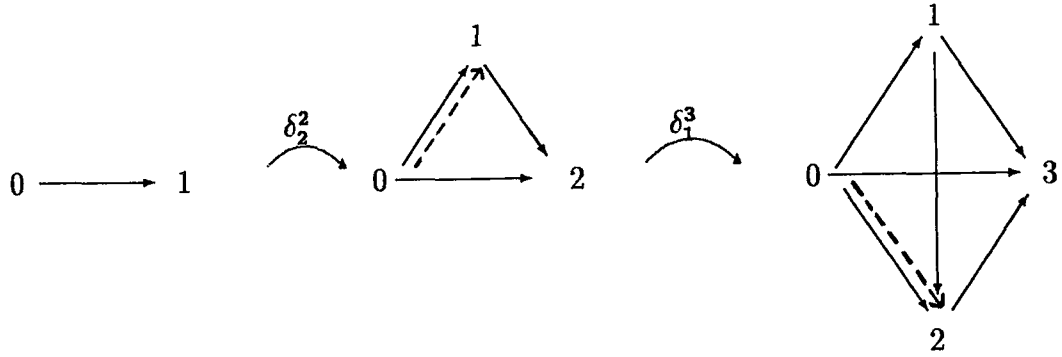


şeklinde bulunur. Görülüyor ki, $[1] \rightarrow [3]$ operatörü için; $\delta_2^3 \circ \delta_2^2$ bileşke operatörü ve $\delta_3^3 \circ \delta_2^2$ bileşke operatörü $0 \rightarrow 1$ dönüşümünü $[3]$ de aynı $0 \rightarrow 1$ dönüşümüne taşıyorlar. O halde,

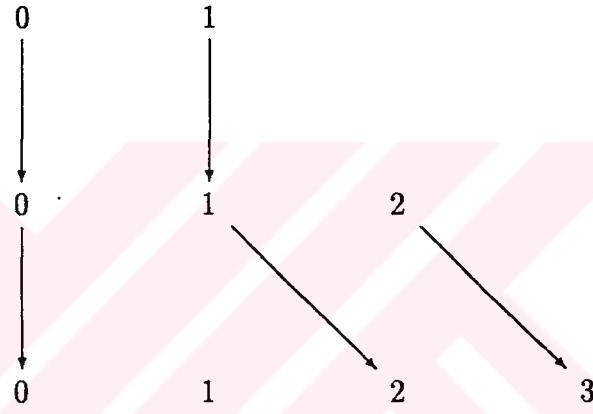
$$\left. \begin{array}{l} i = 2 \\ j = 2 \end{array} \right\} \text{ için, } \delta_2^3 \circ \delta_2^2 = \delta_3^3 \circ \delta_2^2$$

yazabiliriz. Buradan da açıkça görüldüğü gibi; $i = j$ iken $\delta_i^3 \circ \delta_j^2 = \delta_{j+1}^3 \circ \delta_i^2$ eşitliği geçerlidir. Eğer $i < j$ ise, bu durumda $i = 1$ ve $j = 2$ alalım.

$$\delta_2^2(0) = 0 \quad \delta_2^2(1) = 1 \quad \delta_1^3(0) = 0 \quad \delta_1^3(1) = 2$$

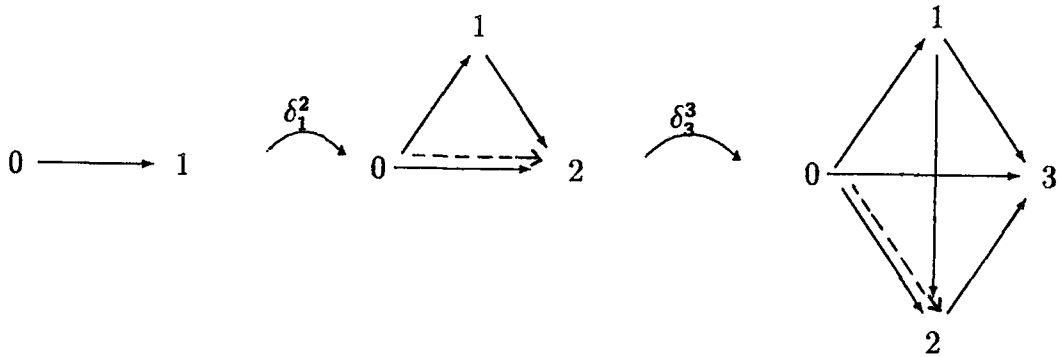


Buradan, $\delta_1^3 \circ \delta_2^2 : [1] \rightarrow [3]$ bileşkesi

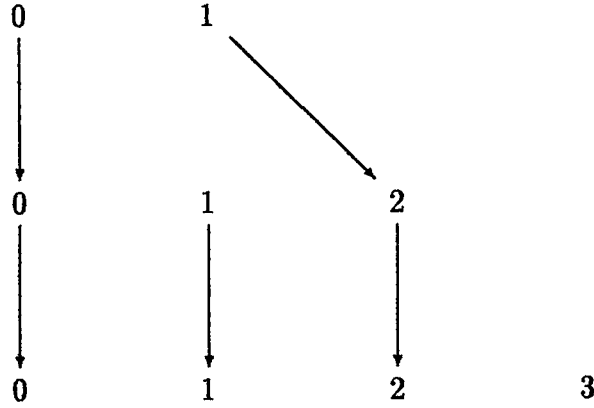


formunda elde edilir. Şimdi de, $\delta_3^3 \circ \delta_1^2$ bileşke operatörünü hesaplayalım.

$$\delta_1^2(0) = 0 \quad \delta_1^2(1) = 2 \quad \delta_3^3(0) = 0 \quad \delta_3^3(2) = 2$$



Buradan, $\delta_3^3 \circ \delta_1^2 : [1] \rightarrow [3]$ bileşkesi



olarak bulunur. Görülüyor ki, $[1] \rightarrow [3]$ operatörü için; $\delta_1^3 \circ \delta_2^2$ bileşke operatörü ve $\delta_3^3 \circ \delta_1^2$ bileşke operatörü $0 \rightarrow 1$ dönüşümünü $[3]$ de aynı $0 \rightarrow 2$ dönüşümüne taşıyorlar. O halde,

$$\left. \begin{array}{l} i = 1 \\ j = 2 \end{array} \right\} \text{ için, } \delta_1^3 \circ \delta_2^2 = \delta_3^3 \circ \delta_1^2$$

yazabiliriz. Buradan da açıkça görüldüğü gibi; $i < j$ iken de $\delta_i^3 \circ \delta_j^2 = \delta_{j+1}^3 \circ \delta_i^2$ eşitliği geçerlidir. Dikkat edilirse, $i > j$ iken $\delta_i^3 \circ \delta_j^2 \neq \delta_{j+1}^3 \circ \delta_i^2$ dir. Örneğin $i = 2$ ve $j = 1$ iken, $\delta_2^3 \circ \delta_1^2 \neq \delta_2^3 \circ \delta_2^2$ dir. O halde bu durumu genellersek,

$$i \leq j \Rightarrow \delta_i^{n+1} \circ \delta_j^n = \delta_{j+1}^{n+1} \circ \delta_i^n$$

elde ederiz.

Önerme 3.1.4 $i \leq j$ ise,

$$\sigma_j^n \circ \sigma_i^{n+1} = \sigma_i^n \circ \sigma_{j+1}^{n+1}$$

dir.

İspat: Bu özdeşliğin doğruluğunu göstermek için, yine $i \leq j$ iken eşitliğin her iki tarafındaki bileşke dönüşümlerin genel davranışlarını inceleyeceğiz. Muhtemel durumları incelemeden önce, σ_j^n operatörünün tanımını hatırlarsak $0 \leq j \leq n$ olmak üzere,

$$\sigma_j^n(x) = \begin{cases} x, & x \leq j \text{ iken} \\ x - 1, & x > j \text{ iken} \end{cases}$$

şeklinde idi. Buna göre muhtemel durumlar şunlardır:

I- $x \leq i$ için, $\sigma_i^{n+1}(x) = x$ olacaktır. $x \leq i \leq j$ olduğundan $x \leq j$ olur ki buradan $\sigma_j^n(x) = x$ elde edilir. Dolayısıyla da $(\sigma_j^n \circ \sigma_i^{n+1})(x) = x$ bulunur.

II- $x > i$ için, $\sigma_i^{n+1}(x) = x - 1$ olacaktır. $x - 1 > i - 1$ ve $i \leq j$ olduğundan $x - 1$ ile j nin şu iki durumu mevcut olabilir;

II.1- $x - 1 \leq j$ ise, $\sigma_j^n(x - 1) = x - 1$ dolayısıyla da $(\sigma_j^n \circ \sigma_i^{n+1})(x) = x - 1$ elde edilir.

II.2- $x - 1 > j$ ise, $\sigma_j^n(x - 1) = x - 2$ dolayısıyla da $(\sigma_j^n \circ \sigma_i^{n+1})(x) = x - 2$ elde edilir.

Böylece (2) özdeşliğinin sol tarafındaki bileşke operatörünün genel davranışını belirlemiş olduk. Şimdi benzer değerlendirmeyi özdeşliğin sağ tarafındaki bileşke operatörü için yapalım.

III- $x \leq j + 1$ için, $\sigma_{j+1}^{n+1}(x) = x$ olacaktır. $i \leq j$ olduğundan x ile i nin şu iki durumu mevcut olabilir;

III.1- $x \leq i$ için, $\sigma_i^n(x) = x$ dolayısıyla da $(\sigma_i^n \circ \sigma_{j+1}^{n+1})(x) = x$ bulunur.
(I durumu)

III.2- $x > i$ için, $\sigma_i^n(x) = x - 1$ dolayısıyla da $(\sigma_i^n \circ \sigma_{j+1}^{n+1})(x) = x - 1$ bulunur.
(II.1 durumu)

IV- $x > j + 1$ ise, $\sigma_{j+1}^{n+1}(x) = x - 1$ olacaktır. $i \leq j$ olduğundan $x - 1 > i$ olduğundan $\sigma_i^n(x - 1) = x - 2$ elde edilir. Dolayısıyla da $(\sigma_i^n \circ \sigma_{j+1}^{n+1})(x) = x - 2$ bulunur. (II.2 durumu)

O halde toparlarsak $i \leq j$ olmak üzere;

$$\bullet x \leq j \text{ ve } x \leq i \Rightarrow (\sigma_j^n \circ \sigma_i^{n+1})(x) = (\sigma_i^n \circ \sigma_{j+1}^{n+1})(x)$$

$$\bullet x \leq j \text{ ve } x > i \Rightarrow (\sigma_j^n \circ \sigma_i^{n+1})(x) = (\sigma_i^n \circ \sigma_{j+1}^{n+1})(x)$$

$$\bullet x > j \text{ ve } x > i \Rightarrow (\sigma_j^n \circ \sigma_i^{n+1})(x) = (\sigma_i^n \circ \sigma_{j+1}^{n+1})(x)$$

elde ediyoruz ki, x in bunlardan başka bir durumu mevcut olamayacağından sonuç olarak;

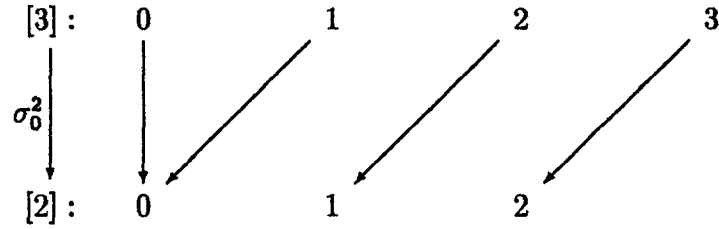
$$\sigma_j^n \circ \sigma_i^{n+1} = \sigma_i^n \circ \sigma_{j+1}^{n+1}$$

özdeşliği elde edilir. $\square$

Örnek 3.1.5 $\sigma_j^2 : [3] \rightarrow [2]$ operatörünün davranışını hem cebirsel hem de geometrik açıdan inceleyelim. Bu durumda $0 \leq j \leq 2$ olacağından üç hal söz konusudur.

$j = 0$ için;

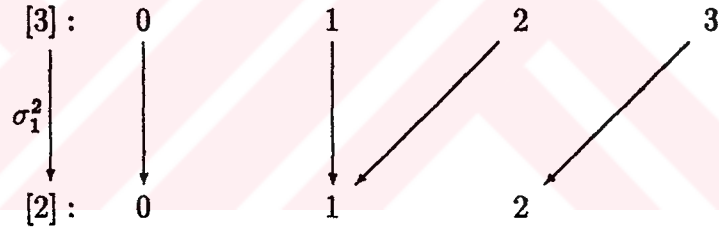
$\sigma_0^2(0) = 0, \sigma_0^2(1) = 0, \sigma_0^2(2) = 1$ ve $\sigma_0^2(3) = 2$ olacağından bu durum şematik olarak,



ile gösterilebilir.

$j = 1$ için;

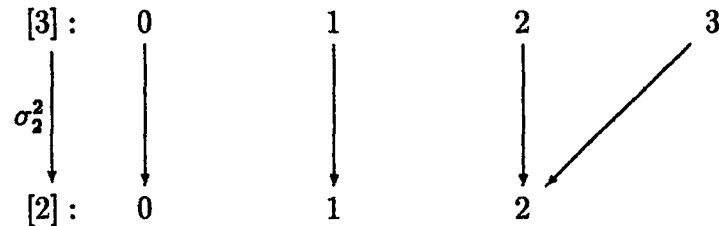
$\sigma_1^2(0) = 0, \sigma_1^2(1) = 1, \sigma_1^2(2) = 1$ ve $\sigma_1^2(3) = 2$ olacağından bu durum da şematik olarak,



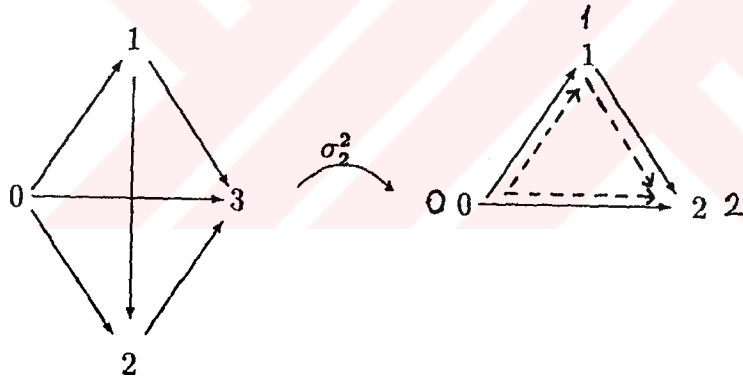
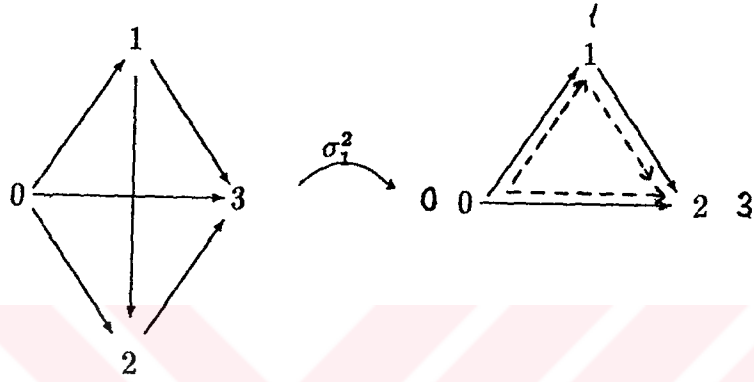
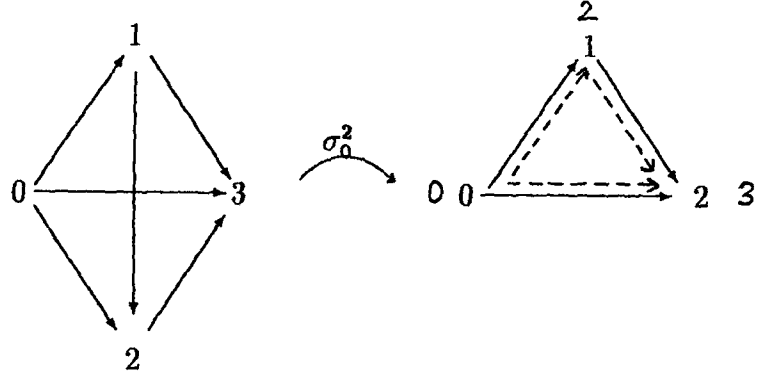
ile gösterilebilir.

$j = 2$ için;

$\sigma_2^2(0) = 0, \sigma_2^2(1) = 1, \sigma_2^2(2) = 2$ ve $\sigma_2^2(3) = 2$ olacağından bu durum da,



şeması ile gösterilebilir. O halde sırasıyla j nin 0, 1, 2 değerleri için σ_j^2 operatörleri geometrik olarak şöyle temsil edilebilirler :



Şimdi de (2) özdeşliği için bir örnek verelim.

Örnek 3.1.6 $f : [3] \rightarrow [1]$ operatörünü gözönüne alalım. Bu durumda $0 \leq j \leq 1$ ve $0 \leq i \leq 2$ olacağı açıktır. $i = 0$ ve $j = 0$ için; $\sigma_0^1 \circ \sigma_0^2$ bileşke operatörünü

hesaplayalım.

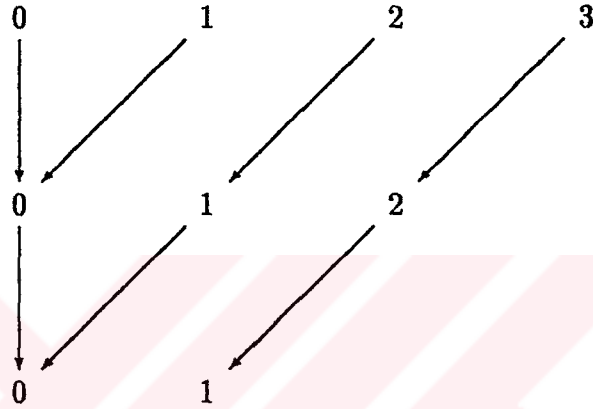
$$\sigma_0^2(0) = 0 \text{ ve } \sigma_0^1(0) = 0 \Rightarrow \sigma_0^1 \circ \sigma_0^2(0) = 0$$

$$\sigma_0^2(1) = 0 \text{ ve } \sigma_0^1(0) = 0 \Rightarrow \sigma_0^1 \circ \sigma_0^2(1) = 0$$

$$\sigma_0^2(2) = 1 \text{ ve } \sigma_0^1(1) = 0 \Rightarrow \sigma_0^1 \circ \sigma_0^2(2) = 0$$

$$\sigma_0^2(3) = 2 \text{ ve } \sigma_0^1(2) = 1 \Rightarrow \sigma_0^1 \circ \sigma_0^2(3) = 1$$

elde edilir. Buradan, $\sigma_0^1 \circ \sigma_0^2 : [3] \rightarrow [1]$ bileşkesi



olarak bulunur. Şimdi de, $\sigma_0^1 \circ \sigma_1^2$ bileşke operatörünü hesaplayalım.

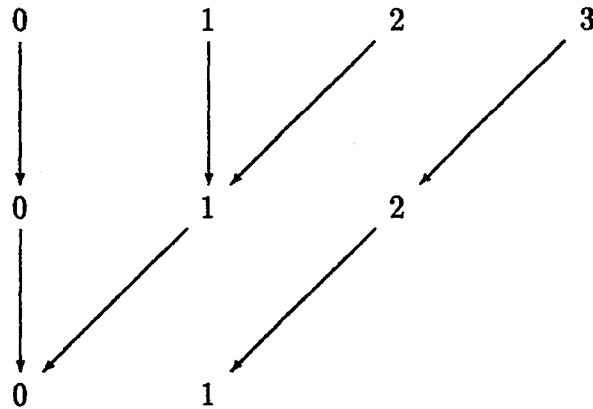
$$\sigma_1^2(0) = 0 \text{ ve } \sigma_0^1(0) = 0 \Rightarrow \sigma_0^1 \circ \sigma_1^2(0) = 0$$

$$\sigma_1^2(1) = 1 \text{ ve } \sigma_0^1(1) = 0 \Rightarrow \sigma_0^1 \circ \sigma_1^2(1) = 0$$

$$\sigma_1^2(2) = 1 \text{ ve } \sigma_0^1(1) = 0 \Rightarrow \sigma_0^1 \circ \sigma_1^2(2) = 0$$

$$\sigma_1^2(3) = 2 \text{ ve } \sigma_0^1(2) = 1 \Rightarrow \sigma_0^1 \circ \sigma_1^2(3) = 1$$

elde edilir. Buradan, $\sigma_0^1 \circ \sigma_1^2 : [3] \rightarrow [1]$ bileşkesi



formunda bulunur. Görülüyor ki, $[3] \rightarrow [1]$ operatörü için; $\sigma_0^1 \circ \sigma_0^2$ bileşke operatörü ve $\sigma_0^1 \circ \sigma_1^2$ bileşke operatörü $[3]$ deki dönüşümleri $[1]$ de aynı dönüşümlere taşıyorlar. O halde,

$$\left. \begin{array}{l} i = 0 \\ j = 0 \end{array} \right\} \text{ için, } \sigma_0^1 \circ \sigma_0^2 = \sigma_0^1 \circ \sigma_1^2$$

yazabiliriz. Benzer değerlendirmeyi $\sigma_1^1 \circ \sigma_1^2$ bileşke operatörünü oluşturmak için yapalım.

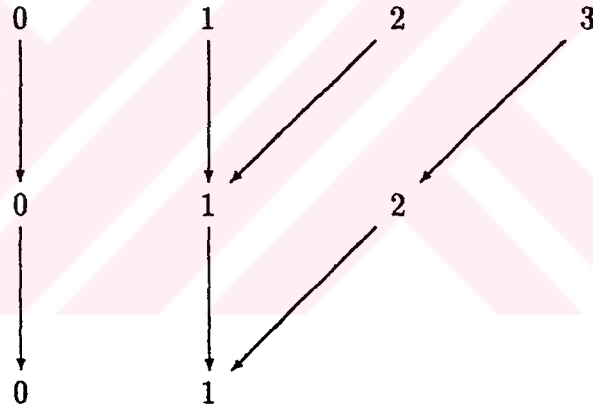
$$\sigma_1^2(0) = 0 \text{ ve } \sigma_1^1(0) = 0 \Rightarrow \sigma_1^1 \circ \sigma_1^2(0) = 0$$

$$\sigma_1^2(1) = 1 \text{ ve } \sigma_1^1(1) = 1 \Rightarrow \sigma_1^1 \circ \sigma_1^2(1) = 1$$

$$\sigma_1^2(2) = 1 \text{ ve } \sigma_1^1(1) = 1 \Rightarrow \sigma_1^1 \circ \sigma_1^2(2) = 1$$

$$\sigma_1^2(3) = 2 \text{ ve } \sigma_1^1(2) = 1 \Rightarrow \sigma_1^1 \circ \sigma_1^2(3) = 1$$

elde edilir. Buradan, $\sigma_1^1 \circ \sigma_1^2 : [3] \rightarrow [1]$ bileşkesi



şeklinde bulunur. Şimdi de, $\sigma_1^1 \circ \sigma_2^2$ bileşke operatörünü hesaplayalım.

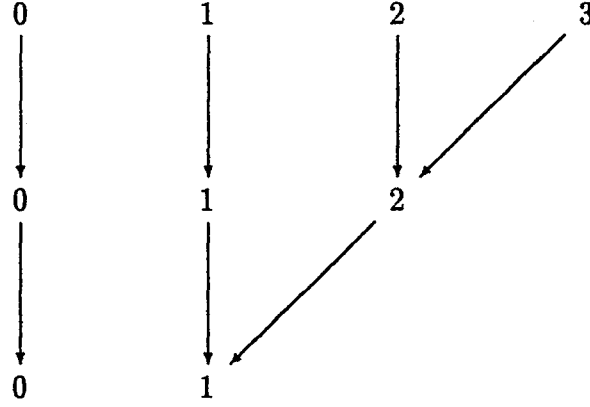
$$\sigma_2^2(0) = 0 \text{ ve } \sigma_1^1(0) = 0 \Rightarrow \sigma_1^1 \circ \sigma_2^2(0) = 0$$

$$\sigma_2^2(1) = 1 \text{ ve } \sigma_1^1(1) = 1 \Rightarrow \sigma_1^1 \circ \sigma_2^2(1) = 1$$

$$\sigma_2^2(2) = 2 \text{ ve } \sigma_1^1(2) = 1 \Rightarrow \sigma_1^1 \circ \sigma_2^2(2) = 1$$

$$\sigma_2^2(3) = 2 \text{ ve } \sigma_1^1(2) = 1 \Rightarrow \sigma_1^1 \circ \sigma_2^2(3) = 1$$

elde edilir. Buradan, $\sigma_1^1 \circ \sigma_2^2 : [3] \rightarrow [1]$ bileşkesi



olarak bulunur. Görülüyor ki, $[3] \rightarrow [1]$ operatörü için; $\sigma_1^1 \circ \sigma_1^2$ bileşke operatörü ve $\sigma_1^1 \circ \sigma_2^2$ bileşke operatörü $[3]$ deki dönüşümleri $[1]$ de aynı dönüşümlere taşıyorlar. O halde,

$$\left. \begin{array}{l} i = 1 \\ j = 1 \end{array} \right\} \text{ için, } \sigma_1^1 \circ \sigma_1^2 = \sigma_1^1 \circ \sigma_2^2$$

yazabiliriz. Buradan da açıkça görüldüğü gibi; $i = j$ iken $\sigma_j^1 \circ \sigma_i^2 = \sigma_i^1 \circ \sigma_{j+1}^2$ eşitliği geçerlidir. Eğer $i < j$ ise, bu şekildeki tek durum $i = 0$ ve $j = 1$ olacağından $\sigma_1^1 \circ \sigma_0^2$ bileşke operatörünü hesaplayalım.

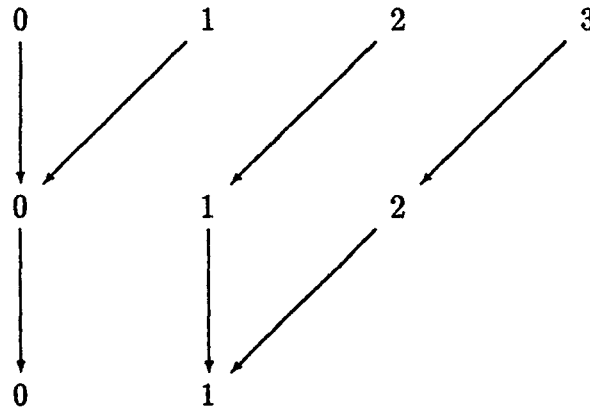
$$\sigma_0^2(0) = 0 \text{ ve } \sigma_1^1(0) = 0 \Rightarrow \sigma_1^1 \circ \sigma_0^2(0) = 0$$

$$\sigma_0^2(1) = 0 \text{ ve } \sigma_1^1(0) = 0 \Rightarrow \sigma_1^1 \circ \sigma_0^2(1) = 0$$

$$\sigma_0^2(2) = 1 \text{ ve } \sigma_1^1(1) = 1 \Rightarrow \sigma_1^1 \circ \sigma_0^2(2) = 1$$

$$\sigma_0^2(3) = 2 \text{ ve } \sigma_1^1(2) = 1 \Rightarrow \sigma_1^1 \circ \sigma_0^2(3) = 1$$

elde edilir. Buradan, $\sigma_1^1 \circ \sigma_0^2 : [3] \rightarrow [1]$ bileşkesi



formunda bulunur. Şimdi de, $\sigma_0^1 \circ \sigma_2^2$ bileşke operatörünü hesaplayalım.

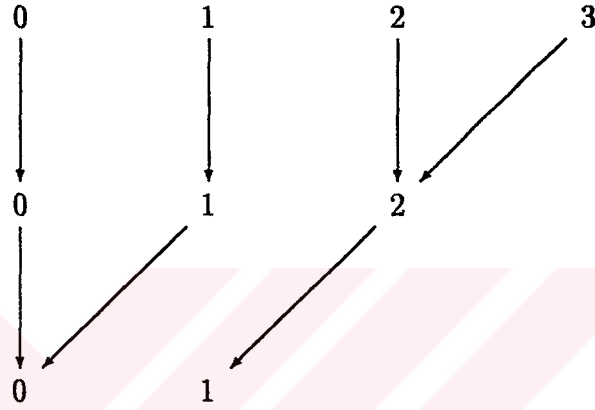
$$\sigma_2^2(0) = 0 \text{ ve } \sigma_0^1(0) = 0 \Rightarrow \sigma_0^1 \circ \sigma_2^2(0) = 0$$

$$\sigma_2^2(1) = 1 \text{ ve } \sigma_0^1(1) = 0 \Rightarrow \sigma_0^1 \circ \sigma_2^2(1) = 0$$

$$\sigma_2^2(2) = 2 \text{ ve } \sigma_0^1(2) = 1 \Rightarrow \sigma_0^1 \circ \sigma_2^2(2) = 1$$

$$\sigma_2^2(3) = 2 \text{ ve } \sigma_0^1(2) = 1 \Rightarrow \sigma_0^1 \circ \sigma_2^2(3) = 1$$

elde edilir. Buradan, $\sigma_0^1 \circ \sigma_2^2 : [3] \rightarrow [1]$ bileşkesi



olarak elde edilir. Görülüyor ki, $[3] \rightarrow [1]$ operatörü için; $\sigma_1^1 \circ \sigma_0^2$ bileşke operatörü ve $\sigma_0^1 \circ \sigma_2^2$ bileşke operatörü $[3]$ deki dönüşümleri $[1]$ de aynı dönüşümlere taşıyorlar. O halde,

$$\left. \begin{array}{l} i = 0 \\ j = 1 \end{array} \right\} \text{ için, } \sigma_1^1 \circ \sigma_0^2 = \sigma_0^1 \circ \sigma_2^2$$

yazabiliriz. Buradan da açıkça görüldüğü gibi; $i < j$ iken de $\sigma_j^1 \circ \sigma_i^2 = \sigma_i^1 \circ \sigma_{j+1}^2$ eşitliği geçerlidir. Dikkat edilirse, $i > j$ iken $\sigma_j^1 \circ \sigma_i^2 \neq \sigma_i^1 \circ \sigma_{j+1}^2$ dir. Örneğin $i = 2$ ve $j = 1$ iken, $\sigma_1^1 \circ \sigma_2^2 \neq \sigma_2^1 \circ \sigma_2^2$ dir. O halde bu durumu genellersek,

$$i \leq j \Rightarrow \sigma_j^n \circ \sigma_i^{n+1} = \sigma_i^n \circ \sigma_{j+1}^{n+1}$$

elde ederiz.

Önerme 3.1.7 $i < j$ ise,

$$\sigma_j^n \circ \sigma_i^{n+1} = \sigma_i^n \circ \sigma_{j-1}^{n-1}$$

dir.

İspat: Bu özdeşliğin doğruluğunu göstermek için, $i < j$ iken eşitliğin her iki tarafındaki bileşke operatörlerin genel davranışlarını inceleyeceğiz. Buna göre muhtemel durumlar şunlardır:

I- $x < i$ için, $\delta_i^{n+1}(x) = x$ olacaktır. $i < j$ olduğundan $x < j$ olur ki buradan $\sigma_j^n(x) = x$ elde edilir. Dolayısıyla da $(\sigma_j^n \circ \delta_i^{n+1})(x) = x$ bulunur.

II- $x \geq i$ için, $\delta_i^{n+1}(x) = x + 1$ olacaktır. $x + 1 \geq i + 1$ ve $i < j$ olduğundan $x + 1$ ile j nin şu iki durumu mevcut olabilir;

II.1- $x + 1 \leq j$ ise, $\sigma_j^n(x + 1) = x + 1$ dolayısıyla da $(\sigma_j^n \circ \delta_i^{n+1})(x) = x + 1$ elde edilir.

II.2- $x + 1 > j$ ise, $\sigma_j^n(x + 1) = x$ dolayısıyla da $(\sigma_j^n \circ \delta_i^{n+1})(x) = x$ elde edilir.

Böylece (3) özdeşliğinin sol tarafındaki bileşke operatörünün genel davranışını belirlemiş olduk. Şimdi benzer değerlendirmeyi özdeşliğin sağ tarafındaki bileşke operatörü için yapalım.

III- $x \leq j - 1$ için, $\sigma_{j-1}^{n-1}(x) = x$ olacaktır. $i < j$ olduğundan x ile i nin şu iki durumu mevcut olabilir;

III.1- $x < i$ için, $\delta_i^n(x) = x$ dolayısıyla da $(\delta_i^n \circ \sigma_{j-1}^{n-1})(x) = x$ bulunur.

(I durumu)

III.2- $x \geq i$ için, $\delta_i^n(x) = x + 1$ dolayısıyla da $(\delta_i^n \circ \sigma_{j-1}^{n-1})(x) = x + 1$ bulunur.

(II.1 durumu)

IV- $x > j - 1$ ise, $\sigma_{j-1}^{n-1}(x) = x - 1$ olacaktır. $i < j$ olduğundan $x - 1 \geq i$ olacağından $\delta_i^n(x - 1) = x$ elde edilir. Dolayısıyla da $(\delta_i^n \circ \sigma_{j-1}^{n-1})(x) = x$ bulunur.

(II.2 durumu)

O halde toparlarsak $i < j$ olmak üzere;

$$\bullet x \leq j \quad \text{ve} \quad x < i \Rightarrow (\sigma_j^n \circ \delta_i^{n+1})(x) = (\delta_i^n \circ \sigma_{j-1}^{n-1})(x)$$

$$\bullet x + 1 \leq j \quad \text{ve} \quad x \geq i \Rightarrow (\sigma_j^n \circ \delta_i^{n+1})(x) = (\delta_i^n \circ \sigma_{j-1}^{n-1})(x)$$

$$\bullet x + 1 > j \quad \text{ve} \quad x \geq i \Rightarrow (\sigma_j^n \circ \delta_i^{n+1})(x) = (\delta_i^n \circ \sigma_{j-1}^{n-1})(x)$$

elde ediyoruz ki, x in bunlardan başka bir durumu mevcut olamayacağından sonuç olarak;

$$\sigma_j^n \circ \delta_i^{n+1} = \delta_i^n \circ \sigma_{j-1}^{n-1}$$

özdeşliği elde edilir. $\square$

Örnek 3.1.8 $n = 4$ için, $\delta_i^4 : [3] \rightarrow [4]$ ve $\sigma_j^3 : [4] \rightarrow [3]$ operatörlerini gözönüne alalım. Bu durumda $0 \leq i \leq 4$ ve $0 \leq j \leq 3$ olacağı açıktır. $i = 0$ ve $j = 1$ için; $\sigma_1^4 \circ \delta_0^5$ bileşke operatörünü hesaplayalım.

$$\delta_0^5(0) = 1 \quad \text{ve} \quad \sigma_1^4(1) = 1 \Rightarrow \sigma_1^4 \circ \delta_0^5(0) = 1$$

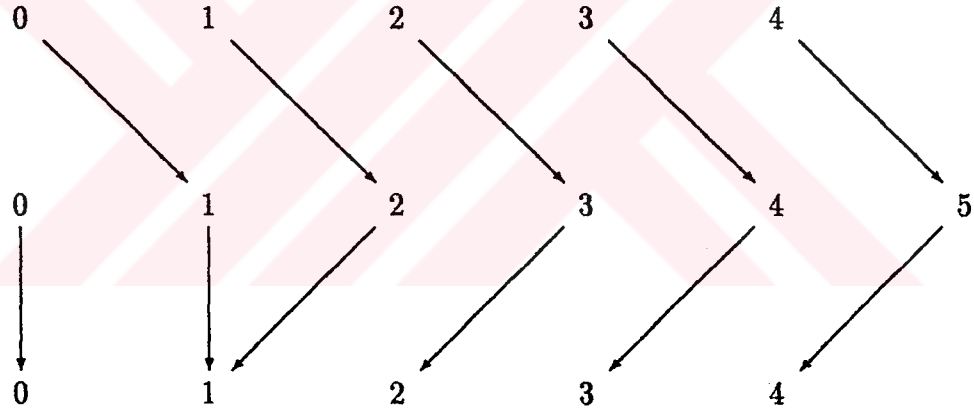
$$\delta_0^5(1) = 2 \quad \text{ve} \quad \sigma_1^4(2) = 1 \Rightarrow \sigma_1^4 \circ \delta_0^5(1) = 1$$

$$\delta_0^5(2) = 3 \quad \text{ve} \quad \sigma_1^4(3) = 2 \Rightarrow \sigma_1^4 \circ \delta_0^5(2) = 2$$

$$\delta_0^5(3) = 4 \quad \text{ve} \quad \sigma_1^4(4) = 3 \Rightarrow \sigma_1^4 \circ \delta_0^5(3) = 3$$

$$\delta_0^5(4) = 5 \quad \text{ve} \quad \sigma_1^4(5) = 4 \Rightarrow \sigma_1^4 \circ \delta_0^5(4) = 4$$

elde edilir. Buradan, $\sigma_1^4 \circ \delta_0^5 : [4] \longrightarrow [4]$ bileşkesi



olarak bulunur. Şimdi de, $\delta_0^4 \circ \sigma_0^3$ bileşke operatörünü hesaplayalım.

$$\sigma_0^3(0) = 0 \quad \text{ve} \quad \delta_0^4(0) = 1 \Rightarrow \delta_0^4 \circ \sigma_0^3(0) = 1$$

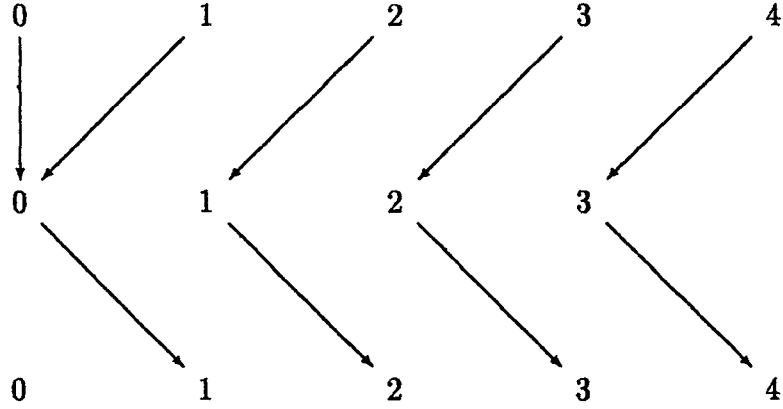
$$\sigma_0^3(1) = 0 \quad \text{ve} \quad \delta_0^4(0) = 1 \Rightarrow \delta_0^4 \circ \sigma_0^3(1) = 1$$

$$\sigma_0^3(2) = 1 \quad \text{ve} \quad \delta_0^4(1) = 2 \Rightarrow \delta_0^4 \circ \sigma_0^3(2) = 2$$

$$\sigma_0^3(3) = 2 \quad \text{ve} \quad \delta_0^4(2) = 3 \Rightarrow \delta_0^4 \circ \sigma_0^3(3) = 3$$

$$\sigma_0^3(4) = 3 \quad \text{ve} \quad \delta_0^4(3) = 4 \Rightarrow \delta_0^4 \circ \sigma_0^3(4) = 4$$

elde edilir. Buradan, $\delta_0^4 \circ \sigma_0^3 : [4] \longrightarrow [4]$ bileşkesi



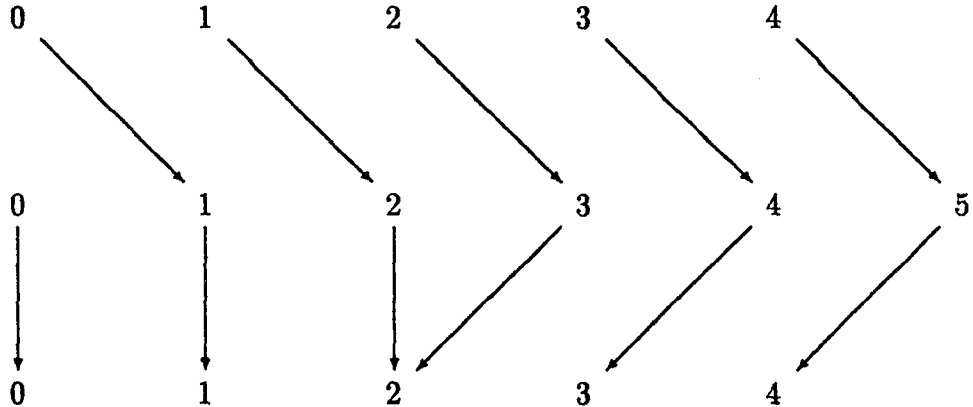
formunda bulunur. Görülüyor ki, $f : [4] \rightarrow [4]$ operatörü için; $\sigma_1^4 \circ \delta_0^5$ bileşke operatörü ve $\delta_0^4 \circ \sigma_0^3$ bileşke operatörü $[4]$ üzerinde aynı etkiye sahiptir. O halde,

$$\left. \begin{array}{l} i = 0 \\ j = 1 \end{array} \right\} \text{ için, } \sigma_1^4 \circ \delta_0^5 = \delta_0^4 \circ \sigma_0^3$$

yazabiliriz. Benzer değerlendirmeyi $\sigma_2^4 \circ \delta_0^5$ bileşke operatörünü oluşturmak için yapalım.

$$\begin{aligned} \delta_0^5(0) = 1 \text{ ve } \sigma_2^4(1) = 1 &\Rightarrow \sigma_2^4 \circ \delta_0^5(0) = 1 \\ \delta_0^5(1) = 2 \text{ ve } \sigma_2^4(2) = 2 &\Rightarrow \sigma_2^4 \circ \delta_0^5(1) = 2 \\ \delta_0^5(2) = 3 \text{ ve } \sigma_2^4(3) = 2 &\Rightarrow \sigma_2^4 \circ \delta_0^5(2) = 2 \\ \delta_0^5(3) = 4 \text{ ve } \sigma_2^4(4) = 3 &\Rightarrow \sigma_2^4 \circ \delta_0^5(3) = 3 \\ \delta_0^5(4) = 5 \text{ ve } \sigma_2^4(5) = 4 &\Rightarrow \sigma_2^4 \circ \delta_0^5(4) = 4 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, $\sigma_2^4 \circ \delta_0^5 : [4] \longrightarrow [4]$ bileşkesi



olarak bulunur. Şimdi de, $\delta_0^4 \circ \sigma_1^3$ bileşke operatörünü hesaplayalım.

$$\sigma_1^3(0) = 0 \text{ ve } \delta_0^4(0) = 1 \Rightarrow \delta_0^4 \circ \sigma_1^3(0) = 1$$

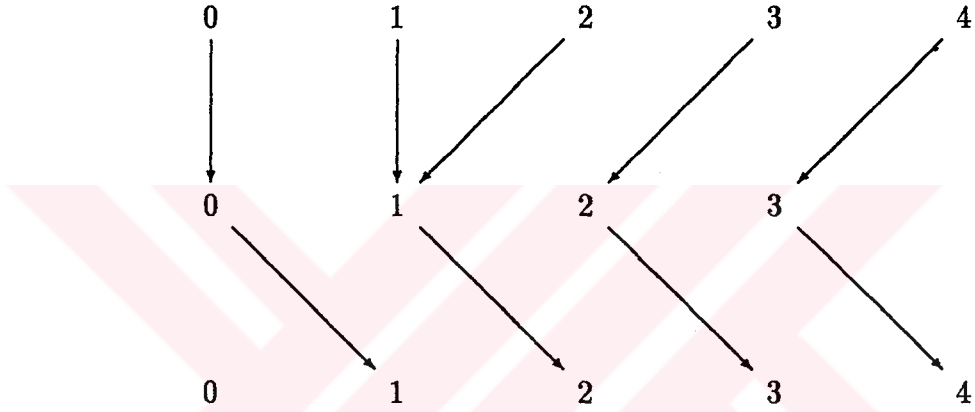
$$\sigma_1^3(1) = 1 \text{ ve } \delta_0^4(1) = 2 \Rightarrow \delta_0^4 \circ \sigma_1^3(1) = 2$$

$$\sigma_1^3(2) = 1 \text{ ve } \delta_0^4(1) = 2 \Rightarrow \delta_0^4 \circ \sigma_1^3(2) = 2$$

$$\sigma_1^3(3) = 2 \text{ ve } \delta_0^4(2) = 3 \Rightarrow \delta_0^4 \circ \sigma_1^3(3) = 3$$

$$\sigma_1^3(4) = 3 \text{ ve } \delta_0^4(3) = 4 \Rightarrow \delta_0^4 \circ \sigma_1^3(4) = 4$$

elde edilir. Buradan, $\delta_0^4 \circ \sigma_1^3 : [4] \longrightarrow [4]$ bileşkesi



şeklinde bulunur. Görülüyor ki, $f : [4] \rightarrow [4]$ operatörü için; $\sigma_2^4 \circ \delta_0^5$ bileşke operatörü ve $\delta_0^4 \circ \sigma_1^3$ bileşke operatörü $[4]$ üzerinde aynı etkiye sahiptir. O halde,

$$\left. \begin{array}{l} i = 0 \\ j = 2 \end{array} \right\} \text{ için, } \sigma_2^4 \circ \delta_0^5 = \delta_0^4 \circ \sigma_1^3$$

yazabiliriz. Benzer değerlendirmeyi $\sigma_3^4 \circ \delta_0^5$ bileşke operatörünü oluşturmak için yapalım.

$$\delta_0^5(0) = 1 \text{ ve } \sigma_3^4(1) = 1 \Rightarrow \sigma_3^4 \circ \delta_0^5(0) = 1$$

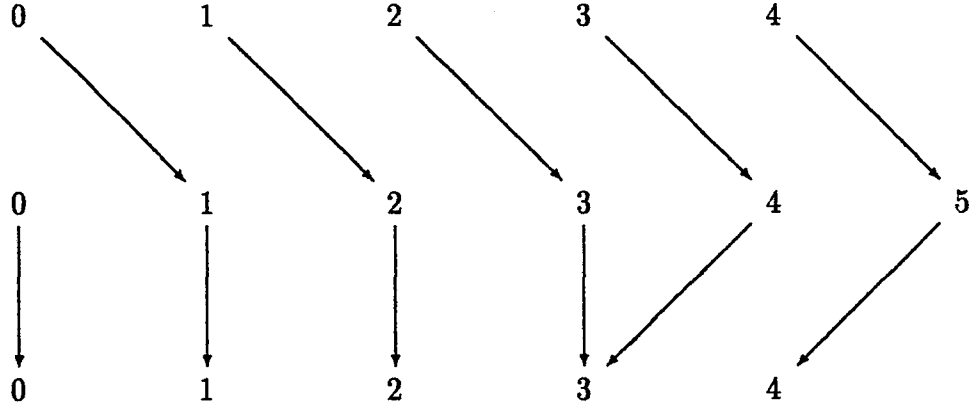
$$\delta_0^5(1) = 2 \text{ ve } \sigma_3^4(2) = 2 \Rightarrow \sigma_3^4 \circ \delta_0^5(1) = 2$$

$$\delta_0^5(2) = 3 \text{ ve } \sigma_3^4(3) = 3 \Rightarrow \sigma_3^4 \circ \delta_0^5(2) = 3$$

$$\delta_0^5(3) = 4 \text{ ve } \sigma_3^4(4) = 3 \Rightarrow \sigma_3^4 \circ \delta_0^5(3) = 3$$

$$\delta_0^5(4) = 5 \text{ ve } \sigma_3^4(5) = 4 \Rightarrow \sigma_3^4 \circ \delta_0^5(4) = 4$$

elde edilir. Buradan, $\sigma_3^4 \circ \delta_0^5 : [4] \longrightarrow [4]$ bileşkesi



olarak bulunur. Şimdi de, $\delta_0^4 \circ \sigma_2^3$ bileşke operatörünü hesaplayalım.

$$\sigma_2^3(0) = 0 \text{ ve } \delta_0^4(0) = 1 \Rightarrow \delta_0^4 \circ \sigma_2^3(0) = 1$$

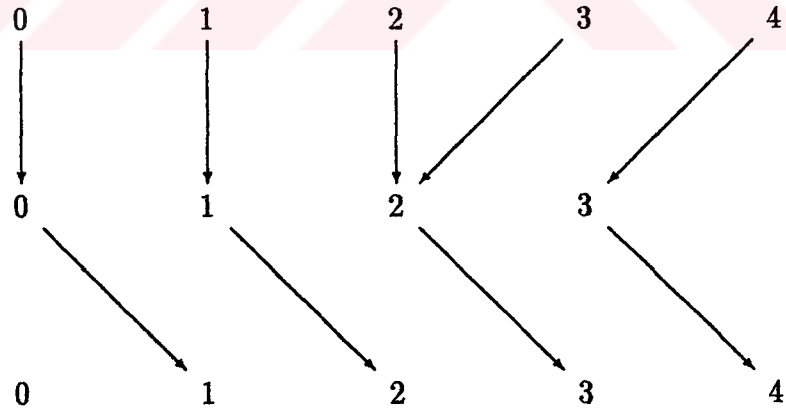
$$\sigma_2^3(1) = 1 \text{ ve } \delta_0^4(1) = 2 \Rightarrow \delta_0^4 \circ \sigma_2^3(1) = 2$$

$$\sigma_2^3(2) = 2 \text{ ve } \delta_0^4(2) = 3 \Rightarrow \delta_0^4 \circ \sigma_2^3(2) = 3$$

$$\sigma_2^3(3) = 2 \text{ ve } \delta_0^4(2) = 3 \Rightarrow \delta_0^4 \circ \sigma_2^3(3) = 3$$

$$\sigma_2^3(4) = 3 \text{ ve } \delta_0^4(3) = 4 \Rightarrow \delta_0^4 \circ \sigma_2^3(4) = 4$$

elde edilir. Buradan, $\delta_0^4 \circ \sigma_2^3 : [4] \longrightarrow [4]$ bileşkesi



formunda bulunur. Görülüyor ki, $[4] \rightarrow [4]$ operatörü için; $\sigma_3^4 \circ \delta_0^5$ bileşke operatörü ve $\delta_0^4 \circ \sigma_2^3$ bileşke operatörü $[4]$ üzerinde aynı etkiye sahiptir. O halde,

$$\left. \begin{array}{l} i = 0 \\ j = 3 \end{array} \right\} \text{ için, } \sigma_3^4 \circ \delta_0^5 = \delta_0^4 \circ \sigma_2^3$$

yazabiliriz. Benzer değerlendirmeyi $\sigma_3^4 \circ \delta_1^5$ bileşke operatörünü oluşturmak için yapalım.

$$\delta_1^5(0) = 0 \text{ ve } \sigma_3^4(0) = 0 \Rightarrow \sigma_3^4 \circ \delta_1^5(0) = 0$$

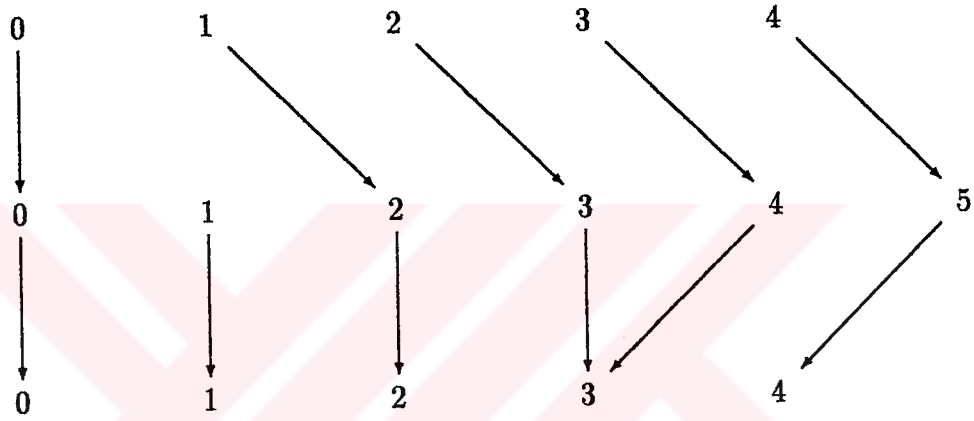
$$\delta_1^5(1) = 2 \text{ ve } \sigma_3^4(2) = 2 \Rightarrow \sigma_3^4 \circ \delta_1^5(1) = 2$$

$$\delta_1^5(2) = 3 \text{ ve } \sigma_3^4(3) = 3 \Rightarrow \sigma_3^4 \circ \delta_1^5(2) = 3$$

$$\delta_1^5(3) = 4 \text{ ve } \sigma_3^4(4) = 3 \Rightarrow \sigma_3^4 \circ \delta_1^5(3) = 3$$

$$\delta_1^5(4) = 5 \text{ ve } \sigma_3^4(5) = 4 \Rightarrow \sigma_3^4 \circ \delta_1^5(4) = 4$$

elde edilir. Buradan, $\sigma_3^4 \circ \delta_1^5 : [4] \longrightarrow [4]$ bileşkesi



şeklinde bulunur. Şimdi de, $\delta_1^4 \circ \sigma_2^3$ bileşke operatörünü hesaplayalım.

$$\sigma_2^3(0) = 0 \text{ ve } \delta_1^4(0) = 0 \Rightarrow \delta_1^4 \circ \sigma_2^3(0) = 0$$

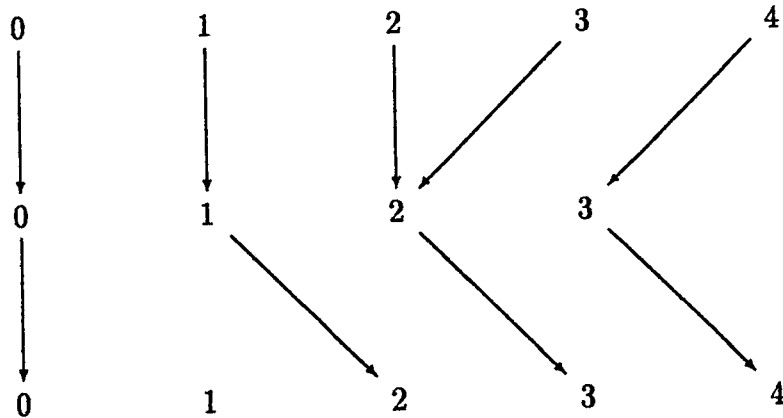
$$\sigma_2^3(1) = 1 \text{ ve } \delta_1^4(1) = 2 \Rightarrow \delta_1^4 \circ \sigma_2^3(1) = 2$$

$$\sigma_2^3(2) = 2 \text{ ve } \delta_1^4(2) = 3 \Rightarrow \delta_1^4 \circ \sigma_2^3(2) = 3$$

$$\sigma_2^3(3) = 2 \text{ ve } \delta_1^4(2) = 3 \Rightarrow \delta_1^4 \circ \sigma_2^3(3) = 3$$

$$\sigma_2^3(4) = 3 \text{ ve } \delta_1^4(3) = 4 \Rightarrow \delta_1^4 \circ \sigma_2^3(4) = 4$$

elde edilir. Buradan, $\delta_1^4 \circ \sigma_2^3 : [4] \longrightarrow [4]$ bileşkesi



olarak bulunur. Görülüyor ki, $f : [4] \rightarrow [4]$ operatörü için; $\sigma_3^4 \circ \delta_1^5$ bileşke operatörü ve $\delta_1^4 \circ \sigma_2^3$ bileşke operatörü $[4]$ üzerinde aynı etkiye sahiptir. O halde,

$$\left. \begin{array}{l} i = 1 \\ j = 3 \end{array} \right\} \text{ için, } \sigma_3^4 \circ \delta_1^5 = \delta_1^4 \circ \sigma_2^3$$

yazabiliriz. Benzer değerlendirmeyi $\sigma_3^4 \circ \delta_2^5$ bileşke operatörünü oluşturmak için yapalım.

$$\delta_2^5(0) = 0 \text{ ve } \sigma_3^4(0) = 0 \Rightarrow \sigma_3^4 \circ \delta_2^5(0) = 0$$

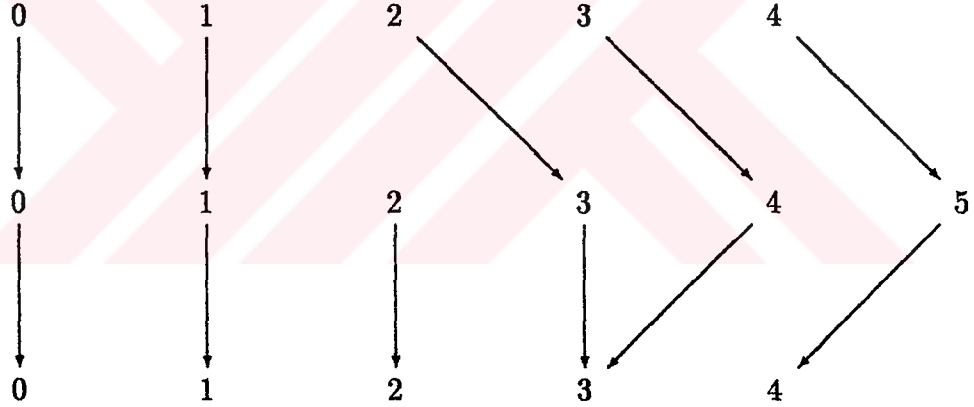
$$\delta_2^5(1) = 1 \text{ ve } \sigma_3^4(1) = 1 \Rightarrow \sigma_3^4 \circ \delta_2^5(1) = 1$$

$$\delta_2^5(2) = 3 \text{ ve } \sigma_3^4(3) = 3 \Rightarrow \sigma_3^4 \circ \delta_2^5(2) = 3$$

$$\delta_2^5(3) = 4 \text{ ve } \sigma_3^4(4) = 3 \Rightarrow \sigma_3^4 \circ \delta_2^5(3) = 3$$

$$\delta_2^5(4) = 5 \text{ ve } \sigma_3^4(5) = 4 \Rightarrow \sigma_3^4 \circ \delta_2^5(4) = 4$$

elde edilir. Buradan, $\sigma_3^4 \circ \delta_2^5 : [4] \longrightarrow [4]$ bileşkesi



şeklinde bulunur. Şimdi de, $\delta_2^4 \circ \sigma_2^3$ bileşke operatörünü hesaplayalım.

$$\sigma_2^3(0) = 0 \text{ ve } \delta_2^4(0) = 0 \Rightarrow \delta_2^4 \circ \sigma_2^3(0) = 0$$

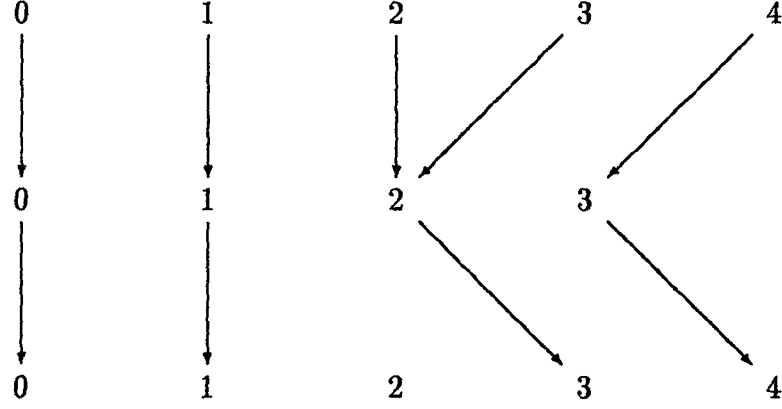
$$\sigma_2^3(1) = 1 \text{ ve } \delta_2^4(1) = 1 \Rightarrow \delta_2^4 \circ \sigma_2^3(1) = 1$$

$$\sigma_2^3(2) = 2 \text{ ve } \delta_2^4(2) = 3 \Rightarrow \delta_2^4 \circ \sigma_2^3(2) = 3$$

$$\sigma_2^3(3) = 2 \text{ ve } \delta_2^4(2) = 3 \Rightarrow \delta_2^4 \circ \sigma_2^3(3) = 3$$

$$\sigma_2^3(4) = 3 \text{ ve } \delta_2^4(3) = 4 \Rightarrow \delta_2^4 \circ \sigma_2^3(4) = 4$$

elde edilir. Buradan, $\delta_2^4 \circ \sigma_2^3 : [4] \longrightarrow [4]$ bileşkesi



bulunur. Görülüyor ki, $f : [4] \rightarrow [4]$ operatörü için; $\sigma_2^4 \circ \delta_0^5$ bileşke operatörü ve $\delta_0^4 \circ \sigma_1^3$ bileşke operatörü $[4]$ üzerinde aynı etkiye sahiptir. O halde,

$$\left. \begin{array}{l} i = 2 \\ j = 3 \end{array} \right\} \text{ için, } \sigma_3^4 \circ \delta_2^5 = \delta_2^4 \circ \sigma_2^3$$

yazabiliriz. Buradan da açıkça görüldüğü gibi; $i < j$ iken $\sigma_j^4 \circ \delta_i^5 = \delta_i^4 \circ \sigma_{j-1}^3$ eşitliği geçerlidir. Dikkat edilirse $i \geq j$ iken, $\sigma_j^4 \circ \delta_i^5 \neq \delta_i^4 \circ \sigma_{j-1}^3$ dir. O halde bu durumu genellersek,

$$i < j \Rightarrow \sigma_j^n \circ \delta_i^{n+1} = \delta_i^n \circ \sigma_{j-1}^{n-1}$$

elde ederiz.

Önerme 3.1.9 $i = j$ veya $i = j + 1$ ise,

$$\sigma_j^n \circ \delta_i^{n+1} = \text{id}_{[n]}$$

dir.

İspat: Bu özdeşliğin doğruluğunu göstermek için önce $i = j$ iken eşitliğin sol tarafındaki bileşke operatörün genel davranışını inceleyeceğiz. Buna göre muhtemel durumlar şunlardır:

I- $x < i$ için, $\delta_i^{n+1}(x) = x$ olacaktır. $i = j$ olduğundan $x < j$ olur ki buradan $\sigma_j^n(x) = x$ elde edilir. Dolayısıyla da $(\sigma_j^n \circ \delta_i^{n+1})(x) = x$ bulunur.

II- $x \geq i$ için, $\delta_i^{n+1}(x) = x + 1$ olacaktır. $x + 1 \geq i + 1$ ve $i = j$ olduğundan $x + 1 > j$ olarak bulunur ki buradan $\sigma_j^n(x + 1) = x$ elde edilir. Dolayısıyla da $(\sigma_j^n \circ \delta_i^{n+1})(x) = x$ bulunur.

O halde toparlarsak $i = j$ olmak üzere;

$$\bullet x < i \text{ ve } x \leq j \Rightarrow (\sigma_j^n \circ \delta_i^{n+1})(x) = x$$

$$\bullet x \geq i \text{ ve } x > j \Rightarrow (\sigma_j^n \circ \delta_i^{n+1})(x) = x$$

elde ediyoruz ki, x in bunlardan başka bir durumu mevcut olamayacağından sonuç olarak;

$$\sigma_j^n \circ \delta_i^{n+1} = \text{id}_{[n]}$$

özdeşliği elde edilir. Şimdi de $i = j + 1$ iken eşitliğin sol tarafındaki bileşke operatörün genel davranışını inceleyeceğiz. Buna göre muhtemel durumlar şunlardır:

I- $x < i$ için, $\delta_i^{n+1}(x) = x$ olacaktır. $i = j$ olduğundan $x \leq j$ olur ki buradan $\sigma_j^n(x) = x$ elde edilir. Dolayısıyla da $(\sigma_j^n \circ \delta_i^{n+1})(x) = x$ bulunur.

II- $x \geq i$ için, $\delta_i^{n+1}(x) = x + 1$ olacaktır. $x + 1 \geq i + 1$ ve $i = j + 1$ olduğundan $x + 1 > j$ olur ki buradan $\sigma_j^n(x + 1) = x$ elde edilir. Dolayısıyla da $(\sigma_j^n \circ \delta_i^{n+1})(x) = x$ bulunur.

O halde toparlarsak $i = j + 1$ olmak üzere;

$$\bullet x < i \text{ ve } x \leq j \Rightarrow (\sigma_j^n \circ \delta_i^{n+1})(x) = x$$

$$\bullet x \geq i \text{ ve } x > j \Rightarrow (\sigma_j^n \circ \delta_i^{n+1})(x) = x$$

elde ediyoruz ki, x in bunlardan başka bir durumu mevcut olamayacağından sonuç olarak yine;

$$\sigma_j^n \circ \delta_i^{n+1} = \text{id}_{[n]}$$

özdeşliği elde edilir. $\square$

Örnek 3.1.10 $n = 3$ için, $\delta_i^4 : [3] \rightarrow [4]$ ve $\sigma_j^3 : [4] \rightarrow [3]$ operatörlerini gözönüne alalım. Bu durumda $0 \leq i \leq 4$ ve $0 \leq j \leq 3$ olacağı açıktır. $i = 0$ ve $j = 0$ için;

$\sigma_0^3 \circ \delta_0^4$ bileşke operatörünü hesaplayalım.

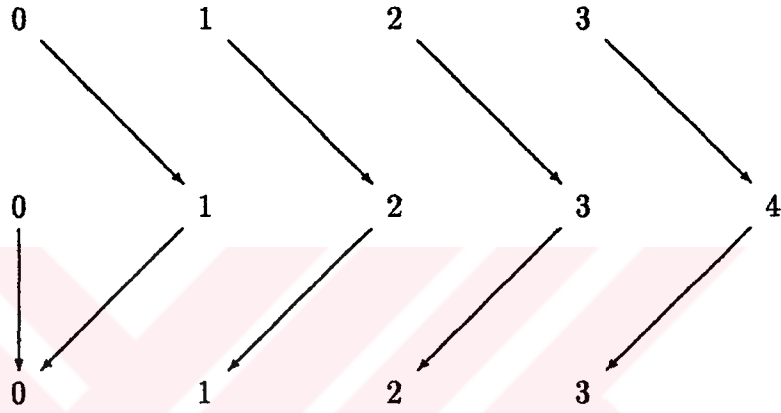
$$\delta_0^4(0) = 1 \text{ ve } \sigma_0^3(1) = 0 \Rightarrow \sigma_0^3 \circ \delta_0^4(0) = 0$$

$$\delta_0^4(1) = 2 \text{ ve } \sigma_0^3(2) = 1 \Rightarrow \sigma_0^3 \circ \delta_0^4(1) = 1$$

$$\delta_0^4(2) = 3 \text{ ve } \sigma_0^3(3) = 2 \Rightarrow \sigma_0^3 \circ \delta_0^4(2) = 2$$

$$\delta_0^4(3) = 4 \text{ ve } \sigma_0^3(4) = 3 \Rightarrow \sigma_0^3 \circ \delta_0^4(3) = 3$$

elde edilir. Buradan $\sigma_0^3 \circ \delta_0^4 : [3] \longrightarrow [3]$ bileşkesi



olarak bulunur. O halde,

$$\left. \begin{array}{l} i = 0 \\ j = 0 \end{array} \right\} \text{ için, } \sigma_0^3 \circ \delta_0^4 = \text{id}_{[3]}$$

yazabiliriz. Şimdi, $i = 1$ ve $j = 1$ için $\sigma_1^3 \circ \delta_1^4$ bileşke operatörünü hesaplayalım.

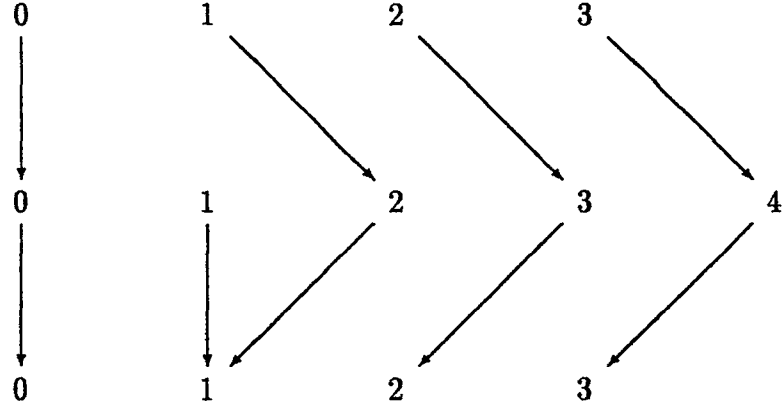
$$\delta_1^4(0) = 0 \text{ ve } \sigma_1^3(0) = 0 \Rightarrow \sigma_1^3 \circ \delta_1^4(0) = 0$$

$$\delta_1^4(1) = 2 \text{ ve } \sigma_1^3(2) = 1 \Rightarrow \sigma_1^3 \circ \delta_1^4(1) = 1$$

$$\delta_1^4(2) = 3 \text{ ve } \sigma_1^3(3) = 2 \Rightarrow \sigma_1^3 \circ \delta_1^4(2) = 2$$

$$\delta_1^4(3) = 4 \text{ ve } \sigma_1^3(4) = 3 \Rightarrow \sigma_1^3 \circ \delta_1^4(3) = 3$$

elde edilir. Buradan $\sigma_1^3 \circ \delta_1^4 : [3] \longrightarrow [3]$ bileşkesi



formunda bulunur. O halde,

$$\left. \begin{array}{l} i = 1 \\ j = 1 \end{array} \right\} \text{ için, } \sigma_1^3 \circ \delta_1^4 = \text{id}_{[3]}$$

yazabiliriz. Şimdi de, $i = 2$ ve $j = 2$ için $\sigma_2^3 \circ \delta_2^4$ bileşke operatörünü hesaplayalım.

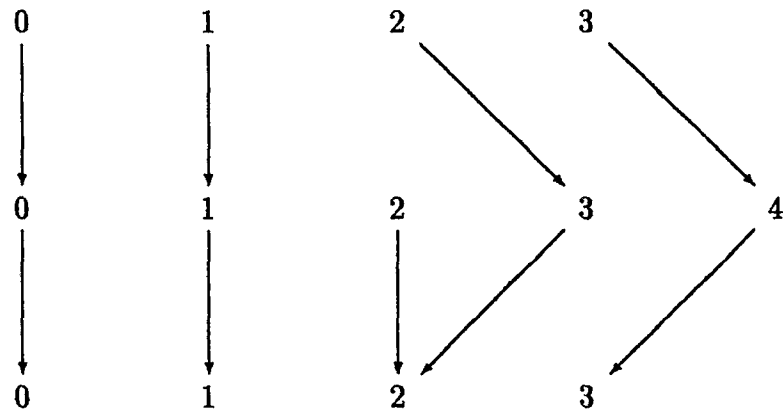
$$\delta_2^4(0) = 0 \text{ ve } \sigma_2^3(0) = 0 \Rightarrow \sigma_2^3 \circ \delta_2^4(0) = 0$$

$$\delta_2^4(1) = 1 \text{ ve } \sigma_2^3(1) = 1 \Rightarrow \sigma_2^3 \circ \delta_2^4(1) = 1$$

$$\delta_2^4(2) = 3 \text{ ve } \sigma_2^3(3) = 2 \Rightarrow \sigma_2^3 \circ \delta_2^4(2) = 2$$

$$\delta_2^4(3) = 4 \text{ ve } \sigma_2^3(4) = 3 \Rightarrow \sigma_2^3 \circ \delta_2^4(3) = 3$$

elde edilir. Buradan $\sigma_2^3 \circ \delta_2^4 : [3] \longrightarrow [3]$ bileşkesi



şeklinde bulunur. O halde,

$$\left. \begin{array}{l} i = 2 \\ j = 2 \end{array} \right\} \text{ için, } \sigma_2^3 \circ \delta_2^4 = \text{id}_{[3]}$$

yazabiliriz. $i = 3$ ve $j = 3$ için de hesaplanırsa yine $\sigma_3^3 \circ \delta_3^4 = \text{id}_{[3]}$ bulunur. Buradan da açıkça görüldüğü gibi; $i = j$ iken $\sigma_j^3 \circ \delta_i^4 = \text{id}_{[3]}$ eşitliği geçerlidir. Dikkat edilirse $i < j$ iken, $\sigma_j^3 \circ \delta_i^4 \neq \text{id}_{[3]}$ dir. O halde bu durumu genellersek,

$$i = j \Rightarrow \sigma_j^n \circ \delta_i^{n+1} = \text{id}_{[n]}$$

elde ederiz.

Örnek 3.1.11 Tekrar $n = 3$ için, $\delta_i^4 : [3] \rightarrow [4]$ ve $\sigma_j^3 : [4] \rightarrow [3]$ operatörlerini gözönüne alalım. Bu durumda $0 \leq i \leq 4$ ve $0 \leq j \leq 3$ olacağı açıktır. $i = 1$ ve $j = 0$ için; $\sigma_0^3 \circ \delta_1^4$ bileşke operatörünü hesaplayalım.

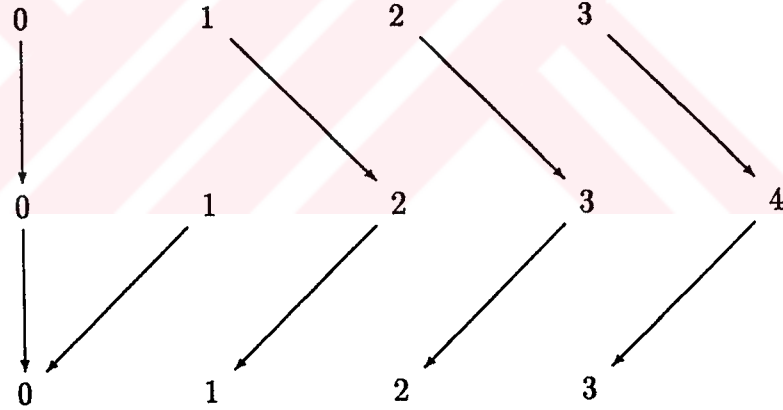
$$\delta_1^4(0) = 0 \quad \text{ve} \quad \sigma_0^3(0) = 0 \Rightarrow \sigma_0^3 \circ \delta_1^4(0) = 0$$

$$\delta_1^4(1) = 2 \quad \text{ve} \quad \sigma_0^3(2) = 1 \Rightarrow \sigma_0^3 \circ \delta_1^4(1) = 1$$

$$\delta_1^4(2) = 3 \quad \text{ve} \quad \sigma_0^3(3) = 2 \Rightarrow \sigma_0^3 \circ \delta_1^4(2) = 2$$

$$\delta_1^4(3) = 4 \quad \text{ve} \quad \sigma_0^3(4) = 3 \Rightarrow \sigma_0^3 \circ \delta_1^4(3) = 3$$

elde edilir. Buradan $\sigma_0^3 \circ \delta_1^4 : [3] \rightarrow [3]$ bileşkesi



olarak bulunur. O halde,

$$\left. \begin{array}{l} i = 1 \\ j = 0 \end{array} \right\} \text{ için, } \sigma_0^3 \circ \delta_1^4 = \text{id}_{[3]}$$

yazabiliriz. Şimdi, $i = 2$ ve $j = 1$ için $\sigma_1^3 \circ \delta_2^4$ bileşke operatörünü hesaplayalım.

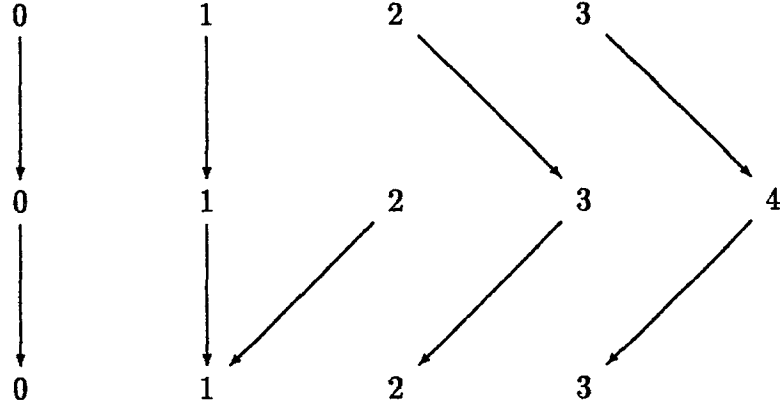
$$\delta_2^4(0) = 0 \quad \text{ve} \quad \sigma_1^3(0) = 0 \Rightarrow \sigma_1^3 \circ \delta_2^4(0) = 0$$

$$\delta_2^4(1) = 1 \quad \text{ve} \quad \sigma_1^3(1) = 1 \Rightarrow \sigma_1^3 \circ \delta_2^4(1) = 1$$

$$\delta_2^4(2) = 3 \quad \text{ve} \quad \sigma_1^3(3) = 2 \Rightarrow \sigma_1^3 \circ \delta_2^4(2) = 2$$

$$\delta_2^4(3) = 4 \quad \text{ve} \quad \sigma_1^3(4) = 3 \Rightarrow \sigma_1^3 \circ \delta_2^4(3) = 3$$

elde edilir. Buradan $\sigma_1^3 \circ \delta_2^4 : [3] \longrightarrow [3]$ bileşkesi



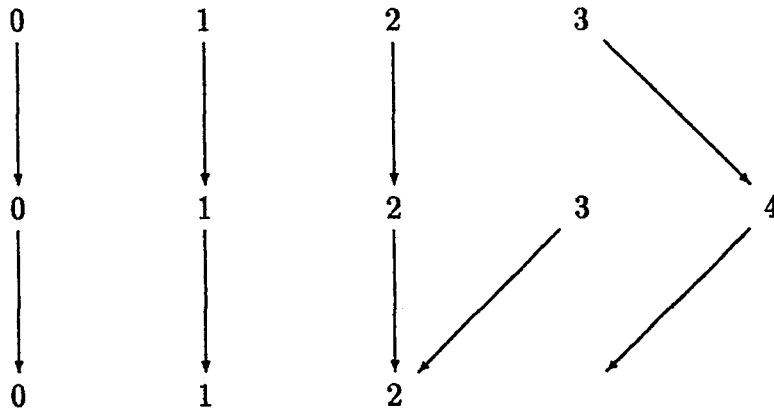
şeklinde bulunur. O halde,

$$\left. \begin{array}{l} i = 2 \\ j = 1 \end{array} \right\} \text{ için, } \sigma_1^3 \circ \delta_2^4 = \text{id}_{[3]}$$

yazabiliriz. Şimdi de, $i = 3$ ve $j = 2$ için $\sigma_2^3 \circ \delta_3^4$ bileşke operatörünü hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \delta_3^4(0) = 0 \quad \text{ve} \quad \sigma_2^3(0) = 0 &\Rightarrow \sigma_2^3 \circ \delta_3^4(0) = 0 \\ \delta_3^4(1) = 1 \quad \text{ve} \quad \sigma_2^3(1) = 1 &\Rightarrow \sigma_2^3 \circ \delta_3^4(1) = 1 \\ \delta_3^4(2) = 2 \quad \text{ve} \quad \sigma_2^3(2) = 2 &\Rightarrow \sigma_2^3 \circ \delta_3^4(2) = 2 \\ \delta_3^4(3) = 4 \quad \text{ve} \quad \sigma_2^3(4) = 3 &\Rightarrow \sigma_2^3 \circ \delta_3^4(3) = 3 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\sigma_2^3 \circ \delta_3^4 : [3] \longrightarrow [3]$ bileşkesi



formunda bulunur. O halde,

$$\left. \begin{array}{l} i = 3 \\ j = 2 \end{array} \right\} \text{ için, } \sigma_2^3 \circ \delta_3^4 = \text{id}_{[3]}$$

yazabiliriz. $i = 4$ ve $j = 3$ için de hesaplanacak olursa yine $\sigma_3^3 \circ \delta_4^4 = \text{id}_{[3]}$ elde edilecektir. Buradan da açıkça görüldüğü gibi; $i = j + 1$ iken $\sigma_j^3 \circ \delta_i^4 = \text{id}_{[3]}$ eşitliği geçerlidir. Dikkat edilirse $i \neq j + 1$ iken, $\sigma_j^3 \circ \delta_i^4 \neq \text{id}_{[3]}$ dir. O halde bu durumu genellersek,

$$i = j + 1 \Rightarrow \sigma_j^{n-1} \circ \delta_i^n = \text{id}_{[n]}$$

elde ederiz.

Önerme 3.1.12 $i > j + 1$ ise,

$$\sigma_j^n \circ \delta_i^{n+1} = \delta_{i-1}^n \circ \sigma_j^{n-1}$$

dir.

İspat: Bu özdeşliğin doğruluğunu göstermek için, $i > j + 1$ iken eşitliğin her iki tarafındaki bileşke operatörlerin genel davranışlarını inceleyeceğiz. Buna göre muhtemel durumlar şunlardır:

I- $x < i$ için, $\delta_i^{n+1}(x) = x$ olacaktır. $i > j + 1$ olduğundan x ile j nin şu iki durumu mevcut olabilir;

I.1- $x \leq j$ ise, $\sigma_i^n(x) = x$ dolayısıyla da $(\sigma_j^n \circ \delta_i^{n+1})(x) = x$ elde edilir.

I.2- $x > j$ ise, $\sigma_j^n(x) = x - 1$ dolayısıyla da $(\sigma_j^n \circ \delta_i^{n+1})(x) = x - 1$ elde edilir.

II- $x \geq i$ için, $\delta_i^{n+1}(x) = x + 1$ olacaktır. $x \geq i > j + 1$ olduğundan $x + 1 > j$ olur ki buradan $\sigma_i^n(x + 1) = x$ elde edilir. Dolayısıyla da $(\sigma_j^n \circ \delta_i^{n+1})(x) = x$ elde edilir.

Böylece (5) özdeşliğinin sol tarafındaki bileşke operatörünün genel davranışını belirlemiş olduk. Şimdi benzer değerlendirmeyi özdeşliğin sağ tarafındaki bileşke operatörü için yapalım.

III- $x \leq j$ için, $\sigma_j^{n-1}(x) = x$ olacaktır. $i > j + 1$ olduğundan $x < i$ olur ki buradan $\delta_{i-1}^n(x) = x$ elde edilir. Dolayısıyla $(\delta_{i-1}^n \circ \sigma_j^{n-1})(x) = x$ bulunur.

(I.1 durumu)

IV- $x > j$ için, $\sigma_j^{n-1}(x) = x - 1$ olacaktır. $i > j + 1$ olduğundan $x - 1$ ile $i - 1$ in şu iki durumu mevcut olabilir;

IV.1- $x - 1 < i - 1$ ise, $\delta_{i-1}^n(x - 1) = x - 1$ dolayısıyla $(\delta_{i-1}^n \circ \sigma_j^{n-1})(x) = x - 1$ bulunur. (**I.2** durumu)

IV.1- $x - 1 \geq i - 1$ ise, $\delta_{i-1}^n(x - 1) = x$ dolayısıyla da $(\delta_{i-1}^n \circ \sigma_j^{n-1})(x) = x$ bulunur. (**II** durumu)

O halde toparlarsak $i > j + 1$ olmak üzere;

$$\bullet x < i \text{ ve } x \leq j \Rightarrow (\sigma_j^n \circ \delta_i^{n+1})(x) = (\delta_{i-1}^n \circ \sigma_j^{n-1})(x)$$

$$\bullet x < i \text{ ve } x > j \Rightarrow (\sigma_j^n \circ \delta_i^{n+1})(x) = (\delta_{i-1}^n \circ \sigma_j^{n-1})(x)$$

$$\bullet x \geq i \text{ ve } x + 1 > j \Rightarrow (\sigma_j^n \circ \delta_i^{n+1})(x) = (\delta_{i-1}^n \circ \sigma_j^{n-1})(x)$$

elde ediyoruz ki, x in bunlardan başka bir durumu mevcut olamayacağından sonuç olarak;

$$\sigma_j^n \circ \delta_i^{n+1} = \delta_{i-1}^n \circ \sigma_j^{n-1}$$

özdeşliği elde edilir. $\square$

Örnek 3.1.13 Son olarak yine $n = 3$ için, $\delta_i^4 : [3] \rightarrow [4]$ ve $\sigma_j^3 : [4] \rightarrow [3]$ operatörlerini gözönüne alalım. Bu durumda $0 \leq i \leq 4$ ve $0 \leq j \leq 3$ olacağı açıktır. $i = 2$ ve $j = 0$ için; $\sigma_0^3 \circ \delta_2^4$ bileşke operatörünü hesaplayalım.

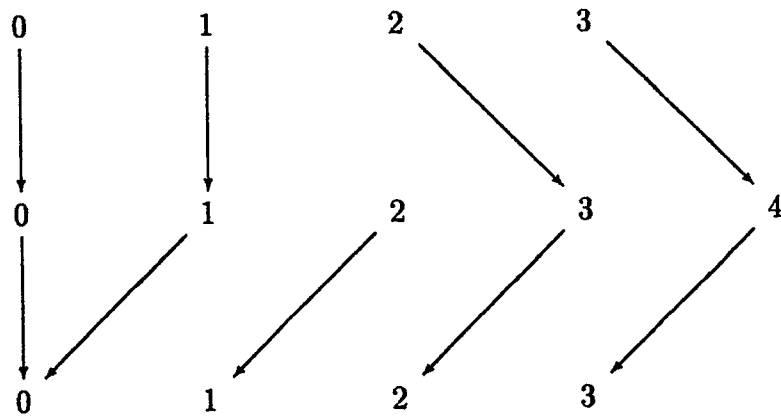
$$\delta_2^4(0) = 0 \text{ ve } \sigma_0^3(0) = 0 \Rightarrow \sigma_0^3 \circ \delta_2^4(0) = 0$$

$$\delta_2^4(1) = 1 \text{ ve } \sigma_0^3(1) = 0 \Rightarrow \sigma_0^3 \circ \delta_2^4(1) = 0$$

$$\delta_2^4(2) = 3 \text{ ve } \sigma_0^3(3) = 2 \Rightarrow \sigma_0^3 \circ \delta_2^4(2) = 2$$

$$\delta_2^4(3) = 4 \text{ ve } \sigma_0^3(4) = 3 \Rightarrow \sigma_0^3 \circ \delta_2^4(3) = 3$$

elde edilir. Buradan, $\sigma_0^3 \circ \delta_2^4 : [3] \longrightarrow [3]$ bileşkesi



olarak bulunur. Şimdi de, $\delta_1^3 \circ \sigma_0^2$ bileşke operatörünü hesaplayalım.

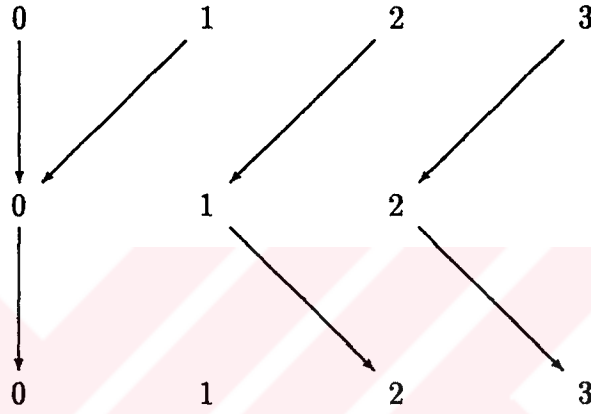
$$\sigma_0^2(0) = 0 \text{ ve } \delta_1^3(0) = 0 \Rightarrow \delta_1^3 \circ \sigma_0^2(0) = 0$$

$$\sigma_0^2(1) = 0 \text{ ve } \delta_1^3(0) = 0 \Rightarrow \delta_1^3 \circ \sigma_0^2(1) = 0$$

$$\sigma_0^2(2) = 1 \text{ ve } \delta_1^3(1) = 2 \Rightarrow \delta_1^3 \circ \sigma_0^2(2) = 2$$

$$\sigma_0^2(3) = 2 \text{ ve } \delta_1^3(2) = 3 \Rightarrow \delta_1^3 \circ \sigma_0^2(3) = 3$$

elde edilir. Buradan, $\delta_1^3 \circ \sigma_0^2 : [3] \longrightarrow [3]$ bileşkesi



formunda bulunur. O halde,

$$\left. \begin{array}{l} i = 2 \\ j = 0 \end{array} \right\} \text{ için, } \sigma_0^3 \circ \delta_2^4 = \delta_1^3 \circ \sigma_0^2$$

yazabiliriz. Şimdi, $i = 3$ ve $j = 1$ için $\sigma_1^3 \circ \delta_3^4$ bileşke operatörünü hesaplayalım.

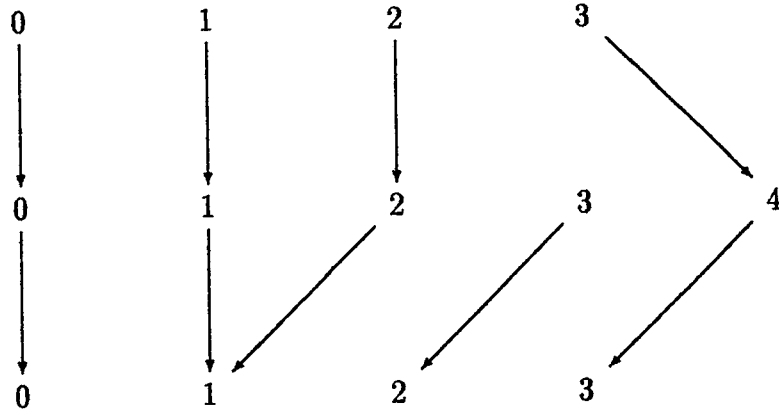
$$\delta_3^4(0) = 0 \text{ ve } \sigma_1^3(0) = 0 \Rightarrow \sigma_1^3 \circ \delta_3^4(0) = 0$$

$$\delta_3^4(1) = 1 \text{ ve } \sigma_1^3(1) = 1 \Rightarrow \sigma_1^3 \circ \delta_3^4(1) = 1$$

$$\delta_3^4(2) = 2 \text{ ve } \sigma_1^3(2) = 1 \Rightarrow \sigma_1^3 \circ \delta_3^4(2) = 1$$

$$\delta_3^4(3) = 4 \text{ ve } \sigma_1^3(4) = 3 \Rightarrow \sigma_1^3 \circ \delta_3^4(3) = 3$$

elde edilir. Buradan, $\sigma_1^3 \circ \delta_3^4 : [3] \longrightarrow [3]$ bileşkesi



şeklinde bulunur. Şimdi de, $\delta_2^3 \circ \sigma_1^2$ bileşke operatörünü hesaplayalım.

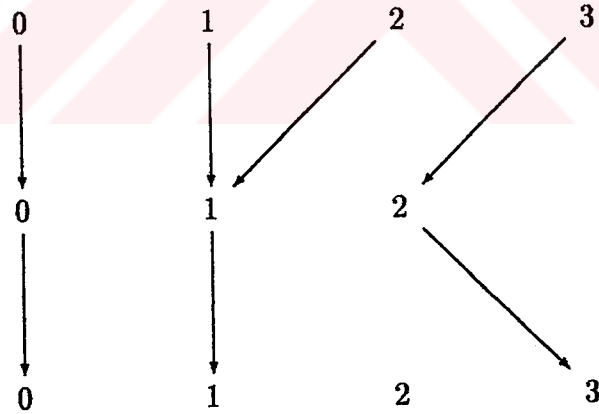
$$\sigma_1^2(0) = 0 \text{ ve } \delta_2^3(0) = 0 \Rightarrow \delta_2^3 \circ \sigma_1^2(0) = 0$$

$$\sigma_1^2(1) = 1 \text{ ve } \delta_2^3(1) = 1 \Rightarrow \delta_2^3 \circ \sigma_1^2(1) = 1$$

$$\sigma_1^2(2) = 1 \text{ ve } \delta_2^3(1) = 1 \Rightarrow \delta_2^3 \circ \sigma_1^2(2) = 1$$

$$\sigma_1^2(3) = 2 \text{ ve } \delta_2^3(2) = 3 \Rightarrow \delta_2^3 \circ \sigma_1^2(3) = 3$$

elde edilir. Buradan, $\delta_2^3 \circ \sigma_1^2 : [3] \longrightarrow [3]$ bileşkesi



olarak bulunur. O halde,

$$\left. \begin{array}{l} i = 3 \\ j = 1 \end{array} \right\} \text{ için, } \sigma_1^3 \circ \delta_3^4 = \delta_2^3 \circ \sigma_1^2$$

yazabiliriz. Şimdi, $i = 4$ ve $j = 2$ için $\sigma_2^3 \circ \delta_4^4$ bileşke operatörünü hesaplayalım.

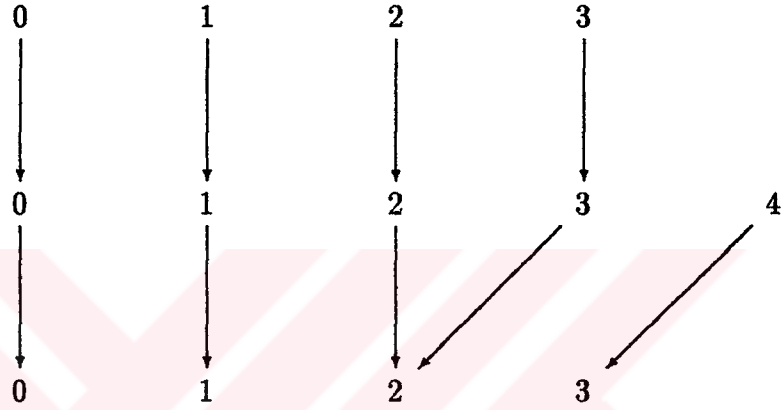
$$\delta_4^4(0) = 0 \text{ ve } \sigma_2^3(0) = 0 \Rightarrow \sigma_2^3 \circ \delta_4^4(0) = 0$$

$$\delta_4^4(1) = 1 \text{ ve } \sigma_2^3(1) = 1 \Rightarrow \sigma_2^3 \circ \delta_4^4(1) = 1$$

$$\delta_4^4(2) = 2 \text{ ve } \sigma_2^3(2) = 2 \Rightarrow \sigma_2^3 \circ \delta_4^4(2) = 2$$

$$\delta_4^4(3) = 3 \text{ ve } \sigma_2^3(2) = 2 \Rightarrow \sigma_2^3 \circ \delta_4^4(3) = 2$$

elde edilir. Buradan, $\sigma_2^3 \circ \delta_4^4 : [3] \longrightarrow [3]$ bileşkesi



şeklinde bulunur. Şimdi de, $\delta_3^3 \circ \sigma_2^2$ bileşke operatörünü hesaplayalım.

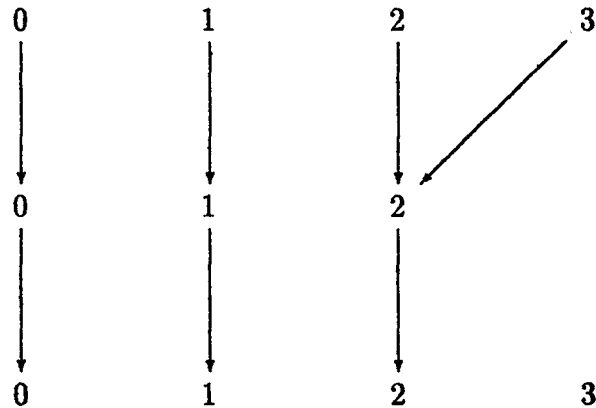
$$\sigma_2^2(0) = 0 \text{ ve } \delta_4^3(0) = 0 \Rightarrow \delta_4^3 \circ \sigma_2^2(0) = 0$$

$$\sigma_2^2(1) = 1 \text{ ve } \delta_4^3(1) = 1 \Rightarrow \delta_4^3 \circ \sigma_2^2(1) = 1$$

$$\sigma_2^2(2) = 2 \text{ ve } \delta_4^3(2) = 2 \Rightarrow \delta_4^3 \circ \sigma_2^2(2) = 2$$

$$\sigma_2^2(3) = 2 \text{ ve } \delta_4^3(2) = 2 \Rightarrow \delta_4^3 \circ \sigma_2^2(3) = 2$$

elde edilir. Buradan, $\delta_4^3 \circ \sigma_2^2 : [3] \longrightarrow [3]$ bileşkesi



olarak bulunur. O halde,

$$\left. \begin{array}{l} i = 4 \\ j = 2 \end{array} \right\} \text{ için, } \sigma_2^3 \circ \delta_4^4 = \delta_3^3 \circ \sigma_2^2$$

yazabiliriz. Buradan da açıkça görüldüğü gibi; $i > j + 1$ iken $\sigma_j^3 \circ \delta_i^4 = \delta_{i-1}^3 \circ \sigma_j^2$ eşitliği geçerlidir. Dikkat edilirse $i \leq j + 1$ iken, $\sigma_j^3 \circ \delta_i^4 \neq \delta_{i-1}^3 \circ \sigma_j^2$ dir. O halde bu durumu genellersek,

$$i > j + 1 \Rightarrow \sigma_j^n \circ \delta_i^{n+1} = \delta_{i-1}^n \circ \sigma_j^{n-1}$$

elde edilir.

Böylece simplisel özdeşlikler diye bildiğimiz eşitliklerin herbirini teorik olarak ispatlamış ve bir örnekle açıklamış olduk. Sonuç olarak; herhangi bir $f : [n] \rightarrow [m]$ operatörü δ_i^n ve σ_j^n özel operatörleri cinsinden kolaylıkla ifade edilebilir ve gerek teorik olarak gerekse örneklerle açıkladığımız gibi bu iki özel operatör, simplisel özdeşlikler olarak adlandırdığımız

$$\delta_i^{n+1} \circ \delta_j^n = \delta_{j+1}^{n+1} \circ \delta_i^n, \quad i \leq j \quad (1)$$

$$\sigma_j^n \circ \sigma_i^{n+1} = \sigma_i^n \circ \sigma_{j+1}^{n+1}, \quad i \leq j \quad (2)$$

$$\sigma_j^n \circ \delta_i^{n+1} = \begin{cases} \delta_i^n \circ \sigma_{j-1}^{n-1}, & i < j \\ \text{id}_{[n]}, & i = j \text{ veya } i = j + 1 \\ \delta_{i-1}^n \circ \sigma_j^{n-1}, & i > j + 1 \end{cases} \quad (3)$$

$$\sigma_j^n \circ \delta_i^{n+1} = \begin{cases} \delta_i^n \circ \sigma_{j-1}^{n-1}, & i < j \\ \text{id}_{[n]}, & i = j \text{ veya } i = j + 1 \\ \delta_{i-1}^n \circ \sigma_j^{n-1}, & i > j + 1 \end{cases} \quad (4)$$

$$\sigma_j^n \circ \delta_i^{n+1} = \begin{cases} \delta_i^n \circ \sigma_{j-1}^{n-1}, & i < j \\ \text{id}_{[n]}, & i = j \text{ veya } i = j + 1 \\ \delta_{i-1}^n \circ \sigma_j^{n-1}, & i > j + 1 \end{cases} \quad (5)$$

özdeşliklerini de sağlar.

Bölüm 4

Simplisel Kategoriler

Giriş

Bu bölümde, Bölüm 2' de oluşturduğumuz $\Delta[n]$ kategorisinin *oppozit* kategorisi yardımıyla, simplisel objeler ve simplisel morfizmleri tanımlayacağız. Daha sonra bu simplisel obje ve morfizmler yardımıyla tanımlanabilen simplisel kategoriler üzerinde duracağız.

4.1 Simplisel Obje ve Morfizmler

$\mathcal{C}$ herhangi bir kategori olsun. $\mathcal{C}$ içindeki bir *simplisel obje*, $\Delta^{\text{op}}[n]$ kategorisinden $\mathcal{C}$ kategorisine giden bir funktordur. Diğer bir deyişle, simplisel obje, $E : \Delta^{\text{op}}[n] \rightarrow \mathcal{C}$ formunda bir funktor olarak tanımlanır. $\Delta^{\text{op}}[n]$ nin herhangi bir $[n]$ objesinin E funktoru altındaki görüntüsü;

$$E([n]) = E(\{0, 1, \dots, n\}) = E_n$$

ile, δ_i^n operatörünün E funktoru altındaki görüntüsü; $E(\delta_i^n) = d_i^n$ ve σ_j^n operatörünün E funktoru altındaki görüntüsü; $E(\sigma_j^n) = s_j^n$ ile gösterilmek üzere simplisel obje, $\mathcal{C}$ nin objelerinin ve morfizmlerinin bir sistemi olarak verilen $((E_n), d_i, s_j)$ sistemine denktir. Yani, bir yerde $E = ((E_n)_{n \geq 0}, d_i, s_j)$ dir. Burada $0 \leq i \leq n \neq 0$ olmak

üzere $d_i^n : E_n \rightarrow E_{n-1}$ ve $0 \leq j \leq n$ olmak üzere $s_j^n : E_n \rightarrow E_{n+1}$ şeklinde tanımlı dönüşümler sırasıyla *i. yüz operatörü* ve *j. üreteç operatörü* olarak adlandırılırlar. (bak. CURTIS, E.B. [2])

Daha açık olarak, buradaki d_i^n operatörleri

$$\begin{array}{ccccccc} & & d_0 & & d_0 & & d_0 \\ & & \leftarrow & & \leftarrow & & \leftarrow \\ E_0 & \xleftarrow{d_0} & E_1 & \xleftarrow{d_1} & E_2 & \xleftarrow{d_2} & E_3 \dots \\ & & d_1 & & d_1 & & d_1 \\ & & \leftarrow & & \leftarrow & & \leftarrow \\ & & d_2 & & d_2 & & d_3 \\ & & \leftarrow & & \leftarrow & & \leftarrow \end{array}$$

formunda ve s_j^n operatörleri de

$$\begin{array}{ccccccc} & & s_0 & & s_0 & & s_0 \\ & & \rightarrow & & \rightarrow & & \rightarrow \\ E_0 & \xrightarrow{s_0} & E_1 & \xrightarrow{s_1} & E_2 & \xrightarrow{s_2} & E_3 \dots \\ & & s_1 & & s_1 & & s_1 \\ & & \rightarrow & & \rightarrow & & \rightarrow \\ & & s_2 & & s_2 & & s_2 \\ & & \rightarrow & & \rightarrow & & \rightarrow \end{array}$$

formunda temsil edilebilir. Eğer her ikisini de birtek diyagramda gösterecek olursak;

$$E : \dots \longrightarrow E_n \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \longrightarrow \end{array} E_{n-1} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \longrightarrow \end{array} E_{n-2} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \longrightarrow \end{array} \dots \rightleftharpoons E_0$$

şeklinde gösterebiliriz. Simplisel obje bir sistem olarak tanımlandığında, bu tanımlamadaki E_n objesinin elemanları *n-simplis*, özel olarak E_0 objesinin elemanları ise *köşeler* olarak adlandırılır. (bak. EHLERS, P.J. [4])

$d_i^n : E_n \rightarrow E_{n-1}$ ve $s_j^n : E_n \rightarrow E_{n+1}$ operatörleri bir önceki bölümde tanımlanan simplisel özdeşliklerin dualini sağlar. Diğer bir deyişle,

$$d_i^{n-1} \circ d_j^n = d_{j-1}^{n-1} \circ d_i^n, \quad i < j \quad (1^{op})$$

$$s_i^{n+1} \circ s_j^n = s_{j+1}^{n+1} \circ s_i^n, \quad i \leq j \quad (2^{op})$$

$$d_i^{n+1} \circ s_j^n = \begin{cases} s_{j-1}^{n-1} \circ d_i^n, & i < j \\ \text{id}_{E_n}, & i = j \text{ veya } i = j + 1 \\ s_j^{n-1} \circ d_{i-1}^n, & i > j + 1 \end{cases} \quad (3^{op})$$

$$d_i^{n+1} \circ s_j^n = \begin{cases} \text{id}_{E_n}, & i = j \text{ veya } i = j + 1 \\ s_j^{n-1} \circ d_{i-1}^n, & i > j + 1 \end{cases} \quad (4^{op})$$

$$d_i^{n+1} \circ s_j^n = \begin{cases} s_j^{n-1} \circ d_{i-1}^n, & i > j + 1 \end{cases} \quad (5^{op})$$

dir. Hesaplamalarda kolaylık sağlaması bakımından yukarıdaki özdeşliklerin bir

başka şekilde düzenlenmiş hali olan;

$$d_i^{n-1} \circ d_j^n = d_j^{n-1} \circ d_{i+1}^n, \quad j \leq i \quad (6)$$

$$s_i^{n+1} \circ s_j^n = s_j^{n+1} \circ s_{i-1}^n, \quad j < i \quad (7)$$

$$s_i^{n-1} \circ d_j^n = d_j^{n+1} \circ s_{i+1}^n, \quad j \leq i \quad (8)$$

$$s_i^{n-1} \circ d_j^n = d_{j+1}^{n+1} \circ s_i^n, \quad j > i \quad (9)$$

eşitlikleri de kullanılmaktadır.

$\mathcal{C}$ herhangi bir kategori olmak üzere $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{F}$ iki simplisel obje olsun. Bu objeler arasında tanımlı bir $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$ simplisel morfizmi,

$$d_n' \circ f_n = f_{n-1} \circ d_n \quad \text{ve} \quad f_n \circ s_n = s_n' \circ f_{n-1}$$

olmak üzere bir doğal dönüşümdür. Simplisel morfizm genelde aşağıdaki diyagram ile gösterilir.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbf{E} : \dots & \longrightarrow & E_n & \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} & E_{n-1} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} & E_{n-2} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} & \dots & \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} & E_0 \\
 \downarrow f & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & \downarrow f_{n-2} & & & \downarrow f_0 \\
 \mathbf{F} : \dots & \longrightarrow & F_n & \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} & F_{n-1} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} & F_{n-2} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} & \dots & \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} & F_0
 \end{array}$$

$x \in E_n$ elemanlarına n -boyutlu simplisler denir. Eğer herhangi y için, $x = s_i(y)$ oluyor ise x simpleksine *üreteç* denir. (bak. DUSKIN, J. [3])

Böylece herhangi bir $\mathcal{C}$ kategorisinde simplisel objeyi ve simplisel objeler arasındaki morfizmleri tanımlamış olduk. Bununla birlikte,

$$\begin{array}{ccc}
 & F & \\
 f \nearrow & & \searrow g \\
 E & \xrightarrow{\quad g \circ f \quad} & D
 \end{array}$$

olacak şekilde $g \circ f$ bileşke işlemi de tanımlanabilir. Buradan simplisel kategori-den söz edebiliriz. Bu tanımlamalarla herhangi $\mathcal{C}$ kategorisi için, simplisel kategori

tanımlanabilir ve kategori olma özelliklerini sağlamak gayet kolaydır. Bu kategoriye herhangi $\mathcal{C}$ kategorisi için $\mathbf{Simp}(\mathcal{C})$ ile göstereceğiz. $\mathbf{Simp}(\mathcal{C})$ kategorisinde tanımlanan d_i^n ($0 \leq i \leq n \neq 0$) ve s_j^n ($0 \leq j \leq n$) operatörlerinin kısaca geometrik yorumunu yapalım.

$n = 0$ olmak üzere,

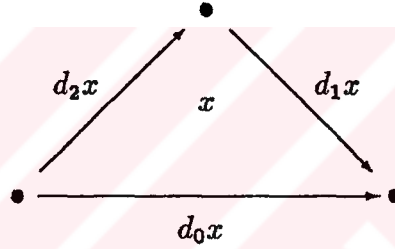
0-boyutlu simpleks, sadece $x \in E_0$ noktası,

1-boyutlu simpleks, tam olarak $x \in E_1$ olmak üzere ;

$$d_1x \bullet \xrightarrow{x} \bullet d_0x$$

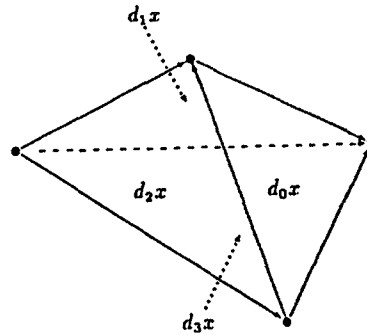
şeklinde bir doğru,

2-boyutlu simplisler, $x \in E_2$ olmak üzere ;



şeklinde bir üçgen,

3-boyutlu simplisler de, $x \in E_3$ olmak üzere ;



şeklinde bir dörtyüzlü olarak ifade edilirler. (bak. ARVAŞI, Z. [1])

Şimdi cebirin tanımını hatırlatalım.

R birimli, komütatif bir halka olsun. M toplamsal abelyan grubu,

$$p : R \times M \rightarrow M$$

$$(r, m) \mapsto rm$$

fonksiyonu ile birlikte öyle ki; $\forall r, r' \in R$ ve $m, m' \in M$ için,

- i-) $(rr')m = r(r'm)$
- ii-) $(r + r')m = rm + r'm$
- iii-) $r(m + m') = rm + rm'$
- iv-) $\text{id}_R m = m$

özelliklerini sağlıyorsa M ye bir R -modül denir. R -modüllerin kategorisi literatürde **Mod** olarak gösterilir. Modüllere örnek olması bakımından, her bir G toplamsal abelyan grubu, $n \in \mathbb{Z}$ ve $a \in G$ olmak üzere na ile birlikte birimli $\mathbb{Z}$ -modül olarak modül tanımını gerçekler. Yine eğer S halka ve R de bir alt halka ise, S üzerindeki çarpmaya göre $r \in R$ ve $a \in S$ olmak üzere ra ile birlikte S , bir R -modül olarak modül tanımını sağlar. (bak. HUNGERFORD, T.W. [7])

Tanım 4.1.1 Bir *simplesel k -modül*, $n \geq 0$ olmak üzere E_n k -modülleri ile d_i^n ve s_i^n operatörleri için geçerli olan simplesel özdeşlikleri sağlayan k -modül homomorfizmlerinin bir ailesi olarak tanımlanır.

Herhangi bir E simplesel modül için, k -modüllerin zincir kompleksi ile aralarında bir ilişki kurulabilir. Yani; $\partial_n : E_n \rightarrow E_{n-1}$ olmak üzere,

$$\partial_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i^n$$

şeklinde tanımlanarak, k -modüllerin

$$E : \dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} E_n \xrightarrow{\partial_n} E_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_3} E_2 \xrightarrow{\partial_2} E_1 \xrightarrow{\partial_1} E_0$$

şeklinde bir zinciri elde edilir ki dikkat edilirse bu bir zincir kompleksidir. Çünkü, her n için $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ dır. Şimdi, neden her n için bu birleşimin sıfıra eşit olduğunu gösterelim. Açık açık yazılırsa,

$$\partial_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i^n = d_0 - d_1 + d_2 - d_3 + \dots + (-1)^n d_i$$

ve

$$\partial_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i d_i^{n+1} = d_0 - d_1 + d_2 - d_3 + \dots + (-1)^{n+1} d_i$$

olacağı görülmektedir. Buna göre

$$\partial_n \partial_{n+1} = (d_0 - d_1 + d_2 - d_3 + \dots + (-1)^n d_i) \circ (d_0 - d_1 + d_2 - d_3 + \dots + (-1)^{n+1} d_i)$$

birleşimini hesaplamamız gerekir. Bu birleşim açılırsa

$$\begin{aligned} \partial_n \partial_{n+1} = & (d_0 \circ d_0 - d_0 \circ d_1 + \dots + d_0 \circ (-1)^{n+1} d_i) \\ & - (d_1 \circ d_0 - d_1 \circ d_1 + \dots + d_1 \circ (-1)^{n+1} d_i) + \dots \\ & + ((-1)^n d_i \circ d_0 + (-1)^n d_i \circ d_1 + \dots + (-1)^n d_i \circ (-1)^{n+1} d_i) \end{aligned}$$

şeklinde bir toplam meydana gelecektir. Bu toplama yapılırken, karşılıklı terimlerin $(1^{\circ p})$ gereğince ters işaretli olarak birbirlerini götürdükleri kolayca görülmektedir. Dikkat edilirse, $d_i \circ d_j$ birleşiminde $i < j$ ise $(1^{\circ p})$ dan dolayı, eğer $i \geq j$ ise (6) dan dolayı karşılıklı terimler birbirini sadeleştirir. Sonuç olarak da, $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ elde edilir.

Böylece E simplisel modül ile zincir kompleksi ilişkilendirilmiş olur. Dikkat edilirse bu zincir komplekste $\text{Im} \partial_{n+1} \subset \text{Ker} \partial_n$ dir. Çünkü, her bir $\partial_{n+1}(x) \in \text{Im} \partial_{n+1}$ için

$$\partial_n \partial_{n+1}(x) = \partial_n(\partial_{n+1}(x)) = 0$$

olacağından $\partial_{n+1}(x) \in \text{Ker} \partial_n$ elde edilir. Demek ki bundan sonra bir simplisel k-modülün n .homoloji modülünden söz edebiliriz. Bir E simplisel modülünün n .homoloji modülü,

$$H_n(E) = \frac{\text{Ker} \partial_n}{\text{Im} \partial_{n+1}}$$

şeklinde tanımlanır. (bak. ARVASI, Z. [1])

$\Delta[n]$ kategorisi ile tanımlı simplisel objeler, cebirsel topolojide birçok problemin çözümüne yardımcı olmaktadır. Örneğin homoloji, CW-kompleksler, Eilenberg-Mac Lane uzayları ve ko-homoloji işlemleri. Bu kavramlar üzerinde gelişmeler, May [11], Lamotke [8] ve Gabriel-Zisman [6] tarafından verilmiştir.



Kaynaklar

- [1] ARVASI, Z. Applications in Commutative of the Moore Complex of a Simplicial Algebra. University of Wales. Bangor (1994).
- [2] CURTIS, E.B. Simplicial Homotopy Theory. Adv. in Math. 6 (1971).
- [3] DUSKIN, J. Simplicial Methods and the Interpretation of triple cohomology. A.M.S.Providence 163. Rhode Island (1975).
- [4] EHLERS, P.J. Algebraic Homotopy in Simplicially Enriched Grupoids. (1993).
- [5] FRITSCH, R. and PICCININI, R.A. Cellular Structures in Topology. Cambridge University Press. (1990).
- [6] GABRIEL, P. and ZISMAN, M. Calculus of Fractions and Homotopy Theory. Springer-Verlag-Berlin-Heidelberg-New York. (1967).
- [7] HUNGERFORD, T.W. Algebra. University of Washington. (1973).
- [8] LAMOTKE, K. Semisimpliziale Algebraische Topologie. Springer-Berlin-Heidelberg-New York. (1968).
- [9] MAC LANE, S. Homology. Springer-Verlag-Berlin-Heidelberg-New York. (1967).
- [10] MAC LANE, S. Categories for the Working Mathematician. Springer-Verlag-Berlin-Heidelberg-New York. (1988).

- [11] MAY, J.P. *Simplicial Objects in Algebraic Topology*. Canada. (1967).
- [12] PORTER, T. *Abstract Homotopy Theory. The Interaction of Category Theory and Homotopy Theory*. Dipartimento di Matematica. Università di Genova (Italy). (1992).

