Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

LİNEER DİFERANSİYEL OPERATÖRLERİN BAZI TEMEL ÖZELLİKLERİ

MAHİR KADAKAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Samsun
Haziran-1996

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

LİNEER DİFERANSİYEL OPERATÖRLERİN BAZI TEMEL ÖZELLİKLERİ

MAHİR KADAKAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman: Prof.Dr. Oktay MUHTAROV

Samsun
Haziran-1996

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

Bu çalışma jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Ali Fettah ŞAHBAZOV

Üye : Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU

Üye : Prof. Dr. Oktay MUHTAROV

ONAY

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım. 08/07/1996

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Prof.Dr. Veysel KARTAL

ÖZET

Bu çalışma, giriş ve beş bölümden oluşmaktadır.

Girişte tez konusunun matematiksel fiziğin problemlerinden kaynaklandığı esaslandırılmıştır.

Birinci bölümde temel kavramlar ve özellikler verilmiştir.

İkinci bölümde eşlenik diferansiyel operatör ve eşlenik sınır değer problemleri tanımlanmıştır ve özellikleri araştırılmıştır.

Üçüncü bölümde sınır değer probleminin özdeğerleri ve öz fonksiyonları incelenmiştir.

Dördüncü bölümde spektral parametreye bağlı olan ve bağlı olmayan sınır değer probleminin Green fonksiyonu ve eşlenik diferansiyel operatörün Green fonksiyonu bulunmuştur.

Beşinci bölüm çalışmamızın orjinal kısmını meydana getirmektedir. Bu bölümde, spektral parametreye bağlı olan ve bağlı olmayan sabit katsayılı lineer diferansiyel denklem ve periyodik sınır şartlarının ürettiği diferensiyel operatörlerin Green fonksiyonlarının açık formülü bulunmuştur.

Some Fundamental Properties of Linear Differential Operators

ABSTRACT

This study consists of an introduction and five chapters.

In introduction, it is shown that the topic of the thesis is based on, the problem of mathematical physics.

In the first chapter basic concepts and principles are given.

In the second chapter, adjoint differential operator and adjoint boundary value problems are defined and their properties are investigated.

In the third chapter, eigenvalues and eigenfunctions of boundary value problems are explored.

In the fourth chapter, Green function of both boundary value problems, one is dependent on the spectral parameter and the other is not, and Green function of adjoint differential operator are found.

Fifth chapter is the original part of our study. In this charter, general formula of Green functions of differential operators created by both linear differential equations with constant coefficient, one is dependent on the spectral parameter and the other is not, and by periodic boundary conditions are obtained.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında gerekli bütün imkânları sağlayan ve çalışmalarım boyunca çok kıymetli yardımlarını esirgemeyen Saygıdeğer Hocam Sayın **Prof.Dr. Oktay MUHTAROV**'a en içten minnet duygularımı ve teşekkürlerimi sunuyorum.

Beni bu çalışmaya yönlendiren ve gerekli yardımlarını esirgemeyen Matematik Eğitimi Bölümü Başkanı Saygıdeğer **Hocam Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU**'na en içten teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim

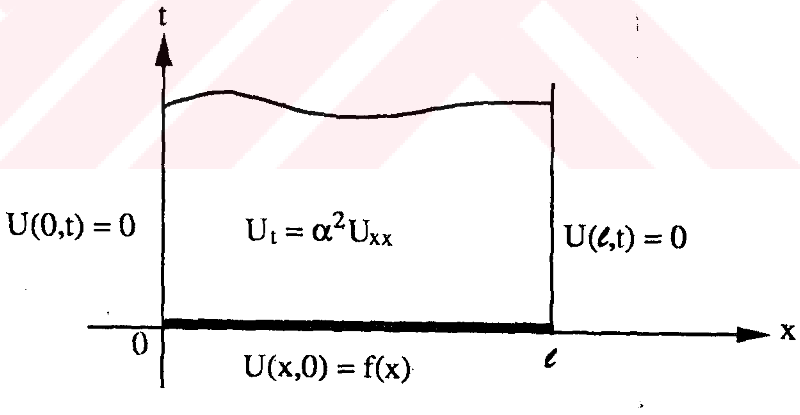
Mahir KADAKAL

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Matematik fiziğin bir çok problemlerinin çözümünde en etkili ve klasik yöntemlerden biri, Fourier yöntemidir.Değişkenlerine ayırma yöntemide denilen bu yöntemin uygulanması sonucunda, bir çok problem, adi diferansiyel denklemler için sınır değer problemine dönüştürülür. Ancak, Fourier yönteminin esaslandırılması için elde edilen sınır değer probleminin, özfonksiyonlarının baz oluşturması veya hiç olmazsa, özfonksiyonların ve bu fonksiyonlara bağlanmış fonksiyonların tam olması gösterilmelidir. Bu ise, Lineer Diferansiyel operatörlerin spektral teorisinin başlıca konusudur.

Örneğin; sonlu ℓ uzunluğunda, ısı geçirici ince bir telde ısı iletimi problemini gözönüne alalım. Koordinat eksenini öyle seçelimki, bu tel apsis ekseninin $[0,\ell]$ aralığında olsun. Zamanı ordinat ekseni ile gösterelim. Bu halde telin her noktasında ki U ısısı bu noktanın apsisi x'e ve t-zamanına bağlı olacak, yani $U = U(x,t)$ olacaktır.



Matematik fizikde bazı ön kabullenmelerden sonra, U(x,t) fonksiyonu

$$U_t = \alpha^2 U_{xx} \quad , \quad o < x < \ell \quad , \quad t > 0 \tag{1}$$

denklemini sağlar. Burada α, telin yapıldığı maddeye uygun fiziksel sabittir, ($\alpha^2 = \frac{K}{\rho c}$, K- dahili ısı iletme katsayısı, ρ- yoğunluk, c-ısı tutumudur.)

Başlangıç anında telin her noktasındaki ısısının değeri f(x) ile gösterilirse,

$$U(x,0) = f(x)\ ,\ o < x < \ell \tag{2}$$

başlangıç şartını almış oluruz. Genelliği bozmadan [8]

$$U(0,t) = 0\ ,\ U(\ell,t) = 0\ ,\ t > 0 \tag{3}$$

kabul edebiliriz.

Fourier yöntemine göre (1) denkleminin herhangi çözümünü

$$U(x,t) = X(x).\ T(t) \tag{4}$$

şeklinde arayalım. (4)'ü (1) de yerine yazarsak,

$$U_t = XT',\ U_{xx} = X''\ T$$

olduğundan

$$XT' = \alpha^2 X''\ T \tag{5}$$

elde edilir. (5)'i

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T} \tag{6}$$

şeklinde yazarak değişkenlerine ayırmış oluruz. Sol taraf sadece x değişkenine, sağ taraf ise sadece t değişkenine bağlı olduğundan, (6) eşitliğinin her iki tarafı x'e ve t-ye bağlı olmayan herhangi σ sabitine eşittir. (Bu sabite, **ayırma sabiti** denir.)

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T} = \sigma \tag{7}$$

Böylece X(x) ve T(t) fonksiyonları için iki adi diferansiyel denklem elde edilmiş olur:

$$X'' - \sigma X = 0 \tag{8}$$

$$T' - \sigma\alpha^2 T = 0 \qquad (9)$$

(3) sınır şartları ise

$$X(0) = 0 \qquad (10)$$

$$X(\ell) = 0 \qquad (11)$$

şekline dönüşür. Böylece X(x) fonksiyonu için

$$X'' = \sigma X \qquad (12)$$

$$X(0) = X(\ell) = 0 \qquad (13)$$

sınır değer problemi elde edilmiş oldu. Bu sınır değer problemini çözelim. Kolaylık olması için $\sigma = -\lambda^2$ ile gösterelim. Bu halde (12) denklemi

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \qquad (14)$$

şeklinde yazılır. $\lambda = 0$ olduğunda bu denklemin genel çözümü

$$X(x) = k_1 x + k_2 \qquad (15)$$

şeklindedir. (13) sınır şartlarında yerine yazarsak $k_1 = k_2 = 0$, yani, $U(x,t) \equiv o$ trivial çözümü elde edildiğinden $\lambda \neq 0$ hali incelenmelidir. Bu halde (14) denkleminin genel çözümü;

$$X(x) = k_1 e^{i\lambda x} + k_2 e^{-i\lambda x} \qquad (16)$$

şeklinde olur. (13) sınır şartlarında yerine yazarsak k_1 ve k_2 değişkenlerine göre aşağıdaki lineer denklemler sistemi elde edilir.

$$k_1 + k_2 = 0 \tag{17}$$

$$k_1 e^{i\lambda\ell} + k_2 e^{-i\lambda\ell} = 0$$

Bu sistemin sıfırdan farklı çözümünün olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{i\lambda\ell} & e^{-i\lambda\ell} \end{vmatrix} = e^{-i\lambda\ell} - e^{i\lambda\ell} = 0 \tag{18}$$

denkleminin sağlanmasıdır. Kolayca gösterilebilir ki, bu denklemin sıfırdan farklı çözümleri

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{\ell} \quad , \ n = \pm 1 \ , \pm 2 \ , \ldots \tag{19}$$

dir. Buradan

$$\sigma = -\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \tag{20}$$

elde edilir.Bu sayılara **(12)**, **(13)** sınır değer probleminin özdeğerleri denir. Bu değerlere uygun gelen çözümler ise

$$X_n(x) = \operatorname{Sin} \frac{n\pi x}{\ell} \quad , \quad n = 1,2,\ldots\ldots$$

fonksiyonlarıdır ve bunların keyfi sabitle çarpımlarıdır. Bu fonksiyonlara ise **(12)**, **(13)** sınır değer problemlerinin özfonksiyonları denir. Bu halde **(9)** denkleminin çözümleri

$$T_n(t) = e^{-\left(\frac{n\pi\alpha}{\ell}\right)^2 t} \tag{21}$$

şeklinde bulunur. O halde

$$U_n(x,t) = e^{-\left(\frac{n\pi\alpha}{\ell}\right)^2 t} \operatorname{Sin} \frac{n\pi x}{\ell} \tag{22}$$

fonksiyonları **(1)** denklemini ve **(3)** sınır şartlarını sağlar.

Bu durumda (2) başlangıç şartı

$$f(x) = \mathrm{Sin}\,\frac{n\pi x}{\ell} \tag{23}$$

şartına dönüşür. O halde f(x), (23) şeklinde değilse (1), (3) sınır değer proleminin (22) şeklinde çözümü bulunmaz. (1) denklemi ve (3) sınır şartları homojen olduklarından

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{m} C_n\, U_n(x,t). \tag{24}$$

şeklindeki lineer birleşimler de (1) denklemini ve (3) sınır şartlarını sağlar. (2) başlangıç şartını sağlaması için f(x) fonksiyonu

$$f(x) = \sum_{n=1}^{m} C_n\, \mathrm{Sin}\,\frac{n\pi x}{\ell} \tag{25}$$

şeklinde olmalıdır. (25) şartı ise (1) ve (3) problemi için hem fiziksel, hem de matematiksel açıdan çok ağır olan sınırlayıcı şarttır. Bunu aradan kaldırabilmek için kabul edelim ki,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\, X_n(x)$$

serisine açılıyor. Bu halde belli şartlar altında

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\, U_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\, e^{-\left(\frac{n\pi\alpha}{\ell}\right)^2 t}\, \mathrm{Sin}\,\frac{n\pi x}{\ell}$$

fonksiyonu (1), (3) probleminin çözümü oluyor.

Bu örnek açık şekilde gösteriyor ki, matematik fiziğin bir çok problemini çözmede uygulanan Fourier yöntemi aşağıdaki problemin incelenmesini yani; verilmiş fonksiyonu adi diferansiyel denklemler için sınır değer probleminin özfonksiyonları üzerinden açılımı şeklinde ifade etmek gerekir. Başka deyimle adi diferansiyel denklem için sınır değer probleminin özfonksiyonlarının, hangi fonksiyon uzayında baz olduğunu incelemek gerekiyor. Bu soru beraberinde bir kaç problem daha getirir. Bu problemlerden biride, araştırılan sınır değer probleminin Green fonksiyonunun incelenmesi ve değerlendirilmesidir.

Bu nedenle lineer diferansiyel operatörler teorisi büyük teorik ve pratik önem taşıyor. Bu alanda çok sayıda makale ve kitaplar yazılmıştır. Adi diferansiyel denklemler için sınır değer probleminin araştırılması G.D. Birkhoff'un çalışmalırından [1], [2] başlamıştır. Bu makalelerde,

$$\ell(y,\lambda) = y^{(n)} + p_1(x,\lambda)\, y^{(n-1)} + \dots + p_n(x,\lambda) = 0$$

$$U_v(y,\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(a_{jk}(\lambda)\, y_{(0)}^{(k)} + b_{jk}(\lambda)\, y_{(1)}^{(k)}\right) = 0 \quad , \quad v = 1,2,\dots,n$$

(26)

$$p_s(x,\lambda) = \sum_{v=0}^{s} p_{vs}(x)\, \lambda^{v} \quad , \quad p_{ss}(x) = \text{const}\, , \quad s = 1,2,\dots,n \quad , \quad p_{nn} \neq 0$$

$a_{jk}(\lambda)$, $b_{jk}(\lambda)$ λ-nın polinomlarıdır.

sınır değer problemi için lineer bağımsız çözüm sistemini oluşturan fonksiyonların asimptotik biçimi bulunmuş, regüler sınır şartları denilen özel sınır şartları ayrılmış ve özfonksiyonlara bağlanmış fonksiyonların tamlığı ispat olunmuştur. (26) sınır değer probleminin incelenmesine daha sonra J.D. Tamarkin'in [7] kitabında devam edilmiştir. Bu kitapta güçlü regüler sınır şartları denilen sınır şartları tanımlanmış, bu sınır şartları altında özdeğerlerin asimptotiği bulunmuş Green fonksiyonu değerlendirilmiş ve özfonksiyonlara bağlanmış fonksiyonlar üzerinden seriye açılımı gösterilmiştir. Daha sonra bu probleme ait çok sayıda makale ve kitaplar yazılmıştır. Bu konu M.A.Naimark'ın [4] kitabında sistemli şekilde işlenmiştir. Son yıllarda bu alanda en iyi sonuçlar A.A.Shkalikov [6]ve S.Y.Yakubov'un [9] çalışmalarından elde edilmiştir. Kuantum mekaniğinin talepleri doğrultusunda bu alana ilgi daha da artmıştır.

I. BÖLÜM

LİNEER DİFERANSİYEL OPERATÖR

I.1. Lineer Operatör, Lineer Diferansiyel İfadeler ve Sınır Şartları

E–kompleks veya reel sayılar cümlesi üzerinde bir lineer uzay olsun. $D \subset E$ herhangi altküme olsun. $\forall\ x \in D$–ye herhangi $y \in E$ elamanını karşı getiren A fonksiyonuna, E–uzayında **Operatör** denir ve $y = A(x)$ veya $y = Ax$ şeklinde gösterilir.

D–ye A operatörünün **tanım bölgesi** denir. Bazen D–yerine D_A –da yazılır. Bütün $y = Ax$ elemanlarının kümesine de A–operatörünün **değerler bölgesi** denir ve $A(D_A)$ veya R_A ile gösterilir. Bazen D_A yerine D(A) ve R_A yerine de R(A) kullanılıyor.

D_A kümesi E lineer uzayının alt uzayı ise ve $\forall\ x,y \in D_A$ ve $\forall\ \lambda$ skaleri için

$$A(x + y) = Ax + Ay$$

$$A(\lambda x) = \lambda Ax$$

özellikleri sağlanıyorsa A–ya **lineer operatör** denir.

Bundan sonra sadece lineer operatörlerden sözedeceğimizden kısa olsun diye, lineer operatör yerine sadece operatör diyeceğiz.

Tanım I.1.1.

$$\ell(y) = P_0(x)\, y^{(n)} + P_1(x)\, y^{(n-1)} + \dots + P_n(x)\, y \qquad \textbf{(I.1.1)}$$

ifadesine **lineer diferansiyel ifade** denir.

Burada n-ye diferansiyel ifadenin mertebesi denir. Bu bölümde $P_0(x) \neq 0$ ve $P_0(x)$, $P_1(x)$, ... ,$P_n(x)$ fonksiyonlarının sonlu [a,b] aralığında sürekli olduğunu kabul ediyoruz. $C^{(n)}$ ile n-inci mertebeye kadar (n-dahil) sürekli türevleri olan bütün fonksiyonlar kümesini göstereceğiz.

Tanım I.1.2.

y fonksiyonunun [a,b] aralığının uç noktalarında kendisinin ve türevlerinin aldığı değerleri $y_a, y_a^1, \dots, y_a^{(n-1)}, y_b, y_b^1, \dots, y_b^{(n-1)}$ ile göstereceğiz. Bu değerleri kısaca

$y_a^{(k)} = y_{(a)}^{(k)}$, $y_b^{(k)} = y_{(b)}^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

şeklinde göstereceğiz.

Bu değişkenlerin lineer birleşimine **sınır değer ifadesi** denir. Yani;

$$U(y) = \alpha_0 y_a + \alpha_1 y_a^{\prime} + \dots + \alpha_{n-1} y_a^{(n-1)} + \beta_0 y_b + \beta_1 y_b^{\prime} + \dots + \beta_{n-1} y_b^{(n-1)} \qquad \textbf{(I.1.2)}$$

ifadesine **sınır değer gifadesi** denir. $U(y) = \gamma$, $\gamma \in \mathbb{C}$ biçimindeki şarta **sınır şartı** denir. Özel olarak $U(y) = 0$ şartına **Homojen sınır şartı** denir.

$$\begin{aligned} &\alpha_{0k}\, y_a + \dots + \alpha_{n-1k} y_a^{(n-1)} + \beta_{0k}\, y_b + \dots + \beta_{n-1k} y_b^{(n-1)} = 0 \\ &k = \overline{1,m} \end{aligned} \qquad \textbf{(I.1.3)}$$

sınır şartları verilsin.

Eğer $m > 2n$ olursa bu sınır şartlarının bir kısmının diğerlerinin lineer birleşimi olacağı açıktır. Bu yüzden, $m \leq 2n$ haline bakacağız ve $U_k(y)$, $k = \overline{1,m}$ sınır değer ifadelerini lineer bağımsız kabul edeceğiz.

Önerme I.1.1.

$m = 2n$ olduğu halde **(I.1.3)** lineer bağımsız sınır şartları

$$y_a = y_a^{\prime} = \dots = y_a^{(n-1)} = y_b = y_b^{\prime} = \dots = y_b^{(n-1)} = 0 \qquad \textbf{(I.1.4)}$$

sınır şartları ile eşdeğerdir.

İspat:

$U_k(y)$, $k = \overline{1,2n}$ sınır değer ifadeleri lineer bağımsız olduğundan **(I.1.3)** sisteminin katsayılarından oluşan determinant sıfırdan farklıdır. Bu sistemin determinantını Δ ile göstereceğiz.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{01} & \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{n-11} & \beta_{01} & \beta_{11} & \cdots & \beta_{n-11} \\ \alpha_{02} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{n-12} & \beta_{02} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{n-12} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{0\,2n} & \alpha_{1\,2n} & \cdots & \alpha_{n-1\,2n} & \beta_{0\,2n} & \beta_{1\,2n} & \cdots & \beta_{n-1\,2n} \end{vmatrix}$$

$\Delta \neq 0$ olduğundan **(I.1.3)** sisteminin tek bir sıfır çözümü vardır. Yani;

$$y_a = y_a^{I} = \ldots = y_a^{(n-1)} = y_b = y_b^{I} = \ldots = y_b^{(n-1)} = 0$$

dır.

I.2. Lineer Diferansiyel Operatör

Tanım I.2.1.

$$\ell(y) = 0 \qquad \textbf{(I.2.1)}$$

$$U_k(y) = 0 \ , \ k = \overline{1,m} \qquad \textbf{(I.2.2)}$$

problemine **homojen sınır değer problemi** denir. **(I.2.1)** diferansiyel ifadesi ve **(I.2.2)** sınır şartları yardımıyla aşağıdaki L operatörünü tanımlayalım.

$$L : C \ [a,b] \rightarrow C \ [a,b]$$

$$D(L) = \{ y \in C^{(n)}[a,b] \mid U_k(y) = 0 \ , \ k = \overline{1,m} \ \}$$

$$Ly = P_0(x)\, y^{(n)} + P_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + P_n(x)\, y \qquad \textbf{(I.2.3)}$$

Tanımladığımız bu L operatörüne, $\ell(y)$ diferensiyel ifadesinin ve **(I.2.2)** sınır şartlarının ürettiği **lineer diferansiyel operatör** denir.

Dikkat etmek gerekiyor ki, aynı bir diferansiyel ifade farklı sınır şartları altında farklı diferansiyel operatör üretiyor.

(I.2.1) , **(I.2.2)** sınır değer problemi operatör şeklinde,

$$Ly = 0 \tag{I.2.4}$$

gibi yazılır. $y \equiv 0$ fonksiyonu her zaman **(I.2.1)** , **(I.2.2)** sınır değer probleminin yani, $Ly = 0$ operatör denkleminin trivial çözümüdür.

Şimdi hangi şartlar altında bu sınır değer probleminin trivial olmayan çözümü bulunduğunu araştıralım.

Lineer diferansiyel denklemler teorisinden biliyoruz ki;

$$\ell(y) = P_0\, y^{(n)} + P_1\, y^{(n-1)} + \dots + P_n\, y = 0$$

denkleminin n-tane lineer bağımsız $y_1(x)$, $y_2(x)$, ... $y_n(x)$ çözümü bulunur ve genel çözüm;

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots c_n y_n(x) \tag{I.2.5}$$

şeklindedir. Bunu **(I.2.2)** sınır şartlarında yerine yazarsak, aşağıdaki lineer denklemler sistemini almış oluruz.

$$\begin{cases} c_1 U_1(y_1) + c_2 U_1(y_2) + \dots + c_n U_1(y_n) = 0 \\ c_1 U_2(y_1) + c_2 U_2(y_2) + \dots + c_n U_2(y_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_1 U_m(y_1) + c_2 U_m(y_2) + \dots + c_n U_m(y_n) = 0 \end{cases} \tag{I.2.6}$$

(I.2.6) sistemi c_1 , c_2 , ... ,c_n bilinmeyenlerine göre bir lineer denklem sistemidir. Bu sistemin matrisi

$$U = \begin{bmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \dots & U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \dots & U_2(y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_m(y_1) & U_m(y_2) & \dots & U_m(y_n) \end{bmatrix} \tag{I.2.7}$$

dir. Bu matrisin rankı r olsun. $r \le \min\{m,n\}$ olduğu açıktır.

Lineer Cebir teorisinden biliyoruz ki, n-bilinmeyenli lineer homojen m-denklemin $Ax=0$ sisteminde $\mathrm{rank}A = r$ ise çözüm uzayının boyutu $n-r$ dir [3]. Buradan aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

Sonuç I.2.1.

(I.2.1), **(I.2.2)** homojen sınır değer probleminin trivial olmayan çözümünün bulunması için gerek ve yeter şart, $r < n$ olmasıdır. Yani; U matrisinin rankının **(I.2.1)** denkleminin mertebesinden küçük olmasıdır.

Sonuç I.2.2.

Eğer $m < n$ ise (I.2.1), (I.2.2) probleminin her zaman trivial olmayan çözümleri blunur.

Sonuç I.2.3.

Eğer $m = n$ ise (I.2.1) , (I.2.2) probleminin trivial olmayan çözümünün bulunması için gerek ve yeter şart $\det U = 0$ olmasıdır.

Tanım I.2.2.

U matrisinin rankına **(I.2.1)–(I.2.2) sınır değer probleminin rankı** denir.

Bu tanımın correkt olduğunu göstermek için aşağıdaki önermeyi ispat etmek gerekiyor.

Önerme I.2.4.

U matrisinin rankı (I.2.1) denkleminin $y_1, y_2, \dots y_n$ lineer bağımsız çözüm sisteminin seçilmesinden bağımsızdır.

İspat :

Başka bir lineer bağımsız çözüm sistemi $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots \tilde{y}_n$ olsun. Genel çözüm $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$ biçiminde olduğundan

$$\tilde{y}_1 = a_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2 + \dots a_{1n}\, y_n$$

$$\tilde{y}_2 = a_{21}\, y_1 + a_{22}\, y_2 + \dots a_{2n}\, y_n$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\tilde{y}_n = a_{n1}\, y_1 + a_{n2}\, y_2 + \dots a_{nn}\, y_n$$

olacak şekilde $(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ sayıları bulunur. Bu durumda

$$\tilde{U} = \begin{bmatrix} U_1(\tilde{y}_1) & U_1(\tilde{y}_2) & \dots & U_1(\tilde{y}_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_m(\tilde{y}_1) & U_m(\tilde{y}_2) & \dots & U_m(\tilde{y}_n) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} U_1\left(\sum_{k=1}^{n} a_{1k} y_k\right) & \dots & U_1\left(\sum_{k=1}^{n} a_{nk} y_k\right) \\ \dots & \dots & \dots \\ U_m\left(\sum_{k=1}^{n} a_{1k} y_k\right) & \dots & U_m\left(\sum_{k=1}^{n} a_{nk} y_k\right) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{U} = \begin{bmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \dots & U_1(y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_m(y_1) & U_m(y_2) & \dots & U_m(y_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= UA^t \ , \ A = [a_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}$$

$\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n$ sistemi lineer bağımsız olduğundan $\det A^t \neq 0$ dır. Çünkü $\det A = 0$ olsaydı, A matrisinin satırları lineer bağımlı olurdu. Dolayısıyla $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n$ sistemi lineer bağımlı olurdu.

Şimdi det $A^t \neq 0 \Rightarrow$ rank U = rank $\tilde{U}$ olduğunu gösterelim:

A, $p \times q$ ve B , $q \times r$ tipinde matrisler olsun. Bu halde rank $AB \leq \min$ {rank A , rank$B$} olduğunu biliyoruz [3].

rank $\tilde{U} = \tilde{r}$ ve rank $U = r$ olsun.

$$\tilde{U} = UA^t \Rightarrow \text{rank } \tilde{U} = \text{rank}(UA^t) \leq \text{rank } U = r \Rightarrow \tilde{r} \leq r \tag{I.2.8}$$

$$\det A^t \neq 0 \Rightarrow (A^t)^{-1} \text{ vardır} \Rightarrow U = \tilde{U}\,(A^t)^{-1} \Rightarrow r \leq \tilde{r} \tag{I.2.9}$$

(I.2.8) ve **(I.2.9)** dan dolayı

$$\tilde{r} = r$$

dir.

II. BÖLÜM

EŞLENİK LİNEER DİFERANSİYEL OPERATÖR

II.1. Lagrange Formülü, Eşlenik Diferansiyel İfadeler

Bu bölümde L operatörünün eşleniğini bulacağız. Fonksiyonel Analizden biliyoruz ki; operatör ile eşlenik operatörün özellikleri arasında sıkı bağlantılar vardır. Yani; bir operatörün eşleniğinin özelliklerini bulmakla kendisinin bazı özelliklerini bulmuş oluyoruz.

$$\ell(y) = p_0(x)\,\frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\,\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + p_n(x)\,y \qquad \textbf{(II.1.1)}$$

diferansiyel ifadesinde $P_k(x) \in C^{n-k}[a,b]$, $k=0,1,\dots,n$ ve $y,z \in C^{(n)}[a,b]$ iki keyfi fonksiyon olsun.

$$\int_a^b \ell(y)\,\bar{z}\,dx = \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\,y^{(k)}\right)\bar{z}\,dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \int_a^b p_{n-k}\,y^{(k)}\,\bar{z}\,dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \int_a^b (p_{n-k}\,\bar{z})\,y^{(k)}\,dx$$

Her bir toplama k-kere kısmi integrallemeyi uygulayalım.

$$\int_a^b (p_{n-k}\,\bar{z})\,y^{(k)}\,dx = \int_a^b (p_{n-k}\,\bar{z})\,dy^{(k-1)}$$

$$= (p_{n-k}\overline{z})y^{(k-1)}\Big|_a^b - \int_a^b (p_{n-k}\overline{z})' y^{(k-1)}dx$$

$$= [(p_{n-k}\overline{z})y^{(k-1)} - (p_{n-k}\overline{z})' y^{(k-2)}]\Big|_a^b + \int_a^b (p_{n-k}\overline{z})'' y^{(k-2)}dx$$

$$= [(p_{n-k}\overline{z})y^{(k-1)} - (p_{n-k}\overline{z})' y^{(k-2)} + (p_{n-k}\overline{z})'' y^{(k-3)} + \ldots +$$

$$+ (-1)^{(k-1)}(p_{n-k}\overline{z})^{(k-1)} y]\Big|_a^b + (-1)^k \int_a^b y\,(p_{n-k}\overline{z})^{(k)}dx$$

$$= \Big(\sum_{s=0}^{k-1} (-1)^s (p_{n-k}\overline{z})^{(s)} y^{(k-1-s)}\Big)\Big|_a^b + (-1)^k \int_a^b (p_{n-k}\overline{z})^{(k)} y\,dx$$

Bunu bir önceki eşitlikte yerine yazarsak,

$$\int_a^b \ell(y)\,\overline{z}\,dx = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b (p_{n-k}\overline{z})\,y^{(k)}dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left[\left(\sum_{s=0}^{k-1}(-1)^s (p_{n-k}\overline{z})^{(s)} y^{(k-1-s)}\right)\Big|_a^b + (-1)^k \int_a^b (P_{n-k}\overline{z})^{(k)} y\,dx\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{k-1} (-1)^s (p_{n-k}\overline{z})^{(s)} y^{(k-1-s)}\Big|_a^b + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_a^b y\,(p_{n-k}\overline{z})^{(k)}dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{k-1}(-1)^s(p_{n-k}\overline{z})^{(s)}y^{(k-1-s)}\Big|_a^b + \int_a^b ((-1)^n (p_0\overline{z})^{(n)} + (-1)^{n-1}(p_1\overline{z})^{(n-1)} + \ldots + p_n\overline{z})\,y\,dx \quad \textbf{(II.1.2)}$$

elde ederiz. Bu ifadede;

$$\ell^*(z) = (-1)^n (\bar{p}_0 z)^{(n)} + (-1)^{n-1} (\bar{p}_1 z)^{(n-1)} + \dots + \bar{p}_n z \qquad \textbf{(II.1.3)}$$

$$\eta = (y_a, y'_a, \dots, y_a^{(n-1)}, y_b, y'_b, \dots, y_b^{(n-1)})$$

$$\xi = (z_a, z'_a, \dots, z_a^{(n-1)}, z_b, z'_b, \dots, z_b^{(n-1)})$$

$$p(\eta,\xi) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^s (p_{n-k} \bar{z})^{(s)} y^{(k-1-s)} \Big|_a^b \qquad \textbf{(II.1.4)}$$

ile gösterilerek **(II.1.2)** formülünü,

$$\int_a^b \ell(y)\, \bar{z}\, dx = p(\eta,\xi) + \int_a^b y\, \overline{\ell^*(z)}\, dx \qquad \textbf{(II.1.5)}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $p(\eta,\xi)$ her iki değişkene göre lineer ifadedir. **(II.1.5)** formülü **Lagrange formülü** olarak adlandırılır.

Tanım II.1.1.

$$\ell^*(z) = (-1)^n (\bar{p}_0 z)^{(n)} + \dots + \bar{p}_n z$$

ifadesine $\ell(y) = p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y$ diferansiyel ifadesinin **eşleniği** denir.

Tanım II.1.2.

$$p(y) = p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y$$

$$q(y) = q_0 y^{(n)} + q_1 y^{(n-1)} + \dots + q_n y$$

diferansiyel ifadeleri verilsin. Eğer her iki değişkene göre lineer olan $\exists\ H(\eta,\xi)$ ifadesi varsa ki;

$$\int_a^b p(y)\,\overline{z}\,dx = H(\eta,\xi) + \int_a^b y\,\overline{q(z)}\,dx$$

olsun, bu halde p ve q ya **eşlenik diferansiyel ifadeler** denir. Yani, q-ya p-nin eşleniği denir ve $q = p^*$ ile gösterilir.

$$\int_a^b \ell(y)\,\overline{z}\,dx = p(\eta,\xi) + \int_a^b y\,\overline{\ell^*(z)}\,dx$$

ifadesinde her iki tarafın eşleniğini alırsak;

$$\int_a^b \ell^*(z)\,\overline{y}\,dx = -\overline{p(\eta,\xi)} + \int_a^b z\,\overline{\ell(y)}\,dx$$

elde ederiz.

Sonuç II.1.1.

$\ell(y)$ diferansiyel ifadeside $\ell^*(z)$ diferansiyel ifadesinin eşleniğidir. Yani, $\ell(y)$ ve $\ell^*(y)$ diferansiyel ifadeleri birbiri ile eşleniktirler.

Sonuç II.1.2.

1) $(\ell_1 + \ell_2)^* = \ell^*_1 + \ell^*_2$

2) $(\lambda\ell)^* = \overline{\lambda}\,\ell^*$, ($\lambda \in$ C kompleks sayı)

olduğu açıktır.

Tanım II.1.3.

$\ell^*(y) = \ell(y)$ olursa $\ell(y)$ diferansiyel ifadesine **kendisine eşlenik diferansiyel ifade** denir.

Yukarıda 1 ve 2'den aşağıdaki sonuçları alıyoruz.

Sonuç II.1.3.

a) Kendine eşlenik diferansiyel ifadelerin toplamıda kendine eşleniktir. Gerçekten de

$$(\ell_1 + \ell_2)^* = \ell^*_1 + \ell^*_2 = \ell_1 + \ell_2 = (\ell_1 + \ell_2)$$

dir.

b) Kendisine eşlenik diferansiyel ifadenin reel sayı ile çarpımı da kendine eşleniktir.

Gerçekten λ–reel sayı ve $\ell(y)$ kendine eşlenik diferansiyel ifade olduğunda

$$(\lambda\ell)^* = (\lambda p_0(x)\, y^{(n)} + \lambda p_1(x)\, y^{(n-1)} + \dots + \lambda p_n(x)\, y\,)^*$$

$$= (-1)^n\, (\overline{\lambda p_0}y)^{(n)} + (-1)^{n-1}\, (\overline{\lambda p_1}y)^{(n-1)} + \dots + \overline{\lambda p_n}y$$

$$= \overline{\lambda}\left[(-1)^n\, (\overline{p_0}y)^{(n)} + (-1)^{n-1}\, (\overline{p_1}y)^{(n-1)} + \dots + \overline{p_n}y\right] = \overline{\lambda}\ell^* = \lambda\ell$$

elde edilir.

II.2. Kendine Eşlenik Diferansiyel İfadelerin Genel Şekli

TeoremII.2.1.

Kendine eşlenik her diferansiyel ifade,

$$\ell_{2v}(y) = \left(py^{(v)}\right)^{(v)}$$

$$\ell_{2v-1}(y) = \frac{1}{2}\left[\, \left(ipy^{(v-1)}\right)^{(v)} + \left(ipy^{(v)}\right)^{(v-1)} \right]$$

biçiminde olan diferansiyel ifadelerin herhangi toplamından oluşuyor. Burada p(x) ancak reel değerler alan fonksiyondur.

İspat :

$$\text{Önce} \int_a^b \ell_{2v}(y)\,\overline{z}\,dx \quad \text{ve} \quad \int_a^b \ell_{2v-1}(y)\,\overline{z}\,dx \quad , \quad y,z \in C^{(n)}$$

integrallerine kısmi integralleme yöntemini uygulayarak $\ell_{2v}(y)$ ve $\ell_{2v-1}(y)$ diferansiyel ifadelerinin kendine eşlenik olduklarını gösterelim.

$$\int_a^b \ell_{2v}(y)\,\overline{z}\,dx = \int_a^b (py^{(v)})^{(v)}\,\overline{z}\,dx$$

$$=[\overline{z}\,(py^{(v)})^{(v-1)} - (\overline{z})'\,(py^{(v)})^{(v-2)} +...+ (-1)^{v-1}(\overline{z})^{(v-1)}py^{(v)}]\,|_a^b + (-1)^v \int_a^b (\overline{z})^{(v)}py^{(v)}dx$$

$$=[\overline{z}\,(py^{(v)})^{(v-1)} - (\overline{z})'\,(py^{(v)})^{(v-2)} +...+ (-1)^{v-1}(\overline{z})^{(v-1)}py^{(v)}]\,|_a^b + (-1)^v \int_a^b [p(\overline{z})^{(v)}]y^{(v)}dx$$

$$= (\overline{z})\,(py^{(v)})^{(v-1)} - (\overline{z})'\,(py^{(v)})^{(v-2)} +...+ (-1)^{v-1}(\overline{z})^{(v-1)}\,(py^{(v)}) +$$

$$+ (-1)^v\,[(p(\overline{z})^{(v)})y^{(v-1)} - (P(\overline{z})^{(v)})'\,y^{(v-2)} + ... + (-1)^v\,y\,(p(\overline{z})^{(v)})^{(v-1)}\,|_a^b +$$

$$+ (-1)^v \int_a^b y\,(p(\overline{z})^{(v)})^{(v)}dx\,]$$

$$= p(\eta,\zeta) + (-1)^{2v} \int_a^b y\,\overline{(p(z)^{(v)})^{(v)}}\,dx$$

p reel olduğundan $p = \overline{p}$ dir. Buradan,

$$\int_a^b \ell_{2v}(y)\,\overline{z}\;dx = p(\eta,\zeta) + \int_a^b y\,\overline{(p(z)^{(v)})^{(v)}}\;dx$$

elde edilir. Yani; $\ell^*_{2v} = \ell_{2v}$ bulunur.

Şimdi $\ell_{2v-1}(y) = \frac{1}{2}\left[\,(ipy^{(v-1)})^{(v)} + (ipy^{(v)})^{(v-1)}\,\right]$ ifadesinin kendisine eşlenik olduğunu gösterelim.

$\ell^{(1)}_{2v-1}(y) = \frac{1}{2}\,(ipy^{(v-1)})^{(v)}$ ve $\ell^{(2)}_{2v-1}(y) = \frac{1}{2}\,(ipy^{(v)})^{(v-1)}$ olsun. Bu halde

$\ell_{2v-1} = \ell^{(1)}_{2v-1} + \ell^{(2)}_{2n-1}$ olur. Bu ifadelerin eşleniklerini bulalım.

$$\int_a^b \ell^{(1)}_{2v-1}(y)\,\overline{z}\;dx = \int_a^b \frac{1}{2}\,(ipy^{(v-1)})^{(v)}\,\overline{z}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\,\overline{z}\,(ipy^{(v-1)})^{(v-1)} - (\overline{z})'\,(ipy^{(v-1)})^{(v-2)} + (\overline{z})''\,(ipy^{(v-1)})^{(v-3)} + \dots + \right.$$

$$\left. + (-1)^{(v-1)}\,(\overline{z})^{(v-1)}\,(ipy^{(v-1)})\,\right]\Big|_a^b + (-1)^{(v)}\int_a^b (\overline{z})^{(v)}\;(ipy^{(v-1)})\,dx$$

$$= p_1(\eta,\xi) + \frac{1}{2}\,(-1)^{v}\int_a^b (ip\overline{z}^{(v)})\,y^{(v-1)}\,dx$$

$$= p_1(\eta,\xi) + \frac{1}{2}\,(-1)^{(v)}\;\left[\,(ip\overline{z}^{(v)})\,y^{(v-2)} - (ip\overline{z}^{(v)})'\,y^{(v-3)} + \dots + \right.$$

$$+ (-1)^{(\nu-2)} (ip\overline{z}^{(\nu)})^{(\nu-2)} y \Big|_a^b + (-1)^{(\nu-1)} \int_a^b (ip\overline{z}^{(\nu)})^{(\nu-1)} y \, dx$$

$$= p(\eta,\zeta) + \frac{1}{2} (-1)^{(2\nu-1)} \int_a^b \overline{(\overline{ip}z^{(\nu)})^{(\nu-1)}} \, y \, dx$$

$$= p(\eta,\zeta) + \int_a^b \frac{1}{2} \overline{(ipz^{(\nu)})^{(\nu-1)}} \, y \, dx$$

Buradan

$$\int_a^b \ell_{2\nu-1}^{(1)}(y) \overline{z} \, dx = p(\eta,\zeta) + \int_a^b \overline{\ell_{2\nu-1}^{(2)} (z)} \, y \, dx$$

yani

$$\ell_{2\nu-1}^{(2)} = (\ell_{2\nu-1}^{(1)})^*$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\ell_{2\nu-1}^{(1)} = (\ell_{2\nu-1}^{(2)})^*$$

buluruz. Yani; $\ell_{2\nu-1}^{(1)}$ ve $\ell_{2\nu-1}^{(2)}$ diferansiyel ifadeleri birbirinin eşleniğidir. Bu ifadelerden faydalanarak

$$\ell_{2\nu-1}^{*} = (\ell_{2\nu-1}^{(1)} + \ell_{2\nu-1}^{(2)})^* = (\ell_{2\nu-1}^{(1)})^* + (\ell_{2\nu-1}^{(2)})^*$$

$$= \ell_{2\nu-1}^{(2)} + \ell_{2\nu-1}^{(1)} = \ell_{2\nu-1}$$

Yani;

$$\ell^{*}_{2v-1} = \ell_{2v-1}$$

bulunur.

O halde $\ell_{2v}(y)$ ve $\ell_{2v-1}(y)$ şeklindeki sonlu sayıda diferansiyel ifadelerin toplamıda kendisine eşleniktir.

Şimdi tersine ispat yapalım.

$$\ell(y) = p_0\, y^{(n)} + p_1\, y^{(n-1)} + \dots + p_n\, y$$

diferansiyel ifadesi kendine eşlenik herhangi diferansiyel ifade olsun.

$$\ell^*(y) = (-1)^{(n)} (\overline{p_0}\, y)^{(n)} + (-1)^{(n-1)} (\overline{p_1}\, y)^{(n-1)} + \dots + \overline{p_n}\, y$$

$$= (-1)^n [\, y^{(n)}\, \overline{p_0} + n y^{(n-1)} (\overline{p_0})^1 + \dots + y(\overline{p_0})^{(n)}] + (-1)^n [y^{(n-1)}\, \overline{p_1} +$$

$$+ (n-1)\, y^{(n-2)} (\overline{p_1})^1 + \dots + y(\overline{p_1})^{(n-1)}\,] + \dots + \overline{p_n}\, y$$

$$= (-1)^n\, \overline{p_0}\, y^{(n)} + \left((-1)^n\, n\, (\overline{p_0})^1 + (-1)^{(n-1)}\, \overline{p_1}\right) y^{(n-1)} + \dots$$

ve $\ell(y) = \ell^*(y)$ olduğundan

$$P_0 = (-1)^n\, \overline{p_0}$$

eşitliği bulunur.

Önce n-nin çift olduğunu kabul edelim. $n=2\mu$. Bu halde sonuncu eşitlikten

$$P_0 = (-1)^n\, \overline{p_0} = (-1)^{2\mu}\, \overline{p_0} = \overline{p_0}$$

elde edilir. O halde n çift ve $\ell = \ell^*$ olduğunda p_0-reel değerli fonksiyon olmalıdır. Bu halde;

$$\ell_{2\mu}(y) = (p_0 y^{(\mu)})^{(\mu)} = p_0\, y^{(2\mu)} + \mu\, p'_0\, y^{(2\mu-1)} + \dots$$

$$= p_0\, y^{(n)} + \mu p'_0\, y^{(n-1)} + \dots$$

bulunur.

İki kendine eşlenik diferansiyel ifadenin farkı da kendine eşlenik diferansiyel ifade olduğundan,

$$\ell(y) - \ell_{2\mu}(y) = p_0\, y^{(n)} + \dots + p_n\, y - (p_0\, y^{(n)} + \mu p'_0\, y^{(n-1)} + \dots)$$

$$= (p_1 - \mu\, p_0')\, y^{(n-1)} + \ldots$$

diferansiyel ifadeside kendine eşleniktir ve mertebesi $\leq n-1$ dir.

Şimdi n-nin tek olduğu duruma bakalım. $n = 2\mu - 1$. Bu halde,

$$p_0 = (-1)^{2\mu-1}\,\overline{p_0} = -\overline{p_0} \Rightarrow p_0 = ip$$

olur. Burada p yalnız reel değerler alan fonksiyondur. Aşağıdaki şekilde bir diferansiyel ifade ele alalım.

$$\ell_{2\mu-1}(y) = \frac{1}{2}\,[(ipy^{(\mu-1)})^{(\mu)} + (ipy^{(\mu)})^{(\mu-1)}]$$

$$= (ip)\, y^{(2\mu-1)} + \frac{1}{2}\, ni\, p' y^{(2\mu-2)} + \ldots$$

$$= p_0\, y^{(2\mu-1)} + \frac{1}{2}\, n\, p_0'\, y^{(2\mu-2)} + \ldots$$

$\ell(y)$-den $\ell_{2\mu-1}(y)$ diferansiyel ifadesini çıkarırsak (n–1)-inci veya daha küçük mertebeden kendine eşlenik

$$\ell(y) - \ell_{2\mu-1}(y) = \left(\frac{1}{2}\, nip'\right) y^{(n-1)} + \ldots$$

ifadesini almış oluruz. Bu yöntemi ard arda uygulayarak, yani; kendine eşlenik $\ell(y)$ ifadesinden yine kendine eşlenik $\ell_{2\mu}(y)$ veya $\ell_{2\mu-1}(y)$ ifadelerini çıkarırsak sonuçta sıfırıncı mertebeden

$$\ell_0(y) = py$$

şeklinde ifade elde ederiz. (Burada p-reel değerlidir). Böylece

$$\ell(y) - \ell_{2\mu}(y) - \ell_{2\mu-1}(y) - \ldots - \ell_0(y) = 0$$

yani

$$\ell(y) = \ell_{2\mu}(y) + \ell_{2\mu-1}(y) + \ldots + \ell_0(y)$$

elde edilir.

Özel olarak eğer $\ell(y)$ ifadesi bütün katsayıları reel değerli fonksiyonlar olan kendine eşlenik diferansiyel ifade ise bu halde, bu ifade $\ell_{2\mu-1}(y)$ biçiminde olan toplama sahip değildir. Yani; şu sonuç geçerlidir.

Sonuç II.2.2.

Katsayıları reel değerli fonksiyonlar olan kendine eşlenik her diferansiyel ifade çift mertebedendir ve

$$\ell(y) = (p_0\, y^{(\nu)})^{(\nu)} + (p_1\, y^{(\nu-1)})^{(\nu-1)} + \dots + (p_{\nu-1}\, y')' + p_n\, y$$

şeklindedir.

II.3. Kendine Eşlenik Sınır Şartları ve Eşlenik Diferansiyel Operatör

$y_a, y_a', \dots, y_a^{(n-1)}, y_b, y_b', \dots y_b^{(n-1)}$ değişkenlerine bağlı m-tane $U_1, U_2, \dots U_m$ lineer bağımsız sınır formları verilmiş olsun. $m<2n$ olduğu durumda, bunlara öyle $U_{m+1}, U_{m+2}, \dots U_{2n}$ sınır formları ekleyelim ki $U_1, U_2, \dots U_m$, $U_{m+1}, U_{m+2}, \dots, U_{2n}$ sistemi lineer bağımsız olsun. Bu sınır formları lineer bağımsız olduğu için $y_a, y_a', \dots, y_a^{(n-1)}, y_b, y_b', \dots y_b^{(n-1)}$ değişkenlerini bunların lineer birleşimleri şeklinde göstermek olur.

$$\begin{cases} U_1(y) = \alpha_{01}\, y_a + \alpha_{11}\, y_a' + \dots + \alpha_{n-11}\, y_a^{(n-1)} + \beta_{01}\, y_b + \beta_{11}\, y_b' + \dots + \beta_{n-11}\, y_b^{(n-1)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ U_{2n}(y) = \alpha_{02n}\, y_a + \alpha_{12n}\, y_a' + \dots + \alpha_{n-12n}\, y_a^{(n-1)} + \beta_{02n}\, y_b + \beta_{12n}\, y_b' + \dots + \beta_{n-12n}\, y_b^{(n-1)} \end{cases}$$

eşitliklerini matris formunda yazarsak

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{01} & \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{n-11} & \beta_{01} & \beta_{11} & \cdots & \beta_{n-11} \\ \alpha_{02} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{n-12} & \beta_{02} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{n-12} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{02n} & \alpha_{12n} & \cdots & \alpha_{n-12n} & \beta_{02n} & \beta_{12n} & \cdots & \beta_{n-12n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_a \\ y'_a \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_b^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

yani; $U = AY$ olur. Sınır formları lineer bağımsız olduğundan $\det A \neq o$ dır ve bu nedenle A^{-1} vardır. O halde,

$$Y = A^{-1}U$$

olur. Yani; $y_a , y'_a , \ldots , y_a^{(n-1)} , y_b , y'_b , \ldots y_b^{(n-1)}$ ifadelerini $U_1, U_2 , \ldots U_{2n}$ ifadelerinin lineer birleşimleri şeklinde gösterebiliriz. Bunları

$$\int_a^b \ell(y)\,\overline{z}\,dx = p(\eta,\xi) + \int_a^b y\,\overline{\overset{*}{\ell}(z)}\,dx$$

Lagrange formülündeki $p(\eta,\xi)$ ifadesinde yerine yazarsak $p(\eta,\xi)$ ifadesi $U_1, U_2 , \ldots U_{2n}$ değişkenlerine bağlı ve her değişkene göre lineer olur. Eğer katsayıları sırası ile $V_{2n}, V_{2n-1} , \ldots , V_1$ ile gösterirsek;

$$p(\eta,\xi) = V_{2n}\,U_1 + V_{2n-1}\,U_2 + \ldots + V_1\,U_{2n}$$

elde etmiş oluruz. $V_{2n} , V_{2n-1} , \ldots , V_1$ katsayılarının herbirinin $z_a, z'_a, z_a^{(n-1)}, z_b, z'_b, \ldots, z_b^{(n-1)}$ değişkenlerinin lineer birleşimi olduğu açıktır. Bu durumda Lagrange formülünü

$$\int_a^b \ell(y)\,\overline{z}\,dx = U_1\,V_{2n} + U_2\,V_{2n-1} + \ldots + U_m\,V_{2n-m+1} + \ldots + U_{2n}\,V_1 + \int_a^b \overline{\overset{*}{\ell}(z)}\,y\,dx$$

biçiminde yazabiliriz.

Önerme II.3.1.

$V_1, V_2, \dots, V_{2n}$ formları lineer bağımsızdır.

İspat :

$p(\eta,\xi)$-nin $x = a$ ve $x = b$ değerlerine uygun toplamlarını ayırarak bu ifadeyi

$$p(\eta,\xi) = p_b(\eta,\xi) - p_a(\eta,\xi)$$

şeklinde gösterelim. Burada $p_a(\eta,\xi)$ ve $p_b(\eta,\xi)$ ifadeleri $y, y', \dots, y^{(n-1)}, z, z', \dots, z^{(n-1)}$ fonksiyonlarının sadece $x = a$ ve $x = b$ noktalarındaki değerlerini içeriyor.

$p(\eta,\xi)$ ifadesinin matrisini bulalım :

$p(\eta,\xi)$ ifadesini açık şekilde yazarsak;

$$p(\eta,\xi) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{k-1} (-1)^s (p_{n-k}\,\overline{z})^{(s)}\, y^{(k-1-s)}\Big|_b - \sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{k-1} (-1)^s (p_{n-k}\,\overline{z})^{(s)}\, y^{(k-1-s)}\Big|_a$$

$$=\sum_{k=0}^{n} [(p_{n-k}(b)\,\overline{z}(b)\,)\, y^{(k-1)}_{(b)} - (p_{n-k}(b)\,\overline{z}(b))'\, y^{(k-2)}_{(b)} + \dots + (-1)^{k-1}(p_{n-k}(b)\,\overline{z}(b))^{(k-1)}\, y_{(b)}] -$$

$$-\sum_{k=0}^{n} [(p_{n-k}(a)\,\overline{z}(a)\,)\, y^{(k-1)}_{(a)} - (p_{n-k}(a)\,\overline{z}(a))'\, y^{(k-2)}_{(a)} + \dots + (-1)^{k-1}(p_{n-k}(a)\,\overline{z}(a))^{(k-1)}\, y_{(a)}]$$

$$= (p_0(b)\,\overline{z}(b)\,)\, y^{(n-1)}_{(b)} - (p_0(b)\,\overline{z}(b))'\, y^{(n-2)}_{(b)} + \dots + (-1)^{n-1}(p_0(b)\,\overline{z}(b))^{(n-1)}\, y_{(b)} +$$

$$+ \dots + (p_{n-2}(b)\,\overline{z}(b)\,)\, y'_{(b)} - (p_{n-2}(b)\,\overline{z}(b))'\, y_{(b)} + (p_{n-1}(b)\,\overline{z}(b))\, y_{(b)} -$$

$$- (p_0(a)\,\overline{z}(a)\,)\, y^{(n-1)}_{(a)} - (p_0(a)\,\overline{z}(a))'\, y^{(n-2)}_{(a)} + \dots + (-1)^{n-1}(p_0(a)\,\overline{z}(a))^{(n-1)}\, y_{(a)} +$$

$$+ \dots + (p_{n-2}(a)\,\overline{z}(a)\,)\, y'_{(a)} - (p_{n-2}(a)\,\overline{z}(a))'\, y_{(a)} + (p_{n-1}(a)\,\overline{z}(a))\, y_{(a)}$$

elde etmiş oluruz.

$$(f.g)^{(n)} = f^{(n)}\, g + n\, f^{(n-1)}\, g' + \frac{n\,(n-1)}{2!}\, f^{(n-2)}\, g'' + \dots + f\, g^{(n)}$$

Leibnitz formülüne göre bu ifadeleri açarsak;

$$p(\eta,\zeta) = \{\ (-1)^{n-1}\ [p_0^{(n-1)}(b)\ \overline{z}(b) + (n-1)\ p_0^{(n-2)}(b)\ \overline{z}(b) + \ldots + p_0(b)\ \overline{z}^{(n-1)}(b)\ ]\ y(b) +$$

$$+ (-1)^{n-2}\ [p_0^{(n-2)}(b)\ \overline{z}(b) + (n-2)\ p_0^{(n-3)}(b)\ \overline{z}'(b) + \ldots + p_0(b)\ \overline{z}^{(n-2)}(b)\ ]\ y'(b) +$$

$$+ (p_{n-2}(b)\ \overline{z}(b))\ y(b) - (p_{n-2}(b)\ \overline{z}(b))\ y'(b) + (p_{n-1}(b)\ \overline{z}(b))\ y(b)\ \} -$$

$$- \{\ (-1)^{n-1}\ [p_0^{(n-1)}(a)\ \overline{z}(a) + (n-1)\ p_0^{(n-2)}(a)\ \overline{z}(a) + \ldots + p_0(a)\ \overline{z}^{(n-1)}(a)\ ]\ y(a) +$$

$$+ (-1)^{n-2}\ [p_0^{(n-2)}(a)\ \overline{z}(a) + (n-2)\ p_0^{(n-3)}(a)\ \overline{z}'(a) + \ldots + p_0(a)\ \overline{z}^{(n-2)}(a)\ ]\ y'(a) +$$

$$+ (p_{n-2}(a)\ \overline{z}(a))\ y(a) - (p_{n-2}(a)\ \overline{z}(a))\ y'(a) + (p_{n-1}(a)\ \overline{z}(a))\ y(a)\ \}$$

elde etmiş oluruz. O halde $p(\eta,\zeta)$ lineer formunun matrisi,

$$P = \left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
\bullet & \bullet & \bullet \ldots & \bullet & & (-1)^{n-1}p_0(a) & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & & 0 \\
\bullet & \bullet & \bullet \ldots & (-1)^{n-2}\,p_0(a) & & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
P_0(a) & 0 & 0 \ldots & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 \ldots & 0 & & 0 & \bullet & \bullet & \bullet \ldots & \bullet & & (-1)^{n-2}p_0(b) \\
0 & 0 & 0 \ldots & 0 & & 0 & \bullet & \bullet & \bullet \ldots & (-1)^{n-2}\,p_0(b) & & \bullet \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 \ldots & 0 & & 0 & P_0(b) & 0 & 0 \ldots & 0 & & 0
\end{array}\right]$$

şeklindedir. Bu matrisi kısaca

$$P = \left[\begin{array}{c|c} -P_a & 0 \\ \hline 0 & P_b \end{array}\right]$$

şeklinde göstereceğiz. Burada p_a ve p_b, $p_a(\eta,\zeta)$ ve $p_b(\eta,\zeta)$-ye uygun gelen matrislerdir. O ise bütün elemanları "0" (sıfır) olan matristir. p_a ve p_b matrislerinin herbiri

$$\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \dots \bullet & \bullet & (-1)^{n-1}p_0 \\ \bullet & \bullet & \bullet \dots \bullet & (-1)^{n-2}p_0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bullet & -P_0 & \bullet \dots 0 & 0 & 0 \\ P_0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. p_a halinde $p_0 = p_0(a)$, p_b halinde ise $p_0 = p_0(b)$, kabul ediyoruz. Bu matriste köşegenin sağ tarafı yalnız "0"-lardan üst sol tarafı ise bizi ilgilendirmeyen herhangi sayılardan oluşuyor. İspat için köşegenin üst kısmındaki elemanların değerlerinin ne olduğunun hiçbir önemi olmadığından yazılmamıştır. p_a ve p_b matrislerinin determinantları sıfırdan farklı olduklarından

$$\det p = \det(-p_a) \cdot \det(p_b) \neq 0$$

dır. O halde, $y_a, y_a', \dots, y_a^{(n-1)}, y_b, y_b', \dots y_b^{(n-1)}$ değişkenlerinden $U_1, U_2, \dots, U_m, \dots, U_{2n}$ değişkenlerine geçiş matrisinin determinantı sıfırdan farklıdır. Buna görede $p(\eta,\xi)$ formunun $U_1, U_2, \dots, U_m, \dots, U_{2n}$ ve $z_a, z_a', z_a^{(n-1)}, z_b, z_b', \dots, z_b^{(n-1)}$ değişkenlerine göre matrisinin determinantı sıfırdan farklı olacaktır. Fakat bu matris aynı zamanda $V_{2n}, V_{2n-1}, \dots, V_1$ değişkenlerinin katsayılarından oluşan matristir. Gerçekten; $y_a, \dots, y_a^{(n-1)}, y_b, \dots, y_b^{(n-1)}$ ifadelerini $p(\eta,\xi)$-de yerine yazarsak, bu ifade $U_1, U_2, \dots, U_m, \dots, U_{2n}$ ve $z_a, z_a', z_a^{(n-1)}, z_b, z_b', \dots, z_b^{(n-1)}$ değişkenlerinin bir lineer formu olur. Bu formu,

$$p(\eta,\xi) = a_{11} U_1 z_a + \dots + a_{1n} U_1 z_a^{(n-1)} + b_{11} U_1 z_b + \dots + b_{1n} U_1 z_b^{(n-1)} +$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+ a_{2n1} U_{2n} z_a + \dots + a_{2nn} U_{2n} z_a^{(n-1)} + b_{2n1} U_{2n} z_b + \dots + b_{2nn} U_{2n} z_b^{(n-1)}$$

şeklinde gösterelim.

Diğer taraftan $V_{2n}, V_{2n-1}, \ldots, V_1$ ifadelerinin $z_a, \ldots, z_a^{(n-1)}, z_b, \ldots, z_b^{(n-1)}$ değişkenlerinin lineer formu olduğunu biliyoruz.

$$V_{2n} = \alpha_{11} z_a + \ldots + \alpha_{1n} z_a^{(n-1)} + \beta_{11} z_b + \ldots + \beta_{1n} z_b^{(n-1)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$V_1 = \alpha_{2n1} z_a + \ldots + \alpha_{2nn} z_a^{(n-1)} + \beta_{2n1} z_b + \ldots + \beta_{2nn} z_b^{(n-1)}$$

olsun. Bu ifadeleri $p(\eta,\xi)$-de yerine yazarsak

$$\begin{aligned} p(\eta,\zeta) &= U_1 V_{2n} + \ldots + U_{2n} V_1 \\ &= U_1 (\alpha_{11} z_a + \ldots + \alpha_{1n} z_a^{(n-1)} + \beta_{11} z_b + \ldots + \beta_{1n} z_b^{(n-1)}) + \\ &+ U_{2n} (\alpha_{2n1} z_a + \ldots + \alpha_{2nn} z_a^{(n-1)} + \beta_{2n1} z_b + \ldots + \beta_{2nn} z_b^{(n-1)}) \end{aligned}$$

elde ederiz. $p(\eta,\xi)$-ye karşılık gelen determinant sıfırdan farklı olduğundan, yukarıdaki sistemin katsayılar determinantıda sıfırdan farklı olur. Yani;

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} & \beta_{11} & \ldots & \beta_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{2n1} & \ldots & \alpha_{2nn} & \beta_{2n1} & \ldots & \beta_{2nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

dır. Bu determinant aynı zamanda $V_{2n}, V_{2n-1}, \ldots, V_1$ formlarının katsayılarından oluşan determinanttır. O halde $V_1, V_2, \ldots, V_{2n}$ formları lineer bağımsızdır.

Tanım II.3.1.

$$V_1 = 0, \ V_2 = 0, \ldots, \ V_{2n-m} = 0$$

sınır şartlarına

$$U_1 = 0, \ U_2 = 0, \ldots, \ U_m = 0$$

sınır şartlarının **eşlenik (adjoint) sınır şartları** denir.

$V_1 = 0 , \dots , V_{2n-m} = 0$ sınır şartlarına eşdeğer olan her sınır şartlarına da $U_1 = 0 , \dots , U_m = 0$ sınır şartlarının eşlenik sınır şartları diyeceğiz.

Tanım II.3.2.

Eğer herhangi sınır şarlarının eşlenik sınır şartları kendisi ile eşdeğer oluyorsa, böyle sınır şartlarına **kendine eşlenik sınır şartları** denir.

Tanım II.3.3.

$\ell^*(z)$ diferansiyel ifadesinin ve

$V_1 = 0 , V_2 = 0 , \dots , V_{2n-m} = 0$

sınır şartlarının ürettiği diferansiyel operatöre $\ell(y)$ diferansiyel ifadesinin ve

$U_1 = 0 , U_2 = 0 , \dots , U_m = 0$

sınır şartlarının ürettiği L diferansiyel operatörünün **eşlenik diferansiyel operatörü** denir ve L* ile gösterilir.

Lagrange formülünden ve eşlenik diferansiyel operatörün tanımından

$$\int_a^b L y \bar{z} \, dx = \int_a^b y \overline{L^* z} \, dx \qquad \textbf{(II.3.1)}$$

formülü çıkıyor. Aşağıdaki işaretlemeyi kabul edelim:

İki $y, z \in C[a,b]$ fonksiyonunun $<y,z>$ iç çarpımını

$$< y , z > = \int_a^b y(x) \overline{z(x)} \, dx$$

formülü ile tanımlarsak **(II.3.1)** eşitliği

$$< Ly , z > = < y , L^*z >$$

şeklinde olur.

Eşlenik operatörün tanımı gereğince L operatörü de L* operatörünün eşleniğidir. Yani;

$$L^{**} = L$$

dir.

Tanım II.3.4.

Eğer $L^* = L$ oluyorsa L operatörüne **kendine eşlenik (self–adjoint) operatör** denir. L operatörünün tanımından aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem II.2.2.

L operatörünün kendine eşlenik olması için gerek ve yeter şart bu operatörü üreten diferansiyel ifadenin ve sınır şartlarının kendine eşlenik olmasıdır. L operatörü kendine eşlenik olduğu durumda $< Ly , z > = < y , L^*z >$ formülü

$$< Ly , z > = < y , Lz >$$

şeklini alır.

(I.2.1) , **(I.2.2)** sınır değer problemini operatör şeklinde

$$Ly = 0$$

gibi yazabiliriz. Uygun olarak eşlenik sınır değer problemi

$$L^*z = 0$$

şeklinde yazılır. Ayrıntılı şekilde $L^*z = 0$ sınır problemini

$$\ell^*(z) = 0 \qquad \textbf{(II.3.2)}$$

$$V_v(z) = 0\ , \quad v = \overline{1\ , 2n\text{-}m} \qquad \textbf{(II.3.3)}$$

şeklinde yazmak olur. Burada $\ell^*(z)$, $\ell(y)$-ye eşlenik olan diferansiyel ifade, $V_1=0,\ldots,\ V_{2n\text{-}m}=0$ sınır şartları ise L operatörünü üreten sınır şartlarına eşlenik sınır şartlarıdır.

II.4. Sınır Değer Problemi ile Eşlenik Sınır Değer Probleminin Rankları Arasındaki Bağıntı

Bu bölümde sınır değer problemi ile ona eşlenik sınır değer probleminin rankları arasındaki bağıntıyı inceleyeceğiz.

Teorem II.4.1.

$$Ly = 0$$

sınır değer probleminin rankı r ise

$$L^*z = 0$$

eşlenik sınır değer probleminin rankı

$$r' = n - m + r$$

dir.

İspat :

z_1 , z_2 , ... , z_n fonksiyonları $\ell^*(z) = 0$ denkleminin lineer bağımsız n-tane çözümü olsun. Bu durumda genel çözüm

$$z = d_1 z_1 + d_2 z_2 + \dots + d_n z_n$$

şeklindedir. Bu çözümü **(II.3.3)** sınır şartlarında yerine yazarsak d_1 , d_2 , ... , d_n bilinmeyenlerine göre bir lineer denklem sistemi elde ederiz. Bu sistemin matrisi;

$$\begin{bmatrix} V_1(z_1) & V_1(z_2) & \dots & V_1(z_n) \\ V_2(z_1) & V_2(z_2) & \dots & V_2(z_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ V_{2n-m}(z_1) & V_{2n-m}(z_2) & \dots & V_{2n-m}(z_n) \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu matrisin rankını r' ile gösterelim. Bu halde **(II.3.2)**, **(II.3.3)** eşlenik sınır değer probleminin $n-r'$ tane lineer bağımsız çözümü vardır.

y fonksiyonu $Ly = 0$ denkleminin herhangi çözümü olsun. Bu halde $\ell(y) = 0$ ve $U_v(y) = 0$, $v = 1,2,\dots,m$ olur. Bu halde y ve z_v fonksiyonları için Lagrange formülü

$$U_{m+1}(y)\, V_{2n-m}(z_v) + U_{m+2}(y)\, V_{2n-m}(z_v) + ... + U_{2n}(y)\, V_1(z_v) = 0\ ,\ v = \overline{1,n} \quad \textbf{(II.4.1)}$$

şeklini alır. Yukarıdaki formülü $v=1,2,...,n$ için yazarsak $U_{m+1}(y)$, $U_{m+2}(y)$,..., $U_{2n}(y)$ ifadelerinin

$$\begin{cases} U_{m+1}(y)V_{2n-m}(z_1) + ... + U_{2n}(y)V_1(z_1) = 0 \\ U_{m+1}(y)V_{2n-m}(z_2) + ... + U_{2n}(y)V_1(z_2) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ U_{m+1}(y)V_{2n-m}(z_n) + ... + U_{2n}(y)V_1(z_n) = 0 \end{cases} \quad \textbf{(II.4.2)}$$

lineer denklemler sisteminin çözümü olduğunu elde ederiz. Lagrange formülü gereğince bu lineer denklemler sistemi $Ly=0$-ın her y çözümü için sağlanıyor. Bu çözümler y_1, y_2 ,..., y_{n-r} olsun. Bu halde **(II.4.1)** formülü gereğince,

$$(U_{m+1}(y_j)\ , ...\ , U_{2n}(y_j))\ ,\ j = \overline{1,n-r}$$

vektörlerinin herbiri **(II.4.2)** sisteminin çözümü oluyor. Bu çözümlerin lineer bağımsız olduklarını gösterelim.

Bu vektörleri

$$w_j = (U_{m+1}(y_j)\ , ...\ , U_{2n}(y_j))\ ,\ j = 1,2,...,n-r$$

ile gösterelim ve herhangi α_1 , α_2 , ... , α_{n-r} sayıları için

$$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + ... + \alpha_{n-r} w_{n-r} = 0$$

olduğunu kabul edelim.

$$\tilde{y} = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_{n-r} y_{n-r}$$

olsun. Bu durumda,

$$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_{n-r} w_{n-r} = \alpha_1 \left(U_{m+1}(y_1)\,,\, U_{m+2}(y_2)\,,\, \dots\,,\, U_{2n}(y_1)\right) +$$

$$+ \alpha_2(U_{m+1}(y_2),U_{m+2}(y_2),\dots,U_{2n}(y_2))+\dots+\alpha_{n-r}(U_{m+1}(y_{n-r}),U_{m+2}(y_{n-r}),\dots,U_{2n}(y_{n-r}))$$

$$= (\alpha_1 U_{m+1}(y_1)+\alpha_2 U_{m+1}(y_2)+\dots+\alpha_{n-r}(U_{m+1}(y_{n-r}),\alpha_1 U_{m+2}(y_1)+\alpha_2 U_{m+2}(y_2)+$$

$$+\dots+\alpha_{n-r}(U_{m+2}(y_{n-r}),\dots,\alpha_1(U_{2n}(y_1)+\alpha_2(U_{2n}(y_2)+\dots+\alpha_2(U_{2n}(y_{n-r}))$$

$$= (U_{m+1}(\tilde{y})\,,\, U_{m+2}(\tilde{y})\,,\, \dots\,,\, U_{2n}(\tilde{y})) = 0$$

yani;

$$U_{m+1}(\tilde{y}) = 0\,,\, U_{m+2}(\tilde{y}) = 0,\, \dots\,,\, U_{2n}(\tilde{y})) = 0 \qquad \textbf{(II.4.3)}$$

olur. Diğer taraftan $y_1\,,\, y_2\,,\, \dots\,,\, y_{n-r}$ fonksiyonlarının hir biri

$$\begin{cases} \ell(y) = 0 \\ U_v(y) = 0\ ,\ v = \overline{1,m} \end{cases}$$

homojen sınır değer probleminin çözümü olduğundan bu fonksiyonların lineer birleşimi olan $\tilde{y}$ fonksiyonu da bu sınır değer probleminin çözümüdür. Buradan,

$$U_1(\tilde{y}) = 0\,,\, U_2(\tilde{y}) = 0,\, \dots\,,\, U_m(\tilde{y}) = 0 \qquad \textbf{(II.4.4)}$$

eşitlikleri elde edilir. **(II.4.3)** ile **(II.4.4)**' ü

$$U_1(\tilde{y}) = U_2(\tilde{y}) = \ \dots = U_{2n}(\tilde{y}) = 0 \qquad \textbf{(II.4.5)}$$

şeklinde yazalım. **Önerme I.1.1.** gereğince buradan

$$\tilde{y}_a = \tilde{y}'_a = \dots = \tilde{y}_a^{(n-1)} = \tilde{y}_b = \tilde{y}'_b = \dots = \tilde{y}_b^{(n-1)} = 0 \qquad \textbf{(II.4.6)}$$

elde edilir. O halde $\tilde{y}$ fonksiyonu

$$\begin{cases} \ell(y) = 0 \\ y_a = y_a^{\prime} = \ldots = y_a^{(n-1)} = y_b = \ldots = y_b^{(n-1)} = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(II.4.7)}$$

sınır değer probleminin çözümüdür. Lineer diferansiyel denklemler teorisinden biliyoruz ki [8] **(II.4.7)** sisteminin ancak $y = 0$ trivial çözümü bulunur. Buradan $\tilde{y} = 0$ dır.

$$\tilde{y} = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_{n-r} y_{n-r}$$

olduğundan ve y_1 , y_2 , ... , y_{n-r} lineer bağımsız olduğundan buradan

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n-r} = 0$$

sonucu çıkar. Böylece ispat ettik ki **(II.4.2)** sisteminin n-r sayıda lineer bağımsız

$$(U_{m+1}(y_j) \, , \ldots , \, U_{2n}(y_j) \,) \, , \; j = 1,2,\ldots,n-r$$

çözümleri vardır.

(II.4.2) sisteminin matrisinin rankı r' olduğundan bu sistemin $2n-m-r'$ sayıda (ne az ne de fazla) lineer bağımsız çözümü vardır [3]. Bu durumda

$$n - r \leq 2n - m - r'$$

sağlanır. Bu eşitsizliği

$$r' \leq n - m + r \qquad \textbf{(II.4.8)}$$

şeklinde yazalım. Diğer taraftan ele aldığımız iki sınır değer problemi karşılıklı olarak birbirleri ile eşlenik olduğu için **(II.4.8)** eşitsizliği r-ile r'-nün ve m-ile $(2n - m)$-nin yerini değiştirdiğimizde de geçerli olacaktır. Yani;

$$r \leq n - (2n - m) + r' \qquad \textbf{(II.4.9)}$$

olur. Buradan,

$$r' \geq n - m + r$$

bulunur. **(II.4.8)** ve **(II.4.9)** dan dolayı

$$r' = n - m + r$$

bulunur.

Sonuç II.4.2.

$m = n$ ise $r' = r$ dir. Yani, eğer lineer bağımsız sınır şartlarının sayısı denklemin mertebesine eşitse, verilmiş sınır değer problemi ile eşlenik sınır değer problemlerinin rankları eşit oluyor.

Sonuç II.4.3.

Eğer lineer bağımsız sınır şartlarının sayısı diferansiyel operatörün mertebesine eşitse ve eğer homojen sınır probleminin yalnız trivial (tek bir sıfır) çözümü varsa bu durumda eşlenik sınır problemininde yalnız trivial ($y \equiv 0$) çözümü vardır.

III. BÖLÜM

DİFERANSİYEL OPERATÖRÜN ÖZDEĞERLERİ ve ÖZFONKSİYONLARI

III.1. Özdeğerler ve Özfonksiyonlar

$$\begin{cases} \ell(y) = 0 \\ u_\nu(y) = 0 \quad , \nu = \overline{1.m} \end{cases} \qquad \textbf{(III.1.1)}$$

sınır değer probleminin ürettiği diferansiyel operatör L olsun.

Tanım III.1.2.

Eğer $\lambda \in \mathbb{C}$ parametresi için

$$Ly = \lambda y \qquad \textbf{(III.1.2)}$$

denkleminin trivial olmayan ($y \not\equiv 0$) çözümü bulunursa λ-ya **(III.1.1)** sınır değer probleminin **özdeğer'i** denir ve buna uygun çözümlere ise **özfonksiyonlar** denir. Başka bir deyimle; eğer herhangi λ için;

$$\begin{cases} \ell(y) = \lambda y \\ U_\nu(y) = 0 \quad , \nu = \overline{1.m} \end{cases} \qquad \textbf{(III.1.3)}$$

sınır değer probleminin $y \not\equiv 0$ çözümü bulunursa λ-ya **özdeğer** y-ye ise **özfonksiyon** denir.

Aynı bir λ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonların herhangi lineer birleşimleri de bu λ-özdeğerine uygun özfonksiyon olacaktır. Çünkü, eğer;

$$Ly_1 = \lambda y_1 \quad \text{ve} \quad Ly_2 = \lambda y_2$$

ise keyfi c_1 ve c_2 sabitleri için

$$L(c_1 y_1 + c_2 y_2) = \lambda(c_1 y_1 + c_2 y_2)$$

dir. Diğer taraftan

$$\ell(y) = \lambda y$$

homojen lineer diferansiyel denkleminin her bir λ için en fazla n-tane lineer bağımsız çözümü bulunduğu için aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem III.1.1

Aynı bir λ-özdeğerine uygun gelen özfonksiyonlar kümesi boyutu $\leq n$ olan lineer uzay oluşturur.

Bu uzayın boyutu **(III.1.3)** probleminin verilmiş λ-ya karşılık gelen maksimal sayıda lineer bağımsız fonksiyonlarının sayısıdır.

Tanım III.1.2

λ-özdeğerine uygun maksimal sayıda lineer bağımsız özfonksiyonların sayısına λ-nın **özkatı** denir.

Sonuç III.1.2.

Her bir özdeğerin özkatı sonlu olup $\leq n$ dir.

Özdeğerleri belirleyen şartları bulalım:

1) $m < n$ halini ele alalım. $\ell_1(y) = \ell(y) - \lambda y$ kabul edersek **(III.1.3)** sınır değer problemi

$$\begin{cases} \ell_1(y) = 0 \\ u_\nu(y) = 0 \ , \ \nu = \overline{1,m} \end{cases} \qquad \textbf{(III.1.4)}$$

şeklinde yazılabilir. Bu halde **Sonuç I.2.2.** gereğince aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç III.1.3.

$m < n$ olduğunda her $\lambda \in \mathbb{C}$ özdeğerdir.

2) $m \geq n$ olduğu hale bakalım.

$\ell(y) = \lambda\, y$

denkleminin n-tane lineer bağımsız çözümü

$$y_1(x,\lambda),\ y_2(x,\lambda)\ ,\ldots\ldots,\ y_n(x,\lambda)$$

olsun. Diferansiyel denklemler teorisinden biliyoruzki bu çözümler, λ-parametresine göre analitik (tam) fonksiyonlardır. Bu halde genel çözüm;

$$y(x,\lambda) = c_1y_1(x,\lambda) + c_2y_2(x,\lambda)\ +\ldots\ldots+\ c_ny_n(x,\lambda)$$

şeklinde olur. Bu genel çözümü sınır şartlarında yerine yazarsak; c_1 , c_2 , ... , c_n bilinmeyenlerine göre lineer denklem sistemi almış oluruz. Bu sistemin matrisi,

$$U(\lambda) = \begin{bmatrix} U_1(y_1(x,\lambda)) & \ldots & U_1(y_n(x,\lambda)) \\ U_2(y_1(x,\lambda)) & \ldots & U_2(y_n(x,\lambda)) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ U_m(y_1(x,\lambda)) & \ldots & U_m(y_n(x,\lambda)) \end{bmatrix}$$

dır.

Aşağıdaki haller olabilir:

$U(\lambda)$ matrisinin bütün nxn minörlerı λ-nın fonksiyonu gibi sıfıra eşittirler, yani;

$$\text{rank } U(\lambda) \leq n-1$$

dir. Bu halde her bir $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısının özdeğer olacağı açıktır.

En az bir $n \times n$ minörü $\not\equiv 0$ olsun, bu halde $U(\lambda)$-nın bütün $n \times n$ tipinde minörlerini sıfırlayan $\lambda \in \mathbb{C}$ sayıları özdeğerler olur.

Her bir x için $y_1(x,\lambda),\ldots\ldots, \ y_n(x,\lambda)$ fonksiyonları λ-ya göre tam fonksiyonlar oluğundan yukarıda adı geçen her bir minörde tam fonksiyondur. Kompleks analizden biliyoruz ki sıfırdan farklı olan ($\not\equiv 0$) her bir tam fonksiyonun sonlu veya sayılabilir sayıda sıfırı var veya hiç bir sıfırı yoktur ve bu sıfır noktalarının hiç bir sonlu limit noktası olamaz.

(**III.1.2**) sınır değer problemi için aşağıdaki alternatifler elde edilir.

1 . Her bir $\lambda \in \mathbb{C}$ özdeğerdir veya hiçbir özdeğer yoktur.

2 . Sonlu sayıda özdeğer bulunur.

3 . Sayılabilir sayıda (λ_n) özdeğerleri var ve bu halde

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$$

dur.

Bundan sonra sadece $m = n$ halini ele alacağız.

Bu halde,

$$U(\lambda) = \begin{bmatrix} U_1(y_1(x,\lambda)) & \ldots & U_1(y_n(x,\lambda)) \\ U_2(y_1(x,\lambda)) & \ldots & U_2(y_n(x,\lambda)) \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ U_n(y_1(x,\lambda)) & \ldots & U_n(y_n(x,\lambda)) \end{bmatrix}$$

ve

$$\Delta(\lambda) = \det\,(U(\lambda)) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \ldots & U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \ldots & U_2(y_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \ldots & U_n(y_n) \end{vmatrix}$$

olsun. Bu durumda $m \geq n$ halinde aldığımız sonuçlar aşağıdaki şekilde ifade edilir.

Toerem III.1.4

λ-nın özdeğer olması için gerek ve yeter şart $\Delta(\lambda)=0$ olmasıdır. Yani **(III.1.3)** sınır değer probleminin bütün özdeğerleri sadece $\Delta(\lambda)$-nın sıfırlarından ibarettir.

Tanım III.1.3

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \dots & U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \dots & U_2(y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \dots & U_n(y_n) \end{vmatrix}$$

determinantına L operatörünün **karekteristik determinantı** denir.

Tanım III.1.4

Eğer λ_0, $\Delta(\lambda)$-nın p-yinci mentebeden sıfırı ise p-ye λ_0-özdeğerinin **cebirsel katı** denir. Yani, eğer;

$$\Delta(\lambda_0) = \Delta'(\lambda_0) = \dots\dots = \Delta^{(p-1)}(\lambda_0) = 0 \quad , \quad \Delta^{(p)}(\lambda_0) \neq 0$$

ise p-ye λ_0-özdeğerinin **cebirsel katı** denir.

Teorem III.1.5.

λ_0-ın özkatı cebirsel katından büyük değildir.

İspat :

λ_0-ın özkatı q, cebirsel katı p olsun. Bu durumda $q \leq p$ olduğunu gösterelim.

$$\text{rank } U(\lambda) = r$$

olsun. Bu halde

$$q = n - r \qquad \textbf{(III.1.5)}$$

olur.

$\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun türevini

$$\Delta'(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{dU_1(y_1)}{d\lambda} & \cdots & \frac{dU_1(y_n)}{d\lambda} \\ U_2(y_1) & \cdots & U_2(y_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ U_n(y_1) & \cdots & U_n(y_n) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} U_1(y_1) & \cdots & U_1(y_n) \\ \frac{dU_2(y_1)}{d\lambda} & \cdots & \frac{dU_2(y_n)}{d\lambda} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ U_n(y_1) & \cdots & U_n(y_n) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} U_1(y_1) & \cdots & U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & \cdots & U_2(y_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{dU_n(y_1)}{d\lambda} & \cdots & \frac{dU_n(y_n)}{d\lambda} \end{vmatrix}$$

şeklinde yazalım. Sağ taraftaki determinantların herbirinin n–1 sayıda satırı $\Delta(\lambda)$ determinantının satırlarından ibarettir. Aynı şekilde k-yıncı mertebeden türev aldığımız zaman elde edilen determinantların herbirinin n–k sayıda satırı $\Delta(\lambda)$ determinantının satırlarından ibaret olacaktır. O halde $k \leq n-r-1$ olduğunda $\Delta^{(k)}(\lambda)$-nın açılımındaki her bir determinantın

$$n-k \geq n-(n-r-1) = r+1$$

sayıda satırı $\Delta(\lambda)$-nın satırlarından oluşur. Fakat rank $U(\lambda) = r$ olduğundan açılımdaki her bir determinantın $r+1$ sayıda satırı lineer bağımlı olacaktır. Determinantların bilinen özelliklerinden [3]

$$\Delta(\lambda_0) = \Delta'(\lambda_0) = \ldots\ldots = \Delta^{(n-r-1)}(\lambda_0) = 0 \qquad \textbf{(III.1.6)}$$

elde edilecektir.

Diğer taraftan λ_0-ın cebirsel katı p olduğundan

$$\Delta(\lambda_0) = \Delta'(\lambda_0) = \ldots\ldots = \Delta^{(p-1)}(\lambda_0) = 0 \ , \ \Delta^{(p)}(\lambda_0) \neq 0 \qquad \textbf{(III.1.7)}$$

dır. **(III.1.5)**, **(III.1.6)** ve **(III.1.7)** den

$$q \leq p$$

elde edilir.

Teorem III.1.6.

Eğer λ_0-ın cebirsel katı 1'e eşitse özkatıda 1'e eşittir. Yani; $p = 1 \Rightarrow q = p$ dir.

İspat :

Teorem III.1.5. gereğince $q \geq 1$ dir.

Diğer taraftan $\Delta(\lambda_0) = 0$ olduğundan dolayı

$r \leq n - 1$

dir. Buradan $q = n - r \geq 1$ dir.

O halde $q = 1$ elde edilir.

III.2. Sınır Değer Problemi ile Eşlenik Sınır Değer Probleminin Özdeğer ve Özfonksiyonları Arasındaki Bağıntı

$$\ell(y) = \lambda y \qquad\qquad \text{III.2.1.}$$
$$U_v(y) = 0 \quad , \quad v = \overline{1, n}$$

sınır değer problemi verilsin.

Teorem III.2.1.

Eğer λ_0 , **(III.1.3)** sınır değer probleminin özdeğeri ise ve özkatı q-ise $\overline{\lambda}_0$, eşlenik sınır değer probleminin özdeğeridir ve özkatı $q' = q$ dur.

İspat :

λ_0 , **(III.1.3)** sınır değer probleminin özdeğeri olduğunda;

$$\ell(y) - \lambda y = 0$$
$$U_v(y) = 0 \quad , \quad v = \overline{1,n}$$

sınır değer probleminin q-tane lineer bağımsız çözümü bulunur.

$$\ell_1(y) = \ell(y) - \lambda y$$

yazarsak

$$\begin{aligned} &\ell_1(y) = 0 \\ &U_v(y) = 0 \quad , \quad v = \overline{1,n} \end{aligned} \qquad \textbf{(III.2.2)}$$

sınır değer probleminin q-tane lineer bağımsız çözümü bulunur.

$$\ell_1{}^*(y) = (\ell(y) - \lambda y)^* = \ell^*(y) - (\lambda_0 y)^* = \ell^*(y) - \overline{\lambda_0} y$$

olduğundan **(III.1.4)** sınır değer probleminin eşlenik sınır değer problemi

$$\begin{cases} \ell^*(y) = \lambda_0 y \\ V_v(y) = 0 \quad , v = \overline{1, n} \end{cases}$$

şeklinde olur.

Teorem II.4.1. gereğince

$r' = n - m + r = n - n + r = r$

dir.

O halde $\overline{\lambda_0}$ eşlenik sınır değer probleminin özdeğiridir ve onun özkatı

$q' = n - r' = n - r = q$

dur.

$$\int_a^b y(x)\,\overline{z(x)}\,dx$$

integralini <y,z> şeklinde gösterelim. Buna y ve z fonksiyonlarının iç çarpımı denir.

Tanım III.2.1.

Eğer $< y,z > = 0$ olursa y ve z ye **ortogonal fonksiyonlar** denir.

Teorem III.2.2

λ_0 ve μ_0 eşlenik sınır değer problemlerinin özdeğerleri olsunlar. Eğer, $\lambda_0 \neq \overline{\mu_0}$ ise bu özdeğerlere uygun özfonksiyonlar ortogonaldir. Bir başka deyişle;

$$Ly_0 = \lambda_0 y_0, \ L^*z_0 = \mu_0 z_0, \ \lambda_0 \neq \overline{\mu_0} \text{ ise } < y_0 , z_0 > = 0$$

dır.

İspat :

L ve L* eşlenik olduklarından Lagrange formülü gereğince

$$< L y_0 , z_0 > = < y_0 , L^* z_0 >$$

dır. Burada $Ly_0 = \lambda_0 y_0$ ve $L^* z_0 = \mu_0 y_0$ eşitliklerini yerine yazarsak

$$\lambda_0 < y_0 , z_0 > = \mu_0 < y_0 , z_0 >$$

elde ediriz. $\lambda_0 \neq \overline{\mu_0}$ olduğu için sonuncu eşitlikten

$$< y_0 , z_0 > = 0$$

bulunur.

Teorem III.2.3.

Kendine eşlenik lineer diferansiyel operatörün bütün özdeğerleri reeldir.

İspat :

$L = L^*$ ve $Ly_0 = \lambda_0 y_0$, $y_0 \not\equiv 0$ olsun. Lagrange formülü gereğince;

$$< L y_0 , y_0 > = < y_0 , L^* y_0 > = < y_0 , Ly_0 >$$

olur. Buradan

$$< \lambda y_0 , y_0 > = < y_0 , \lambda_0 y_0 >$$

$$(\lambda_0 - \overline{\lambda_0}) < y_0 , y_0 > = 0$$

bulunur. $< y_0 , y_0 > \neq 0$ olduğu için

$$(\lambda_0 - \overline{\lambda_0}) = 0 \text{ yani } \lambda_0 = \overline{\lambda_0}$$

dir. O halde λ_0 reeldir.

Sonuç III.2.4.

Kendine eşlenik diferansiyel operatörün farklı özdeğerlerine uygun özfonksiyonları ortogonaldir.

İspat :

$Ly = \lambda y$, $Lz = \mu z$ ve $\lambda \neq \mu$ olsun.

Teorem III.2.3. gereğince $\mu = \overline{\mu}$ yani $\lambda \neq \mu$ elde edilir. Buradan ise **Teorem III.2.2.** gereğince ve $L = L^*$ olduğu için

$$< y , z > = 0$$

elde edilir.

Örnek III.2.5.

$$-y'' = \lambda y$$

$$y(0) = 0 \ , \ y'(1) = 0$$

sınır değer probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarını bulalım.

Çözüm:

Verilen denklemin genel çözümü,

$$y = c_1 \operatorname{Cos} \sqrt{\lambda}\, x + c_2 \operatorname{Sin} \sqrt{\lambda}\, x$$

dir. Sınır şartlarında yerine yazarsak;

$$y(0) = c_1 = 0$$

$$y'_{(1)} = -c_1 \sqrt{\lambda} \operatorname{Sin}\sqrt{\lambda} + c_2 \sqrt{\lambda} \operatorname{Cos}\sqrt{\lambda} = 0$$

olduğundan özdeğerleri bulmak için

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{\lambda} \operatorname{Sin}\sqrt{\lambda} & \sqrt{\lambda} \operatorname{Cos}\sqrt{\lambda} \end{vmatrix}$$

$$= \sqrt{\lambda} \operatorname{Cos}\sqrt{\lambda} = 0$$

denklemi alınır. Bu denklem çözülerek

$$\lambda_n = \left(-\frac{\pi}{2} + n\pi\right)^2 \quad , \quad n = 1,2,3,...$$

özdeğerleri elde edilir.

λ_n, $n = 0\ ,1,2,...$ özdeğerleri $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun basit sıfırları olduğundan **Teorem III.1.6.** gereğince bu özdeğerlerin herbirinin özkatı 1'e eşittir. Uygun özfonksiyonlar

$$y_0(x) \equiv 1\ ,\ y_n(x) = \mathrm{Sin}\left(-\frac{\pi}{2} + n\pi\right)x \quad , \quad n = 1,2,3,...$$

fonksiyonlarıdır. (Veya bu fonksiyonların, keyfi sıfırdan farklı sabitlerle çarpımlarıdır).

IV. BÖLÜM

LİNEER DİFERANSİYEL OPERATÖRÜN TERSİ

GREEN FONKSİYONU

IV.1. Lineer Diferansiyel Operatörün Tersi

A operatörünün tanım bölgesi D_A, değerler bölgesi ise R_A ile gösterilir.

Tanım IV.1.1.

Eğer B operatörü için $D_B = R_A$ ve

$$B(Ax) = x \quad , \forall\, x \in D_A$$

ise B-ye A-nın tersi denir ve A^{-1} ile gösterilir. Yani $\forall\, x \in D_A$ için

$$A^{-1}(Ax) = x \qquad \textbf{(IV.1.1)}$$

dir.

Önerme IV.1.1.

Eğer A-nın tersi varsa A^{-1}-inde tersi var ve

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

dır.

İspat :

(**IV.1.1**) eşitliği gereğince $R_{A^{-1}} = D_A$ eşitliği sağlanır ve

$$A(A^{-1}Ax)) = Ax$$

elde edilir. $Ax = y$ dersek sonuncu eşitlikten

$$A(A^{-1}y) = y \quad , \forall\, y \in R_A = D_{A^{-1}} \qquad \textbf{(IV.1.2)}$$

bulunur. Yani $A = (A^{-1})^{-1}$ dir.

Önerme IV.1.2.

Eğer A lineer ise A^{-1} de lineerdir.

İspat :

Eğer $y_1, y_2 \in D_{A^{-1}} = R_A$ ise

$$A(\alpha_1 A^{-1}y_1 + \alpha_2 A^{-1}y_2) = \alpha_1 A A^{-1}y_1 + \alpha_2 A A^{-1}y_2 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$$

olur. Buradanda her iki tarafa A^{-1}'i uygularsak

$$\alpha_1 A^{-1}y_1 + \alpha_2 A^{-1}y_2 = A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$$

elde edilir.

Önerme IV.1.3.

Lineer A operatörünün tersi olması için gerek ve yeter şart

$$Ax = 0 \qquad \textbf{(IV.1.3)}$$

denkleminin ancak bir tek $x = 0$ aşikar çözümünün bulunmasıdır.

İspat :

A-nın tersinin olduğunu kabul edelim.

(IV.1.3) eşitliğinin her iki tarafına A^{-1}'i uygularsak, A^{-1} de lineer olduğu için;

$$x = A^{-1}(Ax) = A^{-1}(0) = 0$$

elde ederiz.

$Ax = 0$'ın ancak $x = 0$ çözümünün olduğunu kabul edelim.

Her $y \in R_A$ için,

$$Ax = y \qquad \textbf{(IV.1.4)}$$

denkleminin çözümü olduğu açıktır. Bu çözümün tekliğini gösterelim. x' ve x'' iki çözüm olsun. Yani; $Ax' = Ax'' = y$ olsun. A lineer olduğu için, buradan $A(x'-x'') = 0$ elde ederiz. Bu ise şarta göre $x'-x'' = 0$, yani $x' = x''$ olmasını gerektirir.

Her $y \in R_A$-ya $Ax = y$ denkleminin çözümü olan $x \in D_A$-yı karşı getiren operatöre B dersek, her $x \in D_A$ için;

$$B(Ax) = By = x$$

elde ederiz. Bu ise B-operatörünün A-nın tersi olduğu demektir.

IV.2. Lineer Diferansiyel Operatörün Tersinin Varlığı

$$\ell(y) = p_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + p_n(x)\, y$$

diferansiyel ifadesinin ve

$$U_v(y) = 0 \quad , v = 1,2,\dots,n$$

sınır şartlarının ürettiği lineer diferansiyel operatörü L ile gösterelim. L-nin tersi olması için **Önerme IV.1.3.** gereğince $Ly = 0$ denkleminin bir tek $y = 0$ aşikar çözümünün olması gerek ve yeter şarttır. Yani;

$$p_0(x)\, y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)\, y = 0$$

denkleminin her lineer bağımsız

$$y_1(x) , y_2(x) , \dots ,y_n(x)$$

çözüm sistemi için

$$U = \begin{bmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \dots & U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \dots & U_2(y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \dots & U_n(y_n) \end{bmatrix}$$

matrisinin rankı n olmalıdır (rank = n). Böylece eğer

$$\det U \neq 0 \qquad \textbf{(IV.2.1)}$$

ise L^{-1} vardır. L^{-1}-i bulmak ve özelliklerini incelemek için en etkili yöntemlerden biri Green fonksiyonu denilen fonksiyonu bulmaktır.

IV.3. Green Fonksiyonu

Tanım IV.3.1.

Aşağıdaki şartları sağlayan

$$G(x,\xi) : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{C}$$

fonksiyonuna L operatörünün **Green Fonksiyonu** denir.

1 . $G(x,\xi)$ fonksiyonu süreklidir ve x'e göre (n–2)-inci mertebeye kadar (bu mertebede dahil) bütün sürekli türevleri vardır.

2 . Her $\xi \in (a,b)$ için $[a,\xi)$ ve $(\xi,b]$ aralıklarının her birinde $G(x,\xi)$ fonksiyonunun (n–1)-inci ve n-inci mertebeden türevleri var süreklidirler ve x'e göre (n–1)-inci mertebeden türev fonksiyonu

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} G(\xi+0,\xi) - \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} G(\xi-0,\xi) = \frac{1}{p_0(\xi)}$$

özelliğine sahiptir.

3 . Her bir $[a,\xi)$ ve $(\xi,b]$ aralığında $G(x,\xi)$ fonksiyonu x değişkeninin fonksiyonu gibi

$$\ell(G) = 0$$

$$U_v(G) = 0 \ , \ v = \overline{1,n}$$

sınır değer probleminin çözümüdür.

Teorem IV.3.1.

Eğer L operatörünün tersi varsa bu halde Green fonksiyonuda var ve tektir.

İspat :

$\ell(y) = 0$ denkleminin n-tane lineer bağımsız çözümü $y_1(x)$, $y_2(x)$, ... $y_n(x)$ olsun.

$[a,\xi)$ ve $(\xi,b]$ aralıklarının her birinde $G(x,\xi)$ fonksiyonu $\ell(y) = 0$ denklemini sağladığı için $G(x,\xi)$ fonksiyonu;

$$G(x,\xi) = \begin{cases} a_1(\xi)\, y_1(x) + \dots + a_n(\xi)\, y_n(x) \ , & a \le x < \xi \\ b_1(\xi)\, y_1(x) + \dots + b_n(\xi)\, y_n(x) \ , & \xi < x \le b \end{cases} \qquad \textbf{(IV.3.1)}$$

biçimindedir. Green fonksiyonunun tanımı gereğince,

$$\left.\frac{\partial^k G(x,\xi)}{\partial x^k}\right|_{x=\xi+0} = \left.\frac{\partial^k G(x,\xi)}{\partial x^k}\right|_{x=\xi-0} \ , \quad k = \overline{0, n-2}$$

eşitlikleri sağlanır. Bu eşitliklerden **(IV.3.1)** gereğince

$$[a_1(\xi)\, y_1(\xi) + \dots + a_n(\xi)\, y_n(\xi)] - [b_1(\xi)\, y_1(\xi) + \dots + b_n(\xi)\, y_n(\xi)] = 0$$

$$[a_1(\xi)\, y'_1(\xi) + \dots + a_n(\xi)\, y'_n(\xi)] - [b_1(\xi)\, y'_1(\xi) + \dots + b_n(\xi)\, y'_n(\xi)] = 0$$

....

$$[a_1(\xi)\, y_1^{(n-2)}(\xi) + \dots + a_n(\xi)\, y_n^{(n-2)}(\xi)] - [b_1(\xi)\, y_1^{(n-2)}(\xi) + \dots + b_n(\xi)\, y_n^{(n-2)}(\xi)] = 0$$

eşitliklerini almış oluruz. Bu durumda

$$\left.\frac{\partial^{n-1} G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}\right|_{x=\xi+0} - \left.\frac{\partial^{n-1} G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}\right|_{x=\xi-0} = \frac{1}{p_0(\xi)}$$

şartı,

$$[a_1(\xi)\, y_1^{(n-1)}(\xi) + \dots + a_n(\xi)\, y_n^{(n-1)}(\xi)] - [b_1(\xi)\, y_1^{(n-1)}(\xi) + \dots + b_n(\xi)\, y_n^{(n-1)}(\xi)] = -\frac{1}{p_0(\xi)}$$

eşitliğine dönüşür.

$$c_k(\xi) = b_k(\xi) - a_k(\xi) \ , \ k = \overline{1,n}$$

kabul edersek aldığımız eşitlikleri, c_1 , c_2 , ... , c_n değişkenlerinin aşağıdaki sistemi halinde yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
&c_1\, y_1(\xi) + \ldots + c_n\, y_n(\xi) = 0 \\
&c_1\, y_1'(\xi) + \ldots + c_n\, y_n'(\xi) = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&c_1\, y_1^{(n-2)}(\xi) + \ldots + c_n\, y_n^{(n-2)}(\xi) = 0 \\
&c_1\, y_1^{(n-1)}(\xi) + \ldots + c_n\, y_n^{(n-1)}(\xi) = \frac{1}{p_0(\xi)}
\end{aligned} \qquad \textbf{(IV.3.2)}$$

Burada $c_k = c_k(\xi)$ dir. Bu sisteme c_1 , c_2 , ... , c_n değişkenlerinin sistemi gözüyle bakarsak, bu sistemin determinantı y_1 , y_2 , ... , y_n çözümlerinin

$$W(y_1 , \ldots , y_n) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Wronskian determinantının $x = \xi$ noktasındaki değerine eşittir. Bu çözümler lineer bağımsız olduklarından sononcu determinant her bir noktada sıfırdan farklıdır. Yani **(IV.3.2)** sisteminin tek bir c_1 , c_2 , ... , c_n çözümü bulunur.

a_k ve b_k ($k = \overline{1,n}$)-ları belirlemek için sınır şartlarından yararlanacağız. $U_v(y)$ sınır formunu

$$U_v(y) = U_{va}(y) + U_{vb}(y) \qquad \textbf{(IV.3.3)}$$

biçiminde yazabiliriz. Burada $U_{va}(y)$ ile sadece y_a , y_a' , ... ,$y_a^{(n-1)}$ değişkenlerini, $U_{vb}(y)$ ile ise sadece y_b , y_b' , ... ,$y_b^{(n-1)}$ değişkenlerini içeren sınır formları gösterilmiştir.

$G(x,\xi)$ fonksiyonu her bir $\xi \in [a,b]$ için x değişkeninin fonksiyonu gibi sınır şartlarını sağladığından,

$$
\begin{aligned}
U_v(y) &= U_{va}(y) + U_{vb}(y) \\
&= U_{va}(a_1 y_1 + ... + a_n y_n) + U_{vb}(b_1 y_1 + ... + b_n y_n) \\
&= [a_1 U_{va}(y_1) + ... + a_n U_{va}(y_n)] + [b_1 U_{vb}(y_1) + ... + b_n U_{vb}(y_n)] \\
&= [(b_1-c_1) U_{va}(y_1) + ... + (b_n-c_n) U_{va}(y_n)] + [(b_1 U_{vb}(y_1) + ... + b_n U_{vb}(y_n)] \\
&= [b_1(U_{va}(y_1)+U_{vb}(y_1)) + ... + b_n(U_{va}(y_n)+U_{vb}(y_n))] - [c_1 U_{va}(y_1) + ... + c_n U_{va}(y_n)] \\
&= [b_1 U_v(y_1) + ... + b_n U_v(y_n)] - [c_1 U_{va}(y_1) + ... + c_n U_{va}(y_n)] = 0
\end{aligned}
$$

$$b_1 U_v(y_1) + ... + b_n U_v(y_n) = c_1 U_{va}(y_1) + ... + c_n U_{va}(y_n)$$

yazabiliriz. Sonuncu eşitliği $v = 1, 2, ..., n$ için yazarsak b_1 , b_2 , ... , b_n değişkenlerinin

$$
\begin{cases}
b_1 U_1(y_1) + ... + b_n U_1(y_n) = c_1 U_{1a}(y_1) + ... + c_n U_{1a}(y_n) \\
b_1 U_2(y_1) + ... + b_n U_2(y_n) = c_1 U_{2a}(y_1) + ... + c_n U_{2a}(y_n) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
b_1 U_n(y_1) + ... + b_n U_n(y_n) = c_1 U_{na}(y_1) + ... + c_n U_{na}(y_n)
\end{cases}
\qquad \textbf{(IV.3.4)}
$$

sistemini elde ederiz.

(IV.2.1) şartı gereğince bu sistemin determinantı sıfırdan farklıdır. Bu nedenle **(IV.3.4)** sisteminin çözümü var ve tekdir. O halde buradan b_1 , b_2 , ... , b_n -ler tek olarak bulunabilir.

Daha önce de c_1 , c_2 , ... , c_n -ler tek olarak bulunmuştu.

$a_k = b_k - c_k \quad , k = \overline{1.n}$

olduğundan dolayı bu formülden a_1 , a_2 , ... , a_n -lerde tek olarak bulunur. Böylece Green fonksiyonunun varlığı ve tekliği ispat edilmiş oldu.

IV.4. Green Fonksiyonu Yardımı ile Diferansiyel Operatörün Tersinin Bulunması

$Ly = 0$

denkleminin ancak $y \equiv 0$ çözümünün olduğunu kabul edelim. Bu halde L^{-1} operatörü ve $y = L^{-1}f$ fonksiyonu

$$\ell(y) = f \qquad \textbf{(IV.4.1)}$$

$$U_\nu(y) = 0 \quad , \quad \nu = \overline{1,n} \qquad \textbf{(IV.4.2)}$$

sınır değer probleminin çözümü olur. f verildiğinde bu çözümü bulabilmek için L^{-1} operatörünün genel biçimini bulalım.

Teorem IV.4.1.

Eğer $Ly = 0$ denkleminin ancak $y \equiv 0$ çözümü bulunursa her $f \in C\,[a,b]$ için

$Ly = f$

denkleminin çözümü var ve bu çözüm;

$$y(x) = \int_a^b G(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi \qquad \textbf{(IV.4.3)}$$

formülü ile ifade edilir. Burada $G(x,\xi)$ fonksiyonu L operatörünün Green fonksiyonudur.

İspat :

(IV.4.3) formülü ile verilen

$$y(x) = \int_a^b G(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi$$

fonksiyonunun **(IV.4.1)** , **(IV.4.2)** sınır değer probleminin çözümü olduğunu gösterelim.

Her $\xi \in [a,b]$ için $G(x,\xi)$ fonksiyonunun x değişkenine göre (n–2)-inci mertebeye kadar ((n–2]-inci mertebe dahil) sürekli türevleri olduğundan **(IV.4.3)** formülü ile tanımlanmış y(x) fonksiyonunun [a,b] aralığında sürekli $y', y'', \ldots, y^{(n-2)}$ türevleri var ve

$$y_{(x)}^{(v)} = \int_a^b \frac{\partial^v G(x,\xi)}{\partial x^v} f(\xi)\, d\xi \quad , \; v = 1,2, \ldots, n-2 \qquad \textbf{(IV.4.4)}$$

formülü geçerlidir.

$\dfrac{\partial^{n-1} G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}$ fonksiyonu $x = \xi$ noktalarında süreksiz olduğundan $y_{(x)}^{(n-1)}$ -i bulmak için **(IV.4.4)** formülünü $v = n-2$ için aşağıdaki şekilde yazalım.

$$y_{(x)}^{(n-2)} = \int_a^x \frac{\partial^{n-2} G(x,\xi)}{\partial x^{n-2}} f(\xi)\, d\xi + \int_x^b \frac{\partial^{n-2} G(x,\xi)}{\partial x^{n-2}} f(\xi)\, d\xi$$

Sağ taraftaki integrallerde, integral fonksiyonları sırası ile (a,x) ve (x,b) integralleme aralıklarında kendileri ve x'e göre türevleri sürekli olduğundan matematiksel analizden Leibnitz kuralı gereğince $y_{(x)}^{(n-1)}$ var ve aşağıdaki formülle ifade edilir.

$$y_{(x)}^{(n-1)} = \int_a^x \frac{\partial^{n-1} G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}} f(\xi)\, d\xi + \left. \frac{\partial^{n-2} G(x,\xi)}{\partial x^{n-2}} f(x) \right|_{\xi=x-0} +$$

$$+ \int_x^b \frac{\partial^{n-1} G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}} f(\xi)\, d\xi - \left. \frac{\partial^{n-2} G(x,\xi)}{\partial x^{n-2}} f(x) \right|_{\xi=x+0} \qquad \textbf{(IV.4.5)}$$

$\dfrac{\partial^{n-2} G(x,\xi)}{\partial x^{n-2}}$ fonksiyonu $\xi = x$ noktalarında sürekli olduğundan sonuncu formülü

$$y^{(n-1)}_{(x)} = \int_a^x \frac{\partial^{n-1} G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}} f(\xi)\, d\xi + \int_x^b \frac{\partial^{n-1} G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}} f(\xi)\, d\xi \qquad \textbf{(IV.4.6)}$$

biçiminde yazabiliriz. Yani;

$$y^{(n-1)}_{(x)} = \int_a^b \frac{\partial^{n-1} G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}} f(\xi)\, d\xi \qquad \textbf{(IV.4.7)}$$

dir. **(IV.4.6)** formülünün sağ tarafından benzer şekilde türev alırsak

$$y^{(n)}_{(x)} = \int_a^x \frac{\partial^{n} G(x,\xi)}{\partial x^{n}} f(\xi)\, d\xi + \frac{\partial^{n-1} G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}} f(x) \Bigg|_{\xi=x-0} +$$

$$+ \int_x^b \frac{\partial^{n} G(x,\xi)}{\partial x^{n}} f(\xi)\, d\xi - \frac{\partial^{n-1} G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}} f(x) \Bigg|_{\xi=x+0} \qquad \textbf{(IV.4.8)}$$

formülünü elde etmiş oluruz. Green fonksiyonunun tanımı gereğince

$$\frac{\partial^{n-1} G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}} f(x) \Bigg|_{x=\xi+0} - \frac{\partial^{n-1} G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}} f(x) \Bigg|_{x=\xi-0} = \frac{1}{p_0(\xi)}$$

olduğundan **(IV.4.8)** den

$$y_{(x)}^{(n)} = \int_a^b \frac{\partial^n G(x,\xi)}{\partial x^n} f(\xi)\, d\xi + \frac{1}{p_0(\xi)} f(x) \qquad \textbf{(IV.4.9)}$$

formülü ortaya çıkar. y(x) fonksiyonu ve türevleri için aldığımız formülleri $\ell(y)$ diferansiyel ifadesinde yerine yazarsak

$$\ell(y) = p_0(x)\, y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)\, y$$

$$= p_0(x)\left[\int_a^b \frac{\partial^n G(x,\xi)}{\partial x^n} f(\xi)\, d\xi + \frac{f(x)}{p_0(x)}\right] +$$

$$+ p_1(x)\int_a^b \frac{\partial^{n-1} G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}} f(\xi)\, d\xi + \dots + p_n(x)\int_a^b G(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi$$

$$= f(x) + \int_a^b \left[p_0(x)\frac{\partial^n G(x,\xi)}{\partial x^n} + p_1(x)\frac{\partial^{n-1} G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}} + \dots + p_n(x)\, G(x,\xi)\right] f(\xi)\, d\xi$$

$$= f(x) + \int_a^b \ell(G)\, f(\xi)\, d\xi \ ,$$

yani;

$$\ell(y) = f(x) + \int_a^b \ell(G)\, f(\xi)\, d\xi$$

formülü elde edilir. Fakat Green fonksiyonunun tanımı gereğince $G(x,\xi)$ fonksiyonu her $\xi \in (a,b)$ için $[a,\xi)$ ve $(\xi,b]$ aralıklarının her birinde homojen

$$\ell(y) = 0$$

denklemini sağladığından sonuncu formüldeki integral ifadesi sıfıra eşittir. Yani;

$$\ell(y) = f(x)$$

elde edilir. Böylece **(IV.4.3)** formülü ile tanımladığımız $y(x)$ fonksiyonunun **(IV.4.1)** denklemini sağladığını ispat ettik. Şimdi bu fonksiyonun **(IV.4.2)** sınır şartlarını sağladığını gösterelim.

$$U_v(y) = \alpha_{v0} y_a + \alpha_{v1} y'_a + \dots + \alpha_{vn-1} y_a^{(n-1)} + \beta_{v0} y_b + \beta_{v1} y'_b + \dots + \beta_{vn-1} y_b^{(n-1)}$$

$$= \alpha_{v0} \int_a^b G(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi \Big|_{x=a} + \dots + \alpha_{vn-1} \int_a^b \frac{\partial^{n-1} G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}} f(\xi)\, d\xi \Big|_{x=a} +$$

$$+ \beta_{v0} \int_a^b G(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi \Big|_{x=b} + \dots + \beta_{vn-1} \int_a^b \frac{\partial^{n-1} G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}} f(\xi)\, d\xi \Big|_{x=b}$$

$$= \int_a^b \left[\alpha_{v0}\, G(x,\xi) + \dots + \alpha_{vn-1} \frac{\partial^{n-1} G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}} \right]_{x=a} f(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \int_a^b \left[\beta_{v0}\, G(x,\xi) + \dots + \beta_{vn-1} \frac{\partial^{n-1} G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}} \right]_{x=b} f(\xi)\, d\xi =$$

$$= \int_a^b U_v(G)\, f(\xi)\, d\xi$$

bulunur. Yani;

$$U_v(y) = \int_a^b U_v(G)\, f(\xi)\, d\xi$$

olduğundan ve $G(x,\xi)$ fonksiyonu sınır şartlarını sağladığından **(IV.4.3)** formülü ile y fonksiyonu için

$$U_v(y) = \int_a^b U_v(G)\, f(\xi)\, d\xi = 0$$

elde edilir. O halde **(IV.4.3)** formülü ile verilen y fonksiyonu **(IV.4.1)** , **(IV.4.2)** sınır değer probleminin çözümüdür.

Böylece ispat etmiş olduk ki

$$L^{-1}f = \int_a^b G(x,\xi)\ f(\xi)\, d\xi$$

dir. Yani; L diferansiyel operatörünün tersi, çekirdeği $G(x,\xi)$ Green fonksiyonu olan integral operatörüdür.

IV.5. Eşlenik Operatörün Green Fonksiyonu

$Ly = 0$ denkleminin tek bir $y \equiv 0$ aşikar çözümünün olduğunu kabul edelim. Bu halde $r = n$ dir. $m = n$ olduğundan, yani lineer bağımsız sınır şartlarının sayısı denklemin mertebesine eşit olduğundan eşlenik sınır değer probleminin rankı $r' = n - m + r = r = n$ olur. Yani; $L^*y = 0$ denklemininde bir tek $y \equiv 0$ aşikar çözümü bulunur. Bu nedenle L^* diferansiyel operatörününde tersi vardır.En son ispat ettiğimiz **Teorem IV.4.1.** gereğince $(L^*)^{-1}$ operatörü,

$$(L^*)^{-1}g = \int_a^b H(x,\xi)\ g(\xi)\, d\xi$$

integral operatörü biçiminde yazılabilir. Burada $H(x,\xi)$,L^* operatörünün Green fonksiyonudur.

L ve L^* operatörlerinin Green fonksiyonları arasındaki bağıntıyı bulalım:

$L^{-1}f = \varphi$ ve $(L^*)^{-1}g = \psi$ olsun. Buradan $f = L\varphi$ ve $g = L^*\psi$ dir. L ve L^* operatörleri eşlenik operatörler olduğundan,

$$< L\varphi\, ,\psi > = < \varphi\, , L^*\psi >$$

bağıntısını yazabiliriz. Yukarıda yazdıklarımızı kullanarak son yazdığımız ifade;

$$< f\, , (L^*)^{-1}g > = < L^{-1}f\, , g >$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadede;

$$(L^{-1}f)(x) = \int_a^b G(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi \quad \text{ve} \quad ((L^*)^{-1}g)(\xi) = \int_a^b H(\xi,x)\, g(x)\, dx$$

olduğunu gözönüne alırsak,

$$\int_a^b \left(\int_a^b G(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi \right) \overline{g(x)}\, dx = \int_a^b f(\xi) \overline{\left(\int_a^b H(\xi,x)\, g(x)\, dx \right)}\, d\xi$$

formülünü elde etmiş oluruz. Bu formülü

$$\int_a^b \int_a^b G(x,\xi)\, f(\xi)\, \overline{g(x)}\, dx\, d\xi = \int_a^b \int_a^b \overline{H(\xi,x)}\, f(\xi)\, \overline{g(x)}\, dx\, d\xi$$

şeklinde yazarsak

$$G(x,\xi) = \overline{H(\xi,x)} \qquad \textbf{(IV.5.1)}$$

eşitliğini buluruz.

(IV.5.1) bağıntısını sağlayan G ve H çekirdeklerine **eşlenik çekirdekler** denir veya $H(x,\xi)$ fonksiyonuna $G(x,\xi)$ fonksiyonunun **Eşlenik Green fonksiyonu** denir ve $G^*(x,\xi)$ ile gösterilir.

(IV.5.1) formülünden

$$G^{**}(x,\xi) = (G^*(x,\xi))^* = (\overline{G(\xi,x)})^* = G(x,\xi)$$

elde edilir. Yani; $G(x,\xi)$ ve $G^*(x,\xi)$ birbiri ile karşılıklı olarak eşlenik fonksiyonlardır. Başka bir deyişle şu önermeyi ispat etmiş olduk.

Önerme IV.5.1.

Eşlenik diferansiyel operatörlerin Green fonksiyonları eşleniktir.

IV.6. Kendine Eşlenik Diferansiyel Operatörün Green Fonksiyonu

Özel olarak L diferansiyel operatörü kendine eşlenik diferansiyel operatör olduğunda, yani; $L^* = L$ olduğunda

$$H(x,\xi) = G(x,\xi)$$

dir. Burada $H(x,\xi)$ L^*-ın, $G(x,\xi)$-de L-nin Green fonksiyonlarıdır. Diğer taraftan

$H(x,\xi) = \overline{G(\xi,x)}$ olduğundan

$$G(x,\xi) = \overline{G(\xi,x)} \qquad \textbf{(IV.6.1)}$$

elde edilir.

(IV.6.1) eşitliğini doğrulayan çekirdeğe **Hermit çekirdeği** denir. Böylece aşağıdaki önermeyi ispat etmiş olduk.

Önerme IV.6.1.

Kendine eşlenik diferansiyel operatörün Green fonksiyonu Hermit çekirdeğidir.

Örnek IV.6.2.

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0 \quad , \; y(1) = 0 \end{cases}$$

sınır değer probleminin Green fonksiyonunu bulalım.

Çözüm :

Verilmiş denklemin iki tane lineer bağımsız $y_1 = \text{Sinx}$, $y_2 = \text{Cosx}$ çözümü olduğundan Green fonksiyonu;

$$G(x,\zeta) = \begin{cases} a_1(\xi)\,\text{Sinx} + a_2(\xi)\,\text{Cosx} \;, & x \in [0,\xi) \\ b_1(\xi)\,\text{Sinx} + b_2(\xi)\,\text{Cosx} \;, & x \in (\xi,1] \end{cases}$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadeden ve

$$\begin{cases} \left. \dfrac{\partial^{v} G(x,\xi)}{\partial x^{v}} \right|_{x=\xi-0} = \left. \dfrac{\partial^{v} G(x,\xi)}{\partial x^{v}} \right|_{x=\xi+0} \\ \left. \dfrac{\partial^{n-1} G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}} \right|_{x=\xi+0} - \left. \dfrac{\partial^{n-1} G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}} \right|_{x=\xi-0} = 1 \end{cases}$$

Green fonksiyonunun tanımından

$$= \begin{cases} c_1 \operatorname{Sin} \xi + c_2 \operatorname{Cos} \xi = 0 \\ c_1 \operatorname{Cos} \xi + c_2 \operatorname{Sin} \xi = 1 \end{cases}$$

sistemi elde edilir. Burada $c_1 = b_1 - a_1$, $c_2 = b_2 - a_2$ dir. Sonuncu sistemden

$$c_1 = \operatorname{Cos} \xi \ , \ c_2 = -\operatorname{Sin} \xi$$

bulunur. Bunları sınır şartlarında yerine yazarsak,

$$b_1(\xi) = \operatorname{Cos} \xi \ , \ b_2(\xi) = -\operatorname{Sin} \xi \ , \ a_1(\xi) = a_2(\xi) = 0$$

elde edilir.

Böylece Green fonksiyonu için

$$G(x,\xi) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \le x < \xi \\ \operatorname{Sin}(x-\xi) & \quad \xi < x \le 1 \end{cases}$$

formülü elde edilmiş olur.

IV.7. Spektral Parametreli Homojen Olmayan Sınır Değer Probleminin İntegral Denklem Haline Getirilmesi

$$\begin{aligned} &\ell(y) - \lambda y = f \\ &U_v(y) = 0 \ , \ v = \overline{1,n} \end{aligned} \qquad \textbf{(IV.7.1)}$$

homojen olmayan sınır değer problemini gözönüne alalım. Bu sınır değer problemini

$$Ly = \lambda y + f \tag{IV.7.2}$$

şeklinde yazabiliriz. $Ly = 0$ denkleminin sadece sıfır çözümü olduğunu kabul edelim. L operatörünün Green fonksiyonu $G(x,\xi)$ olsun. Bu halde **(IV.7.2)** den,

$$y = L^{-1}(\lambda y + f) = \lambda \int_a^b G(x,\xi)\, y(\xi)\, d\xi + \int_a^b G(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi \tag{IV.7.3}$$

elde ederiz.

$$g(x) = \int_a^b G(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi$$

ile gösterirsek **(IV.7.3)** denklemini

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x,\xi)\, y(\xi)\, d\xi + g(x) \tag{IV.7.4}$$

şeklinde yazabiliriz.

Önerme IV.7.1.

(IV.7.1) sınır değer problemi **(IV.7.4)** integral denklemine eşdeğerdir.

Sonuç IV.7.2.

$$\ell(y) - \lambda y = 0$$

$$U_v(y) = 0 \quad , \quad v = \overline{1,n}$$

homojen sınır değer problemi

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x,\xi)\, y(\xi)\, d\xi \tag{IV.7.5}$$

integral denklemine eşdeğerdir.

IV.8. L–λI Operatörünün Green Fonksiyonu

$$(L-\lambda I)y = f \tag{IV.8.1}$$

denklemini gözönüne alalım. Uygun homojen denklemin sadece aşikar $y \equiv 0$ çözümünün olduğunu kabul edelim. Başka bir deyişle λ özdeğer olmasın. (**IV.8.1**) denklemini

$$\ell(y) - \lambda y = f$$
$$U_v(y) = 0 \quad , \quad v = \overline{1,n} \tag{IV.8.2}$$

sınır değer problemi şeklinde yazalım. Verilmiş denklemi sabitin değişimi yöntemi [5] ile çözelim

$$\ell(y) - \lambda y = 0 \tag{IV.8.3}$$

denkleminin n-tane lineer bağımsız çözümü $y_1(x,\lambda)$, ... , $y_n(x,\lambda)$ olsun. Bu halde (**IV.8.3**) denkleminin genel çözümü,

$$y(x,\lambda) = c_1\, y_1(x,\lambda) + c_2\, y_2(x,\lambda) + \dots + c_n\, y_n(x,\lambda)$$

şeklindedir. Homojen olmayan (**IV.8.2**) denkleminin özel çözümünü

$$y(x,\lambda) = c_1(x)\, y_1(x,\lambda) + \dots + c_n(x)\, y_n(x,\lambda)$$

şeklinde arayalım. Her iki tarafın türevini alalım

$$y'(x,\lambda) = (c'_1\, y_1 + \dots + c'_n y_n) + (c_1\, y'_1 + \dots + c_n y'_n)$$

ve

$$c'_1\, y_1 + c'_2\, y_2 + \dots + c'_n y_n = 0$$

kabul edelim. Buradan

$$y' = c_1\, y'_1 + c_2\, y'_2 + \dots + c_n y'_n$$

elde edilir. Tekrar türev alalım

$$y''(x,\lambda) = (c'_1\, y'_1 + \ldots + c'_n y'_n) + (c_1\, y''_1 + \ldots + c_n y''_n)$$

ve

$$c'_1\, y'_1 + c'_2\, y'_2 + \ldots + c'_n y'_n = 0$$

kabul edelim. Bu durumda,

$$y'' = c_1\, y''_1 + c_2\, y''_2 + \ldots + c_n y''_n$$

olur. Böyle devam edersek;

$$y^{(n-1)} = (c'_1\, y_1^{(n-2)} + \ldots + c'_n\, y_n^{(n-2)}) + (c_1\, y_1^{(n-1)} + \ldots + c_n\, y_n^{(n-1)})$$

ve

$$c'_1\, y_1^{(n-2)} + c'_2\, y_2^{(n-2)} + \ldots + c'_n\, y_n^{(n-2)} = 0$$

kabul edersek

$$y^{(n-1)} = c_1\, y_1^{(n-1)} + c_2\, y_2^{(n-1)} + \ldots + c_n\, y_n^{(n-1)}$$

bulunur. Buradan da,

$$y^{(n)} = (c'_1\, y_1^{(n-1)} + \ldots + c'_n\, y_n^{(n-1)}) + (c_1\, y_1^{(n)} + \ldots + c_n\, y_n^{(n)})$$

elde edilir. Bulduğumuz ifadeleri **(IV.8.2)** denkleminde yerine yazarsak,

$$P_0\big[(c'_1\, y_1^{(n-1)} + \ldots + c'_n\, y_n^{(n-1)}) + (c_1\, y_1^{(n)} + \ldots + c_n\, y_n^{(n)})\big] +$$

$$P_1(c_1\, y_1^{(n-1)} + \ldots + c_n\, y_n^{(n-1)}) + \ldots + P_n(c_1\, y_1 + \ldots + c_n\, y_n) +$$

$$+ [-\lambda\ (c_1\, y_1 + \ldots + c_n\, y_n)] = f(x)$$

$$c_1' y_1^{(n-1)} + c_2' y_2^{(n-1)} + \dots + c_n' y_n^{(n-1)} = \frac{f(x)}{p_0(x)}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} &c_1' y_1^{(n-1)} + c_2' y_2^{(n-1)} + \dots + c_n' y_n^{(n-1)} = \frac{f(x)}{p_0(x)} \\ &c_1' y_1^{(n-2)} + c_2' y_2^{(n-2)} + \dots + c_n' y_n^{(n-2)} = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &c_1' y_1 + c_2' y_2 + \dots + c_n' y_n = 0 \end{aligned} \tag{IV.8.4}$$

denklemler sistemini ele alalım. (**IV.8.4**) sistemine $c'_1, c'_2, \dots, c'_n$ değişkenlerine göre lineer denklem sistemi gözüyle bakarsak, bu sistemin determinantı;

$$W(\xi) \equiv W(\xi,\lambda) = \begin{vmatrix} y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{vmatrix} \equiv W(y_1, y_2, \dots, y_n) \tag{IV.8.5}$$

olur. $y_1, y_2, \dots, y_n$ lineer bağımsız olduğundan dolayı $\forall\ \xi \in [a,b]$ için $W(\xi) \neq 0$ olacaktır [5]. (**IV.8.5**) determinantının 1.satır elemanlarının cebirsel tamamlayıcılarını (kofaktör) $W_v(\xi)$ ile gösterelim. (**IV.8.4**) sisteminin çözümü

$$C_v' = \frac{W_v(\xi)}{W(\xi)} \frac{f(\xi)}{p_0(\xi)} \tag{IV.8.6}$$

şeklinde olacaktır. Buradan;

$$C_v = \int_a^x \frac{W_v(\xi)}{W(\xi)} \frac{f(\xi)}{p_0(\xi)} d\xi \quad , \quad x \in [a,b] \tag{IV.8.7}$$

veya

$$C_\nu = -\int_x^b \frac{W_\nu(\xi)}{W(\xi)} \frac{f(\xi)}{p_0(\xi)} d\xi \quad , \quad x \in [a,b] \tag{IV.8.8}$$

bulunur. Bu formüllerden yararlanarak

$$\ell(y) - \lambda y = f$$

denkleminin genel çözümü

$$y = c_1^{[1]} y_1(x) + ... + c_n^{[1]} y_n(x) + \sum_{\nu=1}^{n} \int_a^x y_\nu(x) \frac{W_\nu(\xi)}{W(\xi)} \frac{f(\xi)}{p_0(\xi)} d\xi$$

veya

$$y = c_1^{[2]} y_1(x) + ... + c_n^{[2]} y_n(x) - \sum_{\nu=1}^{n} \int_x^b y_\nu(x) \frac{W_\nu(\xi)}{W(\xi)} \frac{f(\xi)}{p_0(\xi)} d\xi$$

olur.

$$g(x,\xi) = \frac{1}{2} \mathrm{Sgn}(x-\xi) \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu \frac{W_\nu(\xi)}{W(\xi)} \quad , \quad \mathrm{Sgn}(x-\xi) = \begin{cases} +1 \ , & x > \xi \\ -1 \ , & x < \xi \end{cases}$$

göstererek son iki eşitliği taraf tarafa toplarsak verilmiş denklemin genel çözümünü,

$$y(x) = c_1 y_1(x) + ... + c_n y_n(x) + \int_a^b g(x,\xi) \frac{f(\xi)}{p_0(\xi)} d\xi \tag{IV.8.9}$$

biçiminde yazabiliriz.

Verilmiş sınır değer probleminin çözümünü bulmak için (**IV.8.9**)'u sınır şartlarında yerine yazarsak

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} C_j\, U_v(y_j) = -\int_a^b U_v(g)\, \dfrac{f(\xi)}{p_0(\xi)}\, d\xi \\ v = \overline{1,\, n} \end{cases} \qquad \textbf{(IV.8.10)}$$

sistemini elde ederiz. Bu sistemden c_1 , c_2 , ... , c_n bilinmeyenlerini bulalım. Sınır formları lineer bağımsız olduğundan **(IV.8.10)** sisteminin determinantı

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1\,(y_1) & U_1\,(y_2) & \dots & U_1\,(y_n) \\ U_2\,(y_1) & U_2\,(y_2) & \dots & U_2\,(y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_n\,(y_1) & U_n\,(y_2) & \dots & U_n\,(y_n) \end{vmatrix} \neq 0$$

dır. **(IV.8.10)** sistemini Gramer yöntemiyle çözersek

$$C_v = -\frac{1}{\Delta(\lambda)} \begin{vmatrix} U_1\,(y_1) \;\dots\; U_1\,(y_{v-1}) & \displaystyle\int_a^b U_1(g)\, \frac{f(\xi)}{p_0(\xi)}\, d\xi & U_1\,(y_{v+1}) & \dots & U_1\,(y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_n\,(y_1) \;\dots\; U_n\,(y_{v-1}) & \displaystyle\int_a^b U_n(g)\, \frac{f(\xi)}{p_0(\xi)}\, d\zeta & U_n\,(y_{v+1}) & \dots & U_n\,(y_n) \end{vmatrix}$$

ve $\Delta_{kv}(\lambda)$ ile $\Delta(\lambda)$ determinantından k-yıncı satır ve v-yüncü kolonu atmakla elde edilen determinantı göstererek sonuncu determinantı v-yinci kolona göre açarsak,

$$C_v = -\frac{1}{\Delta(\lambda)} \int_a^b \begin{vmatrix} U_1\,(y_1) \;\dots\; U_1\,(y_{v-1}) & U_1(g) & U_1\,(y_{v+1}) & \dots & U_1\,(y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_n\,(y_1) \;\dots\; U_n\,(y_{v-1}) & U_n(g) & U_n\,(y_{v+1}) & \dots & U_n\,(y_n) \end{vmatrix} \frac{f(\xi)}{p_0(\xi)}\, d\xi$$

$$= -\frac{1}{\Delta(\lambda)} \int_a^b \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+v}\, U_k(g)\ \Delta_{kv}(\lambda)\, \frac{f(\xi)}{p_0(\xi)}\, d\xi$$

elde edilir. Bulduğumuz C_v ifadesini **(IV.8.9)** da yerine yazarsak

$$y(x) = \int_a^b \sum_{v=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} -\frac{1}{\Delta(\lambda)} (-1)^{k+v}\, y_v(x) U_k(g)\, \Delta_{kv}(\lambda)\, \frac{f(\xi)}{p_0(\xi)}\, d\xi\right) + \int_a^b g(x,\xi)\, \frac{f(\xi)}{p_0(\xi)}\, d\xi$$

$$= \int_a^b \left\{\sum_{v=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{\Delta(\lambda)} (-1)^{k+v}\, y_v(x)\, U_k(g)\, \Delta_{kv}(\lambda)\right) + g(x,\xi)\right\} \frac{f(\xi)}{p_0(\xi)}\, d\xi$$

$$\equiv \int_a^b G(x,\xi,\lambda)\, f(\xi)\, d\xi$$

bulunur. $g(x,\xi)$ fonksiyonunu

$$g(x,\xi) = \mathrm{Sgn}(x-\xi)\, \frac{1}{2W(\xi)} \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1^{(n-2)}(\xi) & y_2^{(n-2)}(\xi) & \cdots & y_n^{(n-2)}(\xi) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1(\xi) & y_2(\xi) & \cdots & y_n(\xi) \end{vmatrix} \qquad \textbf{(IV.8.11)}$$

determinantı şeklinde ve $H(x,\xi,\lambda)$ fonksiyonunu

$$H(x,\xi,\lambda) = \frac{1}{p_0(\xi)} \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) & g(x,\xi) \\ U_1(y_1) & \dots & U_1(y_n) & U_1(g(x,\xi)) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_n(y_1) & \dots & U_n(y_n) & U_n(g(x,\xi)) \end{vmatrix} \qquad \textbf{(IV.8.12)}$$

determinantı şeklinde gösterirsek $G(x,\xi,\lambda)$ Green fonksiyonunu

$$G(x,\xi,\lambda) = \frac{(-1)^n}{\Delta(\lambda)} H(x,\xi,\lambda) \qquad \textbf{(IV.8.13)}$$

şeklinde yazabiliriz.

Örnek IV.8.1.

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = f \Rightarrow y'' - (-\lambda y) = f \\ y(0) = 0 \quad , \quad y(1) = 0 \end{cases}$$

sınır değer probleminin Green fonksiyonunu bulalım.

(IV.8.11) , **(IV.8.12)** ve **(IV.8.13)** formüllerinden yararlanarak kolayca

$$g(x,\xi,\lambda) = -\frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \operatorname{Sgn}(x-\xi) \operatorname{Sin}\sqrt{\lambda}\,(x-\xi)$$

$$G(x,\xi,\lambda) = -\frac{1}{4\lambda} \operatorname{Sin}\sqrt{\lambda}\,(x-\xi) + \frac{1}{2\lambda} \operatorname{Sin}\sqrt{\lambda}\, x \operatorname{Sin}\sqrt{\lambda}\,\xi \tan\sqrt{\lambda} + g(x,\xi,\lambda)$$

elde edilir.

IV.9. L−λI Operatörünün Green Fonksiyonunun Spektral Açılımı

Önceki kısımlarda L−λI operatörünün Green fonksiyonunun

$$G(x,\xi,\lambda) = (-1)^n \frac{H(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)} \quad , \quad H(x,\xi,\lambda) = \frac{1}{p_0(\xi)} \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) & g(x,\xi) \\ U_1(y_1) & \dots & U_1(y_n) & U_1(g) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_n(y_1) & \dots & U_n(y_n) & U_n(g) \end{vmatrix}$$

olduğunu göstermiştik.

Burada $H(x,\xi,\lambda)$ ve $\Delta(\lambda)$ tam analitik fonksiyonlardır. Bu nedenle $G(x,\xi,\lambda)$ Green Fonksiyonu meromorf fonksiyondur. Bu fonksiyonun ayrık noktaları $\Delta(\lambda)$-nın sıfırları olur. Daha önceden $\Delta(\lambda)$-nın her bir sıfırının sonlu mertebeden olduğunu göstermiştik. Bu nedenle $G(x,\xi,\lambda)$-nın ayrık noktaları sadece kutup noktalarından oluşuyor (Esas singüler noktası yoktur). $G(x,\xi,\lambda)$ Green Fonksiyonunun kutup noktaları da olmayabilir. Bu halde $G(x,\xi,\lambda)$- tam analitik fonksiyon olacaktır.

$\lambda = \lambda_0$ noktasının $\Delta(\lambda)$-nın basit sıfır yeri olduğu hali inceleyelim:

Yani;

$$\Delta(\lambda_0) = 0 \quad , \quad \Delta'(\lambda_0) \neq 0$$

dır. Bu durumda $\lambda = \lambda_0$ noktası $G(x,\xi,\lambda)$ fonksiyonunun ya basit kutup noktasıdır veya düzgün noktasıdır. Kompleks analizden biliyoruz ki bu halde Green fonksiyonu

$$G(x,\xi,\lambda) = \frac{R(x,\xi)}{\lambda-\lambda_0} + G_1(x,\xi,\lambda) \tag{IV.9.1}$$

şeklindedir. Rezidü teorisine göre

$$R(x,\xi) = \operatorname*{Rez}_{\lambda=\lambda_0} G(x,\xi,\lambda)$$

$$= (-1)^n \frac{H(x,\xi,\lambda)}{\Delta'(\lambda_0)}$$

dir. $H(x,\xi,\lambda)$-nın determinantını birinci satır elemanlarına göre açarsak

$$R(x,\xi) = \frac{1}{p_0(\xi)} \left(\frac{(-1)^n}{\Delta'(\lambda_0)} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} H_{1i}(x,\xi,\lambda)\, y_i(x) + (-1)^{1+n} g(x,\xi)\, \Delta(\lambda_0) \right)$$

$$= \frac{1}{p_0(\xi)} \frac{(-1)^n}{\Delta'(\lambda_0)} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} H_{1i}(x,\xi,\lambda_0)\, y_i(x)$$

elde ederiz. Burada $H_{1i}(x,\xi,\lambda)$ determinantları $H(x,\xi,\lambda)$ determinantının minörleridir. En son elde ettiğimiz formülden görülüyor ki her ξ noktası için $R(x,\xi)$ fonksiyonu $y_1(x)$, $y_2(x)$, ... $y_n(x)$ fonksiyonlarının lineer birleşimidir. Bu nedenle R fonksiyonu

$$\ell(R) - \lambda R = 0 \qquad \textbf{(IV.9.2)}$$

denklemini sağlar.

Diğer taraftan

$$U_v(R) = U_v\left(\frac{(-1)^n}{\Delta'(\lambda_0)} H(\bullet,\xi,\lambda) \right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{\Delta'(\lambda_0)} U_v\, (\, H(\bullet,\xi,\lambda))$$

$$= \frac{1}{p_0(\xi)} \frac{(-1)^n}{\Delta'(\lambda_0)} \begin{vmatrix} U_v(y_1) & U_v(y_2) & \dots & U_v(y_n) & U_v(g(x,\xi)) \\ U_1(y_1) & U_1(y_2) & \dots & U_1(y_n) & U_1(g(x,\xi)) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \dots & U_n(y_n) & U_n(g(x,\xi)) \end{vmatrix} = 0$$

dır. Çünkü sonuncu determinantın iki satırı aynıdır. O halde R fonksiyonu ξ-parametre olmak üzere x-değişkenine göre

$$\begin{aligned} &\ell(y) - \lambda_0 y = 0 \\ &U_v(y) = 0 \;,\; v = \overline{1,n} \end{aligned} \qquad \textbf{(IV.9.3)}$$

sınır değer probleminin çözümüdür. Yani; R fonksiyonu λ_0 özdeğerine uygun gelen özfonksiyondur. O halde,

$$L(R) = \lambda_0 R$$

dir. Fakat λ_0 , $\Delta(\lambda)$-nın basit sıfır yeri olduğundan **Teorem III.2.1.** gereğince λ_0-ın cebirsel katı p = 1 dir. Bu nedenle λ_0'a uygun gelen lineer bağımsız özfonksiyonların maksimal sayısı 1 dir. Bu nedenle $y_0(x)$, λ_0'a uygun olan herhangi özfonksiyon olduğunda

$$R(x,\xi) = a(\xi)\, y_0(x) \qquad \textbf{(IV.9.4)}$$

olur. Diğer taraftan biliyoruz ki;

$$G^*(x,\xi,\lambda) = \overline{G(\xi,x,\lambda)}$$

fonksiyonu

$$(L-\lambda I)^* = L^* - \bar{\lambda} I$$

operatörünün Green fonksiyonudur.

$$G^*(x,\xi,\lambda) = \overline{G(\xi,x,\lambda)} = \frac{\overline{R(\xi,x)}}{\bar{\lambda}-\bar{\lambda}_0} + \overline{G_1(\xi,x,\lambda)}$$

dir. Yani;

$$G^*(x,\xi,\lambda) = \frac{\overline{R(\xi,x)}}{\bar{\lambda}-\bar{\lambda}_0} + \overline{G_1(\xi,x,\lambda)}$$

dir. Daha önce ispat ettiğimiz **Teorem III.2.1.** gereğince λ_0, L operatörünün özdeğeri olduğunda $\overline{\lambda}_0$, L*operatörünün özdeğeri olur.

Yukarıda ispat ettik ki;

$$\overline{R(\xi,x)} = \operatorname*{Rez}_{\lambda=\overline{\lambda}_0} G^*(x,\xi,\lambda) = \operatorname*{Rez}_{\lambda=\overline{\lambda}_0} \overline{G(\xi,x,\lambda)} = b(\xi)\, z_0(x)$$

dir. Burada $z_0(x)$, L* operatörünün $\lambda = \overline{\lambda}_0$ özdeğerine uygun olan herhangi özfonksiyondur. Sononcu formül gereğince

$$R(x,\xi) = \overline{b(x)}\;\overline{z_0(\xi)} \tag{IV.9.5}$$

dir. R(x,ξ)-nin **(IV.9.4)**-deki ifadesini gözönüne alırsak;

$$a(\xi)\, y_0(x) = \overline{b(x)}\;\overline{z_0(\xi)}$$

$$\Rightarrow \frac{a(\xi)}{\overline{z_0(\xi)}} = \frac{\overline{b(x)}}{y_0(x)} = c \quad , \quad (c\text{=sabit})$$

$$\Rightarrow a(\xi) = c\, \overline{z_0(\xi)}$$

bulunur. Böylece,

$$R(x,\xi) = c\, y_0(x)\; \overline{z_0(\xi)}$$

elde edilir. Burada $y_0(x)$, L-operatörünün $\lambda = \lambda_0$ özdeğerine uygun özfonksiyonudur. z_0 ise L* operatörünün $\lambda = \overline{\lambda}_0$ özdeğerine uygun özfonksiyonudur. Bu durumda Green fonksiyonunu aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$G(x,\xi,\lambda) = \frac{c\, y_0(x)\, \overline{z_0(\xi)}}{\lambda-\lambda_0} + G_1(x,\xi,\lambda) \qquad \textbf{(IV.9.6)}$$

Şimdi c sabitini hesaplayalım.

Sonuncu eşitlikten,

$$(\lambda-\lambda_0)\int_a^b G(x,\xi,\lambda)\, y_0(\xi)\, d\xi = c\, y_0(x)\int_a^b y_0(\xi)\, \overline{z_0(\xi)}\, d\xi + (\lambda-\lambda_0)\int_a^b G_1(x,\xi,\lambda)\, y_0(\xi)\, d\xi$$

elde edilir. Sol tarafın, Green fonksiyonunun özelliğinden dolayı

$$(\lambda-\lambda_0)\int_a^b G(x,\xi,\lambda)\, y_0(\xi)\, d\xi = (\lambda-\lambda_0)\,(L-\lambda I)^{-1}\, y_0 \qquad \textbf{(IV.9.8)}$$

olduğunu biliyoruz. Diğer taraftan,

$$(L-\lambda I)\, y_0 = [\, L-\lambda_0 I + (\lambda_0-\lambda)\, I\,]\, y_0$$

$$= (L-\lambda_0 I)\, y_0 + (\lambda_0-\lambda)\, y_0 = (\lambda_0-\lambda)\, y_0$$

dır. Bu eşitlikten

$$y_0 = (\lambda_0-\lambda)\,(L-\lambda I)^{-1}\, y_0 \qquad \textbf{(IV.9.9)}$$

elde edilir.**(IV.9.8)** ve **(IV.9.9)** eşitliklerinden

$$(\lambda-\lambda_0)\int_a^b G(x,\xi,\lambda)\, y_0(\xi)\, d\xi = -y_0(x)$$

eşitliği bulunur. Bunu **(IV.9.7)**-de yerine yazalım.

$$-y_0(x) = c\, y_0(x) \int_a^b y_0(\xi)\, \overline{z_0(\xi)}\, d\xi + (\lambda-\lambda_0) \int_a^b G_1(x,\xi,\lambda)\, y_0(\xi)\, d\xi$$

sağ taraftaki sonuncu integral $\lambda = \lambda_0$ noktasının herhangi komşuluğunda analitiktir. Bu nedenle sonuncu eşitlikte $\lambda \to \lambda_0$ olmakla limite geçersek

$$c = -\left(\int_a^b y_0(\xi)\, \overline{z_0(\xi)}\, d\xi \right)^{-1}$$

buluruz.

Böylece $G(x,\xi,\lambda)$ Green fonksiyonunu λ_0 basit kutup yeri (basit kutup noktası) olduğu durumdaki Laurent açılımının esas kısmını bulduk.

$$G(x,\xi,\lambda) = -\frac{y_0(x)\, \overline{z_0(\xi)}}{(\lambda-\lambda_0) \int_a^b y_0(\xi)\, \overline{z_0(\xi)}\, d\xi} + G_1(x,\xi,\lambda)$$

$$= -\frac{y_0(x)\, \overline{z_0(\xi)}}{(\lambda-\lambda_0) < y_0\,,\, z_0 >} + G_1(x,\xi,\lambda) \qquad \textbf{(IV.9.10)}$$

y_0 , z_0 fonksiyonlarını

$$< y_0\,,\, z_0 > = \int_a^b y_0(\xi)\, \overline{z_0(\xi)}\, d\xi = 1$$

olacak şekilde seçersek daha basit

$$G(x,\xi,\lambda) = -\frac{y_0(x)\,\overline{z_0(\xi)}}{\lambda-\lambda_0} + G_1(x,\xi,\lambda) \qquad \textbf{(IV.9.11)}$$

formülünü elde etmiş oluruz.

V. BÖLÜM

SABİT KATSAYILI LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEM VE PERİYODİK SINIR ŞARTLARININ ÜRETTİĞİ DİFERANSİYEL OPERATÖRÜN GREEN FONKSİYONU

Bu bölümde [0,1] aralığında parametreye bağlı olmayan

$$\ell(y) \equiv y^{(n)} + p_1\, y^{(n-1)} + \dots + p_n\, y$$

ve λ parametresine bağlı olan

$$\ell(y) \equiv y^{(n)} + p_1\, y^{(n-1)} + \dots + (p_n - \lambda)\, y$$

diferansiyel ifadelerinin herbirinin

$$y^{(v)}_{(0)} = y^{(v)}_{(1)} \ , \quad v = 0,1, \dots , n\text{-}1$$

periyodik sınır şartları altında ürettiği diferansiyel operatörlerin Green fonksiyonlarını araştıracağız.

V.1. Parametreye Bağlı Olmayan Sınır Değer Problemi İçin Green Fonksiyonu

Bu kesimde [0,1] aralığında

$$\ell(y) \equiv y^{(n)} + p_1\, y^{(n-1)} + \dots + p_n\, y = 0 \qquad \textbf{(V.1.1)}$$

$$U_v(y) \equiv y^{(v)}_{(0)} - y^{(v)}_{(1)} = 0 \ , \quad v = 0,1, \dots , n\text{-}1 \qquad \textbf{(V.1.2)}$$

sınır değer probleminin C[0,1] uzayında ürettiği lineer diferansiyel operatörün Green fonksiyonunu araştıracağız. $P_n \neq 0$ olduğunu ve **(V.1.1)** diferansiyel denkleminin

$$w^n + p_1\, w^{n-1} + \dots p_n = 0$$

karakteristik denkleminin birbirinden farklı n-tane w_1 , w_2 , ... , w_n kökünün bulunduğunu kabul edeceğiz. Bu şartlar altında L operatörünün tersinin bulunduğunu gösterelim. **(V.1.1)** denkleminin n-tane

$$y_1 = e^{w_1 x} \ , \ y_2 = e^{w_2 x} \ , \ldots , y_n = e^{w_n x}$$

lineer bağımsız çözümü bulunduğundan [5] genel çözümünü

$$y = c_1 e^{w_1 x} + c_2 e^{w_2 x} + \ldots + c_n e^{w_n x} \qquad \textbf{(V.1.3)}$$

şeklinde yazabiliriz. **(V.1.3)** çözümünü **(V.1.2)** sınır şartlarında yerine yazarak c_k , $k = \overline{1,n}$ sabitlerini bulalım.

$$y^{(v)} = c_1 w_1^v e^{w_1 x} + c_2 w_2^v e^{w_2 x} + \ldots + c_n w_n^v e^{w_n x} \ , \ v = 0,1, \ldots , n\text{-}1 \qquad \textbf{(V.1.4)}$$

olduğundan $c_1 , c_2 , \ldots , c_n$ sabitleri için

$$\begin{cases} (1-e^{w_1}) c_1 + (1-e^{w_2}) c_2 + \ldots + (1-e^{w_n}) c_n = 0 \\ w_1 (1-e^{w_1}) c_1 + w_2 (1-e^{w_2}) c_2 + \ldots + w_n (1-e^{w_n}) c_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w_1^{n-1} (1-e^{w_1}) c_1 + w_2^{n-1} (1-e^{w_2}) c_2 + \ldots + w_n^{n-1} (1-e^{w_n}) c_n = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(V.1.5)}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. **(V.1.5)** sisteminin determinantı

$$\begin{vmatrix} 1-e^{w_1} & 1-e^{w_2} & \ldots & 1-e^{w_n} \\ w_1 (1-e^{w_1}) & w_2 (1-e^{w_2}) & \ldots & w_n (1-e^{w_n}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w_1^{n-1}(1-e^{w_1}) & w_2^{n-1}(1-e^{w_2}) & \ldots & w_n^{n-1}(1-e^{w_n}) \end{vmatrix} = (1-e^{w_1}) (1-e^{w_2}) \ldots (1-e^{w_n}) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ w_1 & w_2 & \ldots & w_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w_1^{n-1} & w_2^{n-1} & \ldots & w_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

şeklinde olur. Sağ taraftaki determinant $w_1 , w_2 , \ldots , w_n$ sayılarının Vandermonde determinantıdır. Bu determinantı $\widetilde{W}(w_1, w_2, \ldots , w_n)$ veya sadece $\widetilde{W}$ ile göstereceğiz. $i \neq j$ olduğunda $w_i \neq w_j$ olduğundan

$$\widetilde{W}(w_1,w_2,\ldots,w_n)=\prod_{j>i}^{n}(w_j-w_i)\neq 0$$

dır. Diğer taraftan $p_n \neq 0$ olduğundan her bir i-için $1-e^{w_i}\neq 0$ dır. Bu nedenle **(V.1.5)** sisteminin ancak

$$c_1=c_2=\ldots=c_n=0$$

aşikar çözümü bulunur. Yani $Ly=0$ denkleminin tek bir $y=0$ çözümü vardır ve dolayısıyla L^{-1} ters operatörü bulunur.

Şimdi **(V.1.1)** , **(V.1.2)** sınır değer probleminin Green fonksiyonunu bulalım. Sabitin değişimi yöntemini [5] uygulayarak $Ly=f$ denkleminin çözümünü;

$$y=c_1(x)\,e^{w_1x}+c_2(x)\,e^{w_2x}+\ldots+c_n(x)\,e^{w_nx}$$

şeklinde arayalım. **Tanım (IV.3.1)** gereğince $G(x,\xi)$ Green fonksiyonu

$$G(x,\xi)=\begin{cases} a_1(\xi)\,e^{w_1x}+a_2(\xi)\,e^{w_2x}+\ldots+a_n(\xi)\,e^{w_nx}\,, & x\in[0,\xi) \\ b_1(\xi)\,e^{w_1x}+b_2(\xi)\,e^{w_2x}+\ldots+b_n(\xi)\,e^{w_nx}\,, & x\in(\xi,1] \end{cases} \qquad \textbf{(V.1.6)}$$

şeklindedir. $a_k(\xi)$ ve $b_k(\xi)$ fonksiyonlarını öyle seçelimki,

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial^{v}G(x,\xi)}{\partial x^{v}}\right|_{x=\xi+0}=\left.\dfrac{\partial^{v}G(x,\xi)}{\partial x^{v}}\right|_{x=\xi-0}\,, & v=1,2,\ldots,n-2 \\ \left.\dfrac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}\right|_{x=\xi+0}-\left.\dfrac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}\right|_{x=\xi-0}=\dfrac{1}{p_0(\xi)}=\dfrac{1}{1}=1 & \end{cases} \qquad \textbf{(V.1.7)}$$

eşitlikleri sağlansın. **(V.1.6)** ifadesini **(V.1.7)** de yerine yazarsak

$$\begin{cases} b_1(\xi)\, e^{w_1 x}+\ldots+b_n(\xi)e^{w_n x}\Big|_{x=\xi+0} = a_1(\xi)\, e^{w_1 x}+\ldots+a_n(\xi)e^{w_n x}\Big|_{x=\xi-0} \\ b_1(\xi)w_1\, e^{w_1 x}+\ldots+b_n(\xi)e^{w_n x}\Big|_{x=\xi+0} = a_1(\xi)w_1\, e^{w_1 x}+\ldots+a_n(\xi)e^{w_n x}\Big|_{x=\xi-0} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_1(\xi)w_1^{n-2}\, e^{w_1 x}+\ldots+b_n(\xi)w_n^{n-2}\, e^{w_n x}\Big|_{x=\xi+0} = a_1(\xi)w_1^{n-2}\, e^{w_1 x}+\ldots+a_n(\xi)w_n^{n-2}\, e^{w_n x}\Big|_{x=\xi-0} \\ b_1(\xi)w_1^{n-1}\, e^{w_1 x}+\ldots+b_n(\xi)w_n^{n-1}\, e^{w_n x}\Big|_{x=\xi+0} - [\, a_1(\xi)w_1^{n-1}\, e^{w_1 x}+\ldots+a_n(\xi)w_n^{n-1} e^{w_n x}]\Big|_{x=\xi-0} = 1 \end{cases}$$

sistemini elde etmiş oluruz. Bu sistemi

$$\begin{cases} (b_1(\xi)-a_1(\xi))\, e^{w_1\xi} + ((b_2(\xi)-a_2(\xi))\, e^{w_2\xi} + \ldots + (b_n(\xi)-a_n(\xi))\, e^{w_n\xi} = 0 \\ (b_1(\xi)-a_1(\xi))\, w_1\, e^{w_1\xi} + ((b_2(\xi)-a_2(\xi))\, w_2\, e^{w_2\xi})) + \ldots + (b_n(\xi)-a_n(\xi))\, w_n\, e^{w_n\xi} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (b_1(\xi)-a_1(\xi))w_1^{n-1}e^{w_1\xi}+((b_2(\xi)-a_2(\xi))w_2^{n-1}e^{w_2\xi}+\ldots+(b_n(\xi)-a_n(\xi))w_n^{n-1}\, e^{w_n\xi} = 1 \end{cases}$$

şeklinde yazarsak $c_k(\xi) = b_k(\xi) - a_k(\xi)$, $k = \overline{1,n}$ değişkenlerine göre

$$\begin{cases} c_1(\xi)\, e^{w_1\xi} + c_2(\xi)\, e^{w_2\xi} + \ldots + c_n(\xi)\, e^{w_n\xi} = 0 \\ c_1(\xi)\, w_1\, e^{w_1\xi} + c_2(\xi)\, w_2\, e^{w_2\xi} + \ldots + c_n(\xi)\, w_n\, e^{w_n\xi} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1(\xi)\, w_1^{n-1}\, e^{w_1\xi} + c_2(\xi)\, w_2^{n-1}\, e^{w_2\xi} + \ldots + c_n(\xi)\, w_n^{n-1}\, e^{w_n\xi} = 1 \end{cases} \qquad \textbf{(V.1.8)}$$

sistemini elde etmiş oluruz. **(V.1.8)** sisteminin determinantı $e^{w_1\xi}$, $e^{w_2\xi}$, ... , $e^{w_n\xi}$ temel çözüm sisteminin Wronskian'ı olduğundan sıfırdan farklıdır [5]. Bu fonksiyonların Wronskian'ını $W = W(e^{w_1\xi}, e^{w_2\xi}, \dots, e^{w_n\xi})$ ile gösterirsek ve determinantın bilinen özelliklerinden yararlanırsak

$$W = W(e^{w_1\xi}, e^{w_2\xi}, \dots, e^{w_n\xi}) = \begin{vmatrix} e^{w_1\xi} & e^{w_2\xi} & \dots & e^{w_n\xi} \\ w_1 e^{w_1\xi} & w_2 e^{w_2\xi} & \dots & w_n e^{w_n\xi} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1^{n-1} e^{w_1\xi} & w_2^{n-1} e^{w_2\xi} & \dots & w_n^{n-1} e^{w_n\xi} \end{vmatrix}$$

$$= e^{\xi \sum_{i=1}^{n} w_i} \widetilde{W}(w_1, w_2, \dots, w_n) \neq 0$$

elde edilir. O halde Gramer yöntemi [3] ile ve determinantın bilinen özelliklerinden faydalanarak **(V.1.8)** sistemini çözersek

$$C_k(\xi) = \frac{1}{W} \begin{vmatrix} e^{w_1\xi} & \dots & e^{w_{k-1}\xi} & 0 & e^{w_{k+1}\xi} & \dots & e^{w_n\xi} \\ w_1 e^{w_1\xi} & \dots & w_{k-1} e^{w_{k-1}\xi} & 0 & w_{k+1} e^{w_{k+1}\xi} & \dots & w_n e^{w_n\xi} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1^{n-1} e^{w_1\xi} & \dots & w_{k-1}^{n-1} e^{w_{k-1}\xi} & 1 & w_{k+1}^{n-1} e^{w_{k+1}\xi} & \dots & w_n^{n-1} e^{w_n\xi} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{W} (-1)^{n+k} \begin{vmatrix} e^{w_1\xi} & \dots & e^{w_{k-1}\xi} & e^{w_{k+1}\xi} & \dots & e^{w_n\xi} \\ w_1 e^{w_1\xi} & \dots & w_{k-1} e^{w_{k-1}\xi} & w_{k+1} e^{w_{k+1}\xi} & \dots & w_n e^{w_n\xi} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1^{n-2} e^{w_1\xi} & \dots & w_{k-1}^{n-2} e^{w_{k-1}\xi} & w_{k+1}^{n-2} e^{w_{k+1}\xi} & \dots & w_n^{n-2} e^{w_n\xi} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{W} (-1)^{n+k} e^{\xi \sum_{i \neq k}^{n} w_i} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ w_1 & \cdots & w_{k-1} & w_{k+1} & \cdots & w_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w_1^{n-2} & \cdots & w_{k-1}^{n-2} & w_{k+1}^{n-2} & \cdots & w_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+k} \frac{e^{\xi \sum_{i \neq k}^{n} w_i} \widetilde{W}(w_1,\ldots,w_{k-1},w_{k+1},\ldots,w_n)}{e^{\xi \sum_{i=k}^{n} w_i} \widetilde{W}(w_1,w_2,\ldots,w_n)}$$

$$= (-1)^{n+k} e^{-w_k \xi} \frac{\prod_{1 \le i < j \le n,\ i \neq k} (w_j - w_i)}{\prod_{1 \le i < j \le n} (w_j - w_i)}$$

$$= (-1)^{n+k} e^{-w_k \xi} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \mathrm{Sgn}(j-k)\, (w_j - w_k)^{-1} \qquad \text{(V.1.9)}$$

bulmuş oluruz. $a_k(\xi)=b_k(\xi)-c_k(\xi)$, $k = 1,2,\ldots,n$ olduğunu gözönünde bulundurarak $U_v(G)$ sınır ifadelerini aşağıdaki şekilde yazalım.

$$U_v(G) = U_v(G(\cdot,\xi)) = \left.\frac{\partial^v G(x,\xi)}{\partial x^v}\right|_{x=0} - \left.\frac{\partial^v G(x,\xi)}{\partial x^v}\right|_{x=1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[(b_k(\xi) - c_k(\xi))\, y_k^{(v)}(0) - b_k(\xi)\, y_k^{(v)}(1) \right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[b_k(\xi)\, (w_k^v - w_k^v e^{w_k}) - c_k(\xi)\, w_k^v \right]$$

$$=\sum_{k=1}^{n} w_k^v \left[b_k(\xi)\,(1-e^{w_k}) - c_k(\xi)\right], \quad v=0,1,\ldots,n-1$$

Burada $b_k(\xi)\,(1-e^{w_k}) - c_k(\xi) = d_k(\xi)$ ile gösterirsek

$$U_v(G) = \sum_{k=1}^{n} w_k^v\, d_k(\xi) \quad , \quad v=0,1,\ldots,n-1$$

elde edilir. O halde $U_v(G)=0$, $v=0,1,\ldots,n-1$ sınır şartları $d_1(\xi), d_2(\xi), \ldots, d_n(\xi)$ değişkenlerinin

$$\begin{cases} d_1(\xi) + d_2(\xi) + \ldots + d_n(\xi) = 0 \\ w_1\, d_1(\xi) + w_2\, d_2(\xi) + \ldots + w_n\, d_n(\xi) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ w_1^{n-1}\, d_1(\xi) + w_2^{n-1}\, d_2(\xi) + \ldots + w_n^{n-1}\, d_n(\xi) = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(V.1.10)}$$

lineer denklem sistemine dönüşür. Bu sistemin determinantı

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ w_1 & w_2 & \ldots & w_n \\ w_1^{n-1} & w_2^{n-1} & \ldots & w_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n} (w_j - w_i) \neq 0$$

olduğundan **(V.1.10)** denklem sisteminin sadece

$$d_1(\xi) = d_2(\xi) = \ldots = d_n(\xi) = 0$$

aşikar çözümü bulunur. Buradan,

$$b_k(\xi)\,(1-e^{w_k}) - c_k(\xi) = 0 \quad , \quad k=\overline{1,n}$$

elde edilir.

$$b_k(\xi) = \frac{c_k(\xi)}{1-e^{w_k}} \quad , \quad k=\overline{1,n} \qquad \textbf{(V.1.11)}$$

elde edilmiş olur. Bu değerleri $a_k(\xi) = b_k(\xi) - c_k(\xi)$, $k=\overline{1,n}$ eşitliğinde yerine yazarsak

$$a_k(\xi) = \frac{c_k(\xi)\, e^{w_k}}{1-e^{w_k}}$$

bulunur. Sonuç olarak (**V.1.9**) formülü gereğince,

$$\begin{cases} a_k(\xi) = (-1)^{n+k} \dfrac{e^{(1-\xi)\, w_k}}{1-e^{w_k}} \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \mathrm{Sgn}(j-k)\, (w_j-w_k)^{-1} \\ b_k(\xi) = (-1)^{n+k} \dfrac{e^{-\xi\, w_k}}{1-e^{w_k}} \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \mathrm{Sgn}(j-k)\, (w_j-w_k)^{-1} \end{cases} \qquad (\mathbf{V.1.12})$$

şeklinde yazılabilir. Sonuncu ifadeleri (**V.1.6**)-da yerine yazarsak

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{n+k} \dfrac{e^{(x-\xi+1)w_k}}{1-e^{w_k}} \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \mathrm{Sgn}(j-k)\, (w_j-w_k)^{-1}, & 0\leq x<\xi \\ \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{n+k} \dfrac{e^{(x-\xi)w_k}}{1-e^{w_k}} \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \mathrm{Sgn}(j-k)\, (w_j-w_k)^{-1}, & \xi<x\leq 1 \end{cases} \qquad (\mathbf{V.1.13})$$

Green fonksiyonunu bulmuş oluruz.

V.2. Homojen Olmayan Sınır Değer Probleminin Çözümü

$$y^{(n)} + p_1\, y^{(n-1)} + \ldots + p_n\, y = f(x) \qquad (\mathbf{V.2.1})$$

$$y^{(v)}_{(0)} = y^{(v)}_{(1)} \quad , \quad v = 0,1,\ldots,n-1 \qquad (\mathbf{V.2.2})$$

sınır değer problemi verilsin. O halde **Teorem IV.4.1.** gereğince yukarıda yaptığımız araştırmalardan aşağıdaki Teorem elde edilir.

Teorem V.2.1.

Eğer $p_n \neq 0$ ise ve

$$w^n + p_1 w^{n-1} + \dots + p_n = 0$$

karakteristik denkleminin n-tane farklı w_1 , w_2 , ..., w_n kökü bulunursa, bu halde [0,1] aralığında sürekli olan her f(x) fonksiyonu için **(V.2.1)**, **(V.2.2)** sınır değer probleminin bir tek y(x) çözümü bulunur ve bu çözüm

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+k} \frac{e^{w_k x}}{1-e^{w_k}} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \mathrm{Sgn}(j-k)\,(w_j - w_k)^{-1} \left[\int_0^x e^{(1-\xi)\,w_k} f(\xi)\,d\xi + \right.$$

$$\left. + \int_x^1 e^{-w_k \xi} f(\xi)\,d\xi \right]$$

formülü ile belirlenir.

V.3. Parametreye Bağlı Sınır Değer Problemi İçin Green Fonksiyonu

Bu kesimde λ-parametresine bağlı

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = \lambda y + f(x) \qquad \textbf{(V.3.1)}$$

$$y^{(v)}_{(0)} - y^{(v)}_{(1)} = 0 \quad , \quad v = 0,1,\dots,n-1 \qquad \textbf{(V.3.2)}$$

sınır değer probleminin Green fonksiyonunu ve dolayısıyla $L - \lambda I$ operatörünün tersini bulacağız

$$w^n + p_1 w^{n-1} + \dots + (p_n - \lambda) = 0$$

karakteristik denkleminin birbirinden farklı n-tane $w_1(\lambda)$, $w_2(\lambda)$, ..., $w_n(\lambda)$ çözümlerinin olduğunu kabul edelim.

$$w_k(\lambda) = 0 \quad , \quad k = \overline{1,n}$$

$$w_{ij} \equiv w_i - w_j = 0 \quad , \quad i,j = \overline{1,n} \quad , \quad i \neq j$$

denklemlerinden en azından birini sağlayan λ-lardan oluşan kümeyi M ile gösterelim $w_k(\lambda)$ fonksiyonları tam fonksiyonlar olduğu için [4] M kümesinde sonlu veya sayılabilir sayıda nokta bulunur.

Aşağıda her bir $\lambda \notin M$ ve her sürekli $f(x)$ fonksiyonu için **(V.3.1)** , **(V.3.2)** sınır değer probleminin bir tek çözümü bulunduğunu ispat edeceğiz ve bu çözümün ifadesini bulacağız. Bir başka deyişle bu şartlar altında $L - \lambda I$ operatörünün tersinin bulunduğunu ispat edeceğiz ve bu operatörün Green fonksiyonunu bulacağız.

Teorem V.3.1.

$w_k(\lambda)$ ve $w_{ij}(\lambda)$ $(k = \overline{1,n} \; , \; i,j = \overline{1,n} \; , \; i \neq j)$ tam fonksiyonlarının hiçbirinin sıfır yeri olmayan λ sayıları ve her bir sürekli f(x) fonksiyonu için **(V.3.1)** , **(V.3.2)** sınır değer prosleminin bit tek $y(x,\lambda)$ çözümü bulunur ve bu çözüm

$$y(x,\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{k,q,p=1}^{n} e^{w_k(\lambda)x} \frac{w_p^{q-1}(\lambda)}{1-e^{w_k(\lambda)}} \frac{\tilde{W}_{1p}\tilde{W}_{qk}}{\tilde{W}^2} \int_0^1 [e^{-w_p(\lambda)\xi} + e^{w_p(\lambda)(1-\xi)}] f(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=q}^{n} e^{w_k(\lambda)x} \frac{\tilde{W}_{1k}}{\tilde{W}} \int_0^1 \mathrm{Sgn}\,(x-\xi)\, e^{-w_k(\lambda)\xi} f(\xi)\, d\xi \qquad \textbf{(V.3.3)}$$

formülü ile belirlenir. Burada $\tilde{W} = \tilde{W}(w_1(\lambda), w_2(\lambda), \ldots, w_n(\lambda))$ ile $w_1(\lambda), \ldots, w_n(\lambda)$ sayılarının Vandermonde determinantı ve $\tilde{W}_{ij}$ ile bu determinantın (i,j)-yinci elemanının kofaktörü gösterilmiştir.

İspat :

Teoemin şartları altında $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = \lambda y$ denkleminin n-tane lineer bağımsız $y_k(x,\lambda) = e^{w_k(\lambda) x}$, $k = \overline{1,n}$ çözümü bulunur. Bu fonksiyonlar için **Bölüm IV** te tanımlanmış $\Delta(\lambda)$, $g(x,\xi,\lambda)$ ve $H(x,\xi,\lambda)$ ifadelerini hesaplayalım.

$$U_v(y_k) \equiv U_v(y_k(\bullet,\lambda)) = w_k^{v-1}(\lambda)\,(1-e^{w_k(\lambda)}) \;,\; v = \overline{1,n} \;,\; k = \overline{1,n} \tag{V.3.4}$$

olduğundan

$$\Delta(\lambda) = \det\,[U_i(y_k(x,\lambda))]_{i,k=\overline{1,n}}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-e^{w_1(\lambda)} & 1-e^{w_2(\lambda)} & \ldots & 1-e^{w_n(\lambda)} \\ w_1(\lambda)\,(1-e^{w_1(\lambda)}) & w_2(\lambda)\,(1-e^{w_2(\lambda)}) & \ldots & w_n(\lambda)\,(1-e^{w_n(\lambda)}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w_1^{n-1}(\lambda)\,(1-e^{w_1(\lambda)}) & w_2^{n-1}(\lambda)\,(1-e^{w_2(\lambda)}) & \ldots & w_n^{n-1}(\lambda)\,(1-e^{w_n(\lambda)}) \end{vmatrix}$$

$$= (1-e^{w_1(\lambda)})\,(1-e^{w_2(\lambda)}) \ldots (1-e^{w_n(\lambda)}) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ w_1(\lambda) & w_2(\lambda) & \ldots & w_n(\lambda) \\ w_1^{n-1}(\lambda) & w_2^{n-1}(\lambda) & \ldots & w_n^{n-1}(\lambda) \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{k=1}^{n} (1-e^{w_k(\lambda)})\;\widetilde{W}(w_1(\lambda)\,,\, w_2(\lambda)\,,\, \ldots\,,\, w_n(\lambda))$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \prod_{j>i}^{n} (1-e^{w_k(\lambda)})\;(w_j(\lambda) - w_i(\lambda)) \tag{V.3.5}$$

elde edilir.

Bundan sonra yazıyı kısaltmak için $w_k(\lambda)$ yerine sadece w_k yazacağız.

$$g(x,\xi,\lambda) = \text{Sgn}\,(x-\xi)\,\frac{1}{2e^{(w_1+w_2+...+w_n)\,\xi}\,\widetilde{W}}\begin{vmatrix} e^{w_1x} & e^{w_2x} & \dots & e^{w_nx} \\ w_1^{n-2}\,e^{w_1\xi} & w_2^{n-2}\,e^{w_2\xi} & \dots & w_n^{n-2}\,e^{w_n\xi} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e^{w_1\xi} & e^{w_2\xi} & \dots & e^{w_n\xi} \end{vmatrix}$$

ifadesinin sağ tarafındaki determinantı 1. satır elemanlarına göre açarsak;

$$g(x,\xi,\lambda) = \text{Sgn}\,(x-\xi)\,\frac{(-1)^{1+1}\,e^{w_1x}}{2e^{(w_1+w_2+...+w_n)\xi}\,\widetilde{W}}\begin{vmatrix} w_2^{n-2}\,e^{w_2\xi} & w_3^{n-2}\,e^{w_3\xi} & \dots & w_n^{n-2}\,e^{w_n\xi} \\ w_2^{n-3}\,e^{w_2\xi} & w_3^{n-3}\,e^{w_3\xi} & \dots & w_n^{n-3}\,e^{w_n\xi} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e^{w_2\xi} & e^{w_3\xi} & \dots & e^{w_n\xi} \end{vmatrix} +$$

$$+\,\text{Sgn}\,(x-\xi)\,\frac{(-1)^{1+2}\,e^{w_2x}}{2e^{(w_1+w_2+...+w_n)\xi}\,\widetilde{W}}\begin{vmatrix} w_1^{n-2}\,e^{w_1\xi} & w_3^{n-2}\,e^{w_3\xi} & \dots & w_n^{n-2}\,e^{w_n\xi} \\ w_1^{n-3}\,e^{w_1\xi} & w_3^{n-3}\,e^{w_3\xi} & \dots & w_n^{n-3}\,e^{w_n\xi} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e^{w_1\xi} & e^{w_3\xi} & \dots & e^{w_n\xi} \end{vmatrix} +$$

$$+ \dots +\,\text{Sgn}\,(x-\xi)\,\frac{(-1)^{1+n}\,e^{w_nx}}{2e^{(w_1+w_2+...+w_n)\xi}\,\widetilde{W}}\begin{vmatrix} w_1^{n-2}\,e^{w_1\xi} & w_2^{n-2}\,e^{w_2\xi} & \dots & w_{n-1}^{n-2}\,e^{w_{n-1}\xi} \\ w_1^{n-3}\,e^{w_1\xi} & w_2^{n-3}\,e^{w_2\xi} & \dots & w_{n-1}^{n-3}\,e^{w_{n-1}\xi} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e^{w_1\xi} & e^{w_2\xi} & \dots & e^{w_{n-1}\xi} \end{vmatrix}$$

$$= \mathrm{Sgn}\,(x-\xi)\,\frac{(-1)^{1+1}\,e^{w_1 x}\;e^{(w_2+\ldots+w_n)\xi}}{2e^{(w_1+w_2+\ldots+w_n)\xi}\,\widetilde{W}}\begin{vmatrix} w_2^{n-2} & w_3^{n-2} & \ldots & w_n^{n-2} \\ w_2^{n-3} & w_3^{n-3} & \ldots & w_n^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ \mathrm{Sgn}\,(x-\xi)\,\frac{(-1)^{1+2}\,e^{w_2 x}\;e^{(w_1+w_3+\ldots+w_n)\xi}}{2e^{(w_1+w_2+\ldots+w_n)\xi}\,\widetilde{W}}\begin{vmatrix} w_1^{n-2} & w_3^{n-2} & \ldots & w_n^{n-2} \\ w_1^{n-3} & w_3^{n-3} & \ldots & w_n^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+\ldots+ \mathrm{Sgn}\,(x-\xi)\,\frac{(-1)^{1+n}\,e^{w_n x}\;e^{(w_1+w_2+\ldots+w_{n-1})\xi}}{2e^{(w_1+w_2+\ldots+w_n)\xi}\,\widetilde{W}}\begin{vmatrix} w_1^{n-2} & w_2^{n-2} & \ldots & w_{n-1}^{n-2} \\ w_1^{n-3} & w_2^{n-3} & \ldots & w_{n-1}^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

bulmuş oluruz. $\widetilde{W}_{1k}(\lambda)$, $k = \overline{1,n}$ ile

$$\widetilde{W}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ w_1(\lambda) & w_2(\lambda) & \ldots & w_n(\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w_1^{n-1}(\lambda) & w_2^{n-1}(\lambda) & \ldots & w_n^{n-1}(\lambda) \end{vmatrix}$$

Vandermonde determinantının sırası ile 1. satır elemanlarının kofaktörlerini gösterirsek

$$g(x,\xi,\lambda) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sgn}\,(x-\xi)\sum_{k=1}^{n} e^{w_k(\lambda)\,(x-\xi)}\;\frac{\widetilde{W}_{1k}(\lambda)}{\widetilde{W}(\lambda)} \qquad \textbf{(V.3.6)}$$

elde edilir.

$$\frac{\partial^{v-1} g(x,\xi,\lambda)}{\partial x^{v-1}} = \frac{1}{2} \operatorname{Sgn}(x-\xi) \sum_{k=1}^{n} w_k^{v-1}(\lambda)\, e^{w_k(\lambda)(x-\xi)} \frac{\widetilde{W}_{1k}(\lambda)}{\widetilde{W}(\lambda)}, \quad v=\overline{1,n-1} \qquad \textbf{(V.3.7)}$$

olduğundan **(V.3.7)** den

$$U_q g(x,\xi,\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{n} w_p^{q-1}(\lambda)\, [e^{-w_p(\lambda)\, x} + e^{w_p(\lambda)(1-\xi)}] \frac{\widetilde{W}_{1p}}{\widetilde{W}(\lambda)}, \quad q=\overline{1,n} \qquad \textbf{(V.3.8)}$$

bulunur. Şimdi;

$$U_v(y_k) = w_k^{v-1}(\lambda)\,(1-e^{w_k(\lambda)}), \quad v=\overline{1,n}, \quad k=\overline{1,n} \qquad \textbf{(V.3.9)}$$

olduğu gözönüne alarak **(V.3.6)** , **(V.3.8)** ifadelerini **(IV.8.12)** formülündeki $H(x,\xi,\lambda)$ determinantında yerine yazalım ve bu determinantı hesaplayalım.

$$H(x,\xi,\lambda) = \begin{vmatrix} e^{w_1 x} & e^{w_2 x} & \dots & e^{w_n x} & \frac{1}{2}\operatorname{Sgn}(x-\xi) \sum\limits_{k=1}^{n} e^{w_k(x-\xi)} \frac{\widetilde{W}_{1k}}{\widetilde{W}} \\ (1-e^{w_1}) & (1-e^{w_2}) & \dots & (1-e^{w_n}) & -\frac{1}{2} \sum\limits_{p=1}^{n} [e^{-w_p \xi} + e^{w_p(1-\xi)}] \frac{\widetilde{W}_{1p}}{\widetilde{W}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w_1^{n-1}(1-e^{w_1}) & w_2^{n-1}(1-e^{w_2}) & \dots & w_n^{n-1}(1-e^{w_n}) & -\frac{1}{2} \sum\limits_{p=1}^{n} w_p^{n-1} [e^{-w_p \xi} + e^{w_p(1-\xi)}] \frac{\widetilde{W}_{1p}}{\widetilde{W}} \end{vmatrix}$$

$H_{1k}(x,\xi,\lambda)$, $k=\overline{1,n}$ ile $H(x,\xi,\lambda)$ determinantının sırası ile birinci satır elemanlarının kofaktörlerini göstererek sononcu determinantı birinci satır elemanlarına göre açarsak;

$$H(x,\xi,\lambda) = \sum_{k=1}^{n} e^{w_k x} H_{1k}(x,\xi,\lambda) + (-1)^n \frac{1}{2} \operatorname{Sgn}(x-\xi) \sum_{k=1}^{n} e^{w_k(x-\xi)}\, \widetilde{W}_{1k} \prod_{j=1}^{n} (1-e^{w_j}) \qquad \textbf{(V.3.10)}$$

formülünü elde etmiş oluruz. Diğer taraftan

$$H_{1k}(x,\xi,\lambda)=\begin{vmatrix} 1-e^{w_1} & \dots & 1-e^{w_{k-1}} & 1-e^{w_{k+1}} & \dots & 1-e^{w_n} & -\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}[e^{-w_p\xi}+e^{w_p(1-\xi)}]\frac{\widetilde{W}_{1p}}{\widetilde{W}} \\ w_1(1-e^{w_1}) & \dots & w_{k-1}(1-e^{w_{k-1}}) & w_{k+1}(1-e^{w_{k+1}}) & \dots & w_n(1-e^{w_n}) & -\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}w_p[e^{-w_p\xi}+e^{w_p(1-\xi)}]\frac{\widetilde{W}_{1p}}{\widetilde{W}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ w_1^{n-1}(1-e^{w_1}) & \dots & w_{k-1}^{n-1}(1-e^{w_{k-1}}) & w_{k+1}^{n-1}(1-e^{w_{k+1}}) & \dots & w_n^{n-1}(1-e^{w_n}) & -\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}w_p^{n-1}[e^{-w_p\xi}+e^{w_p(1-\xi)}]\frac{\widetilde{W}_{1p}}{\widetilde{W}} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+k}\frac{\prod_{j=1}^{n}(1-e^{w_j})}{1-e^{w_k}}\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & -\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}[e^{-w_p\xi}+e^{w_p(1-\xi)}]\frac{\widetilde{W}_{1p}}{\widetilde{W}} \\ w_1 & \dots & w_{k-1} & w_{k+1} & \dots & w_n & -\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}w_p[e^{-w_p\xi}+e^{w_p(1-\xi)}]\frac{\widetilde{W}_{1p}}{\widetilde{W}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1^{n-1} & \dots & w_{k-1}^{n-1} & w_{k+1}^{n-1} & \dots & w_n^{n-1} & -\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}w_p^{n-1}[e^{-w_p\xi}+e^{w_p(1-\xi)}]\frac{\widetilde{W}_{1p}}{\widetilde{W}} \end{vmatrix}$$

ifadesini bulmuş oluruz. En son elde ettiğimiz ifadedeki determinantı sonuncu sütun elemanlarına göre açarsak

$$=(-1)^{1+k}\frac{\prod_{j=1}^{n}(1-e^{w_j})}{1-e^{w_k}}(-1)^{1+n}\left[-\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}(e^{-w_p\xi}+e^{w_p(1-\xi)})\frac{\widetilde{W}_{1p}}{\widetilde{W}}\right]\begin{vmatrix} w_1 & \dots & w_{k-1} & w_{k+1} & \dots & w_n \\ w_1^2 & \dots & w_{k-1}^2 & w_{k+1}^2 & \dots & w_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1^{n-1} & \dots & w_{k-1}^{n-1} & w_{k+1}^{n-1} & \dots & w_n^{n-1} \end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{1+k}\frac{\prod_{j=1}^{n}(1-e^{w_j})}{1-e^{w_k}}(-1)^{2+n}\left[-\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n} w_p(e^{-w_p\xi}+e^{w_p(1-\xi)})\frac{\widetilde{W}_{1p}}{\widetilde{W}}\right]\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ w_1^2 & \dots & w_{k-1}^2 & w_{k+1}^2 & \dots & w_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1^{n-1} & \dots & w_{k-1}^{n-1} & w_{k+1}^{n-1} & \dots & w_n^{n-1} \end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{1+k}\frac{\prod_{j=1}^{n}(1-e^{w_j})}{1-e^{w_k}}(-1)^{n+n}\left[-\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n} w_p^{n-1}(e^{-w_p\xi}+e^{w_p(1-\xi)})\frac{\widetilde{W}_{1p}}{\widetilde{W}}\right]\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ w_1 & \dots & w_{k-1} & w_{k+1} & \dots & w_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1^{n-2} & \dots & w_{k-1}^{n-2} & w_{k+1}^{n-2} & \dots & w_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

ve $\widetilde{W}_{qk}$ ile $\widetilde{W}$ determinantının (q,k) elemanının kofaktörünü göstererek son ifadeyi yeniden yazarsak;

$$H_{1k}(x,\xi,\lambda)=(-1)^n\frac{\prod_{j=1}^{n}(1-e^{w_j})}{1-e^{w_k}}\frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{n} w_p^{q-1}\,[e^{-w_p\xi}+e^{w_p(1-\xi)}]\,\frac{\widetilde{W}_{1p}}{\widetilde{W}}\widetilde{W}_{qk} \qquad \textbf{(V.3.11)}$$

elde edilir. **(V.3.11)**-i **(V.3.10)**-da yerine yazarsak;

$$H(x,\xi,\lambda)=\sum_{k=1}^{n} e^{w_k x}\left[(-1)^n\frac{\prod_{j=1}^{n}(1-e^{w_j})}{1-e^{w_k}}\frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{n} w_p^{q-1}\,[e^{-w_p\xi}+e^{w_p(1-\xi)}]\,\frac{\widetilde{W}_{1p}}{\widetilde{W}}\widetilde{W}_{qk}\right]+$$

$$+(-1)^n\frac{1}{2}\,\mathrm{Sgn}(x-\xi)\sum_{k=1}^{n} e^{w_k(x-\xi)}\widetilde{W}_{1k}\prod_{j=1}^{n}(1-e^{w_j})$$

$$=\frac{(-1)^n}{2}\prod_{j=1}^{n}(1-e^{w_j})\left\{\sum_{p,q,k=1}^{n}\frac{e^{w_k x}}{1-e^{w_k}}w_p^{q-1}\,[e^{-w_p\xi}+e^{w_p(1-\xi)}]\,\frac{\widetilde{W}_{1p}\widetilde{W}_{qk}}{\widetilde{W}}+\right.$$

$$+ \operatorname{Sgn}(x-\xi) \sum_{k=1}^{n} e^{w_k(x-\xi)} \widetilde{W}_{1k} \Bigg\} \qquad \textbf{(V.3.12)}$$

bulmuş oluruz. **(V.3.12)** ve **(V.3.5)** ifadelerini G(x,ξ,λ) da yerine yazarsak

$$G(x,\xi,\lambda) = \frac{1}{2}\Bigg\{ \sum_{p,q,k=1}^{n} \frac{e^{w_k x}}{1-e^{w_k}} w_p^{q-1} [e^{-w_p\xi} + e^{w_p(1-\xi)}] \frac{\widetilde{W}_{1p}\,\widetilde{W}_{qk}}{\widetilde{W}^2} +$$

$$+ \operatorname{Sgn}(x-\xi) \sum_{k=1}^{n} e^{w_k(x-\xi)} \frac{\widetilde{W}_{1k}}{\widetilde{W}} \Bigg\} \qquad \textbf{(V.3.13)}$$

Green fonksiyonu bulunmuş olur. **(V.3.13)** formülünden ve **Teorem IV.4.1.** gereğince **(V.3.3)** formülü elde edilir.

KAYNAKLAR

[1] BİRKHOFF, G.D.,On the Asymptotic Character of The Solution of The Certain Linear Differential Equations Containing Parameter– Trans. Amer. Math. Soc., 1908. 9. p. 219, 231.

[2] BİRKHOFF, G.D., Boundary Value and Expantion Problems of Ordinary Linear Differential Equations. Trans. Amer. Math. Soc. 1908, 9. p. 373–395.

[3] HACISALİHOĞLU, H.H, Lineer Cebir. Gazi Üniversitesi Fen–Edebiyat Fakültesi Yayınları, Mat. No. 2, Ankara, 1983.

[4] NAİMARK, M. A., Linear Differential Operators. Ungar, New York, 1967.

[5] ORUÇ, M. Adi Türevli Diferansiyel Denklemler Dersi. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi. Matematik 27, Ankara, 1976.

[6] SHKALIKOV, A.A., Boundary Value Problems For Ordinary Differential Equations With A Parameter in Boundary Conditions. Trudy Sem. İmeny I.G. Petrovskogo, 9 (1983), 190–229.

[7] TAMARKİN, J.D., About Certain General Problems of Theory of Ordinary Linear Differential Equations and About Expansions of Derivative Functions İnto Series, Petrograd, 1917.

[8] WILLIAM, F. BOYCE and RİCHARD C. Diprima., Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. Wiley, New York, 1969.

[9] YAKUBOV, S., Completeness of Root Functions of Regular Differental Operators. Afula Research Institute University of Haifa, Longman Scientific Technical, 1993.

ÖZGEÇMİŞ

1971 yılında Gümüşhane'de doğdu. İlk ve orta öğrenimini Gümüşhane'de tamamladıktan sonra 1989 yılında Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matametik Anabilim Dalı'na girdi ve 1993 yılında mezun oldu. 1994 yılında Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Fen Bilimleri Eğitimi Matematik Anabilim Dalı'nda Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı. Halen Araştırma Görevlisi olarak görevini sürdürmektedir. Evli ve bir çocuk babasıdır.