



**DOĞURUCU FONKSİYONLARIN BİR SINIFINI İÇEREN LİNEER
POZİTİF OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ**

Gözde YURTSEVER

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

TEMMUZ 2019

Gözde YURTSEVER tarafından hazırlanan “DOĞURUCU FONKSİYONLARIN BİR SINIFINI İÇEREN LİNEER POZİTİF OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Ogün DOĞRU

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Başkan: Prof. Dr. İsmet YILMAZ

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Özge DALMANOĞLU

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı, Başkent Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Tez Savunma Tarihi: 10/07/2019

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Gözde YURTSEVER

10/07/2019

DOĞURUCU FONKSİYONLARIN BİR SINIFINI İÇEREN LİNEER POZİTİF
OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Gözde YURTSEVER

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2019

ÖZET

Tezimiz dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde giriş kısmına yer verilmiştir. Sonraki bölümde pozitif lineer operatörler hakkında temel bilgilere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde doğurucu fonksiyonların belirli sınıfını içeren lineer pozitif operatörlere yer verilmiştir, yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Özgün olarak bu operatörlerin türevleri binom katsayıları ve bölünmüş farklarla ifade edilmiştir. Bu operatörler için Voronovskaya tipli bir teorem verilmiştir. Son bölümde sonuç kısmına yer verilmiştir.

Bilim Kodu : 20406

Anahtar Kelimeler : Lineer pozitif operatör, Korovkin teoremi, süreklilik modülü, Peetre-K fonksiyoneli, Lipschitz sınıfı.

Sayfa Adedi : 53

Danışman : Prof. Dr. Ogün DOĞRU

APPROXIMATION PROPERTIES OF LINEAR POSITIVE OPERATORS INCLUDING
GENERATING FUNCTIONS

(M. Sc. Thesis)

Gözde YURTSEVER

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

July 2019

ABSTRACT

Our thesis is composed of four parts. In the first part, the introduction part is given. In the second part, basic definition about positive linear operators is given. In the third chapter; on linear positive operators involving a certain class of generating functions are given and the approximation properties of these operators are examined. Specifically, the derivatives of these operators are obtained via binomial coefficients and divided differences. A Voronowskaja type theorem is also given for these operators. In the last chapter; results are given.

Science Code : 20406

Key Words : Linear positive operators, Korovkin theorem, modulus of continuity, Peetre-K functionel, Lipschitz class.

Page Number : 53

Supervisor : Prof. Dr. Ogün DOĞRU

TEŞEKKÜR

Çalışmamı yürütürken fikir ve önerileri ile titizlikle yol gösteren değerli hocam Prof. Dr. Oğün DOĞRU “Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü” ‘ya, her aşamada destek olan aileme saygı ve teşekkürlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. Lineer Pozitif Operatörler	3
2.2. Süreklilik Modülü.....	3
2.3. P.P. Korovkin Teoremi.....	7
2.4. Lipschitz Sınıfından Fonksiyonlar.....	10
3. DOĞURUCU FONKSİYONLARIN BİR SINIFINI İÇEREN LİNEER POZİTİF OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ.....	11
3.1. Doğurucu Fonksiyonlar	11
3.2. Doğurucu Fonksiyonların Bir Sınıfını İçeren Lineer Pozitif Operatörler.....	11
3.3. Doğurucu Fonksiyonların Bir Sınıfını İçeren Lineer Pozitif Operatörlerin Yaklaşım Özellikleri	14
3.4. Doğurucu Fonksiyonları Bir Sınıfını İçeren Lineer Pozitif Operatörlerin Yakınsama Hızı	19
3.5. L_n Operatörünün p-inci Basamaktan Genelleştirilmesi.....	25
3.6. L_n Operatörünün Diferensiyel Denklemlere Uygulanması	29
3.7. L_n Operatörünün m-inci Mertebeden Türevleri.....	30
3.8. L_n Operatörü İçin Voronovskaya Tipli Bir Teorem	38
4. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	49

Sayfa

KAYNAKLAR 51

ÖZGEÇMİŞ 53



SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler

Açıklamalar

$L_n(f; x)$	$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere bir operatör dizisi
$B_n(f; x)$	Bernstein polinom dizisi
$M_n(f; x)$	Meyer-Konig Zeller (MKZ) operatör dizisi
$S_n(f; x)$	Szasz-Mirakyan operatör dizisi
$S_n^*(f; x)$	Genelleştirilmiş Szasz-Mirakyan operatörü
$C[a, b]$	$[a, b]$ aralığında tanımlı ve sürekli fonksiyon uzayı
$C^2[a, b]$	$f, f', f'' \in C[a, b]$ olan fonksiyon uzayı
(f_n)	$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere fonksiyon dizisi
$f_n \xrightarrow{DY} f$	(f_n) ; f fonksiyonuna düzgün yakınsar.
$\omega(f; \delta_n)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü
$\ f\ _{C[a, b]}$	$x \in [a, b]$ için $\ f\ _{C[a, b]} = \max_{x \in [a, b]} f(x) $ ile tanımlı norm
$\ f\ _{C^2[a, b]}$	$\ f\ _{C^2[a, b]} = \ f\ _{C[a, b]} + \ f'\ _{C[a, b]} + \ f''\ _{C[a, b]}$ norm
$K(f, \delta)$	Peetre-K fonksiyoneli
$B(\alpha, r)$	Beta fonksiyonu
$Lip_M(\alpha)$	Lipschitz sınıfından fonksiyon

1. GİRİŞ

Bu tezde ilk olarak lineer pozitif operatörlerin tanımı ve özellikleri ele alınmıştır. Ayrıca diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanımlara yer verilecektir ve lineer pozitif operatörlerin önemi vurgulanacaktır. Süreklilik modülünün tanımı yapılacak ve özellikleri incelenecektir. Korovkin teoremi verilip ispatı yapılacaktır. Sonraki bölümlerde doğurucu fonksiyonların belirli bir sınıfını içeren lineer pozitif operatörler tanıtılacak ve yaklaşım özellikleri, yaklaşım hızları, diferensiyel özellikleri incelenecektir. Yaklaşım hızlarının incelenmesinde Peetre-K fonksiyoneli, süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfından fonksiyonlar kullanılacaktır. Doğru, Özarslan ve Taşdelen'in 2004 yılında yaptıkları çalışma incelenmiştir. Özgün olarak lineer pozitif operatörlerin türevleri binom katsayıları ve bölünmüş farklarla ifade edilmiştir. Bu operatör için Voronovskaya tipli bir teorem verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Çalışmanın bu bölümünde pozitif lineer operatörlerin tanımı ve özellikleri ele alınmıştır. Ayrıca daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanımlara da yer verilmiştir.

2.1. Lineer Pozitif Operatörler

2.1.1. Tanım

X ve Y iki fonksiyon uzayı olmak üzere $L: X \rightarrow Y$ dönüşümüne operatör denir. $L(h; x)$ ile L operatörünün bir h fonksiyonuna uygulanışı ve sonucunun da x değişkenine bağlı olduğu gösterilir [1].

2.1.2. Tanım

$\gamma, \beta \in \mathbb{R}$ ve X fonksiyon uzayı olmak üzere $f, g \in X$ için

$$L(\gamma f + \beta g; x) = \gamma L(f; x) + \beta L(g; x)$$

oluyorsa L operatörüne lineerdir, denir [1].

2.1.3. Tanım

$f \geq 0$ iken $L(f; x) \geq 0$ oluyorsa yani L operatörü pozitif değerli bir f fonksiyonunu yine pozitif değerli bir g fonksiyonuna dönüştürüyorsa L operatörü pozitifdir, denir [1].

2.1.4. Tanım

L operatörü hem lineer hem de pozitif operatör ise bu operatöre pozitif lineer operatör denir [1].

2.2. Süreklilik Modülü

h fonksiyonu $[a, b]$ de sürekli olmak üzere, $\forall \delta > 0$ için h fonksiyonunun süreklilik modülü,

$$\omega(h; \delta) = \max_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |t - x| \leq \delta}} |h(t) - h(x)|$$

şeklinde tanımlanır, $\omega(h, \delta)$ ile gösterilir [2].

Süreklilik modülü; L_n operatörlerinin h fonksiyonuna yakınsama hızını hesaplamaya yarar.

2.2.1. Lemma

Süreklilik modülü

- i. $\omega(h, \delta) \geq 0$
- ii. $\delta_2 \geq \delta_1$ ise $\omega(h, \delta_1) \leq \omega(h, \delta_2)$
- iii. $r \in \mathbb{N}$ için $\omega(h, r\delta) \leq r\omega(h, \delta)$
- iv. $\mu \in \mathbb{R}^+$ için $(1 + \mu)\omega(h, \delta) \geq \omega(h, \mu\delta)$
- v. $\lim_{\delta \rightarrow 0} (\omega(h, \delta)) = 0$
- vi. $|h(t) - h(x)| \leq \omega(h, |t - x|)$
- vii. $\left(1 + \frac{|t - x|}{\delta}\right) \omega(h, \delta) \geq |h(t) - h(x)|$

özelliklerini sağlar [2].

İspat

i) $|h(t) - h(x)| \geq 0$ olduğundan $\omega(h, \delta) \geq 0$ olacaktır.

ii) $\delta_2 > \delta_1$ için $\delta_2 \geq |t - x|$ bölgesinin $\delta_1 \geq |t - x|$ bölgesinden daha büyük olduğu açıktır.

Bölge büyüdüğüçe alınan maksimum değeri de büyüyeceğinden ispat açıktır.

iii) Süreklilik modülünün tanımından dolayı

$$\omega(h, r\delta) = \max_{\substack{|t-x| \leq r\delta \\ x, t \in [a, b]}} |h(t) - h(x)|$$

ve

$$|t - x| \leq r\delta$$

olduğundan

$$-r\delta \leq t - x \leq r\delta$$

$$x - r\delta \leq t \leq x + r\delta$$

dır ve $t = x + rk$ olarak seçilirse

$$x - r\delta \leq x + rk \leq x + r\delta$$

$$-r\delta \leq rk \leq r\delta$$

$$-\delta \leq k \leq \delta$$

$$|k| \leq \delta$$

olur ve

$$\omega(h; r\delta) = \max_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |k| \leq \delta}} |h(x + rk) - h(x)|$$

şeklinde yazılabilir. Diğer yandan

$$\max_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |k| \leq \delta}} |h(x + rk) - h(x)| = \max_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |k| \leq \delta}} \left| \sum_{n=0}^{r-1} [h(x + (1+n)h) - h(x + nh)] \right|$$

sağlanır. Eşitliğin sağ tarafına üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \max_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |k| \leq \delta}} |h(x + rk) - h(x)| &\leq \sum_{n=0}^{r-1} \max_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |k| \leq \delta}} |h(x + (1+n)k) - h(x + nk)| \\ &\leq \omega(h; \delta) + \omega(h; \delta) + \dots + \omega(h; \delta) \\ &= \omega(h; \delta)r \end{aligned}$$

elde edilir.

iv) $\mu \in \mathbb{R}^+$ sayısının tam kısmı $\llbracket \mu \rrbracket$ ile gösterilirse bu durumda

$$1 + \llbracket \mu \rrbracket > \mu > \llbracket \mu \rrbracket$$

eşitsizliği sağlanır. Şimdi bu eşitsizlik ve (ii) özelliğinde gösterilen süreklilik modülünün azalmayan olmasını kullanarak

$$\omega(h; (1 + \llbracket \mu \rrbracket)\delta) \geq \omega(h; \mu\delta)$$

yazabiliriz. μ pozitif olduğundan $\llbracket \mu \rrbracket$ ifadesi de pozitiftir. Bu eşitsizliğin sağ tarafına (iii) özelliğini uygularsak

$$\omega(h; \delta)(1 + \llbracket \mu \rrbracket) \geq \omega(h; (1 + \llbracket \mu \rrbracket)\delta)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

$\mu \in \mathbb{R}^+$ için $\llbracket \mu \rrbracket + 1 \leq 1 + \mu$

olduğundan

$$(1 + \mu)\omega(h; \delta) \geq \omega(h; (\llbracket \mu \rrbracket + 1)\delta)$$

olur. Dolayısıyla

$$(1 + \mu)\omega(h; \delta) \geq \omega(h; \mu\delta)$$

bulunmasıyla ispat tamamlanır.

v) $\delta \geq |t - x|$ eşitsizliğindeki $\delta \rightarrow 0^+$ olması $t \rightarrow x$ olduğunu gösterir. f sürekli olduğundan süreklilik tanımını kullanırsak $t \rightarrow x$ olduğundan $|h(t) - h(x)| \rightarrow 0$ olur. Bu da

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(h; \delta) = 0$$

anlamına gelir.

vi) $\omega(h; \delta)$ ifadesinde $\delta = |t - x|$ seçilirse

$$\omega(h; |t - x|) = \max_{t, x \in [a, b]} |h(t) - h(x)|$$

elde edilir ve bu durumda $|h(t) - h(x)|$ değerlerinin maksimumu $\omega(h; |t - x|)$ ya eşit olacağından $|h(t) - h(x)|$ ifadesi $\omega(h; |t - x|)$ değerinden küçük kalacaktır. Bu da istenilendir.

vii) (vi) özelliğinden

$$|h(t) - h(x)| \leq \omega(h; |t - x|) = \omega\left(h; \frac{|t - x|}{\delta} \delta\right)$$

yazabiliriz. Bu eşitsizlikte (iv) özelliğini kullanırsak

$$\left(1 + \frac{|t - x|}{\delta}\right) \omega(h; \delta) \geq |h(t) - h(x)|$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

2.3. P.P. Korovkin Teoremi

2.3.1. Tanım

Bir (f_n) fonksiyon dizisi f fonksiyonuna $C[a, b]$ normunda düzgün yakınsaksa $\forall x \in [a, b]$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x) - f(x)\|_{C[a, b]} = 0$$

dır. Bu da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

anlamına gelir.

Eğer (f_n) fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsaksa

$$f_n \xrightarrow{DY} f$$

ile gösterilir [1].

1953'te Rus matematikçi P.P. Korovkin tarafından ispatlanan aşağıdaki teorem pozitif lineer operatörlerin sürekli fonksiyonlara düzgün yakınsadıklarını göstermeye yarar.

2.3.2. Teorem

f fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli ve $\forall x \in \mathbb{R}$ için f fonksiyonu sınırlı yani $M_f \geq |f(x)|$ olsun. $L_n(f, x)$ pozitif lineer operatör dizisi $\forall x \in [a, b]$ için

$$i) \quad L_n(1, x) \xrightarrow{DY} 1$$

$$ii) \quad L_n(r, x) \xrightarrow{DY} x$$

$$iii) \quad L_n(r^2, x) \xrightarrow{DY} x^2$$

şartlarını sağlıyorsa bu durumda $[a, b]$ kapalı aralığında $L_n(f; x)$ operatörü f fonksiyonuna düzgün yakınsar [1,2].

İspat

$f \in C[a, b]$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$|r-x| \leq \delta \text{ iken } |f(r) - f(x)| < \varepsilon \quad (2.1)$$

sağlanır.

$|r-x| > \delta$ olması durumunda $|f(x)| \leq M_f$ eşitsizliği ve üçgen eşitsizliği kullanılırsa

$$|f(r) - f(x)| \leq |f(r)| + |f(x)| \leq 2M_f \quad (2.2)$$

yazılabilir. Diğer yandan

$$|r-x| \geq \delta \text{ iken } \frac{|r-x|}{\delta} \geq 1$$

olacağından

$$\frac{(r-x)^2}{\delta^2} \geq 1 \quad (2.3)$$

olup Eş. 2.2 ve Eş. 2.3 ifadelerinden dolayı

$$|f(r) - f(x)| \leq 2M_f \leq 2M_f \frac{(r-x)^2}{\delta^2} \quad (2.4)$$

yazılabilir. O halde Eş. 2.1 ve Eş. 2.4 ifadelerinden dolayı

olacağından $\forall x, r \in [a, b]$ için

$$|f(r) - f(x)| < 2M_f \frac{(r-x)^2}{\delta^2} + \varepsilon \quad (2.5)$$

dir. (L_n) operatör dizisi (i), (ii) ve (iii) koşullarını sağladığından

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f(r); x) - f(x)\|_{C[a,b]} = 0$$

eşitliğini de sağladığını gösterirsek teoremin ispatını tamamlamış oluruz. Lineerlikten

$$\begin{aligned} |L_n(f(r); x) - f(x)| &= |L_n(f(r); x) - f(x) - L_n(f(x); x) + L_n(f(x); x)| \\ &= |L_n((f(r) - f(x)); x) + f(x)(L_n(1; x) - 1)| \end{aligned}$$

olur. Üçgen eşitsizliğini kullanırsak

$$|L_n(f(r); x) - f(x)| \leq |f(x)L_n(1; x) - 1| + |L_n((f(r) - f(x)); x)|$$

şeklinde yazabiliriz.

Diğer yandan pozitif lineer operatörler monoton artan olduğundan ve

$$f(r) - f(x) \leq |f(r) - f(x)|$$

eşitsizliği sağlanacağından

$$|L_n((f(r) - f(x)); x)| \leq |L_n(|f(r) - f(x)|; x)|$$

dir. O halde

$$|L_n(f(r); x) - f(x)| \leq L_n(|f(r) - f(x)|; x) + |f(x)|L_n(1; x) - 1|$$

olduğu gösterilmiş olur.

$$M_f \geq |f(x)|$$

olduğundan

$$|L_n(f(r); x) - f(x)| \leq M_f |L_n(1; x) - 1| + L_n(|f(r) - f(x)|; x)$$

olur. (L_n) monoton ve artan olduğundan Eş. 2.5 ifadesinin kullanılmasıyla

$$|L_n(f(r); x) - f(x)| \leq M_f |L_n(1; x) - 1| + L_n\left(\varepsilon + 2M_f \frac{(r-x)^2}{\delta^2}; x\right) \quad (2.6)$$

olur. Diğer taraftan L_n operatörünün lineerlik özelliğinden

$$\begin{aligned} L_n\left(\varepsilon + 2M_f \frac{(r-x)^2}{\delta^2}; x\right) &= L_n(\varepsilon; x) + L_n\left(2M_f \frac{(r-x)^2}{\delta^2}; x\right) \\ &= \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M_f}{\delta^2} L_n(r^2 - 2xr + x^2; x) \\ &= \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M_f}{\delta^2} [L_n(r^2; x) - x^2 + 2x^2 - 2xL_n(r; x) + x^2 L_n(1; x) - x^2] \\ &= \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M_f}{\delta^2} [L_n(r^2; x) - x^2] \\ &\quad + 2x(x - L_n(r; x)) + x^2(L_n(1; x) - 1) \end{aligned}$$

yazabiliriz. Bulduğumuz bu ifadeyi Eş. 2.6 ifadesinde kullanırsak

$$\begin{aligned} |L_n(f(r); x) - f(x)| &\leq M_f |L_n(1; x) - 1| + \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M_f}{\delta^2} \left[(L_n(r^2; x) - x^2) \right. \\ &\quad \left. + 2x(x - L_n(r; x)) + x^2(L_n(1; x) - 1) \right] \end{aligned} \quad (2.7)$$

elde edilir. Eş. 2.7 ifadesinde (i), (ii) ve (iii) koşullarının kullanılmasıyla

$$|L_n(f(r); x) - f(x)| \leq \varepsilon_n$$

bulunur. Burada $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$

dır. O halde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{a \leq x \leq b} |L_n(f(r); x) - f(x)| = 0$$

olup böylece ispat tamamlanmış olur.

2.4. Lipschitz Sınıfından Fonksiyonlar

$f(x)$, I aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun.

$0 \leq \alpha$ olmak üzere her x_1 ve $x_2 \in I$ için

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M |x_1 - x_2|^\alpha \quad (2.8)$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $M > 0$ varsa f fonksiyonuna Lipschitz sınıfındandır denir ve $f \in Lip_M(\alpha)$ ile gösterilir. f fonksiyonu Lipschitz sınıfından ise bu aralıkta süreklidir.

$\alpha > 1$ için Lipschitz sınıfının elemanları sabit fonksiyonlardır. Dolayısıyla bu sınıftaki fonksiyonlar için $0 \leq \alpha \leq 1$ alacağız. Ayrıca

$$Lip_M(\alpha) \subset C(I)$$

dır [2].

3. DOĞURUCU FONKSİYONLARIN BİR SINIFINI İÇEREN LİNEER POZİTİF OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde O. Doğru, M. Özarslan, F. Taşdelen'in 2004 yılında yaptıkları çalışma incelenecektir ve doğurucu fonksiyonların bir sınıfını içeren pozitif lineer operatörlerin yaklaşım özellikleri incelenecektir. Bu operatörlerin yakınsama hızları Peetre K-fonksiyoneli, süreklilik modülü ve modifiye Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımıyla hesaplanmıştır. Bu operatörlerin p-inci basamaktan genelleştirilmesi ve yaklaşım özellikleri de verilecektir. Bu operatörlerin diferensiyel denklemlere uygulanması üzerinde durularak bir diferensiyel denklemin özel bir çözümünün bu operatör olduğu gösterilecektir. Ayrıca yapılan diğer çalışmalardan farklı olarak lineer operatörlerin m-inci mertebeden türevleri de hesaplanacaktır. Bu operatörler için Voronovskaya tipli bir teorem ifade edilecektir.

3.1. Doğurucu Fonksiyonlar

3.1.1. Tanım

$F(x, t)$ iki değişkenli fonksiyonunun değişkenlerinden birine göre

$$F(x; t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) t^n$$

şeklinde bir kuvvet serisine açılmış olması durumunda $F(x, t)$ fonksiyonuna $\{f_n(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ fonksiyon dizisi için doğurucu fonksiyon denir [3].

3.2. Doğurucu Fonksiyonların Bir Sınıfını İçeren Lineer Pozitif Operatörler

$x \in [0, 1)$ ve $t \in (-\infty, 0]$ olmak üzere

$$L_n(f; x) = \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{a_n(v)}\right) C_v^{(n)}(t) x^v \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlı olsun.

Burada $\{F_n(x; t)\}_{n \in \mathbb{N}}$

$$F_n(x; t) = \sum_{v=0}^{\infty} C_v^{(n)}(t) x^v \quad (3.2)$$

ile tanımlı olup

$$\{C_v^{(n)}(t)\}, (v \in \mathbb{N}_0)$$

fonksiyon dizisi için doğurucu fonksiyondur.

$$\forall t \in (-\infty, 0] \text{ için } C_v^{(n)}(t) \geq 0$$

olsun. Ayrıca

1. $p(x).F_n(x;t) = F_{n+1}(x;t)$, $p(x) < M < \infty$, $x \in [0,1)$
2. $v C_v^{(n)}(t) = a_n(v) C_{(v-1)}^{(n)}(t) - A t C_{(v-1)}^{(n+1)}(t)$, $A \in [0, a]$, $v \in \mathbb{Z}^-$ için $C_v^{(n)}(t) = 0$
3. $a_n(1+v) \geq a_n(v) \geq \max\{n, v\}$

koşullarının sağlandığını kabul edersek Eş. 3.1 ile tanımlı L_n operatörü bazı özel seçimler altında bilinen bazı operatörlere dönüşmektedir.

$L_v^{(n)}(t)$ Laguerre polinomu olmak üzere eğer

$$a_n(v) = n + v, \quad C_v^{(n)}(t) = L_v^{(n)}(t) \text{ ve } F_n(x;t) = \frac{1}{(1-x)^{n+1}} \exp\left(\frac{tx}{x-1}\right)$$

seçimi yapılırsa

$$P_n(f; x) = \frac{1}{(1-x)^{-n-1}} \exp\left(\frac{tx}{1-x}\right) \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{v+n}\right) L_v^{(n)}(t) x^v$$

elde edilir. Burada

$$\frac{1}{(1-x)^{n+1}} \exp\left(\frac{tx}{x-1}\right) = \sum_{v=0}^{\infty} L_v^{(n)}(t) x^v$$

olduğundan

$$(1-x)^{-n-1} \exp\left(\frac{tx}{x-1}\right)$$

$L_v^{(n)}(t)$ ile tanımlanan Laguerre polinomlarının doğurucu fonksiyonudur.

$$L_v^{(n)}(t) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(v+n)!}{(v-r)!(n+r)!r!} t^r$$

olarak tanımlanan ifadede $t=0$ alınırsa

$$L_v^{(n)}(0) = (-1)^0 \frac{(v+n)!}{(v-0)!(n+0)!0!} t^0 + 0 = \frac{(n+v)!}{v!n!}$$

olur ve

$$L_v^{(n)}(0) = \binom{n+v}{v}$$

bulunur.

$P_n(f; x)$ ifadesinde $t=0$ alınırsa Cheney ve Sharma tarafından 1964 yılında verilen ve Bernstein kuvvet serileri olarak bilinen

$$M_n(f; x) = (1-x)^{n+1} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{n+v}\right) \binom{n+v}{v} x^v$$

operatörleri elde edilir [4].

$$a_n(v) = 1+n+v, \quad C_v^{(n)}(t) = L_v^{(n)}(t) \quad \text{ve} \quad F_n(x; t) = (1-x)^{-n-1} \exp\left(\frac{tx}{x-1}\right)$$

seçilirse 1989'da Khan tarafından tanımlanan

$$Z_n(f; x) = (1-x)^{n+1} \exp\left(\frac{tx}{1-x}\right) \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{1+n+v}\right) L_v^{(n)}(t) x^v$$

elde edilir [5].

$Z_n(f; x)$ ifadesinde de $t=0$ alınırsa

$$Z_n(f; x) = (1-x)^{n+1} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{1+n+v}\right) \binom{n+v}{v} x^v$$

ifadesi elde edilir ki; bu da Meyer-König ve Zeller operatörüdür [6].

$$F_n(x; t) = e^{nx}, \quad a_n(v) = n \quad \text{ve} \quad C_v^{(n)}(t) = \frac{n^v}{v!}$$

seçilimi yapıldığında ise

$$S_n(f; x) = e^{-nx} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{n}\right) \frac{(nx)^v}{v!}$$

Szasz operatörü elde edilir [7].

$$F_n(x; t) = e^{h(n)x}, \quad a_n(v) = h(n) \quad \text{ve} \quad C_v^{(n)}(t) = \frac{(h(n))^v}{v!}$$

seçimi yapıldığında

$$S_n^*(f; x) = e^{-h(n)x} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{h(n)}\right) \frac{(h(n)x)^v}{v!}$$

elde edilir [8].

3.3. Doğurucu Fonksiyonların Bir Sınıfını İçeren Lineer Pozitif Operatörlerin Yaklaşım Özellikleri

$$x \in [0,1), t \in (-\infty, 0] \text{ ve } b \in (0,1)$$

olsun. L_n operatörünün yakınsaklığını içeren aşağıdaki teoremi verelim.

3.3.1. Teorem

f fonksiyonu $[0,b]$ kapalı aralığında sürekli, $n \rightarrow \infty$ için $\frac{|t|}{n} \rightarrow 0$ ise Eş. 3.1 ile tanımlanan

$L_n(f; x)$ operatörü $f(x)$ fonksiyonuna $[0,b]$ aralığında düzgün yakınsaktır, denir [3].

İspat

Bu teoremin ispatı için öncelikle L_n operatörünün önce pozitif lineer bir operatör olduğunu gösterip sonra da Korovkin teoreminin koşullarının sağladığını gösterirsek ispatı tamamlamış oluruz.

$$L_n(f; x) = \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{a_n(v)}\right) C_v^{(n)}(t) x^v$$

olduğundan $\forall \gamma, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} L_n(\gamma f + \beta g; x) &= \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} (\gamma f + \beta g)\left(\frac{v}{a_n(v)}\right) C_v^{(n)}(t) x^v \\ &= \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left[\gamma f\left(\frac{v}{a_n(v)}\right) + \beta g\left(\frac{v}{a_n(v)}\right) \right] C_v^{(n)}(t) x^v \\ &= \frac{1}{F_n(x; t)} \gamma \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{a_n(v)}\right) C_v^{(n)}(t) x^v + \frac{1}{F_n(x; t)} \beta \sum_{v=0}^{\infty} g\left(\frac{v}{a_n(v)}\right) C_v^{(n)}(t) x^v \\ &= \gamma L_n(f; x) + \beta L_n(g; x) \end{aligned}$$

sağlanır. Bu ise $L_n(f; x)$ operatörünün lineer olduğunu gösterir.

$x \in [0,1)$, $C_v^{(n)}(t) \geq 0$, $t \in (-\infty, 0]$ ve $F_n(x; t)$ Eş. 3.2 ile tanımlı olduğundan

$$0 \leq F_n(x; t)$$

dir. Bu ifadeler ve Eş. 3.1 ile verilen $L_n(f; x)$ tanımıyla beraber düşünülürse $0 \leq f$ için

$0 \leq L_n(f; x)$ olduğunu yani $L_n(f; x)$ operatörünün pozitif olduğunu gösterir.

Şimdi, Korovkin teoreminin gerçekleştiğini göstermek için Eş. 3.1 ifadesinde

$$f(r) = 1$$

seçelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} L_n(1; x) &= \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} C_v^{(n)}(t) x^v \\ &= F_n(x; t) \frac{1}{F_n(x; t)} = 1 \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$L_n(1; x) \xrightarrow{DY} 1$$

sağlanır. Şimdi de

$$f(r) = r$$

seçelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} L_n(r; x) &= \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{v}{a_n(v)} \right) C_v^{(n)}(t) x^v \\ &= \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{v}{a_n(v)} C_v^{(n)}(t) x^v \end{aligned}$$

Burada (2) özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} L_n(r; x) &= \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=1}^{\infty} \left(a_n(v) C_{v-1}^{(n)}(t) - At C_{v-1}^{(n+1)}(t) \right) \frac{x^v}{a_n(v)} \\ &= \frac{x}{F_n(x; t)} \sum_{v=1}^{\infty} \left\{ C_{v-1}^{(n)}(t) - \frac{At}{a_n(v)} C_{v-1}^{(n+1)}(t) \right\} x^{v-1} \\ &= \frac{x}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left\{ C_v^{(n)}(t) - \frac{At}{a_n(v+1)} C_v^{(n+1)}(t) \right\} x^v \end{aligned} \tag{3.3}$$

olur ki buradan

$$\frac{Atx}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{a_n(1+v)} C_v^{(n+1)}(t) x^v \leq 0$$

olur, yani

$$\begin{aligned} L_n(r; x) &\geq \frac{x}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} C_v^{(n)}(t) x^v \\ &= x \end{aligned} \tag{3.4}$$

bulunur.

(3) özelliğini kullanılırsak

$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{a_n(v+1)}$$

bulunur. Dolayısıyla Eş. 3.3 ifadesinden dolayı

$$\begin{aligned} L_n(r; x) &= \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=1}^{\infty} C_{v-1}^{(n)}(t) x^v - \frac{At}{F_n(x; t)} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{C_{v-1}^{(n+1)}(t) x^v}{a_n(v)} \\ &= \frac{x}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} C_v^{(n)}(t) x^v - \frac{Atx}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{C_v^{(n+1)}(t) x^v}{a_n(v+1)} \end{aligned}$$

dır. Burada (1) özelliğini kullanırsak

$$\begin{aligned} L_n(r; x) &\leq x - \frac{Atx}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{C_v^{(n+1)}(t) x^v}{a_n(v+1)} \\ &= x - \frac{Atxp(x)}{n} \frac{1}{F_{n+1}(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} C_v^{(n+1)}(t) x^v \\ &= x - \frac{Atxp(x)}{n} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$L_n(r; x) \leq x - \frac{Atxp(x)}{n}$$

elde edilmiş olur. Bu eşitsizlik ve Eş. 3.4 ifadesinden dolayı

$$x \leq L_n(r; x) \leq x - \frac{Atxp(x)}{n}$$

yani

$$0 \leq L_n(r; x) - x \leq -\frac{Atxp(x)}{n}$$

dolayısıyla da

$$|L_n(r; x) - x| \leq -\frac{Atxp(x)}{n} \quad (3.5)$$

ifadesi elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki yanının $x \in [0, b]$ üzerinden maksimumu alınır

$$\|L_n(r; x) - x\|_{C[0, b]} \leq \frac{a |t| bM}{n} \quad (3.6)$$

olur. Buradan da $x \in [0, b]$ için

$$L_n(r; x) \xrightarrow{DY} x$$

dir. Şimdi de

$$f(r) = r^2$$

seçersek

$$L_n(r^2; x) = \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{v}{a_n(v)} \right)^2 C_v^{(n)}(t) x^v$$

olur. (2) özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \left(\frac{v}{a_n(v)} \right)^2 C_v^{(n)}(t) &= \frac{v}{(a_n(v))^2} (a_n(v) C_{v-1}^{(n)}(t) - At C_{v-1}^{(n+1)}(t)) \\ &= \frac{v C_{v-1}^{(n)}(t)}{a_n(v)} - \frac{At}{(a_n(v))^2} v C_{v-1}^{(n+1)}(t) \\ &= \frac{(v-1+1) C_{v-1}^{(n)}(t)}{a_n(v)} - \frac{At}{(a_n(v))^2} v C_{v-1}^{(n+1)}(t) \\ &= \frac{(v-1) C_{v-1}^{(n)}(t)}{a_n(v)} + \frac{C_{v-1}^{(n)}(t)}{a_n(v)} - \frac{At}{(a_n(v))^2} v C_{v-1}^{(n+1)}(t) \\ &= \frac{a_n(v-1) C_{v-2}^{(n)}(t)}{a_n(v)} - \frac{At C_{v-2}^{(n+1)}(t)}{a_n(v)} + \frac{C_{v-1}^{(n)}(t)}{a_n(v)} - \frac{At}{(a_n(v))^2} v C_{v-1}^{(n+1)}(t) \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \left| L_n(r^2; x) - x^2 \right| &\leq \left| \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=2}^{\infty} \frac{a_n(v-1)}{a_n(v)} C_{v-2}^{(n)}(t) x^v - x^2 \right| + \left| \frac{At}{F_n(x; t)} \sum_{v=2}^{\infty} \frac{1}{a_n(v)} C_{v-2}^{(n+1)}(t) x^v \right| \\ &\quad + \left| \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{C_{v-1}^{(n)}(t) x^v}{a_n(v)} \right| + \frac{At}{F_n(x; t)} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{v C_{v-1}^{(n+1)}(t) x^v}{(a_n(v))^2} \end{aligned} \quad (3.7)$$

olup (3) özelliğinden

$$\frac{v+1}{(a_n(v+1))^2} \leq \frac{v+1}{n^2} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

bulunur.

Eş. 3.7 ifadesindeki dört ayrı parçayı tek tek hesaplırsak Eş. 3.2 ifadesinden dolayı

$$\begin{aligned} \left| \frac{At}{F_n(x; t)} \sum_{v=2}^{\infty} \frac{1}{a_n(v)} C_{v-2}^{(n+1)}(t) x^v \right| &\leq \frac{a|t|x}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{v+1}{(a_n(v+1))^2} C_v^{(n+1)}(t) x^v \\ &\leq \frac{p(x)}{F_{n+1}(x; t)} \frac{a|t|x}{n} \sum_{v=0}^{\infty} C_v^{(n+1)}(t) x^v \\ &= \frac{a|t|x p(x)}{n} \end{aligned} \quad (3.8)$$

olur. Diğer yandan (3) özelliğinden

$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{a_n(v+2)}$$

eşitsizliği Eş. 3.2 ifadesi ile birlikte düşünülürse

$$\begin{aligned} \left| \frac{At}{F_n(x;t)} \sum_{v=2}^{\infty} \frac{1}{a_n(v)} C_{v-2}^{(n+1)}(t) x^v \right| &\leq \frac{a|t|x^2}{F_n(x;t)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{a_n(v+2)} C_v^{(n+1)}(t) x^v \\ &\leq \frac{a|t|x^2}{nF_n(x;t)} \sum_{v=0}^{\infty} C_v^{(n+1)}(t) x^v \end{aligned}$$

olur. (1) özelliğinden

$$\begin{aligned} \left| \frac{At}{F_n(x;t)} \sum_{v=2}^{\infty} \frac{1}{a_n(v)} C_{v-2}^{(n+1)}(t) x^v \right| &\leq \frac{a|t|x^2 p(x)}{n} \frac{1}{F_{n+1}(x;t)} \sum_{v=0}^{\infty} C_v^{(n+1)}(t) x^v \\ &= \frac{a|t|x^2 p(x)}{n} \end{aligned} \quad (3.9)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{a_n(v+1)}$$

ifadesi Eş. 3.2 ile birlikte düşünülürse

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{F_n(x;t)} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{a_n(v)} C_{v-1}^{(n)}(t) x^v \right| &\leq \frac{x}{F_n(x;t)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{a_n(v+1)} C_v^{(n)}(t) x^v \\ &\leq \frac{x}{n F_n(x;t)} \sum_{v=0}^{\infty} C_v^{(n)}(t) x^v \\ &= \frac{x}{n} \end{aligned} \quad (3.10)$$

bulunur ve

$$a_n(v) \geq a_n(v-1)$$

olduğu (3) özelliğinden açıktır. Bundan dolayı

$$\begin{aligned} \frac{1}{F_n(x;t)} \sum_{v=2}^{\infty} \frac{a_n(v-1)}{a_n(v)} C_{v-2}^{(n)}(t) x^v - x^2 &\leq \frac{x^2}{F_n(x;t)} \sum_{v=2}^{\infty} C_{v-2}^{(n)}(t) x^{v-2} - x^2 \\ &= \frac{x^2}{F_n(x;t)} \sum_{v=0}^{\infty} C_v^{(n)}(t) x^v - x^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

elde edilir. Diğer yandan

$$r^2 - x^2 = (r-x)^2 + 2xr - 2x^2$$

olacağından

$$L_n(r^2; x) - x^2(L_n(1; x)) = L_n((r-x)^2; x) + 2x L_n((r-x); x)$$

ifadesini yazabiliriz.

Eş. 3.4 ifadesinden, $L_n(1; x) = 1$ olduğundan ve L_n ifadesinin pozitifliğinden dolayı

$$L_n(r^2; x) - x^2 \geq 0$$

yazılır. Ayrıca Eş. 3.8, Eş. 3.9, Eş. 3.10 ve Eş. 3.11 ifadeleri Eş. 3.7 ifadesinde yerine yazılırsa

$$L_n(r^2; x) - x^2 \leq \frac{a|t|xp(x)}{n} + \frac{a|t|x^2p(x)}{n} + \frac{x}{n} + 0$$

elde edilir. Bu ifadede her iki yanın $x \in [0, b]$ üzerinden maksimumu alınır ve (1) özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \|L_n(r^2; x) - x^2\|_{C[0, b]} &\leq \frac{a|t|bM}{n} + \frac{a|t|b^2M}{n} + \frac{b}{n} \\ &= \frac{1}{n}(b + a|t|bM(1+b)) \end{aligned} \quad (3.12)$$

elde edilir ve teoremin hipotezinden dolayı

$$L_n(r^2; x) \xrightarrow{DY} x^2$$

elde edilir. Dolayısıyla, Korovkin teoreminin koşullarının sağlandığını göstermiş oluruz.

Yani L_n operatörü f fonksiyonuna $x \in [0, b]$ aralığında düzgün yakınsaktır.

3.4. Doğurucu Fonksiyonların Bir Sınıfını İçeren Lineer Pozitif Operatörlerin Yakınsama Hızı

Bu bölümde L_n operatörlerinin f fonksiyonuna yakınsama hızı ikinci bölümde tanımlı verilen süreklilik modülü, Lipschitz sınıfından fonksiyonlar ve Peetre K-fonksiyoneli yardımıyla hesaplanacaktır.

3.4.1. Teorem

L_n operatörü Eş. 3.1 ile tanımlı operatör ve f fonksiyonları $[0, b]$ aralığında sürekli olmak üzere

$$\delta_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ ve } B = \max\{b, bMa|t|, b^2Ma|t|\}$$

olduğunda

$$\|L_n(f; x) - f(x)\|_{C[0,b]} \leq (1 + \sqrt{3B}) \omega(f; \delta_n)$$

dir [3].

İspat

f fonksiyonları $[0, b]$ aralığında sürekli olsun. L_n operatörünün monoton ve lineer olmasından dolayı

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq L_n(|f(r) - f(x)|; x)$$

dır. (2.2.1. Lemma, vii) den dolayı

$$L_n(|f(r) - f(x)|; x) \leq L_n\left(\omega(f; \delta_n) \cdot \left(1 + \frac{|r-x|}{\delta_n}\right); x\right)$$

yazılabilir. L_n operatörünün lineerlik özelliğinden dolayı

$$\begin{aligned} |L_n(f; x) - f(x)| &\leq \omega(f; \delta_n) L_n\left(\left(1 + \frac{|r-x|}{\delta_n}\right); x\right) \\ &= \omega(f; \delta_n) \left[1 + \frac{1}{\delta_n} \left(\frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left|\frac{v}{a_n(v)} - x\right| C_v^{(n)}(t) x^v\right)\right] \end{aligned}$$

olur. Cauchy – Bunyakowsky - Schwarz eşitsizliğinden dolayı

$$\sum_{v=0}^{\infty} \left|\frac{v}{a_n(v)} - x\right| \sqrt{\frac{C_v^{(n)}(t) x^v}{F_n(x; t)}} \sqrt{\frac{C_v^{(n)}(t) x^v}{F_n(x; t)}} \leq \left[\frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{v}{a_n(v)} - x\right)^2 C_v^{(n)}(t) x^v\right]^{\frac{1}{2}} (L_n(1; x))^{\frac{1}{2}}$$

olup, $L_n(1; x) = 1$ olduğundan dolayı

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq \omega(f; \delta_n) \left\{1 + \frac{1}{\delta_n} \left(\frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{v}{a_n(v)} - x\right)^2 C_v^{(n)}(t) x^v\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

olur.

$$A_n(x; t) = \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{v}{a_n(v)} - x\right)^2 C_v^{(n)}(t) x^v \quad (3.13)$$

olarak belirlenip eşitsizliğin her iki yanının $x \in [0, b]$ üzerinden maksimumu alınırsa

$$\|L_n(f; x) - f(x)\|_{C[0,b]} \leq \omega(f; \delta_n) \left\{ 1 + \frac{1}{\delta_n} \left(\max_{x \in [0,b]} A_n(x; t) \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (3.14)$$

bulunur. $\forall x \in [0, b]$ için Eş. 3.13 ifadesinde

$$\begin{aligned} A_n(x; t) &= \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left[\left(\frac{v}{a_n(v)} \right)^2 - 2x \left(\frac{v}{a_n(v)} \right) + x^2 \right] C_v^{(n)}(t) x^v \\ &= L_n(r^2; x) - 2xL_n(r; x) + x^2L_n(1; x) + x^2 - x^2 \\ &= L_n(r^2; x) - x^2 - 2x(L_n(r; x) - x) \\ &\leq |L_n(r^2; x) - x^2| + 2x|L_n(r; x) - x| \end{aligned}$$

dir. Eş. 3.6 ve Eş. 3.12 ifadelerinden

$$\begin{aligned} \max_{x \in [0,b]} A_n(x; t) &\leq \|L_n(r^2; x) - x^2\|_{C[0,b]} + 2b\|L_n(r; x) - x\|_{C[0,b]} \\ &\leq \frac{1}{n}(b + a|t|bM(1+b)) + \frac{2a|t|b^2M}{n} \\ &= \frac{1}{n}(b + a|t|bM(1+3b)) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$B = \max\{b, bMa|t|, b^2Ma|t|\}$$

olmak üzere

$$\max_{x \in [0,b]} A_n(x; t) \leq 3B\delta_n^2 \quad (3.15)$$

dır. Eş. 3.15 ifadesi Eş. 3.14 ifadesinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} \|L_n(f; x) - f(x)\|_{C[0,b]} &\leq \left\{ 1 + \frac{1}{\delta_n} \sqrt{3B\delta_n^2} \right\} \omega(f; \delta_n) \\ &= \omega(f; \delta_n) \{1 + \sqrt{3B}\} \end{aligned}$$

elde edilmesiyle ispat tamamlanır.

3.4.2. Tanım

f, f', f'' fonksiyonları $[0, b]$ aralığında sürekli olsun.

$C^2[0, b]$ uzayındaki norm

$$\|f\|_{C^2[0,b]} := \|f''\|_{C[0,b]} + \|f'\|_{C[0,b]} + \|f\|_{C[0,b]}$$

olmak üzere Peetre K- fonksiyoneli

$$K(f; \delta_n) = \inf_{g \in C^2[0,b]} \left\{ \|f - g\|_{C[0,b]} + \delta_n \|g\|_{C^2[0,b]} \right\}$$

ile tanımlanır [9].

$L_n(f; x)$ operatörünün f fonksiyonuna yaklaşma hızını Peetre K - fonksiyoneli yardımıyla hesaplayalım.

3.4.3. Teorem

L_n operatörü Eş. 3.1 ile tanımlanan operatör ve f fonksiyonu $[0, b]$ kapalı aralığında sürekli ise

$$\delta_n = \frac{b+a|t|bM(3+3b)}{4n}$$

olarak belirlenirse

$$2K(f; \delta_n) \geq \|L_n(f; x) - f(x)\|_{C[0,b]}$$

dir [3].

İspat

$g \in C^2[0, b]$ olsun. $g(r)$ fonksiyonu $x = r$ noktasında Taylor serisine açılırsa

$$g(r) = g(x) + \frac{g'(x)}{1!}(r-x) + \frac{g''(x)}{2!}(r-x)^2 + 0$$

olur. Buradan

$$g(r) - g(x) = g'(x)(r-x) + \frac{g''(x)}{2}(r-x)^2 + 0$$

bulunur. Eşitliğin her iki tarafına L_n operatörü uygulanırsa

$$|L_n(g; x) - g(x)| = |g'(x)| |L_n(r-x; x)| + \frac{1}{2} |g''(x)| |L_n(r-x)^2; x| \quad (3.16)$$

olur, Eş. 3.6 ifadesinden dolayı

$$|L_n(r-x; x)| \leq \frac{bMa|t|}{n}$$

dır ve

$$\begin{aligned} |L_n((r-x)^2; x)| &= |L_n(r^2 - 2xr + x^2 - 2x^2 + 2x^2; x)| \\ &= |L_n(r^2 - x^2; x) - 2xL_n(r-x; x)| \\ &\leq |L_n(r^2; x) - x^2| + 2b|L_n(r; x) - x| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{n} (b + a|t|bM(1+b)) + \frac{2a|t|b^2M}{n} \\
&= \frac{1}{n} (b + a|t|bM(1+3b))
\end{aligned}$$

olur. Eş. 3.16 ifadesinden dolayı

$$\begin{aligned}
\|L_n(g; x) - g(x)\|_{C[0,b]} &\leq \frac{a|t|bM}{n} \|g'\|_{C[0,b]} + \frac{1}{2n} (b + a|t|bM(1+3b)) \|g''\|_{C[0,b]} \\
&\leq \frac{1}{2n} (b + a|t|bM(3+3b)) \|g\|_{C^2[0,b]}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

elde edilir. Diğer bir taraftan L_n operatörünün lineerliği ve üçgen eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
|L_n(f; x) - f(x)| &= |L_n(f; x) - L_n(g; x) + L_n(g; x) - g(x) + g(x) - f(x)| \\
&\leq |L_n(f - g; x)| + |g(x) - f(x)| + |L_n(g; x) - g(x)|
\end{aligned} \tag{3.18}$$

yazılabilir. L_n operatörünün monoton artan olduğu kullanılırsa

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq L_n(|f - g|; x) + |g(x) - f(x)| + |L_n(g; x) - g(x)|$$

elde edilir. $x \in [0, b]$ üzerinden her iki yanın maksimumu alınır

$$\begin{aligned}
\max_{x \in [0,b]} |L_n(f; x) - f(x)| &\leq \max_{x \in [0,b]} (|f - g| L_n(1; x) + |g(x) - f(x)| + |L_n(g; x) - g(x)|) \\
&= \|f - g\|_{C[0,b]} L_n(1; x) + \|f - g\|_{C[0,b]} + \|L_n(g; x) - g(x)\|_{C[0,b]}
\end{aligned}$$

bulunur. $L_n(1; x) = 1$ olduğundan

$$\|L_n(f; x) - f(x)\|_{C[0,b]} = \|L_n(g; x) - g(x)\|_{C[0,b]} + 2\|f - g\|_{C[0,b]} \tag{3.19}$$

elde edilir. Eş. 3.19 ifadesinde Eş. 3.17 ifadesi kullanılırsa

$$\|L_n(f; x) - f(x)\|_{C[0,b]} \leq 2 \left[\|f - g\|_{C[0,b]} + \frac{b + a|t|bM(3+3b)}{4n} \|g\|_{C^2[0,b]} \right] \tag{3.20}$$

olur. Teoremin hipotezinden dolayı

$$\delta_n = \frac{b + a|t|bM(3+3b)}{4n}$$

olduğundan ve $g \in C^2[0, b]$ üzerinden her iki yanın infimumunu alırsak

$$\|L_n(f; x) - f(x)\|_{C[0,b]} \leq 2K(f, \delta_n)$$

elde edilir ki bu da ispat tamamlanır.

3.4.4. Teorem

$L_n(f; x)$ operatörü Eş. 3.1 ile tanımlanmış operatör ve

$$\delta_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad B = \max\{b, bMa|t|, b^2Ma|t|\}$$

olmak üzere, $\forall f \in Lip_M(\alpha)$ için

$$\|L_n(f; x) - f(x)\|_{C[0,b]} \leq M(3B)^{\frac{\alpha}{2}} \delta_n^\alpha$$

olur [3].

İspat

$f \in Lip_M(\alpha)$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun

Eş. 2.8 ifadesi ve L_n operatörünün monotonluk ve lineerlik özelliklerini kullanırsak

$$\begin{aligned} |L_n(f; x) - f(x)| &\leq L_n(|f(r) - f(x)|; x) \\ &\leq \frac{M}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left| \frac{v}{a_n(v)} - x \right|^\alpha C_v^{(n)}(t) x^v \end{aligned}$$

olur. Daha sonra

$$p = \frac{2}{\alpha} \text{ ve } q = \frac{2}{2-\alpha}$$

seçimleri ile Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} |L_n(f; x) - f(x)| &\leq M \sum_{v=0}^{\infty} \left| \frac{v}{a_n(v)} - x \right|^\alpha \left(\frac{1}{F_n(x; t)} C_v^{(n)}(t) x^v \right)^{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{1}{F_n(x; t)} C_v^{(n)}(t) x^v \right)^{\frac{2-\alpha}{2}} \\ &\leq M \left[\frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{v}{a_n(v)} - x \right)^2 C_v^{(n)}(t) x^v \right]^{\frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$A_n(x; t) = \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{v}{a_n(v)} - x \right)^2 C_v^{(n)}(t) x^v$$

olarak seçilirse

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq (A_n(x; t))^{\frac{\alpha}{2}} M \quad (3.21)$$

olur. Eş. 3.21 ifadesinin her iki tarafının $x \in [0, b]$ üzerinde maksimumunu alırsak ve elde ettiğimiz ifadede Eş. 3.15 ifadesini kullanırsak

$$\begin{aligned}\|L_n(f; x) - f(x)\|_{C[0,b]} &\leq (3B\delta_n^2)^{\frac{\alpha}{2}} M \\ &= M(3B)^{\frac{\alpha}{2}} \delta_n^\alpha\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

3.5. L_n Operatörünün p-inci Basamaktan Genelleştirilmesi

$f \in C^p[0, b]$ ve $p = 0, 1, 2, \dots$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere aşağıda tanımlanan operatöre L_n operatörünün p-inci basamaktan genelleştirilmesi denir.

$$L_n^{[p]}(f, x) = \frac{1}{F_n(x, t)} \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{i=0}^p f^{(i)}\left(\frac{v}{a_n(v)}\right) \frac{\left(x - \frac{v}{a_n(v)}\right)^i}{i!} C_v^{(n)}(t) x^v \quad (3.22)$$

dir. Bu ifadede $p=0$ alınırsa Eş. 3.1 ile tanımlanan operatöre dönüşür [3].

3.5.1. Teorem

$L_n^{[p]}$ Eş. 3.22 ile tanımlanmak üzere,

$$f^{(p)} \in Lip_M(\alpha) \text{ ve } \forall f \in C^p[0, b]$$

ise, o zaman

$$\|L_n^{[p]}(f; x) - f(x)\|_{C[0,b]} \leq B(\alpha, p) \frac{\alpha}{\alpha + p} \frac{M}{(p-1)!} \|L_n(|s-x|^{\alpha+p}; x)\|_{C[0,b]} \quad (3.23)$$

olur [5]. $\alpha > 0$ ve $p > 0$ değerleri için

$$B(\alpha, p) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{p-1} dt$$

integrali ile tanımlanan ifade Beta fonksiyonudur .

İspat

Eş. 3.22 ifadesinden

$$f(x) - L_n^{[p]}(f, x) = \frac{1}{F_n(x, t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left[f(x) - \sum_{i=0}^p f^{(i)}\left(\frac{v}{a_n(v)}\right) \frac{\left(x - \frac{v}{a_n(v)}\right)^i}{i!} \right] C_v^{(n)}(t) x^v \quad (3.24)$$

dir. Taylor formülünden

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!} (x-\alpha)^k + \frac{(x-\alpha)^p}{(p-1)!} \int_0^1 (1-z)^{(p-1)} \left[f^{(p)}(\alpha + z(x-\alpha)) - f^{(p)}(\alpha) \right] dz \quad (3.25)$$

olur. Burada

$$\alpha = \frac{v}{a_n(v)}$$

seçimi yapılırsa

$$Q = f(x) - \sum_{i=0}^p f^{(i)}\left(\frac{v}{a_n(v)}\right) \frac{\left(x - \frac{v}{a_n(v)}\right)^i}{i!}$$

olmak üzere

$$Q = \frac{\left(x - \frac{v}{a_n(v)}\right)^p}{(p-1)!} \int_0^1 (1-t)^{(p-1)} f^{(p)}\left(\frac{v}{a_n(v)} + t\left(x - \frac{v}{a_n(v)}\right)\right) - f^{(p)}\left(\frac{v}{a_n(v)}\right) dt \quad (3.26)$$

elde edilir.

$$f \in Lip_M(\alpha)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \left| f^{(p)}\left(\frac{v}{a_n(v)} + t\left(x - \frac{v}{a_n(v)}\right)\right) - f^{(p)}\left(\frac{v}{a_n(v)}\right) \right| &\leq M \left| \frac{v}{a_n(v)} + t\left(x - \frac{v}{a_n(v)}\right) - \frac{v}{a_n(v)} \right|^\alpha \\ &= Mt^\alpha \left| x - \frac{v}{a_n(v)} \right|^\alpha \end{aligned} \quad (3.27)$$

yazılır. Beta fonksiyonunun tanımı kullanılırsa

$$\int_0^1 (1-t)^{(p-1)} t^\alpha dt = \frac{\alpha}{\alpha + p} B(\alpha, p)$$

bulunur. Eş. 3.27, Eş. 3.26 ifadeleri Eş. 3.25 ifadesinde kullanılırsa

$$\left| f(x) - \sum_{i=0}^p f^{(i)}\left(\frac{v}{a_n(v)}\right) \frac{\left(x - \frac{v}{a_n(v)}\right)^i}{i!} \right| \leq \frac{\alpha}{\alpha + p} B(\alpha, p) \frac{M}{(r-1)!} \left| x - \frac{v}{a_n(v)} \right|^{\alpha+p} \quad (3.28)$$

bulunur. Bu da Eş. 3.24 ifadesinde dikkate alınır

$$\begin{aligned}
\left| f(x) - L_n^{[p]}(f; x) \right| &\leq \frac{\alpha}{\alpha + p} B(\alpha, p) \frac{M}{(p-1)!} \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left| x - \frac{v}{a_n(v)} \right|^{\alpha+p} C_v^{(n)}(t) x^v \\
&= \frac{\alpha}{\alpha + p} B(\alpha, p) \frac{M}{(p-1)!} L_n(|r-x|^{\alpha+p}; x)
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Burada her iki yanın önce mutlak değeri sonra da $[0, b]$ üzerinde maksimumu alınırsa

$$\left\| L_n^{[p]}(f; x) - f(x) \right\|_{C[0, b]} \leq \frac{\alpha}{\alpha + p} B(\alpha, p) \frac{M}{(p-1)!} \left\| L_n(|r-x|^{\alpha+p}; x) \right\|_{C[0, b]}$$

ifadesinin elde edilmesiyle ispat tamamlanır. Şimdi

$$g(r) = |r-x|^{\alpha+p} \quad (3.29)$$

$g \in C[0, b]$ olsun ve $g(x) = 0$ olduğundan $L_n(f; x)$ operatörü $f(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsadığından $L_n(g; x)$ operatörü de $g(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsar. Bu da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| L_n(g; x) \right\|_{C[0, b]} = 0$$

anlamına gelir. 3.5.1. Teorem gereğince

$f^{(p)} \in Lip_M(\alpha)$ deki her $f \in C^p[0, b]$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| L_n^{[p]}(f; x) - f(x) \right\|_{C[0, b]} \leq B(\alpha, p) \frac{\alpha}{\alpha + p} \frac{M}{(p-1)!} \left\| L_n(g; x) \right\|_{C[0, b]} = 0 \quad (3.30)$$

elde edilir. 3.4.1. Teorem ve 3.4.4. Teorem ifadesinde $M = b^p$ düşünülürse ve

$g \in Lip_M(\alpha)$ olduğunu dikkate alarak 3.5.1. Teorem ifadesinin sonucu olarak aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

3.5.1. Sonuç

$f^{(p)} \in Lip_M(\alpha)$ ve $f \in C^{[p]}[0, b]$ ise o zaman

$$\left\| L_n^{[p]}(f; x) - f(x) \right\|_{C[0, b]} \leq \frac{\alpha}{\alpha + p} B(\alpha, p) \frac{M}{(p-1)!} (1 + \sqrt{3B}) \omega(g; \delta_n)$$

dir [3].

İspat

$g(r) = |r-x|^{\alpha+p}$ olmak üzere 3.4.1. Teorem gerekçesiyle

$$\begin{aligned}
\left\| L_n(g(r); x) \right\|_{C[0, b]} &= \left\| L_n(g(r) - g(x); x) \right\|_{C[0, b]} \\
&\leq (1 + \sqrt{3B}) \omega(g; \delta_n)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ifade Eş. 3.23 ifadesinde yerine yazılırsa

$$\|L_n^{[p]}(f; x) - f(x)\|_{C[0,b]} \leq \frac{\alpha}{\alpha + p} B(\alpha, p) \frac{M}{(p-1)!} (1 + \sqrt{3B}) \omega(g; \delta_n)$$

elde edilmesiyle ispat tamamlanır.

3.5.2. Sonuç

$f^{(p)} \in Lip_M(\alpha)$ ve $f \in C^{[p]}[0, b]$ olduğunda

$$\|L_n^{[p]}(f; x) - f(x)\|_{C[0,b]} \leq \frac{\alpha}{\alpha + p} B(\alpha, p) \frac{Mb^p}{(p-1)!} (3B)^{\frac{\alpha}{2}} \delta_n^\alpha$$

dir [3].

İspat

$g(r) = |r - x|^{\alpha+p}$ olduğundan

3.4.4. Teorem gerekçesiyle

$$\|L_n(g(r) - g(x); x)\|_{C[0,b]} = \|L_n(g(r); x)\|_{C[0,b]} \leq M (3B)^{\frac{\alpha}{2}} \delta_n^\alpha \leq b^p (3B)^{\frac{\alpha}{2}} \delta_n^\alpha$$

elde edilir ve bu Eş. 3.23 ifadesinde yerine yazılırsa

$$\|L_n^{[p]}(f; x) - f(x)\|_{C[0,b]} \leq \frac{\alpha}{\alpha + p} B(\alpha, p) \frac{b^p M}{(p-1)!} (3B)^{\frac{\alpha}{2}} \delta_n^\alpha$$

olur.

3.5.3. Sonuç

$f^{(p)} \in Lip_M(\alpha)$ ve $f \in C^{[p]}[0, b]$ olduğunda

$$\|L_n^{[p]}(f; x) - f(x)\|_{C[0,b]} \leq \frac{\alpha}{\alpha + p} B(\alpha, p) \frac{M}{(p-1)!} 2K(g; \delta_n)$$

olur.

İspat

3.4.3. Teorem gereğince

$$\|L_n(g; x) - g(x)\|_{C[0,b]} \leq 2K(g; \delta_n)$$

dir.

$$g(x) = 0$$

olduğundan

$$\|L_n(g; x)\|_{C[0,b]} \leq 2K(g; \delta_n)$$

olur.

$$g(r) = |r - x|^{\alpha+p}$$

olduğundan

$$\left\| L_n \left(|r - x|^{\alpha+p}; x \right) \right\|_{C[0,b]} \leq 2K(g; \delta_n)$$

dir. Bu eşitsizlik Eş. 3.23 ifadesinde kullanılırsa

$$\left\| L_n^{[p]}(f; x) - f(x) \right\|_{C[0,b]} \leq \frac{\alpha}{\alpha+p} B(\alpha, p) \frac{M}{(p-1)!} 2K(g; \delta_n)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

3.6. L_n Operatörünün Diferensiyel Denklemlere Uygulanması

Eş. 3.1 ile tanımlı $L_n(f; x)$ operatöründe $b_n \leq b_{n+1}$ olmak üzere

$$a_n(v) = b_n + v$$

alınmasıyla

$$L_n^*(f; x) = \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{b_n + v}\right) C_v^{(n)}(t) x^v \quad (3.31)$$

operatörü elde edilir.

3.6.1. Teorem

$\{F_n(x; t)\}$ doğurucu fonksiyon dizisi

$$\frac{\partial}{\partial x} \{F_n(x; t)\} = F_n(x; t) K_n(x) \quad (3.32)$$

özelliğine sahip olsun. Her $x \in [0, b]$ ve $f \in C[0, b]$ olduğu zaman

$$x \frac{d}{dx} L_n^*(f; x) = -x K_n(x) L_n^*(f; x) + b_n L_n^*(fg; x) \quad (3.33)$$

dir. Burada g fonksiyonu

$$g(r) = \frac{r}{1-r}$$

ile tanımlıdır. Buradan

$$g\left(\frac{v}{v+b_n}\right) = \frac{\frac{v}{v+b_n}}{1 - \frac{v}{v+b_n}} = \frac{v}{b_n}$$

olur. $K_n(x)$ dizisi ise herhangi bir fonksiyon dizisidir [3].

İspat

Eş. 3.31 ifadesinin her iki tarafının türevi alınır

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} L_n^*(f; x) &= -\frac{\frac{\partial}{\partial x}(F_n(x; t))}{F_n^2(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{b_n + v}\right) C_v^{(n)}(t) x^v \\ &\quad + \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{b_n + v}\right) C_v^{(n)}(t) v x^{v-1} \end{aligned}$$

bulunur.

Eş. 3.32 ifadesinden de

$$\begin{aligned} x \frac{d}{dx} L_n^*(f; x) &= \frac{-x K_n(x)}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{b_n + v}\right) C_v^{(n)}(t) x^v \\ &\quad + \frac{b_n}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{b_n + v}\right) g\left(\frac{v}{b_n + v}\right) C_v^{(n)}(t) x^v \end{aligned}$$

olacaktır.

Eş. 3.31 ifadesi kullanılırsa

$$x \frac{d}{dx} L_n^*(f; x) = -x K_n(x) L_n^*(f; x) + b_n L_n^*(fg; x)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

3.6.1. Uyarı

Eş. 3.33 ifadesi $L_n^*(f; x)$ bir diferensiyel denklem değildir; fonksiyonel diferensiyel denklemdir.

3.7. L_n Operatörünün m-inci Mertebeden Türevleri

Bu bölümde Eş. 3.1 ile tanımlanan L_n operatörünün bazı özel durumlarda türevlerini inceleyeceğiz.

$$L_n(f; x) = \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{a_n(v)}\right) C_v^{(n)}(t) x^v$$

ile tanımlanan L_n operatörünün birinci mertebeden türevini alalım.

$$\frac{d}{dx} L_n(f; x) = -\frac{\frac{\partial}{\partial x}(F_n(x; t))}{F_n^2(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{a_n(v)}\right) C_v^{(n)}(t) x^v + \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{a_n(v)}\right) C_v^{(n)}(t) v x^{v-1}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\partial}{\partial x} (F_n(x; t)) \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{a_n(v)}\right) C_v^{(n)}(t) x^v + \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=1}^{\infty} f\left(\frac{v}{a_n(v)}\right) C_v^{(n)}(t) v x^{v-1} \\
&= -\frac{\partial}{\partial x} (F_n(x; t)) \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{a_n(v)}\right) C_v^{(n)}(t) x^v \\
&\quad + \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{1+v}{a_n(1+v)}\right) C_{v+1}^{(n)}(t) (v+1) x^v
\end{aligned}$$

olur.

3.7.1. Teorem

K_n bir dizi olmak üzere; $\{F_n(x; t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ Eş. 3.2 ile tanımlı doğurucu fonksiyon dizisi

$$\frac{\partial}{\partial x} (F_n(x; t)) = (F_n(x; t)) K_n$$

özelliğine sahip olsun. Burada

$$\frac{\partial}{\partial x} (F_n(x; t)) = \sum_{v=0}^{\infty} C_v^{(n)}(t) v x^{v-1} = \sum_{v=0}^{\infty} C_{v+1}^{(n)}(t) (v+1) x^v = K_n \sum_{v=0}^{\infty} C_v^{(n)}(t) x^v$$

olur. Burada

$$C_{v+1}^{(n)}(t) = \frac{K_n}{v+1} \cdot C_v^{(n)}(t)$$

olsun.

$$a_n(v) = b_n \text{ ve}$$

$\forall x \in [0, b]$ ve $f \in C[0, b]$ olması durumunda

$$\frac{d}{dx} L_n(f; x) = \frac{K_n}{F_n(x; t)} \left[\sum_{v=0}^{\infty} \left(f\left(\frac{v+1}{a_n(v+1)}\right) - f\left(\frac{v}{a_n(v)}\right) \right) C_v^{(n)}(t) x^v \right]$$

dır.

İspat

$$L_n(f; x) = \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{a_n(v)}\right) C_v^{(n)}(t) x^v$$

ile tanımlanan L_n operatörünün her iki yanının türevini alalım.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} L_n(f; x) &= \frac{-\frac{\partial}{\partial x}(F_n(x; t))}{F_n^2(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{a_n(v)}\right) C_v^{(n)}(t) x^v \\ &\quad + \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v+1}{a_n(v+1)}\right) C_{v+1}^{(n)}(t) (v+1) x^v \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadede teoremin hipotezlerini kullanırsak

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} L_n(f; x) &= \frac{-K_n \cdot (F_n(x; t))}{F_n^2(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{b_n}\right) C_v^{(n)}(t) x^v \\ &\quad + \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v+1}{b_n}\right) (v+1) \frac{K_n C_v^{(n)}(t)}{(v+1)} x^v \\ \frac{d}{dx} L_n(f; x) &= \frac{-K_n}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{b_n}\right) C_v^{(n)}(t) x^v + \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v+1}{b_n}\right) (v+1) \frac{K_n C_v^{(n)}(t)}{(v+1)} x^v \end{aligned}$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{d}{dx} L_n(f; x) = \frac{K_n}{F_n(x; t)} \left[\sum_{v=0}^{\infty} \left(f\left(\frac{v+1}{b_n}\right) - f\left(\frac{v}{b_n}\right) \right) C_v^{(n)}(t) x^v \right]$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

3.7.2. Teorem

K_n bir dizi ve $\{F_n(x; t)\}$ doğurucu fonksiyon dizisi

$$\frac{\partial}{\partial x}(F_n(x; t)) = (F_n(x; t)) K_n$$

özelliğine sahip olmak üzere

$\forall x \in [0, b]$ ve $f \in C[0, b]$ olsun.

$$\frac{d^m}{dx^m} L_n(f; x) = \frac{(K_n)^m}{F_n(x; t)} \left[\sum_{v=0}^{\infty} \left(f\left(\frac{v+m}{a_n(v+m)}\right) - \binom{m}{1} f\left(\frac{v+m-1}{a_n(v+m-1)}\right) \right) \right]$$

$$+...+(-1)^{m-1}\binom{m}{m}f\left(\frac{v}{a_n(v)}\right)\Big]C_v^{(n)}(t)x^v \quad (3.34)$$

dır.

İspat

İspatını tümevarımla yapalım.

$m=1$ için doğru mu?

$$\frac{d}{dx}L_n(f;x)=\frac{K_n}{F_n(x;t)}\left[\sum_{v=0}^{\infty}\left(f\left(\frac{v+1}{a_n(v+1)}\right)-f\left(\frac{v}{a_n(v)}\right)\right)C_v^{(n)}(t)x^v\right]$$

3.7.1. Teorem gereğesiyle Eş. 3.34 ifadesi $m=1$ için doğrudur.

$m=k-1$ için doğru olduğunu kabul edelim.

$$\begin{aligned} \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}L_n(f;x) &= \frac{(K_n)^{k-1}}{F_n(x;t)}\sum_{v=0}^{\infty}\left[f\left(\frac{v+k-1}{a_n(v+k-1)}\right)-\binom{k-1}{1}f\left(\frac{v+k-1-1}{a_n(v+k-2)}\right)\right. \\ &\quad \left.+...+(-1)^{k-2}\binom{k-1}{k-1}f\left(\frac{v}{a_n(v)}\right)\right]C_v^{(n)}(t)x^v \end{aligned} \quad (3.35)$$

dir.

$m=k$ için doğru mu?

Eş. 3.35 ifadesinin her iki yanının türevini alalım.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\right)L_n(f;x) &= \frac{-(K_n)^{k-1}(K_n).F_n(x;t)}{F_n^2(x;t)}\sum_{v=0}^{\infty}\left[f\left(\frac{v+k-1}{a_n(v+k-1)}\right)\right. \\ &\quad \left.-\binom{k-1}{1}f\left(\frac{v+k-2}{a_n(v+k-2)}\right)+...+(-1)^{k-2}\binom{k-1}{k-1}f\left(\frac{v}{a_n(v)}\right)\right]C_v^{(n)}(t)x^v \\ &\quad +\frac{(K_n)^{k-1}}{F_n(x;t)}\sum_{v=0}^{\infty}\left[f\left(\frac{v+k-1}{a_n(v+k-1)}\right)-\binom{k-1}{1}f\left(\frac{v+k-2}{a_n(v+k-2)}\right)\right. \\ &\quad \left.+...+(-1)^{k-2}\binom{k-1}{k-1}f\left(\frac{v}{a_n(v)}\right)\right]C_v^{(n)}(t)vx^{v-1} \end{aligned}$$

olur. Bu ifadede düzenlemeler yaparsak,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d^k}{dx^k}\right)L_n(f;x) &= \frac{-(K_n)^{k-1}(K_n).F_n(x;t)}{F_n^2(x;t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left[f\left(\frac{v+k-1}{a_n(v+k-1)}\right) - \binom{k-1}{1} f\left(\frac{v+k-2}{a_n(v+k-2)}\right) \right. \\
&\quad \left. + \dots + (-1)^{k-2} \binom{k-1}{k-1} f\left(\frac{v}{a_n(v)}\right) \right] C_v^{(n)}(t) x^v \\
&\quad + \frac{(K_n)^{k-1}}{F_n(x;t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left[f\left(\frac{v+k-1}{a_n(v+k-1)}\right) - \binom{k-1}{1} f\left(\frac{v+k-2}{a_n(v+k-2)}\right) \right. \\
&\quad \left. + \dots + (-1)^{k-2} \binom{k-1}{k-1} f\left(\frac{v}{a_n(v)}\right) \right] C_{v+1}^{(n)}(t) (v+1) x^v
\end{aligned}$$

olur.

$$C_{v+1}^{(n)}(t) = \frac{K_n}{v+1} C_v^{(n)}(t)$$

olduğunu kullanırsak

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d^k}{dx^k}\right)L_n(f;x) &= \frac{-(K_n)^k}{F_n(x;t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left[f\left(\frac{v+k-1}{a_n(v+k-1)}\right) - \binom{k-1}{1} f\left(\frac{v+k-2}{a_n(v+k-2)}\right) \right. \\
&\quad \left. + \dots + (-1)^{k-2} \binom{k-1}{k-1} f\left(\frac{v}{a_n(v)}\right) \right] C_v^{(n)}(t) x^v \\
&\quad + \frac{(K_n)^{k-1}}{F_n(x;t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left[f\left(\frac{v+1+k-1}{a_n(v+k)}\right) - \binom{k-1}{1} f\left(\frac{v+1-2+k}{a_n(v+k-1)}\right) \right. \\
&\quad \left. + \dots + (-1)^{k-2} \binom{k-1}{k-1} f\left(\frac{v+1}{a_n(v+1)}\right) \right] \frac{K_n}{v+1} C_v^{(n)}(t) (v+1) x^v
\end{aligned}$$

elde edilir ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d^k}{dx^k}\right)L_n(f;x) &= \frac{-(K_n)^k}{F_n(x;t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left[\binom{k-1}{0} f\left(\frac{v+k-1}{a_n(v+k-1)}\right) - \binom{k-1}{1} f\left(\frac{v+k-2}{a_n(v+k-2)}\right) \right. \\
&\quad \left. + \dots + (-1)^{k-2} \binom{k-1}{k-1} f\left(\frac{v}{a_n(v)}\right) \right] C_v^{(n)}(t) x^v
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(K_n)^k}{F_n(x;t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left[f\left(\frac{v+k}{a_n(v+k)}\right) - \binom{k-1}{1} f\left(\frac{v+k-1}{a_n(v+k-1)}\right) \right. \\
& \left. + \dots + (-1)^{k-2} \binom{k-1}{k-1} f\left(\frac{v+1}{a_n(v+1)}\right) \right] C_v^{(n)}(t) x^v
\end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d^k}{dx^k}\right) L_n(f;x) &= \frac{(K_n)^k}{F_n(x;t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left[-\binom{k-1}{0} f\left(\frac{v+k-1}{a_n(v+k-1)}\right) + \binom{k-1}{1} f\left(\frac{v+k-2}{a_n(v+k-2)}\right) \right. \\
& \left. + \dots + (-1)^{k-2} \binom{k-1}{k-1} f\left(\frac{v}{a_n(v)}\right) + f\left(\frac{v+k}{a_n(v+k)}\right) - \binom{k-1}{1} f\left(\frac{v+k-1}{a_n(v+k-1)}\right) \right. \\
& \left. + \dots + (-1)^{k-2} \binom{k-1}{k-1} f\left(\frac{v+1}{a_n(v+1)}\right) \right] C_v^{(n)}(t) x^v
\end{aligned}$$

olur ve

$$\binom{k-1}{r+1} + \binom{k-1}{r} = \binom{k}{r+1}$$

olduğunu kullanırsak

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d^k}{dx^k}\right) L_n(f;x) &= \frac{(K_n)^k}{F_n(x;t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left[\binom{k}{0} f\left(\frac{v+k}{a_n(v+k)}\right) - \binom{k}{1} f\left(\frac{v+k-1}{a_n(v+k-1)}\right) \right. \\
& \left. + \binom{k}{2} f\left(\frac{v+k-2}{a_n(v+k-2)}\right) + \dots + (-1)^{k-1} \binom{k}{k} f\left(\frac{v}{a_n(v)}\right) \right] C_v^{(n)}(t) x^v
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu $\forall m \in \mathbb{N}$ için ifadenin Eş. 3.34 ifadesinin sağlandığını gösterir. Bu da ispatı tamamlar.

3.7.3. Tanım

f fonksiyonu sonlu bir kapalı $[a, b]$ aralığında tanımlı

$x_0, x_1, x_2, \dots$ ler de $x_0 < x_1 < x_2 < \dots$ şeklinde bu aralığın keyfi noktaları olsun. f fonksiyonunun rastgele bir x_k ; $k = 0, 1, 2, \dots$ noktasındaki değerinin $[x_k; f]$ ile gösterirsek

$$f(x_k) = [x_k; f]$$

ifadesine f fonksiyonunun sıfırıncı bölünmüş farkı denir [10].

$$[x_0, x_1; f] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

ifadesine f fonksiyonunun birinci bölünmüş farkı denir [1,10].

$$[x_0, x_1, x_2; f] = \frac{[x_0, x_1; f] - [x_1, x_2; f]}{x_0 - x_2}$$

ifadesine f fonksiyonunun ikinci bölünmüş farkı denir [1,10].

$$[x_0, x_1, \dots, x_n; f] = \frac{[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}; f] - [x_1, x_2, \dots, x_n; f]}{x_0 - x_n}$$

ifadesine f fonksiyonunun n-inci bölünmüş farkı denir [1,10].

Benzer şekilde

$$x_0 = \frac{k}{b_n} \text{ ve } x_1 = \frac{k+1}{b_n} \text{ seçimiyle}$$

$$\left[\frac{k}{b_n}, \frac{k+1}{b_n}; f \right] = b_n \left(f \left(\frac{k+1}{b_n} \right) - f \left(\frac{k}{b_n} \right) \right) \quad (3.36)$$

olarak bulunur. Benzer şekilde

$$x_0 = \frac{k}{b_n}, x_1 = \frac{1+k}{b_n}, \dots, x_m = \frac{m+k}{b_n}$$

seçilirse

$$\begin{aligned} \frac{2}{b_n} \left[\frac{k}{b_n}, \frac{k+1}{b_n}, \frac{k+2}{b_n}; f \right] &= \left[\frac{k+1}{b_n}, \frac{k+2}{b_n}; f \right] - \left[\frac{k}{b_n}, \frac{k+1}{b_n}; f \right] \\ \frac{m}{b_n} \left[\frac{k}{b_n}, \frac{k+1}{b_n}, \dots, \frac{k+m}{b_n}; f \right] &= \left[\frac{k+1}{b_n}, \frac{k+2}{b_n}, \dots, \frac{k+m}{b_n}; f \right] - \left[\frac{k}{b_n}, \frac{k+1}{b_n}, \dots, \frac{k+m-1}{b_n}; f \right] \end{aligned}$$

olarak bulunur.

3.7.4. Teorem

K_n bir dizi olmak üzere $\{F_n(x; t)\}$ doğurucu fonksiyon dizisi

$$\frac{\partial}{\partial x} (F_n(x; t)) = (F_n(x; t)) K_n$$

özelliğine sahip olsun ve

$$a_n(v) = b_n$$

olmak üzere

$\forall x \in [0, b]$ ve $f \in C[0, b]$ olsun.

$$\frac{d^m}{dx^m} L_n(f; x) = \frac{(m)!}{b_n^m} \frac{(K_n)^m}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left[\frac{v}{b_n}, \frac{v+1}{b_n}, \dots, \frac{v+m}{b_n}; f \right] C_v^{(n)}(t) x^v$$

dir.

İspat

İspatı tümevarım yöntemiyle yapalım.

$m=1$ için doğru mu?

$$\frac{d}{dx} L_n(f; x) = \frac{1}{b_n} \frac{(K_n)}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left[\frac{v}{b_n}, \frac{v+1}{b_n}; f \right] C_v^{(n)}(t) x^v$$

olur. Eş. 3.36 ifadesinden

$$\frac{d}{dx} L_n(f; x) = \frac{1}{b_n} \frac{(K_n)}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} b_n \left(f\left(\frac{v+1}{b_n}\right) - f\left(\frac{v}{b_n}\right) \right) C_v^{(n)}(t) x^v$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{d}{dx} L_n(f; x) = \frac{(K_n)}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left(f\left(\frac{v+1}{b_n}\right) - f\left(\frac{v}{b_n}\right) \right) C_v^{(n)}(t) x^v$$

elde edilir. 3.7.1. Teorem gerekçesiyle verilen ifade $m=1$ için doğrudur.

$m=k-1$ için

$$\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} L_n(f; x) = \frac{(K_n)^{k-1}}{F_n(x; t)} \frac{(k-1)!}{b_n^{k-1}} \sum_{v=0}^{\infty} \left[\frac{v}{b_n}, \frac{v+1}{b_n}, \dots, \frac{v+k-1}{b_n}; f \right] C_v^{(n)}(t) x^v \quad (3.37)$$

ifadesi doğru olsun.

$m=k$ için

$$\frac{d^m}{dx^m} L_n(f; x) = \frac{(K_n)^m}{F_n(x; t)} \frac{(m)!}{b_n^m} \sum_{v=0}^{\infty} \left[\frac{v}{b_n}, \frac{v+1}{b_n}, \dots, \frac{v+m}{b_n}; f \right] C_v^{(n)}(t) x^v$$

ifadesinin doğruluğunu gösterelim. Bunun için Eş. 3.37 ifadesinin her iki yanının türevini alalım.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} L_n(f; x) \right) &= \frac{-(K_n)^k}{F_n(x; t)} \frac{(k-1)!}{b_n^{k-1}} \sum_{v=0}^{\infty} \left[\frac{v}{b_n}, \frac{v+1}{b_n}, \dots, \frac{v+k-1}{b_n}; f \right] C_v^{(n)}(t) x^v \\ &\quad + \frac{(K_n)^{k-1}}{F_n(x; t)} \frac{(k-1)!}{b_n^{k-1}} \sum_{v=0}^{\infty} \left[\frac{v}{b_n}, \frac{v+1}{b_n}, \dots, \frac{v+k-1}{b_n}; f \right] C_v^{(n)}(t) v x^{v-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-(K_n)^k}{F_n(x;t)} \frac{(k-1)!}{b_n^{k-1}} \sum_{v=0}^{\infty} \left[\frac{v}{b_n}, \frac{v+1}{b_n}, \dots, \frac{v+k-1}{b_n}; f \right] C_v^{(n)}(t) x^v \\
&+ \frac{(K_n)^{k-1}}{F_n(x;t)} \frac{(k-1)!}{b_n^{k-1}} \sum_{v=0}^{\infty} \left[\frac{v+1}{b_n}, \frac{v+2}{b_n}, \dots, \frac{v+k}{b_n}; f \right] C_{v+1}^{(n)}(t) (v+1) x^v
\end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned}
\frac{d^k}{dx^k} L_n(f; x) &= \frac{(K_n)^k}{F_n(x;t)} \frac{(k-1)!}{b_n^{k-1}} \sum_{v=0}^{\infty} \left\{ \left[\frac{v+1}{b_n}, \frac{v+2}{b_n}, \dots, \frac{v+k}{b_n}; f \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[\frac{v}{b_n}, \frac{v+1}{b_n}, \dots, \frac{v+k-1}{b_n}; f \right] \right\} C_v^{(n)}(f) x^v
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\frac{d^k}{dx^k} L_n(f; x) &= \frac{(K_n)^k}{F_n(x;t)} \frac{(k-1)!}{b_n^{k-1}} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{k}{b_n} \left\{ \sum_{v=0}^{\infty} \left[\frac{v}{b_n}, \frac{v+1}{b_n}, \dots, \frac{v+k}{b_n}; f \right] \right\} C_v^{(n)}(t) x^v \\
&= \frac{(K_n)^k}{F_n(x;t)} \frac{(k)!}{b_n^k} \sum_{v=0}^{\infty} \left[\frac{v}{b_n}, \frac{v+1}{b_n}, \dots, \frac{v+k}{b_n}; f \right] C_v^{(n)}(t) x^v
\end{aligned}$$

elde edilmesiyle ifadenin $m=k$ için doğru olduğu gösterilmiş olur. Bu da ispatı tamamlar.

3.8. L_n Operatörü İçin Voronovskaya Tipli Bir Teorem

3.8.1. Lemma

L_n operatörü Eş. 3.1 ile tanımlı lineer pozitif operatör

$$a_n(v) = b_n$$

seçimini yapalım ve

$$b_n C_{v-1}^{(n)}(t) = v C_v^{(n)}(t)$$

sağlansın. Ayrıca

$$n \rightarrow \infty \text{ için } b_n \rightarrow \infty$$

olması durumunda

$$\text{a) } L_n(1; x) = 1$$

$$\text{b) } L_n(s; x) = x$$

$$c) \quad L_n(s^2; x) = x^2 + \frac{1}{b_n}$$

$$d) \quad L_n(s^3; x) = x^3 + \frac{3x^2}{b_n} + \frac{x}{(b_n)^2}$$

$$e) \quad L_n(s^4; x) = x^4 + \frac{6x^3}{b_n} + \frac{7x^2}{(b_n)^2} + \frac{x}{(b_n)^3}$$

ifadeleri sağlanır.

İspat

$$a) \quad L_n(1; x) = \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} C_v^{(n)}(t) x^v = 1$$

$$\begin{aligned} b) \quad L_n(s; x) &= \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{v}{b_n} C_v^{(n)}(t) x^v \\ &= \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{v}{b_n} C_v^{(n)}(t) x^v \\ &= \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{b_n}{b_n} C_{v-1}^{(n)}(t) x^v \\ &= \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} C_v^{(n)}(t) x^{v+1} = x \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned} c) \quad L_n(s^2; x) &= \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{v}{b_n} \right)^2 C_v^{(n)}(t) x^v \\ &= \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{v}{b_n} \right)^2 C_v^{(n)}(t) x^v \\ &= \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{v}{b_n} C_{v-1}^{(n)}(t) x^v \\ &= \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{v+1}{b_n} C_v^{(n)}(t) x^{v+1} \end{aligned}$$

olur. L_n operatörü lineer olduğundan

$$L_n(s^2; x) = \frac{x}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{v}{b_n} C_v^{(n)}(t) x^v + \frac{x}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{b_n} C_v^{(n)}(t) x^v$$

yazılabilir, bu ifadede (a) ve (b) ifadelerini yerine yazarsak

$$L_n(s^2; x) = x^2 + \frac{x}{b_n}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \text{d) } L_n(s^3; x) &= \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{v}{b_n} \right)^3 C_v^{(n)}(t) x^v \\ &= \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{v}{b_n} \right)^3 C_v^{(n)}(t) x^v \\ &= \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{v}{b_n} \right)^2 C_{v-1}^{(n)}(t) x^v \\ &= \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{v+1}{b_n} \right)^2 C_v^{(n)}(t) x^{v+1} \end{aligned}$$

olur, L_n lineer olduğundan

$$\begin{aligned} L_n(s^3; x) &= \frac{x}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{v}{b_n} \right)^2 C_v^{(n)}(t) x^v + \frac{2x}{b_n F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{v}{b_n} \right) C_v^{(n)}(t) x^v \\ &\quad + \frac{x}{F_n(x; t) (b_n)^2} \sum_{v=0}^{\infty} C_v^{(n)}(t) x^v \end{aligned}$$

olur. (a), (b) ve (c) ifadelerinin bu ifadede kullanılmasıyla

$$L_n(s^3; x) = x^3 + \frac{3x^2}{b_n} + \frac{x}{(b_n)^2}$$

elde edilir.

$$\text{e) } L_n(s^4; x) = \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{v}{b_n} \right)^4 C_v^{(n)}(t) x^v$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{F_n(x;t)} \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{v}{b_n} \right)^4 C_v^{(n)}(t) x^v \\
&= \frac{1}{F_n(x;t)} \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{v}{b_n} \right)^3 C_{v-1}^{(n)}(t) x^v \\
&= \frac{1}{F_n(x;t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{v+1}{b_n} \right)^3 C_v^{(n)}(t) x^{v+1} \\
&= \frac{x}{F_n(x;t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{v+1}{b_n} \right)^3 C_v^{(n)}(t) x^v
\end{aligned}$$

olur, L_n lineer olduğundan

$$\begin{aligned}
L_n(s^4; x) &= \frac{x}{F_n(x;t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{v}{b_n} \right)^3 C_v^{(n)}(t) x^v + \frac{3x}{F_n(x;t)b_n} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{v}{b_n} \right)^2 C_v^{(n)}(t) x^v \\
&\quad + \frac{3x}{F_n(x;t)(b_n)^2} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{v}{b_n} \right) C_v^{(n)}(t) x^v + \frac{x}{F_n(x;t)(b_n)^3} \sum_{v=0}^{\infty} C_v^{(n)}(t) x^v
\end{aligned}$$

yazılabilir. (a), (b), (c) ve (d) ifadelerinin bu ifadede yerine yazılmasıyla

$$L_n(s^4; x) = x^4 + \frac{6x^3}{b_n} + \frac{7x^2}{(b_n)^2} + \frac{x}{(b_n)^3}$$

ifadesi elde edilir.

3.8.2. Teorem

f fonksiyonu $[0, b]$ aralığında sürekli ve $(0, 1)$ aralığında ikinci türeğe sahip olsun. Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n (L_n(f; x) - f(x)) = f''(x) \frac{x}{2}$$

eşitliği sağlanır. Burada

$$a_n(v) = b_n$$

seçimini yapalım ve

$$b_n C_{v-1}^{(n)}(t) = v C_v^{(n)}(t)$$

dir. Ayrıca

$$n \rightarrow \infty \text{ için } b_n \rightarrow \infty$$

sağlansın.

İspat

Bir f fonksiyonunun $x = s$ noktasında Taylor açılımı;

$$f(s) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(s-x) + \frac{f''(x)}{2!}(s-x)^2 + R_n(s-x) \quad (3.38)$$

dir. Burada

$$R_n(s-x) = \frac{1}{3!} f'''(x)(s-x)^3 + \frac{1}{4!} f^{(4)}(x)(s-x)^4 + \dots$$

olup, buna kalan terim denir. Eş. 3.38 ifadesinde

$$s = \frac{v}{b_n}$$

seçilirse

$$f\left(\frac{v}{b_n}\right) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}\left(\frac{v}{b_n} - x\right) + \frac{f''(x)}{2!}\left(\frac{v}{b_n} - x\right)^2 + R_n\left(\frac{v}{b_n} - x\right) \quad (3.39)$$

olur. Ayrıca;

$$R_n\left(\frac{v}{b_n} - x\right) = \left(\frac{v}{b_n} - x\right)^2 \eta\left(\frac{v}{b_n} - x\right)$$

yazılabilir. Burada R_n kalan terim ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(s-x) = 0$$

dır. Dolayısıyla sınırlıdır. Bu durumda

$\forall h$ sayısı için bir $H > 0$ vardır ki

$$|\eta(h)| \leq H \quad (3.40)$$

yazılabilir. Bu durumda Eş. 3.39 ifadesi

$$f\left(\frac{v}{b_n}\right) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}\left(\frac{v}{b_n} - x\right) + \frac{f''(x)}{2!}\left(\frac{v}{b_n} - x\right)^2 + \left(\frac{v}{b_n} - x\right)^2 \eta\left(\frac{v}{b_n} - x\right)$$

şeklinde yazılabilir. Eşitliğin her iki yanını

$$C_v^{(n)}(t) x^v \frac{1}{F_n(x;t)}$$

ile çarpıp toplamını alalım.

$$\begin{aligned} \sum_{v=0}^{\infty} C_v^{(n)}(t) x^v \frac{1}{F_n(x;t)} f\left(\frac{v}{b_n}\right) &= \sum_{v=0}^{\infty} C_v^{(n)}(t) x^v \frac{1}{F_n(x;t)} \left[f(x) + \frac{f'(x)}{1!}\left(\frac{v}{b_n} - x\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{f''(x)}{2!}\left(\frac{v}{b_n} - x\right)^2 + \left(\frac{v}{b_n} - x\right)^2 \eta\left(\frac{v}{b_n} - x\right) \right] \end{aligned}$$

olarak bulunur.

$$\begin{aligned} L_n(f; x) &= \frac{1}{F_n(x;t)} \sum_{v=0}^{\infty} f(x) C_v^{(n)}(t) x^v + \frac{1}{F_n(x;t)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{f'(x)}{1!} \left(\frac{v}{b_n} - x\right) C_v^{(n)}(t) x^v \\ &\quad + \frac{1}{F_n(x;t)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{f''(x)}{2!} \left(\frac{v}{b_n} - x\right)^2 C_v^{(n)}(t) x^v \\ &\quad + \frac{1}{F_n(x;t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{v}{b_n} - x\right)^2 \eta\left(\frac{v}{b_n} - x\right) C_v^{(n)}(t) x^v \end{aligned}$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned} L_n(f; x) &= f(x) L_n(1; x) + \frac{f'(x)}{F_n(x;t)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{v}{b_n} C_v^{(n)}(t) x^v - \frac{x f'(x)}{F_n(x;t)} \sum_{v=0}^{\infty} C_v^{(n)}(t) x^v \\ &\quad + \frac{f''(x)}{2 F_n(x;t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{v}{b_n}\right)^2 C_v^{(n)}(t) x^v - \frac{x f''(x)}{F_n(x;t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{v}{b_n}\right) C_v^{(n)}(t) x^v \\ &\quad + \frac{x^2 f''(x)}{2 F_n(x;t)} \sum_{v=0}^{\infty} C_v^{(n)}(t) x^v \\ &\quad + \frac{1}{F_n(x;t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{v}{b_n} - x\right)^2 \eta\left(\frac{v}{b_n} - x\right) C_v^{(n)}(t) x^v \end{aligned}$$

olur.

$$L_n(f; x) = f(x)L_n(1; x) + f'(x)L_n(s; x) - xf'(x) + \frac{f''(x)}{2}L_n(s^2; x) - xf''(x)L_n(s; x)$$

$$+ \frac{x^2 f''(x)}{2} + \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} (s-x)^2 \eta(s-x) C_v^{(n)}(t) x^v$$

dır.

$$L_n(f; x) = f(x) + f'(x)L_n(s; x) - xf'(x) + \frac{f''(x)}{2}L_n(s^2; x) - xf''(x)L_n(s; x) + \frac{x^2 f''(x)}{2}$$

$$+ \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} (s-x)^2 \eta(s-x) C_v^{(n)}(t) x^v$$

elde edilir.

$$L_n(f; x) = f(x) + f'(x)(L_n(s; x) - x) + \frac{f''(x)}{2}(L_n(s^2; x) - 2xL_n(s; x) + x^2)$$

$$+ \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} (s-x)^2 \eta(s-x) C_v^{(n)}(t) x^v$$

olur.

$$L_n(f; x) - f(x) = f'(x)(L_n(s; x) - x) + \frac{f''(x)}{2}L_n((s-x)^2; x)$$

$$+ \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} (s-x)^2 \eta(s-x) C_v^{(n)}(t) x^v \quad (3.41)$$

olur. Şimdi

$$I = \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{v}{b_n} - x \right)^2 \eta \left(\frac{v}{b_n} - x \right) C_v^{(n)}(t) x^v$$

ifadesinin değerini hesaplayalım. Bu durumda

$$I = \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{\left| \frac{v}{b_n} - x \right| \leq \delta} \left(\frac{v}{b_n} - x \right)^2 \eta \left(\frac{v}{b_n} - x \right) C_v^{(n)}(t) x^v$$

$$+ \frac{1}{F_n(x; t)} \sum_{\left| \frac{v}{b_n} - x \right| > \delta} \left(\frac{v}{b_n} - x \right)^2 \eta \left(\frac{v}{b_n} - x \right) C_v^{(n)}(t) x^v \quad (3.42)$$

olur.

$$\left| \frac{v}{b_n} - x \right| \leq \delta$$

iken

$$\left| \eta \left(\frac{v}{b_n} - x \right) \right| \leq \varepsilon$$

dir. Bu ifade ve Eş. 3.40 ifadesi Eş. 3.42 ifadesinde yerine yazılırsa

$$I \leq \frac{\varepsilon}{F_n(x; t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{v}{b_n} - x \right)^2 C_v^{(n)}(t) x^v + \frac{H}{F_n(x; t)} \sum_{\left| \frac{v}{b_n} - x \right| > \delta} \left(\frac{v}{b_n} - x \right)^2 C_v^{(n)}(t) x^v \quad (3.43)$$

olur. Şimdi

$$J = \sum_{\left| \frac{v}{b_n} - x \right| > \delta} \left(\frac{v}{b_n} - x \right)^2 C_v^{(n)}(t) x^v$$

diyelim.

$$\left| \frac{v}{b_n} - x \right| > \delta$$

olduğundan

$$\frac{\left(\frac{v}{b_n} - x \right)^2}{\delta^2} > 1$$

dir. O halde

$$J \leq \sum_{\left| \frac{v}{b_n} - x \right| > \delta} \left(\frac{v}{b_n} - x \right)^2 \frac{\left(\frac{v}{b_n} - x \right)^2}{\delta^2} C_v^{(n)}(t) x^v$$

yazılabilir. Yani

$$J \leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{\left| \frac{v}{b_n} - x \right| > \delta} \left(\frac{v}{b_n} - x \right)^4 C_v^{(n)}(t) x^v$$

dir.

$$I \leq \frac{\varepsilon}{F_n(x;t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{v}{b_n} - x \right)^2 C_v^{(n)}(t) x^v + \frac{H}{\delta^2 F_n(x;t)} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{v}{b_n} - x \right)^4 C_v^{(n)}(t) x^v$$

elde edilir.

$$I \leq \varepsilon L_n((s-x)^2; x) + \frac{H}{\delta^2} L_n((s-x)^4; x)$$

dir. L_n operatörünün lineerliği ve 3.8.1. Lemma ifadeleri kullanılırsa

$$I \leq \varepsilon \left(x^2 + \frac{x}{b_n} - 2x(x) + x^2 \right) + \frac{H}{\delta^2} \left[x^4 + \frac{6x^3}{b_n} + \frac{7x^2}{(b_n)^2} + \frac{x}{(b_n)^3} - 4x \left(x^3 + \frac{3x^2}{b_n} + \frac{x}{(b_n)^2} \right) + 6x^2 \left(x^2 + \frac{x}{b_n} \right) - 4x^3(x) + x^4 \right]$$

olur.

$$I \leq \varepsilon \left(\frac{x}{b_n} \right) + \frac{H}{\delta^2} \left(\frac{6x^3 - 12x^3 + 6x^3}{b_n} + \frac{7x^2 - 4x^2}{(b_n)^2} + \frac{x}{(b_n)^3} \right)$$

dir.

$$I \leq \varepsilon \left(\frac{x}{b_n} \right) + \frac{H}{\delta^2} \left(\frac{3x^2}{(b_n)^2} + \frac{x}{(b_n)^3} \right)$$

elde edilir.

$$I \leq \varepsilon \left(\frac{x}{b_n} \right) + \frac{H}{(b_n)^2 \delta^2} \left(3x^2 + \frac{x}{b_n} \right)$$

bulunur. $x \in [0, b]$ olduğundan x in maksimum değeri b olur. Bu durumda

$$\begin{aligned} I &\leq \varepsilon \left(\frac{b}{b_n} \right) + \frac{H}{(b_n)^2 \delta^2} \left(3b^2 + \frac{b}{b_n} \right) \\ &\leq \varepsilon \left(\frac{b}{b_n} \right) + \frac{H}{(b_n)^2 \delta^2} (3b^2 + b) \end{aligned}$$

yazılabilir.

$$C = \frac{H}{\delta^2} (3b^2 + b)$$

denirse

$$I \leq \frac{1}{b_n} \left(b\varepsilon + \frac{1}{(b_n)} C \right)$$

ve

$$D = \max\{b, C\}$$

seçilirse

$$I \leq \frac{D}{b_n} \left(\varepsilon + \frac{1}{(b_n)} \right)$$

şeklinde yazılabilir.

$$\varepsilon_n = \max\left\{\varepsilon, \frac{1}{b_n}\right\} \text{ seçimiyle;}$$

$$I = \frac{1}{b_n} O(\varepsilon_n)$$

elde edilir.

Bu ifadenin Eş. 3.41 ifadesinde yerine yazılmasıyla

$$L_n(f; x) - f(x) = f'(x)(L_n(s; x) - x) + \frac{f''(x)}{2} L_n((s-x)^2; x) + \frac{1}{b_n} O(\varepsilon_n)$$

elde edilir. 3.8.1. Lemma bu ifadede kullanılırsa

$$L_n(f; x) - f(x) = f'(x)(x - x) + \frac{f''(x)}{2} \left(x^2 + \frac{x}{b_n} - 2xx + x^2 \right) + \frac{1}{b_n} O(\varepsilon_n)$$

bulunur.

$$L_n(f; x) - f(x) = \frac{f''(x)}{2} \left(\frac{x}{b_n} \right) + \frac{1}{b_n} O(\varepsilon_n)$$

eşitliğin her iki yanı b_n ile çarpılırsa

$$b_n(L_n(f; x) - f(x)) \leq f''(x) \frac{x}{2} + O(\varepsilon_n)$$

bulunur ki;

$n \rightarrow \infty$ için $\varepsilon_n \rightarrow 0$ dir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n(L_n(f; x) - f(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(f''(x) \frac{x}{2} \right)$$

olur.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n(L_n(f; x) - f(x)) = f''(x) \frac{x}{2}$$

elde edilmesiyle ispat tamamlanır.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada doğurucu fonksiyon içeren lineer pozitif operatörlerin yaklaşım özellikleri incelenmiş, yaklaşım hızları çeşitli yöntemlerle hesaplanmıştır. Daha sonra bazı koşullar belirlenerek bu operatörlerin yüksek mertebeden türevleri için bir yöntem ifade edilmiştir. Yine bazı koşulları sağlayan lineer pozitif operatörler için Voronovskaya tipinde bir teorem ifade edilerek yaklaşım özellikleri incelenmiştir.



KAYNAKLAR

1. Hacısalıhoğlu, H., Hacıyev, A. (1995). *Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı*, Ankara: A.Ü.F.F. Döner Sermayesi İşletmesi Yayınları, 1-20.
2. Altomare, F. and Campiti, M. (1994). *Korovkin-type Approximation Theory and its Applications*, Berlin: Water de Gryter, 218-373.
3. Doğru, O., Özarslan, M. A. ve Taşdelen F. (2004). On positive operators involving a certain class of generating functions, *Studia Scientiarum Math. Hungaria*, 41(4), 415-429.
4. Cheney, E. W. and Sharma, A. (1964). Bernstein power series, *Canad, J. Math*, 16(1964), 241-252.
5. Khan, M.K.(1989). On the rate of convergence of Bernstein power series for functions of bounded variation, *J. Approx, Theory* 57, 90-103.
6. Meyer- König, W., Zeller, K. (1960). Berristeirische poterizreiheri, *Studia Math*, 19, 89-94.
7. Szasz, O. (1950). Generalization of S. Bernstein's polynomials to the infinite interval, *J. Reserarch Nat. Bur. Standards*, 45, 239-245.
8. Doğru, O. (2002). Weighted approximation properties of Szasz-type operators, *Intern, Math, J.* 2(9), 889-895.
9. Gal, S.G., Anastassiou, G.A. (2000). *Approximation Theory: Moduli of Continuity and Global Smoothness Preservation*, New York: Birkhauser, 80-466.
10. Doğru, O. (1997). On a certain family of linear positive operators, *Tr. J. of. Mathematics*, 21, 387-399.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : YURTSEVER, Gözde
 Uyruğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 19.09.1988, Ankara
 Medeni hali : Evli
 Telefon : 0 (534) 377 71 27
 E-mail : gozde_kural88@hotmail.com



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi / Matematik	Devam ediyor
Lisans	Ankara Üniversitesi / Matematik	2011
Lise	Keçiören Rauf Denktaş Lisesi (Y.D.A.L.)	2006

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2018-Halen	Gebze Sarkuysan Anadolu Lisesi	Öğretmen
2015-2018	Tosya Bahçelievler Anadolu Lisesi	Öğretmen
2014-2015	Gökçeada Atatürk Anadolu Öğretmen Lisesi	Öğretmen

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

-

Hobiler

Yüzme



GAZİ GELECEKTİR..