

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

KING TİPLİ OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Övgü GÜREL YILMAZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2019**

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Övgü GÜREL YILMAZ tarafından hazırlanan “**King Tipli Operatörlerin Yaklaşım Özellikleri**” adlı tez çalışması 19/06/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL
Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Jüri Üyeleri:

Başkan: Prof. Dr. Ali OLGUN
Kırıkkale Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL
Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Ali ARAL
Kırıkkale Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. Rabia AKTAŞ
Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. Serhan VARMA
Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Özlem YILDIRIM
Enstitü Müdür Vekili

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davranıldığı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

19.06.2019



Övgü GÜREL YILMAZ

ÖZET

Doktora Tezi

KING TİPLİ OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Övgü GÜREL YILMAZ

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Orjinal bölümler tezin üçüncü ve dördüncü bölümlerinde yer almaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde lineer pozitif operatörler ile ilgili bazı temel tanım ve özelliklere yer verilmiştir. Lineer pozitif operatörlerin yakınsaklık koşulları anlatılmış ve tezde kullanılacak olan bazı operatörler tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde Szasz-Mirakjan operatörlerinin $x^2 + \lambda x$ fonksiyonunu koruyan genelleştirmesi ele alınmıştır. Bu operatörlerin şekil koruma özellikleri, lokal ve ağırlıklı yaklaşım özellikleri incelenmiş, bu operatörler için Voronovskaja tipli teorem ispatlanmıştır. Son kısımda ise klasik Szasz-Mirakjan operatörleri ile King tipli operatörlerin yakınsaklık hızları karşılaştırılmıştır ve oluşturulan hata tahmini tablosu ve grafik yardımıyla elde edilen sonuçlar tartışılmıştır.

Dördüncü bölümde üstel fonksiyonu koruyan Baskakov-Kantorovich operatörleri tanımlanmış ve bu operatörlerin yakınsaklık özellikleri incelenmiştir. Bu operatörler için de Voronovskaja tipli teorem göz önüne alınmıştır.

Beşinci bölümde ise tezde elde edilen sonuçlar tartışılmıştır.

Haziran 2019, 91 sayfa

Anahtar Kelimeler: Szasz-Mirakjan operatörleri, King tipli operatörler, Baskakov-Kantorovich operatörleri, şekil koruma özellikleri, süreklilik modülü, Voronovskaja tipli teorem, üstel fonksiyon.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

APPROXIMATION PROPERTIES FOR CERTAIN KING TYPE OPERATORS

Övgü GÜREL YILMAZ

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL

This thesis consists of five chapters. The original results are presented in third and fourth chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, some basic definitions and certain elementary properties concerning linear positive operators are given. Convergence properties of linear positive operators and some certain operators which are used in the thesis are introduced.

In the third chapter, the generalization of Szasz-Mirakjan operators which preserve $x^2 + \lambda x$ are presented and their shape preserving properties, local and weighted approximation properties are examined. Voronovskaja type theorem for these operators is proved, as well. In the last section of the chapter, rate of convergence of classical Szasz-Mirakjan operators and King type operators is compared and the results of these two operators are discussed with the error table and graphic.

In the fourth chapter, Baskakov Kantorovich operators which preserve exponential function are introduced and their convergence properties are analyzed. Voronovskaja type theorem for these operators is also investigated.

In the fifth chapter, the results obtained in the thesis are discussed.

Haziran 2019, 91 sayfa

Key Words: Szasz-Mirakjan operators, King type operators, Baskakov-Kantorovich operators, shape preserving properties, modulus of continuity, Voronovskaja type theorem, exponential function.

TEŞEKKÜR

Öncelikle bu çalışmanın oluşmasında beni yönlendiren, her zaman daha ileriye gidebilmem için çaba harcayan, sadece bilimsel anlamda değil her konuda bana olan desteğini esirgemeyen, arkamda her zaman varlığını hissettiğim danışman hocam Prof. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL'a (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı), doktora eğitimi sürecim boyunca bilgi ve tecrübeleriyle bana yol gösteren, akademik çalışmalarımızda katkısını çok büyük oranda hissettiğimiz, beni kendi öğrencisinden ayırmayarak bu alanda kendimi geliştirebilmem için büyük çaba harcayan Prof. Dr. Ali ARAL'a (Kırıkkale Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı), aklıma takılan en küçük bir problem için bile çekinmeden yanlarına gidebildiğim, beni aydınlatabilmek için saatlerce bir konu üzerinde vakit harcayan ve eksikliklerini gerçekten her zaman hissedeceğim Prof. Dr. Gülen BAŞCANBAZ TUNCA'ya (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) ve Prof. Dr. İbrahim BÜYÜKYAZICI'ya (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) sonsuz teşekkürlerimi sunmak isterim.

Ankara Üniversitesi'ne başladığım ilk günden bugüne kadar bana hoca olduklarını hissettirmeden bir dost edasıyla hep yanımda olan, her türlü tecrübelerini benimle paylaşan, bugünlere gelmem de çok büyük payları olan, pozitif enerjileri ile bana güç katan Doç. Dr. Rabia AKTAŞ'a (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) ve Doç. Dr. Serhan VARMA'ya (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı), bildiklerini paylaşmaktan hiçbir zaman çekinmeyen, söyledikleri küçük bir cümleyle bile problemlerimde büyük değişiklikler yaratan, başlarını çok ağrıttığım Doç. Dr. Sezgin SUCU'ya (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) ve Doç. Dr. Oktay ÖLMEZ'e (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı), bugüne kadar bütün sevinçlerimde yanımda olan, yeri geldiğinde kahkahalarla güldüğümüz, o kalabalık odada birçok şey paylaştığımız tüm arkadaşlarıma da saygılarımı ve sevgilerimi sunarım.

Sadece doktora eğitimim süresince değil bu hayata gözlerimi açtığım andan itibaren benim bu zorlu dünyada iyi yerlere gelebilmem için varını yoğunu harcayan, benim mutlu olabilmem için her türlü sıkıntıyı çekmeye hazır olan, benim en büyük destekçim,

biricik arkadaşım anneme, bana bu hayattaki doğruları ve yanlışları öğreten, bir telefonla tüm sıkıntılarımı mutluluğa dönüştüren ablama, bu süreçte bana çok büyük fedakarlıklar gösteren, benim her türlü stresime katlanabilen, bu süreçte yardımlarıyla yükümü hafifleten eşim Bülent YILMAZ'a, ne zaman pes etsem sadece bir gülüşüyle beni hayata bağlayan biricik oğlum Ural YILMAZ'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak bana Ankara Üniversitesi'nde eğitim olanağı sağlayan ve finansal anlamda Öğretim Üyesi Yetiştirme Programı (ÖYP) kapsamında beni destekleyen Yükseköğretim Kuruluna, Erasmus+ Öğrenim Hareketliliği kapsamında destekleyen Avrupa Birliği Eğitim ve Gençlik Programları Merkezi Başkanlığına teşekkür ederim.

Ankara Haziran, 2019
Övgü GÜREL YILMAZ

İÇİNDEKİLER

ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER DİZİNİ	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
ÇİZELGELER DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	17
2.1 Temel Tanımlar ve Teoremler	17
2.2 Genelleştirilmiş Konvekslik	22
2.3 Sonlu Aralıkta Sürekli Fonksiyonlar Uzayı.....	24
2.4 Lineer Pozitif Operatörler Dizisinin Yakınsaklık Koşulları.....	26
2.5 Süreklilik Modülü	27
2.6 Ağırlıklı Uzaylarda Lineer Pozitif Operatörler Dizisinin Yakınsaklık Koşulları.....	28
2.7 Ağırlıklı Uzaylarda Süreklilik Modülü	30
2.8 Szasz-Mirakjan Operatörleri.....	31
2.9 Baskakov Operatörleri	34
2.10 Baskakov Kantorovich Operatörleri.....	36
3. KING TİPLİ SZASZ-MİRAKJAN OPERATÖRLERİ.....	39
3.1 $S_{m,\lambda}$ Operatörlerinin Şekil Koruma Özelliği	42
3.2 $S_{m,\lambda}$ Operatörleri için Lokal Yaklaşım Özellikleri	49
3.3 $S_{m,\lambda}$ Operatörleri için Ağırlıklı Yaklaşım Özellikleri.....	57
3.4 $S_{m,\lambda}$ Operatörleri için Voronovskaya Tipli Teorem	62
3.5 $S_{m,\lambda}$ Operatörleri ile S_m Operatörlerinin Karşılaştırılması.....	66
4. KING TİPLİ BASKAKOV KANTOROVİCH OPERATÖRLERİ.....	69
4.1 $\tilde{V}_{m,\alpha}^*$ Operatörlerinin Yakınsaklık Özellikleri	72
4.2 $\tilde{V}_{m,\alpha}^*$ Operatörleri için Voronovskaya Tipli Teorem	76
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	81
KAYNAKLAR	83
ÖZGEÇMİŞ.....	90

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	$\{0\}$ ı içeren doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar
$\mathbb{R}^+$	Pozitif reel sayılar
$[a, b]$	Kapalı aralık
(a, b)	Açık aralık
$C[a, b]$	$[a, b]$ aralığındaki sürekli fonksiyonlar uzayı
$C^r[a, b]$	$[a, b]$ aralığında reel değerli, r inci basamaktan sürekli türevlere sahip fonksiyonlar uzayı ($r \in \mathbb{N}$)
$\mathcal{L}_m(f; x)$	$\mathcal{L}_m$ lineer pozitif operatörünün sürekli f fonksiyonuna uygulanması
$B_m(f; x)$	Bernstein operatörleri
$S_m(f; x)$	Szasz operatörleri
$V_m(f; x)$	Baskakov operatörleri
$V_m^*(f; x)$	Baskakov Kantorovich operatörleri
$w(f; \delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü
$\Omega(f, \delta)$	f fonksiyonunun ağırlıklı süreklilik modülü
$Lip_M \alpha$	α mertebeli M katsayılı Lipschitz sınıfı
$B_\rho(\mathbb{R})$	Her $x \in \mathbb{R}$ için $ f(x) \leq M_f \rho(x)$ koşulunu sağlayan fonksiyonlar uzayı
$C_\rho(\mathbb{R})$	$B_\rho(\mathbb{R})$ uzayındaki sürekli fonksiyonlar uzayı
$C_\rho^k(\mathbb{R})$	$C_\rho(\mathbb{R})$ uzayının $\left\{ f : f \in C_\rho(\mathbb{R}), \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ f(x) }{\rho(x)} = k_f \right\}$ koşulunu sağlayan alt uzayı
$\ \cdot\ _\rho$	$\ f\ _\rho = \sup \left\{ \frac{ f(x) }{\rho(x)}, x \in \mathbb{R} \right\}$
$f_m \Rightarrow f$	(f_n) fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsaması
$f[x_0, x_1, \dots, x_n]$	f fonksiyonunun n –inci mertebeden bölünmüş farkı
$(n)_k$	Pochhammer sembolü

ŞEKİL DİZİNİ

Şekil 3.1 $S_{m,\lambda}$ Operatörlerinin f fonksiyonuna yaklaşımı.	68
--	----



ÇİZELGE DİZİNİ

Çizelge 3.1 $S_{m,\lambda}$ Operatörleri için hata tahmini.	67
--	----



1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisi, ortaya çıkıp yaygınlaşması 19. yüzyıla dayanan ve bu yüzyıldan günümüze kadar dünyadaki birçok matematikçi tarafından çalışılan matematiksel analizin önemli araştırma konularından biridir. Sadece matematikte değil, temel bilimler ve mühendislik bilimleri başta olmak üzere, diğer alanlardaki birçok bilimsel probleme ışık tutması, yaklaşım teorisinin günden güne öneminin artmasına neden olmuştur. Özellikle bu alanda yapılan bilimsel çalışmaların, çağımıza yön veren bilgisayar hesaplamaları ile zenginleştirilmesi, bu alanın günümüzde de hala eski etkinliğini sürdürmesini sağlamıştır. Bu yüzden yaklaşım teorisi, matematikte analizin harmonik analiz, fonksiyonel analiz, nümerik analizi, Fourier analizi gibi birçok dalıyla ilişkili olmasının yanı sıra; operatör teori, olasılık teorisi, sayılar teorisi, istatistik teorisi gibi diğer bilim dallarıyla da içiçedir. Buna ek olarak yaklaşım teorisi fizikte ve mühendislikte veri gösterimi, sinyal işleme, termografik görüntüleme, dalgacık analizi gibi birçok farklı konuda da kullanılmaktadır.

Yaklaşım teorisinin temel amacı, ele alınan keyfi bir fonksiyonun daha basit ve daha çok elemanter özelliğe sahip (türevlenebilme, integrallenebilme vb.) diğer fonksiyonlar yardımıyla bir gösterimini elde etmektir. Örneğin bir fonksiyon kuvvet serisine açılırken, onun kuvvet serisi ile işlem yapmak yerine kuvvet serisinin kısmi toplamıyla yani onun polinom gösterimi ile işlem yapmak bizim için daha kullanışlı olacaktır. Bu şekildeki gösterimler fonksiyon hakkında birçok bilgiye daha kolay ulaşmamızı sağlar. Aksi durumda o fonksiyon hakkında bilgi sahibi olmaya çalışılırken, içinden çıkılması zor ispatlarla ve hatta karmaşık bilgisayar hesaplamalarıyla karşılaşılabilir. Bazen bilgisayar yardımıyla bazı bilgiler elde edilse bile, bu elde edilen yaklaşık sonuca nasıl ulaşıldığını görememek ya da sonuca daha iyi bir yaklaşımla ulaşma isteği böyle durumlarda polinom yaklaşımının tercih edilmesine neden olur. Bu durumda polinom ailesi bizim için daha iyi özelliklere sahip fonksiyon tanımını üstlenmiş olur. İşte bu yüzden yaklaşım teorisi, belli özelliklere sahip fonksiyon uzayının elemanlarının bu uzayın bir alt uzayından olan iyi özelliklere sahip fonksiyonlar cinsinden gösterimini elde etmeyi temel alır.

Yaklaşım teorisinde genelde bu yaklaşımı sağlayacak daha basit ve daha çok eleman-ter özelliklere sahip fonksiyonlar, $c_0, c_1, \dots, c_m$ reel katsayıları için

$$P_m(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_mx^m$$

şeklinde cebirsel polinomlardan; $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m, \tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_m$ reel sayıları için

$$T_m(x) = \tilde{a}_0 + \left(\tilde{a}_1 \cos x + \tilde{b}_1 \sin x \right) + \dots + \left(\tilde{a}_m \cos mx + \tilde{b}_m \sin mx \right)$$

şeklinde trigonometrik polinomlardan ya da $a_0, a_1, \dots, a_m, b_0, \dots, b_m$ reel sayıları için

$$R_m(x) = \frac{P_m(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m}$$

iki polinomun oranı şeklindeki rasyonel fonksiyonlardan seçilebilir.

Matematiksel analizin temellerinin atıldığı 17. yüzyıla kadar yaklaşım kavramı altında incelenen tek durum sayıların yaklaşık değerinin hesaplanmasıydı. Buna örnek olarak π sayısı verilebilir. Daha sonra Kepler, Wallis, Newton, Bernoulli, Euler ve daha birçok matematikçinin yaptığı çalışmalarla, sayıların, operatörlerin, fonksiyonların ve denklemlerin çözümlerinin yaklaşık hesabının elde edilebilmesi için geliştirdikleri metotlarla yaklaşım kavramının da ilk adımları atılmıştır.

Yaklaşım teorisinde önemli bir yere sahip olan Gauss, denklemlerin çözümlerinin, integral hesaplarının minimum hata ile çözümlerinin bulunmasının yanı sıra matematikte geniş ölçüde kullanılan en küçük kareler metodunu geliştirmiştir.

Tüm bu gelişmelerin yanında reel değişkenli fonksiyonlara yaklaşım teorisinin temeli Rus matematikçi P. L. Chebyshev ve Alman matematikçi K. Weierstrass'ın iki önemli teoremi ispat etmesiyle oluşturulmuştur.

Rus matematikçi P. L. Chebyshev (1821-1894) in yaklaşım teorisi ile ilgili ilk araştırmaları 1850 yılında başlamış ve bu konu ile ilgili araştırmaları ölümüne kadar devam etmiştir (Chebyshev 1854, 1859, 1947).

Bu teori kapalı aralıkta verilen keyfi sürekli fonksiyona en iyi yaklaşımı veren m —inci dereceden polinomu bulmaya dayanmaktadır. Açık şekilde ifade etmek istersek,
" $f, [a, b]$ kapalı aralığında tanımlı sürekli bir fonksiyon ve m pozitif tamsayı olmak üzere;

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p(x)|$$

ifadesini minimum yapacak şekilde derecesi en fazla m olan

$$P(x) = \sum_{s=0}^m c_s x^s$$

şeklinde bir polinom bulunabilir mi? " sorusunun cevabı aranmaktadır.

P. L. Chebyshev'in bu çalışması ile yaklaşım teorisinde önemli bir yere sahip olan en iyi yaklaşım problemi anlam kazanmıştır (Chebyshev 1854).

Alman matematikçi K. Weierstrass (1815-1897), 1885 yılında kendi ismini taşıyan Weierstrass yaklaşım teorisini ispatlamasıyla matematikte çok büyük bir gelişmeye imza atmıştır. Bu teorem $[a, b]$ kompakt aralığında düzgün sürekli her fonksiyona $[a, b]$ aralığında düzgün olarak yakınsayan bir $\{P_m(x)\}$ polinomlar dizisinin varlığını ispatlamıştır (Weierstrass 1885). Açık olarak ifade edilirse,

" $f \in C[a, b]$ keyfi bir fonksiyon olmak üzere, her $\epsilon > 0$ sayısı ve her $x \in [a, b]$ için öyle bir $P_m(x)$ cebirsel polinomu vardır ki

$$|f(x) - P_m(x)| < \epsilon$$

sağlanır. "

K. Weierstrass bu teoremi benzer şekilde sürekli periyodik fonksiyonlara, trigonometrik polinomlarla yaklaşma problemini ele alarak da ispatlamıştır.

Weierstrass teoreminin ispatı oldukça uzun ve karışık olduğundan birçok ünlü matematikçi daha basit ve daha anlaşılır bir ispat elde edebilmek için bu teorem üzerinde

çalışmışlardır. Matematikçi C. Z. Runge (Runge 1885), K. Weierstrass'tan bağımsız olarak aynı yılda teoremin başka bir ispatını yapmıştır. Farklı ispatlar yapan diğer matematikçilerde şu şekildedir: E. Picard (1891), V. Volterra (1897), H. Lebesgue (1898), L. Fejer (1900), G. Mittag Leffler (1900), M. Lerch (1903), C. J. De la Vallee Poussin (1908), E. Landou (1908), D. Jackson ve W. Sierpinski (1911) ve S. N. Bernstein (1912). Bu teoremin birbirinden farklı ispatları (Goncharov 1954), (Natanson 1964), (Pinkus 2000) referanslarında bulunabilir.

Weierstrass teoreminin, f fonksiyonunun analitikliği kabul edilmeden kompleks uzaya genişletilemeyeceği J. L. Walsh (1926) tarafından verilmiştir. Bu teoremin çok değişkenli fonksiyonlar için olan hali E. Picard (1891) tarafından incelenmiştir. Weierstrass teoreminin genelleştirmeleri ve farklı sonuçları (Lubinsky 1993) de bulunabilir.

E. Borel (1905) sürekli fonksiyonlara polinomlarla yaklaşımı incelerken polinomu

$$\sum \phi_{m,s}(x) f\left(\frac{s}{m}\right)$$

formunda almış ve bu biçimdeki polinomlar yardımıyla ispatı elde etmiştir.

S. N. Bernstein (1912) Borel'in düşüncesinden yola çıkarak $\phi_{m,s}$ fonksiyonunu

$$\phi_{m,s}(x) = \binom{m}{s} x^s (1-x)^{m-s}$$

olarak ele almış ve $f \in C[0, 1]$ olmak üzere,

$$B_m(f; x) = \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} x^s (1-x)^{m-s} f\left(\frac{s}{m}\right), \quad x \in [0, 1], \quad m \in \mathbb{N},$$

şeklinde bir polinom dizisi tanımlamıştır. Bernstein bu polinom dizisini kullanarak keyfi $\epsilon > 0$ sayısı verildiğinde tüm $x \in [0, 1]$ ve $m \geq m_0$ için,

$$|B_m(f; x) - f(x)| < \epsilon$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermiş ve böylece Weierstrass teoreminin en basit ve en etkili ispatını vermiştir (Bernstein 1912) . Bernstein'in olasılık teorisindeki kavramlara ve fikirlere dayanarak yaptığı bu kısa ispat, temel ve uygulamalı bilimlerde büyük bir etki yaratmıştır.

Günümüzde Bernstein polinomları olarak adlandırılan $(B_m)_{m \geq 1}$ polinomlar dizisi birçok bilimsel çalışmanın odağı haline gelmiş ve Bernstein polinomları üzerine birçok araştırma yapılmıştır (Lorentz 1986). Bu polinomlar I. Chlodovsky (1937) ve O. Szasz (1950) tarafından sonsuz aralığa genişletilmişlerdir. Bu polinomların kompleks uzaydaki yakınsamaları E. M. Wright (1930) ve L. V. Kantorovich (1931) tarafından incelenmiştir. E. V. Voronovskaya (1932), T. Popoviciu (1935) ve B. Bajanski-R. Bojonic (1964) Bernstein polinomlarının yakınsaklık hızını tartışırken; I. Chlodovsky (1929), L. V. Kantorovich (1930), P. L. Butzer (1935) ve G. G. Lorentz (1937) Bernstein polinomunun çeşitli modifiyelerini kullanarak sürekli olmayan fonksiyonlara yaklaşımını ele almıştır. İki değişkenli Bernstein polinomları P. L. Butzer (1953) tarafından çalışılmıştır. Bernstein operatörünün q -analoğu A. Lupuş (1987) tarafından yapılmıştır.

Günümüzde Bernstein polinomlarının bu kadar çok popüler olmasının birçok nedeni vardır. Bunlardan bazıları bu polinomun açık ve sade bir gösteriminin olması, çeşitli şekil koruma özelliklerinin olması, birçok problemin çalışılabilmesinde işlevsel olması ve kolay türevlenebilir ve integre edilebilir olmasının yanı sıra bilgisayarla yapılan hesaplarda bize kolaylık sağlamasıdır. Örneğin f fonksiyonu hesaplanması zor bir fonksiyon olarak seçildiğinde bilgisayarla yapılan işlemler işimizi kolaylaştırabilir.

Yaklaşım teorisinin gelişmesinde önemli katkıları olan Bernstein polinomları, matematiğin yanı sıra uygulamalı bilimlerde de birçok kullanım alanına sahiptir. Bernstein polinomlarının özellikleri üzerine dayalı Casteljau algoritmaları bilgisayar destekli geometrik tasarımın ana elemanlarından biridir (Boehm ve Müller 1999). Bu algoritmalar tıp ve jeoloji biliminin yanında araba ve gemi dizaynında, uçak endüstrisinde etkili bir şekilde kullanılmaktadır. Bu algoritmaların ilk olarak mühendis Paul de Casteljau (1958) tarafından Citroen otomobil firmasında, Pierre Bezier (1910-1999)

tarafından Renault firmasında kullanılmıştır. Daha sonra J. C. Ferguson (1963) tarafından Boeing ve A. A. Ball tarafından İngiliz uçak şirketlerinde uygulanmıştır.

Bernstein Weierstrass teoremini oluştururken $(B_m)_{m \geq 1}$ polinomlarının f fonksiyonuna düzgün olarak yakınsadığını $[0, 1]$ kapalı aralığında göstermiştir; ancak bu teoremi genel bir aralık olan $[a^*, b^*]$ kapalı aralığına da genişletmek mümkündür. f fonksiyonu $[a^*, b^*]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun ve ϕ fonksiyonunu aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$\phi(y) = f[a^* + y(b^* - a^*)]$$

olmak üzere, ϕ fonksiyonu $[0, 1]$ aralığında sürekli bir fonksiyondur. Buna göre Weierstrass teoreminin hipotezinden

$$|P(y) - \phi(y)| < \epsilon, \quad y \in [0, 1]$$

olacak şekilde bir $P(y)$ polinomu mevcut bulunur. $y = \frac{z - a^*}{b^* - a^*}$ alınır ve $\mathcal{Q}(z) := P\left(\frac{z - a^*}{b^* - a^*}\right)$ olarak tanımlanırsa,

$$\phi\left(\frac{z - a^*}{b^* - a^*}\right) = f\left[a^* + (b^* - a^*)\left(\frac{z - a^*}{b^* - a^*}\right)\right] = f(z)$$

olup,

$$\left|P\left(\frac{z - a^*}{b^* - a^*}\right) - \phi\left(\frac{z - a^*}{b^* - a^*}\right)\right| = |\mathcal{Q}(z) - f(z)| < \epsilon, \quad z \in [a^*, b^*]$$

bulunur. Böylece Bernstein polinomları, keyfi bir $[a^*, b^*]$ aralığı üzerinde de Weierstrass teoremi için bir ispat tekniği oluşturmaktadır (Gupta ve Agarwal 2014).

Yaklaşım teorisinde önemli bir yere sahip çalışma alanlarından birisi de lineer pozitif operatörlerin yaklaşım özelliklerinin incelenmesidir. Lineer pozitif operatörlerin oluşturulması ve özelliklerinin çalışılması diğer operatörlere göre daha kolay olduğundan matematikçiler arasında da çok fazla ele alınan operatörlerden birisidir. Lineer pozitif operatörler kavramı 1950 li yıllarda bu şekildeki operatör dizilerinin sonlu, kapalı aralık üzerinde sürekli bir fonksiyona düzgün yakınsaklığını veren teoremin

ispatlanmasıyla büyük bir öneme sahip olmuştur. Bu teorem literatürde Bohman-Korovkin teoremi olarak bilinmesine rağmen, T. Popoviciu'nun onlardan daha önce bu konu üzerinde çalışma yaptığı da unutulmamalıdır.

" $(\mathcal{L}_m)_{m \geq 1}$ lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olsun. u_m, v_m ve w_m $[a, b]$ aralığı üzerinde düzgün olarak sıfıra yakınsayan fonksiyon dizileri olmak üzere, her $x \in [a, b]$ için

$$\mathcal{L}_m(1; x) = 1 + u_m(x)$$

$$\mathcal{L}_m(t; x) = x + v_m(x)$$

$$\mathcal{L}_m(t^2; x) = x^2 + w_m(x)$$

koşulları sağlanıyorsa bu durumda $(\mathcal{L}_m)_{m \geq 1}$ lineer pozitif operatörler dizisi $[a, b]$ aralığı üzerinde f sürekli fonksiyonuna düzgün olarak yakınsar."

Bu teorem lineer pozitif operatörler dizisinin birim operatöre yaklaşımını gösteren çok basit; ancak basit olmasının yanı sıra çok etkili kriterleri içermektedir. Dikkat edilirse $[a, b]$ kompakt aralığı üzerinde $(\mathcal{L}_m)_{m \geq 1}$ lineer pozitif operatörler dizisinin f fonksiyonuna düzgün olarak yakınsaması için f fonksiyonunun sadece $\{1, x, x^2\}$ kümesinin elemanlarından seçilmesi yeterlidir. Bu da sağlanacak kriterin ne kadar basit olduğunu bize gösterir.

Romanyalı matematikçi T. Popoviciu (1906-1975) bu teorem ile ilgili çalışmasını 1951 yılında kendi ana dilinde yayınlamıştır (Popoviciu 1950). Bu yüzden T. Popoviciu'nun katkısı uzun süre göz önüne alınmamıştır. İsveçli istatistikçi H. Bohman (1920-1996) bu teoremi $s = 0, 1, \dots, m$ için $w_{m,s}$ fonksiyonları $[0, 1]$ aralığında negatif olmayan sürekli fonksiyonlar ve $0 \leq x_{m,s} \leq 1$ olmak üzere,

$$\mathcal{L}_m(f; x) = \sum_{s=0}^m w_{m,s}(x) f(x_{m,s})$$

biçimindeki lineer pozitif operatörler için ispatlamıştır (Bohman 1952). Rus matematikçi P. P. Korovkin (1913-1987) aynı teoremi integral tipli operatörler için ispatlamış ve daha sonra bu teoriyi genelleştir (Korovkin 1953, 1960).

Bu teoremin ispatlanmasından sonra Korovkin teoremi birçok matematikçi tarafından Banach latileri, Banach cebirleri ve Banach uzayları gibi farklı yapılarda, lineer pozitif operatörlerin farklı sınıfları için genişletilmeye çalışılmıştır. Bu araştırmaların sonucu olarak da Korovkin tipli yaklaşım teorisi olarak adlandırılan yeni bir teori doğmuştur.

Daha önce Bernstein tarafından tanımlanan ve kendi adıyla anılan Bernstein polinomlar dizisi de bir lineer pozitif operatörler dizisi olup, $[0, 1]$ aralığında Korovkin teoreminin şartlarını sağlar. Bu teorem kullanılarak kapalı $[a, b]$ aralığında tanımlanan birçok lineer pozitif operatörler ortaya çıkmış ve bu operatörlerin yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Örnek olarak Cheney-Sharma operatörleri, Meyer-König ve Zeller operatörleri ve bu operatörlerin Durrmeyer, Stancu, Kantorovich ve q analoğu genelleştirmeleri verilebilir.

Yaklaşım teorisinde lineer pozitif operatörler üzerine olan çalışmalar derinleştikçe, kompakt aralıkta tanımlanan operatörlerin yanı sıra, sınırsız aralıklarda da tanımlanan operatörler ortaya çıkmış ve bunların yaklaşım özelliklerinin incelenmesi problemi hız kazanmıştır.

G. M. Mirakjan (Mirakjan 1941), Bernstein operatörlerini sonlu aralıktan sınırsız aralığa genişleterek, $f \in C[0, \infty)$ olmak üzere,

$$S_m(f; x) = e^{-mx} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mx)^s}{s!} f\left(\frac{s}{m}\right), \quad x \in [0, \infty), \quad m \in \mathbb{N}$$

şeklinde lineer pozitif operatörler dizisi tanımlamıştır. $(S_m)_{m \geq 1}$ lineer pozitif operatörü J. Favard (Favard 1944) ve O. Szasz (Szasz 1950) tarafından da ayrı olarak incelenmiştir. Bu operatör literatürde Szasz-Mirakjan operatörü olarak bilinmektedir.

$(S_m)_{m \geq 1}$ operatörleri tanımlandıktan sonra bu lineer pozitif operatörler dizisi üzerine çalışmalar yaygınlaşmıştır. Bu operatörün bazı genelleştirmeleri F. Schurer (1962, 1965) tarafından incelenmiştir. E. W. Cheney ve A. Sharma (1964) tarafından ise f konveks bir fonksiyon olduğunda $(S_m)_{m \geq 1}$ lineer pozitif operatörler dizisinin

azalan olduğu gösterilmiştir. Bu operatörler dizisinin monotonluğu A. S. Cavaretta-A. Sharma (1964) ve I. Horova (1968,1982) tarafından incelenirken, operatörlerin türevinin oluşturduğu dizinin yakınsaklığı I. Horova (1982) tarafından ve bu dizinin monotonluğu da B. Della Vecchia (1987,1988) tarafından çalışılmıştır. Szasz-Mirakjan operatörlerinin genelleştirilmeleri ve yakınsaklık özellikleri ile ilgili çalışmaların bazıları (Butzer 1954), (Boyanov ve Veselinov 1970), (Becker 1978), (Becker vd. 1978), (Herman 1978), (Totik 1983a), (Totik 1983b), (Ditzian ve Totik 1987), (Sun 1987), (Kasana vd. 1988), (Lesniewicz and Rempulska 1997), (Gupta P. ve Gupta V. 2001), (Ciupa 2003), (de la Cal ve Carcamo 2003), (Walczak 2004), (Miclauş ve Pop 2012), (Duman ve Özarslan 2007), (Aral vd. 2014), (Acar 2016) referanslarında bulunabilir.

Bernstein polinomlarının pozitif reel eksene önemli genelleştirmelerinden biri de 1957 yılında V. A. Baskakov (Baskakov 1957) tarafından yapılmıştır. $f \in C[0, \infty)$ olmak üzere,

$$V_m(f; x) = \frac{1}{(1+x)^m} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{m+s-1}{s} \left(\frac{x}{1+x} \right)^s f\left(\frac{s}{m}\right), \quad x \in [0, \infty), \quad m \in \mathbb{N}$$

şeklinde tanımlanan operatörlere Baskakov operatörleri adı verilir.

1978 yılında M. Becker (Becker 1978) bu operatörlerin ağırlıklı uzaylarda yaklaşım özelliklerini incelemiştir. 1985 yılında Sahai ve Prasad (Sahai ve Prasad 1985) Baskakov operatörlerinin Durrmeyer tipli operatörlerini tanımlamış ve bu operatörlerin çeşitli genelleştirmeleri ve yakınsaklık özellikleri M. Heilmann (Heilmann ve Müller 1989), (Heilmann 1989a) tarafından çalışılmıştır. Z. Ditzian ve V. Totik 1987 yılında Baskakov operatörlerinin Kantorovich tipli genelleştirmesini tanımlamıştır. İki değişkenli Baskakov operatörleri 1999 yılında M. Gurdek, L. Rempulska ve M. Skorupka tarafından oluşturulmuş ve bu operatörlerin yakınsaklık derecesi ve özellikleri incelenmiştir. Baskakov operatörleri ile ilgili diğer çalışmalar ise (Totik 1983c), (Alkemade 1983), (Pethe 1984), (Della Vecchia 1987), (Mihasan 1998), (Altomare ve Mangino 1999), (İspir 2001), (Deo 2005), (Aral ve Gupta 2010), (Gupta 2018), (Aral ve Erbay 2019) şeklinde verilebilir.

Szasz ve Baskakov operatörlerinin yanı sıra sınırsız aralıkta tanımlanan diğer lineer pozitif operatörlerin bazı örnekleri Post Widder operatörleri, Phillips operatörleri, Gamma operatörleri, Lupaş operatörleri, Bleimann Butzer ve Hahn operatörleri gibi operatörler ve bu operatörlerin kendi aralarında modifiye edilmiş halleri, Stancu, Durrmeyer, Kantorovich tipli genelleştirilmeleri ve bunların q-analogları şeklinde verilebilir.

Kompakt aralıkta tanımlanan lineer pozitif operatörlerin düzgün yakınsaklığının incelenmesi için Korovkin teoreminin geçerli olduğu bilinmektedir. Ancak sınırsız aralıkta tanımlanan bu operatörlerin dizisi için Korovkin teoreminin geçerli olmadığı, bu teoremin koşulları sağlandığı halde düzgün yakınsaklığın sağlanmadığı görülmektedir. Bunun üzerine 1974 ve 1976 yıllarında A. D. Gadjiev tarafından reel eksenin tamamında veya sınırsız alt aralıklarında yaklaşım koşulları ve Korovkin tipli teoremler çalışılmıştır.

$$\begin{aligned} B_\rho(\mathbb{R}) &= \{f : |f(x)| \leq M_f \rho(x); \quad M_f, f \text{ fonksiyonuna bağlı pozitif bir sabit}\} \\ C_\rho(\mathbb{R}) &= \{f : f \in B_\rho(\mathbb{R}), \quad f \text{ sürekli}\} \\ C_\rho^k(\mathbb{R}) &= \left\{ f : f \in C_\rho(\mathbb{R}), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|f(x)|}{\rho(x)} = k_f < \infty, \quad k_f \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon uzayları, reel ekseninde tanımlı sürekli, monoton artan φ fonksiyonu ve $\rho(x) = 1 + (\varphi(x))^2$ ağırlık fonksiyonu için, $C_\rho(\mathbb{R})$ uzayından $B_\rho(\mathbb{R})$ uzayına tanımlı $\{A_m\}$ lineer pozitif operatörler dizisi eğer

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|A_m(\varphi^\nu) - \varphi^\nu\|_\rho = 0, \quad \nu = 0, 1, 2$$

koşullarını sağlıyor ise, her $f \in C_\rho^k$ için

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|A_m(f) - f\|_\rho = 0$$

dır (Gadjiev 1974), (Gadjiev 1976). "

Yaklaşım teorisinde önemli çalışma konularından biri de yaklaşımın hızının belirlenmesidir. I herhangi bir kapalı ve sınırlı bir aralık olmak üzere, $\mathcal{L}_m : C(I) \rightarrow C(I)$

lineer pozitif operatörünün f fonksiyonuna düzgün olarak yakınsaması,

$$\|\mathcal{L}_m(f) - f\|_{C(I)} = a_m, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} a_m = 0$$

(a_m) dizisinin sıfıra yakınsayan bir dizi olmasıyla mümkündür. Ele alınan bu (a_m) dizisinin sıfıra yakınsama hızı, $(\mathcal{L}_m)_{m \geq 1}$ dizisinin de f fonksiyonuna yakınsama hızı ile ilişkilendirilebilir. Bir lineer pozitif operatörler dizisinin yakınsama hızı hakkında süreklilik modülü kullanılarak yorum yapılabilir.

Yaklaşımın hızının belirlenmesinin yanı sıra, bu yaklaşımın hızının hangi durumlarda daha iyi olabileceği düşüncesi yaklaşım teorisinde birçok yeni problemin ortaya çıkmasında önemli rol oynamıştır. Bu kavram altında ele alınan lineer pozitif operatörler dizilerinin birçok genelleştirmesi yapılmış ve böylelikle yeni operatör dizileri tanımlanmıştır. Gerçekte lineer pozitif operatörlerin bir f fonksiyonuna yakınsama hızını arttırmak, bir anlamda yaklaşımda meydana gelen hata miktarını azaltmak ve doğal olarak daha iyi bir yaklaşım elde etmek demektir.

Korovkin teoreminde kullanılan $\{1, x, x^2\}$ kümesi için $e_j(x) = x^j$, $j = 0, 1, 2$ olmak üzere herhangi bir $(\mathcal{L}_m)_{m \geq 1}$ lineer pozitif operatörler dizisi için

$$\mathcal{L}_m(e_0; x) = e_0(x)$$

$$\mathcal{L}_m(e_1; x) = e_1(x)$$

olduğu bilinmektedir. Bernstein polinomları, Szasz-Mirakjan operatörleri, Baskakov operatörleri ve Phillips operatörleri gibi operatörler bu duruma örnek olarak verilebilir. Bu operatörler göz önüne alındığında $\mathcal{L}_m(e_2; x) = e_2(x)$ eşitliği sağlanmaktadır. Diğer taraftan bir lineer pozitif operatörler dizisinin bu eşitliği sağlayacak şekilde modifiye edilmesi durumunda o operatör dizisinin yakınsaklık özelliklerinin ve yaklaşma hızının ne olacağı konusu merak uyandırmıştır ve bu durum göz önüne alınarak lineer pozitif operatörleri genelleştirme çalışmaları yaygınlaşmıştır.

İlk olarak J. P. King 2003 yılında Bernstein operatörünün $e_2(x) = x^2$ fonksiyonunu koruyacak şekilde genelleştirmesini ele almıştır. $V_m : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, $f \in C[0, 1]$

olmak üzere,

$$V_m(f; x) = \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} (r_m(x))^s (1 - r_m(x))^{m-s} f\left(\frac{s}{m}\right), \quad x \in [0, 1], \quad m \in \mathbb{N}$$

lineer pozitif operatörü için r_m fonksiyonu

$$r_m(x) = \begin{cases} r_1(x) = x^2 \\ r_m(x) = -\frac{2}{m-1} + \sqrt{\left(\frac{m}{m-1}\right)x^2 + \frac{1}{4(m-1)^2}}, \quad m = 2, 3, \dots \end{cases}$$

şeklinde elde edilmiştir. Burada r_m yardımcı fonksiyonu,

$$0 \leq r_m(x) \leq 1, \quad x \in [0, 1], \quad m \in \mathbb{N}$$

biçimindedir ve

$$\lim_{m \rightarrow \infty} r_m(x) = x, \quad x \in [0, 1]$$

özellğine sahiptir. J. P. King'in bu çalışmasında modifiye edilmiş $(V_m)_{m \geq 1}$ operatörler dizisinin yaklaşım özellikleri incelenmiş ve $[0, \frac{1}{3})$ aralığında, genelleştirilmiş operatörler dizisinin en azından klasik Bernstein operatörleri kadar iyi bir yaklaşım derecesine sahip olduğunu ispatlanmıştır (King 2003).

2006 yılında O. Agratini, J. P. King'in bu düşüncesinden yola çıkarak genel King tipli operatörlerin çeşitli fonksiyon uzaylarında farklı süreklilik modülleri yardımıyla yaklaşımını incelemiş ve bu tekniği Szasz-Mirakjan, Baskakov ve Bernstein Chlodovsky operatörlerine uygulayarak araştırmasını örneklemiştir (Agratini 2006).

Aynı yılda D. Cardenas Morales ve arkadaşları Bernstein operatörünün $e_2 + \lambda e_1$ i koruyan $B_{m,\lambda}$ modifiye operatörünü $B_{m,\lambda} : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, $f \in C[0, 1]$ olmak üzere,

$$B_{m,\lambda}(f; x) = \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} (d_{m,\lambda}(x))^s (1 - d_{m,\lambda}(x))^{m-s} f\left(\frac{s}{m}\right), \quad x \in [0, 1], \quad m \in \mathbb{N}$$

şeklinde tanımlamıştır. Burada

$$d_{m,\lambda}(x) = -\frac{m\lambda + 1}{2(m-1)} + \sqrt{\frac{(m\lambda + 1)^2}{4(m-1)^2} + \frac{m(\lambda x + x^2)}{m-1}}, \quad m = 2, 3, \dots$$

biçimindedir. Bu çalışmada modifiye Bernstein polinomunun şekil koruma ve yaklaşım özellikleri incelenmiş ve bu özelliklere dayanılarak yaklaşım hızı ile ilgili bilgiler elde edilmiştir. Ayrıca klasik Bernstein polinomu ile $B_{m,\lambda}$ polinomunun yaklaşım hızları karşılaştırılmış, çizilen grafiklerle genelleşmiş operatörlerin yakınsama hızlarının daha iyi olduğu sonucuna varılmıştır (Cardenas Morales vd. 2006).

2007 yılında O. Duman ve M. A. Özarslan, O. Agratini'nin makalesinde kısaca bahsettiği King tipli Szasz-Mirakjan operatörlerini daha ayrıntılı bir şekilde incelemiştir. $D_m^* : C[0, \infty) \rightarrow C[0, \infty)$, $f \in C[0, \infty)$ olmak üzere,

$$D_m^*(f; x) = e^{-mh_m^*(x)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mh_m^*(x))^s}{s!} f\left(\frac{s}{m}\right), \quad x \in [0, \infty), \quad m \in \mathbb{N} \quad (1.1)$$

şeklinde elde etmiştir. u_m^* fonksiyonu,

$$h_m^*(x) = \frac{-1 + \sqrt{4m^2x^2 + 1}}{2m}, \quad x \in [0, \infty), \quad m \in \mathbb{N}$$

biçiminde olup,

$$0 \leq h_m^*(x) < \infty, \quad x \in [0, \infty), \quad m \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} h_m^*(x) = x, \quad x \in [0, \infty)$$

özellikleri sağlanır. Bu çalışmada $(D_m^*)_{m \geq 1}$ genelleştirilmiş operatör dizisinin, klasik Szasz-Mirakjan operatöründen daha iyi bir yaklaşım hızına sahip olduğu gösterilmiş ve bu operatörün noktasal açıdan yaklaşımı incelenmiştir (Duman ve Özarslan 2007).

2008 yılında O. Agratini, D. Cardenas Morales ve arkadaşlarının düşüncesini lineer pozitif operatörlerin genel hali olan

$$\mathcal{L}_m(f; x) = \sum_{s \in I_m} u_{m,s}(x) f(x_{m,s}), \quad I_m \subset \mathbb{N}$$

şeklindeki $(\mathcal{L}_m)_{m \geq 1}$ operatör dizilerine uygulamıştır ve bu çalışmada tanım aralığının $J = [0, 1]$ ve $J = [0, \infty)$ biçiminde olduğu durumlarda yakınsaklık özellikleri ayrı ayrı incelenmiştir. Bernstein, Szasz-Mirakjan ve Baskakov operatörlerinin durumlarını da içinde barındıran çalışmada Szasz-Mirakjan modifiye operatörü,

$\mathcal{L}_{m,\alpha} : C[0, \infty) \rightarrow C[0, \infty)$ ve $\alpha > 0$ için,

$$\mathcal{L}_{m,\alpha}(f; x) = \sum_{s=0}^{\infty} e^{-mv_{m,\alpha}(x)} \frac{(mv_{m,\alpha}(x))^s}{s!} f\left(\frac{s}{m}\right)$$

biçiminde tanımlanmıştır. Burada $v_{m,\alpha} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde bir fonksiyon olup,

$$v_{m,\alpha}(x) = -\frac{(\alpha m + 1)}{2m} + \sqrt{\frac{(\alpha m + 1)^2}{4m^2} + (x^2 + \alpha x)}, \quad x \in [0, \infty), \quad m \in \mathbb{N}$$

dir (Agratini ve Tarabie 2008).

2009 yılında L. Rempulska ve K. Tomczak King tipli operatörlerin ağırlıklı uzaylardaki yaklaşımını inceleyen çalışmasını yayınlamıştır ve Szasz-Mirakjan operatörleri, Baskakov operatörleri, Post-Widder operatörleri ve Stancu operatörleri ile örnekleyerek çalışmasını zenginleştirmiştir (Rempulska ve Tomczak 2009).

Aynı yılda Szasz-Mirakjan Kantorovich operatörlerinin King tiplisi O. Duman vd. tarafından (Duman vd. 2009) çalışılmış ve 2010 yılında da bu genelleştirilmiş operatörün lokal yaklaşım özellikleri ele alınmıştır (Özarslan ve Duman 2010).

2011 yılında N. I. Mahmudov tarafından Szasz-Mirakjan operatörünün q genelleştirmesi $e_2(x) = x^2$ fonksiyonunu koruyacak şekilde modifiye edilmiş ve ağırlıklı uzaylardaki yaklaşım özellikleri ile noktasal yaklaşımı incelenmiştir (Mahmudov 2011).

2016 yılında q -Szasz-Mirakjan Kantorovich operatörünün (Mursaleen vd. 2016), 2018 yılında q -Szasz-Mirakjan operatörünün Dunkl analogunun (Mursaleen ve Rahman 2018), 2019 yılında da (p, q) Szasz-Mirakjan operatörünün (Mursaleen vd 2019) King tipli genelleşmesi M. Mursaleen ve arkadaşları tarafından çalışılmıştır.

2017 yılında T. Acar, A. Aral ve H. Gonska, King tipli operatörlere yeni bir bakış açısı kazandırmıştır. Bugüne kadar test fonksiyonları ya da onların lineer birleşimlerini koruyacak şekilde genelleştirilen lineer pozitif operatörler, bu çalışmada üstel tipten bir fonksiyonu koruyacak şekilde modifiye edilmiştir. Aslında 2010

yılında J. M. Aldaz ve H. Render yaptıkları çalışmada lineer pozitif operatörler dizisinin f fonksiyonuna daha hızlı yaklaşımını elde edebilmek için konvekslik ve genelleştirilmiş konvekslik tanımını temel alarak yeni teoriler geliştirmişler ve bu amaçla Bernstein operatörlerinin üstel fonksiyonu sabit bırakacak şekilde yeni bir modifikasyonunu elde etmişlerdir (Aldaz ve Render 2010). 2014 yılında da M. Birou test fonksiyonlarını (veya onların lineer birleşimlerini) ya da üstel fonksiyonu koruyacak şekilde genelleştirilen lineer pozitif operatörlerin, f fonksiyonunun azalanlık koşulu ve genelleştirilmiş konvekslik tanımı altında yakınsama ve şekil koruma özelliklerini incelemiştir (Birou 2014). Bu çalışmada da Bernstein operatörlerinin modifikasyonları çalışılmıştır. T. Acar, A. Aral ve H. Gonska ise yaptıkları çalışmada bu zamana kadar Bernstein operatörüne uygulanan bu düşüncüyü sınırsız aralıkta tanımlanan Szasz-Mirakjan operatörlerine uygulamışlardır (Acar vd. 2017). $R_{\alpha,m}^* : C[0, \infty) \rightarrow C[0, \infty)$ ve $a > 0$ için,

$$R_{a,m}^*(f; x) = e^{-m\alpha_m(x)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(m\alpha_m(x))^s}{s!} f\left(\frac{s}{m}\right)$$

biçiminde tanımlanmıştır. Burada $\alpha_m(x) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde bir fonksiyon olup,

$$\alpha_m(x) = \frac{2ax}{m \left(e^{\frac{2a}{m}} - 1 \right)}, \quad x \in [0, \infty), \quad m \in \mathbb{N}$$

dir. Bu yeni operatörler dizisinin düzgün yakınsaklığı ve noktasal yaklaşım özellikleri incelenmiş ve şekil koruma özellikleri hakkında bilgi verilmiştir. $(R_{\alpha,m}^*)$ dizisinin yaklaşım hızı, klasik Szasz-Mirakjan operatörler dizisinin yaklaşım hızıyla karşılaştırılarak daha iyi bir yaklaşım hızına sahip olduğu ispatlanmıştır.

Daha sonra bu düşünce Szasz-Mirakjan operatörünün Durrmeyer ve Kantorovich tipli genelleştirmeleri, Baskakov operatörleri, Phillips operatörleri gibi birçok lineer pozitif operatörlere uygulanmıştır (Gürel Yılmaz vd 2017), (Gupta ve Tachev 2017), (Deniz vd. 2018), (Gupta ve Aral 2018), (Gupta ve Acı 2018), (Aral vd. 2018).

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Şu ana kadar üzerinde durulan yaklaşımlar teorisinin ortaya çıkışının, lineer pozitif

tif operatörler kavramının gelişiminin ve günümüzde bu konu ile ilgili yapılan bazı çalışmaların anlatıldığı bölüm tezin giriş bölümünü oluşturmaktadır.

Tezin ikinci bölümünde tez için gerekli olan bazı temel tanımlara ve teoremlere yer verilmiştir. Lineer pozitif operatörlerin sonlu aralıkta sürekli fonksiyonlar uzayında ve ağırlıklı uzaylarda yakınsaklık koşulları anlatılmış ve tezde kullanılacak olan bazı operatörler tanıtılmıştır.

Tezin üçüncü ve dördüncü bölümleri tamamen orjinal olup aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Üçüncü bölümde $(S_{m,\lambda})$ ile gösterilen $e_2 + \lambda e_1$ fonksiyonunu koruyan genelleştirilmiş Szasz-Mirakjan operatörleri ele alınmıştır. Bu operatörler için şekil koruma özellikleri ve yaklaşım özellikleri incelenmiş, noktasal yakınsaklığın incelendiği Voronovskaja tipli teorem göz önüne alınmıştır. Bu bölümün son kısmında ise $(S_m)_{m \geq 1}$ klasik Szasz operatörleri ile $(S_{m,\lambda})$ King tipli Szasz-Mirakjan operatörlerinin yaklaşım hızları karşılaştırılmıştır. Son olarak bu operatörlerin yaklaşım sonuçları grafiklerle ve hata tahmini tablosuyla da gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde ise $(\tilde{V}_{m,\alpha}^*)$ ile ifade edilen e^{-x} fonksiyonunu koruyan genelleştirilmiş Baskakov-Kantorovich operatörlerine yer verilmiştir. Bu operatörlerin üstel süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım özellikleri ele alınmış ve Voronovskaya tipli teoremi üzerinde durulmuştur.

Son bölüm olan beşinci bölümde ise elde edilen sonuçlar tartışılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Temel Tanımlar ve Teoremler

Bu bölümde yaklaşım teorisinde önemli bir çalışma alanı olan lineer pozitif operatörler ile ilgili bazı temel kavramlar ve notasyonlardan bahsedilecektir. Ayrıca ilerleyen bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanımlar ve teoremler verilecektir. Lineer pozitif operatörlerin sınırlı ve sınırsız aralıklardaki yakınsaklık koşulları geniş bir şekilde ele alınacak ve bu operatörlerin yakınsaklık hızlarının incelenmesi ile ilgili belirli yöntemler sunulacaktır. Ayrıca çalışmada kullanılacak olan bilinen bazı lineer pozitif operatörler tanıtılacak ve onların sağladığı bazı özellikler hakkında bilgiler verilecektir.

Tanım 2.1 (Operatör) X^* ve Y^* iki fonksiyon uzayı olsun. Eğer X^* 'dan alınan herhangi bir f fonksiyonuna Y^* uzayında bir g fonksiyonu karşılık getiren bir $\mathcal{L}$ kuralı varsa buna X^* üzerinde bir operatördür denir ve her $f \in X^*$ için

$$\mathcal{L}(f; x) = g(x)$$

şeklinde gösterilir. Burada X^* uzayına $\mathcal{L}$ operatörünün tanım bölgesi denir ve $X^* = D(\mathcal{L})$ ile gösterilir. $\mathcal{L}$ operatörü f fonksiyonuna Y^* 'da bir g fonksiyonu karşılık getirir ki bu şekildeki g fonksiyonlarının kümesine $\mathcal{L}$ operatörünün değer kümesi denir ve bu küme $R(\mathcal{L})$ ile gösterilir.

$\mathcal{L}(f; x) = g(x)$ olmak üzere, $\mathcal{L}$ operatörü t değişkenine bağlı olan f fonksiyonunu x değişkenine bağlı olan g fonksiyonuna götürür (Hacıyev ve Hacısalihoglu 1995).

Tanım 2.2 (Lineer Operatör) X^* ve Y^* iki fonksiyon uzayı olmak üzere

$\mathcal{L} : X^* \rightarrow Y^*$ şeklinde tanımlanmış operatör göz önüne alınsın. f ve g fonksiyonları X^* uzayından alınan herhangi iki fonksiyon ve λ_1 ve λ_2 sayıları da keyfi iki reel sayı olmak üzere,

$$\mathcal{L}(\lambda_1 f + \lambda_2 g; x) = \lambda_1 \mathcal{L}(f; x) + \lambda_2 \mathcal{L}(g; x)$$

koşulu sağlandığı takdirde $\mathcal{L}$ operatörüne lineer operatör denir.
(Hacıyev ve Hacısalihoglu 1995).

Tanım 2.3 (Pozitif Operatör) X^+ ve Y^+ ile sırasıyla X^* ve Y^* uzayından alınan pozitif değerli fonksiyonların uzayı gösterilsin. Yani

$$X^+ = \{f \in X^* : f(t) \geq 0\}$$

$$Y^+ = \{g \in Y^* : g(t) \geq 0\}$$

olsun. Eğer X^* uzayında tanımlanmış $\mathcal{L}$ operatörü X^+ uzayından alınan her bir f fonksiyonunu Y^+ uzayından alınan bir g fonksiyonuna dönüştürüyorsa yani, $\forall t \in D(f)$ için

$$f(t) \geq 0 \text{ olduğunda } \mathcal{L}(f; x) \geq 0$$

oluyorsa bu takdirde $\mathcal{L}$ operatörüne pozitif operatör denir (Hacıyev ve Hacısalihoglu 1995).

Lineerlik şartıyla birlikte pozitiflik şartını da sağlayan operatörlere lineer pozitif operatörler adı verilir.

Lemma 2.1 $\mathcal{L} : X^* \rightarrow Y^*$ bir lineer pozitif operatör olsun. $\mathcal{L}$ operatörü monotonluk özelliğini sağlar. Yani her t için $f(t) \leq g(t)$ olduğunda $\mathcal{L}(f; x) \leq \mathcal{L}(g; x)$ eşitsizliği sağlanır (Hacıyev ve Hacısalihoglu 1995).

Lemma 2.2 $\mathcal{L}$ lineer pozitif operatör olmak üzere,

$$|\mathcal{L}(f; x)| \leq \mathcal{L}(|f|; x)$$

eşitsizliği sağlanır (Hacıyev ve Hacısalihoglu 1995).

Tanım 2.4 (Normlu Uzay) X^* bir lineer uzay olsun. $\|\cdot\| : X^* \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X^* üzerinde bir norm, X^* uzayına da bir normlu uzay denir.

i) $\forall x \in X^*$ için $\|x\| \geq 0$

ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

iii) $\forall x \in X^*$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

iv) $x, y \in X^*$ olmak üzere $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şeklindedir (Kreyszig 1978).

Tanım 2.5 (Sınırlı Operatör) X^* ve Y^* iki fonksiyon uzayı, $\mathcal{L} : X^* \rightarrow Y^*$ bir operatör olsun. $D(\mathcal{L}) \subset X^*$ $\mathcal{L}$ operatörlerinin tanım kümesini, $\|\cdot\|_{X^*}$ ve $\|\cdot\|_{Y^*}$ ise sırasıyla X^* ve Y^* uzayları üzerindeki normları gösterebilir. $\forall f \in D(\mathcal{L})$ için,

$$\|\mathcal{L}f\|_{Y^*} \leq M \|f\|_{X^*}$$

olacak şekilde $M \in \mathbb{R}^+$ varsa $\mathcal{L}$ ye $D(\mathcal{L})$ üzerinde sınırlı operatör denir.

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}\|_{X^* \rightarrow Y^*} &= \inf \{M : \|\mathcal{L}f\|_{Y^*} \leq M \|f\|_{X^*}\} \\ &= \sup_{\|f\|_{X^*} \neq 0} \frac{\|\mathcal{L}f\|_{Y^*}}{\|f\|_{X^*}} \end{aligned}$$

sayısına $\mathcal{L}$ operatörünün normu denir (Hacıyev ve Hacısalihoglu 1995).

Tanım 2.6 (Bölünmüş Fark) f fonksiyonunun $D(f)$ tanım kümesinden birbirinden farklı $x_0^*, x_1^*, \dots, x_m^*$ şeklinde $(m + 1)$ tane nokta seçilsin.

$$\begin{aligned} f[x_0^*] &= f(x_0^*) \\ f[x_0^*, x_1^*] &= \frac{f(x_1^*) - f(x_0^*)}{x_1^* - x_0^*} \\ \dots &= \dots \\ f[x_0^*, x_1^*, \dots, x_m^*] &= \frac{f[x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*] - f[x_0^*, x_1^*, \dots, x_{m-1}^*]}{x_m^* - x_0^*}, \quad m \geq 1 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan eşitliğe sırasıyla f fonksiyonunun birinci ve m-inci mertebeden bölünmüş farkları denir (DeVore ve Lorentz 1993).

Tanım 2.7 (İleri Fark Operatörü) Keyfi bir f fonksiyonu için

$$\Delta f(x_j^*) = f(x_{j+1}^*) - f(x_j^*)$$

olmak üzere $k \geq 1$ için,

$$\Delta^k f(x_j^*) = \Delta^{k-1} f(x_{j+1}^*) - \Delta^{k-1} f(x_j^*)$$

ile tanımlanan operatöre ileri fark operatörü adı verilir.

İleri fark operatörü bölünmüş farklar yardımıyla da ifade edilebilir.

$\forall j \geq 0$ için $x_j^* = j$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} f(x_{j+1}^*) - f(x_j^*) &= f(j+1) - f(j) \\ &= f[j, j+1] \\ &= \Delta f(x_j^*) \end{aligned}$$

dir. Bunu üç nokta için yaparsak,

$$\begin{aligned} f[x_j^*, x_{j+1}^*, x_{j+2}^*] &= \frac{f[x_{j+1}^*, x_{j+2}^*] - f[x_j^*, x_{j+1}^*]}{x_{j+2} - x_j} \\ &= \frac{1}{2} [\Delta f(x_{j+1}^*) - \Delta f(x_j^*)] \\ &= \frac{1}{2} \Delta^2 f(x_j^*) \end{aligned}$$

elde edilir (DeVore ve Lorentz 1993).

Şimdi bunu genelleştiren teoremi verelim.

Teorem 2.1 $\forall j, s \geq 0$ için $x_j^* = j$ olmak üzere,

$$f[x_j^*, x_{j+1}^*, \dots, x_{j+s}^*] = \frac{1}{s!} \Delta^s f(x_j^*)$$

eşitliği ile verilir.

Tanım 2.8 (Lipschitz Şartı) $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $[a, b]$ aralığında tanımlı bir f fonksiyonu verilsin. Her $x, t \in [a, b]$, $M > 0$ ve $0 < \gamma \leq 1$ için,

$$|f(t) - f(x)| \leq M |t - x|^\gamma$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonlarının sınıfına Lipschitz sınıfı denir ve $Lip_M\gamma$ ile gösterilir. Burada M Lipschitz sabiti olarak adlandırılır.

Lemma 2.3 f , $[a, b]$ aralığında tanımlı bir fonksiyon, $0 < \gamma \leq 1$ ve $M > 0$ olsun.

i) $f \in Lip_M\gamma$ ise f süreklidir.

ii) f türevlenebilir ve $|f'(x)| \leq M$ ise $f \in Lip_M1$ dir.

iii) $f \in Lip_M\gamma \iff w(f; \delta) \leq M\delta^\gamma$ şeklindedir.

iv) $\alpha < \beta$ ise $Lip_\beta \subset Lip_\alpha$ olup bu ifadeler M sayısından bağımsızdır.

Tanım 2.9 (Hölder Eşitsizliği) p ve q , $1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ koşullarını sağlayan iki sayı ve $\ell_p = \left\{ (x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \text{ yakınsak} \right\}$ olmak üzere, her $x = (x_n) \in \ell_p$ ve her $y = (y_n) \in \ell_q$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q \right)^{1/q}$$

eşitsizliğine Hölder eşitsizliği denir.

Hölder eşitsizliğinde $p = q = 2$ alındığı takdirde

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2 \right)^{1/2}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğe Cauchy-Schwarz eşitsizliği adı verilir.

Tanım 2.10 (Konveks Fonksiyon) $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ve $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin.

$\forall x, y \in [a, b]$ ve $\alpha \in [0, 1] \in \mathbb{R}$ için

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

oluyorsa f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir (Hacıyev ve Hacısalihoglu 1995).

Bu tanımı $m + 1$ nokta için genelleştirirsek,

$\forall x_0, x_1, \dots, x_m \in [a, b]$ ve $\lambda_m \in \mathbb{R}$ için $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$ olmak üzere

$$f\left(\sum_{s=0}^m \lambda_s x_s\right) \leq \sum_{s=0}^m \lambda_s f(x_s)$$

eşitsizliği sağlanırsa f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir.

Teorem 2.2 f fonksiyonu $[a, b]$ de konveks olması için gerek ve yeter koşul f 'nin ikinci mertebeden bölünmüş farklarının pozitif olmasıdır (Hacıyev ve Hacısalihoglu 1995).

2.2 Genelleştirilmiş Konvekslik

Genelleştirilmiş konvekslik tanımı yaklaşım teorisinde önemli bir yere sahip olup özellikle lineer pozitif operatörler dizisinin monotonluğu hakkında yorum yapabilmemize ve bu operatörlerin şekil koruma özellikleriyle ilgili bilgi sahibi olmamıza imkan sağlamaktadır. Bu tanım matematikte interpolasyon metodu, genelleştirilmiş moment problemleri, nümerik analiz, Sturm-Liouville problemlerinin öz fonksiyonlarının sahip olduğu salınım özellikleri, sınır değer problemleri, toplanabilirlik gibi konuların aydınlatılmasında önemli rol oynayan, belirli özelliklere sahip fonksiyonların oluşturduğu Chebyshev sistemi üzerine kuruludur.

Bu sistemin temeli 1951 yılında M. G. Krein tarafından atılmıştır. Bu konu üzerine S. N. Bernstein, R. Descartes, A. Haar, E. N. Laguerre, P. L. Chebyshev ve de la Vallee Poussin gibi matematikçilerin çok büyük katkısı olduğu gibi, N. I. Achieser, I. P. Natanson, G. Polya, G. Szegő gibi bilim adamlarının da dikkate değer çalışmaları bulunmaktadır.

Tanım 2.11 (Chebyshev Sistemi) $\{u_s^*\}_{s=0}^m$ fonksiyonları kapalı ve sınırlı $[a, b]$ aralığında tanımlı, sürekli, reel değerli fonksiyonlar olmak üzere eğer

$$\begin{vmatrix} u_0^*(x_0) & u_0^*(x_1) & \cdots & u_0^*(x_m) \\ u_1^*(x_0) & u_1^*(x_1) & \cdots & u_1^*(x_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_m^*(x_0) & u_m^*(x_1) & \cdots & u_m^*(x_m) \end{vmatrix} > 0, \quad a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_m \leq b \quad (2.1)$$

sağlanıyorsa, bu durumda $\{u_s^*\}_{s=0}^m$ fonksiyonlarının oluşturduğu sisteme $[a, b]$ üzerinde Chebyshev sistemi adı verilir ve kısaca T -sistemi olarak gösterilir.

(Karlin ve Studden 1966).

Tanım 2.12 (Genişletilmiş Chebyshev Sistemi) $\{u_s^*\}_{s=0}^m \in C^m[a, b]$ olmak üzere eğer

$$\begin{vmatrix} u_0^*(x_0) & u_0'(x_1) & \cdots & u_0^{*(m)}(x_m) \\ u_1^*(x_0) & u_1'(x_1) & \cdots & u_1^{*(m)}(x_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_m^*(x_0) & u_m'(x_1) & \cdots & u_m^{*(m)}(x_m) \end{vmatrix} > 0, \quad a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_m \leq b \quad (2.2)$$

sağlanıyorsa bu durumda $\{u_s^*\}_{s=0}^m$ fonksiyonlarının oluşturduğu sisteme $[a, b]$ üzerinde genişletilmiş Chebyshev sistemi adı verilir ve kısaca ET -sistemi olarak gösterilir (Karlin ve Studden 1966).

Eğer her bir $r = 0, 1, \dots, m$ için $\{u_s^*\}_{s=0}^r$ sistemi bir genişletilmiş Chebyshev sistemi ise bu takdirde bu sistem genişletilmiş tam Chebyshev sistemi olarak adlandırılır ve kısaca ECT -sistemi olarak gösterilir (Karlin ve Studden 1966).

Genelleştirilmiş konvekslik kavramı ilk olarak E. Hopf tarafından 1926 yılında ortaya çıkmıştır. Daha sonra T. Popoviciu (1936), E. F. Beckenbach (1937), F. F. Bonsall (1950), R. Bellman (1961), S. Karlin ve A. Navikoff (1963) tarafından çalışılmıştır.

Tanım 2.13 f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlı bir fonksiyon, $\{u_s^*\}_{s=0}^m$ fonksiyonları da $[a, b]$ aralığında tanımlı, sürekli, reel değerli fonksiyonlar ve $\{u_s^*\}_{s=0}^m$ fonksiyonlarının oluşturduğu sistem bir genişletilmiş tam Chebyshev sistemi olsun. Buna göre eğer,

$$\begin{vmatrix} u_0^*(x_0) & u_0^*(x_1) & \cdots & u_0^*(x_{m+1}) \\ u_1^*(x_0) & u_1^*(x_1) & \cdots & u_1^*(x_{m+1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_m^*(x_0) & u_m^*(x_1) & \cdots & u_m^*(x_{m+1}) \\ f(x_0) & f(x_1) & \cdots & f(x_{m+1}) \end{vmatrix} \geq 0, \quad a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_{m+1} \leq b \quad (2.3)$$

sağlanıyorsa bu takdirde f fonksiyonuna $\{u_s^*\}_{s=0}^m$ fonksiyonlarına göre konvektir denir ve (2.3) ifadesini sağlayan f fonksiyonlarının kümesi $\mathcal{C}(u_0^*, u_1^*, \dots, u_m^*)$ ile gösterilir (Lapidot 1978).

Genelleştirilmiş konvekslik tanımını $s = 0, 1$ için $\{u_0^*, u_1^*\}$ fonksiyonları yardımıyla tekrar özetlersek, $\{u_0^*, u_1^*\}$, $[a, b]$ üzerinde tanımlı genişletilmiş tam Chebyshev sistemi olmak üzere

$$\begin{vmatrix} u_0^*(x_0) & u_0^*(x_1) & u_0^*(x_2) \\ u_1^*(x_0) & u_1^*(x_1) & u_1^*(x_2) \\ f(x_0) & f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix} \geq 0, \quad a \leq x_0 < x_1 < x_2 \leq b \quad (2.4)$$

sağlanıyorsa bu takdirde f fonksiyonuna $\{u_0^*, u_1^*\}$ fonksiyonlarına göre konvektir denir ve (2.4) ifadesini sağlayan f fonksiyonlarının kümesi $\mathcal{C}(u_0^*, u_1^*)$ ile gösterilir (Ziegler 1968).

Eğer f fonksiyonu (a, b) aralığında sürekli ve reel değerli fonksiyonların uzayından alınan bir fonksiyon ise bu durumda genelleştirilmiş konvekslik tanımında $a < x_0 < x_1 < x_2 < b$ alınabilir. Genelleştirilmiş konvekslikte eğer $u_i(t) = t^i$, $i = 0, 1$ seçilirse klasik konvekslik tanımına ulaşılır (Ziegler 1968).

Uyarı 2.1 Tanım 2.13'te $C[a, b]$ uzayı yerine I sonlu ya da sonsuz, açık ya da kapalı bir aralık olmak üzere $C(I)$ uzayı da alınabilir. Buna göre genelleştirilmiş konvekslik tanımı $[0, \infty)$ aralığı için de uygulanabilir (Ziegler 1968).

2.3 Sonlu Aralıkta Sürekli Fonksiyonlar Uzayı

Tanım 2.14 Kapalı bir $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı, sürekli ve reel değerli fonksiyonların oluşturduğu kümeye $C[a, b]$ fonksiyon uzayı denir.

$$C[a, b] = \{f : f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ sürekli}\}$$

kümesidir.

$C[a, b]$ fonksiyonlar uzayı üzerinde toplama (+) ve skalerle çarpma (.) işlemleri,

$$+ : C[a, b] \times C[a, b] \longrightarrow C[a, b]$$

$$(f, g) \longrightarrow (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$. : \mathbb{R} \times C[a, b] \longrightarrow C[a, b]$$

$$(\lambda, f) \longrightarrow (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $C[a, b]$, üzerinde tanımlanan bu işlemler ile birlikte bir vektör uzayıdır.

$C[a, b]$ uzayında bir norm,

$$\|f\|_{C[a, b]} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

ile gösterilir. Burada $\|\cdot\|_{C[a, b]} : C[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere,

i) $\forall f \in C[a, b]$ için $\|f\| \geq 0$

ii) $\forall f \in C[a, b]$ için $\|f\| = 0 \iff f = 0$

iii) $\forall f \in C[a, b]$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$

iv) $\forall f, g \in C[a, b]$ için $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$

koşulları sağlandığından $(C[a, b], \|\cdot\|_{C[a, b]})$ uzayı bir lineer normlu uzaydır.

Tanım 2.15. Bir (f_m) fonksiyonlar dizisinin f fonksiyonuna $C[a, b]$ normunda düzgün yakınsak olması için her $x \in [a, b]$ olmak üzere,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m - f\|_{C[a, b]} = 0$$

olmasıdır. Norm tanımını kullanıldığı takdirde,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \max_{a \leq x \leq b} |f_m(x) - f(x)| = 0$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

$C[a, b]$ uzayının normuna göre yakınsama düzgün yakınsamadır. Düzgün yakınsama $f_m(x) \Rightarrow f(x)$ şeklinde gösterilir.

2.4 Lineer Pozitif Operatörler Dizisinin Yakınsaklık Koşulları

Yaklaşım teorisi, ele alınan bir fonksiyonun, kendisinden daha basit şekilde özellikleri incelenebilen ve dolayısıyla kolaylıkla daha fazla sonuç elde edinebilen fonksiyonlara yakınsamasını ele alır. Yaklaşım teorisi yardımıyla karmaşık bir fonksiyon hakkında daha geniş bir bilgi sahibi olmamız sağlanır. Bu amaca yönelik 1885 yılında Weierstrass $[a, b]$ aralığında sürekli her fonksiyona bir polinom yardımıyla yaklaşılabilirliğini ispatlamıştır. Bu teorem yaklaşım teorisinde büyük bir öneme sahiptir; çünkü sürekli fonksiyonlar yerine çok daha kolay incelenebilen polinomu ele almak daha kolaydır.

Teorem 2.3 (Weierstrass Yaklaşım Teoremi) f fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayından alınan bir eleman olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için $|f(x) - \tilde{P}_m(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde derecesi m . olan bir $(\tilde{P}_m)$ polinom dizisi vardır. Başka bir ifadeyle, $[a, b]$ aralığında sürekli her f fonksiyonuna düzgün olarak yakınsayan bir $(\tilde{P}_m)$ polinomlar dizisi vardır (Weierstrass 1885).

Bu teoremin bir ispatını 1912 yılında Rus matematikçi S.N. Bernstein $[0, 1]$ aralığındaki sürekli fonksiyonlar uzayında tanımlı ve yaklaşım teorisinde çok önemli bir yere sahip olan Bernstein polinomlarını tanımlayarak yapmıştır.

Yaklaşım teorisinde önemli bir yere sahip çalışma alanlarından birisi de lineer pozitif operatörler ve bunların yaklaşım özelliklerinin incelenmesidir. Lineer pozitif operatörler kavramı 1950 li yıllarda bu şekildeki operatör dizilerinin sonlu, kapalı aralık üzerinde sürekli fonksiyona düzgün yakınsaklığı veren, Bohman-Korovkin teoremi olarak bilinen teoremin ispatlanmasıyla daha geniş çapta çalışılmaya başlanmıştır. Bu teoremin ispatlanmasında, ismi geçmemesine rağmen T. Popoviciu'nun da büyük katkıları olmuştur.

Teorem 2.4 (Bohman-Korovkin Teoremi) f , $[a, b]$ aralığında sürekli, reel değerli ve tüm reel ekseninde sınırlı bir fonksiyon, $(\mathcal{L}_m)_{m \geq 1}$ lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olsun. u_m, v_m ve w_m $[a, b]$ aralığı üzerinde düzgün olarak sifıra yakınsayan fonksiyon dizileri olmak üzere, her $x \in [a, b]$ için,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_m(1; x) &= 1 + u_m(x) \\ \mathcal{L}_m(t; x) &= x + v_m(x) \\ \mathcal{L}_m(t^2; x) &= x^2 + w_m(x)\end{aligned}$$

koşulları sağlanıyorsa bu durumda $(\mathcal{L}_m)_{m \geq 1}$ lineer pozitif operatörler dizisi $[a, b]$ aralığı üzerinde f sürekli fonksiyonuna düzgün olarak yakınsar (*Korovkin 1953*).

Bohman-Korovkin teoremi yaklaşım teorisinde büyük bir öneme sahiptir. Çünkü ele alınan operatörün $1, t, t^2$ deki görüntülerinin sırasıyla $1, x, x^2$ ye düzgün yakınsadığını göstermek demek bundan sonra bu operatörün sonlu aralıktaki bütün sürekli fonksiyonlara düzgün yakınsadığını göstermek demektir.

Korovkin teoreminde $e_i(t) = t^i$, $i = 0, 1, 2$ fonksiyonları Korovkin test fonksiyonları olarak adlandırılır.

2.5 Süreklilik Modülü

Yaklaşım teorisinde lineer pozitif operatörler ile çalışırken karşımıza çıkan diğer önemli bir problem ele alınan operatörün sürekli bir fonksiyona olan yakınsamasında yaklaşım hızını belirlemektir. Bunu belirlemek için kullanılan en önemli metotlardan biri süreklilik modülüdür. Süreklilik modülü kavramı 1910 yılında H. Lebesgue tarafından tanımlanmış ve 1911 yılında D. Jackson tarafından doktora tezinde de çalışılmıştır.

Tanım 2.15 f fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı, sürekli ve reel değerli bir fonksiyon olsun. $x, y \in [a, b]$ olmak üzere $|x - y| \leq \delta$ şartını sağlayan keyfi bir $\delta > 0$ için $|f(x) - f(y)|$ değerlerinin en küçük üst sınırına f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında

süreklilik modülü denir.

$$\omega(f; \delta) = \sup_{\substack{x, y \in [a, b] \\ |x-y| \leq \delta}} |f(x) - f(y)| \quad (2.5)$$

veya

$$\omega(f; \delta) = \sup_{|h| \leq \delta} |f(x+h) - f(x)|$$

sembolleri ile gösterilir.

Burada ω fonksiyonu δ sayısının bir fonksiyonudur (*Ditzian ve Totik 1987*).

Lemma 2.4 Süreklilik modülü aşağıdaki özellikleri sağlar (*Stancu vd. 2001*).

- i) $\delta > 0$ için $\omega(f; \delta)$ negatif olmayan bir fonksiyondur.
- ii) ω fonksiyonu artan bir fonksiyondur. Yani $\delta_1 \leq \delta_2$ şartını sağlayan tüm δ_1 ve δ_2 sayıları için $\omega(f; \delta_1) \leq \omega(f; \delta_2)$ ifadesi sağlanır.
- iii) m doğal sayı olmak üzere,
 $\omega(f; m\delta) \leq m\omega(f; \delta)$ şeklindedir.
- iv) $\lambda > 0$ reel sayısı için,
 $\omega(f; \lambda\delta) \leq (1 + \lambda)\omega(f; \delta)$ dır.
- v) $|f(t) - f(x)| \leq \omega(f; |t - x|)$ eşitsizliği sağlanır.
- vi) $|f(t) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{|t - x|}{\delta}\right) \omega(f; \delta)$ biçimindedir.
- vii) $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f; \delta) = 0$ şeklindedir.

2.6 Ağırlıklı Uzaylarda Lineer Pozitif Operatörler Dizisinin Yakınsaklık Koşulları

Kompakt aralıkta tanımlanan lineer pozitif operatörlerin düzgün yakınsaklığının incelenmesi için Korovkin teoreminin geçerli olduğu bilinmektedir. Ancak sınırsız aralıkta tanımlanan bu operatörlerin dizisi için Korovkin teoreminin geçerli olmadığı, bu teoremin koşulları sağlandığı halde düzgün yakınsaklığın sağlanmadığı görülmektedir. Bunun üzerine 1974 ve 1976 yıllarında A. D. Gadjiev tarafından reel eksenin

tamamında veya sınırsız alt aralıklarında yaklaşım koşulları ve Korovkin tipli teoremler çalışılmıştır.

Tanım 2.16 φ reel ekseninde tanımlı, sürekli, monoton artan bir fonksiyon olmak üzere,

$$\rho(x) = 1 + (\varphi(x))^2$$

şeklinde ρ fonksiyonunun tanımlayalım. M_f pozitif bir sabit olmak üzere,

$$|f(x)| \leq M_f \rho(x)$$

eşitsizliğini sağlayan reel değişkenli, reel fonksiyonların kümesini $B_\rho(\mathbb{R})$ ile, bu uzaydaki sürekli fonksiyonların kümesini $C_\rho(\mathbb{R})$ ile gösterelim. Yani, $B_\rho(\mathbb{R})$ ve $C_\rho(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} B_\rho(\mathbb{R}) &= \{f : |f(x)| \leq M_f \rho(x)\} \\ C_\rho(\mathbb{R}) &= \{f : f \in B_\rho(\mathbb{R}), f \text{ sürekli}\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon sınıflarıdır. Bu uzaylar

$$\|f\|_\rho = \sup \left\{ \frac{|f(x)|}{\rho(x)}, x \in \mathbb{R} \right\}$$

normuna göre birer normlu uzaydır. Burada ρ fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu, $B_\rho(\mathbb{R})$ ve $C_\rho(\mathbb{R})$ uzaylarına ise ağırlıklı uzaylar denir.

Ayrıca $k_f \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$C_\rho^k(\mathbb{R}) = \left\{ f : f \in C_\rho(\mathbb{R}), \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|f(x)|}{\rho(x)} = k_f \right\}$$

olarak tanımlanan fonksiyon uzayı $C_\rho(\mathbb{R})$ uzayının bir alt uzayıdır (Gadjiev 1974, 1976).

Teorem 2.5 φ reel ekseninde tanımlı sürekli, monoton artan bir fonksiyon olmak üzere, $\rho(x) = 1 + (\varphi(x))^2$ ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda,

i) $C_\rho(\mathbb{R})$ uzayından $B_\rho(\mathbb{R})$ uzayına öyle bir $\{A_m\}$ lineer pozitif operatörler dizisi tanımlanabilir ki, bu operatörler dizisi için,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|A_m(\varphi^\nu) - \varphi^\nu\|_\rho = 0, \quad \nu = 0, 1, 2 \quad (2.6)$$

şartları sağlanmasına rağmen öyle bir $f^* \in C_\rho(\mathbb{R})$ fonksiyonu bulunabilir ki,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|A_m(f^*) - f^*(x)\|_\rho \geq 1$$

olur.

ii) $C_\rho(\mathbb{R})$ uzayından $B_\rho(\mathbb{R})$ uzayına (2.6) koşullarını sağlayan öyle bir $\{A_m\}$ lineer pozitif operatörler dizisi bulunabilir ki her $f \in C_\rho^k$ için

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|A_m(f) - f\|_\rho = 0$$

dır (Gadjiev 1974, 1976).

2.7 Ağırlıklı Uzaylarda Süreklilik Modülü

Tanım 2.17 $x \in [0, \infty)$ ve $f \in C_\rho^k[0, \infty)$ olmak üzere, her $\delta > 0$ için

$$\Omega(f, \delta) = \sup_{\substack{x \geq 0 \\ |h| \leq \delta}} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{(1+x^2)(1+h^2)}$$

şeklinde tanımlanan $\Omega(f, \delta)$ fonksiyonuna $C_\rho^k[0, \infty)$ uzayında f fonksiyonunun süreklilik modülü denir.

Ağırlıklı uzaylarda tanımlanan süreklilik modülü aşağıdaki özellikleri sağlamaktadır.

Lemma 2.5 $x \in [0, \infty)$ ve $f \in C_{x^2}^k[0, \infty)$ olmak üzere,

i) $\Omega(f, \delta)$, $\delta \geq 0$ değişkenine göre artan bir fonksiyondur.

ii) Her bir $f \in C_{x^2}^k[0, \infty)$ için, $\lim_{\delta \rightarrow 0} \Omega(f, \delta) = 0$ dır.

iii) $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\Omega(f, m\delta) \leq 2m(1+\delta^2)\Omega(f, \delta) \text{ eşitsizliği sağlanır.}$$

iv) $\lambda > 0$ olmak üzere,

$$\Omega(f, \lambda\delta) \leq 2(1+\lambda)(1+\delta^2)\Omega(f, \delta) \text{ biçimindedir.}$$

v) $f \in C_{x^2}^k[0, \infty)$ ve $x, t \in [0, \infty)$ için,

$$|f(t) - f(x)| \leq 2(1+x^2)(1+\delta^2) \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta}\right) (1+(t-x)^2) \Omega(f, \delta) \text{ şeklindedir.}$$

Sınırsız aralıklar ve bölgeler üzerinde tanımlanan bazı lineer pozitif operatörlere örnek olarak Szasz- Mirakjan operatörleri , Baskakov operatörleri, Post Widder operatörleri, Phillips operatörleri, Gamma operatörleri, Lupaş operatörleri, Bleimann Butzer ve Hahn operatörleri gibi operatörler ve bu operatörlerin kendi aralarında modifiye edilmiş halleri, Stancu, Durrmeyer, Kantorovich tipli genelleştirmeleri ve bunların q analogları şeklinde verilebilir. Çalışmamızda yer alan Szasz-Mirakjan operatörleri, Baskakov operatörleri ve Baskakov operatörünün Kantorovich genelleşmesinin bazı özellikleri aşağıda verilmiştir.

2.8 Szasz-Mirakjan Operatörleri

G. M. Mirakjan (Mirakjan 1941), Bernstein operatörlerini sonlu aralıktan sınırsız aralığa genişleterek, $(S_m)_{m \geq 1}$ şeklindeki lineer pozitif operatörler dizisini tanımlamıştır. Bu operatörler J. Favard (Favard 1944) ve O. Szasz (Szasz 1950) tarafından da ayrı olarak incelenmiştir ve bu yüzden literatürde Szasz-Mirakjan operatörleri olarak bilinmektedir.

Tanım 2.18 f fonksiyonu $[0, \infty)$ sınırsız aralığında tanımlı, reel değerli, sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$$S_m(f; x) = e^{-mx} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mx)^s}{s!} f\left(\frac{s}{m}\right), \quad x \in [0, \infty), \quad m \in \mathbb{N} \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlanan lineer pozitif operatörlere Szasz-Mirakjan operatörleri denir.

Teorem 2.6 (2.7) ile tanımlanan Szasz operatörleri, $e_i(t) = t^i$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} S_m(e_0; x) &= 1, \\ S_m(e_1; x) &= x, \\ S_m(e_2; x) &= x^2 + \frac{x}{m}, \\ S_m(e_3; x) &= x^3 + \frac{3x^2}{m} + \frac{x}{m^2}, \\ S_m(e_4; x) &= x^4 + \frac{6x^3}{m} + \frac{7x^2}{m^2} + \frac{x}{m^3} \end{aligned} \quad (2.8)$$

eşitliklerini sağlar.

Teorem 2.7 $\mu_{m,j}(x) = S_m((t-x)^j, x)$, $j = 1, 2, 3, 4$ olmak üzere (2.7) ile tanımlanan Szasz operatörleri için merkezil momentler,

$$\begin{aligned}\mu_{m,1}(x) &= 0, \\ \mu_{m,2}(x) &= \frac{x}{m}, \\ \mu_{m,3}(x) &= \frac{x^2}{m^2}, \\ \mu_{m,4}(x) &= \frac{x^3}{m^3} + \frac{3x^2}{m^2}\end{aligned}\tag{2.9}$$

şeklindedir.

Teorem 2.8 $a \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $T_a : C[0, \infty) \rightarrow C[0, a]$ dönüşümü her $f \in C[0, \infty)$ için $T_a(f) = f|_{[0,a]}$ olarak tanımlansın. Burada $f|_{[0,a]}$, f fonksiyonunun tanım kümesinin $[0, a]$ aralığına kısıtlamasını göstermektedir. $(\mathcal{L}_m)_{m \geq 1}$, $C[0, \infty)$ üzerinde tanımlı lineer pozitif operatörler dizisi ve $k = 0, 1, 2$ için $[0, a]$ üzerinde düzgün olarak

$$\lim_{m \rightarrow \infty} T_a(\mathcal{L}_m(e_k)) = T_a(e_k)$$

oluyorsa bu durumda her $f \in C[0, \infty)$ için $[0, a]$ üzerinde

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{L}_m(f; x) = f(x)$$

yakınsaması düzgündür (Korovkin 1960).

Buna göre Szasz operatörleri için Teorem 2.6 dikkate alındığında, $(S_m)_{m \geq 1}$ operatör dizileri için Korovkin tipli teoremin gerçekleştiği görülebilir.

Sonuç 2.1 (2.7) ile tanımlanan Szasz operatörleri, $a \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $[0, a]$ kapalı aralığında sürekli ve tüm pozitif yarı ekseninde sınırlı olan f fonksiyonuna bu aralıkta düzgün olarak yakınsar. Bir başka deyişle $f \in C[0, a]$ için

$$S_m(f; x) \Rightarrow f(x), \quad x \in [0, a], \quad m \in \mathbb{N}$$

gerçeklenir.

Teorem 2.9 $f \in C[0, a]$ olmak üzere (2.7) ile tanımlanan Szasz operatörleri için

$$|S_m(f; x) - f(x)| \leq 2\omega\left(f; \sqrt{\frac{x}{m}}\right)$$

şeklindedir.

Teorem 2.10 Szasz operatörleri için $p > 0$ olmak üzere,

$$\frac{d^p}{dx^p} S_m(f; x) = p! e^{-mx} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mx)^s}{s!} f\left[\frac{s}{m}, \frac{s+1}{m}, \dots, \frac{s+p}{m}\right]$$

eşitliği sağlanır.

Tanım 2.19 (2.7) ile tanımlanan Szasz operatörleri için

$$S_m(f; x) = \sum_{s=0}^{\infty} P_{m,s}(x) f\left(\frac{s}{m}\right), \quad P_{m,s}(x) = e^{-mx} \frac{(mx)^s}{s!}$$

olmak üzere, $P_{m,s}(x)$ fonksiyonuna Szasz operatörünün çekirdeği adı verilir.

Lemma 2.6 Szasz operatörünün çekirdeği olan $\mathcal{P}_{m,s}(x) = e^{-mx} \frac{(mx)^s}{s!}$ fonksiyonu aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

i) $\mathcal{P}'_{m,s}(x) = m(\mathcal{P}_{m,s-1}(x) - \mathcal{P}_{m,s}(x)),$

ii) $x\mathcal{P}'_{m,s}(x) = (s - mx)\mathcal{P}_{m,s}(x).$

Teorem 2.11 $x \in [0, \infty) / \left\{\frac{s}{m}, s = 0, 1, \dots\right\}$ olmak üzere,

$$S_m(f; x) - f(x) = \frac{x}{m} \sum_{s=0}^{\infty} \mathcal{P}_{m,s}(x) f\left[x, \frac{s}{m}, \frac{s+1}{m}\right] \quad (2.10)$$

şeklindedir.

Teorem 2.12 $f \in C^r [0, \infty)$ olmak üzere,

$$S_m^{(r)} f(x) = e^{-mx} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mx)^s}{s!} f^r \left(\frac{s + \phi_s^r}{m} \right), \quad 0 < \phi_s^r < r \quad (2.11)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.13 f fonksiyonu $[0, a]$ aralığında sınırlı ve $(0, a)$ aralığının bir x noktasında ikinci türevi mevcutsa, o takdirde Szasz operatörleri için $[0, \infty)$ aralığının her kompakt alt aralığında

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m [S_m(f; x) - f(x)] = \frac{1}{2} x f''(x)$$

eşitliği vardır.

2.9 Baskakov Operatörleri

Bernstein polinomlarının pozitif reel eksene önemli genelleştirmelerinden biri de 1957 yılında V. A. Baskakov (Baskakov 1957) tarafından yapılmıştır.

Tanım 2.20 f fonksiyonu $[0, \infty)$ sınırsız aralığında tanımlı, reel değerli, sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$$V_m(f; x) = (1+x)^{-m} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{m+s-1}{s} \left(\frac{x}{1+x} \right)^s f\left(\frac{s}{m}\right), \quad x \in [0, \infty), \quad m \in \mathbb{N} \quad (2.12)$$

şeklinde tanımlanan lineer pozitif operatörlere Baskakov operatörleri denir (Baskakov 1957).

Teorem 2.14 (2.12) ile tanımlanan Baskakov operatörleri,

$$V_m(1; x) = 1,$$

$$V_m(t; x) = x, \quad (2.13)$$

$$V_m(t^2; x) = x^2 + \frac{x(x+1)}{m}, \quad (2.14)$$

$$V_m(t^3; x) = x^3 + \frac{3x^2(x+1)}{m} + \frac{x(x+1)(2x+1)}{m^2},$$

$$V_m(t^4; x) = x^4 + \frac{6x^3(x+1)}{m} + \frac{x^2(x+1)(11x+7)}{m^2} + \frac{x(x+1)(6x^2+6x+1)}{m^3}$$

eşitliklerini sağlar.

Teorem 2.15 $\mu_{m,j}(x) = V_m((t-x)^j, x)$, $j = 1, 2, 3, 4$ olmak üzere (2.12) ile tanımlanan Baskakov operatörleri için merkezil momentler,

$$\begin{aligned}\mu_{m,1}(x) &= 0, \\ \mu_{m,2}(x) &= \frac{x(x+1)}{m}, \\ \mu_{m,3}(x) &= \frac{x(x+1)(2x+1)}{m}, \\ \mu_{m,4}(x) &= \frac{3x^2(x+1)^2}{m^2} + \frac{x(x+1)(6x^2+6x+1)}{m^3}\end{aligned}\tag{2.15}$$

şeklindedir.

Sonuç 2.2 (2.12) ile tanımlanan Baskakov operatörleri, $a \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $[0, a]$ kapalı aralığında sürekli ve tüm pozitif yarı ekseninde sınırlı olan f fonksiyonuna bu aralıkta düzgün olarak yakınsar. Bir başka deyişle $f \in C[0, a]$ için

$$V_m(f; x) \Rightarrow f(x), \quad x \in [0, a], \quad m \in \mathbb{N}$$

gerçeklenir.

Teorem 2.16 $f \in C[0, a]$ olmak üzere (2.12) ile tanımlanan Baskakov operatörleri için

$$|V_m(f; x) - f(x)| \leq 2\omega\left(f; \sqrt{\frac{x(x+1)}{m}}\right)$$

şeklindedir.

Teorem 2.17 Baskakov operatörleri için

$$V_m(f; x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(m+s-1)!x^s}{(m-1)!m^s} f\left[0, \frac{1}{m}, \dots, \frac{s}{m}\right]$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.18 Baskakov operatörünün r inci türevi

$$V_m^r(f; x) = \frac{(m+r-1)!}{(m-1)!} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{m+r+s-1}{s} \frac{x^s}{(1+x)^{m+r+s}} \Delta^r f\left(\frac{s}{m}\right)$$

biçimindedir.

Teorem 2.19 f fonksiyonu $[0, a]$ aralığında sınırlı ve $(0, a)$ aralığının bir x noktasında ikinci türevi mevcutsa, o takdirde Baskakov operatörleri için $[0, \infty)$ aralığının her kompakt alt aralığında

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m [V_m(f; x) - f(x)] = \frac{1}{2} x(x+1) f''(x)$$

eşitliği vardır.

2.10 Baskakov Kantorovich Operatörleri

Lineer pozitif operatörler ile ilgili önemli genelleştirmelerden biri de sürekli fonksiyonlar uzayında tanımlanan f fonksiyonunun integrallenebilir fonksiyonlar uzayında alınarak operatörün daha genel bir formunu elde etmektir.

1930 yılında L. V. Kantorovich Bernstein polinomunun

$$K_m(f; x) = (m+1) \sum_{s=0}^{\infty} \binom{m}{s} x^s (1-x)^{m-s} \int_{s/m+1}^{(s+1)/m+1} f(t) dt, \quad x \in [0, 1], \quad m \in \mathbb{N}$$

şeklinde Kantorovich genelleştirmesini yayınlamıştır (Kantorovich 1930). Daha sonra birçok lineer pozitif operatörler dizisinin Kantorovich tipli genelleştirmesi tanımlanmış ve bunların yaklaşım özellikleri üzerine çalışmalar yaygınlaşmıştır. Baskakov operatörlerinin Kantorovich tipli genelleştirmesi aşağıdaki gibidir.

Tanım 2.21 f fonksiyonu $[0, \infty)$ sınırsız aralığında tanımlı, reel değerli, sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$$V_m^*(f; x) = \frac{m}{(1+x)^m} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{m+s-1}{s} \left(\frac{x}{1+x}\right)^s \int_{s/m}^{(s+1)/m} f(t) dt, \quad x \in [0, \infty), \quad m \in \mathbb{N} \quad (2.16)$$

şeklinde tanımlanan lineer pozitif operatörlere Baskakov Kantorovich operatörleri denir.

Teorem 2.20 (2.16) ile tanımlanan Baskakov Kantorovich operatörleri,

$$\begin{aligned}
V_m^*(1; x) &= 1, \\
V_m^*(t; x) &= x + \frac{1}{2m}, \\
V_m^*(t^2; x) &= x^2 + \frac{x(x+2)}{m} + \frac{1}{3m^2}, \\
V_m^*(t^3; x) &= x^3 + \frac{3x^2(2x+3)}{2m} + \frac{x(4x^2+9x+7)}{2m^2} + \frac{1}{4m^3}, \\
V_m^*(t^4; x) &= x^4 + \frac{2x^3(3x+4)}{m} + \frac{x^2(11x^2+24x+15)}{m^2} \\
&\quad + \frac{x(x+1)(6x^2+10x+5)}{m^3} + \frac{1}{5m^4}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

eşitliklerini sağlar.

Teorem 2.21 $\mu_{m,j}(x) = V_m^*((t-x)^j, x)$, $j = 1, 2, 3, 4$ olmak üzere (2.16) ile tanımlanan Baskakov Kantorovich operatörleri için merkezî momentler,

$$\begin{aligned}
\mu_{m,1}(x) &= \frac{1}{2m}, \\
\mu_{m,2}(x) &= \frac{x(x+1)}{m} + \frac{1}{3m^2}, \\
\mu_{m,3}(x) &= \frac{x(4x^2+9x+5)}{2m^2} + \frac{1}{4m^3}, \\
\mu_{m,4}(x) &= \frac{3x^2(x+1)^2}{m^2} + \frac{x(x+1)(6x^2+10x+5)}{m^3} + \frac{1}{5m^4}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

şeklindedir.

Sonuç 2.3 (2.16) ile tanımlanan Baskakov Kantorovich operatörleri, $a \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $[0, a]$ kapalı aralığında sürekli ve tüm pozitif yarı ekseninde sınırlı olan f fonksiyonuna bu aralıkta düzgün olarak yakınsar. Bir başka deyişle $f \in C[0, a]$ için

$$V_m^*(f; x) \Rightarrow f(x), \quad x \in [0, a], \quad m \in \mathbb{N}$$

gerçeklenir.

Teorem 2.22 $f \in C[0, a]$ olmak üzere (2.16) ile tanımlanan Baskakov Kantorovich operatörleri için

$$|V_m(f; x) - f(x)| \leq 2\omega \left(f; \sqrt{\frac{x(x+1)}{m} + \frac{1}{3m^2}} \right)$$

şeklindedir.

Teorem 2.23 f fonksiyonu $[0, a]$ aralığında sınırlı ve $(0, a)$ aralığının bir x noktasında birinci ve ikinci türevleri mevcutsa, o takdirde Baskakov-Kantorovich operatörleri için $[0, \infty)$ aralığının her kompakt alt aralığında

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m [V_m^*(f; x) - f(x)] = \frac{1}{2} f'(x) + \frac{1}{2} x(x+1) f''(x)$$

eşitliği vardır.

3. KİNG TIPLİ SZASZ-MİRAKJAN OPERATÖRLERİ

Bu bölümde 2008 yılında O. Agratini'nin makalesinde tanımlanan $e_2 + \lambda e_1$ fonksiyonunu koruyan Szasz operatörlerinin $S_{m,\lambda}$ King tipli genelleştirmesi ele alınacaktır. Öncelikle bu operatörlerin sağladığı, ilerleyen bölümlerde bize gerekli olacak bazı temel özellikler lemma olarak verilecektir. Bu bölümün ilk kısmında $S_{m,\lambda}$ King tipli genelleştirmesinin şekil koruma özellikleri incelenecek, genelleştirilmiş konvekslik tanımı kullanılarak klasik operatörler ile $S_{m,\lambda}$ modifiye edilmiş operatörlerin yaklaşım hızları karşılaştırılacaktır. Daha sonra $S_{m,\lambda}$ operatörlerinin lokal yaklaşım özellikleri ile ilgili teoremler üzerinde durulacak, ağırlıklı uzaylarda $S_{m,\lambda}$ operatörlerinin ve türevlerinin yaklaşım özellikleri göz önüne alınacaktır. Operatörlerin noktasal yaklaşımı açısından önemli bir yere sahip olan Voronovskaja tipli teorem bu operatörler için göz önüne alınacaktır. $C_B[0, \infty)$ uzayında klasik süreklilik modülü yardımıyla $S_{m,\lambda}$ genelleştirilmiş operatörlerin klasik Szasz-Mirakjan operatörleri ile yaklaşım hızları karşılaştırılacaktır. Son olarak belirli x, m ve λ değerleri için hata tahmini tablosu verilecek ve $S_{m,\lambda}$ King tipli operatörlerin f fonksiyonuna yaklaşımı grafik çizilerek de görülecektir.

$\lambda \in [0, \infty)$, $f \in C[0, \infty)$ ve $S_{m,\lambda} : C[0, \infty) \rightarrow C[0, \infty)$ olmak üzere

$$S_{m,\lambda}(f; x) = e^{-mr_{m,\lambda}(x)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} f\left(\frac{s}{m}\right), \quad x \in [0, \infty), \quad m \in \mathbb{N} \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $r_{m,\lambda} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$r_{m,\lambda}(x) = -\frac{(\lambda m + 1)}{2m} + \sqrt{\frac{(\lambda m + 1)^2}{4m^2} + (x^2 + \lambda x)}, \quad x \in [0, \infty), \quad m \in \mathbb{N} \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanan bir fonksiyondur ve $\lambda \in [0, \infty)$ için

$$0 \leq r_{m,\lambda}(x) \leq x < \infty, \quad x \in [0, \infty), \quad m \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} r_{m,\lambda}(x) = x, \quad x \in [0, \infty), \quad m \in \mathbb{N}$$

özellikleri sağlar.

$S_{m,\lambda}$ operatörler dizisi bir lineer ve pozitif operatör olup,

- i) $\lambda = 0$ seçildiğinde 2007 yılında tanımlanan (1.1) ile verilen D_m^* operatörlerine,
- ii) $r_{m,\lambda}(x) = x$ seçildiğinde (2.7) ile verilen klasik Szasz-Mirakjan operatörlerine dönüşmektedir.

$S_{m,\lambda}$ modifiye edilmiş operatörleri için

$$S_{m,\lambda}(e_2 + \lambda e_1; x) = (e_2 + \lambda e_1)(x)$$

eşitliği sağlanmaktadır.

Lemma 3.1 (3.1) ile tanımlanan $S_{m,\lambda}$ genelleştirilmiş Szasz operatörleri,

$$\begin{aligned} S_{m,\lambda}(e_0; x) &= e_0(x) , \\ S_{m,\lambda}(e_1; x) &= r_{m,\lambda}(x) , \\ S_{m,\lambda}(e_2; x) &= (r_{m,\lambda}(x))^2 + \frac{r_{m,\lambda}(x)}{m} , \\ S_{m,\lambda}(e_3; x) &= (r_{m,\lambda}(x))^3 + \frac{3(r_{m,\lambda}(x))^2}{m} + \frac{r_{m,\lambda}(x)}{m^2} , \\ S_{m,\lambda}(e_4; x) &= (r_{m,\lambda}(x))^4 + \frac{6(r_{m,\lambda}(x))^3}{m} + \frac{7(r_{m,\lambda}(x))^2}{m^2} + \frac{r_{m,\lambda}(x)}{m^3} \end{aligned} \quad (3.3)$$

eşitliklerini sağlar.

Lemma 3.2 $\mu_{m,j}(x) = S_{m,\lambda}((t-x)^j, x)$, $m = 1, 2, \dots$ olmak üzere (3.1) ile tanımlanan $S_{m,\lambda}$ genelleştirilmiş Szasz operatörleri için merkezil momentler,

$$\begin{aligned} \mu_{m,1}(x) &= r_{m,\lambda}(x) - x , \\ \mu_{m,2}(x) &= (r_{m,\lambda}(x) - x)^2 + \frac{r_{m,\lambda}(x)}{m} , \\ \mu_{m,3}(x) &= (r_{m,\lambda}(x) - x)^3 + \frac{3r_{m,\lambda}(x)(r_{m,\lambda}(x) - x)}{m} + \frac{r_{m,\lambda}(x)}{m^2} , \\ \mu_{m,4}(x) &= (r_{m,\lambda}(x) - x)^4 + \frac{6r_{m,\lambda}(x)(r_{m,\lambda}(x) - x)^2}{m} + \frac{r_{m,\lambda}(x)(7r_{m,\lambda}(x) - 4x)}{m^2} + \frac{r_{m,\lambda}(x)}{m^3} \end{aligned} \quad (3.4)$$

şeklindedir.

Lemma 3.3 $\lambda \in [0, \infty)$ ve $f \in C[0, \infty)$ olmak üzere

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_{m,\lambda}(f; x) = S_m(f; x)$$

yakınsaması herhangi bir kapalı $[0, a] \subset [0, \infty)$ aralığında düzgündür.

İspat. $r_{m,\lambda}$ fonksiyonu için

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} r_{m,\lambda}(x) = x$$

yakınsaması $[0, a]$ aralığında düzgün olacağından,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_{m,\lambda}(f; x) = S_m(f; x)$$

olduğu kolayca görülebilir. ■

Lemma 3.4 (3.1) ile tanımlanan $S_{m,\lambda}$ operatörlerinin, $a \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $[0, a]$ kapalı aralığında sürekli ve tüm pozitif yarı ekseninde sınırlı olan f fonksiyonuna bu aralıkta düzgün olarak yakınsar. Bir başka deyişle $f \in C[0, a]$ için

$$S_{m,\lambda}(f; x) \Rightarrow f(x), \quad x \in [0, a], \quad m \in \mathbb{N}$$

gerçeklenir.

İspat. Korovkin teoremi gereğince

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{m,\lambda}(e_i; x) = e_i(x), \quad i = 0, 1, 2$$

olduğunu gösterirsek istenen elde edilecektir. Bilindiği üzere

$$\lim_{m \rightarrow \infty} r_{m,\lambda}(x) = x, \quad x \in [0, a], \quad m \in \mathbb{N}$$

yakınsaması düzgün olduğundan Korovkin teoreminin şartları sağlanır ve böylece

$$S_{m,\lambda}(f; x) \Rightarrow f(x), \quad x \in [0, a], \quad m \in \mathbb{N}$$

olduğu ispat edilir. ■

3.1 $S_{m,\lambda}$ Operatörlerinin Şekil Koruma Özelliği

Bu kesimde $[0, \infty)$ aralığında tanımlı sürekli, reel değerli f fonksiyonunun artan (azalan) veya konveks olması durumunda King tipli Szasz-Mirakjan operatörlerinin hangi özellikleri sağladığı incelenecektir.

Lemma 3.5 $\lambda \in [0, \infty)$, $f \in C[0, \infty)$ olmak üzere, $S_{m,\lambda}$ operatörlerinin birinci ve ikinci türevleri,

a)

$$S'_{m,\lambda}(f; x) = mr'_{m,\lambda}(x)e^{-mr_{m,\lambda}(x)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} \left\{ f\left(\frac{s+1}{m}\right) - f\left(\frac{s}{m}\right) \right\} \quad (3.5)$$

b)

$$\begin{aligned} & S''_{m,\lambda}(f; x) \\ = & mr''_{m,\lambda}(x)e^{-mr_{m,\lambda}(x)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} \left\{ f\left(\frac{s+1}{m}\right) - f\left(\frac{s}{m}\right) \right\} \\ & + m^2 (r'_{m,\lambda}(x))^2 e^{-mr_{m,\lambda}(x)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} \left\{ f\left(\frac{s+2}{m}\right) - 2f\left(\frac{s+1}{m}\right) + f\left(\frac{s}{m}\right) \right\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

şeklindedir.

İspat. a) $x \in [0, \infty)$, $f \in C[0, \infty)$ ve $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $S_{m,\lambda}$ operatörlerinin birinci türevini alalım.

$$S_{m,\lambda}(f; x) = e^{-mr_{m,\lambda}(x)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} f\left(\frac{s}{m}\right)$$

olup,

$$\begin{aligned} S'_{m,\lambda}(f; x) &= -mr'_{m,\lambda}(x)e^{-mr_{m,\lambda}(x)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} f\left(\frac{s}{m}\right) \\ &\quad + mr'_{m,\lambda}(x)e^{-mr_{m,\lambda}(x)} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^{s-1}}{(s-1)!} f\left(\frac{s}{m}\right) \end{aligned}$$

şeklindedir. İkinci toplamı $s \rightarrow s+1$ için yazarsak,

$$\begin{aligned}
S'_{m,\lambda}(f; x) &= -mr'_{m,\lambda}(x)e^{-mr_{m,\lambda}(x)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} f\left(\frac{s}{m}\right) \\
&\quad + mr'_{m,\lambda}(x)e^{-mr_{m,\lambda}(x)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} f\left(\frac{s+1}{m}\right) \\
&= mr'_{m,\lambda}(x)e^{-mr_{m,\lambda}(x)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} \left[f\left(\frac{s+1}{m}\right) - f\left(\frac{s}{m}\right) \right]
\end{aligned}$$

elde edilir.

b) $S_{m,\lambda}$ operatörlerinin ikinci türevini düzenlersek,

$$\begin{aligned}
S''_{m,\lambda}(f; x) &= mr''_{m,\lambda}(x)e^{-mr_{m,\lambda}(x)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} \left\{ f\left(\frac{s+1}{m}\right) - f\left(\frac{s}{m}\right) \right\} \\
&\quad - m^2 (r'_{m,\lambda}(x))^2 e^{-mr_{m,\lambda}(x)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} \left\{ f\left(\frac{s+1}{m}\right) - f\left(\frac{s}{m}\right) \right\} \\
&\quad + m^2 (r'_{m,\lambda}(x))^2 e^{-mr_{m,\lambda}(x)} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^{s-1}}{(s-1)!} \left\{ f\left(\frac{s+1}{m}\right) - f\left(\frac{s}{m}\right) \right\}
\end{aligned}$$

bulunur. Üçüncü toplamı $s \longrightarrow s+1$ için yazarsak,

$$\begin{aligned}
&S''_{m,\lambda}(f; x) \\
&= mr''_{m,\lambda}(x)e^{-mr_{m,\lambda}(x)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} \left\{ f\left(\frac{s+1}{m}\right) - f\left(\frac{s}{m}\right) \right\} \\
&\quad - m^2 (r'_{m,\lambda}(x))^2 e^{-mr_{m,\lambda}(x)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} \left\{ f\left(\frac{s+1}{m}\right) - f\left(\frac{s}{m}\right) \right\} \\
&\quad + m^2 (r'_{m,\lambda}(x))^2 e^{-mr_{m,\lambda}(x)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} \left\{ f\left(\frac{s+2}{m}\right) - f\left(\frac{s+1}{m}\right) \right\} \\
&= mr''_{m,\lambda}(x)e^{-mr_{m,\lambda}(x)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} \left\{ f\left(\frac{s+1}{m}\right) - f\left(\frac{s}{m}\right) \right\} \\
&\quad + m^2 (r'_{m,\lambda}(x))^2 e^{-mr_{m,\lambda}(x)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} \left\{ f\left(\frac{s+2}{m}\right) - 2f\left(\frac{s+1}{m}\right) + f\left(\frac{s}{m}\right) \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 3.1 $x \in [0, \infty)$, $f \in C[0, \infty)$ ve $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

i) Eğer f artan bir fonksiyonsa, King tipli $S_{m,\lambda}$ operatörleri de artandır.

ii) Eğer f hem artan hem de konveks bir fonksiyon ise, $S_{m,\lambda}$ genelleştirilmiş operatörleri de konvektir.

İspat. i)

$$r_{m,\lambda}(x) = -\frac{(\lambda m + 1)}{2m} + \sqrt{\frac{(\lambda m + 1)^2}{4m^2} + (x^2 + \lambda x)} \quad , \quad x \in [0, \infty), \quad m \in \mathbb{N}$$

olduğundan $r_{m,\lambda}$ fonksiyonunun birinci ve ikinci türevleri,

$$r'_{m,\lambda}(x) = \frac{1}{2} \frac{(2x + \lambda)}{\sqrt{\frac{(\lambda m + 1)^2}{4m^2} + (x^2 + \lambda x)}}$$

ve

$$r''_{m,\lambda}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{(\lambda m + 1)^2}{4m^2} + (x^2 + \lambda x) \right)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{\lambda}{m} + \frac{1}{2m^2} \right)$$

şeklinde olup pozitif fonksiyonlardır.

Buna göre (3.5) ifadesinden, f artan ise $f\left(\frac{s+1}{m}\right) - f\left(\frac{s}{m}\right) \geq 0$ olup, $r_{m,\lambda}$ nın birinci türevi de pozitif olduğundan King tipli Szasz-Mirakjan operatörlerinin de birinci türevi pozitif olacaktır. Buna göre $S_{m,\lambda}$ operatörlerinin artan olduğu görülür.

ii) $S_{m,\lambda}$ operatörlerinin ikinci türevini incelersek, ikinci türevinde yer alan birinci toplam $r_{m,\lambda}$ nın ikinci türevinin pozitif olmasından ve f 'nin artanlığından dolayı pozitiftir. f konveks ise ikinci mertebeden bölünmüş farkları pozitif olacağından ikinci toplam da bundan dolayı pozitif olup $S_{m,\lambda}$ operatörlerinin de ikinci türevi de pozitif olarak bulunur. O halde $S_{m,\lambda}$ genelleştirilmiş operatörleri konvektir. ■

Lemma 3.6 $\lambda \in [0, \infty)$ ve $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $\mathcal{P}_{m,s,\lambda}(x) := e^{-mr_{m,\lambda}(x)} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!}$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar.

i) $\mathcal{P}'_{m,s,\lambda}(x) = mr'_{m,\lambda}(x) (\mathcal{P}_{m,s-1,\lambda}(x) - \mathcal{P}_{m,s,\lambda}(x)) \quad ,$

ii) $r_{m,\lambda}(x) \mathcal{P}'_{m,s,\lambda}(x) = r'_{m,\lambda}(x) (s - mr_{m,\lambda}(x)) \mathcal{P}_{m,s,\lambda}(x).$

Lemma 3.7 $f \in C[0, \infty)$ ve $r_{m,\lambda} \in [0, \infty) / \left\{ \frac{s}{m}, s = 0, 1, \dots \right\}$ olmak üzere,

$$S_{m,\lambda}(f; x) - f(r_{m,\lambda}(x)) = \frac{r_{m,\lambda}(x)}{m} \sum_{s=0}^{\infty} \mathcal{P}_{m,s,\lambda}(x) f \left[r_{m,\lambda}(x), \frac{s}{m}, \frac{s+1}{m} \right]$$

dir. Burada $a \leq x_0 < x_1 < x_2 < \infty$ olmak üzere $f[x_0, x_1, x_2]$, x_0 , x_1 ve x_2 noktalarının bölünmüş farkıdır.

İspat. (3.1) ile verilen $S_{m,\lambda}$ operatörleri için,

$$\begin{aligned} & S_{m,\lambda}(f; x) - f(r_{m,\lambda}(x)) \\ &= e^{-mr_{m,\lambda}(x)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} f\left(\frac{s}{m}\right) - e^{-mr_{m,\lambda}(x)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} f(r_{m,\lambda}(x)) \\ &= e^{-mr_{m,\lambda}(x)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} \left[f\left(\frac{s}{m}\right) - f(r_{m,\lambda}(x)) \right] \end{aligned}$$

şeklinde olup, toplamı oluşturan ifade $\frac{s}{m} - r_{m,\lambda}$ ile çarpıp bölündüğünde,

$$\begin{aligned} & S_{m,\lambda}(f; x) - f(r_{m,\lambda}(x)) \\ &= e^{-mr_{m,\lambda}(x)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} \frac{\left[f\left(\frac{s}{m}\right) - f(r_{m,\lambda}(x)) \right]}{\left(\frac{s}{m} - r_{m,\lambda}(x) \right)} \left(\frac{s}{m} - r_{m,\lambda}(x) \right) \end{aligned}$$

yazılabilir. Bölünmüş fark tanımından

$$S_{m,\lambda}(f; x) - f(r_{m,\lambda}(x)) = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{s - mr_{m,\lambda}(x)}{m} \right) \mathcal{P}_{m,s,\lambda}(x) f \left[r_{m,\lambda}(x), \frac{s}{m} \right]$$

elde edilir. Lemma 3.6'nın i) ve ii) şıkından

$$\begin{aligned} S_{m,\lambda}(f; x) - f(r_{m,\lambda}(x)) &= \frac{r_{m,\lambda}(x)}{mr'_{m,\lambda}(x)} \sum_{s=0}^{\infty} \mathcal{P}'_{m,s,\lambda}(x) f \left[r_{m,\lambda}(x), \frac{s}{m} \right] \\ &= r_{m,\lambda}(x) \sum_{s=0}^{\infty} (\mathcal{P}_{m,s-1,\lambda}(x) - \mathcal{P}_{m,s,\lambda}(x)) f \left[r_{m,\lambda}(x), \frac{s}{m} \right] \end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned} & S_{m,\lambda}(f; x) - f(r_{m,\lambda}(x)) \\ &= r_{m,\lambda}(x) \left(\sum_{s=0}^{\infty} \mathcal{P}_{m,s-1,\lambda}(x) f \left[r_{m,\lambda}(x), \frac{s}{m} \right] - \sum_{s=0}^{\infty} \mathcal{P}_{m,s,\lambda}(x) f \left[r_{m,\lambda}(x), \frac{s}{m} \right] \right) \end{aligned}$$

bulunur. İlk toplamda $s \longrightarrow s + 1$ için,

$$\begin{aligned} & S_{m,\lambda}(f; x) - f(r_{m,\lambda}(x)) \\ = & r_{m,\lambda}(x) \left(\sum_{s=-1}^{\infty} \mathcal{P}_{m,s,\lambda}(x) f \left[r_{m,\lambda}(x), \frac{s+1}{m} \right] - \sum_{s=0}^{\infty} \mathcal{P}_{m,s,\lambda}(x) f \left[r_{m,\lambda}(x), \frac{s}{m} \right] \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Klasik Szasz-Mirakjan operatörleri için $\mathcal{P}_{m,-1}(x) = 0$ olduğundan $s = -1$ için $\mathcal{P}_{m,s,\lambda}(x) = 0$ yazılabilir. O halde ilk toplamı sıfırdan başlatabiliriz. Buna göre

$$S_{m,\lambda}(f; x) - f(r_{m,\lambda}(x)) = r_{m,\lambda}(x) \sum_{s=0}^{\infty} \mathcal{P}_{m,s,\lambda}(x) \left(f \left[r_{m,\lambda}(x), \frac{s+1}{m} \right] - f \left[r_{m,\lambda}(x), \frac{s}{m} \right] \right)$$

bulunur. Daha sonra

$$\frac{1}{m} f \left[r_{m,\lambda}(x), \frac{s}{m}, \frac{s+1}{m} \right] = f \left[r_{m,\lambda}(x), \frac{s+1}{m} \right] - f \left[r_{m,\lambda}(x), \frac{s}{m} \right]$$

olduğundan

$$S_{m,\lambda}(f; x) - f(r_{m,\lambda}(x)) = \frac{r_{m,\lambda}(x)}{m} \sum_{s=0}^{\infty} \mathcal{P}_{m,s,\lambda}(x) f \left[r_{m,\lambda}(x), \frac{s}{m}, \frac{s+1}{m} \right]$$

elde edilir. ■

Teorem 3.2 Eğer f fonksiyonu azalan ve konveks bir fonksiyon ise, bu durumda $x \in [0, \infty)$ olmak üzere,

$$f(x) \leq S_{m,\lambda}(f; x)$$

dir.

İspat. f fonksiyonu konveks bir fonksiyon ise ikinci mertebeden bölünmüş farkları pozitifdir. Buna göre Lemma 3.7 den

$$f(r_{m,\lambda}(x)) \leq S_{m,\lambda}(f; x) \quad (3.7)$$

yazılabilir. Ayrıca $r_{m,\lambda}$ fonksiyonu için

$$0 \leq r_{m,\lambda}(x) \leq x < \infty$$

olup, f azalan bir fonksiyon ise

$$f(x) \leq f(r_{m,\lambda}(x)) \quad (3.8)$$

bulunur ki (3.7) ve (3.8) göz önüne alındığında istenen elde edilir. ■

Tanım 2.13 ile verilen genelleştirilmiş konvekslik tanımında eğer $u_0(x) = e_0(x)$ ve $u_1(x) = \tau(x)$ seçilirse bu tanım,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \tau(x_0) & \tau(x_1) & \tau(x_2) \\ f(x_0) & f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix} \geq 0, \quad a \leq x_0 < x_1 < x_2 \leq b \quad (3.9)$$

şeklinde verilebilir. Bu durumda f fonksiyonuna kısaca τ fonksiyonuna göre konveks-tir denir ve bu koşulu sağlayan fonksiyonların sınıfı $\mathcal{C}(e_0, \tau)$ ile gösterilir. Bu tanım aynı zamanda $f \circ \tau^{-1}$ ifadesinin konveks olmasına denk gelir (Birou 2014).

Teorem 3.3 $(\mathcal{L}_m)_{m \geq 1}$, $C[a, b]$ uzayında tanımlı bir lineer pozitif operatörler dizisi ve

$$\mathcal{L}_m(u_0; x) = u_0(x), \quad x \in [c, d] \quad (3.10)$$

$$\mathcal{L}_m(u_1; x) = u_1(x), \quad x \in [c, d] \quad (3.11)$$

olsun. Buna göre $f \in C[a, b] \cap \mathcal{C}(u_0, u_1)$ olmak üzere,

$$\mathcal{L}_m(f; x) \geq f(x), \quad x \in [c, d] \quad (3.12)$$

ve $a = c$ ve $b = d$ olduğunda

$$\mathcal{L}_m(f; a) = f(a), \quad \mathcal{L}_m(f; b) = f(b)$$

sağlanır.

Tersine $(\mathcal{L}_m)_{m \geq 1}$, $C[a, b]$ uzayında tanımlı bir lineer pozitif operatörler dizisi ve $f \in C[a, b] \cap \mathcal{C}(u_0, u_1)$ olmak üzere (3.12) koşulu sağlandığı takdirde (3.10) ve (3.11) koşulları da sağlanır (Ziegler 1968).

Uyarı 3.1 Tanım 2.13 ile verilen genelleştirilmiş konvekslik tanımı $[0, \infty)$ aralığı için de uygulanabilir olduğundan Teorem 3.3 de $[0, \infty)$ aralığı için geçerli olacaktır (Ziegler 1968).

Teorem 3.4 $f \in C[0, \infty)$ ve $S_m : C[0, \infty) \rightarrow C[0, \infty)$ klasik Szasz-Mirakjan operatörleri olmak üzere,

- i) f konveks bir fonksiyon ise, bu durumda $f(x) \leq S_m(f; x)$, $m \in \mathbb{N}$
- ii) f konveks bir fonksiyon ise, bu durumda $S_{m+1}(f; x) \leq S_m(f; x)$, $m \in \mathbb{N}$
- iii) f artan bir fonksiyon ise $(S_m)_{m \geq 1}$ artan; f azalan bir fonksiyon ise $(S_m)_{m \geq 1}$ azalandır.

Teorem 3.5 $f \in C_B[0, \infty)$ fonksiyonu artan ve $(1, e_2 + \lambda e_1)$ konveks fonksiyon olsun. Bu durumda $\lambda \in [0, \infty)$ olmak üzere,

$$f(x) \leq S_{m,\lambda}(f; x) \leq S_m(f; x), \quad x \in [0, \infty), \quad m \in \mathbb{N} \quad (3.13)$$

şeklindedir.

İspat. f fonksiyonu $(1, e_2 + \lambda e_1)$ konveks fonksiyon ise $\tau := \frac{e_2 + \lambda e_1}{1 + \lambda}$ olmak üzere aynı zamanda $(1, \tau)$ konveks de olacaktır. Buna göre (3.9) ve Teorem 3.3'ten $u_0 = e_0$ ve $u_1 = \frac{e_2 + \lambda e_1}{1 + \lambda}$ alınırsa,

$$f(x) \leq S_{m,\lambda}(f; x)$$

yazılabilir. f konveks bir fonksiyon ise, Teorem 3.4'ten

$$f(x) \leq S_m(f; x), \quad x \in [0, \infty), \quad m \in \mathbb{N}$$

elde edilir. τ konveks bir fonksiyon olduğundan

$$\tau(x) \leq S_m(\tau; x)$$

bulunur. $S_m(\tau; \cdot)$ artan bir fonksiyon olduğundan $(S_m(\tau; \cdot))^{-1}$ de artan bir fonksiyon olup son eşitsizliğin her iki tarafına $(S_m(\tau; \cdot))^{-1}$ uygulanırsa

$$\begin{aligned} (S_m(\tau; x))^{-1} \circ \tau(x) &\leq (S_m(\tau; x))^{-1} \circ (S_m(\tau; x)) \\ (S_m(\tau; x))^{-1} \circ \tau(x) &\leq x \end{aligned} \quad (3.14)$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapıldığında

$$(S_m(\tau; x))^{-1} \circ \tau(x) = r_{m,\lambda}(x)$$

olduğu görülür. S_m monoton bir operatör olduğundan (3.14) ün her iki tarafına $S_m(f; \cdot)$ operatörü uygulanırsa,

$$S_{m,\lambda}(f; x) \leq S_m(f; x)$$

bulunur. Bu da bizden istenendir. ■

3.2 $S_{m,\lambda}$ Operatörleri için Lokal Yaklaşım Özellikleri

Bu kısımda $S_{m,\lambda}$ genelleştirilmiş operatörlerinin verilen bir f fonksiyonuna yaklaşım hızı, klasik süreklilik modülü kullanılarak hesaplanacaktır. Ayrıca Peetre K-fonksiyoneli yardımıyla ikinci süreklilik modülüne geçilecek ve $S_{m,\lambda}$ modifiye operatörleri için lokal yaklaşım özelliği ispatlanacaktır. Ayrıca tanımlanacak olan Lipschitz sınıfındaki tüm f fonksiyonları için de bir yaklaşım hızı elde edilecektir. Burada kullanılacak olan $C_B[0, \infty)$ fonksiyon uzayını

$$C_B[0, \infty) = \{f \in C[0, \infty) : f \text{ sınırlı}\}$$

şeklinde tanımlayalım. $C_B[0, \infty)$ uzayı üzerinde tanımlanan norm

$$\|f\|_{[0, \infty)} = \sup_{x \in [0, \infty)} |f(x)|$$

şeklinde dir. Ayrıca bu kısımda adı geçen ikinci süreklilik modülü $\omega_2(f, \delta)$ olmak üzere, her $f \in C_B[0, \infty)$ için

$$\omega_2(f, \delta) = \sup_{\substack{0 < h \leq \delta \\ x \in [0, \infty)}} |f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)|, \quad \delta > 0 \quad (3.15)$$

şeklinde tanımlanır ve klasik Peetre K-fonksiyoneli

$$K(f, \delta) = \inf_{g \in C_B^2[0, \infty)} \{\|f - g\| + \delta \|g''\|\} \quad (3.16)$$

olup, (DeVore ve Lorentz 1993) de yer alan Teorem 2.4'ten de görüleceği üzere

$C > 0$ sabiti için,

$$K(f, \delta) \leq C \omega_2\left(f, \sqrt{\delta}\right) \quad (3.17)$$

özelliğine sahiptir. Ayrıca bu kısımda $Lip_M^*(\alpha)$ ile gösterilen uzay, M herhangi bir pozitif sabit ve $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere

$$Lip_M^*(\alpha) := \left\{ f \in C[0, \infty) : |f(t) - f(x)| \leq M \frac{|t - x|^\alpha}{(t + x)^{\alpha/2}}; \quad x, t \in (0, \infty) \right\} \quad (3.18)$$

şeklinde alınacaktır.

Teorem 3.6 $f \in C_B[0, \infty)$ ve $\omega(f, \cdot)$ (2.5) ile verilen klasik süreklilik modülü olmak üzere, $S_{m,\lambda}$ genelleştirilmiş Szasz-Mirakjan operatörleri için,

$$|S_{m,\lambda}(f; x) - f(x)| \leq 2\omega(f, \delta_{m,x}^\lambda) \quad (3.19)$$

sağlanır. Burada $\delta_{m,x}^\lambda := (S_{m,\lambda}(t-x)^2; x)^{1/2}$ şeklindedir.

İspat. (3.1) ile verilen $S_{m,\lambda}$ operatörleri için,

$$\begin{aligned} & S_{m,\lambda}(f; x) - f(x) \\ &= e^{-mr_{m,\lambda}(x)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} f\left(\frac{s}{m}\right) - e^{-mr_{m,\lambda}(x)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} f(x) \\ &= e^{-mr_{m,\lambda}(x)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} \left(f\left(\frac{s}{m}\right) - f(x)\right) \end{aligned}$$

olup her iki tarafın mutlak değeri alınırsa,

$$\begin{aligned} |S_{m,\lambda}(f; x) - f(x)| &= \left| e^{-mr_{m,\lambda}(x)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} \left(f\left(\frac{s}{m}\right) - f(x)\right) \right| \\ &\leq e^{-mr_{m,\lambda}(x)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} \left| f\left(\frac{s}{m}\right) - f(x) \right| \end{aligned}$$

bulunur. Süreklilik modülünün (vi) numaralı özelliğinden

$$\begin{aligned} |S_{m,\lambda}(f; x) - f(x)| &\leq e^{-mr_{m,\lambda}(x)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} \left(1 + \left|\frac{s}{m} - x\right|\right) \omega(f, \delta) \\ &= \left[1 + \frac{1}{\delta} e^{-mr_{m,\lambda}(x)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} \left|\frac{s}{m} - x\right|\right] \omega(f, \delta) \end{aligned}$$

yazılabilir. Son eşitsizlikte yer alan toplama Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} & |S_{m,\lambda}(f; x) - f(x)| \\ &\leq \omega(f, \delta) \left(1 + \frac{1}{\delta} \left(e^{-mr_{m,\lambda}(x)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!}\right)^{1/2} \left(e^{-mr_{m,\lambda}(x)} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{s}{m} - x\right)^2 \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!}\right)^{1/2}\right) \\ &= \omega(f, \delta) \left[1 + \frac{1}{\delta} (S_{m,\lambda}(t-x)^2; x)^{1/2}\right] \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre $\delta = \delta_{m,x}^\lambda = (S_{m,\lambda}(t-x)^2; x)^{1/2}$ seçilirse

$$|S_{m,\lambda}(f; x) - f(x)| \leq 2\omega(f, \delta_{m,x}^\lambda)$$

bulunur. ■

Teorem 3.7 $x \in [0, \infty)$ ve $f \in C_B[0, \infty)$ olmak üzere, $S_{m,\lambda}$ genelleştirilmiş Szasz-Mirakjan operatörleri için,

$$|S_{m,\lambda}(f; x) - f(x)| \leq C\omega_2\left(f, \sqrt{(4x + \lambda)(x - r_{m,\lambda}(x))}\right) + \omega(f, x - r_{m,\lambda}(x))$$

şeklindedir.

İspat. Öncelikle $\Theta_{m,\lambda} : C_B[0, \infty) \rightarrow C_B[0, \infty)$ olmak üzere

$$\Theta_{m,\lambda}(f; x) = S_{m,\lambda}(f; x) - f(r_{m,\lambda}(x)) + f(x)$$

şeklinde yeni bir yardımcı operatör tanımlayalım. Buna göre

$$\begin{aligned} \Theta_{m,\lambda}(t-x; x) &= S_{m,\lambda}(t-x; x) - (r_{m,\lambda}(x) - x) \\ &= r_{m,\lambda}(x) - x - r_{m,\lambda}(x) + x \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. $x \in [0, \infty)$ ve $g \in C_B^2[0, \infty)$ için g fonksiyonunun Taylor formülünden

$$g(t) = g(x) + (t-x)g'(x) + \int_x^t (t-u)g''(u)du, \quad t \in [0, \infty)$$

yazılabilir. Eşitliğin her iki tarafına $\Theta_{m,\lambda}$ operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned} \Theta_{m,\lambda}(g; x) &= g(x)\Theta_{m,\lambda}(1; x) + \Theta_{m,\lambda}((t-x)g'(x); x) + \Theta_{m,\lambda}\left(\int_x^t (t-u)g''(u)du; x\right) \\ &= g(x) + \Theta_{m,\lambda}\left(\int_x^t (t-u)g''(u)du; x\right) \end{aligned}$$

bulunur. $\Theta_{m,\lambda}$ operatörünün tanımından

$$\Theta_{m,\lambda}(g; x) - g(x) = S_{m,\lambda}\left(\int_x^t (t-u)g''(u)du; x\right) - \int_x^{r_{m,\lambda}(x)} (r_{m,\lambda}(x) - u)g''(u)du$$

elde edilir. Her iki tarafın mutlak değeri alınırsa

$$\begin{aligned}
|\Theta_{m,\lambda}(g; x) - g(x)| &\leq \left| S_{m,\lambda} \left(\int_x^t (t-u) g''(u) du; x \right) \right| + \left| \int_x^{r_{m,\lambda}(x)} (r_{m,\lambda}(x) - u) g''(u) du \right| \\
&\leq S_{m,\lambda} \left(\int_x^t |(t-u)| |g''(u)| du; x \right) + \int_x^{r_{m,\lambda}(x)} |(r_{m,\lambda}(x) - u)| |g''(u)| du
\end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\int_x^t |(t-u)| |g''(u)| du &\leq \frac{(t-x)^2}{2} \|g''\| \\
\int_x^{r_{m,\lambda}(x)} |(r_{m,\lambda}(x) - u)| |g''(u)| du &\leq \frac{(r_{m,\lambda}(x) - x)^2}{2} \|g''\|
\end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned}
|\Theta_{m,\lambda}(g(t); x) - g(x)| &\leq [S_{m,\lambda}((t-x)^2; x) + (r_{m,\lambda}(x) - x)^2] \frac{\|g''\|}{2} \\
&\leq [S_{m,\lambda}((t-x)^2 + \lambda t - \lambda t; x) + (r_{m,\lambda}(x) - x)^2] \frac{\|g''\|}{2} \\
&\leq [3x^2 + \lambda x - (2x + \lambda)r_{m,\lambda}(x) - 2xr_{m,\lambda}(x) + (r_{m,\lambda}(x))^2] \frac{\|g''\|}{2} \\
&\leq 2(4x + \lambda)(x - r_{m,\lambda}(x)) \|g''\|
\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre,

$$\begin{aligned}
&|S_{m,\lambda}(f; x) - f(x)| \\
&\leq |\Theta_{m,\lambda}(f - g; x)| + |g(x) - f(x)| + |\Theta_{m,\lambda}(g; x) - g(x)| + |f(x) - f(r_{m,\lambda}(x))| \\
&\leq 2(\|f - g\| + (4x + \lambda)(x - r_{m,\lambda}(x)) \|g''\|) + |f(x) - f(r_{m,\lambda}(x))|
\end{aligned}$$

olup $g \in C_B^2[0, \infty)$ üzerinden infimum alınırsa,

$$\begin{aligned}
|S_{m,\lambda}(f; x) - f(x)| &\leq 2K(f; (4x + \lambda)(x - r_{m,\lambda}(x))) + \omega(f, x - r_{m,\lambda}(x)) \\
|S_{m,\lambda}(f; x) - f(x)| &\leq C\omega_2\left(f, \sqrt{(4x + \lambda)(x - r_{m,\lambda}(x))}\right) + \omega(f, x - r_{m,\lambda}(x))
\end{aligned}$$

bulunur. Bu da bizden istenendir. ■

Lemma 3.8 Her $x \in [0, \infty)$ için,

$$\sum_{s=0}^{\infty} |s - mx| \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} \leq [m^2(2x + \lambda)(x - r_{m,\lambda}(x))]^{1/2} e^{mr_{m,\lambda}(x)}$$

şeklindedir.

İspat. Her $x \in [0, \infty)$ için,

$$\begin{aligned} & \sum_{s=0}^{\infty} (s - mx)^2 \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} s^2 \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} - 2mx \sum_{s=0}^{\infty} s \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} + m^2 x^2 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} \\ &= (m^2 S_{m,\lambda}(t^2; x) - 2m^2 x S_{m,\lambda}(t; x) + m^2 x^2 S_{m,\lambda}(1; x)) e^{mr_{m,\lambda}(x)} \\ &= (m^2 S_{m,\lambda}(t^2 + \lambda t; x) - 2m^2 x S_{m,\lambda}(t; x) - m^2 \lambda S_{m,\lambda}(t; x) + m^2 x^2 S_{m,\lambda}(1; x)) e^{mr_{m,\lambda}(x)} \\ &= (m^2 (x^2 + \lambda x) - 2m^2 x r_{m,\lambda}(x) - m^2 \lambda r_{m,\lambda}(x) + m^2 x^2) e^{mr_{m,\lambda}(x)} \\ &= (m^2 (2x + \lambda)(x - r_{m,\lambda}(x))) e^{mr_{m,\lambda}(x)} \end{aligned} \quad (3.20)$$

yazılır. Buna göre aşağıda verilen toplamda Cauchy-Schwarz eşitsizliği ve (3.20)

ifadesinin kullanılmasıyla,

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} |s - mx| \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} &\leq \left(\sum_{s=0}^{\infty} (s - mx)^2 \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} \right)^{1/2} \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} \right)^{1/2} \\ &= (m^2 (2x + \lambda)(x - r_{m,\lambda}(x)))^{1/2} e^{mr_{m,\lambda}(x)} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. ■

Teorem 3.8 $f \in Lip_M^*(\alpha)$ ve $x \in (0, \infty)$ için,

$$|S_{m,\lambda}(f; x) - f(x)| \leq M \left[\left(\frac{2x + \lambda}{x} \right) (x - r_{m,\lambda}(x)) \right]^{\alpha/2}$$

dir.

İspat. Kabul edelim ki $\alpha = 1$ ve $x \in (0, \infty)$ olsun. $f \in Lip_M^*(1)$ ise bu durumda,

$$\begin{aligned}
& |S_{m,\lambda}(f; x) - f(x)| \\
&= \left| e^{-mr_{m,\lambda}(x)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} f\left(\frac{s}{m}\right) - e^{-mr_{m,\lambda}(x)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} f(x) \right| \\
&\leq e^{-mr_{m,\lambda}(x)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} \left| f\left(\frac{s}{m}\right) - f(x) \right| \\
&\leq M e^{-mr_{m,\lambda}(x)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} \frac{\left| \frac{s}{m} - x \right|}{\left(\frac{s}{m} + x \right)^{1/2}} \\
&= \frac{M}{\sqrt{m}} e^{-mr_{m,\lambda}(x)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} \frac{|s - mx|}{(s + mx)^{1/2}} \\
&\leq \frac{M}{m\sqrt{x}} e^{-mr_{m,\lambda}(x)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} |s - mx| \\
&\leq \frac{M}{m\sqrt{x}} e^{-mr_{m,\lambda}(x)} (m^2 (2x + \lambda) (x - r_{m,\lambda}(x)))^{1/2} e^{mr_{m,\lambda}(x)} \\
&= M \left(\frac{(2x + \lambda)}{x} (x - r_{m,\lambda}(x)) \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\alpha = 1$ için ispat gerçektir.

Kabul edelim ki $\alpha \in (0, 1)$ olsun. Buna göre,

$$\begin{aligned}
& |S_{m,\lambda}(f; x) - f(x)| \\
&\leq e^{-mr_{m,\lambda}(x)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} \left| f\left(\frac{s}{m}\right) - f(x) \right| \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} \left(e^{-mr_{m,\lambda}(x)} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} \left| f\left(\frac{s}{m}\right) - f(x) \right|^{1/\alpha} \right)^{\alpha} \left(e^{-mr_{m,\lambda}(x)} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} \right)^{1-\alpha}
\end{aligned}$$

olup son eşitsizliğe Hölder eşitsizliği uygulayıp $p = \frac{1}{\alpha}$ ve $q = \frac{1}{1-\alpha}$ olarak alınırsa,

$$|S_{m,\lambda}(f; x) - f(x)| \leq \left(e^{-mr_{m,\lambda}(x)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} \left| f\left(\frac{s}{m}\right) - f(x) \right|^{1/\alpha} \right)^{\alpha}$$

elde edilir. $f \in Lip_M^*(\alpha)$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
|S_{m,\lambda}(f; x) - f(x)| &\leq M \left(e^{-mr_{m,\lambda}(x)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} \frac{\left| \frac{s}{m} - x \right|}{\left(\frac{s}{m} + x \right)^{1/2}} \right)^{\alpha} \\
&\leq M e^{-m\alpha r_{m,\lambda}(x)} \left(\frac{1}{m\sqrt{x}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} |s - mx| \right)^{\alpha} \\
&\leq M e^{-m\alpha r_{m,\lambda}(x)} \left(\frac{(2x + \lambda)}{x} (x - r_{m,\lambda}(x)) \right)^{\alpha/2} e^{m\alpha r_{m,\lambda}(x)} \\
&= M \left(\frac{(2x + \lambda)}{x} (x - r_{m,\lambda}(x)) \right)^{\alpha/2}
\end{aligned}$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar. ■

Teorem 3.9 $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu reel değerli, sürekli ve sınırlı bir fonksiyon olsun. f^* fonksiyonu da

$$f^*(z) = f(z^2), \quad z \in [0, \infty) \quad (3.21)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\lambda \in [0, \infty)$ için,

$$|S_{m,\lambda}(f; x) - f(x)| \leq 2\omega \left(f^*; \sqrt{\frac{2}{m} + \frac{\lambda}{\lambda m + 1}} \right), \quad x \in [0, \infty), \quad m \in \mathbb{N}$$

biçimindedir. Ayrıca f^* düzgün sürekli olduğunda $S_{m,\lambda}$ lineer pozitif operatörler dizisi de $[0, \infty)$ aralığında f fonksiyonuna düzgün olarak yakınsar.

İspat. f^* fonksiyonunun (3.21) ile verilen tanımından

$$S_{m,\lambda}(f(t); x) = S_{m,\lambda}(f^*(\sqrt{t}); x)$$

yazılabilir. Buna göre,

$$\begin{aligned}
|S_{m,\lambda}(f; x) - f(x)| &= \left| S_{m,\lambda}(f^*(\sqrt{t}); x) - f^*(\sqrt{x}) \right| \\
&= \left| S_{m,\lambda}(f^*(\sqrt{t}) - f^*(\sqrt{x}); x) \right| \\
&\leq S_{m,\lambda}(|f^*(\sqrt{t}) - f^*(\sqrt{x})|; x)
\end{aligned}$$

olup, f^* fonksiyonunun süreklilik modülünün özelliğinden

$$\begin{aligned}
& |S_{m,\lambda}(f; x) - f(x)| \\
& \leq S_{m,\lambda}\left(\omega\left(f^*; \left|\sqrt{t} - \sqrt{x}\right|\right); x\right) \\
& = S_{m,\lambda}\left(\omega\left(f^*; \frac{|\sqrt{t} - \sqrt{x}|}{S_{m,\lambda}(|\sqrt{t} - \sqrt{x}|; x)} S_{m,\lambda}(|\sqrt{t} - \sqrt{x}|; x)\right); x\right) \\
& \leq S_{m,\lambda}\left(\left(1 + \frac{|\sqrt{t} - \sqrt{x}|}{S_{m,\lambda}(|\sqrt{t} - \sqrt{x}|; x)}\right) \omega\left(f^*; S_{m,\lambda}(|\sqrt{t} - \sqrt{x}|; x)\right); x\right) \\
& = \omega\left(f^*; S_{m,\lambda}(|\sqrt{t} - \sqrt{x}|; x)\right) \left(S_{m,\lambda}(1; x) + \frac{S_{m,\lambda}(|\sqrt{t} - \sqrt{x}|; x)}{S_{m,\lambda}(|\sqrt{t} - \sqrt{x}|; x)}\right) \\
& = 2\omega\left(f^*; S_{m,\lambda}(|\sqrt{t} - \sqrt{x}|; x)\right)
\end{aligned}$$

bulunur. $S_{m,\lambda}(|\sqrt{t} - \sqrt{x}|; x)$ terimi düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
S_{m,\lambda}\left(|\sqrt{t} - \sqrt{x}|; x\right) &= S_{m,\lambda}\left(\frac{|t - x|}{\sqrt{t} + \sqrt{x}}; x\right) \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{x}} S_{m,\lambda}(|t - x|; x)
\end{aligned}$$

olup son ifadeye Cauchy Schwarz eşitsizliği uygulanırsa,

$$S_{m,\lambda}\left(|\sqrt{t} - \sqrt{x}|; x\right) \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \left(S_{m,\lambda}((t - x)^2; x)\right)^{1/2}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
S_{m,\lambda}((t - x)^2; x) &= S_{m,\lambda}(t^2 - 2xt + x^2; x) \\
&= S_{m,\lambda}(t^2 + \lambda t; x) - (2x + \lambda) S_{m,\lambda}(t; x) + x^2 S_{m,\lambda}(1; x) \\
&= x^2 + \lambda x - (2x + \lambda) r_{m,\lambda}(x) + x^2 \\
&= (2x + \lambda)(x - r_{m,\lambda}(x))
\end{aligned}$$

şeklinde olup $r_{m,\lambda}$ fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned}
x - r_{m,\lambda}(x) &= x + \frac{(\lambda m + 1)}{2m} - \sqrt{\frac{(\lambda m + 1)^2}{4m^2} + (x^2 + \lambda x)} \\
&= \frac{\left(x + \frac{(\lambda m + 1)}{2m}\right)^2 - \frac{(\lambda m + 1)^2}{4m^2} - (x^2 + \lambda x)}{x + \frac{(\lambda m + 1)}{2m} + \sqrt{\frac{(\lambda m + 1)^2}{4m^2} + (x^2 + \lambda x)}} \\
&= \frac{x}{m \left(x + \frac{(\lambda m + 1)}{2m} + \sqrt{\frac{(\lambda m + 1)^2}{4m^2} + (x^2 + \lambda x)}\right)} \\
&\leq \frac{x}{m \left(x + \frac{\lambda m + 1}{m}\right)} \\
&= \frac{x}{mx + \lambda m + 1}
\end{aligned}$$

bulunur. Buna göre,

$$\begin{aligned}
S_{m,\lambda} \left(\left| \sqrt{t} - \sqrt{x} \right|; x \right) &\leq \frac{1}{\sqrt{x}} \left(S_{m,\lambda} \left((t - x)^2; x \right) \right)^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{\frac{x}{mx + \lambda m + 1}} \sqrt{2x + \lambda} \\
&= \sqrt{\frac{2x + \lambda}{mx + \lambda m + 1}} \\
&= \sqrt{\frac{2x}{mx + \lambda m + 1} + \frac{\lambda}{mx + \lambda m + 1}} \\
&\leq \sqrt{\frac{2}{m} + \frac{\lambda}{\lambda m + 1}}
\end{aligned}$$

olup,

$$|S_{m,\lambda}(f; x) - f(x)| \leq 2\omega \left(f^*; \sqrt{\frac{2}{m} + \frac{\lambda}{\lambda m + 1}} \right)$$

elde edilir. f^* düzgün sürekli olduğunda, $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f^*; \delta) = 0$ olacağından $S_{m,\lambda}$ lineer pozitif operatörler dizisi f fonksiyonuna $[0, \infty)$ aralığında düzgün olarak yakınsar.

■

3.3 $S_{m,\lambda}$ Operatörleri için Ağırlıklı Yaklaşım Özellikleri

$S_{m,\lambda}$ King tipli Szasz-Mirakjan operatörlerinin ağırlıklı yaklaşım özellikleri incelenirken, ρ ağırlık fonksiyonu $\varphi(x) = x$ olmak üzere $\rho(x) = 1 + x^2$ fonksiyonu

olarak alınacaktır. O halde B_ρ ve C_ρ uzayları buna göre yeniden tanımlanırsa,

$$C[0, \infty) = \{f : f, [0, \infty) \text{ da sürekli}\}$$

ve M_f , f fonksiyonuna bağlı pozitif bir sabit olmak üzere,

$$B_2[0, \infty) = \{f : f, [0, \infty) \text{ üzerinde tanımlı ve } |f(x)| \leq M_f (1 + x^2)\}$$

$C_2[0, \infty)$ uzayı,

$$C_2[0, \infty) = B_2[0, \infty) \cap C[0, \infty)$$

ve $f \in C_2[0, \infty)$ için

$$C_2^*[0, \infty) = \left\{ f : f \in C_2[0, \infty) \text{ ve } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|f(x)|}{1 + x^2} = k_f < \infty \right\}$$

olmak üzere, bu şekilde tanımlanan fonksiyon uzaylarını göz önüne alacağız. Bu uzaylar üzerindeki norm ise,

$$\|f\|_2 = \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{|f(x)|}{1 + x^2}$$

şeklindedir.

Teorem 3.10 $f \in C_2^*[0, \infty)$ olmak üzere, her $x \in [0, \infty)$ ve yeterince büyük m ler için,

$$\sup_{x \in [0, \infty)} \frac{|S_{m,\lambda}(f; x) - f(x)|}{(1 + x^2)^{5/2}} \leq C_\lambda \Omega(f, \frac{1}{\sqrt{m}})$$

biçimindedir. Burada C_λ , λ sayısına bağlı pozitif bir sabittir.

İspat. $f \in C_2^*[0, \infty)$ ve (3.1) ile verilen $S_{m,\lambda}$ operatörleri için,

$$\begin{aligned} |S_{m,\lambda}(f; x) - f(x)| &= \left| e^{-mr_{m,\lambda}(x)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} \left(f\left(\frac{s}{m}\right) - f(x) \right) \right| \\ &\leq e^{-mr_{m,\lambda}(x)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} \left| f\left(\frac{s}{m}\right) - f(x) \right| \end{aligned}$$

olup Lemma 2.5 ile verilen ağırlıklı süreklilik modülünün sağladığı v) özelliğinden

$$\begin{aligned} &|S_{m,\lambda}(f; x) - f(x)| \\ &\leq 2(1 + x^2)(1 + \delta^2)\Omega(f, \delta)e^{-mr_{m,\lambda}(x)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} \left(1 + \frac{1}{\delta} \left|\frac{s}{m} - x\right|\right) \left(1 + \left(\frac{s}{m} - x\right)^2\right) \\ &= 2(1 + x^2)(1 + \delta^2)\Omega(f, \delta)e^{-mr_{m,\lambda}(x)} \\ &\quad \times \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} \left(1 + \left(\frac{s}{m} - x\right)^2 + \frac{1}{\delta} \left|\frac{s}{m} - x\right| + \frac{1}{\delta} \left|\frac{s}{m} - x\right| \left(\frac{s}{m} - x\right)^2\right) \end{aligned}$$

olup eşitliğin sağ tarafında bulunan toplamın içinde yer alan ifadelere Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} & |S_{m,\lambda}f(x) - f(x)| \\ & \leq 2(1+x^2)(1+\delta^2)\Omega(f, \delta) \left(1 + \mu_{m,2}(x) + \frac{1}{\delta} (\mu_{m,2}(x))^{1/2} + \frac{1}{\delta} (\mu_{m,2}(x)\mu_{m,4}(x))^{1/2}\right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \mu_{m,2}(x) &= (2x + \lambda)(x - r_{m,\lambda}(x)) \\ &\leq (2x + \lambda) \left(\frac{x}{mx + \lambda m + 1} \right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \mu_{m,4}(x) &= \frac{m^4(16x^4 + 32x^3\lambda + 24x^2\lambda^2 + 8x\lambda^3 + \lambda^4)}{2m^4} \\ &\quad - \frac{m^3(8x^3 + 12x^2\lambda + 6x\lambda^2 + \lambda^3)\sqrt{1 + 2m\lambda + m^2(2x + \lambda)^2}}{2m^4} + o(1) \end{aligned}$$

olduğu bilinmektedir. Buna göre (3.22) ile verilen eşitsizlik $(1+x^2)^{5/2}$ ile bölünüp her iki tarafın supremumu alınır,

$$\frac{|S_{m,\lambda}(f; x) - f(x)|}{(1+x^2)^{5/2}} \leq 2(1+\delta^2)\Omega(f, \delta) \left(1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{\delta} \frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{1}{\delta} \frac{1}{\sqrt{m}} C_\lambda^*\right)$$

elde edilir. Burada C_λ^* , λ sayısına bağlı pozitif bir sabit olup, $\delta = \frac{1}{\sqrt{m}}$ seçilirse yeterince büyük m ler için

$$\sup_{x \in [0, \infty)} \frac{|S_{m,\lambda}(f; x) - f(x)|}{(1+x^2)^{5/2}} \leq C_\lambda \Omega(f, \frac{1}{\sqrt{m}})$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.11 $f, f' \in C_2^*[0, \infty)$ olmak üzere,

$$S'_{m,\lambda}(f; x) = e^{-mr_{m,\lambda}(x)} r'_{m,\lambda}(x) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} f' \left(\frac{s + \phi_s}{m} \right), \quad 0 < \phi_s < 1$$

şeklindedir.

İspat. Lemma 3.5'ten,

$$S'_{m,\lambda}(f; x) = me^{-mr_{m,\lambda}(x)} r'_{m,\lambda}(x) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} \left\{ f \left(\frac{s+1}{m} \right) - f \left(\frac{s}{m} \right) \right\}$$

olduğu bilinmektedir. Buna göre $x_1 = \frac{s}{m}$ ve $x_2 = \frac{s+1}{m}$ noktalarındaki bölünmüş fark tanımından

$$f\left(\frac{s+1}{m}\right) - f\left(\frac{s}{m}\right) = \frac{1}{m} f\left[\frac{s}{m}, \frac{s+1}{m}\right]$$

yazılabilir. Buna göre

$$S'_{m,\lambda}(f; x) = e^{-mr_{m,\lambda}(x)} r'_{m,\lambda}(x) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} f\left[\frac{s}{m}, \frac{s+1}{m}\right]$$

bulunur. f fonksiyonunun $x_1 = \frac{s}{m}$ ve $x_2 = \frac{s+1}{m}$ noktalarındaki bölünmüş farkı,

$$f\left[\frac{s}{m}, \frac{s+1}{m}\right] = f'(\xi) \quad , \quad \frac{s}{m} < \xi < \frac{s+1}{m}$$

eşitliğini sağlar. O halde $\xi := \frac{s + \phi_s}{m}$ şeklinde tanımlanırsa, $0 < \phi_s < 1$ olup,

$$S'_{m,\lambda}(f; x) = e^{-mr_{m,\lambda}(x)} r'_{m,\lambda}(x) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} f'\left(\frac{s + \phi_s}{m}\right) \quad , \quad 0 < \phi_s < 1$$

elde edilir. ■

Teorem 3.12 $f \in C[0, \infty)$ fonksiyonu sınırlı ve sürekli türevlere sahip bir fonksiyon ve $f' \in Lip_M \beta$ olsun. Bu durumda

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{|S'_{m,\lambda}(f; x) - f'(x)|}{1 + x^{\beta+1}} = 0$$

şeklindedir.

İspat. $S'_{m,\lambda}(f; x) - f'(x)$ ifadesine $f'(r_{m,\lambda}(x))r'_{m,\lambda}(x)$ eklenip çıkartılıp her iki tarafın mutlak değeri alındığında,

$$\begin{aligned} |S'_{m,\lambda}(f; x) - f'(x)| &= \left| S'_{m,\lambda}(f; x) - f'(r_{m,\lambda}(x))r'_{m,\lambda}(x) + f'(r_{m,\lambda}(x))r'_{m,\lambda}(x) - f'(x) \right| \\ &\leq |S'_{m,\lambda}(f; x) - f'(r_{m,\lambda}(x))r'_{m,\lambda}(x)| + |f'(r_{m,\lambda}(x))r'_{m,\lambda}(x) - f'(x)| \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizliğe Teorem 3.11 uygulandığında,

$$\begin{aligned} |S'_{m,\lambda}(f; x) - f'(x)| &\leq r'_{m,\lambda}(x) e^{-mr_{m,\lambda}(x)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} \left| f'\left(\frac{s + \phi_k}{m}\right) - f'(r_{m,\lambda}(x)) \right| \\ &\quad + |f'(r_{m,\lambda}(x))r'_{m,\lambda}(x) - f'(x)| \end{aligned}$$

elde edilir. $f' \in Lip_M^\beta$ olduğundan

$$\begin{aligned} |S'_{m,\lambda}(f; x) - f'(x)| &\leq Mr'_{m,\lambda}(x)e^{-mr_{m,\lambda}(x)} \sum_{s=0}^{\infty} \left| \left(\frac{s + \phi_k}{m} \right) - r_{m,\lambda}(x) \right|^\beta \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} \\ &\quad + |f'(r_{m,\lambda}(x))r'_{m,\lambda}(x) - f'(x)| \end{aligned}$$

bulunur. $\phi_k < 1$ olduğundan,

$$\begin{aligned} |S'_{m,\lambda}(f; x) - f'(x)| &\leq Mr'_{m,\lambda}(x)e^{-mr_{m,\lambda}(x)} \sum_{s=0}^{\infty} \left| \left(\frac{s + 1}{m} \right) - r_{m,\lambda}(x) \right|^\beta \frac{(mr_{m,\lambda}(x))^s}{s!} \\ &\quad + |f'(r_{m,\lambda}(x))r'_{m,\lambda}(x) - f'(x)| \end{aligned}$$

yazılabilir. Son eşitsizlikte toplamın içerisindeki ifadeye Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} &|S'_{m,\lambda}(f; x) - f'(x)| \\ &\leq Mr'_{m,\lambda}(x)S_{m,\lambda} \left(\left(t + \frac{1}{m} - r_{m,\lambda}(x) \right)^2; x \right)^{\frac{\beta}{2}} + |f'(r_{m,\lambda}(x))r'_{m,\lambda}(x) - f'(x)| \\ &= Mr'_{m,\lambda}(x) \left(S_{m,\lambda}((t - r_{m,\lambda}(x))^2; x) + \frac{2}{m}S_{m,\lambda}(t - r_{m,\lambda}(x); x) + \frac{1}{m^2} \right)^{\frac{\beta}{2}} \\ &\quad + |f'(r_{m,\lambda}(x))r'_{m,\lambda}(x) - f'(x)|. \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafı $1 + x^{\beta+1}$ ile bölündüğünde,

$$\begin{aligned} &\frac{|S'_{m,\lambda}(f; x) - f'(x)|}{1 + x^{\beta+1}} \\ &\leq \frac{Mr'_{m,\lambda}(x)}{1 + x^{\beta+1}} \left(S_{m,\lambda}((t - r_{m,\lambda}(x))^2; x) + \frac{2}{m}S_{m,\lambda}(t - r_{m,\lambda}(x); x) + \frac{1}{m^2} \right)^{\frac{\beta}{2}} \\ &\quad + \frac{|f'(r_{m,\lambda}(x))r'_{m,\lambda}(x) - f'(x)|}{1 + x^{\beta+1}} \end{aligned}$$

bulunur. Buna göre $m \rightarrow \infty$ durumunda

$$\sup_{x \in [0, \infty)} \frac{r'_{m,\lambda}(x)S_{m,\lambda}((t - r_{m,\lambda}(x))^2; x)^{\frac{\beta}{2}}}{1 + x^{\beta+1}} = \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{r'_{m,\lambda}(x)(r_{m,\lambda}(x))^{\frac{\beta}{2}}}{(1 + x^{\beta+1})m^{\frac{\beta}{2}}} \leq \frac{1}{m^{\frac{\beta}{2}}} \rightarrow 0$$

olur. Diğer taraftan,

$$f'(r_{m,\lambda}(x))r'_{m,\lambda}(x) - f'(x) = (f'(r_{m,\lambda}(x)) - f'(x))r'_{m,\lambda}(x) - f'(x)(1 - r'_{m,\lambda}(x))$$

olup $f' \in Lip_M^\beta$ olduğundan,

$$|f'(r_{m,\lambda}(x)) - f'(x)| \leq M|r_{m,\lambda}(x) - x|^\beta$$

bulunur. Aynı zamanda $M_f = \max \{|f'(0)|, M\}$ olmak üzere $t = 0$ için,

$$|f'(x)| \leq |f'(0)| + Mx^\beta \leq M_f (1 + x^\beta)$$

yazılabilir. Buna göre,

$$\begin{aligned} \frac{|f'(r_{m,\lambda}(x))r'_{m,\lambda}(x) - f'(x)|}{1 + x^{\beta+1}} &\leq \frac{|f'(r_{m,\lambda}(x)) - f'(x)|}{1 + x^{\beta+1}} r'_{m,\lambda}(x) + \frac{|f'(x)|}{1 + x^{\beta+1}} |1 - r'_{m,\lambda}(x)| \\ &\leq M \frac{|r_{m,\lambda}(x) - x|^\beta}{1 + x^{\beta+1}} + \frac{|f'(x)|}{1 + x^{\beta+1}} |1 - r'_{m,\lambda}(x)| \\ &\leq M \frac{x^\beta}{(1 + x^{\beta+1})(\lambda m + 1)^\beta} + M_f \frac{1 + x^\beta}{1 + x^{\beta+1}} |1 - r'_{m,\lambda}(x)| \\ &\leq \frac{M}{(\lambda m + 1)^\beta} + M_f \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{2\lambda}{m} + \frac{1}{m^2} \right) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece yeterince büyük m ler için

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{|S'_{m,\lambda}(f; x) - f'(x)|}{1 + x^{\beta+1}} = 0$$

elde edilir. ■

3.4 $S_{m,\lambda}$ Operatörleri için Voronovskaya Tipli Teorem

Yaklaşım teorisindeki ana problemlerden birisi lineer pozitif operatörler dizisinin f fonksiyonuna yakınsama hızının belirlenmesidir. Bu durumla alakalı $(\mathcal{L}_m)_{m \geq 1}$ lineer pozitif operatörler dizisi olmak üzere

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m(L_m(f; x) - f(x))$$

limiti bize yardımcı olmaktadır. Bu formül $(\mathcal{L}_m)_{m \geq 1}$ lineer pozitif operatörlerinin asimptotik davranışı hakkında bilgi verir ve Voronovskaja formülü olarak bilinir.

Voronovskaja teoremi ilk olarak 1932 yılında E. V. Voronovskaja'nın birçok bilimsel çalışmanın odağı haline gelen Bernstein polinomları için bu teoremi ispat etmesiyle ortaya çıkmıştır (Voronovskaja 1932). Bu elde edilen sonuç ilerleyen zamanlarda birçok bilim adamının ilgisi çekmiş ve birbirinden farklı operatör dizileri için de bu teorem ispatlanmıştır. Voronovskaja teoreminin genelleştirilmiş durumları olan bu teoremlerin hepsi Voronovskaja tipli teoremler olarak adlandırılır. Biz de bu kısımda

King tipli Szasz-Mirakjan operatörleri için Voronovskaja tipli teoremi ispatlayacağız. Öncelikle ispat için gerekli olan lemmaları göz önüne alalım.

Lemma 3.9 (3.1) ile verilen $S_{m,\lambda}$ operatörleri için,

$$\begin{aligned}
m^2 S_{m,\lambda}(e_4; x) &= \frac{1 - m\lambda - 5m^2\lambda^2 - m^3(10x^2\lambda + 10x\lambda^2 + 2\lambda^3)}{2m^2} \\
&+ \frac{m^4(2x^4 + 4x^3\lambda + 6x^2\lambda^2 + 4x\lambda^3 + \lambda^4)}{2m^2} \\
&- \frac{m^3(2x^2\lambda + 2x\lambda^2 + \lambda^3)\sqrt{1 + 2m\lambda + m^2(2x + \lambda)^2}}{2m^2} \\
&+ \frac{m^2(4x^2 + 4x\lambda + 3\lambda^2)\sqrt{1 + 2m\lambda + m^2(2x + \lambda)^2}}{2m^2} \\
&+ \frac{(-1 + 2m\lambda)\sqrt{1 + 2m\lambda + m^2(2x + \lambda)^2}}{2m^2} \\
m^2 S_{m,\lambda}(e_3; x) &= \frac{1 + 2m\lambda + m^2(3x^2 + 3x\lambda) - m^3(3x^2\lambda + 3x\lambda^2 + \lambda^3)}{2m} \\
&+ \frac{m^2(x^2 + \lambda x + \lambda^2)\sqrt{1 + 2m\lambda + m^2(2x + \lambda)^2}}{2m} \\
&- \frac{(m\lambda + 1)\sqrt{1 + 2m\lambda + m^2(2x + \lambda)^2}}{2m} \\
m^2 S_{m,\lambda}(e_2; x) &= \frac{1}{2} \left(\lambda m + m^2(2x^2 + 2x\lambda + \lambda^2) - \lambda m \sqrt{1 + 2m\lambda + m^2(2x + \lambda)^2} \right) \\
m^2 S_{m,\lambda}(e_1; x) &= -\frac{1}{2}m(1 + m\lambda) + \frac{1}{2}m\sqrt{1 + 2m\lambda + m^2(2x + \lambda)^2}.
\end{aligned}$$

şeklindedir.

Lemma 3.10 (3.1) ile verilen $S_{m,\lambda}$ operatörleri için,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m^2 \mu_{m,4}(x) = 3x^2, \quad m \in \mathbb{N}, \quad x \in [0, a], \quad a > 0$$

yakınsaması düzgündür.

İspat. (3.2) ile verilen $r_{m,\lambda}$ fonksiyonunun tanımından ve (3.4) ile verilen $S_{m,\lambda}$

operatörlerinin dördüncü merkezli momentinden,

$$\begin{aligned}
& m^2 \mu_{m,4}(x) \\
&= m^2 (S_{m,\lambda}(e_4; x) - 4x S_{m,\lambda}(e_3; x) + 6x^2 S_{m,\lambda}(e_2; x) \\
&\quad - 4x^3 S_{m,\lambda}(e_1; x) + x^4 S_{m,\lambda}(e_0; x)) \\
&= \frac{m^4(16x^4 + 32x^3\lambda + 24x^2\lambda^2 + 8x\lambda^3 + \lambda^4)}{2m^2} \\
&\quad - \frac{m^3(8x^3 + 12x^2\lambda + 6x\lambda^2 + \lambda^3)\sqrt{1 + 2m\lambda + m^2(2x + \lambda)^2}}{2m^2} \\
&\quad - \frac{m^3(8x^3 + 16x^2\lambda + 10x\lambda^2 + 2\lambda^3)}{2m^2} \\
&\quad + \frac{m^2(4x^2 + 8x\lambda + 3\lambda^2)\sqrt{1 + 2m\lambda + m^2(2x + \lambda)^2}}{2m^2} \\
&\quad - \frac{m^2\lambda(8x + 5\lambda)}{2m^2} + \frac{2m(2x + \lambda)\sqrt{1 + 2m\lambda + m^2(2x + \lambda)^2}}{2m^2} + o(1)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $m \rightarrow \infty$ için limit alınır,

$$\begin{aligned}
\lim_{m \rightarrow \infty} m^2 \mu_{m,4}(x) &= -\frac{(8x^3 + 12x^2\lambda + 6x\lambda^2 + \lambda^3)}{4(2x + \lambda)} + \frac{(8x^3 + 12x^2\lambda + 6x\lambda^2 + \lambda^3)\lambda^2}{4(2x + \lambda)^3} \\
&\quad + \frac{(4x^2 + 8x\lambda + 3\lambda^2)\lambda}{2(2x + \lambda)} - \frac{(8x\lambda + 5\lambda^2)}{2} + (2x + \lambda)^2 \\
&= 3x^2
\end{aligned}$$

bulunur. ■

Teorem 3.13 $f \in C_2^*[0, \infty)$ olsun. Eğer $f', f'' \in C_2^*[0, \infty)$ ise,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} 2m (S_{m,\lambda}(f; x) - f(x)) = x \left(f''(x) - \frac{2}{2x + \lambda} f'(x) \right), \quad x \in [0, \infty)$$

şeklindedir.

İspat. f, f' ve $f'' \in C_2^*[0, \infty)$ olsun. $\zeta(., x) \in C_2^*[0, \infty)$ olmak üzere,

$$\zeta(t, x) = \begin{cases} \frac{f(t) - f(x) - (t-x)f'(x) - \frac{1}{2}(t-x)^2 f''(x)}{(t-x)^2}, & t \neq x \\ 0, & t = x \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\zeta(., x)$ fonksiyonu için, $\lim_{t \rightarrow x} \zeta(t, x) = \zeta(x, x) = 0$ bulunur.

f foksiyonunun x noktasındaki Taylor açılımından,

$$f(t) = f(x) + (t-x)f'(x) + \frac{1}{2}(t-x)^2 f''(x) + (t-x)^2 \zeta(t, x)$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafına $S_{m,\lambda}$ operatörleri uygulandığında

$$\begin{aligned} & S_{m,\lambda}(f; x) \\ &= f(x) + S_{m,\lambda}((t-x); x) f'(x) + \frac{1}{2} S_{m,\lambda}((t-x)^2; x) f''(x) \\ & \quad + S_{m,\lambda}((t-x)^2 \zeta(t, x); x) \end{aligned}$$

bulunur. Son eşitlik düzenlendiğinde

$$\begin{aligned} & 2m(S_{m,\lambda}(f; x) - f(x)) \\ &= 2m\mu_{m,1}(x)f'(x) + m\mu_{m,2}(x)f''(x) + 2mS_{m,\lambda}((t-x)^2 \zeta(t, x); x) \end{aligned}$$

olur. Lemma 3.2'de (3.4) ile verilen eşitliklerden,

$$\begin{aligned} & 2m(S_{m,\lambda}(f; x) - f(x)) \\ &= 2m(r_{m,\lambda}(x) - x)f'(x) + m(\lambda + 2x)(x - r_{m,\lambda}(x))f''(x) \\ & \quad + 2mS_{m,\lambda}((t-x)^2 \zeta(t, x); x) \end{aligned}$$

yazılır. Eşitliğin sağ tarafında yer alan ikinci toplama Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} m|S_{m,\lambda}((t-x)^2 \zeta(t, x); x)| &\leq mS_{m,\lambda}(|(t-x)^2 \zeta(t, x)|; x) \\ &\leq (m^2 S_{m,\lambda}((t-x)^4; x))^{1/2} (S_{m,\lambda}(\zeta^2(t, x); x))^{1/2} \end{aligned} \quad (3.23)$$

elde edilir. $\sigma(t; x) := \zeta^2(t, x)$ olarak tanımlanırsa, $\sigma(., x) \in C_2^*[0, \infty)$ ve $\sigma(x; x) = 0$ olduğu açıktır. Buna göre,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (S_{m,\lambda}(\zeta^2(t, x); x)) = \lim_{m \rightarrow \infty} (S_{m,\lambda}(\sigma(t; x); x)) = \sigma(x; x) = 0 \quad (3.24)$$

olup, (3.23), (3.24) ve Lemma 3.10 göz önüne alındığında,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} mS_{m,\lambda}((t-x)^2 \zeta(t, x); x) = 0$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\lim_{m \rightarrow \infty} 2m\mu_{m,1}(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} 2m(r_{m,\lambda}(x) - x) = -\frac{2x}{(\lambda + 2x)}$$

ve

$$\begin{aligned}
\lim_{m \rightarrow \infty} 2m\mu_{m,2}(x) &= \lim_{m \rightarrow \infty} 2m(S_{m,\lambda}(t^2; x) - 2xS_{m,\lambda}(t; x) + x^2S_{m,\lambda}(1; x)) \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} 2m(S_{m,\lambda}(t^2 + \lambda t; x) - (\lambda + 2x)S_{m,\lambda}(t; x) + x^2) \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} 2m(x^2 + \lambda x - (\lambda + 2x)r_{m,\lambda}(x) + x^2) \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} 2m(\lambda + 2x)(x - r_{m,\lambda}(x)) \\
&= 2x.
\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre,

$$\begin{aligned}
\lim_{m \rightarrow \infty} 2m(S_{m,\lambda}f(x) - f(x)) &= -\frac{2x}{2x + \lambda}f'(x) + xf''(x) \\
&= x\left(f''(x) - \frac{2}{2x + \lambda}f'(x)\right)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Bu da ispatı tamamlar. ■

3.5 $S_{m,\lambda}$ Operatörleri İle S_m Operatörlerinin Karşılaştırılması

Bu kısımda $S_{m,\lambda}$ operatörleri ile S_m klasik Szasz-Mirakjan operatörlerinin yakınsaklık hızları karşılaştırılıp, genelleştirilmiş $S_{m,\lambda}$ operatörlerinin en azından klasik Szasz-Mirakjan operatörleri kadar iyi bir yaklaşım derecesine sahip olduğu gösterilecektir. Elde edilen bu sonuçlar Mathematica programı yardımıyla çizilen grafikler ve hata tahmini tablosuyla desteklenecektir.

$f \in C_B[0, \infty)$ olsun. $\omega(f, \delta)$, f fonksiyonunun (2.5) ile gösterilen klasik süreklilik modülü olmak üzere, S_m klasik Szasz-Mirakjan operatörleri ile $S_{m,\lambda}$ genelleştirilmiş operatörleri için $\delta_1^2(x) := (\delta_{m,x})^2 = \frac{x}{m}$ ve $\delta_2^2(x) = (\delta_{m,x}^\lambda)^2 := (2x + \lambda)(x - r_{m,\lambda}(x))$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
|S_m(f; x) - f(x)| &\leq 2\omega(f; \delta_1(x)) \\
|S_{m,\lambda}(f; x) - f(x)| &\leq 2\omega(f; \delta_2(x))
\end{aligned}$$

eşitsizliklerini sağladığı bilinmektedir.

Teorem 3.14 $f \in C_B[0, \infty)$ olmak üzere,

$$\delta_2(x) \leq \delta_1(x), \quad x \in [0, \infty), \quad m \in \mathbb{N},$$

sağlanır. Buna göre $S_{m,\lambda}$ operatörler dizisi S_m operatörler dizisine göre daha iyi bir yaklaşım hızına sahiptir.

İspat. $f \in C_B[0, \infty)$ olsun. $S_{m,\lambda}$ operatörler dizisinin S_m operatörler dizisine göre daha iyi bir yaklaşım hızına sahip olduğunu göstermek için

$$2x^2 + \lambda x - r_{m,\lambda}(x)(2x + \lambda) \leq \frac{x}{m}$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermek yeterli olacaktır.

$$K_{m,\lambda}(x) = 2x^2 + \lambda x - r_{m,\lambda}(x)(2x + \lambda) - \frac{x}{m}$$

olmak üzere, $x \in [0, \infty)$, $\lambda \in [0, \infty)$ ve $m \in \mathbb{N}$ için tek kök $x = 0$ olacaktır. Ayrıca, incelendiğinde $K_{m,\lambda}$ fonksiyonunun $(0, \infty)$ aralığında hiçbir zaman işaret değiştirmeyeceği görülür.

$$K_{m,\lambda}(0) = 0, \quad K'_{m,\lambda}(x) < 0$$

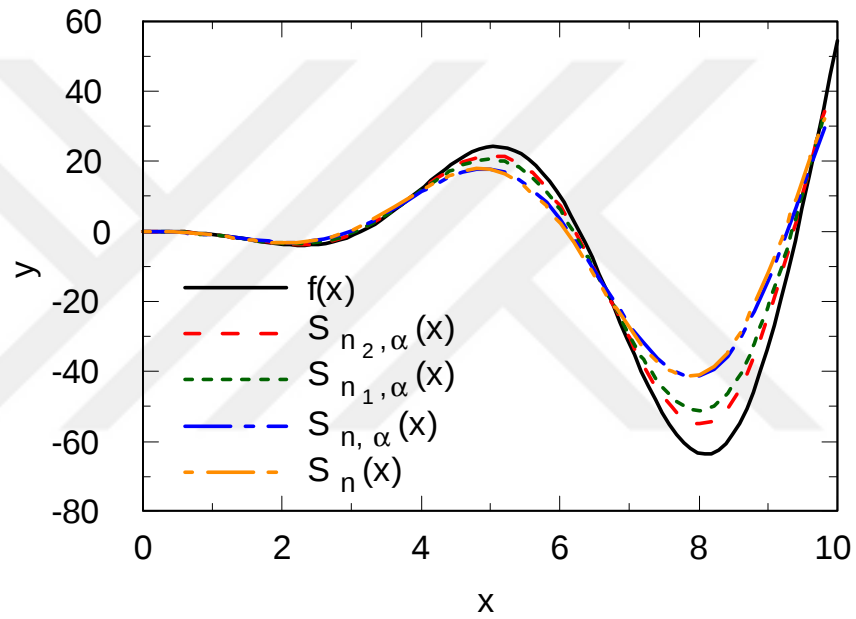
olduğundan denilebilir ki $x \in [0, \infty)$ için $2x^2 + \lambda x - r_{m,\lambda}(x)(2x + \lambda) \leq \frac{x}{m}$ yani $\delta_2(x) \leq \delta_1(x)$ gerçekleşir. Bu da $S_{m,\lambda}$ operatörler dizisinin en azından S_m operatörler dizisi kadar iyi bir yaklaşım hızına sahip olduğunu gösterir. ■

Çizelge 3.1 $S_{m,\lambda}$ operatörleri için hata tahmini

	$x = 0.4$		$x = 1.4$	
m	$ S_m f(x) - f(x) $	$ S_{m,\lambda} f(x) - f(x) $	$ S_m f(x) - f(x) $	$ S_{m,\lambda} f(x) - f(x) $
10	0.0468336698	0.0375967050	0.0203100570	0.0537005069
5×10	0.0092123506	0.0077163644	0.0110346895	0.0064570429
10^2	0.0045935731	0.0038696597	0.0059801731	0.0029304256
5×10^2	0.0091660108	0.0077573845	0.0012709342	0.0005373666
10^3	0.0004581653	0.0003879811	0.0006401746	0.0002656061
5×10^3	0.0000916113	0.0000776141	0.0001287889	0.0000526278
10^4	0.0000458043	0.0000388081	0.0000644416	0.0000262830

Örnek 3.1 $f(x) = -x^2 \sin x$ olsun. $\lambda = 2$, m sayıları da çizelgede verildiği gibi seçildiğinde ele alınan belirli x değerleri için $S_{m,\lambda}$ operatörleri ile yaklaşımın hata tahmini gösterilmiştir. Çizelge 3.1 incelendiğinde λ sabit tutulup, m değerleri artırıldığında $S_{m,\lambda}$ operatörlerinin f fonksiyonuna yaklaşımının klasik operatörden daha iyi olduğu görülmektedir.

Örnek 3.2 $f(x) = -x^2 \sin x$ olmak üzere $\lambda = 2$, $n = 10$, $n_1 = 20$ ve $n_2 = 30$ olmak üzere $S_{m,\lambda}$ operatörlerinin f fonksiyonuna yaklaşımı şekil 3.1 de gösterilmiştir.



Şekil 3.1 $S_{m,\lambda}$ operatörlerinin f fonksiyonuna yaklaşımı

4. KİNG TIPLİ BASKAKOV KANTOROVİCH OPERATÖRLERİ

Bernstein polinomlarının pozitif reel eksene önemli genelleştirmelerinden biri de 1957 yılında V. A. Baskakov (Baskakov 1957) tarafından yapılmıştır. $f \in C[0, \infty)$ olmak üzere,

$$V_m(f; x) = \frac{1}{(1+x)^m} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{m+s-1}{s} \left(\frac{x}{1+x} \right)^s f\left(\frac{s}{m}\right), \quad x \in [0, \infty), \quad m \in \mathbb{N}$$

şeklinde tanımlanan operatörlere Baskakov operatörleri adı verilir. Z. Ditzian ve V. Totik 1987 yılında sürekli fonksiyonlar uzayında tanımlanan f fonksiyonunu integrelenebilir fonksiyonlar uzayında alarak operatörün Kantorovich tipli genelleşmesini $f \in C[0, \infty)$ olmak üzere,

$$V_m^*(f; x) = \frac{m}{(1+x)^m} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{m+s-1}{s} \left(\frac{x}{1+x} \right)^s \int_{s/m}^{(s+1)/m} f(t) dt, \quad x \in [0, \infty), \quad m \in \mathbb{N}$$

şeklinde tanımlamıştır. 1989 yılında W. Z. Chen $\alpha > 0$ olmak üzere, Baskakov operatörlerinin

$$\begin{aligned} & \tilde{V}_{m,\alpha}(f; x) \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{m(m+\alpha)(m+2\alpha) \cdots [m+(s-1)\alpha]}{s!} \frac{x^s}{(1+\alpha x)^{\frac{m}{\alpha}+s}} f\left(\frac{s}{m}\right), \quad x \in [0, \infty), \quad m \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (4.1)$$

şeklinde genelleşmesini çalışmıştır (Chen 1989).

Tezimizin bu bölümünde W. Z. Chen'in Baskakov operatörleri üzerine olan genelleşmesini ele alarak, $\tilde{V}_{m,\alpha}^*(e^{-t}, x) = e^{-x}$ koşulunu sağlayan $\tilde{V}_{m,\alpha}^*$ Kantorovich tipli genelleşmesini tanımlayacağız.

$\alpha > 0$, $f \in C[0, \infty)$ ve $\tilde{V}_{m,\alpha}^* : C[0, \infty) \rightarrow C[0, \infty)$ olmak üzere, (4.1) ile verilen operatörlerin Kantorovich tipli genelleşmesi $x \in [0, \infty)$ ve $m \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} & \tilde{V}_{m,\alpha}^*(f; x) \\ &= m \sum_{s=0}^{\infty} \frac{m(m+\alpha)(m+2\alpha) \cdots [m+(s-1)\alpha]}{s!} \frac{(\beta_m(x))^s}{(1+\alpha\beta_m(x))^{\frac{m}{\alpha}+s}} \int_{\frac{s}{m}}^{\frac{s+1}{m}} f(t) dt \end{aligned} \quad (4.2)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\beta_m : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\beta_m(x) = \frac{e^{\alpha x/m} (m(1 - e^{-1/m}))^{\alpha/m} - 1}{\alpha(1 - e^{-1/m})}$$

şeklinde tanımlanan bir fonksiyondur ve elde edilen β_m fonksiyonu için

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \beta_m(x) = x, \quad x \in [0, \infty), \quad m \in \mathbb{N}$$

sağlanır. $\tilde{V}_{m,\alpha}^*$ bir lineer pozitif operatörler dizisi olup,

- i) $\beta_m(x) = x$ seçilirse 1989 yılında tanımlanan (4.1) ile verilen $\tilde{V}_{m,\alpha}$ operatörlerinin Kantorovich genelleştirmesine,
- ii) $\alpha = 1$ ve $\beta_m(x) = x$ seçildiğinde (2.16) ile verilen V_m^* klasik Baskakov Kantorovich operatörlerine dönüşmektedir.

$\tilde{V}_{m,\alpha}^*$ modifiye edilmiş operatörleri için

$$\tilde{V}_{m,\alpha}^*(e^{-t}, x) = e^{-x} \quad (4.3)$$

eşitliğinin sağlanması durumunda ihtiyaç duyulan β_m yardımcı fonksiyonu aşağıdaki şekilde elde edilir.

$(m)_s = m(m+1)(m+2) \dots (m+s-1)$ şeklinde tanımlanan ifade m sayısının Pochhammer sembolü olmak üzere,

$$m(m+\alpha)(m+2\alpha) \dots [m+(s-1)\alpha] = \alpha^s \left(\frac{m}{\alpha}\right)_s$$

şeklinde olup, $\tilde{V}_{m,\alpha}^*$ lineer pozitif operatörleri,

$$\tilde{V}_{m,\alpha}^*(f; x) = m \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{m}{\alpha}\right)_s}{s!} \frac{(\alpha\beta_m(x))^s}{(1 + \alpha\beta_m(x))^{\frac{m}{\alpha}+s}} \int_{\frac{s}{m}}^{\frac{s+1}{m}} f(t) dt, \quad x \in [0, \infty), \quad m \in \mathbb{N}$$

biçiminde de yazılabilir. O halde $\tilde{V}_{m,\alpha}^*(e^{-t}, \cdot)$ değeri için,

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_{m,\alpha}^*(e^{-t}; x) &= m \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{m}{\alpha}\right)_s}{s!} \frac{(\alpha\beta_m(x))^s}{(1 + \alpha\beta_m(x))^{\frac{m}{\alpha}+s}} \int_{\frac{s}{m}}^{\frac{s+1}{m}} e^{-t} dt \\
&= m \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{m}{\alpha}\right)_s}{s!} \frac{(\alpha\beta_m(x))^s}{(1 + \alpha\beta_m(x))^{\frac{m}{\alpha}+s}} \left(e^{-\frac{s}{m}} - e^{-\frac{s+1}{m}}\right) \\
&= \frac{m}{(1 + \alpha\beta_m(x))^{\frac{m}{\alpha}}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{m}{\alpha}\right)_s}{s!} \left(\frac{\alpha\beta_m(x)}{1 + \alpha\beta_m(x)}\right)^s e^{-\frac{s}{m}} \left(1 - e^{-\frac{1}{m}}\right) \\
&= \frac{m \left(1 - e^{-\frac{1}{m}}\right)}{(1 + \alpha\beta_m(x))^{\frac{m}{\alpha}}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{m}{\alpha}\right)_s}{s!} \left(\frac{e^{-\frac{1}{m}} \alpha\beta_m(x)}{1 + \alpha\beta_m(x)}\right)^s
\end{aligned}$$

olup, Pochhammer sembolünün özelliği kullanılarak elde edilen

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a)_s}{s!} z^s = (1 - z)^{-a}, \quad |z| < 1, \quad (4.4)$$

serisinden,

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_{m,\alpha}^*(e^{-t}; x) &= \frac{m \left(1 - e^{-\frac{1}{m}}\right)}{(1 + \alpha\beta_m(x))^{\frac{m}{\alpha}}} \left(1 - \frac{e^{-\frac{1}{m}} \alpha\beta_m(x)}{1 + \alpha\beta_m(x)}\right)^{-\frac{m}{\alpha}} \\
&= m \left(1 - e^{-\frac{1}{m}}\right) \left(1 + \alpha\beta_m(x) \left(1 - e^{-\frac{1}{m}}\right)\right)^{-\frac{m}{\alpha}}
\end{aligned}$$

bulunur. (4.3) ile verilen

$$\tilde{V}_{m,\alpha}^*(e^{-t}, x) = e^{-x}$$

eşitliğinden,

$$m \left(1 - e^{-\frac{1}{m}}\right) \left(1 + \alpha\beta_m(x) \left(1 - e^{-\frac{1}{m}}\right)\right)^{-\frac{m}{\alpha}} = e^{-x}$$

olmak üzere β_m fonksiyonu,

$$\beta_m(x) = \frac{e^{\alpha x/m} \left(m(1 - e^{-1/m})\right)^{\alpha/m} - 1}{\alpha(1 - e^{-1/m})} \quad (4.5)$$

olarak elde edilir. β_m fonksiyonu (4.2) ifadesinde yerine yazılırsa $\tilde{V}_{m,\alpha}^*$ lineer pozitif operatörleri,

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_{m,\alpha}^*(f; x) &= m(1 - e^{-1/m})^{m/\alpha} \left(e^{\alpha x/m} \left(m(1 - e^{-1/m})\right)^{\alpha/m} - e^{-1/m}\right)^{-m/\alpha} \\
&\quad \times \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{m}{\alpha}\right)_s}{s!} \left(\frac{e^{\alpha x/m} \left(m(1 - e^{-1/m})\right)^{\alpha/m} - 1}{e^{\alpha x/m} \left(m(1 - e^{-1/m})\right)^{\alpha/m} - e^{-1/m}}\right)^s \int_{\frac{s}{m}}^{\frac{s+1}{m}} f(t) dt.
\end{aligned}$$

şeklinde dönüştür.

Lemma 4.1 (4.2) ile tanımlanan $\tilde{V}_{m,\alpha}^*$ genelleştirilmiş Baskakov Kantorovich operatörleri,

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{m,\alpha}^*(e_0; x) &= e_0(x), \\ \tilde{V}_{m,\alpha}^*(e_1; x) &= \beta_m(x) + \frac{1}{2m} \\ \tilde{V}_{m,\alpha}^*(e_2; x) &= \beta_m^2(x) + \frac{\beta_m(x)(2 + \alpha\beta_m(x))}{m} + \frac{1}{3m^2}\end{aligned}\quad (4.6)$$

eşitliklerini sağlar.

Lemma 4.2 $\mu_{m,j}(x) = \tilde{V}_{m,\alpha}^*((t-x)^j, x)$, $m = 1, 2, \dots$ olmak üzere, (4.2) ile tanımlanan $\tilde{V}_{m,\alpha}^*$ genelleştirilmiş Baskakov Kantorovich operatörleri için merkezil momentler,

$$\begin{aligned}\mu_{m,1}(x) &= \beta_m(x) + \frac{1}{2m} - x \\ \mu_{m,2}(x) &= (\beta_m(x) - x)^2 + \frac{\beta_m(x)(2 + \alpha\beta_m(x))}{m} - \frac{x}{m} + \frac{1}{3m^2}.\end{aligned}\quad (4.7)$$

şeklindedir. Buna ek olarak;

$$\begin{aligned}\lim_{m \rightarrow \infty} m\mu_{m,1}(x) &= \lim_{m \rightarrow \infty} m \left(\frac{e^{\alpha x/m} (m(1 - e^{-1/m}))^{\alpha/m} - 1}{\alpha(1 - e^{-1/m})} + \frac{1}{2m} - x \right) \\ &= \frac{x(1 + \alpha x)}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{m \rightarrow \infty} m\mu_{m,2}(x) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} m \left(\left(\frac{(e^{\alpha x/m} (m(1 - e^{-1/m}))^{\alpha/m} - 1)(e^{\alpha x/m} (m(1 - e^{-1/m}))^{\alpha/m} - 1 + 2(1 - e^{-1/m}))}{m(\alpha(1 - e^{-1/m}))^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{e^{\alpha x/m} (m(1 - e^{-1/m}))^{\alpha/m} - 1}{\alpha(1 - e^{-1/m})} - x \right)^2 - \frac{x}{m} + \frac{1}{3m^2} \right) \\ &= x(1 + \alpha x).\end{aligned}$$

limitleri elde edilir.

4.1 $\tilde{V}_{m,\alpha}^*$ Operatörlerinin Yakınsaklık Özellikleri

Bu kısımda $\tilde{V}_{m,\alpha}^*$ operatörlerinin verilen bir f fonksiyonuna düzgün yakınsaklığı ve süreklilik modülü yardımıyla bu yaklaşımın hızı elde edilmiştir. Burada kullanılacak

olan $C^*[0, \infty)$ fonksiyon uzayını

$$C^*[0, \infty) = \left\{ f \in C[0, \infty) : \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlayalım. $C^*[0, \infty)$ uzayı, üzerinde tanımlanan

$$\|f\|_{[0, \infty)} = \sup_{x \in [0, \infty)} |f(x)|$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Ayrıca bu kısımda adı geçen süreklilik modülü $\omega^*(f, \delta)$ olmak üzere, her $f \in C^*[0, \infty)$ için

$$\omega^*(f, \delta) = \sup_{\substack{x, t \in [0, \infty) \\ |e^{-x} - e^{-t}| \leq \delta}} |f(x) - f(t)|, \quad \delta \geq 0 \quad (4.8)$$

şeklinde tanımlanır ve bu süreklilik modülü

$$|f(t) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{(e^{-x} - e^{-t})^2}{\delta^2} \right) \omega^*(f, \delta), \quad \delta \geq 0$$

özellğine sahiptir.

Lemma 4.3 $\omega(f, \delta)$ klasik süreklilik modülü ve $\omega^*(f, \delta)$ ise (4.8) ile tanımlanan süreklilik modülü olsunlar. $f^* \in C[0, 1]$ olmak üzere,

$$f^*(x) = \begin{cases} f(-\ln x), & x \in (0, 1] \\ \lim_{t \rightarrow \infty} f(t), & x = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

$$\omega^*(f, \delta) = \omega(f^*, \delta), \quad \delta \geq 0$$

sağlanır (Holhoş 2010).

Lemma 4.4 $\omega(f, \delta)$ klasik süreklilik modülü ve $\omega^*(f, \delta)$ ise (4.8) ile tanımlanan süreklilik modülü olsunlar. Bu durumda

$$\omega(f, \delta) \leq \omega^*(f, \delta), \quad \delta \geq 0$$

dır. Ayrıca $M > 0$ için,

$$\omega^*(f, \delta) \leq \omega(f, e^M \delta) \leq (1 + e^M) \omega(f, \delta)$$

sağlanır (Holhoş 2010).

İspat. Her $x, t \in [0, \infty)$ için

$$|e^{-t} - e^{-x}| \leq |t - x|$$

olduğundan supremum tanımı gereğince istenen elde edilir. Ayrıca her $x, t \in [0, M]$ için,

$$|e^{-t} - e^{-x}| = e^{-\theta} |t - x| \geq e^{-M} |t - x|$$

olduğundan ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.1 $A_m : C^*[0, \infty) \rightarrow C^*[0, \infty)$ lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olsun. Eğer her $x \in [0, \infty)$ için,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} A_m(e^{-st}, x) = e^{-sx}, \quad s = 0, 1, 2 \quad (4.9)$$

koşulları sağlanıyorsa, bu durumda $f \in C^*[0, \infty)$ için

$$\lim_{m \rightarrow \infty} A_m(f, x) = f(x), \quad x \in [0, \infty), \quad m \in \mathbb{N} \quad (4.10)$$

yakınsaması düzgündür (Boyanov ve Veselinov 1970).

Teorem 4.1, (Altomare ve Campiti 1994) referansında daha genel durum için ispatlanmıştır ve Szász-Mirakjan operatörleri, Baskakov operatörleri ve Bernstein Chlodowsky operatörleri için sonuçlar verilmiştir.

Teorem 4.2 a_m, b_m ve c_m sıfıra yakınsayan fonksiyon dizileri ve $A_m : C^*[0, \infty) \rightarrow C^*[0, \infty)$

$$\begin{aligned} \|A_m(1, x) - 1\|_{[0, \infty)} &= a_m, \\ \|A_m(e^{-t}, x) - e^{-x}\|_{[0, \infty)} &= b_m, \\ \|A_m(e^{-2t}, x) - e^{-2x}\|_{[0, \infty)} &= c_m \end{aligned}$$

şartları sağlayan lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olsun. Bu durumda her $f \in C^*[0, \infty)$ için

$$\|A_m(f, x) - f(x)\|_{[0, \infty)} \leq \|f\|_{[0, \infty)} a_m + (2 + a_m) \omega^*\left(f, \sqrt{a_m + 2b_m + c_m}\right) \quad (4.11)$$

sağlanır (Holhoş 2010).

Şimdi (4.1) ve (4.2) teoremleri yardımıyla $\tilde{V}_{m, \alpha}^*$ lineer pozitif operatörlerinin düzgün yakınsaklığı ile ilgili teoremi verelim.

Teorem 4.3 $f \in C^*[0, \infty)$ ve $\theta_i(x) = e^{-ix}$, $x = 0, 1, 2$ olmak üzere, $\tilde{V}_{m, \alpha}^*$ genelleştirilmiş Baskakov Kantorovich operatörleri için,

$$\left\| \tilde{V}_{m, \alpha}^* f - f \right\|_{[0, \infty)} \leq 2\omega^*(f, \sqrt{c_m}), \quad (4.12)$$

sağlanır. Burada c_m dizisi,

$$\left\| \tilde{V}_{m, \alpha}^*(e^{-2t}, \cdot) - \theta_2 \right\|_{[0, \infty)} = c_m$$

şeklindedir. Ayrıca $m \rightarrow \infty$ için c_m sıfıra yakınsayacağından $\tilde{V}_{m, \alpha}^*$ lineer pozitif operatörler dizisi verilen f fonksiyonuna düzgün yakınsar.

İspat. Lemma 4.1'den

$$\tilde{V}_{m, \alpha}^*(e_0; x) = e_0(x)$$

ve (4.3) eşitliğinden

$$\tilde{V}_{m, \alpha}^*(e^{-t}, x) = e^{-x}$$

olduğu bilinmektedir. Buna göre

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{V}_{m, \alpha}^*(1, \cdot) - \theta_0 \right\|_{[0, \infty)} &= a_m = 0, \\ \left\| \tilde{V}_{m, \alpha}^*(e^{-t}, \cdot) - \theta_1 \right\|_{[0, \infty)} &= b_m = 0 \end{aligned}$$

bulunur. O halde $\tilde{V}_{m, \alpha}^*$ lineer pozitif operatörleri için (4.11) eşitsizliğini elde etmek sadece c_m dizisine bağlı olacaktır.

$f(t) = e^{-2t}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{m,\alpha}^*(e^{-2t}, x) &= m(1 + \alpha\beta_m(x))^{-m/\alpha} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{m}{\alpha}\right)_s (\alpha\beta_m(x))^s}{s!(1 + \alpha\beta_m(x))^s} \int_{\frac{s}{m}}^{\frac{s+1}{m}} e^{-2t} dt \\ &= \frac{m(1 - e^{-2/m})}{2} (1 + \alpha\beta_m(x) (1 - e^{-2/m}))^{-m/\alpha}.\end{aligned}$$

(4.5) ile verilen β_m fonksiyonunun tanımı göz önüne alındığında ,

$$\tilde{V}_{m,\alpha}^*(e^{-2t}, x) = \frac{m(1 - e^{-2/m})}{2} \left(1 + \left(e^{\alpha x/m} (m(1 - e^{-1/m}))^{\alpha/m} - 1\right) (1 + e^{-1/m})\right)^{-m/\alpha} \quad (4.13)$$

elde edilir. (4.5) ifadesi Mathematica programı yardımıyla seriye açıldığında,

$$\tilde{V}_{m,\alpha}^*(e^{-2t}, x) = e^{-2x} + e^{-2x} \frac{x(1 + \alpha x)}{m} + \frac{1}{12} e^{-2x} \frac{g(x)}{m^2} + O(m^{-3})$$

elde edilir. Burada g fonksiyonu

$$g(x) = -5 - 6x(1 + 2\alpha) + 6x^2(1 - 3\alpha) + 12\alpha x^3(1 - \alpha) + 6\alpha^2 x^4$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned}\sup_{x \in [0, \infty)} e^{-2x} &= 1, \quad \sup_{x \in [0, \infty)} x e^{-2x} = \frac{1}{2} e^{-1}, \quad \sup_{x \in [0, \infty)} x^2 e^{-2x} = e^{-2} \\ \sup_{x \in [0, \infty)} x^3 e^{-2x} &= \frac{27}{8} e^{-3}, \quad \sup_{x \in [0, \infty)} x^4 e^{-2x} = 16e^{-4}\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}c_m &= \left\| \tilde{V}_{m,\alpha}^*(e^{-2t}, \cdot) - \theta_2 \right\|_{[0, \infty)} = \sup_{x \in [0, \infty)} \left| \tilde{V}_{m,\alpha}^*(e^{-2t}, x) - e^{-2x} \right| \\ &\leq \frac{1}{m^2} \left(\frac{5}{12} + \frac{(1 + 2\alpha)}{4} e^{-1} + \frac{(1 - 3\alpha)}{2} e^{-2} + \frac{27}{8} \alpha (1 - \alpha) e^{-3} + 8\alpha^2 e^{-4} \right) \\ &\quad + \frac{1}{m} \left(\frac{1}{2} e^{-1} + \alpha e^{-2} \right) + O(m^{-3})\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. $m \rightarrow \infty$ için c_m sıfıra yakınsayacağından $\tilde{V}_{m,\alpha}^*$ lineer pozitif operatörler dizisi verilen f fonksiyonuna düzgün yakınsar. ■

4.2 $\tilde{V}_{m,\alpha}^*$ Operatörleri için Voronovskaya Tipli Teorem

Bu kısımda operatörlerin noktasal yakınsaklığı ile ilgili bilgi sahibi olmamızda önemli işlevi olan Voronovskaja tipli teorem e^{-x} fonksiyonunu koruyan $\tilde{V}_{m,\alpha}^*$ operatörleri için ispatlanacaktır.

Teorem 4.4 $x \in [0, \infty)$ ve f, f' ve $f'' \in C^*[0, \infty)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} & \left| m \left[\tilde{V}_{m,\alpha}^*(f, x) - f(x) \right] - \frac{1}{2}x(\alpha x + 1) [f'(x) + f''(x)] \right| \\ & \leq |p_m(x)| |f'(x)| + |q_m(x)| |f''(x)| + 2(2q_m + x(\alpha x + 1) + r_m(x)) \omega^* \left(f'', \frac{1}{\sqrt{m}} \right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

şeklindedir. Burada p_m, q_m ve r_m fonksiyonları

$$\begin{aligned} p_m(x) &= m\mu_{m,1}(x) - \frac{1}{2}x(1 + \alpha x), \\ q_m(x) &= \frac{1}{2} (m\mu_{m,2}(x) - x(1 + \alpha x)), \\ r_m(x) &= m^2 \sqrt{\tilde{V}_{m,\beta}((e^{-x} - e^{-t})^4, x)} \sqrt{\mu_{m,4}(x)} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır.

İspat. f fonksiyonunun x noktasındaki Taylor açılımından

$$f(t) = f(x) + (t - x)f'(x) + \frac{1}{2}(t - x)^2 f''(x) + h(t, x)(t - x)^2.$$

elde edilir. Burada $h(t, x)$ fonksiyonu

$$h(t, x) = \frac{f''(\eta) - f''(x)}{2},$$

şeklinde olup η, x ile t arasında herhangi bir sabittir.

$\tilde{V}_{m,\alpha}^*$ operatörleri Taylor açılımının her iki yanına uygulandığında ve bu operatörlerin lineerliği kullanıldığında,

$$\tilde{V}_{m,\alpha}^*(f, x) - f(x) = \mu_{m,1}(x)f'(x) + \frac{1}{2}\mu_{m,2}(x)f''(x) + \tilde{V}_{m,\alpha}^*(h(t, x)(t - x)^2, x)$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki yanı m ile çarpılırsa,

$$m \left(\tilde{V}_{m,\alpha}^*(f, x) - f(x) \right) = m\mu_{m,1}(x)f'(x) + \frac{m}{2}\mu_{m,2}(x)f''(x) + m\tilde{V}_{m,\alpha}^*(h(t, x)(t - x)^2, x)$$

bulunur. Lemma 4.2'den,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m\mu_{m,1}(x) = \frac{1}{2}x(1 + \alpha x), \quad (4.15)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m\mu_{m,2}(x) = x(1 + \alpha x). \quad (4.16)$$

olduğu bilinmektedir. Bu limitler göz önüne alınarak eşitliğin sağ tarafına $\frac{1}{2}x(1+\alpha x)f'(x)$ ve $\frac{1}{2}x(1+\alpha x)f''(x)$ eklenip ve çıkartılırsa

$$\begin{aligned} m \left(\tilde{V}_{m,\alpha}^*(f, x) - f(x) \right) &= m\mu_{m,1}(x)f'(x) - \frac{1}{2}x(1+\alpha x)f'(x) + \frac{1}{2}x(1+\alpha x)f'(x) \\ &\quad - \frac{1}{2}x(1+\alpha x)f''(x) + \frac{1}{2}x(1+\alpha x)f''(x) + \frac{m}{2}\mu_{m,2}(x)f''(x) \\ &\quad + m\tilde{V}_{m,\beta}(h(t, x)(t-x)^2, x) \end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\begin{aligned} &\left| m \left(\tilde{V}_{m,\alpha}^*(f, x) - f(x) \right) - \frac{1}{2}x(1+\alpha x)f'(x) - \frac{1}{2}x(1+\alpha x)f''(x) \right| \\ &= \left| f'(x) \left(m\mu_{m,1}(x) - \frac{1}{2}x(1+\alpha x) \right) + \frac{1}{2}f''(x) (m\mu_{m,2}(x) - x(1+\alpha x)) \right. \\ &\quad \left. + m\tilde{V}_{m,\beta}(h(t, x)(t-x)^2, x) \right| \\ &\left| m \left(\tilde{V}_{m,\alpha}^*(f, x) - f(x) \right) - \frac{1}{2}x(1+\alpha x)f'(x) - \frac{1}{2}x(1+\alpha x)f''(x) \right| \\ &\leq \left| f'(x) \left(m\mu_{m,1}(x) - \frac{1}{2}x(1+\alpha x) \right) \right| + \left| \frac{1}{2}f''(x) (m\mu_{m,2}(x) - x(1+\alpha x)) \right| \\ &\quad + \left| m\tilde{V}_{m,\beta}(h(t, x)(t-x)^2, x) \right| \end{aligned}$$

yazılır. p_m ve q_m fonksiyonları

$$\begin{aligned} p_m(x) &= m\mu_{m,1}(x) - \frac{1}{2}x(1+\alpha x), \\ q_m(x) &= \frac{1}{2} (m\mu_{m,2}(x) - x(1+\alpha x)), \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanırsa,

$$\begin{aligned} &\left| m \left(\tilde{V}_{m,\alpha}^*(f, x) - f(x) \right) - \frac{1}{2}x(1+\alpha x)f'(x) - \frac{1}{2}x(1+\alpha x)f''(x) \right| \\ &\leq |p_m(x)| |f'(x)| + |q_m(x)| |f''(x)| + \left| m\tilde{V}_{m,\alpha}^*(h(t, x)(t-x)^2, x) \right| \quad (4.17) \end{aligned}$$

elde edilir. (4.15) ve (4.16) eşitliklerinden görülür ki m sonsuza giderken, p_m ve q_m fonksiyonları sıfıra yaklaşır.

İspatı bitirebilmek için eşitsizliğin son terimi olan $\left| m\tilde{V}_{m,\alpha}^*(h(t, x)(t-x)^2, x) \right|$ ifadesinin hesaplanması gerekmektedir. (4.8) ile verilen süreklilik modülünün sağladığı

$$|f(t) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{(e^{-x} - e^{-t})^2}{\delta^2} \right) \omega^*(f, \delta).$$

eşitsizliğinden,

$$|h(t, x)| \leq \left(1 + \frac{(e^{-x} - e^{-t})^2}{\delta^2}\right) \omega^*(f'', \delta).$$

elde edilir. Buradan $\delta > 0$ sayısı için

$$|h(t, x)| \leq \begin{cases} 2\omega^*(f'', \delta), & |e^{-x} - e^{-t}| < \delta \\ 2\left(\frac{(e^{-x} - e^{-t})^2}{\delta^2}\right) \omega^*(f'', \delta), & |e^{-x} - e^{-t}| \geq \delta \end{cases}$$

yazılabilir. Bu iki durum birleştirildiğinde

$$|h(t, x)| \leq 2\left(1 + \frac{(e^{-x} - e^{-t})^2}{\delta^2}\right) \omega^*(f'', \delta).$$

elde edilir. Buna göre

$$\begin{aligned} & m\tilde{V}_{m,\alpha}^* (|h(t, x)| (t - x)^2, x) \\ & \leq 2m\omega^*(f'', \delta) \mu_{m,2}(x) + \frac{2m}{\delta^2} \omega^*(f'', \delta) \tilde{V}_{m,\alpha}^* \left((e^{-x} - e^{-t})^2 (t - x)^2; x \right) \end{aligned}$$

bulunur. Burada son terimdeki $\tilde{V}_{m,\alpha}^* (h(t, x)(t - x)^2, x)$ ifadesine Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulandığında,

$$\begin{aligned} & m\tilde{V}_{m,\alpha}^* (|h(t, x)| (t - x)^2, x) \\ & \leq 2m\omega^*(f'', \delta) \mu_{m,2}(x) + \frac{2m}{\delta^2} \omega^*(f'', \delta) \sqrt{\tilde{V}_{m,\alpha}^* ((e^{-x} - e^{-t})^4, x)} \sqrt{\tilde{V}_{m,\alpha}^* ((t - x)^4, x)} \end{aligned}$$

elde edilir. $\delta = \frac{1}{\sqrt{m}}$ seçilip, $r_m(x) := \sqrt{m^2 \tilde{V}_{m,\alpha}^* ((e^{-x} - e^{-t})^4, x)} \sqrt{m^2 \tilde{V}_{m,\alpha}^* (t - x)^4, x)}$

$$m\tilde{V}_{m,\alpha}^* (|h(t, x)| (t - x)^2, x) \leq 2m\omega^* \left(f'', \frac{1}{\sqrt{m}} \right) \mu_{m,2}(x) + 2\omega^* \left(f'', \frac{1}{\sqrt{m}} \right) r_m(x)$$

yazılır. Buna göre ,

$$\begin{aligned} & \left| m \left[\tilde{V}_{m,\alpha}^* (f, x) - f(x) \right] - \frac{1}{2} x(1 + \alpha x) f'(x) - \frac{x(1 + \alpha x)}{2} f''(x) \right| \\ & \leq |p_m(x)| |f'(x)| + |q_m(x)| |f''(x)| + 2(2q_m + x(1 + \alpha x) + r_m(x)) \omega^* \left(f'', \frac{1}{\sqrt{m}} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da bizden istenen olacaktır. ■

Uyarı 4.1 $x \in [0, \infty)$ ve f, f' ve $f'' \in C^*[0, \infty)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} m^2 \tilde{V}_{m,\alpha}^* (t - x)^4, x &= 3x^2(ax + 1)^2 \\ \lim_{m \rightarrow \infty} m^2 \tilde{V}_{m,\alpha}^* \left((e^{-x} - e^{-t})^4, x \right) &= 0 \end{aligned}$$

şeklindedir.

Teorem 4.5 $x \in [0, \infty)$ ve f, f' ve $f'' \in C^*[0, \infty)$ olmak üzere yeterince büyük m sayıları için

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m \left[\tilde{V}_{m,\alpha}^*(f; x) - f(x) \right] = \frac{1}{2}x(1 + \alpha x) [f'(x) + f''(x)] \quad (4.18)$$

şeklindedir.



5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde ele alınan $(S_{m,\lambda})$ ile gösterilen genelleştirilmiş Szasz-Mirakjan operatörlerinin şekil koruma özellikleri incelenmiş, f fonksiyonunun artan ve konveks olması durumunda $(S_{m,\lambda})$ operatörlerinin artanlığı ve azalanlığı hakkında bilgi sahibi olunmuştur. Genelleştirilmiş konvekslik tanımı altında eğer f fonksiyonu $e_2 + \alpha e_1$ e göre konveks olduğunda operatörün klasik Szasz-Mirakjan operatörüne göre f fonksiyonuna daha iyi yakınsadığı gösterilmiştir. Ayrıca operatörlerin $C_B[0, \infty)$ 'da klasik süreklilik modülü ile ve $C_2^*[0, \infty)$ 'da ağırlıklı süreklilik modülü kullanılarak f fonksiyonuna yakınsaması incelenmiştir. Üçüncü bölümün dördüncü kısmında Voronovskaja tipli teorem ele alınarak operatörlerin asimptotik yaklaşımı hakkında bilgi sahibi olunmuştur. ve son olarak $C_B[0, \infty)$ 'da operatörlerin ikinci merkezil momentleri karşılaştırılarak, $(S_{m,\lambda})$ genelleştirilmiş operatörlerin klasik Szasz-Mirakjan operatörlerine göre daha iyi bir yaklaşıma sahip olduğu sonucuna varılmıştır.

Dördüncü bölümde çalışılan $(\tilde{V}_{m,\alpha}^*)$ genelleştirilmiş Baskakov-Kantorovich operatörlerinin $\omega^*(f, \delta)$ süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım özellikleri ele alınmış ve Voronovskaya tipli teoremi üzerinde durulmuştur.

Yaklaşım teorisi, dünyadaki birçok matematikçi tarafından çalışılan Matematiksel Analiz'in önemli araştırma konularından biridir. Bu teori, matematikte analizin harmonik analiz, fonksiyonel analiz, nümerik analizi, Fourier analizi gibi birçok dalıyla ilişkili olmasının yanı sıra; operatör teorisi, olasılık teorisi, sayılar teorisi, istatistik teorisi gibi diğer bilim dallarıyla da ilişkilidir. Gerçekte sadece matematikte değil, temel bilimler ve mühendislik bilimleri başta olmak üzere, diğer alanlardaki birçok bilimsel probleme ışık tutması, yaklaşım teorisinin günden güne öneminin artmasına neden olmuştur. Özellikle fizikte ve mühendislikte veri gösterimi, sinyal işleme, termografik görüntüleme, dalgacık analizi gibi birçok farklı konuda da kullanılmaktadır. Bernstein polinomlarının özellikleri üzerine dayalı Casteljau algoritmaları tıp ve jeoloji biliminin yanı sıra araba ve gemi dizaynında, uçak endüstrisinde etkili bir şekilde kullanılmaktadır.

Günümüz teknolojisinde bu kadar etkili olan bu teorinin, matematik dünyasında ortaya çıkan gelişmelerinin takibi ile çağımıza çok büyük katkıları olacağı açıktır. İşte bu nedenle ortaya konan yeni lineer pozitif operatörler ve onların günümüze uyarlanması oldukça önemlidir. Bizim de bu tezde tanımladığımız klasik operatörden daha iyi sonuçlar veren genelleştirilmiş yeni operatör dizilerinin matematikte ve onunla ilişkili diğer bilimlerde meydana gelen gelişmelere katkı sağlayacağı düşünülmektedir.



KAYNAKLAR

- Acar, T. 2016. (p, q) -generalization of Szász-Mirakyan operators. Math. Methods Appl. Sci. 39, no. 10, 2685-2695.
- Acar, T., Aral, A. and Gonska, H. 2017. On Szász-Mirakyan operators preserving e^{2ax} , $a > 0$. Mediterr. J. Math. 14, no. 1, Art. 6, 14 pp.
- Agratini, O. 2006. Linear operators that preserve some test functions. Int. J. Math. Math. Sci., Art. ID 94136, 11 pp.
- Agratini, O. and Tarabie, S. 2008. On approximating operators preserving certain polynomials. Automat. Comput. Appl. Math. 17, no. 2, 191-199.
- Aldaz, J.M. and Render, H. 2010. Optimality of generalized Bernstein operators. J. Approx. Theory 162, no. 7, 1407-1416.
- Alkemade, J.A.H. 1983. Approximation with generalized Baskakov operators in weighted function spaces. Delft Progr. Rep. 8, no. 2, 94-109.
- Altomare, F. and Campiti M. 1994. Korovkin-type approximation theory and its applications. De Gruyter Studies in Mathematics, 17, Walter de Gruyter&Co., Berlin.
- Altomare, F. and Mangino, E. 1999. On a generalization of Baskakov operator. Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 44, no. 5-6, 683-705.
- Altomare, F. 2010. Korovkin-type theorems and approximation by positive linear operators. Surv. Approx. Theory 5, 92-164.
- Aral, A. and Gupta, V. 2010. On the Durrmeyer type modification of the q -Baskakov type operators. Nonlinear Anal. 72, no. 3-4, 1171-1180.
- Aral, A., Inoan, D. and Rasa, I. 2014. On the generalized Szász-Mirakyan operators. Results Math, 65, no. 3-4, 441-452.
- Aral, A., Cárdenas-Morales, D. and Garrancho, P. 2018. Bernstein-type operators that reproduce exponential functions. J. Math. Inequal. 12, no. 3, 861-872.
- Aral, A. and Erbay, H. 2019. Parametric generalization of Baskakov operators. Math. Commun. 24, no. 1, 119-131.
- Baskakov, V.A. 1957. An example of a sequence of linear positive operators in the space of continuous functions. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 113, 249-251.
- Becker, M. 1978. Global approximation theorems for Szász-Mirakjan and Baskakov operators in polynomial weight spaces. Indiana Univ. Math. J., 27, no. 1, 127-142.
- Becker, M., Kucharski, D. and Nessel R.J. 1978. Global approximation theorems for the Szász-Mirakjan operators in exponential weight spaces. Linear Spaces and Approximation, Internat. Series of Num. Math., 40, Birkhäuser, Basel, 319-333.

- Bernstein, S.N. 1912. Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur la calcul des probabilités. Commun. Soc. Math. Charkow Série 2 13, 1-2.
- Birou, M. 2014. A note about some general King-type operators. Ann. Tiberiu Popoviciu Semin. Funct. Equ. Approx. Convexity 12, 3-16.
- Boehm W. and Müller A. 1999. On de Casteljau's algorithm. Comput. Aided Geom. Design, 16, 587-605.
- Bohman, H. 1952. On approximation of continuous and analytic functions. Ark. Math. 2, 43-56.
- Boyanov B.D. and Veselinov V.M. 1970. A note on the approximation of functions in an infinite interval by linear positive operators. Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie (N.S.), 14, 9-13.
- Braica, P.I., Pop, O.T. and Indrea, A.D. 2012. About a King-type operator. Appl. Math. Inf. Sci. 6, no. 1, 145-148.
- Brinkhuis, J. and Tikhomirov, V. 2005. Optimization: insights and applications. Princeton Series in Applied Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ.
- Butzer, P.L. 1954. On the extensions of Bernstein polynomials to the infinite interval. Proc. Amer. Math. Soc. 5, 547-553.
- Cardenas-Morales, D., Garrancho, P. and Munoz-Delgado, F.J. 2006. Shape preserving approximation by Bernstein-type operators which fix polynomials. Appl. Math. Comput. 182, no. 2, 1615-1622.
- Chebyshev, P.L. 1854. Theory of mechanisms known by the title of parallelograms (Teoriya mekhanizmov, izvestnykh pod nazvaniyem parallelogrammov). collected works.
- Chebyshev, P.L. 1859. Problems on the least values connected with the approximate representation of functions (Voprosy naimen'shikh velichinakh, svyazannye s priblizhennym predstavleniyem funktsii). Sochineniya, Vol. II, 151-235.
- Chebyshev, P.L. 1947. Problems of least values related to approximate representation of functions, in: Selected Works [in Russian]. Vol. 2, Izd. Akad. Nauk SSSR, Moscow-Leningrad, 151-235.
- Chen, W.Z. 1989. Approximation Theory of Operators. Xiamen University Publishing House, Xia-men, China.
- Cheney, E.W. 2000. Introduction to Approximation Theory. Amer. Mathematical Society, 2nd edition.
- Ciupa, A. 2003. Approximation by a generalized Szász type operator. J. Comput. Anal. Appl. 5, no. 4, 413-424.

- de la Cal J. and Cárcamo J. 2003. On uniform approximation by some classical Bernstein-type operators. *J. Math. Anal. Appl.* 279, no. 2, 625-638.
- Della Vecchia, B. 1987. On the monotonicity of the derivatives of the sequences of Favard and Baskakov operators. *Ricerche Mat.* 36, no. 2, 263-269.
- Deniz, E., Aral, A. and Gupta, V. 2018. Note on Szász-Mirakyan-Durrmeyer operators preserving e^{2ax} , $a > 0$. *Numer. Funct. Anal. Optim.* 39, no. 2, 201-207.
- Deo, N. 2005. On the rate of convergence of modified Baskakov type operators on functions of bounded variation. *Kyungpook Math. J.* 45, no. 4, 571-577.
- DeVore, R.A. and Lorentz, G.G. 1993. *Constructive Approximation*. Springer-Verlag, Berlin.
- Ditzian Z. and Totik V. 1987. *Moduli of Smoothness*. Springer-Verlag, New-York.
- Duman, O. and Özarslan, M.A. 2007 Szász- Mirakyan type operators providing a better error estimation. *Appl. Math. Lett.* 20, no. 12, 1184-1188.
- Duman, O., Özarslan, M.A. and Vecchia, B.D. 2009. Modified Szász-Mirakjan-Kantorovich operators preserving linear functions. *Turkish J. Math.* 33, no. 2, 151-158.
- Favard, J. 1944. Sur les multiplificateurs d'interpolation. *J. Math. Pures Appl.* 23, 219-247.
- Gadjiev, I. 2015. Weighted approximation by Baskakov operators. *Math. Inequal. Appl.* 18, no. 4, 1443-1461.
- Gadjiev, A.D. 1974. A problem on the convergence of a sequence of positive linear operators on unbounded sets and theorems that are analogous to P. P. Korovkin's theorem (Russian). *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 218, 1001-1004.
- Gadjiev, A.D. 1976. Theorems of the type of P. P. Korovkin's theorems (Russian). *Mat. Zametki* 20, no. 5, 781-786., English Translation *Math. Notes*, 20(5-6), 996-998.
- Gal, S.G. 2016. Approximation under exponential growth conditions by Szász and Baskakov type operators in the complex plane. *Mathematical analysis, approximation theory and their applications*, 235-266, Springer Optim. Appl., 111, Springer, [Cham].
- Goncharov, V.L. 1954. *Teoriya interpolirovaniya i približeniya funkciï* (Russian) [Theory of interpolation and approximation of functions]. 2d ed. Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit., Moscow, 327 pp.
- Gonska, H., Pițul, P. and Raşa, I. 2009. General King-type operators. *Results Math.* 53, no. 3-4, 279-286.
- Gupta, P. and Gupta, V. 2001. Rate of convergence on Baskakov-Szász type operators. *Fasc. Math.*, no. 31, 37-44.

- Gupta, V. and Agarwal, R.P. 2014. Convergence estimates in approximation theory. Springer, Cham.
- Gupta, V. and Tachev, G. 2017. On approximation properties of Phillips operators preserving exponential functions. *Mediterr. J. Math.* 14, no. 4, Art. 177, 12 pp.
- Gupta, V. 2018. (p, q) -Szász-Mirakyan-Baskakov operators. *Complex Anal. Oper. Theory* 12, no. 1, 17-25.
- Gupta, V. and Acu, A.M. 2018. On Baskakov-Szász-Mirakyan-type operators preserving exponential type functions. *Positivity* 22, no. 3, 919-929.
- Gupta, V. and Aral, A. 2018. A note on Szász-Mirakyan-Kantorovich type operators preserving e^{-x} . *Positivity* 22, no. 2, 415-423.
- Gurdek, M., Rempulska, L. and Skorupka, M. 1999. The Baskakov operators for functions of two variables. *Collect. Math.*, 50, no. 3, 289-302.
- Gürel Yilmaz, Ö., Gupta, V. and Aral, A. 2017. On Baskakov operators preserving the exponential function. *J. Numer. Anal. Approx. Theory* 46, no. 2, 150-161.
- Hacıyev, A. ve Hacısalıhoğlu, H.H. 1995. Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı. A.Ü. Yayınları, 100s, Ankara.
- Heilmann, M. 1989. Direct and converse results for operators of Baskakov-Durrmeyer type. *Approx. Theory Appl.* 5, no. 1, 105-127.
- Heilmann, M. 1989. Direct and converse results on weighted simultaneous approximation by the method of operators of Baskakov-Durrmeyer type. *Result. Math.* 16, no. 3-4, 228-242.
- Heilmann, M. and Müller, M.W. 1989. On simultaneous approximation by the method of Baskakov-Durrmeyer operators. *Numer. Funct. Anal. Optim.* 10, no. 1-2, 127-138.
- Herman, T. 1978. On the Szász-Mirakyan operator. *Acta. Math. Acad. Sci. Hung.* 32(1-2), 163-173.
- Holhoş, A. 2010. The rate of approximation of functions in an infinite interval by positive linear operators. *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math* 55, no. 2, 133-142.
- İspir, N. 2001. On modified Baskakov operators on weighted spaces. *Turkish J. Math* 25, 355-365.
- Kantorovich, L.V. 1930. Sur certain d'éveloppements suivant les polynomes de la forme de S.Bernstein, I, II. *C. R. Acad. URSS*, 563-568, 595-600.
- Karlin, S. and Studden, W.J. 1966. Tchebycheff Systems: With applications in analysis and statistics. *Pure and Applied Mathematics, Vol. XV* Interscience Publishers John Wiley & Sons, New York-London-Sydney.

- Kasana, H.S., Prasad, G., Agrawal, P.N. and Sahai, A. 1988. Modified Szász operators. Mathematical analysis and its applications, Pergamon Press Oxford, 29-41.
- King, J.P. 2003. Positive linear operators which preserve x^2 . Acta Math. Hungar., 99, no. 3, 203-208.
- Korovkin, P.P. 1953. On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions. Doklady. Akad. Nauk SSSR (N.S.). 90, 961-964.
- Korovkin, P.P. 1960. Linear operators and approximation theory. Hindustan Publishing Corp., Delhi.
- Kreyszig, E. 1978. Introductory functional analysis with applications. John Wiley and Sons, New York.
- Lapidot, E. 1978. On complete Tchebycheff-systems. J. Approx. Theory 23, no. 4, 324-331.
- Lesniewicz M. and Rempulska L. 1997. Approximation by some operators of the Szász-Mirakjan type in exponential weight spaces. Glas. Mat. Ser. III, 32(52), no. 1, 57-69.
- Lorentz, G.G. 1986. Bernstein Polynomials. Chelsea Publishing Co., New York.
- Lubinsky, D.S. 1993. Weierstrass theorem in the twentieth century: a selection. International Conference on Abstract Analysis, Berg-en-Dal, Gruger Park, preprint.
- Mahmudov, N.I. 2011. q -Szász-Mirakjan operators which preserve x^2 . J. Comput. Appl. Math. 235, no. 16, 4621-4628.
- Mhaskar, H.N. and Pai, D.V. 2000. Fundamentals of approximation theory. Narosa Publishing House, New Delhi.
- Miclauş, D. and Pop, O.T. 2012. The generalization of certain results for Szász-Mirakjan-Schurer operators. Creat. Math. Inform. 21, no. 1, 79-85.
- Mihesan, V. 1988. Uniform approximation with positive linear operators generated by generalized Baskakov method. Automat. Comput. Appl. Math., 7, no. 1, 34-37.
- Mirakjan, G.M. 1941. Approximation of continuous functions with the aid of polynomials of the form $e^{-nx} \sum_{k=0}^{m_n} c_{k,n} x^k$. Comptes rendus de l'Académie des sciences de l'URSS 31, 201-205.
- Mursaleen, M, Rahman, S. and Alotaibi, A. 2016. Dunkl generalization of q -Szász-Mirakjan Kantorovich operators which preserve some test functions. J. Inequal. Appl., Paper no. 317, 18 pp.
- Mursaleen, M. and Rahman, S. 2018. Dunkl generalization of q -Szász-Mirakjan operators which preserve x^2 . Filomat 32, no. 3, 733-747.

- Mursaleen, M., Naaz, A. and Khan, A. 2019. Improved approximation and error estimations by King type (p, q) -Szász-Mirakjan Kantorovich operators. *Appl. Math. Comput.* 348, 175-185.
- Natanson, I.P. 1949. *Konstruktivnaya teoriya funktsii* (Russian) [Constructive Theory of Functions]. Gosudarstvennoe Izdatel'stvo Tehniko-Teoretičeskoj Literatury, Moscow-Leningrad, 688.
- Natanson, I.P. 1964. *Constructive function theory. Vol. I. Uniform approximation.* Frederick Ungar Publishing Co., New York.
- Özarslan, M.A. and Duman, O. 2010. Local approximation behavior of modified SMK operators. *Miskolc Math. Notes* 11, no. 1, 87-99.
- Pethe, S. 1984. On the Baskakov operator. *Indian J. Math.* 26, no. 1-3, 43-48.
- Pinkus, A. 2000. Weierstrass and approximation theory. *J. Approx. Theory* 107, 1-66.
- Pop, O.T., Indrea, A.D. and Braica, P.I. 2012. Durrmeyer operators of King-type. *An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform.* 39, no. 2, 288-298.
- Popoviciu, T. 1950. Asupra demonstrației teoremei lui Weierstrass cu ajutorul polinoamelor de interpolare. *Lucrările Sesiunii Gen. Șt. Acad. Române*, 2-12 iunie, Editura Academiei Republicii Populare Române, 1951, pp. 1664-1667.
- Rempulska, L. and Tomczak, K. 2009. Approximation by certain linear operators preserving x^2 . *Turkish J. Math.* 33, no. 3, 273-281.
- Runge, C.Z. 1885. Zur Theorie der Eindeutigen Analytischen Functionen. *Acta mathematica* 6, no. 1, 229-244.
- Runge, C.Z. 1885. Über die Darstellung willkürlicher Functionen. *Acta mathematica* 7, no. 1, 387-392.
- Sahai, A. and Prasad, G. 1985. On simultaneous approximation by modified Lupas operators. *J. Approx. Theory* 45, no. 2, 122-128.
- Sikkema, P.C. 1970. On some linear positive operators. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 73, *Indag. Math.* 32, 327-337.
- Stancu, D.D., Coman, Gh., Agratini, O. and Trimbitaş R. 2001. *Analiza Numerica și Teoria Aproximării. vol. I*, Ed. Presa Universitara Clujeana, Cluj-Napoca.
- Sun, X.H. 1987. On the convergence of the modified Szász-Mirakjan operator. *J. Hangzhou Univ. Natur. Sci. Ed.* 14, no. 2, 254-256.
- Szász, O. 1950. Generalization of S. Bernstein's polynomials to the infinite intervals. *J. Research Nat. Bur. Standarts* 45, 239-245.
- Tikhomirov, V.M. and Gamkrelidze, R.V. 1990. *Convex Analysis and Approximation Theory.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

- Totik, V. 1983. Approximation by Szász–Mirakjan–Kantorovich operators in L^p ($p > 1$). Anal. Math. 9, no. 2, 147-167.
- Totik V. 1983. Uniform approximation by Szász–Mirakjan type operators. Acta Math. Hungar. 41, no. 3-4, 291-307.
- Totik, V. 1983. Uniform approximation by Baskakov and Meyer–König and Zeller operators. Period. Math. Hungar. 14, no. 3-4, 209-228.
- Videnskii, V.S. 1990. Bernstein Polynomials. Leningrad State Pedagogical University, Leningrad (Russian)
- Voronovskaja, E. 1932. Determination de la forme asymptotique de l'approximation des fonctions par les polynomes de M. Bernstein. C. R. Acad. Sci. URSS, 79-85.
- Walczak, Z. 2004. On the convergence of the modified Szász–Mirakjan operators. Yokohama Math. J. 51, no. 1, 11-18.
- Weierstrass, K. 1885. Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen. Sitzungsber. Akad. Berlin , 633–639, 789-805.
- Ziegler, Z. 1968. Linear approximation and generalized convexity. J. Approximation Theory 1, 420-443.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Övgü GÜREL YILMAZ

Doğum Yeri : Samsun

Doğum Tarihi : 22/07/1987

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise : Huriye Süer Anadolu Lisesi (2005)

Lisans : Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Bölümü (2009)

Yüksek Lisans : Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı (2010)
Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı (2013)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl:

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi (2010-2011)

Ankara Üniversitesi (2011-2019)

Yayınları:

Gürel Yılmaz, Ö., Gupta, V. and Aral, A. 2018. A note on Baskakov-Kantorovich type operators preserving e^{-x} . Mathematical Methods in the Applied Sciences, DOI: 10.1002/mma.5337 (SCI-E.) (Tezden çıkan yayın).

Gürel Yılmaz, Ö., Bodur, M. and Aral, A. 2018. On approximation properties of Baskakov-Schurer-Szász operators preserving exponential functions. Filomat 32, no. 15, 5433-5440. (SCI-E.)

Bodur, M. , **Gürel Yılmaz, Ö.** and Aral, A. 2018. Approximation by Baskakov-Szász-Stancu Operators Preserving Exponential Functions. Constructive Mathematical Analysis 1 / 1, 1-8.

Gürel Yılmaz, Ö., Gupta, V. and Aral, A. 2017. On Baskakov operators preserving the exponential function. J. Numer. Anal. Approx. Theory 46, no. 2, 150-161.

Gürel Yılmaz, Ö., Aral, A. and Taşdelen Yeşildal, F. 2017. On Szász-Mirakyan type operators preserving polynomials. J. Numer. Anal. Approx. Theory 46, no. 1, 93-106 (Tezden çıkan yayın).

Gürel Yılmaz, Ö., Aktaş, R. and Altın, A. 2014. On a family of multivariable polynomials defined through Rodrigues type formula. J. Class. Anal. 4, no. 2, 167-180.

