

T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
DOKTORA TEZİ

BAZI KUATERNİYON DİZİLERİ VE KUATERNİYON POLİNOMLARININ
KÖKLERİ

Gonca KIZILASLAN

TEMMUZ 2019

Matematik Anabilim Dalında Gonca KIZILASLAN tarafından hazırlanan BAZI KU-
ATERNİYON DİZİLERİ VE KUATERNİYON POLİNOMLARININ KÖKLERİ adlı
Doktora Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Ali OLGUN

Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Doktora Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine
getirdiğini onaylarım.

Doç. Dr. İlker AKKUŞ

Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan	:	Prof. Dr. Adnan TERCAN	_____
Üye(Danışman)	:	Doç. Dr. İlker AKKUŞ	_____
Üye	:	Prof. Dr. Kazım İLARSLAN	_____
Üye	:	Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN	_____
Üye	:	Dr. Öğr. Üyesi Nil MANSUROĞLU	_____

23/07/2019

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Doktora
derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. Recep ÇALIN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

BAZI KUATERNİYON DİZİLERİ VE KUATERNİYON POLİNOMLARININ KÖKLERİ

KIZILASLAN, Gonca

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Doktora Tezi

Danışman: Doç. Dr. İlker AKKUŞ

Temmuz 2019, 67 sayfa

Kuaterniyonlar matematiğin çeşitli alanlarında görülen temel bir konudur. Hem teorik matematik hem de uygulamalı matematikte birçok uygulaması bulunmaktadır. Bileşenleri çeşitli sayı dizilerinden oluşan kuaterniyonlar da birçok araştırmacı tarafından ilginç bulunmuştur. Bu tip diziler kuaterniyon dizileri olarak adlandırılır. Çalışılan bu dizilerin bileşenlerinin karakteristik polinomları genellikle ikinci derecedendir. Bu tezde ilk olarak karakteristik polinomunun derecesi üç olan Tribonacci ve Tribonacci-Lucas kuaterniyon dizileri üzerinde çalışılmış ve bazı özdeşlikler elde edilmiştir. Sonrasında karakteristik polinomlarının derecesi iki olan dizilerin kuantum genelleştirilmesi verilerek elde edilen dizilerle de kuantum kuaterniyon dizileri elde edilmiştir. Ayrıca kuantum kuaterniyon polinomları tanımlanmış ve çeşitli özellikleri incelenmiştir. Bazı özel kuaterniyon dizileri için de zaman evolüsyonu ve dönme uygulamaları verilmiştir. Son olarak ise bazı yeni iki değişkenli kuadratik kuaterniyon polinom denklemleri için Horadam kuaterniyon köklerinin kapsamlı bir analizi sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Yineleme Bağlantıları, Kuaterniyon, Tamsayı Dizileri, Kuadratik Kuaterniyon Denklemi, Karışık Kuaterniyon Katsayılı İki Değişkenli Polinomlar, Polinom Denklemini Çözme, q -kalkülüs, q -özdeşlikler.

ABSTRACT

SOME QUATERNION SEQUENCES AND ROOTS OF QUATERNION POLYNOMIALS

KIZILASLAN, Gonca

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematic, Ph.D. Thesis

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. İlker AKKUŞ

July 2019, 67 pages

Quaternions are fundamental objects of various parts of mathematics. They have applications in both theoretical and applied mathematics. Quaternions whose components are from special number sequences were also found interesting by many authors. These types of sequences are called as quaternion sequences. The characteristic polynomials of the components of these studied sequences are generally second order. In this thesis firstly Tribonacci and Tribonacci-Lucas quaternion sequences whose characteristic polynomials are third order were studied and some identities were obtained. Next, quantum quaternion sequences were obtained by the quantum generalization of the sequences whose characteristic polynomials are second degree. Also quantum quaternion polynomials were defined and several properties were investigated. Time evolution and rotation applications were given for some special quaternion sequences. Finally, a comprehensive analysis of Horadam quaternion roots for some new bivariate quadratic quaternion polynomial equations was presented.

Key Words: Recurrences, Quaternion, Integer Sequences, Quadratic Quaternion Equation, Bivariate Polynomials with Mixed Quaternion Coefficients, Solving Polynomial Equation, q -calculus, q -identities.

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana veren ve tezimin oluşma sürecinde desteğini esirgemeyen danışman hocam Doç. Dr. İlker Akkuş’a, sevgileri, destekleri ve anlayışları için aileme, tez çalışmam boyunca bana her konuda destek olan arkadaşlarıma ve son olarak maddi desteğinden dolayı Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu’na (TÜBİTAK) teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. MATERYAL VE YÖNTEM	6
2.1 Kuaterniyon Cebiri	6
2.2 q -tamsayıları	7
2.3 Tribonacci ve Tribonacci-Lucas Dizileri	8
2.4 Kuaterniyon Polinomlarının Kökleri Üzerine	9
3. ÜÇÜNCÜ MERTEBEDEN BAZI KUATERNİYON DİZİLERİNİN ÖZEL- LİKLERİ	13
3.1 Tribonacci Sayı Bileşenli Kuaterniyonlar	13
3.2 Üçüncü Mertebeden Bazı Kuaterniyon Dizileri İçin Özdeşlikler	16
3.2.1 Özdeşlikler 1	16
3.2.2 Özdeşlikler 2	16
3.2.3 Özdeşlik 3	17
3.2.4 Özdeşlikler 4	17
3.2.5 Özdeşlikler 5	17
3.2.6 Özdeşlikler 6	18
3.3 Özdeşliklerin İspatları	19
3.3.1 Özdeşlikler 1 in İspatı	19
3.3.2 Özdeşlikler 2 nin İspatı	20

3.3.3	Özdeşlik 3 ün İspatı	21
3.3.4	Özdeşlikler 4 ün İspatı	22
3.3.5	Özdeşlikler 5 in İspatı	24
3.3.6	Özdeşlikler 6 nın İspatı	25
4.	KUATERNİYONLAR: UYGULAMALARLA q–KALKÜLÜS YAKLA-	
	ŞIMI	26
4.1	q –Kuaterniyonlar	26
4.2	q –Kuaterniyon Polinomları	35
4.3	Uygulamalar	40
4.3.1	Zaman Evolüsyonu	40
4.3.2	Dönme	42
5.	KÖKLERİ İKİNCİ MERTEBEDEN KUATERNİYON DİZİLERİ CİN-	
	SİNDEN VERİLEN BAZI YENİ İKİNCİ DERECEDEN KUATERNİ-	
	YONİK DENKLEMLER	46
5.1	Ana Teoremler	46
6.	TARTIŞMA VE SONUÇ	61
	KAYNAKLAR	62
	ÖZGEÇMİŞ	66

SİMGELER DİZİNİ

F_n	n —inci Fibonacci sayısı
L_n	n —inci Lucas sayısı
T_n	n —inci Tribonacci sayısı
TK_n	n —inci Tribonacci-Lucas sayısı
Q_n	n —inci Fibonacci kuaterniyonu
K_n	n —inci Lucas kuaterniyonu
TQ_n	n —inci Tribonacci kuaterniyonu
$T\tilde{Q}_n$	n —inci Tribonacci-Lucas kuaterniyonu
Q_n	n —inci q —Fibonacci kuaterniyonu
V_n	n —inci q —Lucas kuaterniyonu
$\text{Tr}(p)$	p kuaterniyonunun izi
$N(p)$	p kuaterniyonunun normu
$[n]_q$	q —tamsayı n

1 . GİRİŞ

İkinci mertebeden lineer $\{F_n\}$ Fibonacci dizisi, başlangıç koşulları $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ olmak üzere $n \geq 2$ için $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ yineleme bağıntısı ile tanımlanır [32]. Doğal bir düşünce olarak devamında $n \geq 2$ için a, b, p, q tamsayılar ve $W_0 = a$, $W_1 = b$ olmak üzere

$$W_n = pW_{n-1} + qW_{n-2} \quad (1.1)$$

genelleştirilmiş Fibonacci dizisi de tanımlanmıştır ve bu dizi kısaca $\{W_n(a, b; p, q)\}$ ile gösterilir [21]. Bu durumda $a = 0$, $b = 1$, $p = 1$ ve $q = 1$ değerleri için $\{W_n(a, b; p, q)\}$ dizisi yukarıda tanımlanan Fibonacci dizisine dönüşür.

(1.1) yineleme bağıntısının karakteristik denklemi $x^2 - px - q = 0$ olduğundan $p^2 + 4q \geq 0$ için bu dizinin Binet formülü $\alpha = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$ ve $\beta = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$ olmak üzere

$$W_n(a, b; p, q) = \frac{(b - a\beta)\alpha^n - (b - a\alpha)\beta^n}{\alpha - \beta} \quad (1.2)$$

formundadır. Bu tez boyunca $\{W_n(a, b; p, q)\}$ genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $a = 0$, $b = 1$ ve $a = 2$, $b = p$ durumunda sırasıyla

$$\begin{aligned} U_n &= W_n(0, 1; p, q) \\ V_n &= W_n(2, p; p, q) \end{aligned} \quad (1.3)$$

ile gösterilecektir. Ayrıca $\{W_n(0, 1; k, 1)\}$ ve $\{W_n(2, 1; k, 1)\}$ dizileri de sırasıyla $\{F_{k,n}\}$ ve $\{L_{k,n}\}$ ile gösterilecektir. Falcon ve Plaza $\{F_{k,n}\}$ dizisinin elemanlarını k -Fibonacci sayıları olarak adlandırmıştır [9]. Ayrıca Falcon $\{L_{k,n}\}$ dizisinin elemanlarına da k -Lucas sayıları adını vermiştir [10]. Bazı özel a, b, p, q değerleri için $\{W_n(a, b; p, q)\}$ dizisinin karşılık geldiği diziler aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

$W_n(a, b; p, q)$	a	b	p	q
Fibonacci	0	1	1	1
Lucas	2	1	1	1
Pell	0	1	2	1
Pell-Lucas	2	1	2	1
Jacobsthal	0	1	1	2
Jacobsthal-Lucas	2	1	1	2

İyi bilinen bazı sayı dizileri

Fibonacci dizisi polinomsal olarak da genelleştirilebilir. Bunun için $h(x)$ reel katsayılı bir polinom olsun. $h(x)$ –Fibonacci polinomları $\{F_{h,n}(x)\}_{n \geq 0}$ başlangıç koşulları

$$F_{h,0}(x) = 0, F_{h,1}(x) = 1$$

olmak üzere $n \geq 2$ için

$$F_{h,n}(x) = h(x)F_{h,n-1}(x) + F_{h,n-2}(x) \quad (1.4)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlıdır [39]. $h(x)$ –Fibonacci polinomlarının aynı zamanda Catalan-Fibonacci polinomları, Byrd-Fibonacci polinomları ve k –Fibonacci sayılarının genelleştirmesi olduğu da görülebilir.

$\mathcal{F}$ karakteristiği 2 olmayan bir cisim olsun. $\mathcal{F}$ cismi üzerinde 4 boyutlu merkezli basit cebire $\mathbf{H}$ kuaterniyon cebiri denir. Toplama ve çarpma işlemleri ile birlikte $\mathbf{H}$ bir halka yapısı oluşturur. Daha açık bir şekilde ifade etmek gerekirse $\mathbf{H}$ değişmeli olmayan bölüm cebiridir. $\mathcal{F}$ cismi üzerindeki her kuaterniyon cebiri a ve b elemanları $\mathcal{F}$ cisminin sıfırdan farklı elemanları olmak üzere

$$\mathbf{H} := \{ \mathcal{F} + \mathcal{F}\mathbf{i} + \mathcal{F}\mathbf{j} + \mathcal{F}\mathbf{ij} \mid \mathbf{i}^2 = a, \mathbf{j}^2 = b, \mathbf{ij} = \mathbf{k} = -\mathbf{ji} \} \quad (1.5)$$

formundadır. Burada $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ kümesi $\mathbf{H}$ cebirinin standard bazı olarak adlandırılır ve $\mathbf{H}$ cebiri basitçe $\mathbf{H} = \left(\frac{a,b}{\mathcal{F}}\right)$ olarak yazılır. Kuaterniyon cebirinin klasik bir örneği $M_2(\mathbb{R}) = \left(\frac{1,1}{\mathbb{R}}\right)$ 2×2 reel matris cebiridir. Diğer bilinen örnekler $\left(\frac{-1,-1}{\mathbb{R}}\right)$

Hamilton kuaterniyonları ve $(\frac{-1,1}{\mathbb{R}})$ bölünmüş(split) kuaterniyonlardır. Bu tez boyunca $i^2 = j^2 = -1$ olarak ele alınmıştır.

Bileşenleri ikinci mertebeden özel sayı dizilerinden oluşan kuaterniyonlar bugüne kadar birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır [18, 19, 21, 23, 27, 46]. Bu tip diziler kuaterniyon dizileri olarak adlandırılır. Yakın zamanda Cerda-Morales [3] r, s, t reel sayılar olmak üzere

$$V_n = rV_{n-1} + sV_{n-2} + tV_{n-3}, n \geq 3$$

ve başlangıç koşulları $V_0 = a, V_1 = b, V_2 = c$ tamsayılar olan üçüncü mertebeden $\{V_n\}_{n \geq 0}$ genelleştirilmiş Tribonacci dizisini ele almıştır. $r = s = t = 1$ ve $V_0 = 0, V_1 = 1, V_2 = 1$ alındığında bu dizi $\{T_n\}_{n \geq 0}$ ile gösterilen klasik Tribonacci dizisine indirgenir [11, 12, 29]. $r = s = t = 1$ ve $V_0 = 3, V_1 = 1, V_2 = 3$ alındığında ise genel terimi TK_n ile gösterilen Tribonacci-Lucas dizisi elde edilir [50]. Bu dizilerden yola çıkılarak genelleştirilmiş Tribonacci kuaterniyonları ve genelleştirilmiş Lucas kuaterniyonlarının tanımları verilmiş ve çeşitli özellikleri incelenmiştir [3]. Bu tezin üçüncü bölümünde bu tipteki kuaterniyonlar üzerinde çalışılmıştır.

Bileşenleri bilinen Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinden oluşan n -inci Fibonacci kuaterniyon

$$Q_n = F_n + F_{n+1}\mathbf{i} + F_{n+2}\mathbf{j} + F_{n+3}\mathbf{k} \quad (1.6)$$

ve n -inci Lucas kuaterniyon

$$K_n = L_n + L_{n+1}\mathbf{i} + L_{n+2}\mathbf{j} + L_{n+3}\mathbf{k} \quad (1.7)$$

biçiminde Horadam tarafından tanımlanmıştır [19]. Daha sonra Swamy genelleştirilmiş Fibonacci kuaterniyonları için bazı bağıntılar elde etmiştir [46]. Bundan sonra birçok araştırmacı bu yapılarla ilgilenmiş ve bazı sonuçlar elde etmişlerdir [13, 14, 15, 41, 43]. Diğer iyi bilinen kuaterniyon dizileri Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas kuaterniyonlarıdır [7, 13, 18, 27, 28, 48].

Catarino (1.4) te verilen polinomları kullanarak

$$Q_{h,n}(x) = F_{h,n}(x) + F_{h,n+1}(x)\mathbf{i} + F_{h,n+2}(x)\mathbf{j} + F_{h,n+3}(x)\mathbf{k}$$

$h(x)$ –Fibonacci kuaterniyon polinomlarını çalışmış ve bazı sonuçlar elde etmiştir [2]. k bir reel sayı ve $h(x) = k$ olmak üzere $h(x)$ –Fibonacci polinomlarının tanımından k –Fibonacci sayıları $F_{k,n}$ elde edilir ve dolayısıyla $h(x)$ –Fibonacci kuaterniyonlarının tanımından da k –Fibonacci kuaterniyonları

$$Q_{k,n} = F_{k,n} + F_{k,n+1}\mathbf{i} + F_{k,n+2}\mathbf{j} + F_{k,n+3}\mathbf{k}$$

elde edilir.

Dördüncü bölümde bileşenleri kuantum tamsayılarını içeren iki tip kuaterniyon dizisi tanımlanacaktır ve böylelikle çalışılan bazı kuaterniyon dizilerinin bir genelleştirmesi yapılacaktır. Devamında $h(x)$ –Fibonacci kuaterniyon polinomlarının bir genelleştirmesi olarak q –kuaterniyon polinomları da tanıtılacaktır. q –kuaterniyon polinomları için Binet formülleri ve üreteç fonksiyonları elde edilecektir. Ayrıca tanımlanan q –kuaterniyonlar ve q –kuaterniyon polinomları için bazı özellikler ve özdeşlikler verilecektir. Aynı zamanda bazı kuaterniyon dizileri için zaman evolüsyonu ve dönme uygulamaları da verilecektir. Kuantum tamsayıları özellikle fizikte yoğun olarak kullanıldığı için yeni kuantum kuaterniyon tiplerinin başka uygulamalarının da olacağını düşünüyoruz.

Sayılar teorisinde Hilbert’in onuncu probleminden yola çıkılarak çözümleri tamsayı kümesi ile sınırlandırılan denklemler büyük ilgi görmüştür. [45] te genel lineer kuaterniyonik denklemler göz önünde bulundurulmakta ve çözümü bulmak için bir yöntem verilmektedir. Birçok araştırmacı a, b, c ve d sabit tamsayılar olmak üzere $ax^2 + bxy + cy^2 + d = 0$ denklemi ile ilgilenmiştir [5, 6]. Fibonacci ve Lucas dizilerinin birbirini takip eden terimlerini sıfır kabul eden konikler de birçok araştırmacı tarafından ilginç bulunmuştur [20, 22, 30, 31, 37, 38]. Kuaterniyon çarpımı değişmeli olmadığından ku-

aterniyon katsayılı ve bilinmeyenli denklemlerin çözümleri reel ve kompleks sayılardan daha incelikli ve daha zengin bir problemidir. [13] te genelleştirilmiş kuaterniyon ve oktonyon cebirlerinde bazı cebirsel denklemlerin çözümleri verilmektedir. [51]de de, verilen

$$\begin{aligned} b^{(j)} &= b_0^{(j)} + b_1^{(j)}\mathbf{i} + b_2^{(j)}\mathbf{j} + b_3^{(j)}\mathbf{k} \\ c^{(j)} &= c_0^{(j)} + c_1^{(j)}\mathbf{i} + c_2^{(j)}\mathbf{j} + c_3^{(j)}\mathbf{k} \\ g^{(j)} &= g_0^{(j)} + g_1^{(j)}\mathbf{i} + g_2^{(j)}\mathbf{j} + g_3^{(j)}\mathbf{k} \\ h^{(j)} &= h_0^{(j)} + h_1^{(j)}\mathbf{i} + h_2^{(j)}\mathbf{j} + h_3^{(j)}\mathbf{k} \\ d^{(j)} &= d_0^{(j)} + d_1^{(j)}\mathbf{i} + d_2^{(j)}\mathbf{j} + d_3^{(j)}\mathbf{k} \end{aligned}$$

kuaterniyonları ve bilinmeyen

$$x = x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} \quad \text{and} \quad x^* = x_0 - x_1\mathbf{i} - x_2\mathbf{j} - x_3\mathbf{k}$$

kuaterniyonları ile ifade edilen

$$x^2 + \sum_{j=1}^t b^{(j)} x c^{(j)} + \sum_{j=1}^s g^{(j)} x^* h^{(j)} + d = 0 \quad (1.8)$$

ikinci dereceden monik kuaterniyonik polinomun köklerini bulabilmek için bir metod daha verilmiştir ve bu polinomların köklerinin eşdeğer reel kuadratik formu ile çözülebileceği gösterilmiştir. Bu çalışmalardan esinlenerek beşinci bölümde a, b reel sayılar ve x, y, q kuaterniyon olmak üzere

$$\begin{aligned} x^2 + axy \pm y^2 + q &= 0, \\ x^2 + axy - y^2 + by + q &= 0, \\ x^2 + ax \pm y^2 + q &= 0, \\ x^2 + xy + yx + ay^2 + by + q &= 0 \end{aligned}$$

formundaki denklemlerin çözümlerine yer verilmiştir.

2 . MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Kuaterniyon Cebiri

Sir William Hamilton karmaşık sayıları üç boyutlu uzaya genişletmeyi düşündü. Karmaşık sayıların düzlemde bir nokta göstermesine karşılık üç boyutlu uzay için benzer bir yol aradı fakat bir sonuca ulaşamadı. Sonunda cevabın dört boyutta olduğunu keşfetti. 1843'te sunduğu teoride, kuaterniyon terimi belirli bir dörtlü ifadeyi adlandırmak için kullanıldı.

Kuaterniyonlar matematiğin birçok alanında çalışılan temel bir konudur. Grup teori, geometri, kinematik, bilgisayar bilimi gibi hem teorik hem de uygulamalı matematikte uygulamaları vardır [16, 33, 47].

$p = a_0 + \mathbf{p} = a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ ve $q = b_0 + \mathbf{q} = b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ kuaterniyonları $(\frac{a,b}{\mathcal{F}})$ cebirinin iki elemanı olmak üzere, bu kuaterniyonların çarpımı (1.5) formuna uygun olarak “ $\cdot$ ” iç çarpım ve “ $\times$ ” vektörel çarpım olmak üzere

$$pq = a_0b_0 - p \cdot q + a_0q + b_0p + p \times q$$

şeklinde indirgenebilir. $q = b_0 + \mathbf{q} = b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ kuaterniyonunun $\mathbf{H}$ cebirindeki eşleniği q^* ile gösterilir ve $q^* = b_0 - b_1\mathbf{i} - b_2\mathbf{j} - b_3\mathbf{k}$ şeklinde tanımlıdır. q kuaterniyonunun izi ve normu

$$\text{Tr}(q) = q + q^* \text{ ve } N(q) = qq^*$$

ile ifade edilir. Ayrıca $0 \neq q$ kuaterniyonunun tersi $q^{-1} = N(q)^{-1}q^*$ olup q birim kuaterniyon ise $q^{-1} = q^*$ elde edilir.

2.2. q -tamsayıları

$\mathcal{R}$ birimli ve birleşmeli bir halka ve $q \in \mathcal{R}$ olsun. $n \in \mathbb{N}$ için n kuantum tamsayısı veya kısaca q -tamsayısı $[n]_q$ ile gösterilir ve

$$[n]_q = \sum_{i=0}^{n-1} q^i$$

şeklinde tanımlanır. Benzer şekilde q tersinir eleman ve $n \neq 0$ olmak üzere $-n$ q -tamsayısı ise

$$[-n]_q = -\sum_{i=1}^n q^{-i}$$

ile tanımlanır. Dolayısıyla $q \neq 0$ ve $n \in \mathbb{Z}^-$ için $[n]_q = -q^n[-n]_q$ elde edilir. Özel olarak $1 - q$ tersinir ise

$$[n]_q = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

yazılabilir. Her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$[m+n]_q = [m]_q + q^m[n]_q \quad \text{ve} \quad [mn]_q = [m]_q[n]_{q^m}$$

vardır. $\mathcal{R} = \mathbb{Z}$ ve $q = 1$ iken kuantum tamsayısı $[n]_q$ klasik anlamdaki n tamsayısı olacaktır [34].

İkinci mertebeden $\{W_n(a, b; p, q)\}$ tamsayı dizilerinin ve q tamsayılarının elemanları birbirine dönüştürülebilir. Örneğin $\{F_{k,n}\}$ ve $\{L_{k,n}\}$ dizileri için $q = \beta/\alpha$ ve $\mathbf{i} = \sqrt{-1} = \alpha\sqrt{q}$ olmak üzere (1.2) deki Binet formülünden dolayı

$$F_{k,n} = \alpha^{n-1}[n]_q \quad \text{ve} \quad L_{k,n} = \alpha^n \frac{[2n]_q}{[n]_q}$$

formlarına indirgenir.

2.3. Tribonacci ve Tribonacci-Lucas Dizileri

$n \geq 3$ için Tribonacci dizisi, başlangıç koşulları $T_0 = 0$, $T_1 = 1$ ve $T_2 = 1$ olmak üzere

$$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanır. Tribonacci-Lucas dizisi ise başlangıç koşulları $TK_0 = 3$, $TK_1 = 1$ ve $TK_2 = 3$ olmak üzere

$$TK_n = TK_{n-1} + TK_{n-2} + TK_{n-3}$$

ile tanımlıdır [8, 11]. İlk birkaç Tribonacci ve Tribonacci-Lucas sayıları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
T_n	0	1	1	2	4	7	13	24	44	81	149	274	504	927
TK_n	3	1	3	7	11	21	39	71	131	241	443	815	1499	2757

Herhangi bir $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ dizisi için

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

fonksiyonu üreteç fonksiyonu olarak adlandırılır. $\{T_n\}$ Tribonacci dizisi ve $\{TK_n\}$ Tribonacci-Lucas dizisi için üreteç fonksiyonları sırasıyla

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{1 - x - x^2 - x^3}, \\ h(x) &= \frac{3 - 2x - x^2}{1 - x - x^2 - x^3} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Tribonacci ve Tribonacci-Lucas dizileri için Binet formülleri ise $w = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ ve

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}}}{3},$$

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{1 + w\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + w^2\sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}}}{3}, \\ \gamma &= \frac{1 + w^2\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + w\sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}}}{3}\end{aligned}\quad (2.1)$$

olmak üzere sırasıyla

$$\begin{aligned}T_n &= \frac{\alpha^{n+1}}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + \frac{\beta^{n+1}}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)} + \frac{\gamma^{n+1}}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}, \\ TK_n &= \alpha^n + \beta^n + \gamma^n\end{aligned}\quad (2.2)$$

şeklindedir [50].

2.4. Kuaterniyon Polinomlarının Kökleri Üzerine

$q_0, q_1, \dots, q_{n-1}$ kuaterniyonları verilsin. Bu bölüm boyunca q kuaterniyonunun izi ve normu sırasıyla $\mathbf{t}$ ve $\mathbf{n}$ ile gösterilecektir. Derecesi n olan monik kuaterniyon polinom x kuaterniyon belirsizine göre

$$p(x) = x^n + q_{n-1}x^{n-1} + \dots + q_0 \quad (2.3)$$

olarak tanımlanır. $p(x)$ kuaterniyon polinomu için $p(\lambda) = 0$ ise λ bu polinomun bir köküdür. Bölüm halkaları üzerindeki polinomların kökleri birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır [1, 17, 40]. Niven bir kuaterniyon cebiri üzerindeki polinomların köklerini hesaplayabilmek için kuaterniyonun iki parametresi olan iz ve normuna bağlı olacak şekilde basit bir algoritma vermiştir [40]. Buna göre her q kuaterniyonunun ikinci dereceden reel katsayılı

$$x^2 - \mathbf{t}x + \mathbf{n} = 0$$

denklemini sağladığı bilinmektedir. f ve g polinomları $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, q_i parametrelerine bağlı polinomlar olmak üzere (2.3) teki polinom sağdan $x^2 - \mathbf{t}x + \mathbf{n}$ ile bölündüğünde

$$p(x) = h(x)(x^2 - \mathbf{t}x + \mathbf{n}) + fx + g$$

elde edilir. Dolayısıyla q kuaterniyonu $p(x)$ polinomunun bir kökü ise yani $p(q) = 0$ ise

$$fq + g = 0$$

olup

$$q = -\frac{1}{f}g$$

elde edilir. Bazı hesaplamaların ardından Niven iz ve norm için

$$\mathbf{n}f^*f - g^*g = 0$$

$$\mathbf{t}f^*f + f^*g + g^*f = 0$$

denklemlerini elde etmiştir. Böylece Niven bu denklemlerin reel çözümlerinin $p(x)$ polinomunun kuaterniyon kökünün izini ve normunu verdiğini ispatlamış olup bu ifadenin tersi de doğrudur. Ancak bu denklemleri kullanarak iz ve norm bulmak pek pratik bir yöntem değildir. Çünkü $2n - 1$ dereceli iki reel denklemi aynı anda çözmek gerekmektedir.

Serôdio bu parametreleri bulmak için alternatif ve daha pratik bir yöntem sunmaktadır [44]. Şimdi bu yöntemden kısaca bahsedilecektir. Kuaterniyonlar üzerinde bir denklik bağıntısı $\sim$ vardır. İki kuaterniyon q_1 ve q_2 için $\sigma^{-1}q_1\sigma = q_2$ eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı bir σ kuaterniyonu varsa bu kuaterniyonlara benzer kuaterniyonlar denir. Bu ilişki ile (2.3) teki polinom $p(x)$ in köklerinin kümesi en fazla n tane kuaterniyonların denklik sınıflarına aittir ve bu sınıflar karşılık gelen

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \\ -q_0 & -q_1 & \dots & -q_{n-1} \end{bmatrix}$$

tamamlayıcı matrisin kompleks özdeğerleri ile üretilir. C_1 ve C_2 kompleks elemanlara sahip $n \times n$ matrisler olmak üzere C matrisi

$$C = C_1 + C_2 \mathbf{j}$$

formunda yazılabilir. Buradan C matrisinin sağ özdeğerleri

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ -C_2^* & C_1^* \end{bmatrix}$$

$2n \times 2n$ matrisinin özdeğerleri olacaktır.

Ayrıca ikinci dereceden monik kuaterniyon polinomunun köklerini bulabilmek için bir metod daha verilmiştir [51]. Herhangi bir $q \in (\frac{-1, -1}{\mathbb{R}})$ kuaterniyonu için

$$R(q) = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ -q_1 & -q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_2 & -q_3 & -q_0 & q_1 \\ -q_3 & q_2 & -q_1 & -q_0 \end{bmatrix}, I(q) = \begin{bmatrix} q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_0 & -q_1 & q_2 & q_3 \\ q_3 & -q_2 & -q_1 & -q_0 \\ -q_2 & -q_3 & q_0 & -q_1 \end{bmatrix},$$

$$J(q) = \begin{bmatrix} q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ -q_3 & -q_2 & -q_1 & q_0 \\ q_0 & q_1 & -q_2 & q_3 \\ q_1 & -q_0 & -q_3 & -q_2 \end{bmatrix}, K(q) = \begin{bmatrix} q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \\ q_2 & -q_3 & -q_0 & -q_1 \\ -q_1 & q_0 & -q_3 & -q_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 & -q_3 \end{bmatrix}$$

matrisleri tanımlansın. Buna göre aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.1 ([51]). $x = x_0 + x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j} + x_3 \mathbf{k} \in (\frac{-1, -1}{\mathbb{R}})$ kuaterniyonunun (1.8) deki ikinci dereceden monik kuaterniyonik polinomun bir kökü olabilmesi için gerek ve yeter

koşul (x_0, x_1, x_2, x_3) elemanın $D = \text{diag}\{1, -1, -1, -1\}$ ve

$$f_0 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + (x_0, x_1, x_2, x_3) \left\{ \sum_{j=1}^t R(c^{(j)}) \begin{bmatrix} b_0^{(j)} \\ b_1^{(j)} \\ b_2^{(j)} \\ b_3^{(j)} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^s DR(h^{(i)}) \begin{bmatrix} g_0^{(i)} \\ g_1^{(i)} \\ g_2^{(i)} \\ g_3^{(i)} \end{bmatrix} \right\} + d_0,$$

$$f_1 = 2x_0x_1 + (x_0, x_1, x_2, x_3) \left\{ \sum_{j=1}^t I(c^{(j)}) \begin{bmatrix} b_0^{(j)} \\ b_1^{(j)} \\ b_2^{(j)} \\ b_3^{(j)} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^s DI(h^{(i)}) \begin{bmatrix} g_0^{(i)} \\ g_1^{(i)} \\ g_2^{(i)} \\ g_3^{(i)} \end{bmatrix} \right\} + d_1,$$

$$f_2 = 2x_0x_2 + (x_0, x_1, x_2, x_3) \left\{ \sum_{j=1}^t J(c^{(j)}) \begin{bmatrix} b_0^{(j)} \\ b_1^{(j)} \\ b_2^{(j)} \\ b_3^{(j)} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^s DJ(h^{(i)}) \begin{bmatrix} g_0^{(i)} \\ g_1^{(i)} \\ g_2^{(i)} \\ g_3^{(i)} \end{bmatrix} \right\} + d_2,$$

$$f_3 = 2x_0x_3 + (x_0, x_1, x_2, x_3) \left\{ \sum_{j=1}^t K(c^{(j)}) \begin{bmatrix} b_0^{(j)} \\ b_1^{(j)} \\ b_2^{(j)} \\ b_3^{(j)} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^s DK(h^{(i)}) \begin{bmatrix} g_0^{(i)} \\ g_1^{(i)} \\ g_2^{(i)} \\ g_3^{(i)} \end{bmatrix} \right\} + d_3$$

olmak üzere $n = 0, 1, 2, 3$ için

$$f_n(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$$

reel denklemlerini sağlamasıdır.

3 . ÜÇÜNCÜ MERTEBEDEN BAZI KUATERNİYON DİZİLERİNİN ÖZELLİKLERİ

İkinci mertebeden kuaterniyon dizileri bugüne kadar birçok araştırmacı tarafından çalışılmış olmasına rağmen üçüncü mertebeden kuaterniyon dizilerine literatürde az rastlanmaktadır. Bundan dolayı bu bölümde üçüncü mertebeden bazı kuaterniyon dizilerinin özellikleri verilecek ve bu tipteki kuaterniyon dizileri için bazı özdeşlikler elde edilecektir. Bu bölüm boyunca α , β , γ elemanları (2.1) deki elemanlar ve

$$\begin{aligned}\underline{\alpha} &= 1 + \alpha\mathbf{i} + \alpha^2\mathbf{j} + \alpha^3\mathbf{k}, \\ \underline{\beta} &= 1 + \beta\mathbf{i} + \beta^2\mathbf{j} + \beta^3\mathbf{k}, \\ \underline{\gamma} &= 1 + \gamma\mathbf{i} + \gamma^2\mathbf{j} + \gamma^3\mathbf{k}\end{aligned}$$

olarak ele alınacaktır.

3.1. Tribonacci Sayı Bileşenli Kuaterniyonlar

$n \geq 0$ için n -inci Tribonacci kuaterniyon TQ_n ve n -inci Tribonacci-Lucas kuaterniyon $T\tilde{Q}_n$

$$\begin{aligned}TQ_n &= T_n + T_{n+1}\mathbf{i} + T_{n+2}\mathbf{j} + T_{n+3}\mathbf{k} \\ T\tilde{Q}_n &= TK_n + TK_{n+1}\mathbf{i} + TK_{n+2}\mathbf{j} + TK_{n+3}\mathbf{k}\end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır. $n \geq 0$ için

$$\begin{aligned}TQ_{n+3} &= TQ_{n+2} + TQ_{n+1} + TQ_n \\ T\tilde{Q}_{n+3} &= T\tilde{Q}_{n+2} + T\tilde{Q}_{n+1} + T\tilde{Q}_n\end{aligned}$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. TQ_n kuaterniyonunun eşleniği TQ_n^* ile gösterilirse

$$TQ_n^* = T_n - T_{n+1}\mathbf{i} - T_{n+2}\mathbf{j} - T_{n+3}\mathbf{k}$$

ve $T\tilde{Q}_n$ Tribonacci-Lucas kuaterniyonunun eşleniği de $T\tilde{Q}_n^*$ ile gösterilirse

$$T\tilde{Q}_n^* = TK_n - TK_{n+1}\mathbf{i} - TK_{n+2}\mathbf{j} - TK_{n+3}\mathbf{k}$$

olacaktır. $f(x)$, x 'e göre bir kuvvet serisi olmak üzere x^n in katsayısı $[x^n]f(x)$ ile gösterilecektir. Buradan TQ_n kuaterniyonunun normu

$$TQ_n TQ_n^* = \sum_{i=0}^3 T_{n+i}^2 = [x^n] \frac{2(3 + 5x + 4x^2 - 2x^3 - x^4 - x^5)}{(1 - 3x - x^2 - x^3)(1 + x + x^2 - x^3)}$$

olarak bulunur.

$n \geq 2$ için $A_n = T_{-n}$ ve $B_n = TK_{-n}$ olsun. Negatif indisli Tribonacci ve Tribonacci-Lucas dizileri

$$\begin{aligned} A_n &= -A_{n-1} - A_{n-2} + A_{n-3}; \quad A_{-1} = 1, A_0 = A_1 = 0, \\ B_n &= -B_{n-1} - B_{n-2} + B_{n-3}; \quad B_{-1} = 1, B_0 = 3, B_1 = -1 \end{aligned}$$

ile tanımlıdır. Bu dizilerden yola çıkılarak bir kuaterniyon dizisi daha tanımlanabilir.

Tanım 3.1. Negatif indisli Tribonacci ve Tribonacci-Lucas kuaterniyonları

$$\begin{aligned} TQ_{-n} &= A_n + A_{n-1}\mathbf{i} + A_{n-2}\mathbf{j} + A_{n-3}\mathbf{k}, \\ T\tilde{Q}_{-n} &= B_n + B_{n-1}\mathbf{i} + B_{n-2}\mathbf{j} + B_{n-3}\mathbf{k} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Genelleştirilmiş Tribonacci kuaterniyonlarının üreteç fonksiyonları ve Binet formülleri [3] te verilmiştir. Buna göre Tribonacci kuaterniyonlarının üreteç fonksiyonları ve Binet formülleri de aşağıdaki gibidir:

Teorem 3.1. TQ_n Tribonacci kuaterniyonunun üreteç fonksiyonu

$$G(x) = \frac{x + \mathbf{i} + (1 + x + x^2)\mathbf{j} + (2 + 2x + x^2)\mathbf{k}}{1 - x - x^2 - x^3}$$

şeklindedir.

İspat. TQ_n Tribonacci kuaterniyonunun üreteç fonksiyonu

$$G(x) = TQ_0 + TQ_1x + TQ_2x^2 + \cdots + TQ_nx^n + \cdots$$

olsun. TQ_{n-1} , TQ_{n-2} ve TQ_{n-3} kuaterniyonları indis bakımından TQ_n kuaterniyonundan sırasıyla 1, 2 ve 3 küçük olup $xG(x)$, $x^2G(x)$ ve $x^3G(x)$ fonksiyonları bulunur.

Böylece

$$\begin{aligned} xG(x) &= TQ_0x + TQ_1x^2 + TQ_2x^3 + \cdots + TQ_{n-1}x^n + \cdots, \\ x^2G(x) &= TQ_0x^2 + TQ_1x^3 + TQ_2x^4 + \cdots + TQ_{n-2}x^n + \cdots, \\ x^3G(x) &= TQ_0x^3 + TQ_1x^4 + TQ_2x^5 + \cdots + TQ_{n-3}x^n + \cdots \end{aligned}$$

şeklindedir. Gerekli işlemler yapılarak

$$G(x) = \frac{TQ_0 + x(TQ_1 - TQ_0) + x^2(TQ_2 - TQ_1 - TQ_0)}{1 - x - x^2 - x^3}$$

olduğu görülür ve buradan

$$G(x) = \frac{x + \mathbf{i} + (1 + x + x^2)\mathbf{j} + (2 + 2x + x^2)\mathbf{k}}{1 - x - x^2 - x^3}$$

elde edilir. □

Teorem 3.2. Tribonacci ve Tribonacci-Lucas kuaterniyonlarının Binet formülleri

$$\begin{aligned} TQ_n &= \frac{\alpha^{n+1}}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}\underline{\alpha} + \frac{\beta^{n+1}}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)}\underline{\beta} + \frac{\gamma^{n+1}}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}\underline{\gamma}, \\ T\tilde{Q}_n &= \alpha^n\underline{\alpha} + \beta^n\underline{\beta} + \gamma^n\underline{\gamma} \end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat. T_n ve TK_n için (2.2) de verilen Binet formülleri ile TQ_n ve $T\tilde{Q}_n$ kuaterniyonlarının tanımları kullanılırsa TQ_n ve $T\tilde{Q}_n$ için Binet formülleri kolayca elde edilir. $\square$

3.2. Üçüncü Mertebeden Bazı Kuaterniyon Dizileri İçin Özdeşlikler

Bu bölümde, tanımlanan bazı üçüncü mertebeden kuaterniyon dizileri için özdeşlikler verilecektir. Sonrasında elde edilen özdeşliklerden bazılarının ispatları yapılacaktır.

3.2.1. Özdeşlikler 1

Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} TQ_n^2 &= 2T_n TQ_n - TQ_n TQ_n^*, \\ TQ_n + TQ_n^* &= 2T_n, \\ T\tilde{Q}_n &= TQ_n + 2TQ_{n-1} + 3TQ_{n-2} \end{aligned}$$

özdeşlikleri elde edilir.

3.2.2. Özdeşlikler 2

Her $n, m \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} C_n &= \alpha^n \beta^n + \alpha^n \gamma^n + \beta^n \gamma^n, \\ \underline{C}_{2n-m} &= C_{2n-m} + C_{2n-m-1}\mathbf{i} + C_{2n-m-2}\mathbf{j} + C_{2n-m-3}\mathbf{k} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} TQ_{m+n} &= TQ_m TK_n - TQ_{m-n} C_n + TQ_{m-2n}, \\ T\tilde{Q}_{m+n} &= T\tilde{Q}_m TK_n - T\tilde{Q}_{m-n} C_n + \underline{C}_{2n-m} \end{aligned}$$

sağlanır. Bir başka özdeşlik

$$TQ_{n+2m} = TK_m TQ_{n+m} - TK_{-m} TQ_n + TQ_{n-2m}$$

şeklinde verilebilir.

3.2.3. Özdeşlik 3

Her $n \geq 0, m \geq 3$ için

$$TQ_{n+m} = T_{m-2} TQ_n + (T_{m-3} + T_{m-2}) TQ_{n+1} + T_{m-1} TQ_{n+2}$$

elde edilir.

3.2.4. Özdeşlikler 4

$\hat{S}_n = \sum_{k=0}^n TQ_k$ olsun. Bu durumda

$$TQ_n = \frac{1}{2} \left[\hat{S}_n - \hat{S}_{n-4} \right]$$

sağlanır ve $n \geq 0, m \geq 5$ için $S_m = \sum_{k=0}^m T_k$ olmak üzere

$$\hat{S}_{n+m} = -S_{m-3} \hat{S}_n - S_{m-4} \hat{S}_{n+1} - S_{m-5} \hat{S}_{n+2} + S_{m-2} \hat{S}_{n+3}$$

elde edilir.

3.2.5. Özdeşlikler 5

$n \geq 0$ için $R_n = 3T_{n+1} - T_n$ dizisi ele alınsın. Buradan

$$\tilde{R}_n = R_n + R_{n+1}\mathbf{i} + R_{n+2}\mathbf{j} + R_{n+3}\mathbf{k}$$

kuaterniyonu tanımlanabilir. Ayrıca $n \geq 2$ için $TU_0 = TU_1 = 0$ olmak üzere $TU_n = T_{n-1} + T_{n-2}$ dizisi tanımlansın ve

$$\tilde{U}_n = TU_n + TU_{n+1}\mathbf{i} + TU_{n+2}\mathbf{j} + TU_{n+3}\mathbf{k}$$

olsun. Bu durumda

$$\tilde{R}_{n+3} = \tilde{R}_{n+2} + \tilde{R}_{n+1} + \tilde{R}_n,$$

$$\tilde{U}_{n+3} = \tilde{U}_{n+2} + \tilde{U}_{n+1} + \tilde{U}_n$$

elde edilir.

Diğer taraftan her $n \geq 2$ için

$$TQ_n^2 - TQ_{n-1}^2 - TQ_n TQ_{n-1} + TQ_{n-1} TQ_n = \tilde{U}_{n+1} \tilde{U}_{n-1}$$

özdeşliği de sağlanır [4].

3.2.6. Özdeşlikler 6

Şimdi tanımlanan çeşitli kuaterniyonların sonlu toplamalarına dair özdeşlikler verilecektir. $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n TQ_k &= \frac{TQ_{n+2} + TQ_n + TQ_0 - TQ_2}{2}, \\ \sum_{k=0}^n TQ_{2k} &= \frac{TQ_{2n+1} + TQ_{2n} - (1 + \mathbf{j} + 2\mathbf{k})}{2}, \\ \sum_{k=0}^n TQ_{2k+1} &= \frac{TQ_{2n+2} + TQ_{2n+1} - (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})}{2}, \\ \sum_{k=0}^n TQ_{3k} &= \sum_{k=0}^{3n-1} TQ_k + TQ_0 = \frac{TQ_{3n+2} - TQ_{3n} - (1 - \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})}{2}, \\ \sum_{k=0}^n TQ_{4k} &= \frac{TQ_{4n+2} + TQ_{4n} - (1 - \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})}{4} \end{aligned}$$

özdeşlikleri yazılabilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n \tilde{U}_k &= TQ_{n+1} - (1 + \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}), \\
\sum_{k=1}^n T\tilde{Q}_k &= 2\tilde{U}_{n+2} + \tilde{U}_n - (3 + 4\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 14\mathbf{k}), \\
\sum_{k=0}^n TQ_k &= \frac{\tilde{U}_{n+2} + \tilde{U}_{n+1} - (1 + \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k})}{2}, \\
\sum_{k=0}^n \tilde{R}_k &= \frac{3\tilde{U}_{n+3} + 2\tilde{U}_{n+2} - \tilde{U}_{n+1} - (2 + 8\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 22\mathbf{k})}{2}, \\
\sum_{k=0}^n \tilde{U}_{3k} &= TQ_{3n} - \mathbf{i}, \\
\sum_{k=0}^n \tilde{U}_{3k+1} &= TQ_{3n+1} - (1 + \mathbf{k})
\end{aligned}$$

özdeşlikleri de sağlanır.

3.3. Özdeşliklerin İspatları

Bu bölümde, elde edilen bazı özdeşliklerin ispatları Binet formülleri ve tümevarım kullanılarak yapılacaktır. Diğer özdeşlikler benzer şekilde elde edilebilir.

3.3.1. Özdeşlikler 1 in İspatı

İlk önce birinci özdeşlikte verilen

$$TQ_n^2 = 2T_n TQ_n - TQ_n TQ_n^*$$

özdeşliği ispatlanacaktır.

$$TQ_n^2 = T_n^2 - T_{n+1}^2 - T_{n+2}^2 - T_{n+3}^2 + 2(T_n T_{n+1} \mathbf{i} + T_n T_{n+2} \mathbf{j} + T_n T_{n+3} \mathbf{k})$$

olduğundan

$$TQ_n TQ_n^* = T_n^2 + T_{n+1}^2 + T_{n+2}^2 + T_{n+3}^2,$$

$$2T_n T Q_n = 2T_n^2 + 2(T_n T_{n+1} \mathbf{i} + T_n T_{n+2} \mathbf{j} + T_n T_{n+3} \mathbf{k})$$

eşitlikleri kullanılarak istenen sonuç elde edilir.

Şimdi $T\tilde{Q}_n = TQ_n + 2TQ_{n-1} + 3TQ_{n-2}$ özdeşliğinin ispatı yapılacaktır. Tribonacci kuaterniyonunun Binet formülü

$$TQ_n = \frac{\alpha^{n+1}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\underline{\alpha} + \frac{\beta^{n+1}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}\underline{\beta} + \frac{\gamma^{n+1}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\underline{\gamma}$$

olarak Teorem 3.2 de elde edilmişti. Buradan

$$\begin{aligned} & TQ_n + 2TQ_{n-1} + 3TQ_{n-2} \\ &= \left[\frac{\alpha^{n+1}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\underline{\alpha} + \frac{\beta^{n+1}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}\underline{\beta} + \frac{\gamma^{n+1}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\underline{\gamma} \right] + \\ & 2 \left[\frac{\alpha^n}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\underline{\alpha} + \frac{\beta^n}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}\underline{\beta} + \frac{\gamma^n}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\underline{\gamma} \right] + \\ & 3 \left[\frac{\alpha^{n-1}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\underline{\alpha} + \frac{\beta^{n-1}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}\underline{\beta} + \frac{\gamma^{n-1}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\underline{\gamma} \right] \\ &= \left[\frac{\alpha^{n+1} + 2\alpha^n + 3\alpha^{n-1}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} \right] \underline{\alpha} + \left[\frac{\beta^{n+1} + 2\beta^n + 3\beta^{n-1}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} \right] \underline{\beta} + \\ & \left[\frac{\gamma^{n+1} + 2\gamma^n + 3\gamma^{n-1}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} \right] \underline{\gamma} \\ &= \alpha^n \left[\frac{\alpha^2 + 2\alpha + 3}{\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} \right] \underline{\alpha} + \beta^n \left[\frac{\beta^2 + 2\beta + 3}{\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} \right] \underline{\beta} + \\ & \gamma^n \left[\frac{\gamma^2 + 2\gamma + 3}{\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} \right] \underline{\gamma} \\ &= \alpha^n \underline{\alpha} + \beta^n \underline{\beta} + \gamma^n \underline{\gamma} \\ &= T\tilde{Q}_n \end{aligned}$$

elde edilir.

3.3.2. Özdeşlikler 2 nin İspatı

Tribonacci ve Tribonacci-Lucas sayılarının

$$T_{m+n} = T_m T K_n - T_{m-n} C_n + T_{m-2n},$$

$$TK_{m+n} = TK_m TK_n - TK_{m-n} C_n + C_{2n-m}$$

eşitliklerini sağladıkları bilinmektedir [50]. Buradan

$$\begin{aligned}
TQ_{m+n} &= T_{m+n} + T_{m+n+1}\mathbf{i} + T_{m+n+2}\mathbf{j} + T_{m+n+3}\mathbf{k} \\
&= (T_m TK_n - T_{m-n} C_n + T_{m-2n}) \\
&\quad + (T_{m+1} TK_n - T_{m+1-n} C_n + T_{m+1-2n})\mathbf{i} \\
&\quad + (T_{m+2} TK_n - T_{m+2-n} C_n + T_{m+2-2n})\mathbf{j} \\
&\quad + (T_{m+3} TK_n - T_{m+3-n} C_n + T_{m+3-2n})\mathbf{k} \\
&= (T_m + T_{m+1}\mathbf{i} + T_{m+2}\mathbf{j} + T_{m+3}\mathbf{k}) TK_n \\
&\quad - (T_{m-n} + T_{m-n+1}\mathbf{i} + T_{m-n+2}\mathbf{j} + T_{m-n+3}\mathbf{k}) C_n \\
&\quad + (T_{m-2n} + T_{m-2n+1}\mathbf{i} + T_{m-2n+2}\mathbf{j} + T_{m-2n+3}\mathbf{k}) \\
&= TQ_m TK_n - TQ_{m-n} C_n + TQ_{m-2n}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Her $n, m \in \mathbb{N}$ için Tribonacci ve Tribonacci-Lucas dizileri

$$T_{n+2m} = TK_m T_{n+m} - TK_{-m} T_n + T_{n-2m}$$

eşitliğini de sağlar [24]. Dolayısıyla benzer şekilde

$$TQ_{n+2m} = TK_m TQ_{n+m} - TK_{-m} TQ_n + TQ_{n-2m}$$

özdeşliğinin sağlandığı gösterilebilir.

3.3.3. Özdeşlik 3 ün İspatı

m üzerinden tümevarımla ispatlanacaktır. $m = 3$ için

$$TQ_{n+3} = TQ_n + TQ_{n+1} + TQ_{n+2}$$

$$= T_1 T Q_n + (T_0 + T_1) T Q_{n+1} + T_2 T Q_{n+2}$$

vardır. Eşitliğin tüm $m \leq k$ için sağlandığı kabul edilsin. $m = k + 1$ için

$$\begin{aligned} T Q_{n+k+1} &= T Q_{n+k} + T Q_{n+k-1} + T Q_{n+k-2} \\ &= T_{k-2} T Q_n + (T_{k-3} + T_{k-2}) T Q_{n+1} + T_{k-1} T Q_{n+2} + T_{k-3} T Q_n + \\ &\quad (T_{k-4} + T_{k-3}) T Q_{n+1} + T_{k-2} T Q_{n+2} + T_{k-4} T Q_n + \\ &\quad (T_{k-5} + T_{k-4}) T Q_{n+1} + T_{k-3} T Q_{n+2} \\ &= (T_{k-2} + T_{k-3} + T_{k-4}) T Q_n + \\ &\quad (T_{k-3} + T_{k-2} + T_{k-4} + T_{k-3} + T_{k-5} + T_{k-4}) T Q_{n+1} + \\ &\quad (T_{k-1} + T_{k-2} + T_{k-3}) T Q_{n+2} \\ &= T_{k-1} T Q_n + (T_{k-2} + T_{k-1}) T Q_{n+1} + T_k T Q_{n+2} \end{aligned}$$

olup tümevarımdan istenen sonuç elde edilir.

3.3.4. Özdeşlikler 4 ün İspatı

$\hat{S}_n = \sum_{k=0}^n T Q_k$ olsun. $n \geq 0$ için

$$\begin{aligned} \hat{S}_n &= T Q_0 + T Q_1 + \cdots + T Q_n \\ &= T Q_0 + T Q_1 + \cdots + T Q_{n-4} + T Q_{n-3} + T Q_{n-2} + T Q_{n-1} + T Q_n \\ &= \hat{S}_{n-4} + T Q_n + T Q_n \\ &= \hat{S}_{n-4} + 2 T Q_n \end{aligned}$$

olduğundan istenen özdeşlik

$$T Q_n = \frac{1}{2} \left[\hat{S}_n - \hat{S}_{n-4} \right]$$

elde edilir.

Diğer özdeşlik n ve m üzerinden tümevarım ile ispatlanacaktır.

İlk önce

$$\widehat{S}_{n+5} = -2\widehat{S}_n - \widehat{S}_{n+1} + 4\widehat{S}_{n+3}$$

eşitliği elde edilecektir. $n = 0$ için

$$\begin{aligned}\widehat{S}_5 &= TQ_0 + TQ_1 + TQ_2 + TQ_3 + TQ_4 + TQ_5 \\ &= TQ_0 + TQ_1 + TQ_2 + TQ_3 + (TQ_1 + TQ_2 + TQ_3) + (TQ_2 + TQ_3 + TQ_4) \\ &= TQ_0 + TQ_1 + TQ_2 + TQ_3 + (TQ_1 + TQ_2 + TQ_3) + \\ &\quad (TQ_2 + TQ_3 + TQ_1 + TQ_2 + TQ_3) \\ &= TQ_0 + 3TQ_1 + 4TQ_2 + 4TQ_3 \\ &= -2TQ_0 - TQ_0 - TQ_1 + 4(TQ_0 + TQ_1 + TQ_2 + TQ_3) \\ &= -2\widehat{S}_0 - \widehat{S}_1 + 4\widehat{S}_3\end{aligned}$$

sağlanır. $n = k$ için sağlandığı kabul edilsin, yani

$$\widehat{S}_{k+5} = -2\widehat{S}_k - \widehat{S}_{k+1} + 4\widehat{S}_{k+3}$$

olsun. $n = k + 1$ için

$$\begin{aligned}\widehat{S}_{k+6} &= \widehat{S}_{k+5} + TQ_{k+6} \\ &= -2\widehat{S}_k - \widehat{S}_{k+1} + 4\widehat{S}_{k+3} + TQ_{k+6} \\ &= -2\widehat{S}_k - \widehat{S}_{k+1} + 4\widehat{S}_{k+3} + (TQ_{k+3} + TQ_{k+4} + TQ_{k+5}) \\ &= -2\widehat{S}_k - \widehat{S}_{k+1} + 4\widehat{S}_{k+3} + \\ &\quad (TQ_{k+4} - TQ_{k+2} - TQ_{k+1} + TQ_{k+4} + TQ_{k+4} - TQ_{k+2} - TQ_{k+1} + TQ_{k+4}) \\ &= -2\widehat{S}_{k+1} - \widehat{S}_{k+2} + 4\widehat{S}_{k+4}\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $n \geq 0$ için eşitlik sağlanır.

$m = 5$ için

$$\begin{aligned}\widehat{S}_{n+5} &= -2\widehat{S}_{k+1} - \widehat{S}_{k+2} + 4\widehat{S}_{k+4} \\ &= -S_2\widehat{S}_n - S_1\widehat{S}_{n+1} - S_0\widehat{S}_{n+2} + S_3\widehat{S}_{n+3}\end{aligned}$$

doğrudur. $m = r$ için sağlandığı kabul edilsin, yani

$$\widehat{S}_{n+r} = -S_{r-3}\widehat{S}_n - S_{r-4}\widehat{S}_{n+1} - S_{r-5}\widehat{S}_{n+2} + S_{r-2}\widehat{S}_{n+3}$$

olsun. $m = r + 1$ için

$$\begin{aligned}\widehat{S}_{n+r+1} &= \widehat{S}_{n+r} + TQ_{n+r+1} \\ &= -S_{r-3}\widehat{S}_n - S_{r-4}\widehat{S}_{n+1} - S_{r-5}\widehat{S}_{n+2} + S_{r-2}\widehat{S}_{n+3} + \\ &\quad (TQ_{n+r-2} + TQ_{n+r-1} + TQ_{n+r}) \\ &= -S_{r-2}\widehat{S}_n - S_{r-3}\widehat{S}_{n+1} - S_{r-4}\widehat{S}_{n+2} + S_{r-1}\widehat{S}_{n+3}\end{aligned}$$

olduğundan istenen sonuç elde edilir.

3.3.5. Özdeşlikler 5 in İspatı

$n \geq 2$ için

$$\begin{aligned}& TQ_n^2 - TQ_{n-1}^2 - TQ_nTQ_{n-1} + TQ_{n-1}TQ_n \\ &= [(T_n + T_{n-1}) + (T_{n+1} + T_n)\mathbf{i} + (T_{n+2} + T_{n+1})\mathbf{j} + (T_{n+3} + T_{n+2})\mathbf{k}] \times \\ &\quad [(T_n - T_{n-1}) + (T_{n+1} - T_n)\mathbf{i} + (T_{n+2} - T_{n+1})\mathbf{j} + (T_{n+3} - T_{n+2})\mathbf{k}] \\ &= [(T_n + T_{n-1}) + (T_{n+1} + T_n)\mathbf{i} + (T_{n+2} + T_{n+1})\mathbf{j} + (T_{n+3} + T_{n+2})\mathbf{k}] \times \\ &\quad [(T_{n-2} + T_{n-3}) + (T_{n-1} + T_{n-2})\mathbf{i} + (T_n + T_{n-1})\mathbf{j} + (T_{n+1} + T_n)\mathbf{k}] \\ &= \tilde{U}_{n+1}\tilde{U}_{n-1}\end{aligned}$$

olduğu görülür [4]. Diğer özdeşlikler de kolayca elde edilir.

3.3.6. Özdeşlikler 6 nın İspatı

Burada $n \geq 0$ için sadece

$$\sum_{k=0}^n TQ_k = \frac{TQ_{n+2} + TQ_n + TQ_0 - TQ_2}{2}$$

özdeşliği gösterilecektir. İspat n üzerinden tümevarımla yapılacaktır.

$n = 0$ için

$$TQ_0 = \frac{TQ_2 + TQ_0 + TQ_0 - TQ_2}{2}$$

olup eşitlik sağlanır. $n = m$ için sağlandığı kabul edilsin, yani

$$\sum_{k=0}^m TQ_k = \frac{TQ_{m+2} + TQ_m + TQ_0 - TQ_2}{2}$$

olsun. $n = m + 1$ için

$$\sum_{k=0}^{m+1} TQ_k = \sum_{k=0}^m TQ_k + TQ_{m+1}$$

olup tümevarım hipotezinden

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m TQ_k + TQ_{m+1} &= \frac{TQ_{m+2} + TQ_m + TQ_0 - TQ_2}{2} + TQ_{m+1} \\ &= \frac{TQ_{m+2} + TQ_m + TQ_0 - TQ_2 + 2TQ_{m+1}}{2} \\ &= \frac{TQ_{m+2} + TQ_{m+1} + TQ_m + TQ_{m+1} + TQ_0 - TQ_2}{2} \\ &= \frac{TQ_{m+3} + TQ_{m+1} + TQ_0 - TQ_2}{2} \end{aligned}$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$\sum_{k=0}^{m+1} TQ_k = \frac{TQ_{m+3} + TQ_{m+1} + TQ_0 - TQ_2}{2}$$

elde edilir.

4 . KUATERNİYONLAR: UYGULAMALARLA q –KALKÜLÜS YAKLAŞIMI

Bugüne kadar bileşenleri reel diziler olan kuaterniyon dizileri çalışılmıştır. Bu çalışmalardan esinlenerek bileşenleri kompleks dizilerden seçilen daha genel bir kuaterniyon dizisi ele alınacaktır. Bu bölümde bileşenleri kuantum sayılarını içeren iki tip kuaterniyon dizisi ve kuantum kuaterniyon polinomları tanımlanacaktır. Ayrıca, bu kuantum kuaterniyonlar için bazı özellikler ve özdeşlikler verilecektir. Son olarak, bazı özel kuaterniyon dizileri için zaman evolüsyonu ve dönme uygulamaları da verilecektir.

Bu bölüm boyunca $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $1 - q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ve

$$\begin{aligned}\underline{\alpha} &= 1 + \alpha \mathbf{i} + \alpha^2 \mathbf{j} + \alpha^3 \mathbf{k}, \\ \underline{\beta} &= \mathbf{i} + \alpha [2]_q \mathbf{j} + \alpha^2 [3]_q \mathbf{k}, \\ \underline{\gamma} &= 1 + (\alpha q) \mathbf{i} + (\alpha q)^2 \mathbf{j} + (\alpha q)^3 \mathbf{k}\end{aligned}$$

olarak ele alınacaktır.

4.1. q –Kuaterniyonlar

Bu bölümde öncelikle kuantum Fibonacci kuaterniyon dizisi ve kuantum Lucas kuaterniyon dizisinin tanımları verilecektir. Bu diziler kısaca q –Fibonacci kuaterniyon dizisi ve q –Lucas kuaterniyon dizisi olarak gösterilecektir. Daha sonra bu dizilerin bazı özellikleri verilecek ve bazı özdeşlikler elde edilecektir.

Tanım 4.1.

$$\mathbf{Q}_n = \alpha^{n-1} [n]_q + \alpha^n [n+1]_q \mathbf{i} + \alpha^{n+1} [n+2]_q \mathbf{j} + \alpha^{n+2} [n+3]_q \mathbf{k}$$

formundaki kuaterniyonlara n -inci q -Fibonacci kuaterniyonu ve

$$\mathbf{V}_n = \alpha^n \frac{[2n]_q}{[n]_q} + \alpha^{n+1} \frac{[2n+2]_q}{[n+1]_q} \mathbf{i} + \alpha^{n+2} \frac{[2n+4]_q}{[n+2]_q} \mathbf{j} + \alpha^{n+3} \frac{[2n+6]_q}{[n+3]_q} \mathbf{k}$$

formundaki kuaterniyonlara n -inci q -Lucas kuaterniyonu denir.

Teorem 4.1. q -Fibonacci kuaterniyonu $\mathbf{Q}_n$ nin Binet formu

$$\mathbf{Q}_n = \alpha^{n-1} [n]_q \underline{\alpha} + (\alpha q)^n \underline{\beta}$$

ve q -Lucas kuaterniyonu $\mathbf{V}_n$ nin Binet formu

$$\mathbf{V}_n = \alpha^n \frac{[2n]_q}{[n]_q} \underline{\gamma} + \alpha^{n+1} (1-q) \underline{\beta}$$

şeklindedir.

İspat. Tanım 4.1 den

$$\mathbf{Q}_n = \alpha^{n-1} [n]_q + \alpha^n [n+1]_q \mathbf{i} + \alpha^{n+1} [n+2]_q \mathbf{j} + \alpha^{n+2} [n+3]_q \mathbf{k}$$

olduğundan q -Fibonacci kuaterniyonu $\mathbf{Q}_n$ nin Binet formu

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_n &= \alpha^{n-1} [n]_q + \alpha^n [n+1]_q \mathbf{i} + \alpha^{n+1} [n+2]_q \mathbf{j} + \alpha^{n+2} [n+3]_q \mathbf{k} \\ &= \alpha^{n-1} [n]_q + \alpha^n ([n]_q + q^n) \mathbf{i} + \alpha^{n+1} ([n]_q + q^n [2]_q) \mathbf{j} + \alpha^{n+2} ([n]_q + q^n [3]_q) \mathbf{k} \\ &= \alpha^{n-1} [n]_q (1 + \alpha \mathbf{i} + \alpha^2 \mathbf{j} + \alpha^3 \mathbf{k}) + \alpha^n q^n (\mathbf{i} + \alpha [2]_q \mathbf{j} + \alpha^2 [3]_q \mathbf{k}) \\ &= \alpha^{n-1} [n]_q \underline{\alpha} + (\alpha q)^n \underline{\beta} \end{aligned}$$

şeklindedir. q -Lucas kuaterniyonu $\mathbf{V}_n$ nin Binet formu benzer şekilde elde edilir. $\square$

Not 4.1. $\mathbf{Q}_n$ ve $\mathbf{V}_n$ q -kuaterniyonlarının Binet formülleri başka bir formda daha yazı-

labilir. Tanımdan yola çıkılarak q -Fibonacci kuaterniyonu

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_n &= \alpha^{n-1}[n]_q + \alpha^n[n+1]_q \mathbf{i} + \alpha^{n+1}[n+2]_q \mathbf{j} + \alpha^{n+2}[n+3]_q \mathbf{k} \\
\mathbf{Q}_n &= \alpha^{n-1} \frac{1-q^n}{1-q} + \alpha^n \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \mathbf{i} + \alpha^{n+1} \frac{1-q^{n+2}}{1-q} \mathbf{j} + \alpha^{n+2} \frac{1-q^{n+3}}{1-q} \mathbf{k} \\
\mathbf{Q}_n &= \frac{\alpha^n - (\alpha q)^n}{\alpha - \alpha q} + \frac{\alpha^{n+1} - (\alpha q)^{n+1}}{\alpha - \alpha q} \mathbf{i} + \frac{\alpha^{n+2} - (\alpha q)^{n+2}}{\alpha - \alpha q} \mathbf{j} + \frac{\alpha^{n+3} - (\alpha q)^{n+3}}{\alpha - \alpha q} \mathbf{k} \\
\mathbf{Q}_n &= \frac{\alpha^n}{\alpha - \alpha q} \left(1 + \alpha \mathbf{i} + \alpha^2 \mathbf{j} + \alpha^3 \mathbf{k} \right) - \frac{(\alpha q)^n}{\alpha - \alpha q} \left(1 + (\alpha q) \mathbf{i} + (\alpha q)^2 \mathbf{j} + (\alpha q)^3 \mathbf{k} \right)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Benzer bir düşünce ile q -Lucas kuaterniyonu ise

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_n &= \alpha^n \frac{[2n]_q}{[n]_q} + \alpha^{n+1} \frac{[2n+2]_q}{[n+1]_q} \mathbf{i} + \alpha^{n+2} \frac{[2n+4]_q}{[n+2]_q} \mathbf{j} + \alpha^{n+3} \frac{[2n+6]_q}{[n+3]_q} \mathbf{k} \\
\mathbf{V}_n &= \alpha^n \frac{1-q^{2n}}{1-q} + \alpha^{n+1} \frac{1-q^{2n+2}}{1-q} \mathbf{i} + \alpha^{n+2} \frac{1-q^{2n+4}}{1-q} \mathbf{j} + \alpha^{n+3} \frac{1-q^{2n+6}}{1-q} \mathbf{k} \\
\mathbf{V}_n &= \alpha^n (1+q^n) + \alpha^{n+1} (1+q^{n+1}) \mathbf{i} + \alpha^{n+2} (1+q^{n+2}) \mathbf{j} + \alpha^{n+3} (1+q^{n+3}) \mathbf{k} \\
\mathbf{V}_n &= \alpha^n \left(1 + \alpha \mathbf{i} + \alpha^2 \mathbf{j} + \alpha^3 \mathbf{k} \right) + (\alpha q)^n \left(1 + (\alpha q) \mathbf{i} + (\alpha q)^2 \mathbf{j} + (\alpha q)^3 \mathbf{k} \right)
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Dolayısıyla bu kuaterniyonların Binet formülleri

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_n &= \frac{\alpha^n \underline{\alpha} - (\alpha q)^n \underline{\gamma}}{\alpha(1-q)}, \\
\mathbf{V}_n &= \alpha^n \underline{\alpha} + (\alpha q)^n \underline{\gamma}
\end{aligned} \tag{4.1}$$

formunda ifade edilebilir.

Aşağıdaki teorem q -Fibonacci kuaterniyonu $\mathbf{Q}_n$ ve q -Lucas kuaterniyonu $\mathbf{V}_n$ nin üstel üreteç fonksiyonlarını vermektedir.

Teorem 4.2. q -Fibonacci kuaterniyonu $\mathbf{Q}_n$ nin üstel üreteç fonksiyonu

$$F(x) = \frac{e^{\alpha x} \underline{\alpha} - e^{(\alpha q)x} \underline{\gamma}}{\alpha(1-q)}$$

ve q -Lucas kuaterniyonu $\mathbf{V}_n$ nin üstel üreteç fonksiyonu

$$G(x) = e^{\alpha x} \underline{\alpha} + e^{(\alpha q)x} \underline{\gamma}$$

olarak verilir.

İspat. $\mathbf{Q}_n$ kuaterniyonunun (4.1) de verilen Binet formu ve iyi bilinen

$$e^{\alpha x} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \frac{x^n}{n!}$$

seri açılımı kullanılarak istenen sonuca ulaşılır. q -Lucas kuaterniyonu $\mathbf{V}_n$ nin üstel üreteç fonksiyonu ise benzer şekilde elde edilir. $\square$

Örnek 4.1. $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $q = -\frac{1}{\alpha^2}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_n &= \alpha^{n-1} [n]_q + \alpha^n [n+1]_q \mathbf{i} + \alpha^{n+1} [n+2]_q \mathbf{j} + \alpha^{n+2} [n+3]_q \mathbf{k} \\ \mathbf{Q}_n &= \frac{\alpha^n - (\alpha q)^n}{\alpha - \alpha q} + \frac{\alpha^{n+1} - (\alpha q)^{n+1}}{\alpha - \alpha q} \mathbf{i} + \frac{\alpha^{n+2} - (\alpha q)^{n+2}}{\alpha - \alpha q} \mathbf{j} + \frac{\alpha^{n+3} - (\alpha q)^{n+3}}{\alpha - \alpha q} \mathbf{k} \end{aligned}$$

olduğundan $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $q = -\frac{1}{\alpha^2}$ için $F_n = \frac{\alpha^n - (\alpha q)^n}{\alpha - (\alpha q)}$ eşitliğinden

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_n &= \frac{\alpha^n - (\alpha q)^n}{\alpha - (\alpha q)} + \frac{\alpha^{n+1} - (\alpha q)^{n+1}}{\alpha - (\alpha q)} \mathbf{i} + \frac{\alpha^{n+2} - (\alpha q)^{n+2}}{\alpha - (\alpha q)} \mathbf{j} + \frac{\alpha^{n+3} - (\alpha q)^{n+3}}{\alpha - (\alpha q)} \mathbf{k} \\ \mathbf{Q}_n &= F_n + F_{n+1} \mathbf{i} + F_{n+2} \mathbf{j} + F_{n+3} \mathbf{k}, \end{aligned}$$

olup (1.6) daki $\mathbf{Q}_n$ Fibonacci kuaterniyonları elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_n &= \alpha^n \frac{[2n]_q}{[n]_q} + \alpha^{n+1} \frac{[2n+2]_q}{[n+1]_q} \mathbf{i} + \alpha^{n+2} \frac{[2n+4]_q}{[n+2]_q} \mathbf{j} + \alpha^{n+3} \frac{[2n+6]_q}{[n+3]_q} \mathbf{k} \\ \mathbf{V}_n &= \alpha^n (1 + q^n) + \alpha^{n+1} (1 + q^{n+1}) \mathbf{i} + \alpha^{n+2} (1 + q^{n+2}) \mathbf{j} + \alpha^{n+3} (1 + q^{n+3}) \mathbf{k} \end{aligned}$$

olup $L_n = \alpha^n (1 + q^n)$ eşitliğinden

$$\mathbf{V}_n = L_n + L_{n+1} \mathbf{i} + L_{n+2} \mathbf{j} + L_{n+3} \mathbf{k},$$

yani (1.7) deki K_n Lucas kuaterniyonları elde edilir [19]. $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ ve $q = -\frac{1}{\alpha^2}$ alındığında ise Pell kuaterniyonları QP_n ve Pell-Lucas kuaterniyonları QPL_n elde edilir [7].

Örnek 4.2. $\alpha = 2$ ve $q = -\frac{1}{2}$ olsun. Bu durumda q -Fibonacci kuaterniyonu $\mathbf{Q}_n$

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_n &= \alpha^{n-1}[n]_q + \alpha^n[n+1]_q \mathbf{i} + \alpha^{n+1}[n+2]_q \mathbf{j} + \alpha^{n+2}[n+3]_q \mathbf{k} \\ \mathbf{Q}_n &= \frac{2^n - (-1)^n}{3} + \frac{2^{n+1} - (-1)^{n+1}}{3} \mathbf{i} + \frac{2^{n+2} - (-1)^{n+2}}{3} \mathbf{j} + \frac{2^{n+3} - (-1)^{n+3}}{3} \mathbf{k},\end{aligned}$$

ve q -Lucas kuaterniyonu $\mathbf{V}_n$

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_n &= \alpha^n \frac{[2n]_q}{[n]_q} + \alpha^{n+1} \frac{[2n+2]_q}{[n+1]_q} \mathbf{i} + \alpha^{n+2} \frac{[2n+4]_q}{[n+2]_q} \mathbf{j} + \alpha^{n+3} \frac{[2n+6]_q}{[n+3]_q} \mathbf{k} \\ \mathbf{V}_n &= 2^n + (-1)^n + 2^{n+1} + (-1)^{n+1} \mathbf{i} + 2^{n+2} + (-1)^{n+2} \mathbf{j} + 2^{n+3} + (-1)^{n+3} \mathbf{k}\end{aligned}$$

olur. $p = 1$, $q = 2$ için (1.3) te tanımlanan U_n ve V_n dizileri sırasıyla $\{J_n\}_n$ Jacobsthal dizisi ve $\{j_n\}_n$ Jacobsthal-Lucas dizisi olarak adlandırılır. Bu dizilerin genel terimleri

$$\begin{aligned}J_n &= \frac{2^n - (-1)^n}{3}, \\ j_n &= 2^n + (-1)^n\end{aligned}$$

formundadır. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_n &= \frac{2^n - (-1)^n}{3} + \frac{2^{n+1} - (-1)^{n+1}}{3} \mathbf{i} + \frac{2^{n+2} - (-1)^{n+2}}{3} \mathbf{j} + \frac{2^{n+3} - (-1)^{n+3}}{3} \mathbf{k} \\ \mathbf{Q}_n &= J_n + J_{n+1} \mathbf{i} + J_{n+2} \mathbf{j} + J_{n+3} \mathbf{k}\end{aligned}$$

eşitliğinden JQ_n Jacobsthal kuaterniyonları ve

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_n &= 2^n + (-1)^n + 2^{n+1} + (-1)^{n+1} \mathbf{i} + 2^{n+2} + (-1)^{n+2} \mathbf{j} + 2^{n+3} + (-1)^{n+3} \mathbf{k} \\ \mathbf{V}_n &= j_n + j_{n+1} \mathbf{i} + j_{n+2} \mathbf{j} + j_{n+3} \mathbf{k}\end{aligned}$$

eşitliğinden de JLQ_n Jacobsthal-Lucas kuaterniyonları elde edilir [48].

Sadeleştirme. Örnek 4.1 de $\alpha\sqrt{q} = \mathbf{i}$ olur. Buradan

$$\begin{aligned} a_n &= 1 - q^n - q^{-1/2}(1 - q^{n+1}) \quad \text{ve} \\ b_n &= 1 + q^n - q^{-1/2}(1 + q^{n+1}) \end{aligned}$$

olmak üzere Q_n ve K_n kuaterniyonları bazı hesaplamalar ve sadeleştirmelerden sonra

$$\begin{aligned} Q_n &= \frac{q^{-\frac{n+1}{2}} \mathbf{i}^{n-1}}{1-q} [qa_n - a_{n+2} \mathbf{j}] \quad \text{ve} \\ K_n &= q^{-n/2-1} \mathbf{i}^n [qb_n - b_{n+2} \mathbf{j}] \end{aligned}$$

olarak yeniden yazılabilir. Böylece bu kuaterniyonlar, n tamsayısının mod 4 e indirgenmesine göre

$$Q_n = \frac{1}{1-q} \begin{cases} q^{-2k-1/2} [-qa_{4k} \mathbf{i} + a_{4k+2} \mathbf{k}] & , \quad n = 4k \\ q^{-2k-1} [qa_{4k+1} - a_{4k+3} \mathbf{j}] & , \quad n = 4k + 1 \\ q^{-2k-3/2} [qa_{4k+2} \mathbf{i} - a_{4k+4} \mathbf{k}] & , \quad n = 4k + 2 \\ q^{-2k-2} [-qa_{4k+3} + a_{4k+5} \mathbf{j}] & , \quad n = 4k + 3 \end{cases}$$

ve

$$K_n = \begin{cases} q^{-2k-1} [qb_{4k} - b_{4k+2} \mathbf{j}] & , \quad n = 4k \\ q^{-2k-3/2} [qb_{4k+1} \mathbf{i} - b_{4k+3} \mathbf{k}] & , \quad n = 4k + 1 \\ q^{-2k-2} [-qb_{4k+2} + b_{4k+4} \mathbf{j}] & , \quad n = 4k + 2 \\ q^{-2k-5/2} [-qb_{4k+3} \mathbf{i} + b_{4k+5} \mathbf{k}] & , \quad n = 4k + 3 \end{cases}$$

formlarından birisine eşittir.

Lineerleştirme. $\alpha^2 q = -1$ olsun. Binet form (4.1) den her $n \geq 1$ tamsayısı için

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_n - (\alpha q) \mathbf{Q}_{n-1} &= \frac{\alpha^n \underline{\alpha} - (\alpha q)^n \underline{\gamma}}{\alpha(1-q)} - (\alpha q) \frac{\alpha^{n-1} \underline{\alpha} - (\alpha q)^{n-1} \underline{\gamma}}{\alpha(1-q)} \\ &= \frac{\alpha^n \underline{\alpha} - (\alpha q) \alpha^{n-1} \underline{\alpha}}{\alpha(1-q)} \end{aligned}$$

$$= \frac{\alpha^{n-1}(\alpha - (\alpha q))\underline{\alpha}}{\alpha(1-q)} = \alpha^{n-1}\underline{\alpha} \quad (4.2)$$

ve

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_n - \alpha \mathbf{Q}_{n-1} &= \frac{\alpha^n \underline{\alpha} - (\alpha q)^n \underline{\gamma}}{\alpha(1-q)} - \alpha \frac{\alpha^{n-1} \underline{\alpha} - (\alpha q)^{n-1} \underline{\gamma}}{\alpha(1-q)} \\ &= \frac{\alpha(\alpha q)^{n-1} \underline{\gamma} - (\alpha q)^n \underline{\gamma}}{\alpha(1-q)} \\ &= \frac{(\alpha q)^{n-1}(\alpha - (\alpha q))\underline{\gamma}}{\alpha(1-q)} = (\alpha q)^{n-1} \underline{\gamma} \end{aligned} \quad (4.3)$$

olur. (4.2) denklemini α ile ve (4.3) denklemini αq ile çarparak $\mathbf{Q}_n$ nin

$$\begin{aligned} \alpha^n \underline{\alpha} &= \alpha \mathbf{Q}_n + \mathbf{Q}_{n-1}, \\ (\alpha q)^n \underline{\gamma} &= \alpha q \mathbf{Q}_n + \mathbf{Q}_{n-1} \end{aligned}$$

lineerleştirmesi elde edilir.

Şimdi $\mathbf{Q}_n$ ve $\mathbf{V}_n$ kuantum kuaterniyonlarını içeren bazı toplamsal özdeşlikler incelenecektir. Bu bölümde sadece $\mathbf{Q}_n$ ile ilgili olan özdeşlikler ispatlanacaktır. $\mathbf{V}_n$ ile ilgili olan özdeşlikler ise benzer şekilde ispatlanabilir.

Teorem 4.3. $m, k \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda $\Delta = [\alpha(1-q)]^2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-\alpha^2 q)^{m-n} \mathbf{Q}_{2n+k} &= \begin{cases} \Delta^{m/2} \mathbf{Q}_{m+k} & , \quad m \text{ çift ise} \\ \Delta^{(m-1)/2} \mathbf{V}_{m+k} & , \quad m \text{ tek ise} \end{cases} \\ \text{(ii)} \quad \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-\alpha^2 q)^{m-n} \mathbf{V}_{2n+k} &= \begin{cases} \Delta^{m/2} \mathbf{V}_{m+k} & , \quad m \text{ çift ise} \\ \Delta^{(m+1)/2} \mathbf{Q}_{m+k} & , \quad m \text{ tek ise} \end{cases} \end{aligned}$$

olur.

İspat. Binet form (4.1) den

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-\alpha^2 q)^{m-n} \mathbf{Q}_{2n+k} \\ &= \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-\alpha^2 q)^{m-n} \left(\frac{\alpha^{2n+k} \underline{\alpha} - (\alpha q)^{2n+k} \underline{\gamma}}{\alpha(1-q)} \right) \end{aligned}$$

yazılabilir.

$$\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-\alpha^2 q)^{m-n} (\alpha^2)^n = (\alpha^2 - \alpha^2 q)^m$$

ve

$$\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-\alpha^2 q)^{m-n} ((\alpha q)^2)^n = (\alpha^2 q^2 - \alpha^2 q)^m$$

olduğu gözlemlenebilir. $\alpha^2 - \alpha^2 q = \alpha \sqrt{\Delta}$ ve $\alpha^2 q^2 - \alpha^2 q = -\alpha q \sqrt{\Delta}$ olduğundan

$$S = (\alpha \sqrt{\Delta})^m \frac{\alpha^k \underline{\alpha}}{\alpha(1-q)} - (-\alpha q \sqrt{\Delta})^m \frac{(\alpha q)^k \underline{\gamma}}{\alpha(1-q)}$$

elde edilir. m çift tamsayı ise

$$S = \Delta^{m/2} \left(\frac{\alpha^{m+k} \underline{\alpha} - (\alpha q)^{m+k} \underline{\gamma}}{\alpha(1-q)} \right) = \Delta^{m/2} \mathbf{Q}_{m+k},$$

diğer durumda ise

$$S = \Delta^{(m-1)/2} \left(\alpha^{m+k} \underline{\alpha} + (\alpha q)^{m+k} \underline{\gamma} \right) = \Delta^{(m-1)/2} \mathbf{V}_{m+k}$$

olur. □

Teorem 4.4. $m, k \in \mathbb{N}$ için

- (i) $\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-1)^n (-\alpha^2 q)^{m-n} \mathbf{Q}_{2n+k} = [-\alpha(1+q)]^m \mathbf{Q}_{m+k},$
- (ii) $\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-1)^n (-\alpha^2 q)^{m-n} \mathbf{V}_{2n+k} = [-\alpha(1+q)]^m \mathbf{V}_{m+k}$

olur.

İspat. Binet form (4.1) uygulanırsa

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-1)^n (-\alpha^2 q)^{m-n} \mathbf{Q}_{2n+k} \\
&= \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-1)^n (-\alpha^2 q)^{m-n} \left(\frac{\alpha^{2n+k} \underline{\alpha} - (\alpha q)^{2n+k} \underline{\gamma}}{\alpha(1-q)} \right) \\
&= (-\alpha^2 - \alpha^2 q)^m \frac{\alpha^k \underline{\alpha}}{\alpha(1-q)} - (-(\alpha q)^2 - \alpha^2 q)^m \frac{(\alpha q)^k \underline{\gamma}}{\alpha(1-q)} \\
&= [-\alpha(1+q)]^m \left(\frac{\alpha^{m+k} \underline{\alpha} - (\alpha q)^{m+k} \underline{\gamma}}{\alpha(1-q)} \right) \\
&= [-\alpha(1+q)]^m \mathbf{Q}_{m+k}
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 4.5. $m \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda

- (i) $\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} [\alpha(1+q)]^n (-\alpha^2 q)^{m-n} \mathbf{Q}_n = \mathbf{Q}_{2m},$
- (ii) $\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} [\alpha(1+q)]^n (-\alpha^2 q)^{m-n} \mathbf{V}_n = \mathbf{V}_{2m}$

olur.

İspat. Binet form (4.1) uygulanırsa

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} [\alpha(1+q)]^n (-\alpha^2 q)^{m-n} \mathbf{Q}_n \\
&= \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} [\alpha(1+q)]^n (-\alpha^2 q)^{m-n} \left(\frac{\underline{\alpha} \alpha^n - \underline{\gamma} (\alpha q)^n}{\alpha(1-q)} \right) \\
&= \left(\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} [\alpha^2(1+q)]^n (-\alpha^2 q)^{m-n} \right) \frac{\underline{\alpha}}{\alpha(1-q)} \\
&\quad - \left(\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} [\alpha^2 q(1+q)]^n (-\alpha^2 q)^{m-n} \right) \frac{\underline{\gamma}}{\alpha(1-q)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\alpha^2)^m \frac{\alpha}{\alpha(1-q)} - (\alpha^2 q^2)^m \frac{\gamma}{\alpha(1-q)} \\
&= \mathbf{Q}_{2m}
\end{aligned}$$

olur. □

4.2. q -Kuaterniyon Polinomları

Bu bölümde kuantum kuaterniyon polinomları veya kısaca q -kuaterniyon polinomları $\mathbf{Q}_n(z)$ ve $\mathbf{V}_n(z)$ tanıtılıp bu tipteki polinomların Binet formülleri ve üreteç fonksiyonları bulunacaktır. Aynı zamanda q -kuaterniyon polinom dizileriyle ilgili bazı sonuçlar elde edilecektir. Öncelikle iki q -polinom olan $Q_n(z)$ ve $V_n(z)$ tanımlanacaktır.

Tanım 4.2. $p(z)$ ve $q(z)$ kompleks katsayılı polinomlar olsun. $Q_n(z)$ ve $V_n(z)$ q -polinomları başlangıç koşulları sırasıyla $Q_0(z) = 0$, $Q_1(z) = 1$ ve $V_0(z) = 2$, $V_1(z) = p(z)$ ile verilen

$$\begin{aligned}
Q_{n+2}(z) &= p(z)Q_{n+1}(z) - q(z)Q_n(z) \\
V_{n+2}(z) &= p(z)V_{n+1}(z) - q(z)V_n(z)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

yineleme bağıntıları ile tanımlanırlar.

Örnek 4.3. (i) Sabit tipten bir örnek:

$p(z) = \alpha(q+1)$ ve $q(z) = \alpha^2 q$ olsun. Bu durumda

$$Q_{n+2}(z) = \alpha(q+1)Q_{n+1}(z) - \alpha^2 q Q_n(z)$$

ve

$$V_{n+2}(z) = \alpha(q+1)V_{n+1}(z) - \alpha^2 q V_n(z)$$

polinomları elde edilir.

(ii) Sabit olmayan tipten bir örnek:

$p(z) = h(x)$ reel katsayılı bir polinom ve $q(z) = -1$ olsun. Bu durumda

$$Q_0(x) = 0, \quad Q_1(x) = 1$$

başlangıç koşullu

$$Q_{n+2}(x) = h(x)Q_{n+1}(x) + Q_n(x)$$

polinomları elde edilir. Bu yineleme bağıntısının $h(x)$ –Fibonacci polinomlarını verdiği bilinmektedir. Böylelikle k herhangi bir reel sayı ve $h(x) = k$ için de k –Fibonacci sayılarının elde edildiği görülür. Özel olarak $k = 1$ ve $k = 2$ için sırasıyla Fibonacci sayıları F_n ve Pell sayıları P_n elde edilir.

(4.4) bağıntısının

$$w^2 - p(z)w + q(z) = 0$$

karakteristik denkleminin kökleri

$$\alpha(w) = \frac{p(z) + \sqrt{p(z)^2 - 4q(z)}}{2} \quad \text{ve} \quad \beta(w) = \frac{p(z) - \sqrt{p(z)^2 - 4q(z)}}{2} \quad (4.5)$$

olsun. Bu durumda $Q_n(z)$ ve $V_n(z)$ q –polinomlarının Binet formülleri

$$Q_n(z) = \frac{\alpha(w)^n - \beta(w)^n}{\alpha(w) - \beta(w)} \quad \text{ve} \quad V_n(z) = \alpha(w)^n + \beta(w)^n$$

olarak elde edilir.

Şimdi bileşenleri yukarıda tanımlanan diziler olan iki q –kuaterniyon dizisi tanımlanacaktır.

Tanım 4.3. $\mathbf{Q}_n(z)$ ve $\mathbf{V}_n(z)$ q -kuaterniyon polinomları $n \geq 0$ için

$$\mathbf{Q}_n(z) = Q_n(z) + Q_{n+1}(z)\mathbf{i} + Q_{n+2}(z)\mathbf{j} + Q_{n+3}(z)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{V}_n(z) = V_n(z) + V_{n+1}(z)\mathbf{i} + V_{n+2}(z)\mathbf{j} + V_{n+3}(z)\mathbf{k}$$

yineleme bağıntıları ile tanımlıdır.

$\mathbf{Q}_n(z)$ q -kuaterniyon polinomu için başlangıç koşulları

$$\mathbf{Q}_0(z) = Q_0(z) + Q_1(z)\mathbf{i} + Q_2(z)\mathbf{j} + Q_3(z)\mathbf{k}$$

$$= \mathbf{i} + p(z)\mathbf{j} + (p(z)^2 - q(z))\mathbf{k},$$

$$\mathbf{Q}_1(z) = Q_1(z) + Q_2(z)\mathbf{i} + Q_3(z)\mathbf{j} + Q_4(z)\mathbf{k}$$

$$= 1 + p(z)\mathbf{i} + (p(z)^2 - q(z))\mathbf{j} + (p(z)^3 - 2p(z)q(z))\mathbf{k}$$

olur. $\mathbf{V}_n(z)$ q -kuaterniyon polinomunun başlangıç koşulları ise

$$\mathbf{V}_0(z) = V_0(z) + V_1(z)\mathbf{i} + V_2(z)\mathbf{j} + V_3(z)\mathbf{k}$$

$$= 2 + p(z)\mathbf{i} + (p(z)^2 - 2q(z))\mathbf{j} + (p(z)^3 - 3p(z)q(z))\mathbf{k},$$

$$\mathbf{V}_1(z) = V_1(z) + V_2(z)\mathbf{i} + V_3(z)\mathbf{j} + V_4(z)\mathbf{k}$$

$$= p(z) + (p(z)^2 - 2q(z))\mathbf{i} + (p(z)^3 - 3p(z)q(z))\mathbf{j}$$

$$+ (p(z)^4 - 4p(z)^2q(z) + 2q(z)^2)\mathbf{k}$$

olarak verilir.

Örnek 4.4. $p(z) = h(x)$ reel katsayılı bir polinom olsun. Örnek 4.3 te görüldüğü gibi $Q_n(z)$ q -polinomlarından $h(x)$ - Fibonacci polinomları ve dolayısıyla da $\mathbf{Q}_n(z)$ q -kuaternion polinomlarından $h(x)$ -Fibonacci kuaterniyon polinomları elde edilir.

Teorem 4.6. $\mathbf{Q}_n(z)$ ve $\mathbf{V}_n(z)$ q -kuaterniyon polinomlarının üreteç fonksiyonları sıra-

sıyla

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}F(t) &= \frac{\mathbf{Q}_0(z) + [\mathbf{Q}_1(z) - p(z)\mathbf{Q}_0(z)]t}{1 - p(z)t + q(z)t^2}, \\ \mathbf{V}F(t) &= \frac{\mathbf{V}_0(z) + [\mathbf{V}_1(z) - p(z)\mathbf{V}_0(z)]t}{1 - p(z)t + q(z)t^2}\end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat. q -kuaterniyon polinomu $\mathbf{Q}_n(z)$ için $\mathbf{Q}F(t)$ üreteç fonksiyonu $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{Q}_n(z)t^n$ formundadır. Buradan $-p(z)t$ ve $q(z)t^2$ nin üstel seri açılımı sırasıyla $\sum_{n=0}^{\infty} -p(z)\mathbf{Q}_n(z)t^{n+1}$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} q(z)\mathbf{Q}_n(z)t^{n+2}$ olur. Dolayısıyla

$$(1 - p(z)t + q(z)t^2)\mathbf{Q}F(t) = \mathbf{Q}_0(z) + [\mathbf{Q}_1(z) - p(z)\mathbf{Q}_0(z)]t$$

eşitliğinden

$$\mathbf{Q}F(t) = \frac{\mathbf{Q}_0(z) + [\mathbf{Q}_1(z) - p(z)\mathbf{Q}_0(z)]t}{1 - p(z)t + q(z)t^2}$$

elde edilir. Benzer şekilde q -kuaterniyon polinomu $\mathbf{V}_n(z)$ nin üreteç fonksiyonu

$$\mathbf{V}F(t) = \frac{\mathbf{V}_0(z) + [\mathbf{V}_1(z) - p(z)\mathbf{V}_0(z)]t}{1 - p(z)t + q(z)t^2}$$

olarak bulunur. □

Bu tipteki kuaterniyon polinom dizilerinin Binet formülleri de elde edilebilir.

Notasyon: Bu bölüm boyunca $\alpha(w)$ ve $\beta(w)$ (4.5) te verilen elemanlar olmak üzere

$$\begin{aligned}\underline{\alpha(w)} &= 1 + \alpha(w)\mathbf{i} + \alpha(w)^2\mathbf{j} + \alpha(w)^3\mathbf{k}, \\ \underline{\beta(w)} &= 1 + \beta(w)\mathbf{i} + \beta(w)^2\mathbf{j} + \beta(w)^3\mathbf{k}\end{aligned}$$

olarak ele alınacaktır.

Teorem 4.7. $\mathbf{Q}_n(z)$ ve $\mathbf{V}_n(z)$ q -kuaterniyon polinomlarının Binet formülleri sırasıyla

$$\mathbf{Q}_n(z) = \frac{\alpha(w)^n \underline{\alpha(w)} - \beta(w)^n \underline{\beta(w)}}{\alpha(w) - \beta(w)} \quad (4.6)$$

ve

$$\mathbf{V}_n(z) = \alpha(w)^n \underline{\alpha(w)} + \beta(w)^n \underline{\beta(w)} \quad (4.7)$$

şeklindedir.

Bazı hesaplamaların ardından

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_1(z) - \alpha(w)\mathbf{Q}_0(z) &= \underline{\beta(w)}, \\ \mathbf{Q}_1(z) - \beta(w)\mathbf{Q}_0(z) &= \underline{\alpha(w)}, \\ \mathbf{V}_1(z) - \alpha(w)\mathbf{V}_0(z) &= (\beta(w) - \alpha(w)) \underline{\beta(w)}, \\ \mathbf{V}_1(z) - \beta(w)\mathbf{V}_0(z) &= (\alpha(w) - \beta(w)) \underline{\alpha(w)} \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi $\mathbf{Q}_n(z)$ ve $\mathbf{V}_n(z)$ kuaterniyonlarını içeren bazı toplamsal formüller verilecektir.

Teorem 4.8. $n \in \mathbb{N}$ için

- (i) $\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-q(z))^{m-n} p(z)^n \mathbf{Q}_n(z) = \mathbf{Q}_{2n}(z),$
- (ii) $\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-q(z))^{m-n} p(z)^n \mathbf{V}_n(z) = \mathbf{V}_{2n}(z)$

olur.

İspat. (i) için Binet form (4.6) uygulanırsa

$$\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-q(z))^{m-n} p(z)^n \mathbf{Q}_n(z)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-q(z))^{m-n} p(z)^n \frac{\alpha(w)^n \alpha(w) - \beta(w)^n \beta(w)}{\alpha(w) - \beta(w)} \\
&= \left(\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-q(z))^{m-n} p(z)^n \alpha(w)^n \right) \frac{\alpha(w)}{\alpha(w) - \beta(w)} \\
&\quad - \left(\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-q(z))^{m-n} p(z)^n \beta(w)^n \right) \frac{\beta(w)}{\alpha(w) - \beta(w)} \\
&= (-q(z) + p(z)\alpha(w))^m \frac{\alpha(w)}{\alpha(w) - \beta(w)} \\
&\quad - (-q(z) + p(z)\beta(w))^m \frac{\beta(w)}{\alpha(w) - \beta(w)} \\
&= \frac{\alpha(w)^{2m} \alpha(w) - \beta(w)^{2m} \beta(w)}{\alpha(w) - \beta(w)} \\
&= \mathbf{Q}_{2n}(z)
\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde (ii) de Binet form (4.7) uygulanarak elde edilir. □

4.3. Uygulamalar

Bu bölümde bileşenleri bazı özel tamsayı dizilerinden olan Hamilton kuaterniyonlarını içeren zaman evölüsyonu ve dönme uygulamaları verilecektir.

4.3.1. Zaman Evölüsyonu

Kuaterniyon türev formülü, $\mathbf{q}(t)$ kuaterniyonunun bileşeninin zamana göre türevi ile $\mathbf{w}(t)$ açısal hız vektörünün bileşeni arasında bağ kurar. Daha ayrıntılı bilgi için [42] incelenebilir. $\mathbf{w}(t)$ açısal hız vektörü, skalar kısmı sıfır olan

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}(t) &= w_x(t)\mathbf{i} + w_y(t)\mathbf{j} + w_z(t)\mathbf{k} \\
&= (0, w_x(t), w_y(t), w_z(t))
\end{aligned}$$

kuaterniyonu gibi yazılabilir. Bu durumda birim kuaterniyon $\mathbf{q}(t)$ nin türevi

$$\frac{d\mathbf{q}(t)}{dt} = \frac{1}{2} \mathbf{w}(t) \mathbf{q}(t) \tag{4.8}$$

olur [49].

Şimdi hız vektörü $\mathbf{w}(t) = (0, \sin \theta t, \sin \theta t, \sin \theta t)$ ile $\mathbf{q}_1(t) = (tF_n, tF_{n+1}, tF_{n+2}, tF_{n+3})$ kuaterniyonunun zaman türevi arasında bir ilişki kurulacaktır.

$Q_n = F_n + F_{n+1}\mathbf{i} + F_{n+2}\mathbf{j} + F_{n+3}\mathbf{k}$ kuaterniyonu n -inci Fibonacci kuaterniyon olmak üzere (4.8) den

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{q}_1(t)}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{N(\mathbf{q}_1(t))}} \begin{pmatrix} -tF_{n+3} \sin \theta t \\ \frac{t}{2}F_{n+2} \sin \theta t \\ -\frac{t}{2}F_{n+1} \sin \theta t \\ tF_n \sin \theta t \end{pmatrix}^T \\ &= \frac{1}{\sqrt{N(Q_n)}} \begin{pmatrix} -F_{n+3} \sin \theta t \\ \frac{1}{2}F_{n+2} \sin \theta t \\ -\frac{1}{2}F_{n+1} \sin \theta t \\ F_n \sin \theta t \end{pmatrix}^T \end{aligned}$$

elde edilir.

$\mathbf{w}(t) = (0, \sin \theta t, \sin \theta t, \sin \theta t)$ hız vektörü ve $\mathbf{q}_2(t) = (tF_n, F_{n+1}, F_{n+2}, F_{n+3})$ kuaterniyonu alındığında ise

$$\frac{d\mathbf{q}_2(t)}{dt} = \frac{1}{\sqrt{N(\mathbf{q}_2(t))}} \begin{pmatrix} -F_{n+3} \sin \theta t \\ \frac{1}{2}(F_{n+1} \sin \theta t + tF_n \sin \theta t) \\ \frac{1}{2}(F_{n+2} \sin \theta t + tF_n \sin \theta t) \\ \frac{1}{2}(F_n \sin \theta t + tF_n \sin \theta t) \end{pmatrix}^T$$

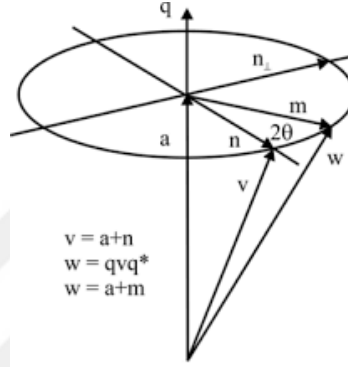
elde edilir.

4.3.2. Dönme

Reel kısmı sıfır olan kuaterniyonlar $\mathbb{R}^3$ teki vektörleri temsil etmek için kullanılır. Yani bir $\mathbf{v}$ vektörü $v_0 = (0, \mathbf{v})$ ile temsil edilir. Birim kuaterniyon q için

$$L_q(\mathbf{v}) = q\mathbf{v}q^*$$

dönüşümünü ele alalım.



Dönme operatörü geometrisi

$L_q(\mathbf{v})$ operatörünün $\mathbb{R}^3$ üzerinde lineer olduğu kolaylıkla görülebilir. Herhangi bir $\mathbf{v}$ vektörü için, bu operatörün $\mathbf{v}$ üzerindeki hareketi, vektörün $\hat{\mathbf{u}}$ dönme eksenini olarak θ açısı boyunca dönmesine eşdeğerdir. q kuaterniyonunun dönme altında korunduğu görülebilir. Bazı hesaplamalardan sonra q kuaterniyonu

$$q = \cos \frac{\theta}{2} + \hat{\mathbf{u}} \sin \frac{\theta}{2}$$

şeklinde yazılabilir. Bir $\mathbf{v}$ vektörü $\hat{\mathbf{u}}$ eksenini etrafında θ açısı kadar döndürüldüğünde

$$L_q(\mathbf{v}) = (\cos \theta)\mathbf{v} + (1 - \cos \theta)(\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v})\hat{\mathbf{u}} + \sin \theta(\hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{v}) \quad (4.9)$$

elde edilir. $-q$ kuaterniyonu aynı dönmeyi temsil eder ve dönmelerin bileşimi, kuaterniyonların çarpmasına karşılık gelir [49].

1. r reel sayısı ve $W_n(a, b; p, q)$ genelleştirilmiş Fibonacci dizisi için, $q = (r, r, r, r)$

ve $Q'_n = W_n + W_{n+1}\mathbf{i} + W_{n+2}\mathbf{j} + W_{n+3}\mathbf{k}$ olsun. Bu durumda

$$qQ_nq^{-1} = (W_n, W_{n+2}, W_{n+1}, W_{n+3})$$

şeklindedir.

2. $Q_n = F_n + F_{n+1}\mathbf{i} + F_{n+2}\mathbf{j} + F_{n+3}\mathbf{k}$ n -inci Fibonacci kuaterniyonunu ele alınsın.

Rotasyon sonucunda elde edilen kuaterniyon, yani her n, k doğal sayıları için

$$Q_kQ_nQ_k^{-1}$$

kuaterniyonu bulunacaktır. $Q_kQ_nQ_k^{-1} = (a, b, c, d)$ olsun. Buradan

$$a = F_n$$

olduğu görülür. Diğer bileşenler ise $U_{n,1}, V_{n,1}, T_{n,1}$ Fibonacci dizileri

$$U_{n,1} = 6F_{n+2}$$

$$V_{n,1} = W_n(-5, -9; 1, 1)$$

$$T_{n,1} = -F_{n+1}$$

ve

$$f(n, x) = \frac{U_{n,1} + V_{n,1}x + T_{n,1}x^2}{1 - 2x - 2x^2 + x^3}$$

olmak üzere

$$b = \frac{1}{k!3F_{2k+3}} \frac{d^k f(n, x)}{dx^k} \Big|_{x=0},$$

$U_{n,2}, V_{n,2}, T_{n,2}$ Fibonacci dizileri

$$U_{n,2} = 6F_{n+1}$$

$$V_{n,2} = W_n(13, 18; 1, 1)$$

$$T_{n,2} = W_n(-7, -10; 1, 1)$$

ve

$$g(n, x) = \frac{U_{n,2} + V_{n,2}x + T_{n,2}x^2}{1 - 2x - 2x^2 + x^3}$$

olmak üzere

$$c = \frac{1}{k!3F_{2k+3}} \frac{d^k g(n, x)}{dx} \Big|_{x=0},$$

ve son olarak $U_{n,3}$, $V_{n,3}$, $T_{n,3}$ Fibonacci dizileri

$$U_{n,3} = 6F_{n+3}$$

$$V_{n,3} = W_n(2, 9; 1, 1)$$

$$T_{n,3} = W_n(-2, -5; 1, 1)$$

ve

$$h(n, x) = \frac{U_{n,3} + V_{n,3}x + T_{n,3}x^2}{1 - 2x - 2x^2 + x^3}$$

olmak üzere

$$d = \frac{1}{k!3F_{2k+3}} \frac{d^k h(n, x)}{dx} \Big|_{x=0}$$

şeklinde bulunur.

3. k bir doğal sayı olmak üzere $\mathbf{v} = (F_{4k+2}, F_{4k+3}, F_{4k+4})$ olsun. $(1, 1, 1)$ eksenini etrafında π açısı kadar dönme ele alınsın. Dolayısıyla $\pi + 2n\pi$ açısı için de geçerli olacaktır. $\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ birim vektörü için (4.9) dan

$$\begin{aligned} L_q(\mathbf{v}) &= (F_{4k+4} - \frac{1}{3}F_{4k}, F_{4k+2} + \frac{1}{3}F_{4k+4}, \frac{1}{3}F_{4k+4}) \\ &= \frac{1}{3}(3F_{4k+4} - F_{4k}, 3F_{4k+2} + F_{4k+4}, F_{4k+4}) \end{aligned}$$

elde edilir. $\theta = \frac{\pi}{2}$ ve $\mathbf{v} = (F_{4k+2}, F_{4k+3}, F_{4k+4})$ için $(1, 1, 1)$ eksenini etrafında θ

açısı kadar dönme ise

$$L_q(\mathbf{v}) = \frac{2}{3}F_{4k+4}(1, 1, 1) + \frac{1}{\sqrt{3}}(F_{4k+2}, -F_{4k+3}, F_{4k+1})$$

olur.



5 . KÖKLERİ İKİNCİ MERTEBEDEN KUATERNİYON DİZİLERİ CİNSİNDEN VERİLEN BAZI YENİ İKİNCİ DERECEDEKİ KUATERNİYONİK DENKLEMLER

Bugüne kadar kuaterniyon cebirleri üzerindeki denklemlerin çözümlerini bulmak için birçok metod sunulmuştur. Kuaterniyonlarda çarpma işlemi değişmeli olmadığından kuaterniyonik denklemlerle çalışmak kompleks cebir üzerindeki denklemlerle çalışmaktan daha zordur. Bu bölümde Niven, Serôdio ve Zhigang [40, 44, 51] tarafından verilen metodlar kullanılarak ikinci dereceden monik bazı kuaterniyonik polinomların kuaterniyon kökleri bulunacaktır.

5.1. Ana Teoremler

Teorem 5.1. y bir Fibonacci kuaterniyon olmak üzere

$$p(x, y) = x^2 + xy - y^2 - 2 - 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k} \quad (5.1)$$

polinomunun tamsayı katsayılı tek kuaterniyon kökleri $(x, y) = (Q_{2n-1}, Q_{2n})$ olarak verilir.

İspat. $y = Q_{2n}$ olsun. Bu durumda (5.1) de verilen kuaterniyon polinomunun ilgili olduğu matris

$$C = \begin{bmatrix} 0 & Q_{2n}^2 + 2 + 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k} \\ 1 & -Q_{2n} \end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir.

$$\begin{aligned} Q_{2n}^2 &= -N(Q_{2n}) + 2F_{2n}^2 + 2F_{2n+1}F_{2n}\mathbf{i} + 2F_{2n+2}F_{2n}\mathbf{j} + 2F_{2n+3}F_{2n}\mathbf{k} \\ &= -3F_{4n+3} + 2F_{2n}^2 + 2F_{2n+1}F_{2n}\mathbf{i} + 2F_{2n+2}F_{2n}\mathbf{j} + 2F_{2n+3}F_{2n}\mathbf{k} \end{aligned} \quad (5.2)$$

olduğundan C matrisinde (5.2) yerine yazıldığında

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 - 3F_{4n+3} + 2F_{2n}^2 + (2 + 2F_{2n+1}F_{2n})\mathbf{i} \\ 1 & -F_{2n} - F_{2n+1}\mathbf{i} \end{bmatrix}$$

ve

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & (4 + 2F_{2n+2}F_{2n}) + (3 + 2F_{2n+3}F_{2n})\mathbf{i} \\ 0 & -F_{2n+2} - F_{2n+3}\mathbf{i} \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$C = C_1 + C_2\mathbf{j}$$

elde edilir. Buradan C matrisinin sağ özdeğerleri kompleks girişli 4×4

$$A = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ -C_2^* & C_1^* \end{bmatrix}$$

matrisinin özdeğerleridir. A matrisinin karakteristik polinomu

$$\begin{aligned} h(x) = & x^4 + 2F_{2n}x^3 + (3(F_{4n+5} + F_{4n+1}) - 4F_{2n-1}F_{2n+1})x^2 + \\ & 6(F_{2n+1}F_{4n+1} - F_{2n-1}F_{4n+5})x + 9F_{4n+1}F_{4n+5} \end{aligned}$$

olup $h(x)$ polinomunun çarpanlarına ayrılmış hali

$$h(x) = (x^2 - 2F_{2n-1}x + 3F_{4n+1})(x^2 + 2F_{2n+1}x + 3F_{4n+5})$$

şeklindedir. Dolayısıyla bu matrisin özdeğerlerinin

m	λ_m	$\mathbf{t}$	$\mathbf{n}$
1	$-F_{2n+1} \mp \mathbf{i}\sqrt{F_{2n+2}^2 + F_{2n+3}^2 + F_{2n+4}^2}$	$-2F_{2n+1}$	$3F_{4n+5}$
2	$F_{2n-1} \mp \mathbf{i}\sqrt{F_{2n}^2 + F_{2n+1}^2 + F_{2n+2}^2}$	$2F_{2n-1}$	$3F_{4n+1}$

formunda olduğu görülür. (5.1) polinomunu soldan $x^2 - 2F_{2n-1}x + 3F_{4n+1}$ polinomuna bölerek

$$\begin{aligned} 0 &= x(2F_{2n-1} + F_{2n} + F_{2n+1}\mathbf{i} + F_{2n+2}\mathbf{j} + F_{2n+3}\mathbf{k}) - \\ &\quad [3F_{4n+1} + 2 - N(Q_{2n}) + 2F_{2n}^2 + (2 + 2F_{2n+1}F_{2n})\mathbf{i} + \\ &\quad (4 + 2F_{2n+2}F_{2n})\mathbf{j} + (3 + 2F_{2n+3}F_{2n})\mathbf{k}] \end{aligned}$$

elde edilir ve buradan

$$\begin{aligned} x &= [(3F_{4n+1} + 2 - 3F_{4n+3}) + 2F_{2n}^2 + (2 + 2F_{2n+1}F_{2n})\mathbf{i} + \\ &\quad (4 + 2F_{2n+2}F_{2n})\mathbf{j} + (3 + 2F_{2n+3}F_{2n})\mathbf{k}] \times \\ &\quad \frac{1}{2F_{2n-1} + F_{2n} + F_{2n+1}\mathbf{i} + F_{2n+2}\mathbf{j} + F_{2n+3}\mathbf{k}} \\ &= (3F_{4n+1} + 2 - 3F_{4n+3}) + 2F_{2n}^2 + (2 + 2F_{2n+1}F_{2n})\mathbf{i} + \\ &\quad (4 + 2F_{2n+2}F_{2n})\mathbf{j} + (3 + 2F_{2n+3}F_{2n})\mathbf{k} \times \\ &\quad \frac{1}{L_{2n} + F_{2n+1}\mathbf{i} + F_{2n+2}\mathbf{j} + F_{2n+3}\mathbf{k}} \\ &= \frac{(L_{2n}^2 + F_{2n+1}^2 + F_{2n+2}^2 + F_{2n+3}^2)Q_{2n-1}}{(L_{2n}^2 + F_{2n+1}^2 + F_{2n+2}^2 + F_{2n+3}^2)} \\ &= Q_{2n-1} \end{aligned}$$

bulunur. (5.1) polinomunu soldan $x^2 + 2F_{2n+1}x + 3F_{4n+5}$ polinomuna bölerek

$$\begin{aligned} 0 &= x(-2F_{2n+1} + F_{2n} + F_{2n+1}\mathbf{i} + F_{2n+2}\mathbf{j} + F_{2n+3}\mathbf{k}) - \\ &\quad [3F_{4n+5} + 2 - 3F_{4n+3} + 2F_{2n}^2 + (2 + 2F_{2n+1}F_{2n})\mathbf{i} + \\ &\quad (4 + 2F_{2n+2}F_{2n})\mathbf{j} + (6 + 2F_{2n+3}F_{2n})\mathbf{k}] \end{aligned}$$

yazılır ve buradan da

$$\begin{aligned} x &= [3F_{4n+5} + 2 - 3F_{4n+3} + 2F_{2n}^2 + (2 + 2F_{2n+1}F_{2n})\mathbf{i} + \\ &\quad (4 + 2F_{2n+2}F_{2n})\mathbf{j} + (3 + 2F_{2n+3}F_{2n})\mathbf{k}] \times \\ &\quad \frac{1}{-2F_{2n+1} + F_{2n} + F_{2n+1}\mathbf{i} + F_{2n+2}\mathbf{j} + F_{2n+3}\mathbf{k}} \\ &= [3F_{4n+5} + 2 - 3F_{4n+3} + 2F_{2n}^2 + (2 + 2F_{2n+1}F_{2n})\mathbf{i} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(4 + 2F_{2n+2}F_{2n})\mathbf{j} + (3 + 2F_{2n+3}F_{2n})\mathbf{k}}{1} \times \\
& \frac{-L_{2n} + F_{2n+1}\mathbf{i} + F_{2n+2}\mathbf{j} + F_{2n+3}\mathbf{k}}{-L_{2n} + F_{2n+1}\mathbf{i} + F_{2n+2}\mathbf{j} + F_{2n+3}\mathbf{k}} \\
= & [(-3F_{4n+1} - 2 + 3F_{4n+3} + L_{2n}^2 + F_{2n+1}^2 + F_{2n+2}^2 + F_{2n+3}^2 - 2F_{2n}^2) + \\
& (2 + 2F_{2n+1}F_{2n})\mathbf{i} + (4 + 2F_{2n+2}F_{2n})\mathbf{j} + (3 + 2F_{2n+3}F_{2n})\mathbf{k}] \times \\
& \frac{1}{-L_{2n} + F_{2n+1}\mathbf{i} + F_{2n+2}\mathbf{j} + F_{2n+3}\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Ancak bu denklemden tamsayı katsayılı kuaterniyon çözümü elde edilemez. $y = Q_{2n+1}$ olsun. Bu durumda (5.1) kuaterniyon polinomu ile ilgili olan matrisin özdeğerlerinin izi ve normu tamsayı olmayacaktır. Polinomu bu özdeğerlere karşılık gelen karakteristik polinoma bölündüğünde ise tamsayı katsayılı kuaterniyon çözümü elde edilemez. $\square$

Teorem 5.2. y bir Fibonacci kuaterniyon olmak üzere

$$p(x, y) = x^2 + xy - y^2 + 2 + 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \quad (5.3)$$

polinomunun tamsayı katsayılı tek kuaterniyon kökleri $(x, y) = (Q_{2n}, Q_{2n+1})$ olarak verilir.

İspat. $y = Q_{2n+1}$ olsun. Bu durumda (5.3) te verilen kuaterniyon polinomunun ilgili olduğu matris

$$C = \begin{bmatrix} 0 & Q_{2n+1}^2 - 2 - 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k} \\ 1 & -Q_{2n+1} \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

$$\begin{aligned}
Q_{2n+1}^2 &= -N(Q_{2n+1}) + 2F_{2n+1}^2 + 2F_{2n+1}F_{2n+2}\mathbf{i} + 2F_{2n+1}F_{2n+3}\mathbf{j} + 2F_{2n+1}F_{2n+4}\mathbf{k} \\
&= -3F_{4n+5} + 2F_{2n+1}^2 + 2F_{2n+1}F_{2n+2}\mathbf{i} + 2F_{2n+1}F_{2n+3}\mathbf{j} + 2F_{2n+1}F_{2n+4}\mathbf{k} \quad (5.4)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2 - 3F_{4n+5} + 2F_{2n+1}^2 + (-2 + 2F_{2n+1}F_{2n+2})\mathbf{i} \\ 1 & -F_{2n+1} - F_{2n+2}\mathbf{i} \end{bmatrix}$$

ve

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & (-4 + 2F_{2n+1}F_{2n+3}) + (-3 + 2F_{2n+1}F_{2n+4})\mathbf{i} \\ 0 & -F_{2n+3} - F_{2n+4}\mathbf{i} \end{bmatrix}$$

olmak üzere C matrisinin sağ özdeğerleri kompleks girişli 4×4

$$A = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ -C_2^* & C_1^* \end{bmatrix}$$

matrisinin özdeğerleridir. Buradan A matrisinin karakteristik polinomu

$$h(x) = x^4 + 2F_{2n+1}x^3 + (3(F_{4n+7} + F_{4n+3}) - 4F_{2n}F_{2n+2})x^2 + 6(F_{2n+2}F_{4n+3} - F_{2n}F_{4n+7})x + 9F_{4n+3}F_{4n+7}$$

olup $h(x)$ polinomu

$$h(x) = (x^2 - 2F_{2n}x + 3F_{4n+3})(x^2 + 2F_{2n+2}x + 3F_{4n+7})$$

şeklinde çarpanlarına ayrılır. Böylelikle özdeğerler

m	λ_m	$\mathbf{t}$	$\mathbf{n}$
1	$F_{2n} \mp \mathbf{i}\sqrt{F_{2n+1}^2 + F_{2n+2}^2 + F_{2n+3}^2}$	$2F_{2n}$	$3F_{4n+3}$
2	$-F_{2n+2} \mp \mathbf{i}\sqrt{F_{2n+3}^2 + F_{2n+4}^2 + F_{2n+5}^2}$	$-2F_{2n+2}$	$3F_{4n+7}$

şeklinde elde edilir. (5.3) polinomu soldan $x^2 - 2F_{2n}x + 3F_{4n+3}$ polinomuna bölündüğünde $x = Q_{2n}$, (5.3) polinomu soldan $x^2 + 2F_{2n+2}x + 3F_{4n+7}$ polinomuna bölündüğünde ise tamsayı katsayılı olmayan yeni bir kuaterniyon çözümü elde edilir.

$y = Q_{2n}$ durumunda ise Teorem 5.1 de olduğu gibi tamsayı katsayılı kuaterniyon çözümünü elde edilemez. $\square$

Şimdi

$$\begin{aligned}x^2 - 3xy + y^2 + 2 + 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + \mathbf{k} &= 0, \\x^2 - 3xy + y^2 - 2 - 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - \mathbf{k} &= 0\end{aligned}$$

denklemlerinin çözümleri ile ilgilenilecektir.

Teorem 5.3. (i) y bir Fibonacci kuaterniyon olmak üzere

$$p(x, y) = x^2 - 3xy + y^2 + 2 + 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + \mathbf{k} \quad (5.5)$$

polinomunun tamsayı katsayılı tek kuaterniyon kökleri $(x, y) = (Q_{2n-1}, Q_{2n+1})$ olarak verilir.

(ii) y bir Fibonacci kuaterniyon olmak üzere

$$p(x, y) = x^2 - 3xy + y^2 - 2 - 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

polinomunun tamsayı katsayılı tek kuaterniyon kökleri $(x, y) = (Q_{2n}, Q_{2n+2})$ olarak verilir.

İspat. Sadece (i) şıkkının ispatı verilecektir. Benzer şekilde (ii) yapılabilir. $y = Q_{2n+1}$ olsun. Bu durumda denklem (5.5) te verilen kuaterniyon polinomunun ilgili olduğu matris

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -Q_{2n+1}^2 - 2 - 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - \mathbf{k} \\ 1 & 3Q_{2n+1} \end{bmatrix}$$

olacaktır. (5.4) denklemini kullanarak

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & (-2 + 3F_{4n+5} - 2F_{2n+1}^2) + (-4 - 2F_{2n+1}F_{2n+2})\mathbf{i} \\ 1 & -3F_{2n+1} - 3F_{2n+2}\mathbf{i} \end{bmatrix}$$

ve

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & (-6 - 2F_{2n+1}F_{2n+3}) + (-1 - 2F_{2n+1}F_{2n+4})\mathbf{i} \\ 0 & -3F_{2n+3} - 3F_{2n+4}\mathbf{i} \end{bmatrix}$$

olmak üzere C matrisinin sağ özdeğerleri kompleks girişli 4×4

$$A = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ -C_2^* & C_1^* \end{bmatrix}$$

matrisinin özdeğerleri olduğu görülebilir. Buradan A matrisinin karakteristik polinomu

$$\begin{aligned} h(x) = & x^4 - 6F_{2n-1}x^3 + (3(F_{4n+5} + F_{4n-3}) + 4F_{2n-3}F_{2n+1})x^2 - \\ & 6(F_{2n-3}F_{4n+5} - F_{2n+1}F_{4n-3})x + 9F_{4n-3}F_{4n+5} \end{aligned}$$

olup $h(x)$ polinomu

$$h(x) = (x^2 - 2F_{2n-1}x + 3F_{4n+1})(x^2 - 2F_{2n+3}x + 3F_{4n+9})$$

şeklinde çarpanlarına ayrılır. Böylelikle özdeğerler

m	λ_m	$\mathbf{t}$	$\mathbf{n}$
1	$F_{2n-1} \mp \mathbf{i}\sqrt{F_{2n}^2 + F_{2n+1}^2 + F_{2n+2}^2}$	$2F_{2n-1}$	$3F_{4n+1}$
2	$F_{2n+3} \mp \mathbf{i}\sqrt{F_{2n+4}^2 + F_{2n+5}^2 + F_{2n+6}^2}$	$2F_{2n+3}$	$3F_{4n+9}$

olarak elde edilir. (5.5) polinomu soldan $x^2 - 2F_{2n-1}x + 3F_{4n+1}$ polinomuna bölündüğünde $x = Q_{2n-1}$, (5.5) polinomu soldan $x^2 - 2F_{2n+3}x + 3F_{4n+9}$ polinomuna bölündüğünde ise tamsayı katsayılı olmayan yeni bir kuaterniyon çözümü elde edilir.

$y = Q_{2n}$ durumunda ise Teorem 5.1 de olduğu gibi tamsayı katsayılı kuaterniyon çözümlü elde edilemez. $\square$

Bunların dışında ilgilenilen diğer iki denklem

$$\begin{aligned} x^2 + 2xy - y^2 - 6F_{2n}y + 9F_{4n+2} + 2 + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k} &= 0, \\ x^2 + 2xy - y^2 - 6F_{2n+1}y + 9F_{4n+4} - 2 - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k} &= 0 \end{aligned}$$

şeklindedir.

Teorem 5.4. (i) y bir Fibonacci kuaterniyon olmak üzere

$$p(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 - 6F_{2n}y + 9F_{4n+2} + 2 + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$$

polinomunun tamsayı katsayılı tek kuaterniyon kökleri $(x, y) = (Q_{2n}, Q_{2n-1})$ olarak verilir.

(ii) y bir Fibonacci kuaterniyon olmak üzere

$$p(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 - 6F_{2n+1}y + 9F_{4n+4} - 2 - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

polinomunun tamsayı katsayılı tek kuaterniyon kökleri $(x, y) = (Q_{2n+1}, Q_{2n})$ olarak verilir.

İspat. Teorem 5.1 in ispatında olduğu gibi ilgili olunan eş matrisler yazılarak istenen sonuç elde edilir. $\square$

Şimdi her biri tamsayı katsayılı kuaterniyon çözümüne sahip olan dört denklem daha ele alınacaktır. Bu denklemler

$$\begin{aligned} x^2 - 12F_{2n}x + y^2 + 18F_{4n+3} - 8 - 4\mathbf{i} - 12\mathbf{j} - 16\mathbf{k} &= 0, \\ x^2 - 12F_{2n+1}x + y^2 + 18F_{4n+5} + 8 + 4\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 16\mathbf{k} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^2 + 8F_{2n}x - y^2 - 12F_{4n+3} + 8 + 4\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 16\mathbf{k} &= 0, \\
x^2 + 8F_{2n+1}x - y^2 - 12F_{4n+5} - 8 - 4\mathbf{i} - 12\mathbf{j} - 16\mathbf{k} &= 0
\end{aligned}$$

şeklinde olup çözümleri Teorem 5.5 ve Teorem 5.6 da verilmiştir.

Teorem 5.5. (i) y bir Lucas kuaterniyon olmak üzere

$$p(x, y) = x^2 - 12F_{2n}x + y^2 + 18F_{4n+3} - 8 - 4\mathbf{i} - 12\mathbf{j} - 16\mathbf{k} \quad (5.6)$$

polinomunun tamsayı katsayılı tek kuaterniyon kökleri $(x, y) = (Q_{2n}, K_{2n})$ ve $(x, y) = (12F_{2n} - Q_{2n}, K_{2n})$ olarak verilir.

(ii) y bir Lucas kuaterniyon olmak üzere

$$p(x, y) = x^2 - 12F_{2n+1}x + y^2 + 18F_{4n+5} + 8 + 4\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 16\mathbf{k} \quad (5.7)$$

polinomunun tamsayı katsayılı tek kuaterniyon kökleri $(x, y) = (Q_{2n+1}, K_{2n+1})$ ve $(x, y) = (12F_{2n+1} - Q_{2n+1}, K_{2n+1})$ olarak verilir.

İspat. Öncelikle (i) ispatlanacaktır. $y = K_{2n}$ olsun. Gerekli işlemler yapıldığında

$$\begin{aligned}
K_{2n}^2 &= -N(K_{2n}) + 2L_{2n}^2 + 2L_{2n}L_{2n+1}\mathbf{i} + 2L_{2n}L_{2n+2}\mathbf{j} + 2L_{2n}L_{2n+3}\mathbf{k} \\
&= -15F_{4n+3} + 2L_{2n}^2 + 2L_{2n}L_{2n+1}\mathbf{i} + 2L_{2n}L_{2n+2}\mathbf{j} + 2L_{2n}L_{2n+3}\mathbf{k} \quad (5.8)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
K_{2n+1}^2 &= -N(K_{2n+1}) + 2L_{2n+1}^2 + 2L_{2n+1}L_{2n+2}\mathbf{i} + 2L_{2n+1}L_{2n+3}\mathbf{j} + 2L_{2n+1}L_{2n+4}\mathbf{k} \\
&= -15F_{4n+5} + 2L_{2n+1}^2 + 2L_{2n+1}L_{2n+2}\mathbf{i} + 2L_{2n+1}L_{2n+3}\mathbf{j} + 2L_{2n+1}L_{2n+4}\mathbf{k} \quad (5.9)
\end{aligned}$$

olduğu kolaylıkla görülebilir.

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & (-3F_{4n+3} - 2L_{2n}^2 + 8) + (4 - 2L_{2n}L_{2n+1})\mathbf{i} \\ 1 & 12F_{2n} \end{bmatrix}$$

ve

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & (12 - 2L_{2n}L_{2n+2}) + (16 - 2L_{2n}L_{2n+3})\mathbf{i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere (5.6) da verilen kuaterniyon polinomunun ilgili olduğu 4×4 matris

$$A = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ -C_2^* & C_1^* \end{bmatrix}$$

kompleks girişli matrisidir. Buradan A matrisinin karakteristik polinomu $h(x)$

$$h(x) = (x^2 - 2F_{2n}x + 3F_{4n+3})(x^2 - 22F_{2n-1}x + 3F_{4n+3} + 120F_{2n}^2)$$

şeklinde çarpanlarına ayrılır. Böylelikle özdeğerler

m	λ_m	$\mathbf{t}$	$\mathbf{n}$
1	$F_{2n} \mp \mathbf{i}\sqrt{F_{2n+1}^2 + F_{2n+2}^2 + F_{2n+3}^2}$	$2F_{2n}$	$3F_{4n+3}$
2	$11F_{2n} \mp \mathbf{i}\sqrt{F_{2n+1}^2 + F_{2n+2}^2 + F_{2n+3}^2}$	$22F_{2n}$	$3F_{4n+3} + 120F_{2n}^2$

olarak elde edilir. (5.6) polinomu soldan $x^2 - 2F_{2n}x + 3F_{4n+3}$ polinomuna bölündüğünde

$$0 = x(-10F_{2n}) + (K_{2n}^2 + 15F_{4n+3} - 8 - 4\mathbf{i} - 12\mathbf{j} - 16\mathbf{k})$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$x = \frac{(K_{2n}^2 + 15F_{4n+3} - 8 - 4\mathbf{i} - 12\mathbf{j} - 16\mathbf{k})}{10F_{2n}} = Q_{2n}$$

yazılabilir. Diğer kök ise (5.6) polinomunu soldan $x^2 - 22F_{2n-1}x + 3F_{4n+3} + 120F_{2n}^2$ polinomuna bölündüğünde

$$x = 12F_{2n} - Q_{2n}$$

olarak bulunur. $y = K_{2n+1}$ olsun. Bu durumda (5.6) ile verilen kuaterniyon polinomunun ilgili olduğu eş matrisin izi ve özdeğerlerin normu tamsayı olmayacaktır. Polinom bu özdeğerlere karşılık gelen karakteristik polinomlara bölündüğünde tamsayı katsayılı kuaterniyon çözümleri elde edilemez.

Şimdi (ii) ispatlanacaktır. $y = K_{2n+1}$ olsun. Denklem (5.9) kullanılarak (5.7) polinomu ile ilgili olan eş matris yazılabilir. Karşılık gelen 4×4 kompleks girişli matrisin karakteristik polinomu

$$h'(x) = (x^2 - 2F_{2n+1}x + 3F_{4n+5})(x^2 - 22F_{2n+1}x + 3F_{4n+5} + 120F_{2n+1}^2)$$

şeklinde dir. Dolayısıyla özdeğerler

m	λ_m	$\mathbf{t}$	$\mathbf{n}$
1	$F_{2n+1} \mp \mathbf{i}\sqrt{F_{2n+2}^2 + F_{2n+3}^2 + F_{2n+4}^2}$	$2F_{2n+1}$	$3F_{4n+5}$
2	$11F_{2n+1} \mp \mathbf{i}\sqrt{F_{2n+2}^2 + F_{2n+3}^2 + F_{2n+4}^2}$	$22F_{2n+1}$	$3F_{4n+5} + 120F_{2n+1}^2$

olacaktır. Buradan kökler

$$x = Q_{2n+1},$$

$$x = 12F_{2n+1} - Q_{2n+1}$$

olarak elde edilir. $y = K_{2n}$ olsun. Bu durumda (i) şikkında olduğu gibi tamsayı katsayılı kuaterniyon çözümleri elde edilemez. $\square$

Teorem 5.6. (i) y bir Lucas kuaterniyon olmak üzere

$$p(x, y) = x^2 + 8F_{2n}x - y^2 - 12F_{4n+3} + 8 + 4\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 16\mathbf{k} \quad (5.10)$$

polinomunun tamsayı katsayılı tek kuaterniyon kökleri $(x, y) = (Q_{2n}, K_{2n})$ ve $(x, y) = (-8F_{2n} - Q_{2n}, K_{2n})$ olarak verilir.

(ii) y bir Lucas kuaterniyon olmak üzere

$$p(x, y) = x^2 + 8F_{2n+1}x - y^2 - 12F_{4n+5} - 8 - 4\mathbf{i} - 12\mathbf{j} - 16\mathbf{k} \quad (5.11)$$

polinomunun tamsayı katsayılı tek kuaterniyon kökleri $(x, y) = (Q_{2n+1}, K_{2n+1})$ ve $(x, y) = (-8F_{2n+1} - Q_{2n+1}, K_{2n+1})$ olarak verilir.

İspat. (5.8) ve (5.9) kullanılarak (5.10) ve (5.11) polinomlarına karşılık gelen 4×4 kompleks girişli matrisleri yazılabilir. (5.10) polinomuna karşılık gelen matrisin karakteristik polinomu

$$(x^2 - 2F_{2n}x + 3F_{4n+3})(x^2 + 18F_{2n}x + 3F_{4n+3} + 80F_{2n}^2)$$

olur. Buradan özdeğerler

m	λ_m	$\mathbf{t}$	$\mathbf{n}$
1	$F_{2n} \mp \mathbf{i}\sqrt{F_{2n+1}^2 + F_{2n+2}^2 + F_{2n+3}^2}$	$2F_{2n}$	$3F_{4n+3}$
2	$-9F_{2n} \mp \mathbf{i}\sqrt{F_{2n+1}^2 + F_{2n+2}^2 + F_{2n+3}^2}$	$-18F_{2n}$	$3F_{4n+3} + 80F_{2n}^2$

şeklinde bulunur. Niven algoritmasından kökler

$$x = Q_{2n},$$

$$x = -8F_{2n} - Q_{2n}$$

olarak elde edilir. (5.11) polinomuna karşılık gelen matrisin karakteristik polinomu

$$(x^2 - 2F_{2n+1}x + 3F_{4n+5})(x^2 + 18F_{2n+1}x + 3F_{4n+5} + 80F_{2n+1}^2)$$

olur. Buradan özdeğerler

m	λ_m	$\mathbf{t}$	$\mathbf{n}$
1	$F_{2n+1} \mp \mathbf{i}\sqrt{F_{2n+2}^2 + F_{2n+3}^2 + F_{2n+4}^2}$	$2F_{2n+1}$	$3F_{4n+5}$
2	$-9F_{2n+1} \mp \mathbf{i}\sqrt{F_{2n+2}^2 + F_{2n+3}^2 + F_{2n+4}^2}$	$-18F_{2n+1}$	$3F_{4n+5} + 80F_{2n+1}^2$

olarak verilir. Dolayısıyla kökler

$$x = Q_{2n+1},$$

$$x = -8F_{2n+1} - Q_{2n+1}$$

olarak elde edilir. □

Üzerinde çalışılan son denklem

$$x^2 + xy + yx + ay^2 + by + q = 0$$

formundadır. Bu tipteki bir denklemin çözümleri eşdeğer reel kuadratik formuna göre [51] de verilen metod kullanılarak bulunacaktır.

Teorem 5.7. y bir Fibonacci kuaterniyon olmak üzere

$$p(x, y) = x^2 + xy + yx + 2y^2 - 6F_{2n+1}y + 9F_{4n+3} + 2 - 2\mathbf{i} - 2\mathbf{k}$$

polinomunun tamsayı katsayılı tek kuaterniyon kökleri $(x, y) = (Q_{2n}, Q_{2n-1})$ ve $(x, y) = (-K_{2n}, Q_{2n-1})$ olarak verilir.

İspat. $y = Q_{2n-1}$ olsun. $x = x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$ için

$$\begin{aligned}
d &= 2Q_{2n-1}^2 - 6F_{2n+1}Q_{2n-1} + 9F_{4n+3} + 2 - 2\mathbf{i} - 2\mathbf{k} \\
&= 2(-3F_{4n+1} + 2F_{2n-1}^2 + 2F_{2n-1}F_{2n}\mathbf{i} + 2F_{2n-1}F_{2n+1}\mathbf{j} + 2F_{2n-1}F_{2n+2}\mathbf{k}) - \\
&\quad 6F_{2n+1}Q_{2n-1} + 9F_{4n+3} + 2 - 2\mathbf{i} - 2\mathbf{k} \\
&= (-6F_{4n+1} + 4F_{2n-1}^2 - 6F_{2n+1}F_{2n-1} + 2) + (4F_{2n-1}F_{2n} - 6F_{2n}F_{2n+1} - 2)\mathbf{i} + \\
&\quad (4F_{2n-1}F_{2n+1} - 6F_{2n+1}^2)\mathbf{j} + (4F_{2n-1}F_{2n+2} - 6F_{2n+1}F_{2n+2} - 2)\mathbf{k} \\
&= d_0 + d_1\mathbf{i} + d_2\mathbf{j} + d_3\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

olmak üzere eşdeğer reel kuadratik form

$$\begin{aligned}
&x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2(F_{2n-1}x_0 - F_{2n}x_1 - F_{2n+1}x_2 - F_{2n+2}x_3) + d_0 = 0, \\
&2x_0x_1 + 2(F_{2n}x_0 + F_{2n-1}x_1) + d_1 = 0, \\
&2x_0x_2 + 2(F_{2n+1}x_0 + F_{2n-1}x_2) + d_2 = 0, \\
&2x_0x_3 + 2(F_{2n+2}x_0 + F_{2n-1}x_3) + d_3 = 0
\end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan $x = Q_{2n}$ ve $x = -K_{2n}$ olarak iki reel kuaterniyon çözümü elde edilir.

$y = Q_{2n}$ için

$$\begin{aligned}
d &= 2Q_{2n}^2 - 6F_{2n+1}Q_{2n} + 9F_{4n+3} + 2 - 2\mathbf{i} - 2\mathbf{k} \\
&= 2(-3F_{4n+3} + 2F_{2n}^2 + 2F_{2n+1}F_{2n}\mathbf{i} + 2F_{2n+2}F_{2n}\mathbf{j} + 2F_{2n+3}F_{2n}\mathbf{k}) - \\
&\quad -6F_{2n+1}Q_{2n} + 9F_{4n+3} + 2 - 2\mathbf{i} - 2\mathbf{k} \\
&= (-6F_{4n+3} + 4F_{2n}^2 - 6F_{2n+1}F_{2n} + 2) + (4F_{2n+1}F_{2n} - 6F_{2n+1}^2 - 2)\mathbf{i} + \\
&\quad (4F_{2n+2}F_{2n} - 6F_{2n+1}F_{2n+2})\mathbf{j} + (4F_{2n+3}F_{2n} - 6F_{2n+1}F_{2n+3} - 2)\mathbf{k} \\
&= d_0 + d_1\mathbf{i} + d_2\mathbf{j} + d_3\mathbf{k}
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2(F_{2n}x_0 - F_{2n+1}x_1 - F_{2n+2}x_2 - F_{2n+3}x_3) + d_0 = 0,$$

$$2x_0x_1 + 2(F_{2n+1}x_0 + F_{2n}x_1) + d_1 = 0,$$

$$2x_0x_2 + 2(F_{2n+2}x_0 + F_{2n}x_2) + d_2 = 0,$$

$$2x_0x_3 + 2(F_{2n+3}x_0 + F_{2n}x_3) + d_3 = 0$$

reel kuadratik form yazılır. Fakat bu formdan reel kuaterniyon çözümleri elde edilemez. □



6 . TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu doktora tezi kapsamında genel olarak kuaterniyon dizileri ve kökleri kuaterniyon dizileriyle ifade edilebilen ikinci dereceden bazı kuaterniyonik polinomlarla ilgilenilmiştir. Karakteristik polinomunun derecesi ikiden büyük olan dizilerle elde edilen kuaterniyon dizileri üzerine çalışmalar literatürde az görülmektedir. Bu kuaterniyon dizileri arasında olan Tribonacci ve Tribonacci-Lucas kuaterniyonlarının bazı özellikleri incelenmiştir. Derecesi iki olan dizilerle elde edilen kuaterniyon dizilerinin ise kuantum genelleştirmesi verilmiştir. Dolayısıyla farklı q değerleriyle şu ana kadar çalışılmış olan bütün diziler elde edilmektedir. Ayrıca kuaterniyon polinomlarının da kuantum genelleştirmesi verilmiştir. Dolayısıyla çalışılan bazı kuaterniyon polinomları yine q yerine özel polinomlar seçilerek elde edilmektedir. Tanımlanan kuantum kuaterniyon polinomlarının bazı özellikleri verilmiş ve bazı özdeşlikler elde edilmiştir. Literatürde en çok karşılaşılan tamsayı katsayılı bazı kuaterniyon dizileri için zaman evolüsyonu ve dönme uygulamaları da verilmiştir. Benzer düşünceyle uygun koşullar altında farklı kuantum kuaterniyon dizileri üzerinde de bu tarz uygulamalar verilebilir. Kuantum tamsayılarının kullanım alanı çok olduğundan tanımlanan kuantum kuaterniyon dizilerinin birçok uygulaması olacağına inanıyoruz.

Son yıllarda kuaterniyonlar üzerindeki polinomların köklerini aramaya olan ilgi kuantum mekaniği problemlerini çözmek için gereken kuaterniyonik matematiksel araçların daha iyi anlaşılmasını sağlamıştır. Kuaterniyonlarda çarpma değişmeli olmadığından kuaterniyon katsayılı polinomların köklerini bulma problemi reel ve kompleks durumdan daha incelikli ve zengindir. Bu da ikinci dereceden kuaterniyonik denklemlerin köklerini incelememizdeki en büyük motivasyon kaynağıdır. Bu tezde verilen denklemlerin genelleştirmesi üzerine çalışmalar da yapılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Bray, U., Whaples, G., Polynomials with coefficients from a division ring. *Can. J. Math.* 35: 509–515, 1983.
- [2] Catarino, P., A note on $h(x)$ –Fibonacci quaternion polynomials. *Chaos, Solitons & Fractals.* 77: 1–5, 2015.
- [3] Cerda-Morales, G., On a generalization for Tribonacci quaternions. *Mediterr. J. Math.* 14: 1–12, Art. 239, 2017.
- [4] Cerda-Morales, G., Comment on “On some properties of Tribonacci quaternions”. e-mail communication, 1–2.
- [5] Cohn, J. H. E., The Diophantine equation $x^4 - Dy^2 = 1$. II. *Acta Arith.* 78 (4): 401–403, 1997.
- [6] Cusick, T. W., The Diophantine equation $x^4 - kx^2y^2 + y^4 = 1$. *Arch. Math.* 59 (4): 345–347, 1992.
- [7] Çimen, C. B., İpek, A., On Pell quaternions and Pell-Lucas quaternions. *Adv. Appl. Clifford Algebr.* 26 (1): 39–51, 2016.
- [8] Elia, M., Derived Sequences, the Tribonacci recurrence and cubic forms. *Fibonacci Quart.* 39 (2): 107–115, 2001.
- [9] Falcon, S., Plaza, A., On the Fibonacci k –numbers. *Chaos, Solitons & Fractals* 32: 1615–1624, 2007.
- [10] Falcon, S., On the k –Lucas numbers. *Int. J. Contemp. Math. Sci.* 6 (21): 1039–1050, 2011.
- [11] Feinberg, M., Fibonacci-Tribonacci. *Fibonacci Quart.* 1: 12–15, 1963.
- [12] Feng, J., More identities on Tribonacci Numbers. *Ars Combin.* 100: 73–78, 2011.
- [13] Flaut, C., Savin, D., Quaternion algebras and generalized Fibonacci–Lucas quaternions. *Adv. Appl. Clifford Algebr.* 25 (4): 853–862, 2015.

- [14] Flaut, C., Shpakivskyi, V. S., On generalized Fibonacci quaternions and Fibonacci-Narayana quaternions. *Adv. Appl. Clifford Algebr.* 23 (3): 673–688, 2013.
- [15] Flaut, C., Shpakivskyi, V. S., An efficient method for solving equations in generalized quaternion octonion algebras. *Adv. Appl. Clifford Algebr.* 25 (2): 337–350, 2015.
- [16] Girard, P. R., The quaternion group and modern physics. *Eur. J. Phys.* 5: 25–32, 1984.
- [17] Gordon, B., Motzkin, T. S., On the zeros of polynomials over division rings. *Trans. Amer. Math. Soc.* 116: 218–226, 1965.
- [18] Halıcı, S., On Fibonacci quaternions. *Adv. Appl. Clifford Algebr.* 22 (2): 321–327, 2012.
- [19] Horadam, A. F., Complex Fibonacci numbers and Fibonacci quaternions. *Amer. Math. Monthly* 70 (3): 289–291, 1963.
- [20] Horadam, A. F., Basic properties of a certain generalized sequence of numbers. *Fibonacci Quart.* 3 (3): 161–176, 1965.
- [21] Horadam, A. F., Special properties of the sequence $W_n(a, b; p, q)$. *Fibonacci Quart.* 5 (5): 424–434, 1967.
- [22] Horadam, A. F., Geometry of a generalized Simson's formula. *Fibonacci Quart.* 20 (2): 164–168, 1982.
- [23] Horadam, A. F., Quaternion recurrence relations. *Ulam Quart.* 2 (2): 23–33, 1993.
- [24] Howard, F. T., A Tribonacci identity. *Fibonacci Quart.* 39 (4): 352–357, 2001.
- [25] Iakin, A. L., Generalized quaternions of higher order. *Fibonacci Quart.* 15 (4): 343–346, 1977.
- [26] Iakin, A. L., Generalized quaternions with quaternion components. *Fibonacci Quart.* 15 (4): 350–352, 1977.

- [27] Iyer, M. R., A note on Fibonacci quaternions. *Fibonacci Quart.* 7 (3): 225–229, 1969.
- [28] İpek, A., On (p, q) –Fibonacci quaternions and their Binet formulas, generating functions and certain binomial sums. *Adv. Appl. Clifford Algebr.* 27 (2): 1343–1351, 2017.
- [29] Kiliç, E., Tribonacci sequences with certain indices and their sums. *Ars Combin.* 86: 13–22, 2008.
- [30] Kiliç, E., Ömür, N., Conics characterizing the generalized Fibonacci and Lucas sequences with indices in arithmetic progressions. *Ars Combin.* 94: 459–464, 2010.
- [31] Kimberling, C., Fibonacci hyperbolas. *Fibonacci Quart.* 28 (1): 22–27, 1990.
- [32] Koshy, T., Fibonacci and Lucas numbers with applications. Wiley-Interscience, New York, 2001.
- [33] Kou, K. I., Xia, Y. H., Linear quaternion differential equations: Basic Theory and Fundamental Results. *Stud. Appl. Math.* 141 (1): 3–45, 2018.
- [34] Le Stum, B., Quirós, A., On quantum integers and rationals. *Contemp. Math.* 649: 107–130, 2015.
- [35] Lee, H. C., Eigenvalues and canonical forms of matrices with quaternion coefficients. *Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A.* 52: 253–260, 1949.
- [36] Lin, P. Y., De Moivre-type identities for the Tribonacci numbers. *Fibonacci Quart.* 26 (2): 131–134, 1988.
- [37] McDaniel, W. L., Diophantine representation of Lucas sequences. *Fibonacci Quart.* 33: 59–63, 1995.
- [38] Melham, R., Conic which characterize certain Lucas sequences. *Fibonacci Quart.* 35 (3): 248–251, 1997.
- [39] Nalli, A., Haukkanen, P., On generalized Fibonacci and Lucas polynomials. *Chaos, Solitons & Fractals.* 42: 3179–3186, 2009.

- [40] Niven, I., Equations in quaternions. Amer. Math. Monthly 48: 654–661, 1941.
- [41] Ramírez, J. L., Some combinatorial properties of the k –Fibonacci and the k –Lucas quaternions. An. Ştiinţ. Univ. "Ovidius" Constanţa Ser. Mat. 23 (2): 201–212, 2015.
- [42] Rotella, N., Quaternion review and conventions. http://www-clmc.usc.edu/~nrotella/IROS2014_linearization.pdf, 1–14, 2014.
- [43] Savin, D., About special elements in quaternion algebras over finite fields. Adv. Appl. Clifford Algebr. 27 (2): 1801–1813, 2017.
- [44] Serôdio, R., Pereira, E., and Vitória, J., Computing the zeros of quaternion polynomials. Comput. Math. Appl. 42 (8–9): 1229–1237, 2001.
- [45] Shpakivskyi, V. S., Linear quaternionic equations and their systems. Adv. Appl. Clifford Algebr. 21: 637–645, 2011.
- [46] Swamy, M. N. S., On generalized Fibonacci quaternions. Fibonacci Quart. 11 (5): 547–549, 1973.
- [47] Startek, M., Włoch, A., and Włoch, I., Fibonacci numbers and Lucas numbers in graphs. Discrete Appl. Math. 157: 864–868, 2009.
- [48] Szynal-Liana, A., Włoch, I., A note on Jacobsthal quaternions. Adv. Appl. Clifford Algebr. 26(1): 441–447, 2016.
- [49] Jia, Yan-Bin, Quaternions and rotations. <http://graphics.stanford.edu/courses/cs348a-17-winter/Papers/quaternion.pdf>. 1–12, 2013.
- [50] Yilmaz, N., Taskara, N., Tribonacci and Tribonacci-Lucas numbers via the determinants of special matrices. Appl. Math. Sci. (Ruse). 8 (37–40): 1947–1955, 2014.
- [51] Zhigang, J., Xuehan, C., and Z. Meixiang, A new method for roots of monic quaternionic quadratic polynomial. Comput. Math. Appl. 58 (9): 1852–1858, 2009.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Gonca KIZILASLAN

Doğum Tarihi/Yeri : 31.07.1988 / Ankara

Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Durumu

Lisans : Dokuz Eylül Üniversitesi,
Fen Fakültesi Matematik Bölümü, 2006-2011

Yüksek Lisans : İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü,
Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik A.B.D, 2011-2014

Çalıştığı Kurum ve Yıllar :

- 1.) İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Araştırma Görevlisi, 01/2013-01/2014.
- 2.) Kırıkkale Üniversitesi, Araştırma Görevlisi, 02/2014 - .

Yayınları :

- 1.) Kılıç, E., Akkus, I., Kızılaslan, G., A variant of the reciprocal super Catalan matrix. Spec. Matrices. 3: 163–168, 2015.
- 2.) Akkus, I., Irmak, N., Kizilaslan, G., Farey-Pell sequence, approximation to irrationals and Hurwitz's inequality. Bull. Math. Anal. Appl. 8 (1): 11–21, 2016.
- 3.) Akkus, I., Kızılaslan, G., On some properties of Tribonacci quaternions. An. Stiint. Univ. Ovidius Constanta Ser. Mat. 26 (3): 5–20, 2018.
- 4.) Akkus, I., Kizilaslan, G., Some new quaternionic quadratics with zeros in terms of second order quaternion recurrences. Adv. Appl. Clifford Algebras. 29 (1): 2019.
- 5.) Akkus, I., Kizilaslan, G., Quaternions: quantum calculus approach with applicati-

ons. Kuwait J. Sci., kabul edildi.

6.) Akkus, I., Kizilaslan, G., Generalization of a statistical matrix and its factorization.
Comm. Statist. Theory Methods, kabul edildi.

