



TC

ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ



TOPOLOJİK UZAYLARDA AÇIK KÜMELERİN

BAZI FORMLARI ÜZERİNE

Nizamettin Ufuk BOSTAN

Matematik Anabilim Dalı

ÇANAKKALE

TC
ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

TOPOLOJİK UZAYLARDA AÇIK KÜMELERİN
BAZI FORMLARI ÜZERİNE

Nizamettin Ufuk BOSTAN

Matematik Anabilim Dalı

Tezin Sunulduğu Tarih: 17/01/2020

Tez Danışmanı:

Dr. Öğr. Üyesi Sena ÖZEN YILDIRIM

ÇANAKKALE

Nizamettin Ufuk BOSTAN tarafından Dr. Öğr. Üyesi Sena ÖZEN YILDIRIM yönetiminde hazırlanan ve **17/01/2020** tarihinde aşağıdaki jüri karşısında sunulan “**Topolojik Uzaylarda Açık Kümelerin Bazı Formları Üzerine**” başlıklı çalışma, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

JÜRİ

Dr. Öğr. Üyesi Sena ÖZEN YILDIRIM

Başkan

Prof. Dr. Erdal EKİCİ

Üye

Doç. Dr. Erdal BAYRAM

Üye

Prof. Dr. Levent GENÇ

Müdür

Fen Bilimleri Enstitüsü

Sıra No:

İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI



Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

Nizamettin Ufuk BOSTAN

TEŞEKKÜR

Bu tezi ortaya koyarken ve yüksek lisans öğrenimim sırasında, engin bilgi ve deneyimlerinden faydalanabilme fırsatına eriştiğim, bana karşı her türlü desteği ve anlayışı sağlayarak elde ettiğim bütün başarılarda payı büyük olan, saygıdeğer tez danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Sena ÖZEN YILDIRIM' a, yine yüksek lisans öğrenimim süresince desteklerini her zaman yanımda hissettiğim değerli hocalarım Prof. Dr. Erdal EKİCİ' ye ve Dr. Öğr. Üyesi Ayşe Nur TUNÇ' a, bugünlere gelmemde emeği büyük olan, alanlarına gönül vermiş bütün hocalarıma, çalışma boyunca karşılaştığım her türlü engeli aşmamda yardımcı olan ve hayatımın her aşamasında her konuda bana destek veren başta annem Ayşe BOSTAN olmak üzere kıymetli aileme, arkadaşlarıma, bana karşı gösterdikleri sabırdan dolayı özellikle Anıl IŞIK' a ve Orhan AMİROV' a ve büyük küçük demeden desteğini esirgemeyen herkese çok teşekkür ederim.

Nizamettin Ufuk BOSTAN

Çanakkale, Ocak 2020

ÖZET

TOPOLOJİK UZAYLARDA AÇIK KÜMELERİN BAZI FORMLARI ÜZERİNE

Nizamettin Ufuk BOSTAN

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Sena ÖZEN YILDIRIM

17/01/2020, 88

Bu tezde zayıf $g\delta p$ -kapalı küme ve zayıf $g\delta pr$ -kapalı küme kavramları sunulmuş ve çalışılmıştır. Bu kümelerin çeşitli özellikleri araştırılmış ve bazı önemli sonuçlar elde edilmiştir. Aynı zamanda, zayıf $g\delta p$ -kapalı ve zayıf $g\delta pr$ -kapalı kümelerin 2006 yılında Ekici ve Noiri tarafından çalışılmış olan $g\delta p$ -kapalı küme ve $g\delta pr$ -kapalı kümelerle ilişkileri araştırılmıştır.

Anahtar sözcükler: Zayıf $g\delta p$ -kapalı Küme, Zayıf $g\delta pr$ -kapalı Küme, Zayıf $g\delta p$ -açık Küme, Zayıf $g\delta pr$ -açık Küme, $g\delta p$ -kapalı Küme, $g\delta pr$ -kapalı Küme

ABSTRACT

ON SOME FORMS OF OPEN SETS IN TOPOLOGICAL SPACES

Nizamettin Ufuk BOSTAN

Çanakkale Onsekiz Mart University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Master of Science Thesis in Mathematics

Advisor : Assist. Prof. Dr. Sena ÖZEN YILDIRIM

01/17/2020, 88

In this thesis, the concepts of weakly $g\delta p$ -closed set and weakly $g\delta pr$ -closed set are presented and studied. Various properties of these sets are researched and some important results are obtained. At the same time, the relationships between weakly $g\delta p$ -closed set and weakly $g\delta pr$ -closed set with $g\delta p$ -closed set and $g\delta pr$ -closed set studied by Ekici and Noiri in 2006 are investigated.

Keywords: Weakly $g\delta p$ -closed Set, Weakly $g\delta pr$ -closed Set, Weakly $g\delta p$ -open Set, Weakly $g\delta pr$ -open Set, $g\delta p$ -closed Set, $g\delta pr$ -closed Set

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

TEZ SINAVI SONUÇ FORMU.....	ii
İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
ÖZET	v
ABSTRACT.....	vi
BÖLÜM 1	
GİRİŞ	1
BÖLÜM 2	
ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR	3
BÖLÜM 3	
TOPOLOJİK UZAYLARDA ZAYIF $g\delta p$ -KAPALI KÜMELER VE ÖZELLİKLERİ.....	9
BÖLÜM 4	
TOPOLOJİK UZAYLARDA ZAYIF $g\delta pr$ -KAPALI KÜMELER VE ÖZELLİKLERİ ..	32
BÖLÜM 5	
TOPOLOJİK UZAYLARDA ZAYIF $g\delta p$ -KAPALI KÜMELER VE ZAYIF $g\delta pr$ -KAPALI KÜMELER.....	54
BÖLÜM 6	
TOPOLOJİK UZAYLARDA BAZI FONKSİYON SINIFLARI	57
BÖLÜM 7	
SONUÇ VE ÖNERİLER.....	85
KAYNAKLAR	86
ÖZGEÇMİŞ	I

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1970 yılında Levine tarafından sunulan ve kapalı küme kavramından daha zayıf bir kavram olan genelleştirilmiş kapalı küme kavramı Genel Topolojide önem arz etmektedir. Bu çalışmadan sonra genelleştirilmiş kapalı kümeler bir çok yazar tarafından ele alınmış ve bununla ilgili literatürde pek çok çalışmalar yapılmıştır. Bunlardan bazıları; Dunham (1977), Cueva (1993), Maki, Devi, ve Balachandran (1993), Palaniappan ve Rao (1993), Raychaudhuri ve Mukherjee (1993), Dontchev ve Ganster (1996), Dontchev ve Maki (1999), Baker (2001), Cao, Ganster, ve Reilly (2002), Cao ve diğerleri (2005), Ekici (2005), Ekici ve Noiri (2006a), Ekici ve Noiri (2006b), Noiri ve Popa (2006), Caldas, Jafari, ve Noiri (2008), Roy (2011) v.b.

Genelleştirilmiş kapalı kümelerin zayıf formları olan ve zayıf g -kapalı kümeler olarak adlandırılan bu küme kavramı da 1998 yılında Sundaram ve Nagaveni tarafından sunulmuş ve çalışılmıştır.

Ekici ve Noiri 2006 yılında $g\delta p$ -kapalı küme ve $g\delta pr$ -kapalı küme kavramlarını sunmuşlar ve çalışmışlardır. Ekici ve Noiri, $g\delta p$ -kapalı küme ve $g\delta pr$ -kapalı küme kavramları vasıtasıyla normal, almost normal ve mildly normal uzayların genellemelerini sunmuşlardır.

Bu tezde $g\delta p$ -kapalı küme ve $g\delta pr$ -kapalı küme kavramlarının zayıf formları olan zayıf $g\delta p$ -kapalı küme ve zayıf $g\delta pr$ -kapalı küme kavramlarını sunmak ve karakterize etmek amaçlanmıştır. Bu kümelerin topolojik uzaylardaki temel özellikleri ve ilişkileri araştırılmıştır.

Bu tez yedi bölümden meydana gelmektedir.

İlk bölümde tez hakkında bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde tez içerisinde kullanılan, tezin daha iyi anlaşılmasını sağlayacak olan tanım ve teoremler sunulmuştur.

Üçüncü bölümde zayıf $g\delta p$ -kapalı kümeler, zayıf $g\delta p$ -açık kümeler, bu kümelerin özellikleri, bir alt kümenin $zg\delta p$ -çekirdeği ve $zg\delta p$ -kapanışı kavramları ve bunların özellikleri, zayıf $g\delta p-T_0$ uzay, zayıf $g\delta p-T_1$ uzay, zayıf $g\delta p-T_2$ uzay, zayıf $g\delta p$ -regüler uzay, zayıf $g\delta p$ -normal uzay kavramları ve bunların özellikleri çalışılmıştır.

Dördüncü bölümde zayıf $g\delta pr$ -kapalı kümeler, zayıf $g\delta pr$ -açık kümeler, bu kümelerin özellikleri, bir alt kümenin $zg\delta pr$ -çekirdeği ve $zg\delta pr$ -kapanışı kavramları ve

bunların özellikleri, zayıf $g\delta pr-T_0$ uzay, zayıf $g\delta pr-T_1$ uzay, zayıf $g\delta pr-T_2$ uzay, zayıf $g\delta pr$ -regüler uzay, zayıf $g\delta pr$ -normal uzay kavramları ve bunların özellikleri çalışılmıştır.

Beşinci bölümde zayıf $g\delta p$ -kapalı kümeler ile zayıf $g\delta pr$ -kapalı kümeler arasındaki ilişki ve zayıf $g\delta p-T_0$ uzay ile zayıf $g\delta pr-T_0$ uzay arasındaki ilişki, zayıf $g\delta p-T_1$ uzay ile zayıf $g\delta pr-T_1$ uzay arasındaki ilişki, zayıf $g\delta p-T_2$ uzay ile zayıf $g\delta pr-T_2$ uzay arasındaki ilişki, zayıf $g\delta p$ -regüler uzay ile zayıf $g\delta pr$ -regüler uzay arasındaki ilişki, zayıf $g\delta p$ -normal uzay ile zayıf $g\delta pr$ -normal uzay arasındaki ilişki, $zg\delta p$ -kapanış ile $zg\delta pr$ -kapanış arasındaki ilişki ve $zg\delta p$ -çekirdek ile $zg\delta pr$ -çekirdek arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Altıncı bölümde zayıf $g\delta p$ -kapalı fonksiyon, zayıf $g\delta p$ -açık fonksiyon, kuvvetli zayıf $g\delta p$ -kapalı fonksiyon, kuvvetli zayıf $g\delta p$ -açık fonksiyon, zayıf $g\delta p$ -süreklî fonksiyon, zayıf $g\delta p$ -kararsız fonksiyon, zayıf $g\delta pr$ -kapalı fonksiyon, zayıf $g\delta pr$ -açık fonksiyon, kuvvetli zayıf $g\delta pr$ -kapalı fonksiyon, kuvvetli zayıf $g\delta pr$ -açık fonksiyon, zayıf $g\delta pr$ -süreklî fonksiyon, zayıf $g\delta pr$ -kararsız fonksiyon kavramları ile beraber çeşitli fonksiyon kavramları sunularak bu fonksiyonların özellikleri, birbirleri ile olan ilişkileri ve elde edilen yeni ayırma aksiyomlarına etkileri incelenmiştir.

Elde edilen sonuçlar ise son bölümde verilmiştir.

BÖLÜM 2

ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu tezde topolojik uzayları (X, τ) , (Y, σ) , (Z, w) ya da kısaca sırasıyla X , Y , Z ile göstereceğiz.

(X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere A kümesinin kapanışını $cl(A)$, içini $int(A)$ ve yığılma noktaları kümesini $A^\sim$ ile göstereceğiz.

Tanım 2.1. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $A = int(cl(A))$ ise A' ya düzenli açık küme denir (Stone, 1937).

Tanım 2.2. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $A = cl(int(A))$ ise A' ya düzenli kapalı küme denir (Stone, 1937).

Tanım 2.3. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer $A \subset int(cl(A))$ ise A' ya önaçık küme denir (Mashhour, Abd El-Monsef, ve El-Deeb, 1982).

Tanım 2.4. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Önaçık kümelerin tümleyenlerine önkapalı kümeler denir (El-Deeb ve diğerleri, 1983).

Tanım 2.5. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesini kapsayan tüm önkapalı kümelerin arakesitine A kümesinin önkapanışı denir (El-Deeb ve diğerleri, 1983).

A kümesinin önkapanışı $pcl(A)$ ile gösterilir (El-Deeb ve diğerleri, 1983).

Tanım 2.6. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. V , X de açık bir alt küme olmak üzere $A \subset V$ iken $pcl(A) \subset V$ oluyorsa A' ya genelleştirilmiş p -kapalı küme denir (Maki, Umehara, ve Noiri, 1996).

Genelleştirilmiş p -kapalı kümeye kısaca gp -kapalı küme denir (Maki, Umehara, ve Noiri, 1996).

Tanım 2.7. (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ ve V , X de düzenli açık bir alt küme olmak

üzere $A \subset V$ iken $cl(A) \subset V$ oluyorsa A' ya düzenli genelleştirilmiş kapalı küme denir (Palaniappan ve Rao, 1993).

Düzenli genelleştirilmiş kapalı kümeye kısaca rg -kapalı küme denir (Palaniappan ve Rao, 1996).

Tanım 2.8. (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ ve V , X de düzenli açık bir alt küme olmak üzere $A \subset V$ iken $pcl(A) \subset V$ oluyorsa A' ya genelleştirilmiş öndüzenli kapalı küme veya düzenli genelleştirilmiş önkapalı küme denir (Gnanambal, 1997; Noiri 1998).

Düzenli genelleştirilmiş önkapalı kümeye kısaca gpr -kapalı küme denir (Gnanambal, 1997; Noiri 1998).

Tanım 2.9. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $x \in X$ olmak üzere x' i içeren her $V \in \tau$ kümesi için $int(cl(V)) \cap A \neq \emptyset$ ise x noktasına A kümesinin bir δ -kapanış noktası denir (Velicko, 1968).

A' nın tüm δ -kapanış noktalarının kümesine A kümesinin δ -kapanışı denir ve $\delta - cl(A)$ ile gösterilir (Velicko, 1968).

Tanım 2.10. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $A \subset int(\delta - cl(A))$ ise A' ya δ -önaçık küme denir (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

Tanım 2.11. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer $X \setminus A$, δ -önaçık küme ise A kümesine δ -önkapalı küme denir (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

Tanım 2.12. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A' yı kapsayan tüm δ -önkapalı kümelerin arakesatine A' nın δ -önkapanışı denir (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

A kümesinin δ -önkapanışı $\delta - pcl(A)$ ile gösterilir (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

Tanım 2.13. (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ ve $x \in X$ olsun. x noktasını bulunduran her δ -önaçık küme A kümesinin x noktasından farklı bir noktasını kapsarsa x noktasına A

kümesinin bir δ -önyığılma noktası denir. (Ekici, 2005)

A kümesinin tüm δ -önyığılma noktalarının kümesi $A^{\delta P \sim}$ ile gösterilir.

Tanım 2.14. (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ ve V bir açık küme olmak üzere $A \subset V$ iken $cl(A) \subset V$ oluyorsa A kümesine genelleştirilmiş kapalı küme denir (Levine, 1970).

Genelleştirilmiş kapalı kümeye kısaca g -kapalı küme denir (Levine, 1970).

Tanım 2.15. Bir (X, τ) topolojik uzayında genelleştirilmiş kapalı kümelerin tümleyenlerine genelleştirilmiş açık küme denir (Levine, 1970).

Genelleştirilmiş açık kümeye kısaca g -açık küme denir (Levine, 1970).

Tanım 2.16. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. V, X de açık bir alt küme olmak üzere $A \subset V$ iken $\delta - pcl(A) \subset V$ oluyorsa A 'ya genelleştirilmiş δ -önkapalı küme denir (Ekici ve Noiri, 2006a).

Genelleştirilmiş δ -önkapalı kümeye kısaca $g\delta p$ -kapalı küme denir (Ekici ve Noiri, 2006a).

Tanım 2.17. Herhangi bir (X, τ) topolojik uzayında genelleştirilmiş δ -önkapalı kümelerin tümleyenlerine genelleştirilmiş δ -önaçık küme denir (Ekici ve Noiri, 2006a).

Genelleştirilmiş δ -önaçık kümeye kısaca $g\delta p$ -açık küme denir (Ekici ve Noiri, 2006a).

Tanım 2.18. (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ olsun. $A \subset V$ ve $V \subset X$ düzenli açık olduğunda $\delta - pcl(A) \subset V$ oluyorsa A 'ya genelleştirilmiş δp -düzenli kapalı küme denir (Ekici ve Noiri, 2006b).

Genelleştirilmiş δp -düzenli kapalı kümeye kısaca $g\delta pr$ -kapalı küme denir (Ekici ve Noiri, 2006b).

Tanım 2.19. (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ olsun. $X \setminus A$ genelleştirilmiş δp -düzenli kapalı küme ise A' ya genelleştirilmiş δp -düzenli açık küme denir (Ekici ve Noiri, 2006b).

Genelleştirilmiş δp -düzenli açık kümeye kısaca $g\delta pr$ -açık küme denir (Ekici ve Noiri, 2006b).

Tanım 2.20. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesinde bulunan bütün δ -önaçık kümelerin birleşimine A kümesinin δ -öniçi denir (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

A kümesinin δ -öniçi $\delta - pint(A)$ ile gösterilir (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

Teorem 2.21. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere

$$X \setminus \delta - pint(A) = \delta - pcl(X \setminus A)$$

olur (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

Teorem 2.22. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A, B \subset X$ olsun. Bu durumda $A \subset B$ ise $\delta - pcl(A) \subset \delta - pcl(B)$ olur (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

Teorem 2.23. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A, B \subset X$ olsun. Bu durumda

$$\delta - pcl(\delta - pcl(A)) = \delta - pcl(A)$$

olur (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

Teorem 2.24. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere $\delta - pcl(A)$ kümesi δ -önkapalıdır (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

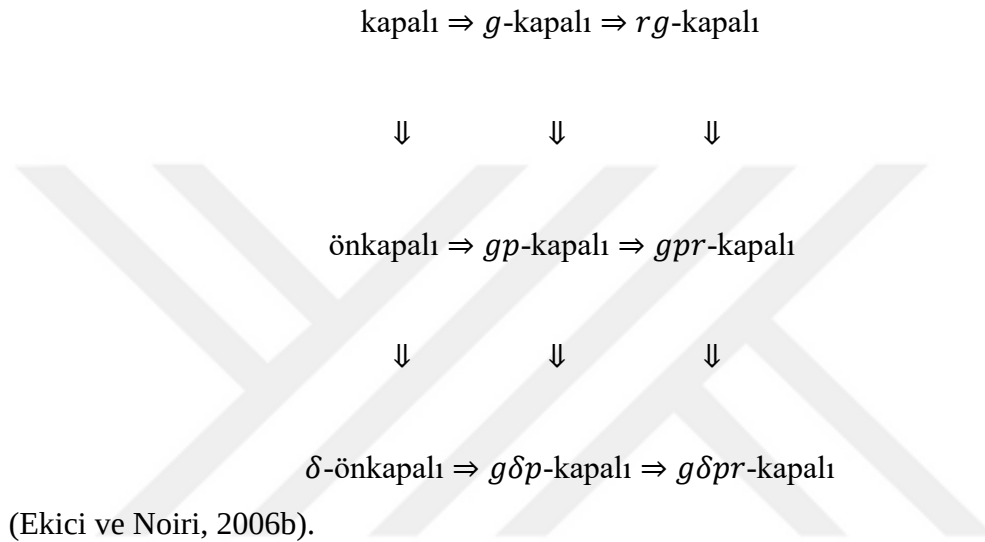
Teorem 2.25. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A' nın δ -önkapalı olması için gerek ve yeter koşul $A = \delta - pcl(A)$ olmasıdır (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

Teorem 2.26. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $x \in \delta - pcl(A)$ olması için gerek ve yeter koşul x ' i içeren her B δ -önaçık kümesi için $A \cap B \neq \emptyset$ olmasıdır (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

Teorem 2.27. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Bu durumda X topolojik uzayındaki δ -önaçık kümelerin keyfi birleşimi δ -önaçıktır (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

Teorem 2.28. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Bu durumda X topolojik uzayındaki δ -önkapalı kümelerin keyfi arakesiti δ -önkapalıdır (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

Uyarı 2.29. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki diyagram geçerlidir.



Tanım 2.30. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Her $x, y \in X$ için $x \in cl(\{y\})$ olduğu zaman $y \in cl(\{x\})$ oluyorsa X bir simetrik uzaydır denir (Levine, 1970).

Tanım 2.31. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $A, B \subset X$ kapalı kümeler ve $A \cap B = \emptyset$ olmak üzere $A \subset U$, $B \subset V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak biçimde $U, V \subset X$ δ -önaçık kümeleri var ise X δp -normal uzay denir (Ekici ve Noiri, 2006a).

Tanım 2.32. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesini kapsayan tüm açık kümelerin arakesitine A 'nın çekirdeği denir (Maki, 1986).

Bir $A \subset X$ kümesinin çekirdeği $\text{çek}(A)$ ile gösterilir.

Tanım 2.33. (X, τ) bir topolojik uzay ve $\mathfrak{B} \equiv \{B_\alpha\}$ alt kümelerin bir koleksiyonu olsun. O zaman $\text{int}\mathfrak{B}$, $\{\text{int}B_\alpha\}$ kümeler ailesini belirtir (Levine, 1963).

Tanım 2.34. $(X, \tau), (Y, \sigma)$ iki topolojik uzay olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $K \subset Y$ düzenli açık kümesi için $f^{-1}(K) \subset X$ düzenli açık ise f' ye R -dönüşüm denir (Carnahan, 1973).

Tanım 2.35. $(X, \tau), (Y, \sigma)$ iki topolojik uzay olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $A \subset X$ δ -öncapalı alt kümesi için $f(A) \subset Y$ δ -öncapalı ise f' ye kuvvetli δ -öncapalı fonksiyon denir (Ekici ve Noiri, 2006a).

Tanım 2.36. $(X, \tau), (Y, \sigma)$ iki topolojik uzay ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Her kapalı $A \subset X$ kümesi için $f(A) \subset Y$ $g\delta p$ -kapalı ise bu f fonksiyonuna $g\delta p$ -kapalı fonksiyon denir (Ekici ve Noiri, 2006a).

Tanım 2.37. $(X, \tau), (Y, \sigma)$ iki topolojik uzay ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Her δ -öncapalı $A \subset X$ kümesi için $f(A) \subset Y$ kapalı ise bu f fonksiyonuna quasi δ -öncapalı fonksiyon denir (Ekici ve Noiri, 2006a).

Tanım 2.38. $(X, \tau), (Y, \sigma)$ iki topolojik uzay olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $K \subset Y$ kapalı kümesi için $f^{-1}(K) \subset X$ $g\delta p$ -kapalı ise bu f fonksiyonuna $g\delta p$ -sürekli fonksiyon denir (Ekici ve Noiri, 2006b).

Tanım 2.39. $(X, \tau), (Y, \sigma)$ iki topolojik uzay olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $K \subset Y$ $g\delta p$ -kapalı kümesi için $f^{-1}(K) \subset X$ $g\delta p$ -kapalı ise bu f fonksiyonuna $g\delta p$ -kararsız fonksiyon denir (Ekici ve Noiri, 2006b).

Tanım 2.40. $(X, \tau), (Y, \sigma)$ iki topolojik uzay olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $K \subset Y$ kapalı kümesi için $f^{-1}(K) \subset X$ $g\delta pr$ -kapalı ise bu f fonksiyonuna $g\delta pr$ -sürekli fonksiyon denir (Ekici ve Noiri, 2006b).

Tanım 2.41. $(X, \tau), (Y, \sigma)$ iki topolojik uzay olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $K \subset Y$ $g\delta pr$ -kapalı kümesi için $f^{-1}(K) \subset X$ $g\delta pr$ -kapalı ise bu f fonksiyonuna $g\delta pr$ -kararsız fonksiyon denir (Ekici ve Noiri, 2006b).

BÖLÜM 3
TOPOLOJİK UZAYLARDA ZAYIF $g\delta p$ -KAPALI KÜMELER
VE
ÖZELLİKLERİ

Tanım 3.1. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. V, X' in açık bir alt kümesi olmak üzere $A \subset V$ iken $\delta - pcl(int(A)) \subset V$ oluyorsa A kümesine zayıf $g\delta p$ -kapalı küme denir.

Örnek 3.2. $X = \{\alpha, \beta, \gamma\}, \tau = \{X, \emptyset, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\alpha, \beta\}, \{\beta, \gamma\}\}$ olsun. Bu durumda $A = \{\beta\}$ kümesi zayıf $g\delta p$ -kapalı kümedir.

Tanım 3.3. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $X \setminus A$ zayıf $g\delta p$ -kapalı küme ise A' ya zayıf $g\delta p$ -açık küme denir.

Teorem 3.4. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kapalı bir küme ise A zayıf $g\delta p$ -kapalıdır.

İspat:

$A \subset X$ kapalı olsun. V açık bir küme ve $A \subset V$ olsun.

Buradan

$$\begin{aligned}\delta - pcl(int(A)) &\subset \delta - pcl(A) \\ &\subset cl(A) \\ &= A \\ &\subset V\end{aligned}$$

sağlanır.

Sonuç olarak $\delta - pcl(int(A)) \subset V$ elde ederiz.

O halde A zayıf $g\delta p$ -kapalıdır.

Teorem 3.5. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere A açık bir küme ise zayıf $g\delta p$ -açıktır.

İspat.

$A \subset X$ açık bir küme olsun. $X \setminus A$ kapalıdır. Bir önceki teoremden $X \setminus A$ zayıf $g\delta p$ -kapalı olup, A zayıf $g\delta p$ -açıktır.

Teorem 3.6. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere A g -kapalı bir küme ise zayıf $g\delta p$ -kapalıdır.

İspat.

$A \subset V$ ve V açık olsun. A g -kapalı olduğundan

$$cl(A) \subset V$$

olur.

O halde

$$\delta - pcl(int(A)) \subset \delta - pcl(A) \subset cl(A) \subset V$$

sağlandığından A zayıf $g\delta p$ -kapalıdır.

Teorem 3.7. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A g -açık bir küme ise zayıf $g\delta p$ -açıktır.

İspat.

A g -açık bir küme ise $X \setminus A$ g -kapalıdır. Bir önceki teoremden $X \setminus A$ zayıf $g\delta p$ -kapalıdır. O halde A zayıf $g\delta p$ -açıktır.

Teorem 3.8. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A $g\delta p$ -kapalı bir küme ise zayıf $g\delta p$ -kapalıdır.

İspat.

$A \subset V$ ve V açık olsun. A $g\delta p$ -kapalı olduğundan

$$\delta - pcl(A) \subset V$$

olur. Yani

$$\delta - pcl(int(A)) \subset \delta - pcl(A) \subset V$$

sağlanır.

Böylece A zayıf $g\delta p$ -kapalıdır.

Teorem 3.9. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A açık ve zayıf $g\delta p$ -kapalı bir küme ise $g\delta p$ -kapalıdır.

İspat.

$A \subset V$ ve V açık olsun. A zayıf $g\delta p$ -kapalı olduğundan

$$\delta - pcl(int(A)) \subset V$$

olur.

A açık olduğundan

$$\delta - pcl(A) = \delta - pcl(int(A)) \subset V$$

sağlanır.

Böylece A $g\delta p$ -kapalıdır.

Teorem 3.10. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere A $g\delta p$ -açık bir küme ise zayıf $g\delta p$ -açıktır.

İspat.

A $g\delta p$ -açık bir küme olsun. $X \setminus A$ $g\delta p$ -kapalı bir küme olur. Teorem 3.8. den $X \setminus A$ zayıf $g\delta p$ -kapalı bir kümedir. O halde A zayıf $g\delta p$ -açıktır.

Teorem 3.11. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kapalı ve zayıf $g\delta p$ -açık bir küme ise A $g\delta p$ -açıktır.

İspat.

A kapalı ve zayıf $g\delta p$ -açık bir küme olsun. $X \setminus A$ açık ve zayıf $g\delta p$ -kapalı bir küme olur. $(X \setminus A) \subset V$ ve V açık olsun. $X \setminus A$ zayıf $g\delta p$ -kapalı olduğundan

$$\delta - pcl(int(X \setminus A)) \subset V$$

olur.

$X \setminus A$ açık olduğundan

$$\delta - pcl(X \setminus A) = \delta - pcl(int(X \setminus A)) \subset V$$

sağlanır. Böylece $X \setminus A$ $g\delta p$ -kapalı olur.

O halde A $g\delta p$ -açıktır.

Teorem 3.12. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A, B \subset X$ olsun. $A^\sim \subset A^{\delta P^\sim}$ ve $B^\sim \subset B^{\delta P^\sim}$ olmak üzere A ile B açık ve zayıf $g\delta p$ -kapalı kümeler ise bu durumda $A \cup B$ zayıf $g\delta p$ -kapalı kümedir.

İspat.

Varsayalım ki $A, B \subset X$ zayıf $g\delta p$ -kapalı ve aynı zamanda açık kümeler ve $A^\sim \subset A^{\delta P^\sim}$, $B^\sim \subset B^{\delta P^\sim}$ olsun. $A \cup B \subset V$ ve V açık olsun. Buradan $A \subset V$ ve $B \subset V$ olur. A ve B zayıf $g\delta p$ -kapalı kümeler olduğu için

$$\delta - pcl(int(A)) \subset V \text{ ve } \delta - pcl(int(B)) \subset V$$

olur. Buradan $(\delta - pcl(int(A))) \cup (\delta - pcl(int(B))) \subset V$ dir.

Öte yandan, varsayım gereği $A^\sim \subset A^{\delta P^\sim}$ olduğundan ve $A^{\delta P^\sim} \subset \delta - pcl(A)$

olduğundan $A^\sim \subset \delta - pcl(A)$ olur. Benzer şekilde $B^\sim \subset \delta - pcl(B)$ dir.

Buradan

$$cl(A) = A^\sim \cup A \subset (\delta - pcl(A)) \cup A = \delta - pcl(A)$$

olup

$$cl(A) \subset \delta - pcl(A)$$

dir. Aynı zamanda

$$\delta - pcl(A) \subset cl(A)$$

olduğundan

$$cl(A) = \delta - pcl(A)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$cl(B) = \delta - pcl(B)$$

dir.

$$\begin{aligned} \delta - pcl(int(A \cup B)) &= \delta - pcl(A \cup B) \\ &\subset cl(A \cup B) \\ &= cl(A) \cup cl(B) \\ &= (\delta - pcl(A)) \cup (\delta - pcl(B)) \\ &= (\delta - pcl(int(A))) \cup (\delta - pcl(int(B))) \\ &\subset V \end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak

$$\delta - pcl(int(A \cup B)) \subset V$$

elde edilir.

O halde $A \cup B$ zayıf $g\delta p$ -kapalı kümedir.

Teorem 3.13. (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere $A, B \subset X$ olsun. $(X \setminus A)^\sim \subset (X \setminus A)^{\delta P^\sim}$ ve $(X \setminus B)^\sim \subset (X \setminus B)^{\delta P^\sim}$ olmak üzere A, B kapalı ve zayıf $g\delta p$ -açık kümeler ise $A \cap B$ zayıf $g\delta p$ -açık kümedir.

İspat.

Varsayalım ki $A, B \subset X$ zayıf $g\delta p$ -açık ve aynı zamanda kapalı kümeler ve $(X \setminus A)^\sim \subset (X \setminus A)^{\delta P^\sim}$ ve $(X \setminus B)^\sim \subset (X \setminus B)^{\delta P^\sim}$ olsun.

Burada $X \setminus A$ ve $X \setminus B$ açık ve zayıf $g\delta p$ -kapalı kümeler olup, bir önceki teoremden $(X \setminus A) \cup (X \setminus B)$ zayıf $g\delta p$ -kapalı olur. $(X \setminus A) \cup (X \setminus B) = X \setminus (A \cap B)$ olduğundan

$X \setminus (A \cap B)$ zayıf $g\delta p$ -kapalı olup $A \cap B$ zayıf $g\delta p$ -açık olur.

Teorem 3.14. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A zayıf $g\delta p$ -kapalı bir küme ise, $\delta - pcl(int(A)) \setminus A$ boştan farklı kapalı bir küme kapsamaz.

İspat.

F kapalı bir küme ve $F \subset \delta - pcl(int(A)) \setminus A$ olsun.

O zaman

$$X \setminus (\delta - pcl(int(A)) \setminus A) \subset X \setminus F$$

olur.

$A \subset X \setminus (\delta - pcl(int(A)) \setminus A)$ olduğundan

$$A \subset X \setminus F$$

olur.

A zayıf $g\delta p$ -kapalı bir küme olduğu için

$$\delta - pcl(int(A)) \subset X \setminus F$$

olur.

Buradan

$$F \subset X \setminus \delta - pcl(int(A))$$

olur.

O halde

$$F \subset \left((X \setminus \delta - pcl(int(A))) \cap (\delta - pcl(int(A))) \right) = \emptyset$$

olur. Yani $F = \emptyset$ olur.

Dolayısıyla $\delta - pcl(int(A)) \setminus A$ kümesinin boştan farklı kapalı bir altkümesi yoktur.

Teorem 3.15. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $\delta - pcl(int(A)) \setminus A$ boştan farklı δ -önkapalı bir küme kapsamıyor ise A zayıf $g\delta p$ -kapalıdır.

İspat.

Varsayalım ki, $A \subset V$ ve V açık bir küme olsun. $\delta - pcl(int(A)) \setminus A$ boştan farklı δ -önkapalı bir küme kapsamamasın. Eğer $\delta - pcl(int(A)) \not\subset V$ ise,

$$(\delta - pcl(int(A))) \cap (X \setminus V),$$

$\delta - pcl(int(A)) \setminus A$ kümesinin boştan farklı δ -önkapalı bir alt kümesi olur. Böylece

varsayım ile çelişki elde edilir.

Bu yüzden $\delta - pcl(int(A)) \subset V$ olmalıdır.

O halde A zayıf $g\delta p$ -kapalıdır.

Teorem 3.16. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A zayıf $g\delta p$ -açık kümedir ancak ve ancak F kapalı olmak üzere $F \subset A$ iken $F \subset \delta - pint(cl(A))$ dır.

İspat.

F kapalı bir küme ve $F \subset A$ olsun.

Bu durumda

$$X \setminus A \subset X \setminus F$$

olur.

A zayıf $g\delta p$ -açık bir küme olduğundan $X \setminus A$ zayıf $g\delta p$ -kapalı bir küme olup

$$\delta - pcl(int(X \setminus A)) \subset X \setminus F$$

olur.

Buradan

$$F \subset X \setminus \delta - pcl(int(X \setminus A))$$

olur.

Buradan ise

$$F \subset X \setminus \delta - pcl(X \setminus cl(A))$$

olup

$$F \subset \delta - pint(cl(A))$$

olur.

Tersine, $X \setminus A \subset V$ ve V açık olsun. Buradan $X \setminus V$ kapalı ve $X \setminus V \subset A$ olur.

Varsayımdan

$$X \setminus V \subset \delta - pint(cl(A))$$

olur.

Buradan

$$\delta - pcl(int(X \setminus A)) \subset V$$

olur.

Böylece $X \setminus A$ zayıf $g\delta p$ -kapalı olup, A zayıf $g\delta p$ -açıktır.

Teorem 3.17. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A, B \subset X$ olsun. A zayıf $g\delta p$ -kapalı ve

$A \subset B \subset \delta - pcl(int(A))$ ise B zayıf $g\delta p$ -kapalıdır.

İspat.

$B \subset V$ ve V açık olsun. $A \subset B$ olduğundan $A \subset V$ olur.

A zayıf $g\delta p$ -kapalı olduğundan

$$\delta - pcl(int(A)) \subset V$$

olur.

$$A \subset B \subset \delta - pcl(int(A))$$

olduğundan

$$\delta - pcl(B) \subset \delta - pcl(\delta - pcl(int(A))) = \delta - pcl(int(A))$$

olup

$$\begin{aligned} \delta - pcl(int(B)) &\subset \delta - pcl(B) \\ &\subset \delta - pcl(int(A)) \\ &\subset V \end{aligned}$$

elde edilir.

O halde B zayıf $g\delta p$ -kapalıdır.

Teorem 3.18. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A, B \subset X$ olmak üzere A zayıf $g\delta p$ -açık ve $\delta - pint(cl(A)) \subset B \subset A$ ise B zayıf $g\delta p$ -açıktır.

İspat.

A zayıf $g\delta p$ -açık ve $\delta - pint(cl(A)) \subset B \subset A$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} X \setminus A &\subset X \setminus B \\ &\subset X \setminus \delta - pint(cl(A)) \\ &= \delta - pcl(int(X \setminus A)) \end{aligned}$$

olur.

$X \setminus A$ zayıf $g\delta p$ -kapalı olduğundan bir önceki teoremden $X \setminus B$ zayıf $g\delta p$ -kapalıdır.

O halde B zayıf $g\delta p$ -açıktır.

Teorem 3.19. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kapalı ve zayıf $g\delta p$ -açık ise $\delta - pint(cl(A))$ zayıf $g\delta p$ -açıktır.

İspat.

A kapalı ve zayıf $g\delta p$ -açık olsun. $\delta - pint(A) \subset A$ ve A kapalı olduğundan

$$\delta - \text{pint}(cl(A)) = \delta - \text{pint}(A)$$

olup

$$\delta - \text{pint}(cl(A)) \subset A$$

olur.

Böylece

$$\begin{aligned} \delta - \text{pint}(cl(A)) &\subset \delta - \text{pint}(cl(A)) \\ &\subset A \end{aligned}$$

yazabiliriz.

O halde bir önceki teoremden $\delta - \text{pint}(cl(A))$ zayıf $g\delta p$ -açıktır.

Teorem 3.20. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A, B \subset X$ olsun. B açık ve

$$\delta - \text{pint}(cl(A)) \cup (X \setminus A) \subset B$$

olmak üzere A zayıf $g\delta p$ -açık ise $B = X$ olur.

İspat.

Varsayalım ki $A \subset X$ zayıf $g\delta p$ -açık küme, $B \subset X$ açık küme ve $\delta - \text{pint}(cl(A)) \cup (X \setminus A) \subset B$ olsun.

Buradan

$$\begin{aligned} X \setminus B &\subset X \setminus (\delta - \text{pint}(cl(A)) \cup (X \setminus A)) \\ &= (X \setminus \delta - \text{pint}(cl(A))) \cap A \\ &= \delta - pcl(int(X \setminus A)) \cap A \\ &= \delta - pcl(int(X \setminus A)) \setminus (X \setminus A) \end{aligned}$$

olur.

$X \setminus B$ kapalı olup, $X \setminus A$ zayıf $g\delta p$ -kapalı olduğundan dolayı Teorem 3.14. den $X \setminus B = \emptyset$ olmalıdır.

Sonuç olarak, buradan da $B = X$ dir.

Teorem 3.21. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A, B \subset X$ olsun. B kümesi δ -önaçık olmak üzere

$$\delta - \text{pint}(cl(A)) \cup (X \setminus A) \subset B$$

olduğunda $B = X$ ise A zayıf $g\delta p$ -açıktır.

İspat.

Varsayalım ki F kapalı bir küme ve $F \subset A$ olsun.

$F \subset A \subset cl(A)$ olduğundan

$$X \setminus cl(A) \subset X \setminus A \subset X \setminus F$$

olur.

$\delta - pint(cl(A)) \cup (X \setminus F)$, δ -önaçık küme ve

$$\delta - pint(cl(A)) \cup (X \setminus A) \subset \delta - pint(cl(A)) \cup (X \setminus F)$$

olduğundan varsayım gereği

$$\delta - pint(cl(A)) \cup (X \setminus F) = X$$

olur.

O halde buradan

$$F \subset \delta - pint(cl(A))$$

olur.

Böylece Teorem 3.16. dan A zayıf $g\delta p$ -açıktır.

Teorem 3.22. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ zayıf $g\delta p$ -kapalı ise $\delta - pcl(int(A)) \setminus A$ zayıf $g\delta p$ -açıktır.

İspat.

A zayıf $g\delta p$ -kapalı küme ve F , $F \subset \delta - pcl(int(A)) \setminus A$ olacak şekilde kapalı bir küme olsun. A zayıf $g\delta p$ -kapalı olduğundan Teorem 3.14. den $F = \emptyset$ olmak zorundadır.

Böylece

$$F \subset \delta - pint(cl(\delta - pcl(int(A)) \setminus A))$$

olup Teorem 3.16. dan $\delta - pcl(int(A)) \setminus A$ zayıf $g\delta p$ -açıktır.

Teorem 3.23. (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere X' in her alt kümesi zayıf $g\delta p$ -kapalı ise her açık küme δ -önkapalıdır.

İspat.

Varsayalım ki, X uzayının her alt kümesi zayıf $g\delta p$ -kapalı ve $A \subset X$ açık küme olsun. O halde

$$\delta - pcl(int(A)) \subset A$$

olur.

A açık küme olduğundan

$$\begin{aligned} \delta - pcl(A) &= \delta - pcl(int(A)) \\ &\subset A \end{aligned}$$

olur.

Aynı zamanda $A \subset \delta - pcl(A)$ sağlandığından

$$A = \delta - pcl(A)$$

olup A , δ -önkapalı olur.

Teorem 3.24. (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere X' in her alt kümesi zayıf $g\delta p$ -açık ise her kapalı küme δ -önaçıktır.

İspat.

Varsayalım ki, X topolojik uzayının her alt kümesi zayıf $g\delta p$ -açık ve $A \subset X$ kapalı küme olsun. O halde A aynı zamanda zayıf $g\delta p$ -açık olur. Buradan $X \setminus A$ açık ve zayıf $g\delta p$ -kapalı küme olur.

O halde

$$\delta - pcl(int(X \setminus A)) \subset X \setminus A$$

olur.

$X \setminus A$ açık olduğundan

$$\begin{aligned} \delta - pcl(X \setminus A) &= \delta - pcl(int(X \setminus A)) \\ &\subset X \setminus A \end{aligned}$$

olur.

Aynı zamanda

$$X \setminus A \subset \delta - pcl(X \setminus A)$$

sağlandığından

$$X \setminus A = \delta - pcl(X \setminus A)$$

olup $X \setminus A$ δ -önkapalı küme olur.

O halde A kümesi δ -önaçıktır.

Teorem 3.25. (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere X' in açık kümelerinin sınıfı, kapalı kümelerinin sınıfına denk ise X' in her alt kümesi zayıf $g\delta p$ -kapalıdır.

İspat.

Varsayalım ki, X' in açık kümelerinin sınıfı, kapalı kümelerinin sınıfına denk olsun.

$A, B \subset X$ ve B açık küme olmak üzere $A \subset B$ olsun.

Buradan

$$\delta - pcl(int(A)) \subset \delta - pcl(int(B))$$

olur.

$$\begin{aligned}\delta - pcl(int(B)) &\subset \delta - pcl(B) \\ &\subset cl(B)\end{aligned}$$

dır.

B açık olduğundan ve X' in açık kümelerinin sınıfı, kapalı kümelerinin sınıfına denk olduğundan $cl(B) = B$ olup

$$\begin{aligned}\delta - pcl(int(A)) &\subset \delta - pcl(int(B)) \\ &\subset \delta - pcl(B) \\ &\subset cl(B) \\ &= B\end{aligned}$$

olur.

Sonuç olarak

$$\delta - pcl(int(A)) \subset B$$

olduğundan A zayıf $g\delta p$ -kapalıdır.

Teorem 3.26. (X, τ) regüler topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kompakt ise zayıf $g\delta p$ -kapalıdır.

İspat.

$A \subset X$ ve A kompakt bir küme $A \subset B$ ve $B \subset X$ açık küme olsun.

$$int(A) \subset A \subset V \subset cl(V) \subset B$$

olacak biçimde bir V açık kümesi vardır.

Buradan

$$\delta - pcl(int(A)) \subset \delta - pcl(cl(V))$$

olur.

$cl(V)$ δ -önkapalı küme olduğundan, $\delta - pcl(cl(V)) = cl(V)$ olup

$$\delta - pcl(int(A)) \subset cl(V) \subset B$$

olur.

O halde A zayıf $g\delta p$ -kapalıdır.

Teorem 3.27. (X, τ) bir simetrik topolojik uzay ise her $x \in X$ için $\{x\}$ tek nokta kümeleri zayıf $g\delta p$ -kapalıdır.

İspat.

(X, τ) simetrik uzay olsun. Varsayalım ki öyle bir $x \in X$ için $\{x\}$ tek nokta kümesi zayıf $g\delta p$ -kapalı olmasın. O halde $\{x\} \subset B$ olmak üzere

$$\delta - pcl(int(\{x\})) \not\subset B$$

olacak şekilde $B \subset X$ açık kümesi vardır.

$$\begin{aligned} \delta - pcl(int(\{x\})) &\subset \delta - pcl(\{x\}) \\ &\subset cl(\{x\}) \end{aligned}$$

olduğundan

$$cl(\{x\}) \not\subset B$$

olur.

Buradan

$$cl(\{x\}) \cap (X \setminus B) \neq \emptyset$$

olur.

O halde

$$y \in cl(\{x\}) \cap (X \setminus B)$$

olacak şekilde bir $y \in X$ vardır.

Buradan

$$y \in cl(\{x\})$$

olur.

(X, τ) simetrik bir uzay olduğundan

$$x \in cl(\{y\})$$

olur.

Aynı zamanda $\{y\} \subset X \setminus B$ olduğundan $cl(\{y\}) \subset cl(X \setminus B)$ olur. $X \setminus B$ kapalı olduğundan $cl(\{y\}) \subset X \setminus B$ olup

$$x \in cl(\{y\}) \subset X \setminus B$$

olur.

Buradan

$$x \notin B$$

olur. Bu ise varsayımımız olan $\{x\} \subset B$ ile çelişir.

Sonuç olarak her $x \in X$ için $\{x\}$ zayıf $g\delta p$ -kapalı kümedir.

Tanım 3.28. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun.

$$zg\delta p - cl(A) = \cap \{B : A \subset B \text{ ve } B, X' \text{ in zayıf } g\delta p - \text{kapalı bir alt kümesi}\}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 3.29. (X, τ) bir topolojik uzay, $x \in X$ ve $A \subset X$ olsun. $x \in zg\delta p - cl(A)$ olması

için gerek ve yeter şart x' i bulunduran her $B \subset X$ zayıf $g\delta p$ -açık kümesi için $A \cap B \neq \emptyset$ olmasıdır.

İspat.

$A \subset X$ ve $x \in zg\delta p - cl(A)$ olsun. Varsayalım ki

$$A \cap B = \emptyset$$

olacak şekilde x' i bulunduran bir B zayıf $g\delta p$ -açık kümesi var olsun.

Buradan

$$A \subset X \setminus B$$

olur.

$X \setminus B$ zayıf $g\delta p$ -kapalı olduğundan

$$zg\delta p - cl(A) \subset X \setminus B$$

olur.

Buradan

$$x \notin zg\delta p - cl(A)$$

olur ve bu bir çelişkidir.

O halde $A \cap B \neq \emptyset$ olmalıdır.

Tersine, x' i bulunduran her $B \subset X$ zayıf $g\delta p$ -açık kümesi için $A \cap B \neq \emptyset$ olsun.

Varsayalım ki

$$x \notin zg\delta p - cl(A)$$

olsun. $x \notin B$ olacak şekilde $A \subset B$ olan bir B zayıf $g\delta p$ -kapalı kümesi vardır. Buradan

$x \in X \setminus B$ ve $X \setminus B$ zayıf $g\delta p$ -açıktır.

$A \subset B$ olduğundan

$$A \cap (X \setminus B) = \emptyset$$

olur ve bu bir çelişkidir.

O halde $x \in zg\delta p - cl(A)$ olmalıdır.

Teorem 3.30. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A, B \subset X$ olmak üzere $A \subset B$ ise

$$zg\delta p - cl(A) \subset zg\delta p - cl(B)$$

olur.

İspat.

$A, B \subset X$ olsun. $A \subset B$ olmak üzere

$$x \in zg\delta p - cl(A)$$

olsun.

O halde bir önceki teorem gereğince x' i bulunduran her V zayıf $g\delta p$ -açık kümesi için

$$A \cap V \neq \emptyset$$

olur.

$A \subset B$ olduğundan

$$B \cap V \neq \emptyset$$

olur.

O halde yine bir önceki teorem gereğince

$$x \in zg\delta p - cl(B)$$

olur.

Sonuç olarak, $zg\delta p - cl(A) \subset zg\delta p - cl(B)$ elde edilir.

Teorem 3.31. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A, B \subset X$ ise

$$zg\delta p - cl(A \cap B) \subset zg\delta p - cl(A) \cap zg\delta p - cl(B)$$

sağlanır.

İspat.

$A, B \subset X$ olsun. $x \in zg\delta p - cl(A \cap B)$ alalım. O halde Teorem 3.29. dan x' i bulunduran her V zayıf $g\delta p$ -açık kümesi için

$$(A \cap B) \cap V \neq \emptyset$$

olur.

Yani x' i bulunduran her V zayıf $g\delta p$ -açık kümesi için

$$A \cap V \neq \emptyset \text{ ve } B \cap V \neq \emptyset$$

olur.

O halde yine Teorem 3.29. dan

$$x \in zg\delta p - cl(A) \text{ ve } x \in zg\delta p - cl(B)$$

yazabiliriz.

Buradan

$$x \in zg\delta p - cl(A) \cap zg\delta p - cl(B)$$

olur.

Böylece

$$zg\delta p - cl(A \cap B) \subset zg\delta p - cl(A) \cap zg\delta p - cl(B)$$

elde edilir.

Tanım 3.32. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesini kapsayan bütün zayıf

$g\delta p$ -açık kümelerin arakesitine A kümesinin zayıf $g\delta p$ -çekirdeği denir.

Bir $A \subset X$ kümesinin zayıf $g\delta p$ -çekirdeğini $zg\delta p - çek(A)$ ile göstereceğiz.

Teorem 3.33. (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ ve X uzayında her zayıf $g\delta p$ -açık küme açık olsun. A kümesinin zayıf $g\delta p$ -kapalı olması için gerek ve yeter koşul $\delta - pcl(int(A)) \subset zg\delta p - çek(A)$ olmasıdır.

İspat.

Varsayalım ki, A zayıf $g\delta p$ -kapalı küme olsun. Hipotezden her zayıf $g\delta p$ -açık küme açık olduğundan A kümesini kapsayan her zayıf $g\delta p$ -açık küme, açık olacaktır.

A zayıf $g\delta p$ -kapalı küme olduğundan, A kümesini kapsayan her zayıf $g\delta p$ -açık küme $\delta - pcl(int(A))$ ' yı kapsar. Dolayısıyla A kümesini kapsayan bütün zayıf $g\delta p$ -açık kümelerin arakesiti de $\delta - pcl(int(A))$ ' yı kapsar.

O halde

$$\delta - pcl(int(A)) \subset zg\delta p - çek(A)$$

elde ederiz.

Tersine, $\delta - pcl(int(A)) \subset zg\delta p - çek(A)$ olsun. $A \subset B$ ve B açık olsun. Bu durumda B zayıf $g\delta p$ -açık küme olup

$$zg\delta p - çek(A) \subset B$$

olur. Hipotezden $\delta - pcl(int(A)) \subset zg\delta p - çek(A)$ olduğundan $\delta - pcl(int(A)) \subset B$ dir.

Sonuç olarak, A zayıf $g\delta p$ -kapalıdır.

Teorem 3.34. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A 'nın zayıf $g\delta p$ -kapalı olması için gerek ve yeter şart $\delta - pcl(int(A)) \subset çek(A)$ olmasıdır.

İspat.

Varsayalım ki, A zayıf $g\delta p$ -kapalı küme olsun. A kümesini kapsayan her V açık kümesi için $\delta - pcl(int(A)) \subset V$ olur. $çek(A)$, A kümesini kapsayan bütün açıkların arakesiti idi. Dolayısıyla $\delta - pcl(int(A))$, A kümesini kapsayan bütün V açıklarının arakesitinde de bulunur. Yani,

$$\delta - pcl(int(A)) \subset çek(A)$$

olur.

Tersine, $\delta - pcl(int(A)) \subset çek(A)$ olsun. $A \subset V$ ve V açık olsun. Buradan

$\text{çek}(A) \subset V$ olup $\delta - \text{pcl}(\text{int}(A)) \subset V$ elde edilir.

Böylece, A zayıf $g\delta p$ -kapalı kümedir.

Teorem 3.35. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $WG\delta PO(X)$, X ' teki bütün zayıf $g\delta p$ -açık kümeler sınıfını göstermek üzere $\tau \equiv \text{int}(WG\delta PO(X))$ olur.

İspat.

$A \in \tau$ olsun. Bu durumda her açık küme zayıf $g\delta p$ -açık küme olduğundan, A zayıf $g\delta p$ -açık küme olup $A \in WG\delta PO(X)$ olur. $A = \text{int}(A)$ olduğundan $A \in \text{int}(WG\delta PO(X))$ olur.

Tersine, $A \in \text{int}(WG\delta PO(X))$ olsun. O zaman öyle bir $B \in WG\delta PO(X)$ kümesi için

$$A = \text{int}(B)$$

olur.

O halde $A \in \tau$ olur.

Sonuç olarak, $\tau \equiv \text{int}(WG\delta PO(X))$ olur.

Teorem 3.36. (X, τ) ve (X, τ^*) iki topolojik uzay olsun. Eğer

$$WG\delta PO(X, \tau) \subset WG\delta PO(X, \tau^*)$$

ise $\tau \subset \tau^*$ olur.

İspat.

$WG\delta PO(X, \tau) \subset WG\delta PO(X, \tau^*)$ olsun. Bu durumda

$$\text{int}(WG\delta PO(X, \tau)) \subset \text{int}(WG\delta PO(X, \tau^*))$$

olur.

O halde bir önceki teoremden, $\tau \subset \tau^*$ olur.

Teorem 3.37. (X, τ) ve (X, τ^*) iki topolojik uzay olsun. Eğer

$$WG\delta PO(X, \tau) = WG\delta PO(X, \tau^*)$$

ise o zaman $\tau = \tau^*$ olur.

İspat.

$WG\delta PO(X, \tau) = WG\delta PO(X, \tau^*)$ olsun. Bu durumda

$$WG\delta PO(X, \tau) \subset WG\delta PO(X, \tau^*)$$

ve

$$WG\delta PO(X, \tau^*) \subset WG\delta PO(X, \tau)$$

olur.

O halde bir önceki teoremden $\tau \subset \tau^*$ ve $\tau^* \subset \tau$ olup $\tau = \tau^*$ olur.

Tanım 3.38. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $x \neq y$ olmak koşuluyla her $x, y \in X$ noktaları için $x \in A, y \notin A$ olacak şekilde $A \subset X$ zayıf $g\delta p$ -açık kümesi veya $x \notin B, y \in B$ olacak şekilde $B \subset X$ zayıf $g\delta p$ -açık kümesi varsa X uzayına zayıf $g\delta p-T_0$ uzay denir.

Teorem 3.39. (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere eğer X, T_0 uzay ise zayıf $g\delta p-T_0$ uzaydır.

İspat.

Varsayalım ki X, T_0 uzay olsun. $x \neq y$ olmak üzere $x, y \in X$ için $x \in A, y \notin A$ olacak şekilde $A \subset X$ açık kümesi veya $x \notin B, y \in B$ olacak şekilde $B \subset X$ açık kümesi vardır.

O halde Teorem 3.5. den A ve B kümeleri zayıf $g\delta p$ -açık kümeler olup X zayıf $g\delta p-T_0$ uzay olur.

Teorem 3.40. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. X , zayıf $g\delta p-T_0$ uzaydır ancak ve ancak $x \neq y$ olmak üzere her $x, y \in X$ noktaları için $zg\delta p - cl(\{x\}) \neq zg\delta p - cl(\{y\})$ olur.

İspat.

Buna denk olarak; “ X , zayıf $g\delta p-T_0$ uzay değildir ancak ve ancak $x \neq y$ olmak üzere $zg\delta p - cl(\{x\}) = zg\delta p - cl(\{y\})$ olacak şekilde en az bir $x, y \in X$ nokta çifti vardır”, ifadesini ispatlayalım.

Eğer X zayıf $g\delta p-T_0$ değilse birini içeren her zayıf $g\delta p$ -açık küme diğerini de içerecek ve $x \neq y$ olacak şekilde $x, y \in X$ noktaları vardır. $a \in zg\delta p - cl(\{x\})$ ve $a \in A \subset X$ zayıf $g\delta p$ -açık küme olsun. O halde Teorem 3.29. dan $A \cap \{x\} \neq \emptyset$ olur. Böylece A, x' i içeren bir zayıf $g\delta p$ -açık küme olur. Fakat x' i içeren her zayıf $g\delta p$ -açık küme y' yi de içerdüğinden $A \cap \{y\} \neq \emptyset$ olur.

O halde yine Teorem 3.29. dan $a \in zg\delta p - cl(\{y\})$ olur.

Sonuç olarak $zg\delta p - cl(\{x\}) \subset zg\delta p - cl(\{y\})$ olur.

Benzer şekilde $zg\delta p - cl(\{y\}) \subset zg\delta p - cl(\{x\})$ olduğu gösterilir.

Böylece, $zg\delta p - cl(\{x\}) = zg\delta p - cl(\{y\})$ olur.

Tersine, $zg\delta p - cl(\{x\}) = zg\delta p - cl(\{y\})$ ve $x \neq y$ olacak şekilde $x, y \in X$ noktaları bulunsun. $x \in zg\delta p - cl(\{x\}) = zg\delta p - cl(\{y\})$ olduğundan x' i içeren her A

zayıf $g\delta p$ -açık kümesi için $A \cap \{y\} \neq \emptyset$ olur. Yani x' i içeren her A zayıf $g\delta p$ -açık kümesi aynı zamanda y' yi de içermiş olur.

Aynı zamanda $y \in zg\delta p - cl(\{y\}) = zg\delta p - cl(\{x\})$ olduğundan y' yi içeren her A zayıf $g\delta p$ -açık kümesi için $A \cap \{x\} \neq \emptyset$ olur.

Yani y' yi içeren her A zayıf $g\delta p$ -açık kümesi aynı zamanda x' i de içermiş olur.

O halde bu uzay zayıf $g\delta p-T_0$ değildir.

Tanım 3.41. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $x \neq y$ olmak üzere her $x, y \in X$ noktaları için $x \in A, y \notin A$ ve $x \notin B, y \in B$ olacak biçimde $A, B \subset X$ zayıf $g\delta p$ -açık kümeleri varsa X uzayına zayıf $g\delta p-T_1$ uzay denir.

Teorem 3.42. (X, τ) topolojik uzayı T_1 uzay ise zayıf $g\delta p-T_1$ uzaydır.

İspat.

Varsayalım ki, X T_1 uzay olsun. Bu durumda $x \neq y$ olmak üzere $x, y \in X$ için $x \in A, y \notin A$ ve $x \notin B, y \in B$ olacak biçimde $A, B \subset X$ açık kümeleri vardır.

O halde Teorem 3.5. den A ve B kümeleri zayıf $g\delta p$ -açık olup X , zayıf $g\delta p-T_1$ uzay olur.

Teorem 3.43. (X, τ) topolojik uzayı zayıf $g\delta p-T_1$ uzay ise zayıf $g\delta p-T_0$ uzaydır.

İspat.

Zayıf $g\delta p-T_1$ uzay ve zayıf $g\delta p-T_0$ uzay tanımlarından bu kolayca görülür.

Teorem 3.44. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Her $x \in X$ için $\{x\}$ tek nokta kümesi zayıf $g\delta p$ -kapalı ise X zayıf $g\delta p-T_1$ uzaydır.

İspat.

Her $x \in X$ için $\{x\}$ tek nokta kümesi zayıf $g\delta p$ -kapalı olsun.

$x \neq y$ olacak şekilde $x, y \in X$ noktaları alalım. Bu durumda $\{x\}$ ve $\{y\}$ zayıf $g\delta p$ -kapalı olur.

Dolayısıyla, $X \setminus \{x\}$ ve $X \setminus \{y\}$ zayıf $g\delta p$ -açık olur.

Ayrıca $x \in X \setminus \{y\}, y \notin X \setminus \{y\}$ ve $x \notin X \setminus \{x\}, y \in X \setminus \{x\}$ dir.

O halde X zayıf $g\delta p-T_1$ uzaydır.

Tanım 3.45. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $x \neq y$ olmak üzere her $x, y \in X$ noktaları için

$x \in A, y \in B$ ve $A \cap B = \emptyset$ olacak biçimde $A, B \subset X$ zayıf $g\delta p$ -açık kümeleri var ise X uzayına zayıf $g\delta p-T_2$ uzay denir.

Teorem 3.46. (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere X, T_2 uzay ise zayıf $g\delta p-T_2$ uzaydır.

İspat.

X, T_2 uzay olsun. $x \neq y$ olmak üzere her $x, y \in X$ noktaları için $x \in A, y \in B$ ve $A \cap B = \emptyset$ olacak şekilde $A, B \subset X$ açık kümeleri vardır.

Teorem 3.5. den A ve B kümeleri zayıf $g\delta p$ -açık olduğundan X zayıf $g\delta p-T_2$ uzaydır.

Teorem 3.47. (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere X , zayıf $g\delta p-T_2$ uzay ise zayıf $g\delta p-T_1$ uzaydır.

İspat.

X zayıf $g\delta p-T_2$ uzay olsun. $x \neq y$ olmak üzere her $x, y \in X$ noktaları için $x \in A, y \in B$ ve $A \cap B = \emptyset$ olacak şekilde $A, B \subset X$ zayıf $g\delta p$ -açık kümeleri vardır. $A \cap B = \emptyset$ olduğundan $y \notin A$ ve $x \notin B$ olur. Bu durumda $x \neq y$ olmak üzere her $x, y \in X$ noktaları için $x \in A, y \notin A$ ve $x \notin B, y \in B$ olacak şekilde A ve B zayıf $g\delta p$ -açık kümeleri bulunmuş olur.

O halde X zayıf $g\delta p-T_1$ uzaydır.

Teorem 3.48. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X zayıf $g\delta p-T_2$ uzay ise $x \in X$ olmak üzere x' i içeren bütün zayıf $g\delta p$ -kapalı kümelerin arakesiti yalnız bu noktadan ibarettir.

İspat.

Varsayalım ki, X zayıf $g\delta p-T_2$ uzay olsun. Sabit bir $p \in X$ seçelim. $p \neq x \in X$ ise uzay zayıf $g\delta p-T_2$ olduğundan $p \in A, x \in B$ ve $A \cap B = \emptyset$ olacak şekilde $A, B \subset X$ zayıf $g\delta p$ -açık kümeleri vardır. Bu durumda $X \setminus B$ zayıf $g\delta p$ -kapalı olup $x \notin X \setminus B$ ve $p \in X \setminus B$ olur.

O halde x noktası p' yi içeren zayıf $g\delta p$ -kapalı kümelerin arakesitine ait olamaz.

Her $x \neq p$ noktası için aynı durum söylenebileceği için bu arakesit p' den farklı hiçbir noktayı içermez.

Tanım 3.49. (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere $F \subset X$ kapalı, $x \in X$ ve $x \notin F$ olsun. Eğer $F \subset U, x \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \subset X$ zayıf $g\delta p$ -açık kümeleri varsa

bu uzaya zayıf $g\delta p$ -regüler uzay denir.

Teorem 3.50. (X, τ) regüler bir topolojik uzay ise zayıf $g\delta p$ -regüler uzaydır.

İspat.

$F \subset X$ kapalı küme ve $x \notin F$ olsun. Eğer X regüler uzay ise $F \subset U, x \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \subset X$ açık kümeleri vardır. Teorem 3.5. den U ve V kümeleri zayıf $g\delta p$ -açık olduğundan, X zayıf $g\delta p$ -regüler uzaydır.

Teorem 3.51. (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere eğer X uzayının her zayıf $g\delta p$ -açık alt kümesi kapalı ise X zayıf $g\delta p$ -regüler uzaydır.

İspat.

Varsayalım ki, X ' in her zayıf $g\delta p$ -açık alt kümesi kapalı olsun. $F \subset X$ alt kümesi kapalı ve $x \notin F$ olsun. O zaman $x \in X \setminus F$ olup, aynı zamanda F ve $X \setminus F$ kümeleri zayıf $g\delta p$ -açık olur. Sonuç olarak $F \subset F, x \in X \setminus F$ ve $F \cap (X \setminus F) = \emptyset$ olacak şekilde F ve $X \setminus F$ zayıf $g\delta p$ -açık kümeleri bulunduğundan X zayıf $g\delta p$ -regüler uzaydır.

Tanım 3.52. (X, τ) bir topolojik uzay $A, B \subset X$ kapalı kümeler ve $A \cap B = \emptyset$ olsun. Eğer $A \subset U, B \subset V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \subset X$ zayıf $g\delta p$ -açık kümeleri varsa bu uzaya zayıf $g\delta p$ -normal uzay denir.

Teorem 3.53. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. X normal uzay ise zayıf $g\delta p$ -normal uzaydır.

İspat.

$A, B \subset X$ kapalı kümeler ve $A \cap B = \emptyset$ olsun. Eğer X normal uzay ise $A \subset U, B \subset V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \subset X$ açık kümeleri vardır.

Teorem 3.5. den her açık küme zayıf $g\delta p$ -açık küme olduğundan U, V açık kümeleri zayıf $g\delta p$ -açık kümelerdir.

O halde X zayıf $g\delta p$ -normal uzaydır.

Teorem 3.54. (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere X , δp -normal uzay ise zayıf $g\delta p$ -normal uzaydır.

İspat.

$A, B \subset X$ kapalı kümeler ve $A \cap B = \emptyset$ olsun. Eğer X , δp -normal uzay ise

$A \subset U, B \subset V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \subset X$ δ -önaçık kümeleri vardır. Her δ -önaçık küme $g\delta p$ -açık olup Teorem 3.10. dan her $g\delta p$ -açık küme zayıf $g\delta p$ -açık küme olduğundan U, V δ -önaçık kümeleri zayıf $g\delta p$ -açık kümelerdir.

O halde X zayıf $g\delta p$ -normal uzaydır.

Teorem 3.55. (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere eğer X' in her zayıf $g\delta p$ -açık alt kümesi kapalı ise X zayıf $g\delta p$ -normal uzaydır.

İspat.

Varsayalım ki, X' in her zayıf $g\delta p$ -açık alt kümesi kapalı olsun. $A \cap B = \emptyset$ olmak üzere $A, B \subset X$ kapalı alt kümelerini alalım. O halde A ve B kapalı kümeleri zayıf $g\delta p$ -açık olur.

Sonuç olarak $A \subset A, B \subset B$ ve $A \cap B = \emptyset$ olacak şekilde A ve B zayıf $g\delta p$ -açık kümeleri bulunduğundan X zayıf $g\delta p$ -normal uzaydır.

Teorem 3.56. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X zayıf $g\delta p$ -normal uzay ise $U \cup V = X$ olan her $U, V \subset X$ açık küme çifti için, $A \subset U, B \subset V$ ve $A \cup B = X$ olacak şekilde $A, B \subset X$ zayıf $g\delta p$ -kapalı kümeleri vardır.

İspat.

$U, V \subset X$ açık kümeler ve $U \cup V = X$ olsun. O zaman

$$(X \setminus U) \cap (X \setminus V) = \emptyset$$

olup $X \setminus U$ ve $X \setminus V$ kapalı kümeler olur. Eğer X zayıf $g\delta p$ -normal uzay ise

$$X \setminus U \subset M, X \setminus V \subset N \text{ ve } M \cap N = \emptyset$$

olacak şekilde $M, N \subset X$ zayıf $g\delta p$ -açık kümeleri vardır.

$A = X \setminus M$ ve $B = X \setminus N$ olsun. $M \cap N = \emptyset$ olduğundan $A \cup B = X$ olur. $X \setminus U \subset M$ olduğundan $A \subset U$ olur. $X \setminus V \subset N$ olduğundan $B \subset V$ olur.

M ve N zayıf $g\delta p$ -açık olduğundan $A = X \setminus M$ ve $B = X \setminus N$ zayıf $g\delta p$ -kapalı olur.

Teorem 3.57. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $M \cup N = X$ olan her $M, N \subset X$ açık küme çifti için $A \subset M, B \subset N$ ve $A \cup B = X$ olacak şekilde zayıf $g\delta p$ -kapalı $A \subset X$ ve δ -önkapalı $B \subset X$ kümeleri var ise, her kapalı $F \subset X$ kümesi ve F kümesini kapsayan her açık $D \subset X$ kümesi için, $F \subset U \subset \delta - pcl(U) \subset D$ olacak şekilde $U \subset X$ zayıf $g\delta p$ -açık kümesi vardır.

İspat.

$F \subset X$ kapalı küme ve $D \subset X$, F kümesini kapsayan açık küme olsun. O zaman $X \setminus F$ ve D açık olup $(X \setminus F) \cup D = X$ olur. O zaman varsayımdan $A \subset (X \setminus F)$, $B \subset D$ ve $(A \cup B) = X$ olacak şekilde zayıf $g\delta p$ -kapalı $A \subset X$ kümesi ve δ -önkapalı $B \subset X$ kümesi vardır. O zaman $F \subset (X \setminus A)$, $(X \setminus D) \subset (X \setminus B)$ ve $((X \setminus A) \cap (X \setminus B)) = \emptyset$ olur.

$$U = (X \setminus A) \text{ ve } V = (X \setminus B) \text{ olsun.}$$

O zaman U ve V , $F \subset U \subset (X \setminus V) \subset D$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde sırasıyla zayıf $g\delta p$ -açık ve δ -önaçık kümelerdir. $X \setminus V$, δ -önkapalı küme olduğundan

$$\delta - pcl(U) \subset X \setminus V$$

olur.

$$\text{Buradan } F \subset U \subset \delta - pcl(U) \subset D \text{ olur.}$$

Teorem 3.58. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $M \cup N = X$ olan her $M, N \subset X$ açık küme çifti için, $A \subset M, B \subset N$ ve $A \cup B = X$ olacak şekilde $A, B \subset X$ zayıf $g\delta p$ -kapalı kümeleri var ise, her kapalı $F \subset X$ kümesi ve F kümesini kapsayan her açık $D \subset X$ kümesi için, $F \subset U \subset zg\delta p - cl(U) \subset D$ olacak şekilde $U \subset X$ zayıf $g\delta p$ -açık kümesi vardır.

İspat.

$$F \subset X \text{ kapalı küme ve } D \subset X, F \text{ kümesini kapsayan açık küme olsun.}$$

O zaman $X \setminus F$ ve D açık olup, $(X \setminus F) \cup D = X$ olur. O zaman varsayımdan

$$A \subset (X \setminus F), B \subset D \text{ ve } (A \cup B) = X$$

olacak şekilde $A, B \subset X$ zayıf $g\delta p$ -kapalı kümeleri vardır. Buradan $F \subset (X \setminus A)$, $(X \setminus D) \subset (X \setminus B)$ ve $((X \setminus A) \cap (X \setminus B)) = \emptyset$ olur.

$$U = (X \setminus A) \text{ ve } V = (X \setminus B) \text{ olsun.}$$

O zaman U ve V , $F \subset U \subset (X \setminus V) \subset D$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde zayıf $g\delta p$ -açık kümelerdir. $X \setminus V$ zayıf $g\delta p$ -kapalı küme olduğundan $zg\delta p - cl(U) \subset X \setminus V$ olur.

$$\text{Buradan } F \subset U \subset zg\delta p - cl(U) \subset D \text{ olur.}$$

Teorem 3.59. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Her $F \subset X$ kapalı kümesi ve F kümesini kapsayan her $D \subset X$ açık kümesi için, $F \subset U \subset \delta - pcl(U) \subset D$ olacak şekilde $U \subset X$ zayıf $g\delta p$ -açık kümesi var ise X zayıf $g\delta p$ -normal uzay olur.

İspat.

$$A, B \subset X \text{ kapalı kümeler ve } A \cap B = \emptyset \text{ olsun. } D = X \setminus B \text{ alalım.}$$

Bu durumda $B \cap D = \emptyset$ ve D açık bir küme olup $A \subset D$ olur. O zaman varsayım gereği $A \subset U \subset \delta - pcl(U) \subset D$ olacak şekilde $U \subset X$ zayıf $g\delta p$ -açık kümesi vardır. $\delta - pcl(U) \subset D$ olduğundan

$$(X \setminus D) \subset (X \setminus \delta - pcl(U))$$

olup

$$B \subset (X \setminus \delta - pcl(U))$$

olur. $(X \setminus \delta - pcl(U)) = V$ dersek $B \subset V$ olur. $\delta - pcl(U)$, δ -önkapalı olduğundan

$$(X \setminus \delta - pcl(U)) = V$$

δ -önaçık olur. Her δ -önaçık bir küme $g\delta p$ -açık olup Teorem 3.10. dan $g\delta p$ -açık küme zayıf $g\delta p$ -açık küme olduğundan δ -önaçık bir küme zayıf $g\delta p$ -açık olup

$$(X \setminus \delta - pcl(U)) = V$$

kümesi zayıf $g\delta p$ -açık kümedir.

$$\left((X \setminus \delta - pcl(U)) \cap (\delta - pcl(U)) \right) = \emptyset$$

oldüğundan ve $U \subset (\delta - pcl(U))$ olduğundan $(V \cap U) = \emptyset$ olur.

O halde X zayıf $g\delta p$ -normal uzaydır.

BÖLÜM 4
TOPOLOJİK UZAYLARDA ZAYIF $g\delta pr$ -KAPALI KÜMELER
VE
ÖZELLİKLERİ

Tanım 4.1. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. V, X 'in düzenli açık bir alt kümesi olmak üzere $A \subset V$ iken $\delta - pcl(int(A)) \subset V$ oluyorsa A kümesine zayıf $g\delta pr$ -kapalı küme denir.

Örnek 4.2. $X = \{\alpha, \beta, \gamma\}, \tau = \{X, \emptyset, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\alpha, \beta\}, \{\beta, \gamma\}\}$ olmak üzere $A = \{\beta\}$ kümesini alalım. Buradan $A \subset V$ olan her V düzenli açık kümesi için $\delta - pcl(int(A)) \subset V$ olur.

O halde $A = \{\beta\}$, zayıf $g\delta pr$ -kapalı kümedir.

Tanım 4.3. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $X \setminus A$ kümesi zayıf $g\delta pr$ -kapalı küme ise A kümesine zayıf $g\delta pr$ -açık küme denir.

Teorem 4.4. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kapalı bir küme ise zayıf $g\delta pr$ -kapalıdır.

İspat.

$A \subset X$ kapalı bir küme olsun. V düzenli açık küme ve $A \subset V$ olsun.

Bu durumda

$$\begin{aligned} \delta - pcl(int(A)) &\subset \delta - pcl(A) \\ &\subset cl(A) \\ &= A \\ &\subset V \end{aligned}$$

olur.

Yani $\delta - pcl(int(A)) \subset V$ elde ederiz. Böylece A zayıf $g\delta pr$ -kapalıdır.

Teorem 4.5. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A açık bir küme ise A zayıf $g\delta pr$ -açıktır.

İspat.

Varsayalım ki $A \subset X$ açık bir küme olsun. Bu durumda $X \setminus A$ kapalıdır. Bir önceki

teoremden $X \setminus A$ zayıf $g\delta pr$ -kapalıdır.

O halde A zayıf $g\delta pr$ -açıktır.

Teorem 4.6. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A g -kapalı bir küme ise A zayıf $g\delta pr$ -kapalıdır.

İspat.

$A \subset V$ ve V düzenli açık küme olsun. V düzenli açık olduğundan aynı zamanda açık olup, A g -kapalı olduğundan $cl(A) \subset V$ olur.

O halde

$$\begin{aligned}\delta - pcl(int(A)) &\subset \delta - pcl(A) \\ &\subset cl(A) \\ &\subset V\end{aligned}$$

sağlandığından A zayıf $g\delta pr$ -kapalıdır.

Teorem 4.7. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A g -açık bir küme ise A zayıf $g\delta pr$ -açıktır.

İspat.

A g -açık bir küme ise $X \setminus A$ g -kapalıdır. Bir önceki teoremden $X \setminus A$ zayıf $g\delta pr$ -kapalıdır.

O halde A zayıf $g\delta pr$ -açıktır.

Teorem 4.8. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A $g\delta p$ -kapalı bir küme ise A zayıf $g\delta pr$ -kapalıdır.

İspat.

$A \subset V$ ve V düzenli açık olsun. V düzenli açık olduğundan aynı zamanda açık olup A $g\delta p$ -kapalı olduğundan $\delta - pcl(A) \subset V$ olur.

O halde

$$\begin{aligned}\delta - pcl(int(A)) &\subset \delta - pcl(A) \\ &\subset V\end{aligned}$$

sağlanır.

Böylece A zayıf $g\delta pr$ -kapalıdır.

Teorem 4.9. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A $g\delta p$ -açık bir küme ise A zayıf

$g\delta pr$ -açıktır.

İspat.

A $g\delta p$ -açık bir küme olsun. $X \setminus A$ $g\delta p$ -kapalı olup bir önceki teoremden $X \setminus A$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı bir kümedir.

O halde A zayıf $g\delta pr$ -açıktır.

Teorem 4.10. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A $g\delta pr$ -kapalı bir küme ise A zayıf $g\delta pr$ -kapalıdır.

İspat.

$A \subset V$ ve V düzenli açık olsun. A $g\delta pr$ -kapalı olduğundan $\delta - pcl(A) \subset V$ olur.

O halde

$$\begin{aligned}\delta - pcl(int(A)) &\subset \delta - pcl(A) \\ &\subset V\end{aligned}$$

sağlandığından A zayıf $g\delta pr$ -kapalıdır.

Teorem 4.11. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A açık ve zayıf $g\delta pr$ -kapalı bir küme ise A $g\delta pr$ -kapalıdır.

İspat.

$A \subset V$ ve V düzenli açık küme olsun. A zayıf $g\delta pr$ -kapalı olduğundan

$$\delta - pcl(int(A)) \subset V$$

olur. A açık küme olduğundan

$$\delta - pcl(A) = \delta - pcl(int(A)) \subset V$$

sağlanır.

Böylece A $g\delta pr$ -kapalıdır.

Teorem 4.12. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A $g\delta pr$ -açık bir küme ise A zayıf $g\delta pr$ -açıktır.

İspat.

A $g\delta pr$ -açık bir küme olsun. $X \setminus A$ $g\delta pr$ -kapalı bir kümedir.

Teorem 4.10. dan $X \setminus A$ zayıf $g\delta pr$ -kapalıdır.

O halde A zayıf $g\delta pr$ -açıktır.

Teorem 4.13. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kapalı ve zayıf $g\delta pr$ -açık bir

küme ise A $g\delta pr$ -açıktır.

İspat.

A kapalı ve zayıf $g\delta pr$ -açık bir küme olsun. Buradan $X \setminus A$ açık ve zayıf $g\delta pr$ -kapalı bir küme olur. $X \setminus A \subset V$ ve V düzenli açık küme olsun. $X \setminus A$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı olduğundan

$$\delta - pcl(int(X \setminus A)) \subset V$$

olur. $X \setminus A$ açık olduğundan

$$\delta - pcl(X \setminus A) = \delta - pcl(int(X \setminus A)) \subset V$$

sağlanır. Böylece $X \setminus A$ $g\delta pr$ -kapalı olur.

O halde A $g\delta pr$ -açıktır.

Teorem 4.14. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A, B \subset X$ olsun. $A^\sim \subset A^{\delta P^\sim}$ ve $B^\sim \subset B^{\delta P^\sim}$ olmak üzere A, B açık ve zayıf $g\delta pr$ -kapalı kümeler ise $A \cup B$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı kümedir.

İspat.

Kabul edelim ki $A, B \subset X$ açık ve zayıf $g\delta pr$ -kapalı kümeler ve $A^\sim \subset A^{\delta P^\sim}$, $B^\sim \subset B^{\delta P^\sim}$ olsun. $A \cup B \subset V$ ve V düzenli açık olsun. $A \subset V$ ve $B \subset V$ olur. A ve B zayıf $g\delta pr$ -kapalı kümeler olduğundan

$$\delta - pcl(int(A)) \subset V \text{ ve } \delta - pcl(int(B)) \subset V$$

olur. Buradan $(\delta - pcl(int(A))) \cup (\delta - pcl(int(B))) \subset V$ dir.

Öte yandan, varsayım gereği $A^\sim \subset A^{\delta P^\sim}$ olduğundan ve $A^{\delta P^\sim} \subset \delta - pcl(A)$ olduğundan $A^\sim \subset \delta - pcl(A)$ olur. Benzer şekilde $B^\sim \subset \delta - pcl(B)$ dir.

Buradan

$$cl(A) = A^\sim \cup A \subset (\delta - pcl(A)) \cup A = \delta - pcl(A)$$

olup

$$cl(A) \subset \delta - pcl(A)$$

dir. Aynı zamanda

$$\delta - pcl(A) \subset cl(A)$$

oldüğundan

$$cl(A) = \delta - pcl(A)$$

dir. Benzer şekilde

$$cl(B) = \delta - pcl(B)$$

dir.

$$\begin{aligned}
\delta - pcl(int(A \cup B)) &= \delta - pcl(A \cup B) \\
&\subset cl(A \cup B) \\
&= cl(A) \cup cl(B) \\
&= (\delta - pcl(A)) \cup (\delta - pcl(B)) \\
&= (\delta - pcl(int(A))) \cup (\delta - pcl(int(B))) \\
&\subset V
\end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak

$$\delta - pcl(int(A \cup B)) \subset V$$

elde edilir.

O halde $A \cup B$ zayıf $g\delta pr$ -kapalıdır.

Teorem 4.15. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A, B \subset X$ olsun. $(X \setminus A)^\sim \subset (X \setminus A)^{\delta P^\sim}$ ve $(X \setminus B)^\sim \subset (X \setminus B)^{\delta P^\sim}$ olmak üzere A, B kapalı ve zayıf $g\delta pr$ -açık kümeler ise $A \cap B$ zayıf $g\delta pr$ -açık kümedir.

İspat.

Varsayalım ki $A, B \subset X$ kapalı ve zayıf $g\delta pr$ -açık kümeler ve

$$(X \setminus A)^\sim \subset (X \setminus A)^{\delta P^\sim} \text{ ve } (X \setminus B)^\sim \subset (X \setminus B)^{\delta P^\sim}$$

olsun. Burada $X \setminus A$ ve $X \setminus B$ açık ve zayıf $g\delta pr$ -kapalı kümeler olup bir önceki teoremden $(X \setminus A) \cup (X \setminus B)$ zayıf $g\delta pr$ -kapalıdır. $(X \setminus A) \cup (X \setminus B) = X \setminus (A \cap B)$ olduğundan $X \setminus (A \cap B)$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı olup $A \cap B$ zayıf $g\delta pr$ -açık olur.

Teorem 4.16. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A zayıf $g\delta pr$ -kapalı bir küme ise, $\delta - pcl(int(A)) \setminus A$ boştan farklı düzenli kapalı bir küme kapsamaz.

İspat.

F düzenli kapalı bir küme ve $F \subset \delta - pcl(int(A)) \setminus A$ olsun. O zaman

$$X \setminus (\delta - pcl(int(A)) \setminus A) \subset X \setminus F$$

olur.

$$A \subset X \setminus (\delta - pcl(int(A)) \setminus A)$$

olduğundan $A \subset X \setminus F$ olur.

A zayıf $g\delta pr$ -kapalı bir küme olduğu için

$$\delta - pcl(int(A)) \subset X \setminus F$$

olur.

Buradan $F \subset X \setminus \delta - pcl(int(A))$ olur.

O halde,

$$F \subset \left((X \setminus \delta - pcl(int(A))) \cap (\delta - pcl(int(A))) \right) = \emptyset$$

olup $F = \emptyset$ dir.

Teorem 4.17. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $\delta - pcl(int(A)) \setminus A$ boştan farklı δ -önkapalı bir küme kapsamıyor ise A zayıf $g\delta pr$ -kapalıdır.

İspat.

Varsayalım ki, $A \subset V$ ve V düzenli açık bir küme olsun. $\delta - pcl(int(A)) \setminus A$ boştan farklı δ -önkapalı bir küme içermesin.

Eğer $\delta - pcl(int(A)) \not\subset V$ ise,

$$(\delta - pcl(int(A))) \cap (X \setminus V),$$

$\delta - pcl(int(A)) \setminus A$ kümesinin boştan farklı δ -önkapalı bir alt kümesi olur. Böylece varsayım ile çelişki elde ederiz.

Bu yüzden $\delta - pcl(int(A)) \subset V$ olmalıdır.

O halde A zayıf $g\delta pr$ -kapalıdır.

Teorem 4.18. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesinin zayıf $g\delta pr$ -açık olması için gerek ve yeter koşul F düzenli kapalı olmak üzere $F \subset A$ iken $F \subset \delta - pint(cl(A))$ olmasıdır.

İspat.

$F \subset A$ ve F düzenli kapalı olsun. O halde $X \setminus A \subset X \setminus F$ olur. A zayıf $g\delta pr$ -açık bir küme olduğundan $X \setminus A$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı bir küme olup

$$\delta - pcl(int(X \setminus A)) \subset X \setminus F$$

olur. Buradan

$$F \subset X \setminus \delta - pcl(int(X \setminus A))$$

olur.

Buradan $F \subset X \setminus \delta - pcl(X \setminus cl(A))$ olup $F \subset \delta - pint(cl(A))$ olur.

Tersine, $X \setminus A \subset V$ ve V düzenli açık olsun. O halde $X \setminus V$ düzenli kapalı ve $X \setminus V \subset A$ olur. Varsayımdan $X \setminus V \subset \delta - pint(cl(A))$ olur. Buradan

$$\delta - pcl(int(X \setminus A)) \subset V$$

olur.

Böylece $X \setminus A$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı olduğundan, A zayıf $g\delta pr$ -açıktır.

Teorem 4.19. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A, B \subset X$ olsun. A zayıf $g\delta pr$ -kapalı ve

$$A \subset B \subset \delta - pcl(int(A))$$

ise B zayıf $g\delta pr$ -kapalıdır.

İspat.

$B \subset V$ ve V düzenli açık olsun. $A \subset B$ olduğundan $A \subset V$ olur. A zayıf $g\delta pr$ -kapalı olduğundan $\delta - pcl(int(A)) \subset V$ olur. $A \subset B \subset \delta - pcl(int(A))$ olduğundan

$$\delta - pcl(B) \subset \delta - pcl(\delta - pcl(int(A))) = \delta - pcl(int(A))$$

olup

$$\delta - pcl(int(B)) \subset \delta - pcl(B) \subset \delta - pcl(int(A)) \subset V$$

olur.

O halde B zayıf $g\delta pr$ -kapalıdır.

Teorem 4.20. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A, B \subset X$ olsun. A zayıf $g\delta pr$ -açık ve

$$\delta - pint(cl(A)) \subset B \subset A$$

ise B zayıf $g\delta pr$ -açıktır.

İspat.

Varsayalım ki, A zayıf $g\delta pr$ -açık küme ve $\delta - pint(cl(A)) \subset B \subset A$ olsun. Bu durumda

$$X \setminus A \subset X \setminus B \subset X \setminus \delta - pint(cl(A)) = \delta - pcl(int(X \setminus A))$$

olur.

$X \setminus A$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı olduğundan bir önceki teoremden $X \setminus B$ zayıf $g\delta pr$ -kapalıdır.

O halde B zayıf $g\delta pr$ -açıktır.

Teorem 4.21. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A zayıf $g\delta pr$ -açık ve kapalı küme ise $\delta - pint(cl(A))$ zayıf $g\delta pr$ -açıktır.

İspat.

A zayıf $g\delta pr$ -açık ve kapalı küme olsun. $\delta - pint(A) \subset A$ ve A kapalı olduğundan

$$\delta - \text{pint}(cl(A)) = \delta - \text{pint}(A)$$

olup

$$\delta - \text{pint}(cl(A)) \subset A$$

olur. En nihayetinde

$$\delta - \text{pint}(cl(A)) \subset \delta - \text{pint}(cl(A)) \subset A$$

yazabiliriz.

O halde bir önceki teoremden $\delta - \text{pint}(cl(A))$ zayıf $g\delta pr$ -açıktır.

Teorem 4.22. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A, B \subset X$ olsun. B düzenli açık ve

$$\delta - \text{pint}(cl(A)) \cup (X \setminus A) \subset B$$

olmak üzere A zayıf $g\delta pr$ -açık ise $B = X$ olur.

İspat.

Varsayalım ki, B düzenli açık ve $\delta - \text{pint}(cl(A)) \cup (X \setminus A) \subset B$ olsun. Buradan

$$X \setminus B \subset X \setminus (\delta - \text{pint}(cl(A)) \cup (X \setminus A))$$

olup

$$X \setminus B \subset (X \setminus \delta - \text{pint}(cl(A))) \cap A$$

olur. Buradan da

$$\begin{aligned} X \setminus B &\subset \delta - pcl(int(X \setminus A)) \cap A \\ &= \delta - pcl(int(X \setminus A)) \setminus (X \setminus A) \end{aligned}$$

olur. $X \setminus B$ düzenli kapalı olup, $X \setminus A$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı olduğundan dolayı Teorem 4.16. dan $X \setminus B = \emptyset$ olmalıdır.

O halde $B = X$ olur.

Teorem 4.23. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A, B \subset X$ olsun. B δ -önaçık küme iken

$$\delta - \text{pint}(cl(A)) \cup (X \setminus A) \subset B$$

olduğunda $B = X$ ise A zayıf $g\delta pr$ -açıktır.

İspat.

Varsayalım ki, $F \subset A$ olmak üzere F düzenli kapalı bir küme olsun. $F \subset A \subset cl(A)$ olduğundan $X \setminus cl(A) \subset X \setminus A \subset X \setminus F$ olur. $\delta - \text{pint}(cl(A)) \cup (X \setminus F)$ δ -önaçık ve

$$\delta - \text{pint}(cl(A)) \cup (X \setminus A) \subset \delta - \text{pint}(cl(A)) \cup (X \setminus F)$$

olduğundan varsayım gereği

$$\delta - pint(cl(A)) \cup (X \setminus F) = X$$

olur. O halde buradan $F \subset \delta - pint(cl(A))$ olur.

Böylece Teorem 4.18. den A zayıf $g\delta pr$ -açıktır.

Teorem 4.24. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı bir küme ise $\delta - pcl(int(A)) \setminus A$ zayıf $g\delta pr$ -açıktır.

İspat.

A zayıf $g\delta pr$ -kapalı küme ve F , $F \subset \delta - pcl(int(A)) \setminus A$ olacak şekilde bir düzenli kapalı küme olsun.

A zayıf $g\delta pr$ -kapalı olduğundan Teorem 4.16. dan $F = \emptyset$ olmak zorundadır. Böylece $F \subset \delta - pint(cl(\delta - pcl(int(A)) \setminus A))$ olup Teorem 4.18. den

$$\delta - pcl(int(A)) \setminus A$$

zayıf $g\delta pr$ -açıktır.

Teorem 4.25. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X' in her alt kümesi zayıf $g\delta pr$ -kapalı ise her düzenli açık küme δ -önkapalıdır.

İspat.

Varsayalım ki, X' in her alt kümesi zayıf $g\delta pr$ -kapalı ve $A \subset X$ düzenli açık küme olsun.

O halde $\delta - pcl(int(A)) \subset A$ olur.

A açık küme olduğundan

$$\delta - pcl(A) = \delta - pcl(int(A)) \subset A$$

olur.

Aynı zamanda

$$A \subset \delta - pcl(A)$$

sağlandığından

$$A = \delta - pcl(A)$$

olup, A δ -önkapalı olur.

Teorem 4.26. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X' in her alt kümesi zayıf $g\delta pr$ -açık ise her düzenli kapalı küme δ -önaçıktır.

İspat.

Varsayalım ki, X' in her alt kümesi zayıf $g\delta pr$ -açık ve $A \subset X$ düzenli kapalı küme olsun. Bu durumda A aynı zamanda zayıf $g\delta pr$ -açık küme olur. Buradan $X \setminus A$ düzenli açık ve zayıf $g\delta pr$ -kapalı küme olur.

O halde $\delta - pcl(int(X \setminus A)) \subset X \setminus A$ olur.

$X \setminus A$ açık olduğundan

$$\delta - pcl(X \setminus A) = \delta - pcl(int(X \setminus A)) \subset X \setminus A$$

olur.

Aynı zamanda $X \setminus A \subset \delta - pcl(X \setminus A)$ sağlandığından $X \setminus A = \delta - pcl(X \setminus A)$ olup, $X \setminus A$, δ -önkapalı olur.

O halde A , δ -önaçık kümedir.

Teorem 4.27. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X' in açık kümelerinin sınıfı, kapalı kümelerinin sınıfına denk ise X' in her alt kümesi zayıf $g\delta pr$ -kapalıdır.

İspat.

Varsayalım ki, X' in açık kümelerinin sınıfı, kapalı kümelerinin sınıfına denk olsun. $A, B \subset X$, $A \subset B$ ve B düzenli açık olsun. Buradan

$$\delta - pcl(int(A)) \subset \delta - pcl(int(B))$$

olur. Diğer yandan

$$\begin{aligned} \delta - pcl(int(B)) &\subset \delta - pcl(B) \\ &\subset cl(B) \end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz. B düzenli açık küme olduğu için açık kümedir. Üstelik, X' in açık kümelerinin sınıfı kapalı kümelerinin sınıfına denk olduğundan $cl(B) = B$ olup,

$$\begin{aligned} \delta - pcl(int(A)) &\subset \delta - pcl(int(B)) \\ &\subset \delta - pcl(B) \\ &\subset cl(B) \\ &= B \end{aligned}$$

olur.

En nihayetinde $\delta - pcl(int(A)) \subset B$ olduğundan A zayıf $g\delta pr$ -kapalıdır.

Teorem 4.28. (X, τ) regüler topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bu durumda A kompakt ise zayıf $g\delta pr$ -kapalıdır.

İspat.

X regüler uzay, $A \subset X$ kompakt bir küme olsun. Varsayalım ki, $A \subset B$ ve $B \subset X$ düzenli açık küme olsun.

Bu durumda $\text{int}(A) \subset A \subset V \subset \text{cl}(V) \subset B$ olacak şekilde V açık kümesi vardır. Buradan $\delta - \text{pcl}(\text{int}(A)) \subset \delta - \text{pcl}(\text{cl}(V))$ olur.

$\text{cl}(V)$, δ -önkapalı olduğundan

$$\delta - \text{pcl}(\text{cl}(V)) = \text{cl}(V)$$

olup

$$\delta - \text{pcl}(\text{int}(A)) \subset \text{cl}(V) \subset B$$

olur.

Sonuç olarak, $B \subset X$ düzenli açık küme olmak üzere $A \subset B$ iken

$$\delta - \text{pcl}(\text{int}(A)) \subset B$$

olduğundan A zayıf $g\delta pr$ -kapalıdır.

Teorem 4.29. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X simetrik uzay ise her $x \in X$ için $\{x\}$ tek nokta kümeleri zayıf $g\delta pr$ -kapalıdır.

İspat.

X simetrik uzay olsun. Varsayalım ki, öyle bir $x \in X$ için $\{x\}$ tek nokta kümesi zayıf $g\delta pr$ -kapalı olmasın.

Bu durumda $\{x\} \subset V$ olmak üzere $\delta - \text{pcl}(\text{int}(\{x\})) \not\subset V$ olacak şekilde $V \subset X$ düzenli açık kümesi vardır.

$$\begin{aligned} \delta - \text{pcl}(\text{int}(\{x\})) &\subset \delta - \text{pcl}(\{x\}) \\ &\subset \text{cl}(\{x\}) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\text{cl}(\{x\}) \not\subset V$$

olur. Buradan

$$\text{cl}(\{x\}) \cap (X \setminus V) \neq \emptyset$$

olur. Dolayısıyla $y \in \text{cl}(\{x\}) \cap (X \setminus V)$ olacak şekilde bir $y \in X$ vardır. Buradan $y \in \text{cl}(\{x\})$ olur.

X simetrik uzay olduğundan $x \in \text{cl}(\{y\})$ dir.

Aynı zamanda

$$\{y\} \subset X \setminus V$$

olduğundan

$$\text{cl}(\{y\}) \subset \text{cl}(X \setminus V)$$

olur. $X \setminus V$ kapalı olduğundan

$$cl(\{y\}) \subset X \setminus V$$

olup

$$x \in cl(\{y\}) \subset X \setminus V$$

olur. Buradan $x \notin V$ olur. Bu ise varsayımımız olan $\{x\} \subset V$ ile çelişir.

O halde $\{x\}$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı kümedir.

Tanım 4.30. (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ olsun.

$zg\delta pr - cl(A) = \cap \{B : A \subset B \text{ ve } B, X' \text{ in zayıf } g\delta pr - \text{kapalı bir alt kümesi}\}$ olarak tanımlanır.

Teorem 4.31. (X, τ) bir topolojik uzay, $x \in X$ ve $A \subset X$ olsun. $x \in zg\delta pr - cl(A)$ olması için gerek ve yeter koşul x' i bulunduran her $B \subset X$ zayıf $g\delta pr$ -açık kümesi için $A \cap B \neq \emptyset$ olmasıdır.

İspat.

$A \subset X$ ve $x \in zg\delta pr - cl(A)$ olsun. Varsayalım ki $A \cap B = \emptyset$ olacak şekilde x' i bulunduran bir B zayıf $g\delta pr$ -açık kümesi var olsun. Buradan

$$A \subset X \setminus B$$

olur. $X \setminus B$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı olduğundan $zg\delta pr - cl(A) \subset X \setminus B$ olur. Buradan $x \notin zg\delta pr - cl(A)$ olur ve bu bir çelişkidir.

O halde $A \cap B \neq \emptyset$ olmalıdır.

Tersine, x' i bulunduran her $B \subset X$ zayıf $g\delta pr$ -açık kümesi için $A \cap B \neq \emptyset$ olsun. $x \notin zg\delta pr - cl(A)$ olsun.

O zaman $x \notin B$ olacak şekilde $A \subset B$ olan bir B zayıf $g\delta pr$ -kapalı kümesi vardır. Buradan $x \in X \setminus B$ ve $X \setminus B$ zayıf $g\delta pr$ -açıktır.

$A \subset B$ olduğundan $A \cap (X \setminus B) = \emptyset$ olur ve bu bir çelişkidir.

O halde $x \in zg\delta pr - cl(A)$ olmalıdır.

Teorem 4.32. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A, B \subset X$ olsun. $A \subset B$ ise

$$zg\delta pr - cl(A) \subset zg\delta pr - cl(B)$$

olur.

İspat.

$A, B \subset X$ ve $A \subset B$ olmak üzere $x \in zg\delta pr - cl(A)$ olsun.

Bir önceki teorem gereğince x' i bulunduran her C zayıf $g\delta pr$ -açık kümesi için $A \cap C \neq \emptyset$ olur. $A \subset B$ olduğundan $B \cap C \neq \emptyset$ olur. O halde yine bir önceki teorem gereğince

$$x \in zg\delta pr - cl(B)$$

olur.

Sonuç olarak $zg\delta pr - cl(A) \subset zg\delta pr - cl(B)$ elde edilir.

Teorem 4.33. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A, B \subset X$ olsun. Bu durumda

$$zg\delta pr - cl(A \cap B) \subset zg\delta pr - cl(A) \cap zg\delta pr - cl(B)$$

sağlanır.

İspat.

$x \in zg\delta pr - cl(A \cap B)$ alalım. Bu durumda Teorem 4.31. den x' i bulunduran her C zayıf $g\delta pr$ -açık kümesi için $(A \cap B) \cap C \neq \emptyset$ olur. Yani x' i bulunduran her C zayıf $g\delta pr$ -açık kümesi için $A \cap C \neq \emptyset$ ve $B \cap C \neq \emptyset$ olur.

Buradan, yine Teorem 4.31. den

$$x \in zg\delta pr - cl(A) \text{ ve } x \in zg\delta pr - cl(B)$$

olur. Dolayısıyla

$$x \in zg\delta pr - cl(A) \cap zg\delta pr - cl(B)$$

dır. Böylece

$$zg\delta pr - cl(A \cap B) \subset zg\delta pr - cl(A) \cap zg\delta pr - cl(B)$$

elde edilir.

Tanım 4.34. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A' yı kapsayan bütün zayıf $g\delta pr$ -açık kümelerin arakesitine A' nın zayıf $g\delta pr$ -çekirdeği denir.

Bir $A \subset X$ kümesinin zayıf $g\delta pr$ -çekirdeğini $zg\delta pr - çek(A)$ ile göstereceğiz.

Teorem 4.35. (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ ve X uzayında her zayıf $g\delta pr$ -açık küme düzenli açık olsun. A' nın zayıf $g\delta pr$ -kapalı olması için gerek ve yeter koşul $\delta - pcl(int(A)) \subset zg\delta pr - çek(A)$ olmasıdır.

İspat.

X uzayında her zayıf $g\delta pr$ -açık küme düzenli açık olsun. Varsayalım ki, A zayıf $g\delta pr$ -kapalı küme olsun.

Hipotezden, her zayıf $g\delta pr$ -açık küme düzenli açık olduğundan, A kümesini kapsayan her zayıf $g\delta pr$ -açık küme, düzenli açık olacaktır.

A zayıf $g\delta pr$ -kapalı küme olduğundan, A kümesini kapsayan her zayıf $g\delta pr$ -açık küme $\delta - pcl(int(A))$ ' yı da kapsar. Dolayısıyla A kümesini kapsayan bütün zayıf $g\delta pr$ -açık kümelerin arakesiti $\delta - pcl(int(A))$ ' yı da kapsar.

Yani

$$\delta - pcl(int(A)) \subset zg\delta pr - çek(A)$$

elde ederiz.

Tersine, $\delta - pcl(int(A)) \subset zg\delta pr - çek(A)$ olsun. $A \subset V$ ve V düzenli açık küme olsun. Bu durumda V zayıf $g\delta pr$ -açık küme olup

$$zg\delta pr - çek(A) \subset V$$

olur. Hipotezden $\delta - pcl(int(A)) \subset zg\delta pr - çek(A)$ olduğundan

$$\delta - pcl(int(A)) \subset V$$

dir.

Sonuç olarak, A zayıf $g\delta pr$ -kapalıdır.

Teorem 4.36. (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ ve X uzayında her açık küme düzenli açık olsun. A zayıf $g\delta pr$ -kapalıdır ancak ve ancak $\delta - pcl(int(A)) \subset çek(A)$ dır.

İspat.

X uzayında her açık küme düzenli açık olsun. Varsayalım ki, A zayıf $g\delta pr$ -kapalı küme olsun.

Bu durumda A kümesini kapsayan her V açık kümesi düzenli açık olup, A zayıf $g\delta pr$ -kapalı küme olduğundan

$$\delta - pcl(int(A)) \subset V$$

olur. A kümesini kapsayan bütün açık kümelerin arakesiti de $\delta - pcl(int(A))$ ' yı kapsar.

Yani,

$$\delta - pcl(int(A)) \subset çek(A)$$

olur.

Tersine, $\delta - pcl(int(A)) \subset çek(A)$ olsun. $A \subset V$ ve V düzenli açık olsun. Aynı zamanda V açık olup, $çek(A) \subset V$ dir. Böylece $\delta - pcl(int(A)) \subset V$ elde edilir.

O halde A zayıf $g\delta pr$ -kapalıdır.

Teorem 4.37. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $WG\delta PRO(X)$, X ' teki bütün zayıf $g\delta pr$ -açık kümeler sınıfını göstermek üzere $\tau \equiv int(WG\delta PRO(X))$ olur.

İspat.

$A \in \tau$ olsun. Bu durumda A zayıf $g\delta pr$ -açık olup $A \in WG\delta PRO(X)$ olur. $A = int(A)$ olduğundan $A \in int(WG\delta PRO(X))$ olur.

Tersine, $A \in int(WG\delta PRO(X))$ olsun. O zaman öyle bir $B \in WG\delta PRO(X)$ kümesi için $A = int(B)$ olur.

O halde $A \in \tau$ olur.

Teorem 4.38. (X, τ) ve (X, τ^*) iki topolojik uzay olsun. Eğer

$$WG\delta PRO(X, \tau) \subset WG\delta PRO(X, \tau^*)$$

ise $\tau \subset \tau^*$ olur.

İspat.

$$WG\delta PRO(X, \tau) \subset WG\delta PRO(X, \tau^*) \text{ olsun.}$$

Bu durumda

$$int(WG\delta PRO(X, \tau)) \subset int(WG\delta PRO(X, \tau^*))$$

olur.

O halde bir önceki teoremden, $\tau \subset \tau^*$ olur.

Teorem 4.39. (X, τ) ve (X, τ^*) iki topolojik uzay olsun. Eğer

$$WG\delta PRO(X, \tau) = WG\delta PRO(X, \tau^*)$$

ise o zaman $\tau = \tau^*$ olur.

İspat.

$$WG\delta PRO(X, \tau) = WG\delta PRO(X, \tau^*) \text{ olsun.}$$

Bu durumda

$$WG\delta PRO(X, \tau) \subset WG\delta PRO(X, \tau^*) \text{ ve } WG\delta PRO(X, \tau^*) \subset WG\delta PRO(X, \tau)$$

olur.

O halde bir önceki teoremden $\tau \subset \tau^*$ ve $\tau^* \subset \tau$ olur. Böylece $\tau = \tau^*$ olur.

Tanım 4.40. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $x \neq y$ olmak üzere her $x, y \in X$ noktaları için $x \in A, y \notin A$ olacak şekilde $A \subset X$ zayıf $g\delta pr$ -açık kümesi veya $x \notin B, y \in B$ olacak şekilde $B \subset X$ zayıf $g\delta pr$ -açık kümesi varsa X uzayına zayıf $g\delta pr$ - T_0 uzay denir.

Teorem 4.41. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X, T_0 uzay ise X zayıf $g\delta pr-T_0$ uzaydır.

İspat.

Varsayalım ki, $X T_0$ uzay olsun. $x \neq y$ olmak üzere $x, y \in X$ için $x \in A, y \notin A$ olacak şekilde $A \subset X$ açık kümesi veya $x \notin B, y \in B$ olacak şekilde $B \subset X$ açık kümesi vardır.

O halde Teorem 4.5. den A ve B kümeleri zayıf $g\delta pr$ -açık kümeler olup X zayıf $g\delta pr-T_0$ uzay olur.

Teorem 4.42. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. X zayıf $g\delta pr-T_0$ uzaydır ancak ve ancak $x \neq y$ olmak üzere her $x, y \in X$ noktaları için $zg\delta pr - cl(\{x\}) \neq zg\delta pr - cl(\{y\})$ olur.

İspat.

Buna denk olarak, “ X zayıf $g\delta pr-T_0$ uzay değildir ancak ve ancak $x \neq y$ olmak üzere $zg\delta pr - cl(\{x\}) = zg\delta pr - cl(\{y\})$ olacak şekilde en az bir $x, y \in X$ nokta çifti vardır”, ifadesini ispatlayalım.

Eğer X zayıf $g\delta pr-T_0$ değilse birini içeren her zayıf $g\delta pr$ -açık küme diğerini de içerecek ve $x \neq y$ olacak şekilde $x, y \in X$ noktaları vardır.

$a \in zg\delta pr - cl(\{x\})$ ve $a \in A \subset X$ zayıf $g\delta pr$ -açık küme olsun. O halde Teorem 4.31. den $A \cap \{x\} \neq \emptyset$ olur. Böylece A, x' i içeren zayıf $g\delta pr$ -açık bir küme olur. Fakat x' i içeren her zayıf $g\delta pr$ -açık küme y' yi de içerdiğinden $A \cap \{y\} \neq \emptyset$ olur.

O halde yine Teorem 4.31. den

$$a \in zg\delta pr - cl(\{y\})$$

olur.

Sonuç olarak

$$zg\delta pr - cl(\{x\}) \subset zg\delta pr - cl(\{y\})$$

olur. Benzer şekilde

$$zg\delta pr - cl(\{y\}) \subset zg\delta pr - cl(\{x\})$$

olduğu gösterilir. Böylece

$$zg\delta pr - cl(\{x\}) = zg\delta pr - cl(\{y\})$$

olur.

Tersine, $zg\delta pr - cl(\{x\}) = zg\delta pr - cl(\{y\})$ ve $x \neq y$ olacak şekilde $x, y \in X$ noktaları bulunsun.

$x \in zg\delta pr - cl(\{x\}) = zg\delta pr - cl(\{y\})$ olduğundan x' i içeren her zayıf $g\delta pr$ -

açık A kümesi için $A \cap \{y\} \neq \emptyset$ olur. Yani x' i içeren her zayıf $g\delta pr$ -açık A kümesi aynı zamanda y' yi de içermiş olur.

Aynı zamanda

$$y \in zg\delta pr - cl(\{y\}) = zg\delta pr - cl(\{x\})$$

olduğundan y' yi içeren her zayıf $g\delta pr$ -açık A kümesi için $A \cap \{x\} \neq \emptyset$ olur. Yani y' yi içeren her zayıf $g\delta pr$ -açık A kümesi aynı zamanda x' i de içermiş olur.

O halde bu uzay, zayıf $g\delta pr-T_0$ değildir.

Tanım 4.43. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $x \neq y$ olmak üzere her $x, y \in X$ noktaları için $x \in A, y \notin A$ ve $x \notin B, y \in B$ olacak şekilde $A, B \subset X$ zayıf $g\delta pr$ -açık kümeleri varsa X uzayına zayıf $g\delta pr-T_1$ uzay denir.

Teorem 4.44. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. X, T_1 uzay ise X zayıf $g\delta pr-T_1$ uzaydır.

İspat.

Varsayalım ki, X, T_1 uzay olsun. Bu durumda $x \neq y$ olmak üzere $x, y \in X$ için $x \in A, y \notin A$ ve $x \notin B, y \in B$ olacak şekilde $A, B \subset X$ açık kümeleri vardır. O halde Teorem 4.5. den A ve B kümeleri zayıf $g\delta pr$ -açık olup X zayıf $g\delta pr-T_1$ uzay olur.

Teorem 4.45. (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere X zayıf $g\delta pr-T_1$ uzay ise zayıf $g\delta pr-T_0$ uzaydır.

İspat.

Zayıf $g\delta pr-T_1$ uzay ve zayıf $g\delta pr-T_0$ uzay tanımlarından ispat açıktır.

Teorem 4.46. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Her $x \in X$ için $\{x\}$ tek nokta kümesi zayıf $g\delta pr$ -kapalı ise X zayıf $g\delta pr-T_1$ uzaydır.

İspat.

Her $x \in X$ için $\{x\}$ tek nokta kümesi zayıf $g\delta pr$ -kapalı olsun. $x \neq y$ olacak şekilde $x, y \in X$ noktaları alalım. Bu durumda $\{x\}$ ve $\{y\}$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı olur. Dolayısıyla $X \setminus \{x\}$ ve $X \setminus \{y\}$ zayıf $g\delta pr$ -açık olur.

Ayrıca $x \in X \setminus \{y\}, y \notin X \setminus \{y\}$ ve $x \notin X \setminus \{x\}, y \in X \setminus \{x\}$ olur.

O halde X zayıf $g\delta pr-T_1$ uzaydır.

Tanım 4.47. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $x \neq y$ olmak üzere her $x, y \in X$ noktaları için

$x \in A, y \in B$ ve $A \cap B = \emptyset$ olacak şekilde $A, B \subset X$ zayıf $g\delta pr$ -açık kümeleri varsa X uzayına zayıf $g\delta pr-T_2$ uzay denir.

Teorem 4.48. (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere $X T_2$ uzay ise zayıf $g\delta pr-T_2$ uzaydır.

İspat.

X, T_2 uzay olsun. $x \neq y$ olmak üzere her $x, y \in X$ noktaları için $x \in A, y \in B$ ve $A \cap B = \emptyset$ olacak şekilde $A, B \subset X$ açık kümeleri vardır. Teorem 4.5. den A ve B kümeleri zayıf $g\delta pr$ -açık olduğundan X zayıf $g\delta pr-T_2$ uzaydır.

Teorem 4.49. (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere X zayıf $g\delta pr-T_2$ uzay ise zayıf $g\delta pr-T_1$ uzaydır.

İspat.

X zayıf $g\delta pr-T_2$ uzay olsun. $x \neq y$ olmak üzere her $x, y \in X$ noktaları için $x \in A, y \in B$ ve $A \cap B = \emptyset$ olacak şekilde $A, B \subset X$ zayıf $g\delta pr$ -açık kümeleri vardır. $A \cap B = \emptyset$ olduğundan $y \notin A$ ve $x \notin B$ olur. Bu durumda $x \neq y$ olmak üzere her $x, y \in X$ noktaları için $x \in A, y \notin A$ ve $x \notin B, y \in B$ olacak şekilde A ve B zayıf $g\delta pr$ -açık kümeleri bulunmuş olur.

O halde X zayıf $g\delta pr-T_1$ uzaydır.

Teorem 4.50. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. X zayıf $g\delta pr-T_2$ uzay ise $x \in X$ olmak üzere x ' i içeren bütün zayıf $g\delta pr$ -kapalı kümelerin arakesiti yalnız bu noktadan ibarettir.

İspat.

Varsayalım ki X zayıf $g\delta pr-T_2$ uzay olsun.

Sabit bir $p \in X$ seçelim. $p \neq x \in X$ ise uzay zayıf $g\delta pr-T_2$ olduğundan $p \in A, x \in B$ ve $A \cap B = \emptyset$ olacak şekilde $A, B \subset X$ zayıf $g\delta pr$ -açık kümeleri vardır. Bu durumda $X \setminus B$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı olup $x \notin X \setminus B$ ve $p \in X \setminus B$ olur.

O halde x noktası p ' yi içeren zayıf $g\delta pr$ -kapalı kümelerin arakesitine ait olamaz.

Her $x \neq p$ noktası için aynı şey söylenebileceği için bu arakesit p ' den farklı hiçbir noktayı içermez.

Tanım 4.51. (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere $F \subset X$ kapalı, $x \in X$ ve $x \notin F$ olsun. Eğer $F \subset U, x \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \subset X$ zayıf $g\delta pr$ -açık kümeleri varsa bu uzaya zayıf $g\delta pr$ -regüler uzay denir.

Teorem 4.52. (X, τ) regüler bir topolojik uzay ise zayıf $g\delta pr$ -regüler uzaydır.

İspat.

$F \subset X$ kapalı küme ve $x \notin F$ olsun.

Eğer X regüler uzay ise $F \subset U, x \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \subset X$ açık kümeleri vardır. Teorem 4.5. den U ve V kümeleri zayıf $g\delta pr$ -açık olduğundan X zayıf $g\delta pr$ -regüler uzaydır.

Teorem 4.53. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X' in her zayıf $g\delta pr$ -açık alt kümesi kapalı ise X zayıf $g\delta pr$ -regüler uzaydır.

İspat.

Varsayalım ki, X' in her zayıf $g\delta pr$ -açık alt kümesi kapalı olsun. $F \subset X$ alt kümesi kapalı ve $x \notin F$ olsun. O zaman $x \in X \setminus F$ olup aynı zamanda F ve $X \setminus F$ kümeleri zayıf $g\delta pr$ -açık olur.

Sonuç olarak $F \subset F, x \in X \setminus F$ ve $F \cap (X \setminus F) = \emptyset$ olacak şekilde F ve $X \setminus F$ zayıf $g\delta pr$ -açık kümeleri bulunduğundan X zayıf $g\delta pr$ -regüler uzaydır.

Tanım 4.54. (X, τ) bir topolojik uzay, $A, B \subset X$ kapalı kümeler ve $A \cap B = \emptyset$ olsun. Eğer $A \subset U, B \subset V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \subset X$ zayıf $g\delta pr$ -açık kümeleri varsa bu uzaya zayıf $g\delta pr$ -normal uzay denir.

Teorem 4.55. (X, τ) topolojik uzayı normal uzay ise zayıf $g\delta pr$ -normal uzaydır.

İspat.

$A, B \subset X$ kapalı kümeler ve $A \cap B = \emptyset$ olsun. Eğer X normal uzay ise $A \subset U, B \subset V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \subset X$ açık kümeleri vardır. Teorem 4.5. den açık küme zayıf $g\delta pr$ -açık küme olduğundan U, V açık kümeleri zayıf $g\delta pr$ -açık kümelerdir.

Dolayısıyla, X zayıf $g\delta pr$ -normal uzaydır.

Teorem 4.56. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X , δp -normal uzay ise X zayıf $g\delta pr$ -normal uzaydır.

İspat.

$A, B \subset X$ kapalı kümeler ve $A \cap B = \emptyset$ olsun. X , δp -normal uzay olsun. $A \subset U, B \subset V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \subset X$ δ -önaçık kümeleri vardır. Her δ -

önaçık küme $g\delta p$ -açık olup Teorem 4.9. dan $g\delta p$ -açık küme zayıf $g\delta pr$ -açık küme olduğundan U, V δ -önaçık kümeleri zayıf $g\delta pr$ -açık kümelerdir.

Dolayısıyla, X zayıf $g\delta pr$ -normal uzaydır.

Teorem 4.57. (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere X' in her zayıf $g\delta pr$ -açık alt kümesi kapalı ise X zayıf $g\delta pr$ -normal uzaydır.

İspat.

Varsayalım ki, X' in her zayıf $g\delta pr$ -açık alt kümesi kapalı olsun.

$A \cap B = \emptyset$ olmak üzere $A, B \subset X$ kapalı alt kümelerini alalım. O halde A ve B kapalı kümeleri zayıf $g\delta pr$ -açık olur.

Sonuç olarak $A \subset A$, $B \subset B$ ve $A \cap B = \emptyset$ olacak şekilde A ve B zayıf $g\delta pr$ -açık kümeleri bulunduğuundan X zayıf $g\delta pr$ -normal uzaydır.

Teorem 4.58. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. X zayıf $g\delta pr$ -normal uzay ise $U \cup V = X$ olan her $U, V \subset X$ açık küme çifti için, $A \subset U, B \subset V$ ve $A \cup B = X$ olacak şekilde $A, B \subset X$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı kümeleri vardır.

İspat.

X zayıf $g\delta pr$ -normal uzay olsun.

$U, V \subset X$ açık kümeler ve $U \cup V = X$ olsun. O zaman $(X \setminus U) \cap (X \setminus V) = \emptyset$ olup $X \setminus U$ ve $X \setminus V$ kapalı kümeler olur.

X zayıf $g\delta pr$ -normal uzay olduğundan

$$X \setminus U \subset M, X \setminus V \subset N \text{ ve } M \cap N = \emptyset$$

olacak şekilde $M, N \subset X$ zayıf $g\delta pr$ -açık kümeleri vardır.

$A = X \setminus M$ ve $B = X \setminus N$ olsun.

$M \cap N = \emptyset$ olduğundan $A \cup B = X$ olur. $X \setminus U \subset M$ olduğundan $A \subset U$ olur. $X \setminus V \subset N$ olduğundan $B \subset V$ olur. M ve N zayıf $g\delta pr$ -açık olduğundan $A = X \setminus M$ ve $B = X \setminus N$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı olur.

Dolayısıyla ispat biter.

Teorem 4.59. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $M \cup N = X$ olan her $M, N \subset X$ açık küme çifti için, $A \subset M, B \subset N$ ve $A \cup B = X$ olacak şekilde $A \subset X$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı ve $B \subset X$ δ -önkapalı kümeleri var ise, her $F \subset X$ kapalı kümesi ve F kümesini kapsayan her $D \subset X$ açık kümesi için, $F \subset U \subset \delta - pcl(U) \subset D$ olacak şekilde $U \subset X$ zayıf $g\delta pr$ -açık kümesi

vardır.

İspat.

$F \subset X$ kapalı küme ve $D \subset X, F$ kümesini kapsayan açık küme olsun. Buradan $X \setminus F$ ve D açık olup $(X \setminus F) \cup D = X$ olur. O zaman varsayımdan $A \subset (X \setminus F), B \subset D$ ve $(A \cup B) = X$ olacak şekilde zayıf $g\delta pr$ -kapalı $A \subset X$ kümesi ve δ -önkapalı $B \subset X$ kümesi vardır.

O zaman $F \subset (X \setminus A), (X \setminus D) \subset (X \setminus B)$ ve $((X \setminus A) \cap (X \setminus B)) = \emptyset$ olur.

$U = (X \setminus A)$ ve $V = (X \setminus B)$ olsun.

O zaman U ve $V, F \subset U \subset (X \setminus V) \subset D$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde sırasıyla zayıf $g\delta pr$ -açık ve δ -önaçık kümelerdir.

$X \setminus V$ δ -önkapalı küme olduğundan $\delta - pcl(U) \subset X \setminus V$ olur. Buradan

$$F \subset U \subset \delta - pcl(U) \subset D$$

olur.

Teorem 4.60. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $M \cup N = X$ olan her $M, N \subset X$ açık küme çifti için, $A \subset M, B \subset N$ ve $A \cup B = X$ olacak şekilde $A, B \subset X$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı kümeleri var ise, her kapalı $F \subset X$ kümesi ve F kümesini kapsayan her açık $D \subset X$ kümesi için, $F \subset U \subset zg\delta pr - cl(U) \subset D$ olacak şekilde $U \subset X$ zayıf $g\delta pr$ -açık kümesi vardır.

İspat.

$F \subset X$ kapalı küme ve $D \subset X, F$ kümesini kapsayan açık küme olsun. $X \setminus F$ ve D açık olup $(X \setminus F) \cup D = X$ olur.

O zaman varsayımdan

$$A \subset (X \setminus F), B \subset D \text{ ve } (A \cup B) = X$$

olacak şekilde $A, B \subset X$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı kümeleri vardır.

Bu durumda

$$F \subset (X \setminus A), (X \setminus D) \subset (X \setminus B) \text{ ve } ((X \setminus A) \cap (X \setminus B)) = \emptyset$$

olur.

$U = (X \setminus A)$ ve $V = (X \setminus B)$ olsun.

Bu durumda U ve $V, F \subset U \subset (X \setminus V) \subset D$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde zayıf $g\delta pr$ -açık kümelerdir. $X \setminus V$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı küme olduğundan $zg\delta pr - cl(U) \subset X \setminus V$ olur.

Buradan $F \subset U \subset zg\delta pr - cl(U) \subset D$ olur.

Teorem 4.61. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Her $F \subset X$ kapalı kümesi ve F kümesini

kapsayan her $D \subset X$ açık kümesi için, $F \subset U \subset \delta - pcl(U) \subset D$ olacak şekilde $U \subset X$ zayıf $g\delta pr$ -açık kümesi var ise X zayıf $g\delta pr$ -normal uzay olur.

İspat.

$A, B \subset X$ kapalı kümeler ve $A \cap B = \emptyset$ olsun. $D = X \setminus B$ alalım.

Bu durumda $B \cap D = \emptyset$ ve D açık bir küme olup $A \subset D$ olur. O zaman varsayım gereği $A \subset U \subset \delta - pcl(U) \subset D$ olacak şekilde $U \subset X$ zayıf $g\delta pr$ -açık kümesi vardır.

$\delta - pcl(U) \subset D$ olduğundan

$$(X \setminus D) \subset (X \setminus \delta - pcl(U))$$

olup

$$B \subset (X \setminus \delta - pcl(U))$$

dir. $(X \setminus \delta - pcl(U)) = V$ dersek $B \subset V$ olur. $\delta - pcl(U)$ δ -önkapalı olduğundan $(X \setminus \delta - pcl(U)) = V$ δ -önaçık olur. Her δ -önaçık bir küme $g\delta p$ -açık olup, Teorem 4.9. dan her $g\delta p$ -açık küme de zayıf $g\delta pr$ -açık küme olduğundan δ -önaçık bir küme zayıf $g\delta pr$ -açık olup

$$(X \setminus \delta - pcl(U)) = V$$

kümesi zayıf $g\delta pr$ -açık kümedir.

$$\left((X \setminus \delta - pcl(U)) \cap (\delta - pcl(U)) \right) = \emptyset$$

ve $U \subset (\delta - pcl(U))$ olduğundan $U \cap V = \emptyset$ olur.

O halde uzay zayıf $g\delta pr$ -normal uzay olur.

BÖLÜM 5
TOPOLOJİK UZAYLARDA ZAYIF $g\delta p$ -KAPALI KÜMELER
VE
ZAYIF $g\delta pr$ -KAPALI KÜMELER

Teorem 5.1. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A zayıf $g\delta p$ -kapalı bir küme ise A zayıf $g\delta pr$ -kapalıdır.

İspat.

A zayıf $g\delta p$ -kapalı bir küme ve V düzenli açık küme olmak üzere $A \subset V$ olsun. Üstelik, her düzenli açık küme açık olduğundan V açık kümedir. A zayıf $g\delta p$ -kapalı bir küme olduğundan

$$\delta - pcl(int(A)) \subset V$$

olur.

Böylece A zayıf $g\delta pr$ -kapalıdır.

Teorem 5.2. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $A \subset X$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı olmak üzere, her açık küme düzenli açık ise A zayıf $g\delta p$ -kapalıdır.

İspat.

$A \subset X$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı olmak üzere, her açık küme düzenli açık olsun. $A \subset V$ ve V açık olsun. O halde V düzenli açık olup

$$\delta - pcl(int(A)) \subset V$$

olur.

Böylece A zayıf $g\delta p$ -kapalıdır.

Teorem 5.3. (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ olsun. A zayıf $g\delta p$ -açık ise zayıf $g\delta pr$ -açıktır.

İspat.

Varsayalım ki $A \subset X$ zayıf $g\delta p$ -açık bir küme olsun. $X \setminus A$ zayıf $g\delta p$ -kapalı olup Teorem 5.1. den $X \setminus A$ zayıf $g\delta pr$ -kapalıdır.

Dolayısıyla A zayıf $g\delta pr$ -açıktır.

Teorem 5.4. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $A \subset X$ zayıf $g\delta pr$ -açık küme olmak üzere, her kapalı küme düzenli kapalı ise A zayıf $g\delta p$ -açıktır.

İspat.

$A \subset X$ zayıf $g\delta pr$ -açık küme olmak üzere, her kapalı küme düzenli kapalı olsun. $X \setminus A \subset V$ ve V açık olsun. O halde V düzenli açık olup, $X \setminus A$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı küme olduğundan

$$\delta - pcl(int(X \setminus A)) \subset V$$

olur. Böylece $X \setminus A$ zayıf $g\delta p$ -kapalı olup, A zayıf $g\delta p$ -açık olur.

Teorem 5.5. (X, τ) topolojik uzayı zayıf $g\delta p-T_0$ uzay ise zayıf $g\delta pr-T_0$ uzaydır.

İspat.

Varsayalım ki, X zayıf $g\delta p-T_0$ uzay olsun. $x \neq y$ olmak üzere $x, y \in X$ için $x \in A, y \notin A$ olacak şekilde $A \subset X$ zayıf $g\delta p$ -açık kümesi veya $x \notin B, y \in B$ olacak şekilde $B \subset X$ zayıf $g\delta p$ -açık kümesi vardır.

O halde Teorem 5.3. den A ve B kümeleri zayıf $g\delta pr$ -açık kümeler olup X zayıf $g\delta pr-T_0$ uzay olur.

Teorem 5.6. (X, τ) topolojik uzayı zayıf $g\delta p-T_1$ uzay ise zayıf $g\delta pr-T_1$ uzaydır.

İspat.

Varsayalım ki, X zayıf $g\delta p-T_1$ uzay olsun. $x \neq y$ olmak üzere $x, y \in X$ için $x \in A, y \notin A$ ve $x \notin B, y \in B$ olacak şekilde $A, B \subset X$ zayıf $g\delta p$ -açık kümeleri vardır. Dolayısıyla, Teorem 5.3. den A ve B kümeleri zayıf $g\delta pr$ -açık kümelerdir.

O halde X zayıf $g\delta pr-T_1$ uzay olur.

Teorem 5.7. (X, τ) topolojik uzayı zayıf $g\delta p-T_2$ uzay ise zayıf $g\delta pr-T_2$ uzaydır.

İspat.

Varsayalım ki, X zayıf $g\delta p-T_2$ uzay olsun. $x \neq y$ olmak üzere her $x, y \in X$ noktaları için $x \in A, y \in B$ ve $A \cap B = \emptyset$ olacak şekilde $A, B \subset X$ zayıf $g\delta p$ -açık kümeleri vardır. Teorem 5.3. den A ve B kümeleri zayıf $g\delta pr$ -açık olduğundan X zayıf $g\delta pr-T_2$ uzaydır.

Teorem 5.8. (X, τ) topolojik uzayı zayıf $g\delta p$ -regüler uzay ise zayıf $g\delta pr$ -regüler uzaydır.

İspat.

Varsayalım ki, X zayıf $g\delta p$ -regüler uzay, $F \subset X$ kapalı küme ve $x \notin F$ olsun. $F \subset U, x \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \subset X$ zayıf $g\delta p$ -açık kümeleri vardır.

Teorem 5.3. den U ve V kümeleri zayıf $g\delta pr$ -açık olduğundan X zayıf $g\delta pr$ -regüler uzaydır.

Teorem 5.9. (X, τ) topolojik uzayı zayıf $g\delta p$ -normal uzay ise zayıf $g\delta pr$ -normal uzaydır.

İspat.

X zayıf $g\delta p$ -normal uzay, $A, B \subset X$ kapalı kümeler ve $A \cap B = \emptyset$ olsun.
 $A \subset U, B \subset V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \subset X$ zayıf $g\delta p$ -açık kümeleri vardır.
 Teorem 5.3. den her zayıf $g\delta p$ -açık küme zayıf $g\delta pr$ -açık küme olduğundan U, V zayıf $g\delta p$ -açık kümeleri zayıf $g\delta pr$ -açık kümelerdir. Bu durumda X zayıf $g\delta pr$ -normal uzaydır.

Teorem 5.10. (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ ise $zg\delta pr - cl(A) \subset zg\delta p - cl(A)$ olur.

İspat.

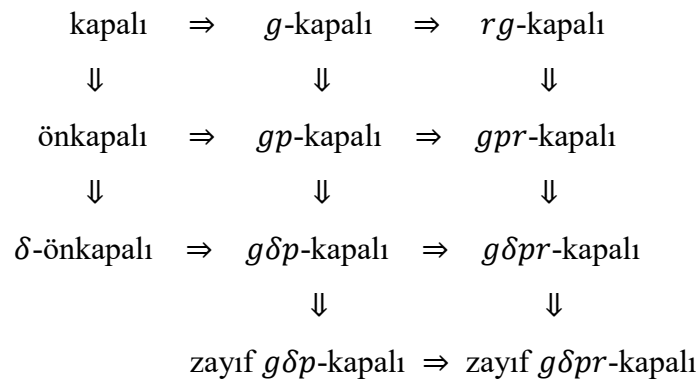
Zayıf $g\delta p$ -kapalı bir kümenin zayıf $g\delta pr$ -kapalı olması ile $zg\delta pr - cl(A)$ ve $zg\delta p - cl(A)$ kavramlarının tanımları göz önünde bulundurulursa bu kapsamanın sağlandığı kolayca görülür.

Teorem 5.11. (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ ise $zg\delta pr - çek(A) \subset zg\delta p - çek(A)$ olur.

İspat.

Zayıf $g\delta p$ -açık bir kümenin zayıf $g\delta pr$ -açık olması ile $zg\delta pr - çek(A)$ ve $zg\delta p - çek(A)$ kavramlarının tanımları göz önünde bulundurulursa bu kapsamanın sağlandığı kolayca görülür.

Uyarı 5.12. (X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ ise aşağıdaki diyagram geçerlidir:



BÖLÜM 6

TOPOLOJİK UZAYLARDA BAZI FONKSİYON SINIFLARI

Tanım 6.1. (X, τ) ve (Y, σ) iki topolojik uzay, $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve $A \subset X$ kapalı bir küme olsun. Eğer $f(A) \subset Y$ zayıf $g\delta p$ -kapalı ise bu f fonksiyonuna zayıf $g\delta p$ -kapalı fonksiyon denir.

Teorem 6.2. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere eğer $f: X \rightarrow Y$ kapalı fonksiyon ise f zayıf $g\delta p$ -kapalı fonksiyondur.

İspat.

$f: X \rightarrow Y$ kapalı fonksiyon olsun. O halde $A \subset X$ herhangi bir kapalı küme olmak üzere $f(A) \subset Y$ kapalı olur.

O halde Teorem 3.4. ten $f(A)$ zayıf $g\delta p$ -kapalı küme olur.

Sonuç olarak, f zayıf $g\delta p$ -kapalı fonksiyondur.

Teorem 6.3. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ $g\delta p$ -kapalı fonksiyon ise f zayıf $g\delta p$ -kapalı fonksiyondur.

İspat.

$f: X \rightarrow Y$ $g\delta p$ -kapalı fonksiyon olsun. Bu durumda $A \subset X$ herhangi bir kapalı küme olmak üzere $f(A) \subset Y$ $g\delta p$ -kapalı olur.

O halde Teorem 3.8. den $f(A)$ zayıf $g\delta p$ -kapalı olur.

Sonuç olarak, f zayıf $g\delta p$ -kapalı fonksiyondur.

Tanım 6.4. (X, τ) ve (Y, σ) iki topolojik uzay, $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve $A \subset X$ açık bir küme olsun. Eğer $f(A) \subset Y$ zayıf $g\delta p$ -açık küme ise f 'ye zayıf $g\delta p$ -açık fonksiyon denir.

Teorem 6.5. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ açık fonksiyon ise zayıf $g\delta p$ -açık fonksiyondur.

İspat.

$f: X \rightarrow Y$ açık fonksiyon olsun. O halde $A \subset X$ herhangi bir açık küme olmak üzere $f(A) \subset Y$ açık olur.

O halde Teorem 3.5. ten $f(A)$ zayıf $g\delta p$ -açık küme olur.

Dolayısıyla, f zayıf $g\delta p$ -açık fonksiyondur.

Teorem 6.6. (X, τ) ve (Y, σ) iki topolojik uzay ve $f: X \rightarrow Y$ birebir ve örten bir fonksiyon olsun. f zayıf $g\delta p$ -kapalı bir fonksiyondur ancak ve ancak f zayıf $g\delta p$ -açık bir fonksiyondur.

İspat.

f zayıf $g\delta p$ -kapalı bir fonksiyon ve $A \subset X$ açık bir küme olsun. O halde $X \setminus A$ kapalı olup f zayıf $g\delta p$ -kapalı bir fonksiyon olduğundan $f(X \setminus A) \subset Y$ zayıf $g\delta p$ -kapalı olur. f birebir ve örten olduğundan $f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)$ olup $Y \setminus f(A)$ zayıf $g\delta p$ -kapalı olur.

O halde $f(A)$ zayıf $g\delta p$ -açık olup f zayıf $g\delta p$ -açık bir fonksiyon olur.

Tersine, f zayıf $g\delta p$ -açık bir fonksiyon ve $A \subset X$ kapalı bir küme olsun. O halde $X \setminus A$ açık olup f zayıf $g\delta p$ -açık bir fonksiyon olduğundan $f(X \setminus A) \subset Y$ zayıf $g\delta p$ -açık olur. f birebir ve örten olduğundan $f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)$ olup $Y \setminus f(A)$ zayıf $g\delta p$ -açık olur.

O halde $f(A)$ zayıf $g\delta p$ -kapalı olup f zayıf $g\delta p$ -kapalı bir fonksiyon olur.

Tanım 6.7. (X, τ) ve (Y, σ) iki topolojik uzay, $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve $A \subset X$ δ -önkapalı küme olsun. Eğer $f(A) \subset Y$ zayıf $g\delta p$ -kapalı ise bu f fonksiyonuna δp -zayıf $g\delta p$ -kapalı fonksiyon denir.

Teorem 6.8. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere eğer $f: X \rightarrow Y$ δp -zayıf $g\delta p$ -kapalı fonksiyon ise zayıf $g\delta p$ -kapalı fonksiyondur.

İspat.

$f: X \rightarrow Y$ δp -zayıf $g\delta p$ -kapalı fonksiyon ve $A \subset X$ kapalı küme olsun. Her kapalı küme δ -önkapalı olduğundan A δ -önkapalıdır. f δp -zayıf $g\delta p$ -kapalı fonksiyon olduğundan $f(A) \subset Y$ zayıf $g\delta p$ -kapalı olur.

O halde f zayıf $g\delta p$ -kapalı fonksiyondur.

Teorem 6.9. (X, τ) , (Y, σ) ve (Z, ω) birer topolojik uzay olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ quasi δ -önkapalı fonksiyon ve $g: Y \rightarrow Z$ zayıf $g\delta p$ -kapalı fonksiyon olsun. Bu durumda $g \circ f: X \rightarrow Z$, δp -zayıf $g\delta p$ -kapalı fonksiyon olur.

İspat.

$f: X \rightarrow Y$ quasi δ -önkapalı fonksiyon olsun. O halde $A \subset X$ herhangi bir δ -önkapalı küme olmak üzere $f(A) \subset Y$ kapalı olur.

$g: Y \rightarrow Z$ zayıf $g\delta p$ -kapalı fonksiyon olsun. O halde $f(A) \subset Y$ kapalı küme olduğundan $g(f(A)) \subset Z$ kümesi zayıf $g\delta p$ -kapalı olur.

Buradan, herhangi bir δ -önkapalı küme olan $A \subset X$ kümesi için $gof(A) \subset Z$ kümesi zayıf $g\delta p$ -kapalı olur.

O halde $gof: X \rightarrow Z$, δp -zayıf $g\delta p$ -kapalı fonksiyondur.

Tanım 6.10. (X, τ) ve (Y, σ) iki topolojik uzay, $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve $A \subset X$ zayıf $g\delta p$ -kapalı bir küme olsun. Eğer $f(A) \subset Y$ zayıf $g\delta p$ -kapalı ise f' ye kuvvetli zayıf $g\delta p$ -kapalı fonksiyon denir.

Teorem 6.11. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere eğer $f: X \rightarrow Y$ kuvvetli zayıf $g\delta p$ -kapalı fonksiyon ise zayıf $g\delta p$ -kapalı fonksiyondur.

İspat.

$A \subset X$ herhangi bir kapalı küme olsun. O halde Teorem 3.4. den A zayıf $g\delta p$ -kapalı olup f kuvvetli zayıf $g\delta p$ -kapalı fonksiyon olduğundan $f(A) \subset Y$ alt kümesi zayıf $g\delta p$ -kapalı olur.

O halde f zayıf $g\delta p$ -kapalı fonksiyondur.

Teorem 6.12. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere eğer $f: X \rightarrow Y$ kuvvetli zayıf $g\delta p$ -kapalı fonksiyon ise δp -zayıf $g\delta p$ -kapalı fonksiyondur.

İspat.

$A \subset X$ δ -önkapalı bir küme olsun. Buradan A zayıf $g\delta p$ -kapalı olup f kuvvetli zayıf $g\delta p$ -kapalı fonksiyon olduğundan $f(A) \subset Y$ alt kümesi zayıf $g\delta p$ -kapalı olur.

O halde f δp -zayıf $g\delta p$ -kapalı fonksiyondur.

Tanım 6.13. (X, τ) , (Y, σ) iki topolojik uzay ve $A \subset X$ zayıf $g\delta p$ -açık bir küme olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer $f(A) \subset Y$ zayıf $g\delta p$ -açık ise f' ye kuvvetli zayıf $g\delta p$ -açık fonksiyon denir.

Teorem 6.14. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere eğer $f: X \rightarrow Y$ kuvvetli zayıf

$g\delta p$ -açık fonksiyon ise zayıf $g\delta p$ -açık fonksiyondur.

İspat.

$f: X \rightarrow Y$ kuvvetli zayıf $g\delta p$ -açık fonksiyon ve $A \subset X$ açık küme olsun. Teorem 3.5. den her açık küme zayıf $g\delta p$ -açık küme olduğundan A bir zayıf $g\delta p$ -açık kümedir. f kuvvetli zayıf $g\delta p$ -açık fonksiyon olduğundan $f(A) \subset Y$ zayıf $g\delta p$ -açık olur.

O halde f zayıf $g\delta p$ -açık fonksiyondur.

Teorem 6.15. (X, τ) , (Y, σ) topolojik uzaylar ve $f: X \rightarrow Y$ birebir, örten bir fonksiyon olsun. f kuvvetli zayıf $g\delta p$ -kapalı bir fonksiyondur ancak ve ancak f kuvvetli zayıf $g\delta p$ -açık bir fonksiyondur.

İspat.

f kuvvetli zayıf $g\delta p$ -kapalı bir fonksiyon ve $A \subset X$ zayıf $g\delta p$ -açık bir küme olsun. Bu durumda $X \setminus A$ zayıf $g\delta p$ -kapalı olup, f kuvvetli zayıf $g\delta p$ -kapalı bir fonksiyon olduğundan $f(X \setminus A) \subset Y$ zayıf $g\delta p$ -kapalı olur.

f birebir, örten olduğundan

$$f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)$$

olup $Y \setminus f(A)$ zayıf $g\delta p$ -kapalı olur.

O halde $f(A)$ zayıf $g\delta p$ -açık olup f kuvvetli zayıf $g\delta p$ -açık bir fonksiyon olur.

Tersine, f kuvvetli zayıf $g\delta p$ -açık bir fonksiyon ve $A \subset X$ zayıf $g\delta p$ -kapalı bir küme olsun. Buradan $X \setminus A$ zayıf $g\delta p$ -açık olup f kuvvetli zayıf $g\delta p$ -açık bir fonksiyon olduğundan $f(X \setminus A) \subset Y$ zayıf $g\delta p$ -açık olur.

f birebir ve örten olduğundan

$$f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)$$

olup, $Y \setminus f(A)$ zayıf $g\delta p$ -açık olur.

O halde $f(A)$ zayıf $g\delta p$ -kapalı olup, f kuvvetli zayıf $g\delta p$ -kapalı bir fonksiyon olur.

Teorem 6.16. (X, τ) ve (Y, σ) iki topolojik uzay ve ayrıca (X, τ) zayıf $g\delta p$ - T_0 uzay olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer f birebir, örten ve kuvvetli zayıf $g\delta p$ -açık fonksiyon ise (Y, σ) uzayı da zayıf $g\delta p$ - T_0 uzaydır.

İspat.

$x \neq y$ olacak şekilde $x, y \in Y$ noktaları alalım. f örten, birebir olduğundan ve fonksiyon tanımı gereği $f^{-1}(x) \neq f^{-1}(y)$ olacak şekilde bir tek $f^{-1}(x)$ ve $f^{-1}(y)$ vardır.

X zayıf $g\delta p-T_0$ olduğundan, $f^{-1}(x) \in A, f^{-1}(y) \notin A$ olacak şekilde $A \subset X$ zayıf $g\delta p$ -açık kümesi veya $f^{-1}(x) \notin B, f^{-1}(y) \in B$ olacak şekilde $B \subset X$ zayıf $g\delta p$ -açık kümesi vardır.

Öte yandan f kuvvetli zayıf $g\delta p$ -açık olduğundan $f(A), f(B) \subset Y$ zayıf $g\delta p$ -açık kümelerdir. f örten olduğundan $f(f^{-1}(x)) = x$ ve $f(f^{-1}(y)) = y$ olup $x \in f(A), y \notin f(A)$ olacak şekilde $f(A)$ zayıf $g\delta p$ -açık kümesi veya $x \notin f(B), y \in f(B)$ olacak şekilde $f(B)$ zayıf $g\delta p$ -açık kümesi vardır.

O halde Y zayıf $g\delta p-T_0$ uzaydır.

Teorem 6.17. (X, τ) ve (Y, σ) iki topolojik uzay ve ayrıca (X, τ) zayıf $g\delta p-T_1$ uzay olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer f birebir, örten ve kuvvetli zayıf $g\delta p$ -açık fonksiyon ise (Y, σ) topolojik uzayı da zayıf $g\delta p-T_1$ uzaydır.

İspat.

$x \neq y$ olacak şekilde $x, y \in Y$ noktaları alalım. f örten, birebir olduğundan ve fonksiyon tanımı gereği $f^{-1}(x) \neq f^{-1}(y)$ olacak şekilde bir tek $f^{-1}(x)$ ve $f^{-1}(y)$ vardır. X zayıf $g\delta p-T_1$ uzay olduğundan $f^{-1}(x) \in A, f^{-1}(y) \notin A$ ve $f^{-1}(x) \notin B, f^{-1}(y) \in B$ olacak şekilde $A, B \subset X$ zayıf $g\delta p$ -açık kümeleri vardır.

f kuvvetli zayıf $g\delta p$ -açık olduğundan $f(A), f(B) \subset Y$ zayıf $g\delta p$ -açık kümelerdir. f örten olduğundan $f(f^{-1}(x)) = x$ ve $f(f^{-1}(y)) = y$ olup $x \in f(A), y \notin f(A)$ ve $x \notin f(B), y \in f(B)$ olacak şekilde $f(A)$ ve $f(B)$ zayıf $g\delta p$ -açık kümeleri vardır.

O halde Y zayıf $g\delta p-T_1$ uzaydır.

Teorem 6.18. (X, τ) ve (Y, σ) iki topolojik uzay ve ayrıca (X, τ) zayıf $g\delta p-T_2$ uzay olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer f kuvvetli zayıf $g\delta p$ -açık, birebir ve örten fonksiyon ise (Y, σ) uzayı da zayıf $g\delta p-T_2$ uzaydır.

İspat.

$x \neq y$ olacak şekilde $x, y \in Y$ noktaları alalım. f örten olduğundan ve fonksiyon tanımı gereği $f^{-1}(x) \neq f^{-1}(y)$ olur. X zayıf $g\delta p-T_2$ uzay olduğundan $f^{-1}(x) \in A, f^{-1}(y) \in B$ ve $A \cap B = \emptyset$ olacak şekilde $A, B \subset X$ zayıf $g\delta p$ -açık kümeleri vardır.

f örten olduğundan $f(f^{-1}(x)) = x$ olup $x \in f(A)$ ve $f(f^{-1}(y)) = y$ olup $y \in f(B)$ olur.

f birebir olduğundan $f(A) \cap f(B) = \emptyset$ olur. f kuvvetli zayıf $g\delta p$ -açık olduğundan $f(A)$ ve $f(B)$ zayıf $g\delta p$ -açık olur.

O halde Y zayıf $g\delta p$ - T_2 uzaydır.

Teorem 6.19. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar ve ayrıca (X, τ) zayıf $g\delta p$ -regüler uzay olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer f birebir, örten, sürekli ve kuvvetli zayıf $g\delta p$ -açık fonksiyon ise (Y, σ) uzayı da zayıf $g\delta p$ -regüler uzaydır.

İspat.

$x \notin K$ ve $K \subset Y$ alt kümesi kapalı olsun.

f sürekli olduğundan $f^{-1}(K) \subset X$ kapalı olup f birebir, örten olduğundan ve fonksiyon tanımı gereği $f^{-1}(x) \notin f^{-1}(K)$ olacak şekilde bir tek $f^{-1}(x)$ vardır.

X zayıf $g\delta p$ -regüler uzay olduğundan $f^{-1}(x) \in A, f^{-1}(K) \subset B$ ve $A \cap B = \emptyset$ olacak şekilde $A, B \subset X$ zayıf $g\delta p$ -açık kümeleri vardır.

f kuvvetli zayıf $g\delta p$ -açık olduğundan $f(A), f(B) \subset Y$ kümeleri zayıf $g\delta p$ -açık olur.

f örten olduğundan $f(f^{-1}(x)) = x$ ve $f(f^{-1}(K)) = K$ olur. Bu durumda $x \in f(A), K \subset f(B)$ olup, f birebir olduğundan $f(A) \cap f(B) = \emptyset$ olur.

O halde Y zayıf $g\delta p$ -regüler uzaydır.

Teorem 6.20. (X, τ) ve (Y, σ) iki topolojik uzay ve ayrıca (X, τ) zayıf $g\delta p$ -normal uzay olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer f birebir, örten, kuvvetli zayıf $g\delta p$ -açık ve sürekli fonksiyon ise (Y, σ) uzayı da zayıf $g\delta p$ -normal uzaydır.

İspat.

$K, L \subset Y, K \cap L = \emptyset$ ve K ve L kümeleri Y uzayında kapalı olsunlar.

f sürekli olduğundan $f^{-1}(K)$ ve $f^{-1}(L)$ kümeleri $f^{-1}(K) \cap f^{-1}(L) = \emptyset$ olacak şekilde X uzayında kapalı kümelerdir.

X zayıf $g\delta p$ -normal uzay olduğundan $f^{-1}(K) \subset U, f^{-1}(L) \subset V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \subset X$ zayıf $g\delta p$ -açık kümeleri vardır.

f birebir, örten ve kuvvetli zayıf $g\delta p$ -açık olduğundan $K \subset f(U)$ ve $L \subset f(V)$ sağlanıp $f(U)$ ve $f(V), f(U) \cap f(V) = \emptyset$ olacak şekilde zayıf $g\delta p$ -açık kümeler olur.

O halde Y uzayı zayıf $g\delta p$ -normal uzaydır.

Tanım 6.21. (X, τ) ve (Y, σ) iki topolojik uzay ve $A \subset Y$ kapalı bir küme olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer $f^{-1}(A) \subset X$ zayıf $g\delta p$ -kapalı ise bu f fonksiyonuna zayıf $g\delta p$ -sürekli fonksiyon denir.

Teorem 6.22. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere eğer $f: X \rightarrow Y$ sürekli fonksiyon ise zayıf $g\delta p$ -sürekli fonksiyondur.

İspat.

$f: X \rightarrow Y$ sürekli fonksiyon olsun. $A \subset Y$ kapalı bir küme olmak üzere $f^{-1}(A) \subset X$ kapalı olur.

Teorem 3.4. ten $f^{-1}(A)$ zayıf $g\delta p$ -kapalı olur.

O halde f zayıf $g\delta p$ -sürekli fonksiyondur.

Teorem 6.23. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere eğer $f: X \rightarrow Y$ $g\delta p$ -sürekli fonksiyon ise zayıf $g\delta p$ -sürekli fonksiyondur.

İspat.

$f: X \rightarrow Y$ $g\delta p$ -sürekli fonksiyon olsun. $A \subset Y$ kapalı bir küme olmak üzere $f^{-1}(A) \subset X$ $g\delta p$ -kapalı olur.

Teorem 3.8. den $f^{-1}(A)$ zayıf $g\delta p$ -kapalı olur.

O halde f zayıf $g\delta p$ -sürekli fonksiyondur.

Teorem 6.24. (X, τ) ve (Y, σ) iki topolojik uzay ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda f zayıf $g\delta p$ -sürekli fonksiyondur ancak ve ancak her $A \subset Y$ açık kümesi için $f^{-1}(A) \subset X$ zayıf $g\delta p$ -açıktır.

İspat.

$A \subset Y$ açık bir küme olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. Varsayalım ki, f zayıf $g\delta p$ -sürekli fonksiyon olsun.

$$f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$$

ve $Y \setminus A$ kapalı olduğundan $f^{-1}(Y \setminus A)$ zayıf $g\delta p$ -kapalı olup $X \setminus f^{-1}(A)$ zayıf $g\delta p$ -kapalı olur.

O halde $f^{-1}(A)$ zayıf $g\delta p$ -açıktır.

Tersine $A \subset Y$ kapalı alt kümesini alalım. O halde $Y \setminus A$ açık olup varsayım gereği $f^{-1}(Y \setminus A)$ zayıf $g\delta p$ -açık olur.

$$f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$$

olduğundan $X \setminus f^{-1}(A)$ zayıf $g\delta p$ -açık olup $f^{-1}(A)$ zayıf $g\delta p$ -kapalı olur.

O halde f zayıf $g\delta p$ -sürekli dir.

Tanım 6.25. (X, τ) , (Y, σ) topolojik uzaylar ve $A \subset Y$ $g\delta p$ -kapalı küme olmak üzere

$f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer $f^{-1}(A) \subset X$ zayıf $g\delta p$ -kapalı ise f 'ye $g\delta p$ -zayıf $g\delta p$ -sürekli fonksiyon denir.

Teorem 6.26. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere eğer $f: X \rightarrow Y$ $g\delta p$ -kararsız fonksiyon ise $g\delta p$ -zayıf $g\delta p$ -sürekli fonksiyondur.

İspat.

$f: X \rightarrow Y$ $g\delta p$ -kararsız fonksiyon olsun. Bu durumda $A \subset Y$ kümesi herhangi bir $g\delta p$ -kapalı küme olmak üzere $f^{-1}(A) \subset X$ $g\delta p$ -kapalı olur. Dolayısıyla Teorem 3.8. den $f^{-1}(A)$ zayıf $g\delta p$ -kapalı olur.

O halde f $g\delta p$ -zayıf $g\delta p$ -sürekli fonksiyondur.

Teorem 6.27. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere eğer $f: X \rightarrow Y$ $g\delta p$ -zayıf $g\delta p$ -sürekli fonksiyon ise zayıf $g\delta p$ -sürekli fonksiyondur.

İspat.

$f: X \rightarrow Y$ $g\delta p$ -zayıf $g\delta p$ -sürekli fonksiyon ve $A \subset Y$ kapalı bir küme olsun. Her kapalı küme $g\delta p$ -kapalı olduğundan, A $g\delta p$ -kapalı bir kümedir. f $g\delta p$ -zayıf $g\delta p$ -sürekli fonksiyon olduğundan $f^{-1}(A) \subset X$ zayıf $g\delta p$ -kapalı olur.

O halde f zayıf $g\delta p$ -sürekli fonksiyondur.

Teorem 6.28. (X, τ) ve (Y, σ) iki topolojik uzay ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. f $g\delta p$ -zayıf $g\delta p$ -sürekli fonksiyondur ancak ve ancak her $A \subset Y$ $g\delta p$ -açık kümesi için $f^{-1}(A) \subset X$ zayıf $g\delta p$ -açıktır.

İspat.

Varsayalım ki f $g\delta p$ -zayıf $g\delta p$ -sürekli fonksiyon olsun. $A \subset Y$ $g\delta p$ -açık bir küme olsun.

$$f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$$

ve $Y \setminus A$ $g\delta p$ -kapalı olduğundan $f^{-1}(Y \setminus A)$ zayıf $g\delta p$ -kapalı olup, $X \setminus f^{-1}(A)$ zayıf $g\delta p$ -kapalı olur.

O halde $f^{-1}(A)$ zayıf $g\delta p$ -açıktır.

Tersine, $A \subset Y$ $g\delta p$ -kapalı alt kümesini alalım. Bu durumda $Y \setminus A$ $g\delta p$ -açık olup varsayım gereği $f^{-1}(Y \setminus A)$ zayıf $g\delta p$ -açık olur.

$$f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$$

olduğundan $X \setminus f^{-1}(A)$ zayıf $g\delta p$ -açık olup, $f^{-1}(A)$ zayıf $g\delta p$ -kapalı olur.

O halde f $g\delta p$ -zayıf $g\delta p$ -sürekli fonksiyondur.

Tanım 6.29. (X, τ) , (Y, σ) iki topolojik uzay, $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. $A \subset Y$ zayıf $g\delta p$ -kapalı bir küme olmak üzere $f^{-1}(A) \subset X$ zayıf $g\delta p$ -kapalı ise f 'ye zayıf $g\delta p$ -kararsız fonksiyon denir.

Teorem 6.30. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere eğer $f: X \rightarrow Y$ zayıf $g\delta p$ -kararsız fonksiyon ise zayıf $g\delta p$ -sürekli fonksiyondur.

İspat.

$f: X \rightarrow Y$ zayıf $g\delta p$ -kararsız fonksiyon ve $A \subset Y$ herhangi bir kapalı küme olsun. Teorem 3.4. den A zayıf $g\delta p$ -kapalı olur. f zayıf $g\delta p$ -kararsız olduğundan $f^{-1}(A) \subset X$ zayıf $g\delta p$ -kapalı olur.

Bu durumda f zayıf $g\delta p$ -sürekli fonksiyondur.

Teorem 6.31. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere eğer $f: X \rightarrow Y$ zayıf $g\delta p$ -kararsız fonksiyon ise $g\delta p$ -zayıf $g\delta p$ -sürekli fonksiyondur.

İspat.

$f: X \rightarrow Y$ zayıf $g\delta p$ -kararsız fonksiyon ve $A \subset Y$ herhangi bir $g\delta p$ -kapalı küme olsun. Teorem 3.8. den A zayıf $g\delta p$ -kapalı olur. f zayıf $g\delta p$ -kararsız olduğundan $f^{-1}(A) \subset X$ zayıf $g\delta p$ -kapalı olur.

Bu durumda f $g\delta p$ -zayıf $g\delta p$ -sürekli fonksiyondur.

Teorem 6.32. (X, τ) ve (Y, σ) iki topolojik uzay ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. f zayıf $g\delta p$ -kararsız fonksiyondur ancak ve ancak her $A \subset Y$ zayıf $g\delta p$ -açık kümesi için $f^{-1}(A) \subset X$ zayıf $g\delta p$ -açıktır.

İspat.

Varsayalım ki f zayıf $g\delta p$ -kararsız fonksiyon olsun. $A \subset Y$ zayıf $g\delta p$ -açık bir küme olsun.

$$f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$$

ve $Y \setminus A$ zayıf $g\delta p$ -kapalı olduğundan, $f^{-1}(Y \setminus A)$ zayıf $g\delta p$ -kapalı olup, $X \setminus f^{-1}(A)$ zayıf $g\delta p$ -kapalı olur.

O halde $f^{-1}(A)$ zayıf $g\delta p$ -açıktır.

$A \subset Y$ zayıf $g\delta p$ -kapalı alt kümesini alalım. Buradan $Y \setminus A$ zayıf $g\delta p$ -açık olup varsayım gereği $f^{-1}(Y \setminus A)$ zayıf $g\delta p$ -açık olur.

$$f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$$

olduğundan $X \setminus f^{-1}(A)$ zayıf $g\delta p$ -açık olup $f^{-1}(A)$ zayıf $g\delta p$ -kapalı olur.

O halde f zayıf $g\delta p$ -kararsız olur.

Teorem 6.33. (X, τ) ve (Y, σ) iki topolojik uzay ve ayrıca (Y, σ) zayıf $g\delta p-T_0$ uzay olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer f birebir ve zayıf $g\delta p$ -kararsız fonksiyon ise X uzayı da zayıf $g\delta p-T_0$ uzaydır.

İspat.

$x \neq y$ olacak şekilde $x, y \in X$ noktaları alalım. f birebir fonksiyon olduğundan $f(x) \neq f(y)$ olur.

Y zayıf $g\delta p-T_0$ uzay olduğundan $f(x) \in A, f(y) \notin A$ olacak şekilde $A \subset Y$ zayıf $g\delta p$ -açık kümesi veya $f(x) \notin B, f(y) \in B$ olacak şekilde $B \subset Y$ zayıf $g\delta p$ -açık kümesi vardır.

f zayıf $g\delta p$ -kararsız olduğundan $f^{-1}(A), f^{-1}(B) \subset X$ zayıf $g\delta p$ -açık olur.

f birebir fonksiyon olduğundan $f^{-1}(f(x)) = x$ ve $f^{-1}(f(y)) = y$ olup $x \in f^{-1}(A), y \notin f^{-1}(A)$ olacak şekilde $f^{-1}(A)$ zayıf $g\delta p$ -açık kümesi veya $x \notin f^{-1}(B), y \in f^{-1}(B)$ olacak şekilde $f^{-1}(B)$ zayıf $g\delta p$ -açık kümesi vardır.

O halde X zayıf $g\delta p-T_0$ uzaydır.

Teorem 6.34. (X, τ) ve (Y, σ) iki topolojik uzay ve ayrıca (Y, σ) zayıf $g\delta p-T_1$ uzay olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer f birebir ve zayıf $g\delta p$ -kararsız fonksiyon ise X uzayı da zayıf $g\delta p-T_1$ uzaydır.

İspat.

$x \neq y$ olacak şekilde $x, y \in X$ noktaları alalım. f birebir fonksiyon olduğundan $f(x) \neq f(y)$ olur.

Y zayıf $g\delta p-T_1$ uzay olduğundan $f(x) \in A, f(y) \notin A$ ve $f(x) \notin B, f(y) \in B$ olacak şekilde $A, B \subset Y$ zayıf $g\delta p$ -açık kümeleri vardır.

f zayıf $g\delta p$ -kararsız fonksiyon olduğundan $f^{-1}(A), f^{-1}(B) \subset X$ zayıf $g\delta p$ -açık olur.

f birebir fonksiyon olduğundan $f^{-1}(f(x)) = x$ ve $f^{-1}(f(y)) = y$ olup $x \in f^{-1}(A), y \notin f^{-1}(A)$ ve $x \notin f^{-1}(B), y \in f^{-1}(B)$ olacak şekilde $f^{-1}(A)$ ve $f^{-1}(B)$ zayıf $g\delta p$ -açık kümeleri vardır.

O halde X zayıf $g\delta p-T_1$ uzaydır.

Teorem 6.35. (X, τ) ve (Y, σ) iki topolojik uzay ve ayrıca (Y, σ) zayıf $g\delta p-T_2$ uzay olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer f birebir ve zayıf $g\delta p$ -kararsız bir fonksiyon ise X uzayı da zayıf $g\delta p-T_2$ uzaydır.

İspat.

$x \neq y$ olacak şekilde $x, y \in X$ noktaları alalım. f birebir fonksiyon olduğundan $f(x) \neq f(y)$ olur.

Y zayıf $g\delta p-T_2$ uzay olduğundan $f(x) \in A, f(y) \in B$ ve $A \cap B = \emptyset$ olacak şekilde $A, B \subset Y$ zayıf $g\delta p$ -açık kümeleri vardır.

Aynı zamanda f zayıf $g\delta p$ -kararsız olduğundan $f^{-1}(A), f^{-1}(B) \subset X$ alt kümeleri zayıf $g\delta p$ -açık olur.

$x \in f^{-1}(A), y \in f^{-1}(B)$ ve $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$ olduğundan X zayıf $g\delta p-T_2$ uzaydır.

Teorem 6.36. (X, τ) ve (Y, σ) iki topolojik uzay ve ayrıca (Y, σ) zayıf $g\delta p$ -regüler uzay olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer f birebir, kapalı ve zayıf $g\delta p$ -kararsız fonksiyon ise X uzayı da zayıf $g\delta p$ -regüler uzaydır.

İspat.

$x \notin K$ ve $K \subset X$ alt kümesi kapalı olsun. f birebir ve kapalı fonksiyon olduğundan $f(K) \subset Y$ kapalı olup $f(x) \notin f(K)$ olur.

Y zayıf $g\delta p$ -regüler uzay olduğundan $f(x) \in A, f(K) \subset B$ ve $A \cap B = \emptyset$ olacak şekilde $A, B \subset Y$ zayıf $g\delta p$ -açık kümeleri vardır.

f zayıf $g\delta p$ -kararsız olduğundan $f^{-1}(A), f^{-1}(B) \subset X$ kümeleri zayıf $g\delta p$ -açık olur. f birebir fonksiyon olduğundan $f^{-1}(f(x)) = x$ ve $f^{-1}(f(K)) = K$ olur.

Bu durumda $x \in f^{-1}(A), K \subset f^{-1}(B)$ olup fonksiyon tanımı gereği $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$ olur.

O halde X zayıf $g\delta p$ -regüler uzaydır.

Teorem 6.37. (X, τ) ve (Y, σ) iki topolojik uzay ve ayrıca (Y, σ) zayıf $g\delta p$ -normal uzay olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer f birebir, kapalı ve zayıf $g\delta p$ -kararsız fonksiyon ise X zayıf $g\delta p$ -normal uzaydır.

İspat.

$K \cap L = \emptyset$ ve $K, L \subset X$ alt kümeleri kapalı olsun. f birebir ve kapalı fonksiyon

olduğundan $f(K), f(L) \subset Y$ kapalı olup $f(K) \cap f(L) = \emptyset$ olur.

Y zayıf $g\delta p$ -normal uzay olduğundan $f(K) \subset U, f(L) \subset V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \subset Y$ zayıf $g\delta p$ -açık kümeleri vardır.

f birebir fonksiyon olduğundan $f^{-1}(f(K)) = K$ ve $f^{-1}(f(L)) = L$ olur. Fonksiyon tanımını gereği $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$ olup

$$K = f^{-1}(f(K)) \subset f^{-1}(U) \text{ ve } L = f^{-1}(f(L)) \subset f^{-1}(V)$$

olur.

f zayıf $g\delta p$ -kararsız fonksiyon olduğundan $f^{-1}(U), f^{-1}(V) \subset X$ alt kümeleri zayıf $g\delta p$ -açık olur.

O halde X zayıf $g\delta p$ -normal uzaydır.

Tanım 6.38. (X, τ) ve (Y, σ) iki topolojik uzay ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. $A \subset X$ kapalı bir küme olmak üzere $f(A) \subset Y$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı ise f' ye zayıf $g\delta pr$ -kapalı fonksiyon denir.

Teorem 6.39. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ kapalı fonksiyon ise zayıf $g\delta pr$ -kapalı fonksiyondur.

İspat.

$f: X \rightarrow Y$ kapalı fonksiyon olsun. Bu durumda $A \subset X$ herhangi bir kapalı küme olmak üzere $f(A) \subset Y$ kapalı olur. O halde Teorem 4.4. ten $f(A)$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı olur.

Dolayısıyla f zayıf $g\delta pr$ -kapalı fonksiyon olur.

Teorem 6.40. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ $g\delta p$ -kapalı fonksiyon ise zayıf $g\delta pr$ -kapalı fonksiyondur.

İspat.

$f: X \rightarrow Y$ $g\delta p$ -kapalı fonksiyon olsun. $A \subset X$ herhangi bir kapalı küme olmak üzere $f(A) \subset Y$ $g\delta p$ -kapalı olur. Teorem 4.8. den $f(A)$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı olur.

O halde f zayıf $g\delta pr$ -kapalı fonksiyon olur.

Teorem 6.41. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ zayıf $g\delta p$ -kapalı fonksiyon ise zayıf $g\delta pr$ -kapalı fonksiyondur.

İspat.

$f: X \rightarrow Y$ zayıf $g\delta p$ -kapalı fonksiyon olsun. $A \subset X$ herhangi bir kapalı küme

olmak üzere $f(A) \subset Y$ zayıf $g\delta p$ -kapalı olur. Teorem 5.1. den $f(A)$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı olur.

O halde f zayıf $g\delta pr$ -kapalı fonksiyondur.

Tanım 6.42. (X, τ) ve (Y, σ) iki topolojik uzay ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. $A \subset X$ açık bir küme olmak üzere $f(A) \subset Y$ zayıf $g\delta pr$ -açık ise f' ye zayıf $g\delta pr$ -açık fonksiyon denir.

Teorem 6.43. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere eğer $f: X \rightarrow Y$ açık fonksiyon ise zayıf $g\delta pr$ -açık fonksiyondur.

İspat.

$f: X \rightarrow Y$ açık fonksiyon olsun. $A \subset X$ herhangi bir açık küme olmak üzere $f(A) \subset Y$ açık olur. Teorem 4.5. ten $f(A)$ zayıf $g\delta pr$ -açık olur.

O halde f zayıf $g\delta pr$ -açık fonksiyon olur.

Teorem 6.44. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ zayıf $g\delta p$ -açık fonksiyon ise zayıf $g\delta pr$ -açık fonksiyondur.

İspat.

$f: X \rightarrow Y$ zayıf $g\delta p$ -açık fonksiyon olsun. $A \subset X$ herhangi bir açık küme olmak üzere $f(A) \subset Y$ zayıf $g\delta p$ -açık olur. Teorem 5.3. den $f(A)$ zayıf $g\delta pr$ -açık olur.

O halde f zayıf $g\delta pr$ -açık fonksiyondur.

Teorem 6.45. (X, τ) ve (Y, σ) iki topolojik uzay ve $f: X \rightarrow Y$ birebir ve örten bir fonksiyon olsun. f zayıf $g\delta pr$ -kapalı bir fonksiyondur ancak ve ancak f zayıf $g\delta pr$ -açık bir fonksiyondur.

İspat.

f zayıf $g\delta pr$ -kapalı bir fonksiyon ve $A \subset X$ açık bir küme olsun. Dolayısıyla $X \setminus A$ kapalı olup, f zayıf $g\delta pr$ -kapalı bir fonksiyon olduğundan $f(X \setminus A) \subset Y$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı olur.

f birebir ve örten fonksiyon olduğundan

$$f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)$$

olup, $Y \setminus f(A)$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı olur.

O halde $f(A)$ zayıf $g\delta pr$ -açık olup, f zayıf $g\delta pr$ -açık bir fonksiyon olur.

Tersine, f zayıf $g\delta pr$ -açık bir fonksiyon ve $A \subset X$ kapalı bir küme olsun. $X \setminus A$ açık olup f zayıf $g\delta pr$ -açık bir fonksiyon olduğundan $f(X \setminus A) \subset Y$ zayıf $g\delta pr$ -açık olur. f birebir ve örten olduğundan

$$f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)$$

olup $Y \setminus f(A)$ zayıf $g\delta pr$ -açık olur.

O halde $f(A)$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı olup f zayıf $g\delta pr$ -kapalı bir fonksiyondur.

Tanım 6.46. (X, τ) , (Y, σ) iki topolojik uzay, $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. $A \subset X$ δ -önkapalı küme olmak üzere $f(A) \subset Y$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı ise f ' ye δp -zayıf $g\delta pr$ -kapalı fonksiyon denir.

Teorem 6.47. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ δp -zayıf $g\delta pr$ -kapalı fonksiyon ise zayıf $g\delta pr$ -kapalı fonksiyondur.

İspat.

$f: X \rightarrow Y$ δp -zayıf $g\delta pr$ -kapalı fonksiyon olsun. $A \subset X$ kapalı bir küme olsun. Her kapalı küme δ -önkapalı olduğundan $A \subset X$ bir δ -önkapalı kümedir. f , δp -zayıf $g\delta pr$ -kapalı fonksiyon olduğundan $f(A) \subset Y$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı olur.

Sonuç olarak, f zayıf $g\delta pr$ -kapalı fonksiyon olur.

Teorem 6.48. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ δp -zayıf $g\delta p$ -kapalı fonksiyon ise δp -zayıf $g\delta pr$ -kapalı fonksiyondur.

İspat.

$f: X \rightarrow Y$ δp -zayıf $g\delta p$ -kapalı fonksiyon olsun. $A \subset X$ bir δ -önkapalı küme olmak üzere $f(A) \subset Y$ zayıf $g\delta p$ -kapalı olur. Teorem 5.1. den $f(A)$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı olur.

Böylece f , δp -zayıf $g\delta pr$ -kapalı fonksiyondur.

Teorem 6.49. (X, τ) , (Y, σ) ve (Z, ω) topolojik uzaylar olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ quasi δ -önkapalı fonksiyon ve $g: Y \rightarrow Z$ zayıf $g\delta p$ -kapalı fonksiyon olsun. Bu durumda $g \circ f: X \rightarrow Z$ fonksiyonu δp -zayıf $g\delta pr$ -kapalı fonksiyon olur.

İspat.

Eğer $f: X \rightarrow Y$ quasi δ -önkapalı fonksiyon ve $g: Y \rightarrow Z$ zayıf $g\delta p$ -kapalı fonksiyon ise Teorem 6.9. dan $g \circ f: X \rightarrow Z$ bileşke fonksiyonu δp -zayıf $g\delta p$ -kapalı olur.

O halde bir önceki teoremden $g \circ f: X \rightarrow Z$ bileşke fonksiyonu δp -zayıf $g\delta pr$ -

kapalıdır.

Teorem 6.50. (X, τ) , (Y, σ) ve (Z, ω) topolojik uzaylar olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ quasi δ -önkapalı fonksiyon ve $g: Y \rightarrow Z$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı fonksiyon olsun. Bu durumda $gof: X \rightarrow Z$ fonksiyonu δp -zayıf $g\delta pr$ -kapalı fonksiyon olur.

İspat.

$f: X \rightarrow Y$ quasi δ -önkapalı ve $g: Y \rightarrow Z$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı fonksiyon olsun. f quasi δ -önkapalı olduğundan $A \subset X$ herhangi bir δ -önkapalı küme olmak üzere $f(A) \subset Y$ kapalı olur.

g zayıf $g\delta pr$ -kapalı fonksiyon olduğundan $g(f(A)) \subset Z$ kümesi zayıf $g\delta pr$ -kapalı olur.

Yani δ -önkapalı küme olan herhangi bir $A \subset X$ kümesi için $gof(A) \subset Z$ kümesi zayıf $g\delta pr$ -kapalı oldu.

O halde $gof: X \rightarrow Z$ fonksiyonu δp -zayıf $g\delta pr$ -kapalı fonksiyon olur.

Tanım 6.51. (X, τ) , (Y, σ) topolojik uzaylar ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. $A \subset X$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı bir küme olmak üzere $f(A) \subset Y$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı ise f' ye kuvvetli zayıf $g\delta pr$ -kapalı fonksiyon denir.

Teorem 6.52. (X, τ) , (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ kuvvetli zayıf $g\delta pr$ -kapalı fonksiyon ise zayıf $g\delta pr$ -kapalı fonksiyondur.

İspat.

Varsayalım ki, $f: X \rightarrow Y$ kuvvetli zayıf $g\delta pr$ -kapalı fonksiyon ve $A \subset X$ kapalı bir küme olsun.

Teorem 4.4. den A zayıf $g\delta pr$ -kapalı olup f kuvvetli zayıf $g\delta pr$ -kapalı fonksiyon olduğundan $f(A) \subset Y$ alt kümesi zayıf $g\delta pr$ -kapalı olur.

O halde f zayıf $g\delta pr$ -kapalı fonksiyondur.

Teorem 6.53. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ kuvvetli zayıf $g\delta pr$ -kapalı fonksiyon ise δp -zayıf $g\delta pr$ -kapalı fonksiyondur.

İspat.

Varsayalım ki, $f: X \rightarrow Y$ kuvvetli zayıf $g\delta pr$ -kapalı fonksiyon ve $A \subset X$ δ -önkapalı bir küme olsun. A zayıf $g\delta pr$ -kapalı olup, f kuvvetli zayıf $g\delta pr$ -kapalı fonksiyon olduğundan $f(A) \subset Y$ alt kümesi zayıf $g\delta pr$ -kapalı olur.

O halde f δp -zayıf $g\delta pr$ -kapalı fonksiyondur.

Tanım 6.54. (X, τ) , (Y, σ) iki topolojik uzay ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. $A \subset X$ zayıf $g\delta pr$ -açık olmak üzere $f(A) \subset Y$ zayıf $g\delta pr$ -açık ise f fonksiyonuna kuvvetli zayıf $g\delta pr$ -açık fonksiyon denir.

Teorem 6.55. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ kuvvetli zayıf $g\delta pr$ -açık fonksiyon ise zayıf $g\delta pr$ -açık fonksiyondur.

İspat.

$f: X \rightarrow Y$ kuvvetli zayıf $g\delta pr$ -açık fonksiyon ve $A \subset X$ açık küme olsun. Teorem 4.5. den her açık küme zayıf $g\delta pr$ -açık küme olduğundan A bir zayıf $g\delta pr$ -açık kümedir. f kuvvetli zayıf $g\delta pr$ -açık fonksiyon olduğundan $f(A) \subset Y$ zayıf $g\delta pr$ -açık olur.

O halde f zayıf $g\delta pr$ -açık fonksiyondur.

Teorem 6.56. (X, τ) ve (Y, σ) iki topolojik uzay ve $f: X \rightarrow Y$ birebir ve örten bir fonksiyon olsun. f kuvvetli zayıf $g\delta pr$ -kapalı bir fonksiyondur ancak ve ancak f kuvvetli zayıf $g\delta pr$ -açık bir fonksiyondur.

İspat.

f kuvvetli zayıf $g\delta pr$ -kapalı bir fonksiyon olsun.

$A \subset X$ zayıf $g\delta pr$ -açık kümesini alalım. $X \setminus A$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı olup, f kuvvetli zayıf $g\delta pr$ -kapalı bir fonksiyon olduğundan $f(X \setminus A) \subset Y$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı olur.

f birebir ve örten olduğundan

$$f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)$$

olup $Y \setminus f(A)$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı olur.

O halde $f(A)$ zayıf $g\delta pr$ -açık küme olup, f kuvvetli zayıf $g\delta pr$ -açık bir fonksiyon olur.

Tersine, f kuvvetli zayıf $g\delta pr$ -açık fonksiyon olsun.

$A \subset X$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı kümesini alalım. $X \setminus A$ zayıf $g\delta pr$ -açık olup, f kuvvetli zayıf $g\delta pr$ -açık bir fonksiyon olduğundan $f(X \setminus A) \subset Y$ zayıf $g\delta pr$ -açık olur.

f birebir ve örten olduğundan

$$f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)$$

olup, $Y \setminus f(A)$ zayıf $g\delta pr$ -açık olur.

Sonuç olarak $f(A)$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı olup, f kuvvetli zayıf $g\delta pr$ -kapalı bir fonksiyon olur.

Teorem 6.57. (X, τ) ve (Y, σ) iki topolojik uzay ve ayrıca (X, τ) zayıf $g\delta pr-T_0$ uzay olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer f birebir, örten ve kuvvetli zayıf $g\delta pr$ -açık fonksiyon ise Y uzayı da zayıf $g\delta pr-T_0$ uzaydır.

İspat.

$x \neq y$ olacak şekilde $x, y \in Y$ noktaları alalım.

f birebir, örten olduğundan ve fonksiyon tanımı gereği $f^{-1}(x) \neq f^{-1}(y)$ olacak şekilde bir tek $f^{-1}(x)$ ve $f^{-1}(y)$ vardır.

X zayıf $g\delta pr-T_0$ uzay olduğundan $f^{-1}(x) \in A, f^{-1}(y) \notin A$ olacak şekilde $A \subset X$ zayıf $g\delta pr$ -açık kümesi veya $f^{-1}(x) \notin B, f^{-1}(y) \in B$ olacak şekilde $B \subset X$ zayıf $g\delta pr$ -açık kümesi vardır.

f kuvvetli zayıf $g\delta pr$ -açık olduğundan $f(A), f(B) \subset Y$ zayıf $g\delta pr$ -açık kümelerdir.

f örten olduğundan $f(f^{-1}(x)) = x$ ve $f(f^{-1}(y)) = y$ olup $x \in f(A), y \notin f(A)$ olacak şekilde $f(A)$ zayıf $g\delta pr$ -açık kümesi veya $x \notin f(B), y \in f(B)$ olacak şekilde $f(B)$ zayıf $g\delta pr$ -açık kümesi vardır.

O halde Y zayıf $g\delta pr-T_0$ uzaydır.

Teorem 6.58. (X, τ) ve (Y, σ) iki topolojik uzay ve ayrıca (X, τ) zayıf $g\delta pr-T_1$ uzay olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer f birebir, örten ve kuvvetli zayıf $g\delta pr$ -açık fonksiyon ise Y uzayı da zayıf $g\delta pr-T_1$ uzaydır.

İspat.

$x \neq y$ olacak şekilde $x, y \in Y$ noktaları alalım.

f birebir, örten olduğundan ve fonksiyon tanımı gereği $f^{-1}(x) \neq f^{-1}(y)$ olacak şekilde bir tek $f^{-1}(x)$ ve $f^{-1}(y)$ vardır.

X zayıf $g\delta pr-T_1$ uzay olduğundan $f^{-1}(x) \in A, f^{-1}(y) \notin A$ ve $f^{-1}(x) \notin B, f^{-1}(y) \in B$ olacak şekilde $A, B \subset X$ zayıf $g\delta pr$ -açık kümeleri vardır.

f kuvvetli zayıf $g\delta pr$ -açık olduğundan $f(A), f(B) \subset Y$ zayıf $g\delta pr$ -açık kümelerdir.

f örten olduğundan $f(f^{-1}(x)) = x$ ve $f(f^{-1}(y)) = y$ olup $x \in f(A), y \notin f(A)$ ve $x \notin f(B), y \in f(B)$ olacak şekilde $f(A)$ ve $f(B)$ zayıf $g\delta pr$ -açık kümeleri vardır.

O halde Y zayıf $g\delta pr-T_1$ uzaydır.

Teorem 6.59. (X, τ) ve (Y, σ) iki topolojik uzay ve ayrıca (X, τ) zayıf $g\delta pr-T_2$ olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer f kuvvetli zayıf $g\delta pr$ -açık, birebir ve örten fonksiyon ise Y uzayı da zayıf $g\delta pr-T_2$ uzaydır.

İspat.

$x \neq y$ olacak şekilde $x, y \in Y$ noktaları alalım.

f örten olduğundan ve fonksiyon tanımı gereği $f^{-1}(x) \neq f^{-1}(y)$ olur.

X zayıf $g\delta pr-T_2$ uzay olduğundan $f^{-1}(x) \in A, f^{-1}(y) \in B$ ve $A \cap B = \emptyset$ olacak şekilde $A, B \subset X$ zayıf $g\delta pr$ -açık kümeleri vardır.

f örten olduğundan $f(f^{-1}(x)) = x$ olup $x \in f(A)$ ve $f(f^{-1}(y)) = y$ olup $y \in f(B)$ olur.

f birebir olduğundan $f(A) \cap f(B) = \emptyset$ ve f kuvvetli zayıf $g\delta pr$ -açık olduğundan $f(A)$ ve $f(B)$ zayıf $g\delta pr$ -açık olur.

O halde Y zayıf $g\delta pr-T_2$ uzaydır.

Teorem 6.60. $(X, \tau), (Y, \sigma)$ topolojik uzaylar ve ayrıca (X, τ) zayıf $g\delta pr$ -regüler uzay olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer f birebir, örten, sürekli ve kuvvetli zayıf $g\delta pr$ -açık fonksiyon ise Y uzayı da zayıf $g\delta pr$ -regüler uzaydır.

İspat.

$x \notin K$ ve $K \subset Y$ alt kümesi kapalı olsun.

f sürekli olduğundan $f^{-1}(K) \subset X$ kapalı olup f birebir, örten olduğundan ve fonksiyon tanımı gereği $f^{-1}(x) \notin f^{-1}(K)$ olacak şekilde bir tek $f^{-1}(x)$ vardır.

X zayıf $g\delta pr$ -regüler uzay olduğundan $f^{-1}(x) \in A, f^{-1}(K) \subset B$ ve $A \cap B = \emptyset$ olacak şekilde $A, B \subset X$ zayıf $g\delta pr$ -açık kümeleri vardır.

f kuvvetli zayıf $g\delta pr$ -açık olduğundan $f(A), f(B) \subset Y$ kümeleri zayıf $g\delta pr$ -açık olur.

f örten olduğundan $f(f^{-1}(x)) = x$ ve $f(f^{-1}(K)) = K$ olur. Bu durumda $x \in f(A), K \subset f(B)$ olup f birebir olduğundan $f(A) \cap f(B) = \emptyset$ olur.

O halde Y zayıf $g\delta pr$ -regüler uzaydır.

Teorem 6.61. $(X, \tau), (Y, \sigma)$ topolojik uzaylar ve ayrıca (X, τ) zayıf $g\delta pr$ -normal uzay olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer f birebir, örten, kuvvetli zayıf $g\delta pr$ -açık ve sürekli fonksiyon ise Y uzayı da zayıf $g\delta pr$ -normal uzaydır.

İspat.

$K \cap L = \emptyset$ ve $K, L \subset Y$ kümeleri kapalı olsun.

f sürekli olduğundan $f^{-1}(K)$ ve $f^{-1}(L)$ kümeleri $f^{-1}(K) \cap f^{-1}(L) = \emptyset$ olacak şekilde X uzayında kapalı olurlar.

X zayıf $g\delta pr$ -normal uzay olduğundan $f^{-1}(K) \subset U$, $f^{-1}(L) \subset V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \subset X$ zayıf $g\delta pr$ -açık kümeleri vardır.

f birebir, örten ve kuvvetli zayıf $g\delta pr$ -açık olduğundan $K \subset f(U)$ ve $L \subset f(V)$ sağlanıp $f(U)$ ve $f(V)$, $f(U) \cap f(V) = \emptyset$ olacak şekilde zayıf $g\delta pr$ -açık kümeler olur.

O halde Y zayıf $g\delta pr$ -normal uzaydır.

Tanım 6.62. (X, τ) , (Y, σ) iki topolojik uzay ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. $A \subset Y$ kapalı bir küme olmak üzere $f^{-1}(A) \subset X$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı ise f fonksiyonuna zayıf $g\delta pr$ -sürekli fonksiyon denir.

Teorem 6.63. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ sürekli fonksiyon ise zayıf $g\delta pr$ -sürekli fonksiyondur.

İspat.

$f: X \rightarrow Y$ sürekli fonksiyon olsun. $A \subset Y$ herhangi bir kapalı küme olmak üzere $f^{-1}(A) \subset X$ kapalı olur. Teorem 4.4. ten $f^{-1}(A)$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı olur.

O halde f zayıf $g\delta pr$ -sürekli fonksiyon olur.

Teorem 6.64. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ $g\delta p$ -sürekli fonksiyon ise zayıf $g\delta pr$ -sürekli fonksiyondur.

İspat.

$f: X \rightarrow Y$ $g\delta p$ -sürekli fonksiyon olsun. $A \subset Y$ herhangi bir kapalı küme olmak üzere $f^{-1}(A) \subset X$ $g\delta p$ -kapalı olur. Teorem 4.8. den $f^{-1}(A)$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı olur.

O halde f zayıf $g\delta pr$ -sürekli fonksiyon olur.

Teorem 6.65. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ $g\delta pr$ -sürekli fonksiyon ise zayıf $g\delta pr$ -sürekli fonksiyondur.

İspat.

$f: X \rightarrow Y$ $g\delta pr$ -sürekli fonksiyon olsun. $A \subset Y$ herhangi bir kapalı küme olmak üzere $f^{-1}(A) \subset X$ $g\delta pr$ -kapalı olur. Teorem 4.10. dan $f^{-1}(A)$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı olur.

O halde f zayıf $g\delta pr$ -sürekli fonksiyon olur.

Teorem 6.66. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ zayıf $g\delta p$ -sürekli fonksiyon ise zayıf $g\delta pr$ -sürekli fonksiyondur.

İspat.

$f: X \rightarrow Y$ zayıf $g\delta p$ -sürekli fonksiyon olsun. $A \subset Y$ herhangi bir kapalı küme olmak üzere $f^{-1}(A) \subset X$ zayıf $g\delta p$ -kapalı olur. Teorem 5.1. den $f^{-1}(A)$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı olur.

O halde f zayıf $g\delta pr$ -sürekli fonksiyondur.

Teorem 6.67. (X, τ) ve (Y, σ) iki topolojik uzay ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda f zayıf $g\delta pr$ -sürekli fonksiyondur ancak ve ancak her $A \subset Y$ açık kümesi için $f^{-1}(A) \subset X$ zayıf $g\delta pr$ -açıktır.

İspat.

Varsayalım ki, f zayıf $g\delta pr$ -sürekli fonksiyon olsun.

$A \subset Y$ açık bir küme olsun.

$$f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$$

ve $Y \setminus A$ kapalı olduğundan $f^{-1}(Y \setminus A)$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı olup $X \setminus f^{-1}(A)$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı olur.

O halde $f^{-1}(A)$ zayıf $g\delta pr$ -açıktır.

Tersine, $A \subset Y$ kapalı alt kümesini alalım. $Y \setminus A$ açık olup varsayım gereği $f^{-1}(Y \setminus A)$ zayıf $g\delta pr$ -açık olur.

$$f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$$

olduğundan $X \setminus f^{-1}(A)$ zayıf $g\delta pr$ -açık olup, $f^{-1}(A)$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı olur.

O halde f zayıf $g\delta pr$ -sürekli dir.

Tanım 6.68. (X, τ) , (Y, σ) iki topolojik uzay ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. $A \subset Y$ $g\delta pr$ -kapalı bir küme olmak üzere $f^{-1}(A) \subset X$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı ise f fonksiyonuna $g\delta pr$ -zayıf $g\delta pr$ -sürekli fonksiyon denir.

Teorem 6.69. (X, τ) , (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ $g\delta pr$ -kararsız fonksiyon ise $g\delta pr$ -zayıf $g\delta pr$ -sürekli fonksiyondur.

İspat.

$f: X \rightarrow Y$ $g\delta pr$ -kararsız fonksiyon olsun. $A \subset Y$ herhangi bir $g\delta pr$ -kapalı küme

olmak üzere $f^{-1}(A) \subset X$ $g\delta pr$ -kapalı olur. Teorem 4.10. dan $f^{-1}(A)$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı olur.

O halde f $g\delta pr$ -zayıf $g\delta pr$ -sürekli fonksiyon olur.

Teorem 6.70. (X, τ) , (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ $g\delta pr$ -zayıf $g\delta pr$ -sürekli fonksiyon ise zayıf $g\delta pr$ -sürekli fonksiyondur.

İspat.

$f: X \rightarrow Y$ $g\delta pr$ -zayıf $g\delta pr$ -sürekli fonksiyon olsun. $A \subset Y$ kapalı kümesini alalım. Her kapalı küme $g\delta pr$ -kapalı olduğundan $A \subset Y$ $g\delta pr$ -kapalı kümedir. f $g\delta pr$ -zayıf $g\delta pr$ -sürekli fonksiyon olduğundan $f^{-1}(A) \subset X$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı olur.

O halde f zayıf $g\delta pr$ -sürekli fonksiyondur.

Teorem 6.71. (X, τ) ve (Y, σ) iki topolojik uzay ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. f $g\delta pr$ -zayıf $g\delta pr$ -sürekli fonksiyondur ancak ve ancak her $A \subset Y$ $g\delta pr$ -açık kümesi için $f^{-1}(A) \subset X$ zayıf $g\delta pr$ -açıktır.

İspat.

Varsayalım ki, f $g\delta pr$ -zayıf $g\delta pr$ -sürekli fonksiyon olsun. $A \subset Y$ $g\delta pr$ -açık kümesini alalım.

$$f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$$

ve $Y \setminus A$ $g\delta pr$ -kapalı olduğundan $f^{-1}(Y \setminus A)$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı olup, $X \setminus f^{-1}(A)$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı olur.

O halde $f^{-1}(A)$ zayıf $g\delta pr$ -açıktır.

Tersine, $A \subset Y$ $g\delta pr$ -kapalı alt kümesini alalım. Buradan $Y \setminus A$ $g\delta pr$ -açık olup varsayım gereği $f^{-1}(Y \setminus A)$ zayıf $g\delta pr$ -açık olur.

$$f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$$

olduğundan $X \setminus f^{-1}(A)$ zayıf $g\delta pr$ -açık olup, $f^{-1}(A)$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı olur.

O halde f $g\delta pr$ -zayıf $g\delta pr$ -sürekli olur.

Tanım 6.72. (X, τ) , (Y, σ) iki topolojik uzay ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. $A \subset Y$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı bir küme olmak üzere $f^{-1}(A) \subset X$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı ise f fonksiyonuna zayıf $g\delta pr$ -kararsız fonksiyon denir.

Teorem 6.73. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ zayıf $g\delta pr$ -

kararsız fonksiyon ise zayıf $g\delta pr$ -sürekli fonksiyondur.

İspat.

$f: X \rightarrow Y$ zayıf $g\delta pr$ -kararsız fonksiyon olsun.

$A \subset Y$ kapalı kümesini alalım. Teorem 4.4. den A zayıf $g\delta pr$ -kapalı olur. O halde f zayıf $g\delta pr$ -kararsız olduğundan $f^{-1}(A) \subset X$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı olur.

Bu durumda f zayıf $g\delta pr$ -sürekli fonksiyondur.

Teorem 6.74. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ zayıf $g\delta pr$ -kararsız fonksiyon ise f $g\delta pr$ -zayıf $g\delta pr$ -sürekli fonksiyon olur.

İspat.

$f: X \rightarrow Y$ zayıf $g\delta pr$ -kararsız fonksiyon olsun.

$A \subset Y$ $g\delta pr$ -kapalı kümesini alalım. Teorem 4.10. dan A zayıf $g\delta pr$ -kapalı olur. O halde f zayıf $g\delta pr$ -kararsız olduğundan $f^{-1}(A) \subset X$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı olur.

Bu durumda f $g\delta pr$ -zayıf $g\delta pr$ -sürekli fonksiyondur.

Teorem 6.75. (X, τ) ve (Y, σ) iki topolojik uzay ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. f zayıf $g\delta pr$ -kararsız fonksiyondur ancak ve ancak her $A \subset Y$ zayıf $g\delta pr$ -açık kümesi için $f^{-1}(A) \subset X$ zayıf $g\delta pr$ -açıktır.

İspat.

Varsayalım ki, f zayıf $g\delta pr$ -kararsız fonksiyon olsun.

$A \subset Y$ zayıf $g\delta pr$ -açık kümesini alalım.

$$f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$$

ve $Y \setminus A$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı olduğundan $f^{-1}(Y \setminus A)$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı olup, $X \setminus f^{-1}(A)$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı olur.

O halde $f^{-1}(A)$ zayıf $g\delta pr$ -açıktır.

Tersine, $A \subset Y$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı alt kümesini alalım. O halde $Y \setminus A$ zayıf $g\delta pr$ -açık olup varsayım gereği $f^{-1}(Y \setminus A)$ zayıf $g\delta pr$ -açık olur.

$$f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$$

oldüğundan $X \setminus f^{-1}(A)$ zayıf $g\delta pr$ -açık olup, $f^{-1}(A)$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı olur.

Sonuç olarak f zayıf $g\delta pr$ -kararsız olur.

Teorem 6.76. (X, τ) ve (Y, σ) iki topolojik uzay ve ayrıca (Y, σ) zayıf $g\delta pr$ - T_0 uzay olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer f birebir ve zayıf $g\delta pr$ -kararsız

fonksiyon ise X zayıf $g\delta pr-T_0$ uzaydır.

İspat.

$x \neq y$ olacak şekilde $x, y \in X$ noktaları alalım. f birebir olduğundan $f(x) \neq f(y)$ olur.

Y zayıf $g\delta pr-T_0$ uzay olduğundan $f(x) \in A, f(y) \notin A$ olacak şekilde $A \subset Y$ zayıf $g\delta pr$ -açık kümesi veya $f(x) \notin B, f(y) \in B$ olacak şekilde $B \subset Y$ zayıf $g\delta pr$ -açık kümesi vardır.

f zayıf $g\delta pr$ -kararsız olduğundan $f^{-1}(A), f^{-1}(B) \subset X$ zayıf $g\delta pr$ -açık olur.

f birebir olduğundan $f^{-1}(f(x)) = x$ ve $f^{-1}(f(y)) = y$ olup $x \in f^{-1}(A), y \notin f^{-1}(A)$ olacak şekilde $f^{-1}(A)$ zayıf $g\delta pr$ -açık kümesi veya $x \notin f^{-1}(B), y \in f^{-1}(B)$ olacak şekilde $f^{-1}(B)$ zayıf $g\delta pr$ -açık kümesi vardır.

O halde X zayıf $g\delta pr-T_0$ uzaydır.

Teorem 6.77. (X, τ) ve (Y, σ) iki topolojik uzay ve ayrıca (Y, σ) zayıf $g\delta pr-T_1$ uzay olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer f birebir ve zayıf $g\delta pr$ -kararsız fonksiyon ise X zayıf $g\delta pr-T_1$ uzaydır.

İspat.

$x \neq y$ olacak şekilde $x, y \in X$ noktaları alalım. f birebir olduğundan $f(x) \neq f(y)$ olur.

Y zayıf $g\delta pr-T_1$ uzay olduğundan $f(x) \in A, f(y) \notin A$ ve $f(x) \notin B, f(y) \in B$ olacak şekilde $A, B \subset Y$ zayıf $g\delta pr$ -açık kümeleri vardır.

f zayıf $g\delta pr$ -kararsız olduğundan $f^{-1}(A), f^{-1}(B) \subset X$ zayıf $g\delta pr$ -açık olur. f birebir olduğundan $f^{-1}(f(x)) = x$ ve $f^{-1}(f(y)) = y$ olup $x \in f^{-1}(A), y \notin f^{-1}(A)$ ve $x \notin f^{-1}(B), y \in f^{-1}(B)$ olacak şekilde $f^{-1}(A)$ ve $f^{-1}(B)$ zayıf $g\delta pr$ -açık kümeleri vardır.

O halde X zayıf $g\delta pr-T_1$ uzaydır.

Teorem 6.78. (X, τ) ve (Y, σ) iki topolojik uzay ve ayrıca (Y, σ) zayıf $g\delta pr-T_2$ uzay olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer f birebir ve zayıf $g\delta pr$ -kararsız bir fonksiyon ise X zayıf $g\delta pr-T_2$ uzaydır.

İspat.

$x \neq y$ olacak şekilde $x, y \in X$ noktaları alalım. f birebir olduğundan $f(x) \neq f(y)$ olur.

Y zayıf $g\delta pr-T_2$ uzay olduğundan $f(x) \in A, f(y) \in B$ ve $A \cap B = \emptyset$ olacak şekilde $A, B \subset Y$ zayıf $g\delta pr$ -açık kümeleri vardır.

f aynı zamanda zayıf $g\delta pr$ -kararsız olduğundan $f^{-1}(A), f^{-1}(B) \subset X$ alt kümeleri zayıf $g\delta pr$ -açık olur. Aynı zamanda $x \in f^{-1}(A), y \in f^{-1}(B)$ ve $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$ olduğundan X zayıf $g\delta pr-T_2$ uzaydır.

Teorem 6.79. (X, τ) ve (Y, σ) iki topolojik uzay ve ayrıca (Y, σ) zayıf $g\delta pr$ -regüler uzay olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer f birebir, kapalı ve zayıf $g\delta pr$ -kararsız fonksiyon ise X zayıf $g\delta pr$ -regüler uzaydır.

İspat.

$x \notin K$ ve $K \subset X$ alt kümesi kapalı olsun. f birebir ve kapalı olduğundan $f(K) \subset Y$ kapalı olup $f(x) \notin f(K)$ olur.

Y zayıf $g\delta pr$ -regüler uzay olduğundan $f(x) \in A, f(K) \subset B$ ve $A \cap B = \emptyset$ olacak şekilde $A, B \subset Y$ zayıf $g\delta pr$ -açık kümeleri vardır.

f zayıf $g\delta pr$ -kararsız olduğundan $f^{-1}(A), f^{-1}(B) \subset X$ kümeleri zayıf $g\delta pr$ -açık olur.

f birebir olduğundan $f^{-1}(f(x)) = x$ ve $f^{-1}(f(K)) = K$ olur. Bu durumda $x \in f^{-1}(A), K \subset f^{-1}(B)$ olup fonksiyon tanımı gereği $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$ olur.

O halde X zayıf $g\delta pr$ -regüler uzaydır.

Teorem 6.80. (X, τ) ve (Y, σ) iki topolojik uzay ve ayrıca (Y, σ) zayıf $g\delta pr$ -normal uzay olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer f birebir, kapalı ve zayıf $g\delta pr$ -kararsız fonksiyon ise X zayıf $g\delta pr$ -normal uzaydır.

İspat.

$K \cap L = \emptyset$ ve $K, L \subset X$ alt kümeleri kapalı olsun.

f birebir ve kapalı olduğundan $f(K), f(L) \subset Y$ kapalı olup $f(K) \cap f(L) = \emptyset$ olur.

Y zayıf $g\delta pr$ -normal uzay olduğundan $f(K) \subset U, f(L) \subset V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \subset Y$ zayıf $g\delta pr$ -açık kümeleri vardır.

f birebir olduğundan $f^{-1}(f(K)) = K$ ve $f^{-1}(f(L)) = L$ olur. Fonksiyon tanımı gereği $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$ olup

$$K = f^{-1}(f(K)) \subset f^{-1}(U) \text{ ve } L = f^{-1}(f(L)) \subset f^{-1}(V)$$

olur.

f zayıf $g\delta pr$ -kararsız olduğundan $f^{-1}(U), f^{-1}(V) \subset X$ alt kümeleri zayıf $g\delta pr$ -

açık olur.

O halde X zayıf $g\delta p$ -normal uzaydır.

Teorem 6.81. (X, τ) ve (Y, σ) iki topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A açık ve zayıf $g\delta p$ -kapalı bir küme olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ sürekli ve kuvvetli δ -önkapalı bir fonksiyon olsun. O zaman $f(A)$ zayıf $g\delta p$ -kapalıdır.

İspat.

A açık ve zayıf $g\delta p$ -kapalı bir küme olmak üzere f sürekli ve kuvvetli δ -önkapalı bir fonksiyon olsun.

$V \subset X$ açık ve $f(A) \subset V$ olsun. Buradan

$$A \subset f^{-1}(V)$$

olur.

f sürekli olduğundan $f^{-1}(V)$ açık olup, A zayıf $g\delta p$ -kapalı olduğundan

$$\delta - pcl(int(A)) \subset f^{-1}(V)$$

olur.

Buradan da

$$f(\delta - pcl(int(A))) \subset V$$

olur.

f kuvvetli δ -önkapalı fonksiyon olduğundan

$$f(\delta - pcl(int(A)))$$

δ -önkapalı olur.

$f(\delta - pcl(int(A)))$, δ -önkapalı olduğundan

$$\delta - pcl(f(\delta - pcl(int(A)))) = f(\delta - pcl(int(A)))$$

olur.

$$int(f(\delta - pcl(int(A)))) \subset f(\delta - pcl(int(A)))$$

olduğundan

$$\delta - pcl(int(f(\delta - pcl(int(A)))) \subset \delta - pcl(f(\delta - pcl(int(A))))$$

olur.

O halde

$$\delta - pcl \left(\text{int} \left(f \left(\delta - pcl(\text{int}(A)) \right) \right) \right) \subset f \left(\delta - pcl(\text{int}(A)) \right) \subset V$$

olur.

A açık olduğundan $A \subset \delta - pcl(\text{int}(A))$ olur.

Buradan da

$$\delta - pcl \left(\text{int}(f(A)) \right) \subset \delta - pcl \left(\text{int} \left(f \left(\delta - pcl(\text{int}(A)) \right) \right) \right)$$

olur.

O halde

$$\delta - pcl \left(\text{int}(f(A)) \right) \subset V$$

olur.

Böylece $f(A)$ zayıf $g\delta p$ -kapalıdır.

Teorem 6.82. (X, τ) ve (Y, σ) iki topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kapalı ve zayıf $g\delta p$ -açık olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ sürekli, kuvvetli δ -önkapalı, birebir ve örten fonksiyon olsun. O zaman $f(A)$ zayıf $g\delta p$ -açıktır.

İspat.

A kapalı ve zayıf $g\delta p$ -açık olsun. O halde $X \setminus A$ açık ve zayıf $g\delta p$ -kapalı olur.

f sürekli ve kuvvetli δ -önkapalı fonksiyon olduğundan bir önceki teoremden $f(X \setminus A)$ zayıf $g\delta p$ -kapalı olur.

O halde $Y \setminus f(X \setminus A)$ zayıf $g\delta p$ -açık olur.

$$Y \setminus f(X \setminus A) = f(A)$$

olduğundan $f(A)$ zayıf $g\delta p$ -açık olur.

Teorem 6.83. (X, τ) ve (Y, σ) iki topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A açık ve zayıf $g\delta pr$ -kapalı bir küme olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ R -dönüşüm ve kuvvetli δ -önkapalı bir fonksiyon olsun. O zaman $f(A)$ zayıf $g\delta pr$ -kapalıdır.

İspat.

A açık ve zayıf $g\delta pr$ -kapalı bir küme olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ R -dönüşüm ve kuvvetli δ -önkapalı bir fonksiyon olsun.

V düzenli açık ve $f(A) \subset V$ olsun. Buradan $A \subset f^{-1}(V)$ olur.

f R -dönüşüm olduğundan $f^{-1}(V)$ düzenli açık olup, A zayıf $g\delta pr$ -kapalı olduğundan $\delta - pcl(\text{int}(A)) \subset f^{-1}(V)$

olur. Buradan da

$$f(\delta - pcl(int(A))) \subset V$$

olur.

f kuvvetli δ -önkapalı olduğundan

$$f(\delta - pcl(int(A)))$$

δ -önkapalı olur.

$f(\delta - pcl(int(A)))$ δ -önkapalı olduğundan

$$\delta - pcl(f(\delta - pcl(int(A)))) = f(\delta - pcl(int(A)))$$

olur.

$$int(f(\delta - pcl(int(A)))) \subset f(\delta - pcl(int(A)))$$

olduğundan

$$\delta - pcl(int(f(\delta - pcl(int(A)))) \subset \delta - pcl(f(\delta - pcl(int(A))))$$

olur.

O halde

$$\delta - pcl(int(f(\delta - pcl(int(A)))) \subset f(\delta - pcl(int(A))) \subset V$$

olur.

A açık olduğundan $A \subset \delta - pcl(int(A))$ olur. Buradan da

$$\delta - pcl(int(f(A))) \subset \delta - pcl(int(f(\delta - pcl(int(A))))$$

olur. O halde

$$\delta - pcl(int(f(A))) \subset V$$

olur.

Böylece $f(A)$ zayıf $g\delta pr$ -kapalıdır.

Teorem 6.84. (X, τ) ve (Y, σ) iki topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kapalı ve zayıf $g\delta pr$ -açık olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ R -dönüşüm, kuvvetli δ -önkapalı, birebir ve örten olsun. O zaman $f(A)$ zayıf $g\delta pr$ -açıktır.

İspat.

A kapalı ve zayıf $g\delta pr$ -açık olsun. O halde $X \setminus A$ açık ve zayıf $g\delta pr$ -kapalı olur.

f R -dönüşüm ve kuvvetli δ -önkapalı olduğundan bir önceki teoremden $f(X \setminus A)$ zayıf $g\delta pr$ -kapalı olur. O halde $Y \setminus f(X \setminus A)$ zayıf $g\delta pr$ -açık olur.

$$Y \setminus f(X \setminus A) = f(A)$$

olduğundan $f(A)$ zayıf $g\delta pr$ -açık olur.



BÖLÜM 7

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde $g\delta p$ -kapalı küme ve $g\delta pr$ -kapalı küme kavramlarının zayıf formları olan zayıf $g\delta p$ -kapalı küme ve zayıf $g\delta pr$ -kapalı küme kavramları ile beraber bu kümelerin tümleyenleri olan zayıf $g\delta p$ -açık küme ve zayıf $g\delta pr$ -açık küme kavramları sunulmuş ve karakterize edilmiştir. Bu kümelerin topolojik uzaylardaki özellikleri, birbirleriyle ve diğer kümelerle olan ilişkileri incelenmiştir. Bu küme kavramları vasıtasıyla bir alt kümenin $zg\delta p$ -çekirdeği, $zg\delta p$ -kapanışı, $zg\delta pr$ -çekirdeği ve $zg\delta pr$ -kapanışı kavramları, yeni ayırma aksiyomları, bunların özellikleri ve bu ayırma aksiyomlarının birbirleriyle olan ilişkileri incelenmiştir. Yine bu küme kavramları vasıtasıyla yeni fonksiyonlar tanımlanmış bu fonksiyonların özellikleri, birbirleriyle ve diğer fonksiyonlarla olan ilişkileri elde edilmiştir. Ayrıca bu fonksiyonların yeni bulunan ayırma aksiyomlarına olan etkileri araştırılmıştır.

KAYNAKLAR

- Baker, C. W. (2001). A Note on θ -generalized Closed Sets. *Int. J. Math. Math. Sci.*, 25(8), 559-563. doi: <http://dx.doi.org/10.1155/S0161171201003945>
- Caldas, M., Jafari, S., ve Noiri, T. (2008). On λ -generalized Closed Sets in Topological Spaces. *Acta Math. Hungar.*, 118(4), 337-343. doi: <https://doi.org/10.1007/s10474-007-6224-1>
- Cao, J., Ganster, M., ve Reilly, I. (2002). On Generalized Closed Sets. *Proceedings of the Janos Bolyai Mathematical Society 8th International Topology Conference (Gyula, 1998)*. *Topology Appl.*, 123(1), 37-46. doi: [https://doi.org/10.1016/S0166-8641\(01\)00167-5](https://doi.org/10.1016/S0166-8641(01)00167-5)
- Cao, J., Ganster, M., Reilly, I. ve Steiner, M. (2005). δ -closure, θ -closure and Generalized Closed Sets. *Appl. Gen. Topol.*, 6(1), 79-86. doi: <https://doi.org/10.4995/agt.2005.1964>
- Carnahan, D. (1973). *Some Properties Related to Compactness in Topological Spaces* (PhD thesis). University of Arkansas, USA.
- Cueva, M. C. (1993). On g-closed Sets and g-continuous Mappings. *Kyungpook Math. J.*, 33(2), 205-209. Eriřim adresi: <http://www.koreascience.or.kr/article/JAKO199325748114708.page>
- Dontchev, J., ve Ganster, M. (1996). On δ -generalized Closed Sets and $T_{3/4}$ -spaces. *Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. Ser. A Math.*, 17, 15–31. Eriřim adresi: <http://at.yorku.ca/p/a/b/a/06.htm>
- Dontchev, J., ve Maki, H. (1999). On θ -generalized Closed Sets. *Int. J. Math. Math. Sci.*, 22(2), 239-249. doi: <http://dx.doi.org/10.1155/S0161171299222399>
- Dunham, W. (1977). $T_{1/2}$ -spaces, *Kyungpook Math. J.*, 17, 161–169. Eriřim adresi: <http://www.koreascience.or.kr/article/JAKO197725748112104.page>
- Ekici, E. (2005). On δ -preopen Sets. *Mathematica*, 47(70), (2), 157-164. Eriřim adresi: <http://math.ubbcluj.ro/~mathjour/articles/2005-2/ekici1.pdf>
- Ekici, E., ve Noiri, T. (2006a). On a Generalization of Normal, Almost Normal and Mildly Normal Spaces-I. *Math. Mor.*, 10, 9-20. doi: <https://doi.org/10.5937/MatMor0610020E>
- Ekici, E., ve Noiri, T. (2006b). On a Generalization of Normal, Almost Normal and Mildly Normal Spaces-II. *Filom.*, 20(2), 67-80. doi: <https://doi.org/10.2298/FIL0602080E>
- El-Deeb, S. N., Hasanein, I. A., Mashhour, A. S., ve Noiri, T. (1983). On p-regular Spaces.

- Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie*, 27(75), 311-315. Eriřim adresi: <https://www.jstor.org/stable/43680828>
- Gnanambal, Y. (1997). On Generalized Preregular Closed Sets in Topological Spaces. *Indian J. Pure Appl. Math.*, 28(3), 351-360. Eriřim adresi: https://www.insa.nic.in/writereaddata/UpLoadedFiles/IJPAM/20005a18_351.pdf
- Levine, N. (1963). Semi-Open Sets and Semi-Continuity in Topological Spaces. *Amer. Math. Monthly*, 70(1), 36-41. doi: <https://doi.org/10.1080/00029890.1963.11990039>
- Levine, N. (1970). Generalized Closed Sets in Topology. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 19(2), 89-96. doi: <https://doi.org/10.1007/BF02843888>
- Maki, H. (1986). Generalized λ -sets and The Associated Closure Operator. *The Special Issue in Commemoration of Prof. Jazuda Ikeda's Retirement*, 139-146.
- Maki, H., Devi, R., ve Balachandran, K. (1993). Generalized α -closed Sets in Topology. *Bull. Fukuoka Univ. Ed. Part III* 42, 13-21.
- Maki, H., Umehara, J., ve Noiri, T. (1996). Every Topological Space is pre- $T_{1/2}$. *Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. Ser. A Math.*, 17, 33-42.
- Mashhour, A. S., Abd El -Monsef, M. E., ve El-Deeb, S. N. (1982). On Precontinuous and Weak Precontinuous Mappings. *Proc. Math. Phys. Soc. Egypt*, 53, 47-53.
- Noiri, T. (1998). Almost p-regular Spaces and Some Functions. *Acta Math. Hungar.*, 79(3), 207-216. doi: <https://doi.org/10.1023/A:1006505824000>
- Noiri, T., ve Popa, V. (2006). Between Closed Sets and g-closed Sets. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 55(2), 175-184. doi: <https://doi.org/10.1007/BF02874700>
- Palaniappan, N., ve Rao, K. C. (1993). Regular Generalized Closed Sets. *Kyungpook Math. J.*, 33(2), 211-219. Eriřim adresi: <http://www.koreascience.or.kr/article/JAKO199325748114711.page>
- Raychaudhuri, S., ve Mukherjee, M. N. (1993). On δ -almost Continuity and δ -preopen Sets. *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica*, 21(4), 357-366.
- Roy, B. (2011). On a Type of Generalized Open Sets. *Applied General Topology*, 12(2), 163-173. doi: <https://doi.org/10.4995/agt.2011.1649>
- Stone, M. H. (1937). Applications of the Theory of Boolean Rings to General Topology. *TAMS*, 41, 375-381. doi: <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1937-1501905-7>
- Sundaram, P., ve Nagaveni, N. (1998). On Weakly Generalized Continuous Maps, Weakly Generalized Closed Maps and Weakly Generalized Irresolute Maps in Topological

Spaces. *Far East J. Math. Sci.*, 6(6), 903-1012.

Velicko, N. V. (1968). H-closed Topological Spaces. *Amer. Math. Soc. Transl.*, 78, 103-118.



ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Nizamettin Ufuk BOSTAN
Doğum Yeri : Sarıkaya/Yozgat
Doğum Tarihi : 10.04.1993

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi : Akdeniz Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 2016
Yüksek Lisans Öğrenimi : Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 2020
Kanazawa University
Student Exchange Program
for Science and
Technology (KUEST) : Kanazawa University, School of International Education, JAPAN, (Oct. 2018-Feb. 2019)
Doktora Öğrenimi :
Bildiği Yabancı Diller : İngilizce-Japonca

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

a) Yayınlar

1) SCI

2) Diğer

b) Bildiriler

1) Uluslararası

Bostan N. U., Özen Yıldırım S., "On Weak Forms of Some Sets in Topological Spaces", 4th International Symposium on Innovative Approaches in Engineering and Natural Sciences, SAMSUN, TÜRKİYE, 22-24 Kasım 2019, pp. 22-22.

2) Ulusal

c) Katıldığı Projeler

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl: İstinye Üniversitesi, Araştırma Görevlisi,
2019-2019
Haliç Üniversitesi, Araştırma Görevlisi,
Kasım 2019-Devam Ediyor

İLETİŞİM

E-posta Adresi : ufukbostan@halic.edu.tr
ufukbostann@outlook.com
ORCID : 0000-0003-4708-8663