



**DUS WEIBULL VE DUS INVERSE WEIBULL DAĞILIMLARI:
PARAMETRE TAHMİNİ VE HİPOTEZ TESTLERİ**

Hasan Hüseyin GÜL

**DOKTORA TEZİ
İSTATİSTİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

OCAK 2020

Hasan Hüseyin GÜL tarafından hazırlanan “DUS WEIBULL VE DUS INVERSE WEIBULL DAĞILIMLARI: PARAMETRE TAHMİNİ VE HİPOTEZ TESTLERİ” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi İstatistik Ana Bilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Hülya BAYRAK

İstatistik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

İkinci Danışman: Prof. Dr. Birdal ŞENOĞLU

İstatistik Ana Bilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Başkan: Prof. Dr. Serpil EROL

Endüstri Mühendisliği Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Prof. Dr. Meral ÇETİN

İstatistik Ana Bilim Dalı, Hacettepe Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Prof. Dr. Fikri GÖKPINAR

İstatistik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Prof. Dr. Meral EBEGİL

İstatistik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Şükrü ACITAŞ

İstatistik Ana Bilim Dalı, Eskişehir Teknik Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Tez Savunma Tarihi: 08/01/2020

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Doktora Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Hasan Hüseyin GÜL

08/01/2020

DUS WEIBULL VE DUS INVERSE WEIBULL DAĞILIMLARI: PARAMETRE TAHMINİ VE HİPOTEZ TESTLERİ

(Doktora Tezi)

Hasan Hüseyin GÜL

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2020

ÖZET

İstatistik, mühendislik, tıp, finans gibi birçok uygulamalı bilimde gerçek veri setlerinin analiz edilmesi ve modellenmesi oldukça önemlidir. Doğadaki rasgelelikten dolayı, sistemlerin bozulma davranışları doğal mekanizmalarına bağlı olarak çeşitlilik gösterebilir. Sistemlerin bahsedilen bozulma davranışları istatistiksel modeller yardımıyla açıklanabilir. Bu amaçla literatürde yaşam verilerini modellemek için önerilen birçok yaşam süresi dağılımı vardır. Bununla birlikte mevcut standart olasılık dağılımlarının kısıtlamaları veya modelleme yetersizlikleri araştırmacıları mevcut dağılımları genelleştirme ya da yeni dağılım aileleri önermeye itmiştir. Yeni dağılım aileleri üreten tekniklerden biri de DUS dönüşüm tekniğidir. Bu teknik, hesaplama ve yorumlama açısından daha kolay ve anlaşılır ayrıca yeni parametre içermeyen bir dağılım üretir. Bu çalışmada, Weibull ve inverse Weibull dağılımları temel dağılım olarak alınıp, DUS-Weibull ve DUS-inverse-Weibull dağılımları önerilmiştir. Önerilen dağılımların momentleri, basıklık ve çarpıklık katsayıları, moment çıkaran fonksiyonları ve quantil fonksiyonları gibi istatistiksel özellikleri ortaya konmuştur. Ayrıca farklı tahmin metotları için önerilen dağılımların bilinmeyen parametrelerinin tahmin edicilerinin etkinliklerini karşılaştırmak için Monte Carlo simülasyon çalışması yapılmıştır. Önerilen dağılımların lineer modellere uygulanmasını göstermek amacıyla, *DW* ve *DIW* dağılımları lineer regresyon modeline uygulanmıştır. Lineer regresyon modelinde bilinmeyen parametreleri tahmin etmek için genellikle hataların dağılımının ortalaması 0 varyansı σ^2 olan normal dağılıma sahip oldukları varsayılır. Ancak çoğu uygulamada genellikle hatalar normal dağılıma sahip olmazlar. Bu çalışmada, lineer regresyon modeli için, hataların dağılımı *DW* ve *DIW* olarak alınmıştır. Daha sonra, bilinmeyen regresyon parametreleri tahmin edilmiş ve bu parametrelere dayalı olarak hipotez testi için yeni test istatistikleri önerilmiştir. Önerilen regresyon tahmin edicilerinin performansları ve bunlara dayalı testler Monte Carlo simülasyon çalışması ile karşılaştırılmıştır. Çalışmanın sonunda, önerilen metodolojilerin uygulanabilirliğini göstermek için bir uygulama çalışması verilmiştir.

Bilim Kodu : 20513
Anahtar Kelimeler : DUS yöntemi, Weibull dağılımı, inverse-Weibull dağılımı,
Sayfa Adedi : 150
Danışman : Prof. Dr. Hülya BAYRAK
İkinci Danışman : Prof. Dr. Birdal ŞENOĞLU

DUS WEIBULL AND DUS INVERSE WEIBULL DISTRIBUTIONS: PARAMETER
ESTIMATION AND HYPOTHESIS TESTS

(Ph. D. Thesis)

Hasan Hüseyin GÜL

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

January 2020

ABSTRACT

In many applied sciences such as statistics, engineering, medicine, finance, the analysis and modeling of real data sets is very important. Due to the randomness in nature, the deterioration behavior of the systems may vary depending on their natural mechanisms. This distortion behavior of the systems can be explained with the help of statistical models. For this purpose, there are many life time distributions proposed in the literature to model life data. However, limitations or modeling insufficiencies of existing standard probability distributions have led researchers to generalize existing distributions or propose new distribution families. One of the techniques that produce new distribution families is the DUS transformation technique. This technique produces a parsimonious distribution in terms of computation and interpretation as it never contain any new parameter. In this study, Weibull and inverse Weibull distributions are taken as the basic distributions and DUS-Weibull (*DW*) and DUS-inverse-Weibull (*DIW*) distributions are proposed. Moments, kurtosis and skewness coefficients, moment generating functions and quantile functions of the proposed distributions are presented. In addition, Monte Carlo simulation study is conducted to compare the efficiencies of the estimators of the unknown parameters of the proposed distributions for different estimation methods. In order to demonstrate the application of the proposed distributions to linear models, *DW* and *DIW* distributions are applied to the simple linear regression model. To estimate unknown parameters in a linear regression model, it is generally assumed that the distributions of errors have a normal distribution with mean 0 and variance σ^2 . In practice, however, errors do not have a normal distribution in most of the practical cases. In this study, for the linear regression model, the distribution of the errors is taken to be *DW* and *DIW*. Then, we estimate the unknown regression parameters and propose new test statistics based on them to test the hypotheses. Performances of the proposed regression estimators and the tests based on them are compared via Monte Carlo simulation study. An application is given at the end of the study to show the implementation of the proposed methodologies.

Science Code : 20513

Key Words : DUS method, Weibull distribution, inverse-Weibull distribution

Page Number : 150

Supervisor : Prof. Dr. Hülya BAYRAK

Co-Supervisor : Prof. Dr. Birdal ŞENOĞLU

TEŞEKKÜR

Doktora tez çalışmam süresince danışmanlığımı yürütüp, bana sınırsız destek veren, sabır gösteren, motive eden, yol gösteren, beni her zaman çalışmaya ve üretmeye teşvik eden, bilgi ve beceri edinmemde büyük emekleri olan, gerek istatistik bilgi birikimleri gerekse kişilik özellikleriyle her zaman yoluma ışık tutan ve tutacak olan saygı değer danışman hocalarım Prof. Dr. Hülya BAYRAK'a ve Prof. Dr. Birdal ŞENOĞLU'na, hiçbir zaman desteklerini ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocalarım Prof. Dr. Fikri GÖKPINAR'a ve Dr. Öğr. Üyesi Şükrü ACITAŞ'a, her daim yanımda olan, desteklerini benden hiçbir zaman esirgemeyen can dostlarım olan mesai arkadaşlarıma, beni bu günlere getiren ve haklarını hiçbir zaman ödeyemeyeceğim annem ve babama, hayatımın her aşamasında bana destek olan kardeşime, tanıştığım günden bugüne her daim anlayışlı ve sabırla desteğini hissettiğim, bana katkılarını ve yardımlarını yazsam asla bu sayfaya sığmayacak olan sevgili eşim Ayşe GÜL'e, bu süreçte hayatıma girerek varlıkları ve sevgileri ile her şeyi daha anlamlı kılıp, daha renkli hale getiren sevgili çocuklarım Cafer ve Ömer'e, Sonsuz teşekkürler.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ.....	x
ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....	xii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	xiii
1. GİRİŞ.....	1
2. DUS DÖNÜŞÜMÜ KULLANILARAK ÖNERİLEN DAĞILIMLAR..	5
2.1. Dönüşümde Temel Olarak Alınan Dağılımlar	5
2.1.1. Weibull dağılımı.....	5
2.1.2. Inverse Weibull dağılımı.....	9
2.2. Önerilen Dağılımlar.....	14
2.2.1. DUS Weibull dağılımı.....	15
2.2.2. DUS inverse Weibull dağılımı	23
3. ÖNERİLEN DAĞILIMLAR İÇİN PARAMETRE TAHMİNİ	33
3.1. Tahmin Yöntemleri	33
3.1.1. <i>ML</i> yöntemi	33
3.1.2. <i>LS</i> yöntemi	34
3.1.3. <i>WLS</i> yöntemi	34
3.1.4. Cramer Von Mises yöntemi	35
3.1.5. Anderson Darling yöntemi	35
3.2. <i>DW</i> Dağılımı İçin Parametre Tahmini	35

	Sayfa
3.2.1. İki parametrelili <i>DW</i> dağılımı için parametre tahmini	36
3.2.2. Üç parametrelili <i>DW</i> dağılımı için parametre tahmini	38
3.3. <i>DIW</i> Dağılımı İçin Parametre Tahmini	41
3.3.1. İki parametrelili <i>DIW</i> dağılımı için parametre tahmini	41
3.3.2. Üç parametrelili <i>DIW</i> dağılımı için parametre tahmini	44
3.4. Simülasyon Çalışması	46
4. BASİT LİNEER REGRESYON MODELİ İÇİN PARAMETRE TAHMİNİ VE HİPOTEZ TESTİ	73
4.1. İki Parametrelili <i>DW</i> Dağılımı İçin Model Parametrelerinin Tahmini	73
4.2. İki Parametrelili <i>DIW</i> Dağılımı İçin Model Parametrelerinin Tahmini	76
4.3. Hipotez Testi	83
4.3.1. Lineer regresyon modelinde hata terimlerinin dağılımının <i>DW</i> olması durumunda β_0 ve β_1 parametreleri için hipotez testi	83
4.3.2. Lineer regresyon modelinde hata terimlerinin dağılımının <i>DIW</i> olması durumunda β_0 ve β_1 parametreleri için hipotez testi	103
5. UYGULAMA	133
5.1. <i>DW</i> ve <i>DIW</i> Dağılımlarının Modelleme Performansları İçin Uygulamalar	133
5.1.1. 50 cihazın bozulma zamanı verisi	133
5.1.2. Havalandırma sisteminin bozulma zamanı verisi	134
5.2. <i>DW</i> ve <i>DIW</i> Dağılımlarının Basit Doğrusal Regresyondaki Kullanımlarına İlişkin Uygulamalar	135
5.2.1. Buhar ve sıcaklık verisi	135
5.2.2. Tüketicilerin gelir ve harcama verisi	139
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	143
KAYNAKLAR	147

ÖZGEÇMİŞ	149
----------------	-----



ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 2.1. $W(\sigma, \beta)$ dağılımının farklı parametre değerleri için çarpıklık ve basıklık katsayıları	20
Çizelge 2.2. $DW(\sigma, \beta)$ dağılımının farklı parametre değerleri için çarpıklık ve basıklık katsayıları	21
Çizelge 2.3. $IW(\sigma, \beta)$ dağılımının farklı parametre değerleri için çarpıklık ve basıklık katsayıları	28
Çizelge 2.4. $DIW(\sigma, \beta)$ dağılımının farklı parametre değerleri için çarpıklık ve basıklık katsayıları	29
Çizelge 3.1. İki parametrelili $DW(\sigma, \beta)$ dağılımının konum ve ölçek parametrelerinin ML , LS , WLS , AD ve CM tahmin edicilerinin Ortalama ($Ort.$) ve MSE değerleri; $\sigma = 1$	47
Çizelge 3.2. İki parametrelili $DIW(\sigma, \beta)$ dağılımının konum ve ölçek parametrelerinin ML , LS , WLS , AD ve CM tahmin edicilerinin Ortalama ($Ort.$) ve MSE değerleri; $\sigma = 1$	50
Çizelge 3.3. Üç parametrelili $DW(\mu, \sigma, \beta)$ dağılımının β parametresinin bulunduğu varsayımı altında konum ve ölçek parametrelerinin ML , LS , WLS , AD ve CM tahmin edicilerinin Ortalama ($Ort.$) ve MSE değerleri; $\mu = 0$, $\sigma = 1$	53
Çizelge 3.4. Üç parametrelili $DIW(\mu, \sigma, \beta)$ dağılımının β parametresinin bulunduğu varsayımı altında konum ve ölçek parametrelerinin ML , LS , WLS , AD ve CM tahmin edicilerinin Ortalama ($Ort.$) ve MSE değerleri; $\mu = 0$, $\sigma = 1$	56
Çizelge 3.5. Üç parametrelili $DW(\mu, \sigma, \beta)$ dağılımının konum, ölçek ve şekil parametrelerinin ML , LS , WLS , AD ve CM tahmin edicilerinin Ortalama ($Ort.$) ve MSE değerleri; $\mu = 0$, $\sigma = 1$	59
Çizelge 3.6. Üç parametrelili $DIW(\mu, \sigma, \beta)$ dağılımının konum, ölçek ve şekil parametrelerinin ML , LS , WLS , AD ve CM tahmin edicilerinin Ortalama ($Ort.$) ve MSE değerleri; $\mu = 0$, $\sigma = 1$	65

Çizelge	Sayfa
Çizelge 4.1. $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\sigma}$ tahmin edicileri için ortalama (<i>ort.</i>) ve <i>MSE</i> değerleri; $\beta_0 = 0, \beta_1 = 1$ ($\varepsilon \square DW(\sigma, \gamma)$)	79
Çizelge 4.2. $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\sigma}$ tahmin edicileri için ortalama (<i>ort.</i>) ve <i>MSE</i> değerleri; $\beta_0 = 0, \beta_1 = 1$ ($\varepsilon \square DIW(\sigma, \gamma)$)	81
Çizelge 4.3. $T_{\beta_0, ML}$ test istatistiği için I. Tip hata sonuçları	101
Çizelge 4.4. $T_{\beta_1, ML}$ test istatistiği için I. Tip hata sonuçları	102
Çizelge 4.5. $T_{\beta_0, LS}$ test istatistiği için I. Tip hata sonuçları	102
Çizelge 4.6. $T_{\beta_1, LS}$ test istatistiği için I. Tip hata sonuçları.....	102
Çizelge 4.7. $T_{\beta_0, ML}^*$ test istatistiği için I. Tip hata sonuçları	121
Çizelge 4.8. $T_{\beta_1, ML}^*$ test istatistiği için I. Tip hata sonuçları	121
Çizelge 4.9. $T_{\beta_0, LS}^*$ test istatistiği için I. Tip hata sonuçları.....	121
Çizelge 4.10. $T_{\beta_1, LS}^*$ test istatistiği için I. Tip hata sonuçları	121
Çizelge 4.11. $T_{\beta_0, ML}$ ve $T_{\beta_0, LS}$ testleri için güç değerleri	122
Çizelge 4.12. $T_{\beta_1, ML}$ ve $T_{\beta_1, LS}$ testleri için güç değerleri.....	124
Çizelge 4.13. $T_{\beta_0, ML}^*$ ve $T_{\beta_0, LS}^*$ testleri için güç değerleri.....	127
Çizelge 4.14. $T_{\beta_1, ML}^*$ ve $T_{\beta_1, LS}^*$ testleri için güç değerleri.....	129
Çizelge 5.1. 50 cihazın bozulma zamanı verisi.....	133
Çizelge 5.2. 50 cihazın bozulma zamanı verisi için <i>ML</i> tahminleri, <i>AIC</i> , <i>BIC</i> ve <i>KS</i> değerleri.	134
Çizelge 5.3. Havalandırma sisteminin bozulma zamanı verisi.	134
Çizelge 5.4. Havalandırma sisteminin bozulma zamanı verisi için <i>ML</i> tahminleri, <i>AIC</i> , <i>BIC</i> ve <i>KS</i> değerleri.	135
Çizelge 5.5. Buhar ve sıcaklık verisi, 1966.....	135

Çizelge	Sayfa
Çizelge 5.6. Tüketicilerin harcama ve gelir verileri, İngiltere, 1963-1990.....	139



ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. $W(\sigma, \beta)$ dağılımının β 'nın farklı değerleri için pdf grafiği	16
Şekil 2.2. $DW(\sigma, \beta)$ dağılımının β 'nın farklı değerleri için pdf grafiği	16
Şekil 2.3. $W(\sigma, \beta)$ dağılımının β 'nın farklı değerleri için hazard fonksiyon grafiği..	17
Şekil 2.4. $DW(\sigma, \beta)$ dağılımının β 'nın farklı değerleri için hazard fonksiyon grafiği.....	17
Şekil 2.5. $IW(\sigma, \beta)$ dağılımının β 'nın farklı değerleri için pdf grafiği.....	24
Şekil 2.6. $DIW(\sigma, \beta)$ dağılımının β 'nın farklı değerleri için pdf grafiği.....	24
Şekil 2.7. $IW(\sigma, \beta)$ dağılımının β 'nın farklı değerleri için hazard fonksiyon grafiği.....	25
Şekil 2.8. $DIW(\sigma, \beta)$ dağılımının β 'nın farklı değerleri için hazard fonksiyon grafiği.....	25
Şekil 5.1. Buhar ve sıcaklık verisi için Q-Q grafiği.....	137
Şekil 5.2. Tahmin edilen regresyon denklemleri ile buhar ve sıcaklık verisi grafiği.	138
Şekil 5.3. Gelir ve harcama verisi için Q-Q grafiği.	140
Şekil 5.4. Tahmin edilen regresyon denklemleri ile gelir ve harcama verisi grafiği.....	141

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler

Açıklamalar

W

Weibull

IW

Inverse Weibull

DW

DUS Weibull

DIW

DUS inverse Weibull

Kısaltmalar

Açıklamalar

ML

En Çok Olabilirlik

LS

En Küçük Kareler

WLS

Ağırlıklı En Küçük Kareler

AD

Anderson Darling

CM

Cramer Von Mises

1. GİRİŞ

İstatistik, mühendislik, tıp, finans gibi birçok uygulamalı bilimde gerçek veri setlerinin analiz edilmesi ve modellenmesi oldukça önemlidir. Doğadaki rasgelelikten dolayı, sistemlerin bozulma davranışları doğal mekanizmalarına bağlı olarak çeşitlilik gösterebilir. Sistemlerin bahsedilen bozulma davranışları istatistiksel modeller yardımıyla açıklanabilir. Bu amaçla literatürde gerçek veri setlerini modellemek için önerilen birçok dağılım vardır (Sharma, Singh ve Singh, 2014). Ancak mevcut standart dağılımlar gerçek verileri modellemede yetersiz kalmaktadır.

Birçok araştırmacı gerçek veri setlerini modellemek için mevcut dağılımların bazı genelleştirmesi veya yeni dağılım aileleri önermekle ilgilenmiştir. Üstel, Weibull, inverse Weibull, Gamma, Rayleigh, Pareto vb. yaşam ömürlerini veya parçaların bozulma oranlarını modellemede yaygın şekilde kullanılan dağılımlardan bazılarıdır (Maurya, Kaushik, Singh ve Singh, 2016). Ancak bu dağılımlar bozulma oranlarının monoton ve monoton olmayan tüm durumlarını modelleyemediğinden uygulamada kullanılabilirlikleri sınırlıdır (Alshangiti, Kayid ve Alarfaj, 2014). Bozulma oranı, belirli bir zaman kadar çalıştığı bilinen bir parçanın o andan sonraki belli bir zamanda anlık bozulma olasılığıdır.

Standart olarak kullanılan dağılımların kısıtları veya modelleme yetersizlikleri araştırmacıları mevcut dağılımları genelleştirme ya da yeni dağılım aileleri önermeye itmiştir (Alshangiti ve diğerleri, 2014). Var olan dağılımlara bir dönüşüm tekniği ile yeni parametre ya da parametreler eklemek, daha esnek dağılım aileleri elde etmek için bir araçtır. Dağılım esnekliğinin artırılması bağlamında, literatürde birçok genelleştirme veya dönüşüm tekniği bulunmaktadır. Bu amaçla, Kumaraswamy (1980) iki ölçek parametresi eklenerek elde edilen Kumaraswamy genelleştirmesini (KWG), Mudholkar ve Srivastava (1993) üç parametrelili üstelleştirilmiş Weibull dağılımını, Gupta, Gupta and Gupta (1998) Lehmann Type I dağılımı olarak adlandırılan üstelleştirilmiş Üstel dağılımı, Nadarajah ve Kotz (2006) üstelleştirilmiş Gamma, üstelleştirilmiş Frechet ve üstelleştirilmiş Gumbel dağılımlarını, Cordeiro, Ortega ve Cunha (2013) iki yeni ölçek parametresi ekleyerek yeni bir dağılım sınıfını önermişlerdir. Shaw ve Buckley (2007) quadratic rank transmutation map (QRTM) olarak adlandırılan ve parametre eklemeye dayalı olan bir dönüşüm tekniği geliştirmişlerdir. Son zamanlarda bu teknik üzerinde çok fazla çalışılmış ve QRTM tekniği kullanılarak birçok

yeni dağılım elde edilmiştir. Shaw ve Buckley (2009) transmuted Üstel dağılımı, Aryal ve Tsokos (2009) transmuted Extreme Value dağılımını, Aryal ve Tsokos (2011) transmuted Weibull dağılımını, Aryal (2013) transmuted Log-Logistic dağılımını, Merovci (2013) transmuted Lindley dağılımını, Merovci ve Puka (2014) transmuted Pareto dağılımını, Mahmoud ve Mandouh (2013) transmuted Frechet dağılımını, Ashour ve Eltehiwy (2013) transmuted Lomax dağılımını önermişlerdir.

Burada dikkat edilmesi gereken nokta yukarıda bahsedilen tüm dönüşüm teknikleri yeni bir veya birkaç parametre ekleyerek yapılmaktadır. Bu durum işlem karmaşıklığını beraberinde getirecektir. Diğer bir deyişle, ek parametreler esneklik sağlamasına rağmen, aynı zamanda parametre tahmini ve diğer çıkarımlarda karmaşıklık meydana getirecektir (Maurya, Singh ve Singh, 2017).

Bu noktada Kumar, Singh ve Singh (2015) yeni bir dağılım elde etmek için DUS olarak adlandırılan bir dönüşüm tekniği önermişlerdir. Bu dönüşüm tekniği temel dağılımı dikkate alarak dağılımın esnekliğini arttıran, ek parametre içermeyen ayrıca işlem karmaşıklığını ortadan kaldıran yeni yaşam süresi dağılımı elde etmek için geliştirilen bir dönüşüm tekniğidir. Ayrıca bu dönüşüm tekniği, bozulma oranlarının tüm çeşitlerini birleştiren ve monoton olmayan bozulma oranına sahip yeni bir dağılım üretir. Örnek olarak, benzer düşünceyle Maurya ve diğerleri (2016) logaritmik dönüşüm olarak adlandırılan ve yaşam süresi dağılımı elde eden yeni bir metot geliştirmişlerdir. Yine Maurya ve diğerleri (2017), Kumar ve diğerleri (2015) tarafından önerilen DUS tekniğinin bir genelleştirmesini yaparak GDUS adına bir dönüşüm metodu elde etmişlerdir.

Bu tez çalışmasının amaçlarından bir tanesi Kumar ve diğerleri (2015) tarafından önerilen DUS dönüşüm tekniği kullanarak DUS-Weibull (DW) ve DUS-Inverse Weibull (DIW) dağılımlarını önermektir. Burada Weibull (W) ve inverse Weibull (IW) dağılımlarının tercih edilmesinin sebebi yaşam süresi dağılımları arasında sıklıkla kullanılan dağılımlar olmalarıdır. Önerilen dağılımların momentleri, basıklık ve çarpıklık katsayıları, moment çıkaran fonksiyonları ve quantile fonksiyonları gibi istatistiksel özellikleri incelenecektir. İki ve üç parametrelili DW ve DIW dağılımlarının ilgili parametrelerinin en çok olabilirlik (ML), en küçük kareler (LS), ağırlıklı en küçük kareler (WLS), Anderson Darling (AD) ve Cramer-Von-Mises (CM) tahmin edicileri elde edilecek ve Monte Carlo simülasyon

yöntemiyle, farklı parametre değerleri ve örnek çapları için, ele alınan tahmin edicilerin performansları karşılaştırılacaktır.

Çalışmanın bir diğer amacı ise önerilen dağılımların lineer modellere uygulanmasını göstermek amacıyla, *DW* ve *DIW* dağılımları basit doğrusal regresyon modeline uygulamaktır. Lineer regresyon modelinde bilinmeyen parametreleri tahmin etmek için genellikle hataların dağılımının ortalaması 0 varyansı σ^2 olan Normal dağılıma sahip oldukları varsayılır. Fakat gerçek hayat problemlerinde genellikle hata terimleri Normal dağılıma sahip olmazlar (Mutan ve Şenoğlu, 2009). Literatürde hata terimlerinin dağılımının Normal dağılıma sahip olmadığı birçok çalışma mevcuttur. Tiku, Islam ve Selçuk (2001) lineer regresyon modelinde, hata terimlerinin dağılımının Tiku ve Vaughan (1999) tarafından geliştirilen kısa-kuyruklu simetrik dağılımlar ailesinden bir dağılım olarak almışlardır. Ayrıca ilgili hipotez testleri için tanımladıkları uyarlanmış en çok olabilirlik yöntemine (*MML*) dayanan test istatistiklerinin, en küçük kareler (*LS*) tahmin edicilerine dayanan test istatistiklerinden daha etkin olduğunu göstermişlerdir. Benzer şekilde Islam, Tiku ve Yildirim (2001) lineer regresyon modelinde, hata terimlerinin dağılımının Weibull ve Genelleştirilmiş Lojistik dağılım olması durumunda, *MML* tahmin edicisine dayalı test istatistikleri geliştirip *LS* tahmin edicisinden daha güçlü olduklarını göstermişlerdir. Jahan ve Khan (2012) lineer regresyon modelinde, hata terimlerinin dağılımını *g*- ve *k*- dağılımı (MacGillivray ve Cannon, 2000) olarak alıp, normallik varsayımının sağlanmamasının, örnek çapı ve testin gücü üzerindeki etkisini görmek amacıyla bir çalışma yapmışlardır.

Lineer regresyon modelinde hataların dağılımı *DW* ve *DIW* dağılımı olarak alınıp, ilgili parametreler için parametre tahmini yapılacaktır. Ayrıca *ML* ve *LS* tahmin edicileri için hipotez test prosedürleri geliştirilecek ve Monte Carlo simülasyon yöntemiyle geliştirilen test istatistiklerinin I. tip hata oranları ve güçleri karşılaştırılacaktır.

Tez çalışmasının sonunda ise önerilen dağılımların model uygunluklarını kontrol etmek için gerçek veri setleri kullanılarak, önerilen dağılımlar *W* ve *IW* dağılımları ile karşılaştırılacaktır. Önerilen dağılımlarının basit doğrusal regresyondaki kullanımlarına ilişkin uygulamalar gerçek veri setleri üzerinde yapılacak ayrıca *ML* ve *LS* tahmin edicileri kullanılarak lineer regresyon denklemleri tahmin edilecektir.

2. DUS DÖNÜŞÜMÜ KULLANILARAK ÖNERİLEN DAĞILIMLAR

2.1. Dönüşümde Temel Olarak Alınan Dağılımlar

Yaşam süresi dağılımları tıp, bankacılık, pazarlama ve mühendislik gibi çeşitli alanlarda gerçek hayat olaylarını açıklamak için kullanılırlar. Bu tarz olayları açıklamak için literatürde birçok yaşam süresi dağılımı bulunmaktadır. Bunlardan Weibull ve inverse Weibull en yaygın kullanılanlardan bazılarıdır.

2.1.1. Weibull dağılımı

Weibull $(W(\sigma, \beta))$ dağılımı ilk olarak Waloddi Weibull tarafından makinelerin yaşam sürelerini modellemek amacıyla önerilmiş bir dağılımdır (Weibull, 1938). $W(\sigma, \beta)$ dağılımı bozulma oranının artan, azalan ve sabit olduğu verileri modelleyebilen esnek bir dağılımdır. $W(\sigma, \beta)$ dağılımı güvenilirlik çalışmaları ve mühendislik alanında yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. $W(\sigma, \beta)$ dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu (probability density function-pdf) ve dağılım fonksiyonu (cumulative distribution function-cdf) aşağıda verildiği gibidir:

$$f(x; \sigma, \beta) = \frac{\beta}{\sigma^\beta} x^{\beta-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\beta\right), \quad x \geq 0, \beta, \sigma > 0, \quad (2.1)$$

$$F(x; \sigma, \beta) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\beta\right), \quad (2.2)$$

burada β şekil parametresi ve σ ölçek parametresidir.

Weibull dağılımının momentleri, basıklık ve çarpıklık katsayıları

$W(\sigma, \beta)$ dağılımının r . momentleri aşağıda verildiği gibidir:

$$E(X^r) = \int_0^{\infty} x^r \frac{\beta}{\sigma^\beta} x^{\beta-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\beta\right) dx$$

İspat. $\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\beta = y$ dönüşümü vasıtasıyla, $x = \sigma\sqrt[\beta]{y}$ ve $\partial x = \frac{\sigma^\beta \partial y}{\beta x^{\beta-1}}$ değerleri yerine yazılarak eşitlik,

$$E(X^r) = \sigma^r \int_0^{\infty} y^{r/\beta} e^{-y} dy$$

şeklinde elde edilir. Son olarak $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$ Gamma fonksiyonu yardımıyla r . moment aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E(X^r) = \sigma^r \Gamma\left(\frac{r}{\beta} + 1\right).$$

r . momentten yararlanarak $r=1,2$ için ilk iki moment:

$$E(X) = \sigma \Gamma(1 + 1/\beta)$$

$$E(X^2) = \sigma^2 \Gamma(1 + 2/\beta)$$

olarak elde edilir.

r . moment yardımıyla $W(\sigma, \beta)$ dağılımının beklenen değer ve varyansı aşağıda verildiği gibidir:

Beklenen değer:

$$E(X) = \sigma \Gamma(1 + 1/\beta) \tag{2.3}$$

Varyans:

$$\begin{aligned}
 V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\
 &= \sigma^2 \Gamma(1 + 2/\beta) - \mu^2
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

$W(\sigma, \beta)$ dağılımının basıklık ve çarpıklık katsayıları:

Çarpıklık:

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 &= \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{E(X^3) - 3E(X^2)E(X) + 3E(X)(E(X))^2 - (E(X))^3}{(\sigma^2)^{3/2}} \\
 &= \frac{E(X^3) - 3E(X^2)E(X) + 2E(X)^3}{(\sigma^2)^{3/2}} \\
 &= \frac{\Gamma(1 + 3/\beta)\sigma^3 - 3\mu\sigma^2 - \mu^3}{\sigma^3}
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Basıklık:

$$\begin{aligned}
 \gamma_2 &= \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{E(X^4) - 4E(X^3)E(X) + 6E(X^2)(E(X))^2 - 4(E(X))^4 + (E(X))^4}{(\sigma^2)^2} \\
 &= \frac{E(X^4) - 4E(X^3)E(X) + 6E(X^2)(E(X))^2 - 3(E(X))^4}{(\sigma^2)^2} \\
 &= \frac{\sigma^4 \Gamma(1 + 4/\beta) - 4\gamma_1 \sigma^3 \mu - 6\mu^2 \sigma^2 - \mu^4}{\sigma^4}
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

şeklindedir.

Weibull dağılımının quantile fonksiyonu

$Q(p)$, quantile fonksiyonunu göstermek üzere, $Q(p) = F^{-1}(p)$ eşitliğinden $W(\sigma, \beta)$ dağılımının quantile fonksiyonu:

$$Q(p) = F^{-1}(p)$$

$$\Rightarrow F(Q(p)) = p$$

$$\Rightarrow 1 - \exp\left(-\left(\frac{Q(p)}{\sigma}\right)^\beta\right) = p$$

$$\Rightarrow 1 - p = \exp\left(-\left(\frac{Q(p)}{\sigma}\right)^\beta\right)$$

$$\Rightarrow -\ln(1 - p) = \left(\frac{Q(p)}{\sigma}\right)^\beta$$

$$Q(p) = \sigma \sqrt[\beta]{-\ln(1 - p)} \quad (2.7)$$

olarak elde edilir.

Quantile fonksiyonunda $p=1/2$ medyana eşit olduğundan yukarıdaki eşitlikten yararlanarak;

Medyan:

$$\begin{aligned} Q(p=1/2) &= \sigma \sqrt[\beta]{-\ln(1-1/2)} \\ &= \sigma (\ln(2))^{1/\beta} \end{aligned} \quad (2.8)$$

olarak bulunur.

Weibull dağılımının moment çıkaran fonksiyonu

$W(\sigma, \beta)$ dağılımının moment çıkaran fonksiyonu (mçf) aşağıda verildiği gibidir:

$$\mu_x(t) = E(e^{tx}) = \int_0^{\infty} e^{tx} \frac{\beta}{\sigma^\beta} x^{\beta-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\beta\right) dx$$

İspat. $\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\beta = y$ dönüşümü vasıtasıyla, $x = \sigma\sqrt[\beta]{y}$ ve $\partial x = \frac{\sigma^\beta \partial y}{\beta x^{\beta-1}}$ değerleri yerine yazılarak eşitlik,

$$E(e^{tx}) = \int_0^{\infty} e^{t\sigma\sqrt[\beta]{y}} e^{-y} dy$$

şeklinde elde edilir. Daha sonra $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$ seri açılımı vasıtasıyla eşitlik:

$$E(e^{tx}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \sigma^n}{n!} \int_0^{\infty} y^{n/\beta} e^{-y} dy$$

şeklinde elde edilir. Son olarak $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$ Gamma fonksiyonu yardımıyla mçf'nu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E(e^{tx}) = \Gamma\left(\frac{n}{\beta} + 1\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\sigma)^n}{n!}. \quad (2.9)$$

2.1.2. Inverse Weibull dağılımı

Inverse Weibull ($IW(\sigma, \beta)$) dağılımı yaşam testleri, deprem, seller, yağmurlar, süpermarketteki kuyruklar, rüzgar hızları ve deniz dalgaları gibi çok çeşitli birçok uygulama

alanına sahiptir. Bu dağılım Frechet dağılımı olarak da bilinir. $IW(\sigma, \beta)$ dağılımının pdf ve cdf' i aşağıda verildiği gibidir:

$$f(x; \sigma, \beta) = \frac{\beta}{\sigma^{-\beta}} x^{-(\beta+1)} \exp\left(-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{-\beta}\right), \quad \sigma, \beta, x > 0, \quad (2.10)$$

$$F(x; \sigma, \beta) = \exp\left(-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{-\beta}\right), \quad (2.11)$$

burada β şekil parametresi ve σ ölçek parametresidir.

Inverse Weibull dağılımının momentleri, basıklık ve çarpıklık katsayıları

$IW(\sigma, \beta)$ dağılımının r . momentini aşağıda verildiği gibidir:

$$E(X^r) = \int_0^{\infty} x^r \frac{\beta}{\sigma^{-\beta}} x^{-(\beta+1)} \exp\left(-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{-\beta}\right) dx$$

İspat. $\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{-\beta} = y$ dönüşümü vasıtasıyla, $x = \sigma \sqrt[\beta]{y}$ ve $\partial x = \frac{-\sigma^{\beta} \partial y}{\beta x^{\beta-1}}$ değerleri yerine yazılarak eşitlik,

$$E(X^r) = \sigma^r \int_0^{\infty} y^{-r/\beta} e^{-y} dy$$

şeklinde elde edilir. Son olarak $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$ Gamma fonksiyonu yardımıyla r .

moment aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E(X^r) = \sigma^r \Gamma\left(1 - \frac{r}{\beta}\right).$$

r . momentten yararlanarak $r=1,2$ için ilk iki moment:

$$E(X) = \sigma \Gamma\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)$$

$$E(X^2) = \sigma^2 \Gamma\left(1 - \frac{2}{\beta}\right)$$

olarak elde edilir.

r . moment yardımıyla $IW(\sigma, \beta)$ dağılımının beklenen değer ve varyansı aşağıda verildiği gibidir:

Beklenen değer:

$$E(X) = \sigma \Gamma\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \quad (2.12)$$

Varyans:

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$V(X) = \begin{cases} \sigma^2 \left(\Gamma\left(1 - \frac{2}{\beta}\right) - \left(\Gamma\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \right)^2 \right), & \sigma > 2, \\ \infty, & d.d. \end{cases} \quad (2.13)$$

$IW(\sigma, \beta)$ dağılımının basıklık ve çarpıklık katsayıları aşağıda verildiği gibidir:

Çarpıklık:

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{E(X^3) - 3E(X^2)E(X) + 3E(X)^3 - (E(X))^3}{(\sigma^2)^{3/2}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{E(X^3) - 3E(X^2)E(X) + 2E(X)^3}{(\sigma^2)^{3/2}} \\
&= \begin{cases} \frac{\Gamma\left(1-\frac{3}{\beta}\right) - 3\Gamma\left(1-\frac{2}{\beta}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\beta}\right) + 2\Gamma^3\left(1-\frac{1}{\beta}\right)}{\sqrt{\left(\Gamma\left(1-\frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\right)^3}}, & \beta > 3 \text{ için} \\ \infty & , d.d. \end{cases} \quad (2.14)
\end{aligned}$$

Basıklık:

$$\begin{aligned}
\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} &= \frac{E(X^4) - 4E(X^3)E(X) + 6E(X^2)(E(X))^2 - 4(E(X))^4 + (E(X))^4}{(\sigma^2)^2} \\
&= \frac{E(X^4) - 4E(X^3)E(X) + 6E(X^2)(E(X))^2 - 3(E(X))^4}{(\sigma^2)^2} \\
&= \begin{cases} -6 + \frac{\Gamma\left(1-\frac{4}{\beta}\right) - 4\Gamma\left(1-\frac{3}{\beta}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\beta}\right) + 3\Gamma^2\left(1-\frac{2}{\beta}\right)}{\left(\Gamma\left(1-\frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\right)^2}, & \beta > 4 \\ \infty & , d.d. \end{cases} \quad (2.15)
\end{aligned}$$

Inverse Weibull dağılımının quantile fonksiyonu

$Q(p)$, quantile fonksiyonunu göstermek üzere, $Q(p) = F^{-1}(p)$ eşitliğinden $IW(\sigma, \beta)$ dağılımının quantile fonksiyonu:

$$Q(p) = F^{-1}(p)$$

$$\Rightarrow -\ln(p) = \left(\frac{\sigma}{Q(p)}\right)^\beta$$

$$\Rightarrow F(Q(p)) = p$$

$$\Rightarrow \exp\left(-\left(\frac{\sigma}{Q(p)}\right)\right) = p$$

$$\Rightarrow \ln(p) = -\left(\frac{\sigma}{Q(p)}\right)$$

$$Q(p) = \frac{\sigma}{\sqrt[\beta]{-\ln(p)}} \quad (2.16)$$

olarak elde edilir.

Quantile fonksiyonunda $p=1/2$ medyana eşit olduğundan yukarıdaki eşitlikten yararlanarak

Medyan:

$$\begin{aligned} Q(p=1/2) &= \frac{\sigma}{\sqrt[\beta]{-\ln(1/2)}} \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt[\beta]{\log_e(2)}} \end{aligned} \quad (2.17)$$

olarak bulunur.

Inverse Weibull dağılımının moment çıkaran fonksiyonu

$IW(\sigma, \beta)$ dağılımının moment çıkaran fonksiyonu (mçf) aşağıda verildiği gibidir:

$$\mu_X(t) = E(e^{tx}) = \int_0^{\infty} e^{tx} \frac{\beta}{\sigma^{-\beta}} x^{-(\beta+1)} \exp\left(-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{-\beta}\right) dx$$

İspat. $\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{-\beta} = y$ dönüşümü vasıtasıyla, $x = \sigma\sqrt[\beta]{y}$ ve $\partial x = \frac{-\sigma^\beta \partial y}{a^2 \beta x^{\beta-1}}$ değerleri yerine yazılarak eşitlik,

$$E(e^{tx}) = \int_0^\infty e^{t\sigma y^{-1/\beta}} e^{-y} dy$$

şeklinde elde edilir. Daha sonra $e^x = \sum_{i=0}^\infty \frac{x^i}{i!}$ seri açılımı vasıtasıyla eşitlik:

$$E(e^{tx}) = \sum_{n=0}^\infty \frac{t^n \sigma^n}{n!} \int_0^\infty y^{-n/\beta} e^{-y} dy$$

şeklinde elde edilir. Son olarak $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$ Gamma fonksiyonu yardımıyla mçf'nu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E(e^{tx}) = \Gamma\left(1 - \frac{n}{\beta}\right) \sum_{n=0}^\infty \frac{(t\sigma)^n}{n!}. \quad (2.18)$$

2.2. Önerilen Dağılımlar

İstatistik literatüründe, bazı temel dağılımları kullanarak yeni dağılım elde etmek için bazı teknikler bulunmaktadır. Kumar ve diğerleri (2015) bazı temel dağılımları kullanarak yeni bir dağılım elde etmek için DUS dönüşüm tekniği önermişlerdir. $f(x)$ ve $F(x)$ sırasıyla temel dağılım olasılık yoğunluk fonksiyonu ile dağılım fonksiyonu olmak üzere, yeni dağılımın pdf $g(x)$, cdf $G(x)$ ve hazard fonksiyonu $h(x)$ aşağıdaki gibidir:

$$g(x) = \frac{1}{e-1} f(x) e^{F(x)}. \quad (2.19)$$

$$G(x) = \frac{1}{e-1} [e^{F(x)} - 1], \quad (2.20)$$

$$h(x) = \frac{1}{e - e^{F(x)}} f(x) e^{F(x)}. \quad (2.21)$$

Kumar ve ark. bu tekniği DUS dönüşüm tekniği olarak adlandırmışlardır. Bu teknik bir genelleştirme değil dönüşümdür. Ayrıca bu dönüşüm tekniğinin en önemli avantajı, temel dağılımda yer alan parametreler dışında herhangi bir yeni parametre içermemesidir.

2.2.1. DUS Weibull dağılımı

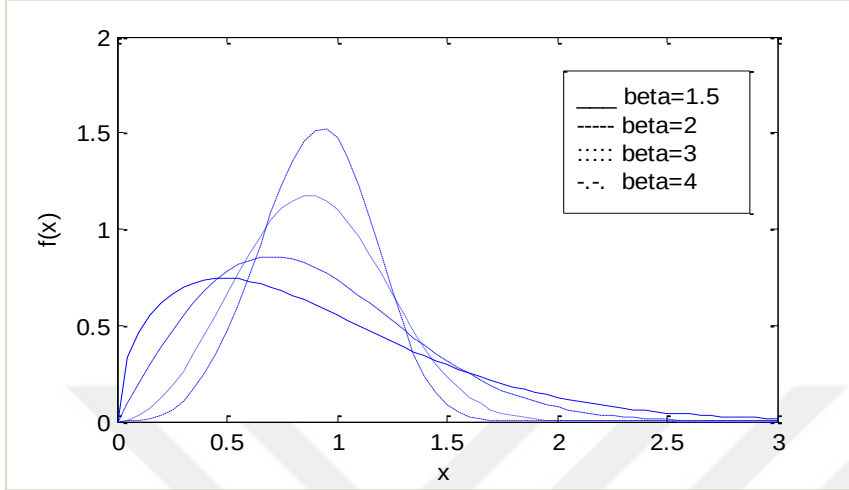
DUS-Weibull $(DW(\sigma, \beta))$ dağılımının pdf, cdf ve hazard fonksiyonu aşağıda verildiği gibidir:

$$\begin{aligned} g(x; \sigma, \beta) &= \frac{1}{e-1} f(x) e^{F(x)} \\ &= \frac{1}{e-1} \frac{\beta}{\sigma^\beta} x^{\beta-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\beta\right) \exp\left(1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\beta\right)\right), \end{aligned} \quad (2.22)$$

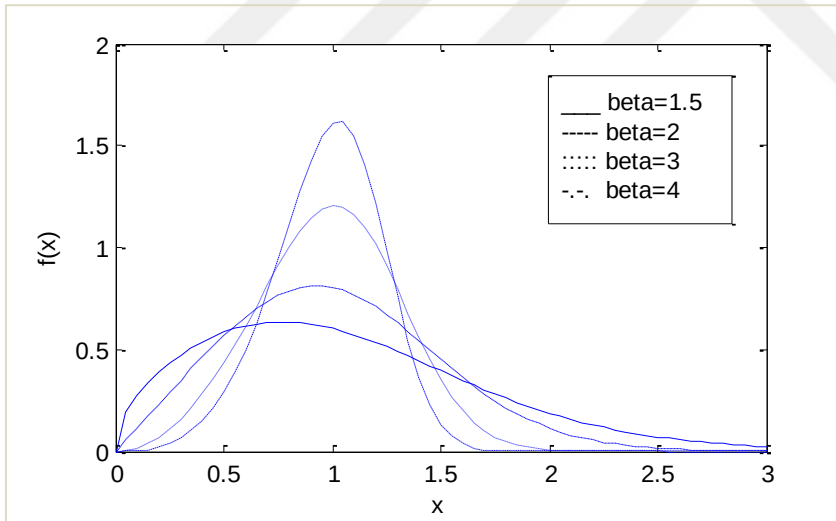
$$\begin{aligned} G(x; \sigma, \beta) &= \frac{1}{e-1} (e^{F(x)} - 1) \\ &= \frac{1}{e-1} \left(\exp\left(1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\beta\right)\right) - 1 \right), \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{e - e^{F(x)}} f(x) e^{F(x)} \\ &= \frac{1}{e - \exp\left(1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\beta\right)\right)} \frac{\beta}{\sigma^\beta} x^{\beta-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\beta\right) \exp\left(1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\beta\right)\right). \end{aligned} \quad (2.24)$$

$W(\sigma, \beta)$ ve $DW(\sigma, \beta)$ dağılımlarının bazı parametre değerleri için pdf grafikleri sırasıyla Şekil 2.1 ve Şekil 2.2 de gösterilmiştir.

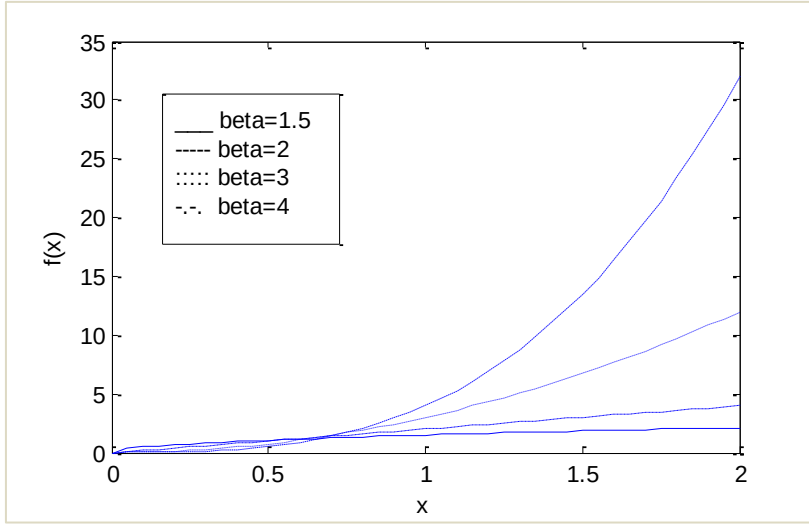


Şekil 2.1. $W(\sigma, \beta)$ dağılımının β 'nın farklı değerleri için pdf grafiği.

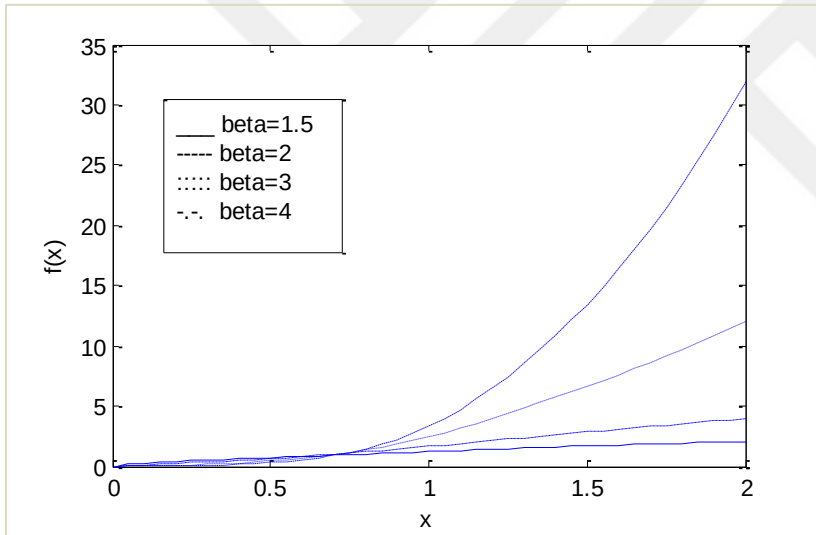


Şekil 2.2. $DW(\sigma, \beta)$ dağılımının β 'nın farklı değerleri için pdf grafiği.

$W(\sigma, \beta)$ ve $DW(\sigma, \beta)$ dağılımlarının bazı parametre değerleri için hazard fonksiyon grafikleri sırasıyla Şekil 2.3 ve Şekil 2.4 de gösterilmiştir.



Şekil 2.3. $W(\sigma, \beta)$ dağılımının β 'nin farklı değerleri için hazard fonksiyon grafiği.



Şekil 2.4. $DW(\sigma, \beta)$ dağılımının β 'nin farklı değerleri için hazard fonksiyon grafiği.

DUS-Weibull dağılımının momentleri, basıklık ve çarpıklık katsayıları

$DW(\sigma, \beta)$ dağılımının r . momentleri aşağıda verildiği gibidir:

$$E(X^r) = \int_0^{\infty} x^r \frac{1}{e-1} \frac{\beta}{\sigma^\beta} x^{\beta-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\beta\right) \exp\left(1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\beta\right)\right) dx$$

İspat. $\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\beta = y$ dönüşümü vasıtasıyla, $x = \sigma\sqrt[\beta]{y}$ ve $\partial x = \frac{\sigma^\beta \partial y}{\beta x^{\beta-1}}$ değerleri yerine yazılarak eşitlik,

$$\begin{aligned} E(X^r) &= \frac{\sigma^r}{e-1} \int_0^\infty y^{r/\beta} e^{-y} e^{1-e^{-y}} dy \\ &= \frac{e\sigma^r}{e-1} \int_0^\infty y^{r/\beta} e^{-y} e^{-e^{-y}} dy \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Daha sonra $e^x = \sum_{i=0}^\infty \frac{x^i}{i!}$ seri açılımı vasıtasıyla eşitlik:

$$\begin{aligned} E(X^r) &= \frac{e\sigma^r}{e-1} \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{m!} \int_0^\infty y^{r/\beta} e^{-y} e^{-ym} dy \\ &= \frac{e\sigma^r}{e-1} \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{m!} \int_0^\infty y^{r/\beta} e^{-y(1+m)} dy \end{aligned}$$

$y(1+m) = t$ dönüşümü vasıtasıyla, $y = t/(1+m)$ ve $\partial y = \partial t/(1+m)$ değerleri yerine yazılarak eşitlik:

$$E(X^r) = \frac{e\sigma^r}{e-1} \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1}{(1+m)^{(r/\beta)+1}} \int_0^\infty t^{r/\beta} e^{-t} dt$$

şeklinde elde edilir. Son olarak $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$ Gamma fonksiyonu yardımıyla r .

moment aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E(X^r) = \frac{e\sigma^r}{e-1} \Gamma\left(\frac{r}{\beta} + 1\right) \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1}{(1+m)^{(r/\beta)+1}}. \quad (2.25)$$

r . momentten yararlanarak $r=1,2$ için ilk iki moment:

$$E(X) = \frac{e\sigma}{e-1} \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1}{(1+m)^{(1/\beta)+1}}$$

$$E(X^2) = \frac{e\sigma^2}{e-1} \Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1}{(1+m)^{(2/\beta)+1}}$$

olarak elde edilir. $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1}{(1+m)^{(r/\beta)+1}} = T_r$ olmak üzere, $DW(\sigma, \beta)$ dağılımının beklenen değer ve varyansı:

Beklenen değer:

$$E(X) = \frac{e\sigma}{e-1} \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) T_1, \quad (2.26)$$

Varyans:

$$V(X) = \frac{e\sigma^2}{e-1} \left(\Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right) T_2 - \frac{e}{e-1} \Gamma^2\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) T_1^2 \right) \quad (2.27)$$

olarak elde edilir.

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1}{(1+m)^{(r/\beta)+1}} = T_r \text{ ve } \Gamma_i = \Gamma\left(\frac{i}{\beta} + 1\right) \text{ olmak üzere } DW(\sigma, \beta) \text{ dağılımının çarpıklık}$$

(γ_1) ve basıklık (γ_2) katsayıları:

Çarpıklık:

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{E(X^3) - 3E(X^2)E(X) + 3E(X)^2 - (E(X))^3}{(\sigma^2)^{3/2}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{E(X^3) - 3E(X^2)E(X) + 2E(X)^3}{(\sigma^2)^{3/2}} \\
&= \frac{\left(\frac{e\sigma^3}{e-1} \Gamma_3 T_3 - 3 \frac{e\sigma^2}{e-1} \Gamma_2 T_2 \frac{e\sigma}{e-1} \Gamma_1 T_1 + 2 \left(\frac{e\sigma}{e-1} \Gamma_1 T_1 \right)^3 \right)}{\left(\frac{e\sigma^2}{e-1} \Gamma_2 T_2 - \left(\frac{e\sigma}{e-1} \Gamma_1 T_1 \right)^2 \right)^{3/2}}, \tag{2.28}
\end{aligned}$$

Basıklık:

$$\begin{aligned}
\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} &= \frac{E(X^4) - 4E(X^3)E(X) + 6E(X^2)(E(X))^2 - 4(E(X))^4 + (E(X))^4}{(\sigma^2)^2} \\
&= \frac{E(X^4) - 4E(X^3)E(X) + 6E(X^2)(E(X))^2 - 3(E(X))^4}{(\sigma^2)^2} \\
&= \frac{\left(\frac{e\sigma^4}{e-1} \Gamma_4 T_4 - 4 \frac{e\sigma^3}{e-1} \Gamma_3 T_3 \frac{e\sigma}{e-1} \Gamma_1 T_1 + \right.}{\left(\frac{e\sigma^2}{e-1} \Gamma_2 T_2 - \left(\frac{e\sigma}{e-1} \Gamma_1 T_1 \right)^2 \right)^2} \\
&\quad \left. 6 \frac{e\sigma^2}{e-1} \Gamma_2 T_2 \left(\frac{e\sigma}{e-1} \Gamma_1 T_1 \right)^2 - 3 \left(\frac{e\sigma}{e-1} \Gamma_1 T_1 \right)^3 \right) \tag{2.29}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

$W(\sigma, \beta)$ ve $DW(\sigma, \beta)$ dağılımlarının bazı parametre değerleri için çarpıklık ve basıklık katsayı değerleri sırasıyla Çizelge 2.1 ve Çizelge 2.2 de verilmiştir.

Çizelge 2.1. $W(\sigma, \beta)$ dağılımının farklı parametre değerleri için çarpıklık ve basıklık katsayıları.

β	1.5	2	2.5	3	4	6
γ_1	1,072	0,631	0,358	0,168	-0,087	-0,373
γ_2	4,395	3,246	2,856	2,729	2,747	3,035

Çizelge 2.2. $DW(\sigma, \beta)$ dağılımının farklı parametre değerleri için çarpıklık ve basıklık katsayıları.

β	1.5	2	2.5	3	4	6
γ_1	0,844	0,436	0,171	-0,006	-0,268	-0,582
γ_2	3,821	2,992	2,793	2,752	2,936	3,649

DUS Weibull dağılımının quantile fonksiyonu

$Q(p)$, quantile fonksiyonunu göstermek üzere, $Q(p) = F^{-1}(p)$ eşitliğinden $DW(\sigma, \beta)$ dağılımının quantile fonksiyonu:

$$Q(p) = F^{-1}(p)$$

$$\Rightarrow F(Q(p)) = p$$

$$\Rightarrow \frac{1}{e-1} \left(\exp \left(1 - \exp \left(- \left(\frac{(Q(p))^\beta}{\sigma} \right) \right) \right) - 1 \right) = p$$

$$\Rightarrow \ln(p(e-1)+1) = 1 - \exp \left(- \left(\frac{(Q(p))^\beta}{\sigma} \right) \right)$$

$$\Rightarrow \ln(1 - \ln(p(e-1)+1)) = - \left(\frac{(Q(p))^\beta}{\sigma} \right)$$

$$Q(p) = \sigma \sqrt[\beta]{-\ln(1 - \ln(p(e-1)+1))} \quad (2.30)$$

olarak elde edilir.

Quantile fonksiyonunda $p=1/2$ medyana eşit olduğundan yukarıdaki eşitlikten yararlanarak Medyan:

$$Q(p=1/2) = \sigma^\beta \sqrt{-\ln \left(1 - \ln \left(\frac{(e-1)}{2} + 1 \right) \right)} \quad (2.31)$$

olarak bulunur.

DUS Weibull dağılımının moment çıkaran fonksiyonu

$DW(\sigma, \beta)$ dağılımının moment çıkaran fonksiyonu (mçf) aşağıda verildiği gibidir:

$$\mu_X(t) = E(e^{tx}) = \int_0^\infty e^{tx} \frac{1}{e-1} \frac{\beta}{\sigma^\beta} x^{\beta-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\beta\right) \exp\left(1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\beta\right)\right) dx$$

İspat. $\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\beta = y$ dönüşümü vasıtasıyla, $x = \sigma \sqrt[\beta]{y}$ ve $\partial x = \frac{\sigma^\beta \partial y}{\beta x^{\beta-1}}$ değerleri yerine yazılarak eşitlik,

$$\begin{aligned} E(e^{tx}) &= \frac{1}{e-1} \int_0^\infty e^{t\sigma \sqrt[\beta]{y}} e^{-y} e^{1-e^{-y}} dy \\ &= \frac{e}{e-1} \int_0^\infty e^{t\sigma \sqrt[\beta]{y}} e^{-y} e^{-e^{-y}} dy \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Daha sonra $e^x = \sum_{i=0}^\infty \frac{x^i}{i!}$ seri açılımı vasıtasıyla eşitlik:

$$\begin{aligned} E(e^{tx}) &= \frac{e}{e-1} \sum_{m=0}^\infty \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^m}{m!} \frac{(t\sigma)^n}{n!} \int_0^\infty y^{n/\beta} e^{-y} e^{-ym} dy \\ &= \frac{e}{e-1} \sum_{m=0}^\infty \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^m}{m!} \frac{(t\sigma)^n}{n!} \int_0^\infty y^{n/\beta} e^{-y(1+m)} dy \end{aligned}$$

$y(1+m)=u$ dönüşümü vasıtasıyla, $y=u/(1+m)$ ve $\partial y = \partial u/(1+m)$ değerleri yerine yazılarak eşitlik:

$$E(e^{tx}) = \frac{e}{e-1} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{(t\sigma)^n}{n!} \frac{1}{(1+m)^{(n/\beta+1)}} \int_0^{\infty} u^{n/\beta} e^{-u} du$$

şeklinde elde edilir. Son olarak $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$ Gamma fonksiyonu yardımıyla mçf'nu

aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E(e^{tx}) = \frac{e}{e-1} \Gamma\left(\frac{n}{\beta} + 1\right) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{(t\sigma)^n}{n!} \frac{1}{(1+m)^{(n/\beta+1)}}. \quad (2.32)$$

2.2.2. DUS-Inverse Weibull dağılımı

DUS-Inverse Weibull ($DIW(\sigma, \beta)$) dağılımının pdf, cdf ve hazard fonksiyonu aşağıda verildiği gibidir:

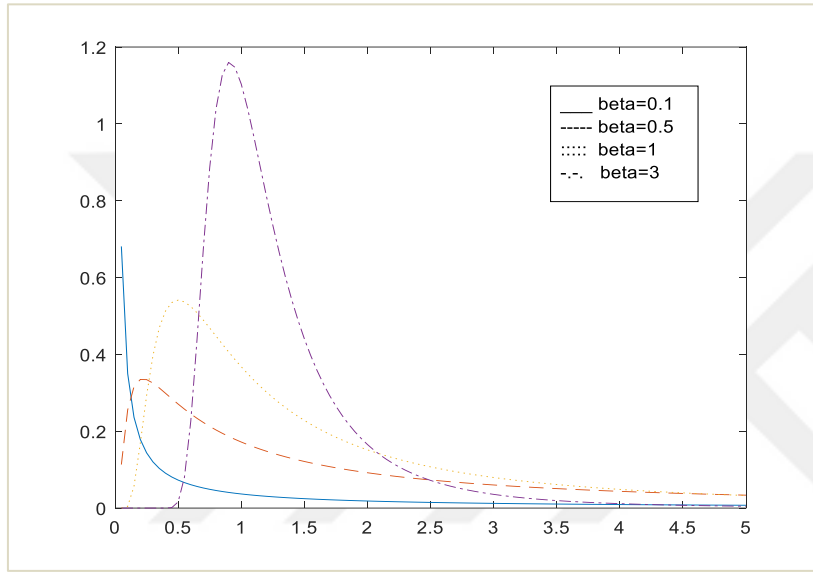
$$\begin{aligned} g(x; \sigma, \beta) &= \frac{1}{e-1} f(x) e^{F(x)} \\ &= \frac{1}{e-1} \frac{\beta}{\sigma^{-\beta}} x^{-(\beta+1)} \exp\left(-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{-\beta}\right) \exp\left(\exp\left(-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{-\beta}\right)\right), \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} G(x; \sigma, \beta) &= \frac{1}{e-1} (e^{F(x)} - 1) \\ &= \frac{1}{e-1} \left(\exp\left(\exp\left(-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{-\beta}\right)\right) - 1 \right). \end{aligned} \quad (2.34)$$

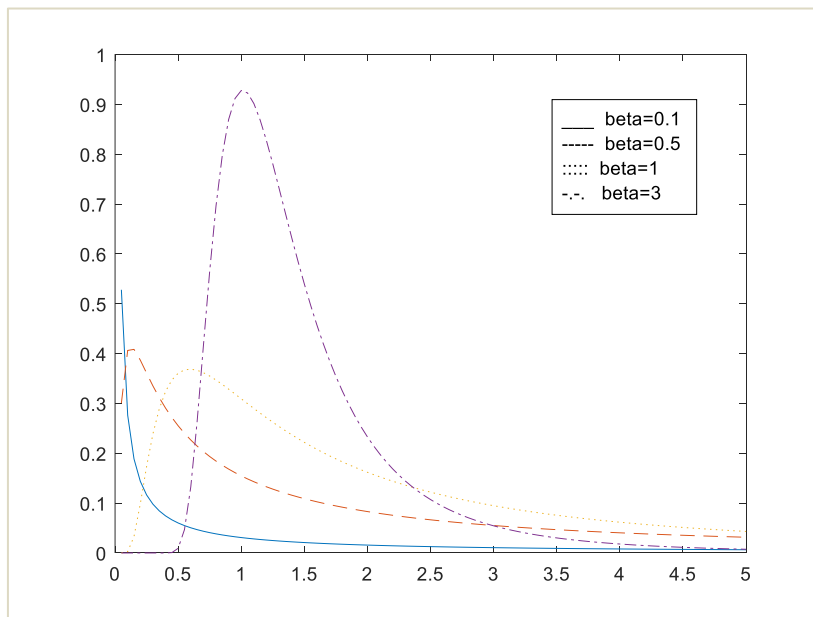
$$h(x) = \frac{1}{e - e^{F(x)}} f(x) e^{F(x)}$$

$$= \frac{1}{e - \exp\left(\exp\left(-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{-\beta}\right)\right)} \frac{\beta}{\sigma^{-\beta}} x^{-(\beta+1)} \exp\left(-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{-\beta}\right) \exp\left(\exp\left(-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{-\beta}\right)\right) \quad (2.35)$$

$IW(\sigma, \beta)$ ve $DIW(\sigma, \beta)$ dağılımlarının bazı parametre değerleri için pdf grafikleri sırasıyla Şekil 2.5 ve Şekil 2.6 da gösterilmiştir.

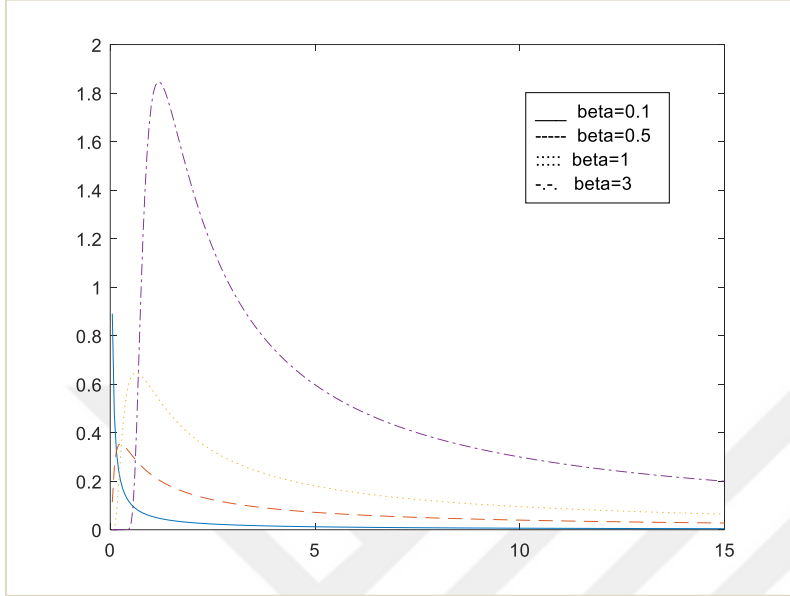


Şekil 2.5. $IW(\sigma, \beta)$ dağılımının β 'nin farklı değerleri için pdf grafiği.

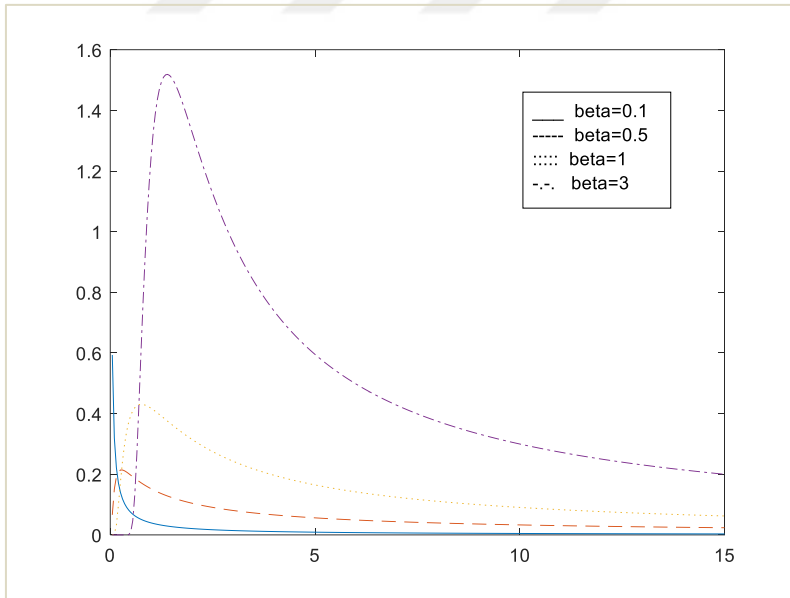


Şekil 2.6. $DIW(\sigma, \beta)$ dağılımının β 'nin farklı değerleri için pdf grafiği.

$IW(\sigma, \beta)$ ve $DIW(\sigma, \beta)$ dağılımlarının bazı parametre değerleri için hazard fonksiyonu grafikleri sırasıyla Şekil 2.7 ve Şekil 2.8 de gösterilmiştir.



Şekil 2.7. $IW(\sigma, \beta)$ dağılımının β 'nın farklı değerleri için hazard fonksiyonu grafiği.



Şekil 2.8. $DIW(\sigma, \beta)$ dağılımının β 'nın farklı değerleri için hazard fonksiyonu grafiği.

DUS Inverse Weibull dağılımının momentleri, basıklık ve çarpıklık katsayıları

$DIW(\sigma, \beta)$ dağılımının r . momentleri aşağıda verildiği gibidir:

$$E(X^r) = \int_0^\infty x^r \frac{1}{e-1} \frac{\beta}{\sigma^{-\beta}} x^{-(\beta+1)} \exp\left(-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{-\beta}\right) \exp\left(\exp\left(-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{-\beta}\right)\right) dx$$

İspat. $\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{-\beta} = y$ dönüşümü vasıtasıyla, $x = \sigma\sqrt[\beta]{y}$ ve $\partial x = \frac{-\sigma^\beta \partial y}{a^2 \beta x^{\beta-1}}$ değerleri yerine yazılarak eşitlik,

$$E(X^r) = \frac{\sigma^r}{e-1} \int_0^\infty y^{-r/\beta} e^{-y} e^{e^{-y}} dy$$

şeklinde elde edilir. Daha sonra $e^x = \sum_{i=0}^\infty \frac{x^i}{i!}$ seri açılımı vasıtasıyla eşitlik:

$$\begin{aligned} E(X^r) &= \frac{\sigma^r}{e-1} \sum_{m=0}^\infty \frac{1}{m!} \int_0^\infty y^{-r/\beta} e^{-y} e^{-ym} dy \\ &= \frac{\sigma^r}{e-1} \sum_{m=0}^\infty \frac{1}{m!} \int_0^\infty y^{-r/\beta} e^{-y(1+m)} dy \end{aligned}$$

$y(1+m) = t$ dönüşümü vasıtasıyla, $y = t / (1+m)$ ve $\partial y = \partial t / (1+m)$ değerleri yerine yazılarak eşitlik:

$$E(X^r) = \frac{\sigma^r}{e-1} \sum_{m=0}^\infty \frac{1}{m!} \frac{1}{(1+m)^{1-(r/\beta)}} \int_0^\infty t^{-r/\beta} e^{-t} dt$$

şeklinde elde edilir. Son olarak $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$ Gamma fonksiyonu yardımıyla r .

moment aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E(X^r) = \frac{\sigma^r}{e-1} \Gamma\left(1 - \frac{r}{\beta}\right) \sum_{m=0}^\infty \frac{1}{m!} \frac{1}{(1+m)^{1-(r/\beta)}}. \quad (2.36)$$

Yukarıdaki eşitlikten $r=1,2$ için ilk iki moment:

$$E(X) = \frac{\sigma}{e-1} \Gamma\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{1}{(1+m)^{1-(1/\beta)}}$$

$$E(X^2) = \frac{\sigma^2}{e-1} \Gamma\left(1 - \frac{2}{\beta}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{1}{(1+m)^{1-(2/\beta)}}$$

olarak elde edilir.

$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{1}{(1+m)^{1-(r/\beta)}} = T_r$ olmak üzere, $DIW(\sigma, \beta)$ dağılımının beklenen değer ve varyansı:

Beklenen değer:

$$E(X) = \frac{\sigma}{e-1} \Gamma\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) T_1, \quad (2.37)$$

Varyans:

$$V(X) = \frac{\sigma^2}{e-1} \left(\Gamma\left(1 - \frac{2}{\beta}\right) T_2 - \frac{1}{e-1} \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) T_1^2 \right) \quad (2.38)$$

olarak elde edilir.

$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{1}{(1+m)^{1-(r/\beta)}} = T_r$ ve $\Gamma_i = \Gamma\left(1 - \frac{i}{\beta}\right)$ olmak üzere $DIW(\sigma, \beta)$ dağılımının çarpıklık

(γ_1) ve basıklık (γ_2) katsayıları:

Çarpıklık:

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{E(X^3) - 3E(X^2)E(X) + 3E(X)E(X^2) - (E(X))^3}{(\sigma^2)^{3/2}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{E(X^3) - 3E(X^2)E(X) + 2E(X)^3}{(\sigma^2)^{3/2}} \\
&= \frac{\left(\frac{\sigma^3}{e-1} \Gamma_3 T_3 - 3 \frac{\sigma^2}{e-1} \Gamma_2 T_2 \frac{\sigma}{e-1} \Gamma_1 T_1 + 2 \left(\frac{\sigma}{e-1} \Gamma_1 T_1 \right)^3 \right)}{\left(\frac{\sigma^2}{e-1} \Gamma_2 T_2 - \left(\frac{\sigma}{e-1} \Gamma_1 T_1 \right)^2 \right)^{3/2}} \quad (2.39)
\end{aligned}$$

Basıklık:

$$\begin{aligned}
\gamma_2 &= \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{E(X^4) - 4E(X^3)E(X) + 6E(X^2)(E(X))^2 - 4(E(X))^4 + (E(X))^4}{(\sigma^2)^2} \\
&= \frac{E(X^4) - 4E(X^3)E(X) + 6E(X^2)(E(X))^2 - 3(E(X))^4}{(\sigma^2)^2} \\
&= \frac{\left(\frac{\sigma^4}{e-1} \Gamma_4 T_4 - 4 \frac{\sigma^3}{e-1} \Gamma_3 T_3 \frac{\sigma}{e-1} \Gamma_1 T_1 + \right. \\
&\quad \left. 6 \frac{\sigma^2}{e-1} \Gamma_2 T_2 \left(\frac{\sigma}{e-1} \Gamma_1 T_1 \right)^2 - 3 \left(\frac{\sigma}{e-1} \Gamma_1 T_1 \right)^3 \right)}{\left(\frac{\sigma^2}{e-1} \Gamma_2 T_2 - \left(\frac{\sigma}{e-1} \Gamma_1 T_1 \right)^2 \right)^2} \quad (2.40)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

$IW(\sigma, \beta)$ ve $DIW(\sigma, \beta)$ dağılımlarının bazı parametre değerleri için çarpıklık ve basıklık katsayıları sırasıyla aşağıda verildiği gibidir:

Çizelge 2.3. $IW(\sigma, \beta)$ dağılımının farklı parametre değerleri için çarpıklık ve basıklık katsayıları.

β	4	5	6	7	8
γ_1	5,60	3,53	2,80	2,42	2,18
γ_2	-	51,09	27,67	20,53	17,16

Çizelge 2.4. $DIW(\sigma, \beta)$ dağılımının farklı parametre değerleri için çarpıklık ve basıklık katsayıları.

β	4	5	6	7	8
γ_1	5,33	3,34	2,63	2,24	2,01
γ_2	-	43,94	22,45	16,09	12,86

DUS-Inverse Weibull dağılımının quantile fonksiyonu

$Q(p)$, quantile fonksiyonunu göstermek üzere, $Q(p) = F^{-1}(p)$ eşitliğinden $DIW(\sigma, \beta)$ dağılımının quantile fonksiyonu:

$$Q(p) = F^{-1}(p)$$

$$\Rightarrow F(Q(p)) = p$$

$$\Rightarrow \frac{1}{e-1} \left(\exp \left(\exp \left(- \left(\frac{\alpha}{Q(p)} \right)^\beta \right) \right) - 1 \right) = p$$

$$\Rightarrow \exp \left(- \left(\frac{\alpha}{Q(p)} \right)^\beta \right) = \ln(p(e-1) + 1)$$

$$\Rightarrow - \left(\frac{\alpha}{Q(p)} \right)^\beta = \ln(\ln(p(e-1) + 1))$$

$$Q(p) = \sqrt[\beta]{-\frac{\alpha^\beta}{\ln(\ln(p(e-1) + 1))}} \quad (2.41)$$

olarak elde edilir.

Quantile fonksiyonunda $p=1/2$ medyana eşit olduğundan yukarıdaki eşitlikten yararlanarak medyan:

$$Q(p=1/2) = \sqrt[\beta]{-\frac{\alpha^\beta}{\ln\left(\ln\left(\frac{(e-1)}{2}+1\right)\right)}} \quad (2.42)$$

olarak bulunur.

DIW Inverse Weibull dağılımının moment çıkaran fonksiyonu

$DIW(\sigma, \beta)$ dağılımının moment çıkaran fonksiyonu aşağıda verildiği gibidir:

$$\mu_x(t) = E(e^{tx}) = \int_0^\infty e^{tx} \frac{\beta}{\sigma^{-\beta}} x^{-(\beta+1)} \exp\left(-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{-\beta}\right) \exp\left(\exp\left(-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{-\beta}\right)\right) dx$$

İspat. $\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{-\beta} = y$ dönüşümü vasıtasıyla, $x = \sigma\sqrt[\beta]{y}$ ve $\partial x = \frac{-\sigma^\beta \partial y}{\beta y^{\beta-1}}$ değerleri yerine yazılarak eşitlik,

$$E(e^{tx}) = \frac{1}{e-1} \int_0^\infty e^{t\sigma^\beta \sqrt[\beta]{y}} e^{-y} e^{e^{-y}} dy$$

şeklinde elde edilir. Daha sonra $e^x = \sum_{i=0}^\infty \frac{x^i}{i!}$ seri açılımı vasıtasıyla eşitlik:

$$\begin{aligned} E(e^{tx}) &= \frac{1}{e-1} \sum_{m=0}^\infty \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{m!} \frac{(t\sigma^\beta)^n}{n!} \int_0^\infty y^{-1/n\beta} e^{-y} e^{-ym} dy \\ &= \frac{1}{e-1} \sum_{m=0}^\infty \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{m!} \frac{(t\sigma^\beta)^n}{n!} \int_0^\infty y^{-1/n\beta} e^{-y(1+m)} dy \end{aligned}$$

$y(1+m) = u$ dönüşümü vasıtasıyla, $y = u/(1+m)$ ve $\partial y = \partial u/(1+m)$ değerleri yerine yazılarak eşitlik:

$$E(e^{tx}) = \frac{1}{e-1} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{(t\sigma^\beta)^n}{n!} \frac{1}{(1+m)^{1-(1/n\beta)}} \int_0^{\infty} u^{-1/n\beta} e^{-u} du$$

şeklinde elde edilir. Son olarak $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$ Gamma fonksiyonu yardımıyla mçf'nu

aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E(e^{tx}) = \frac{1}{e-1} \Gamma\left(1 - \frac{1}{n\beta}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{(t\sigma^\beta)^n}{n!} \frac{1}{(1+m)^{1-(1/n\beta)}}. \quad (2.43)$$



3. ÖNERİLEN DAĞILIMLAR İÇİN PARAMETRE TAHMİNİ

Bu bölümde, iki parametrelili ve üç parametrelili DW ve DIW dağılımlarının konum, ölçek ve şekil parametrelerinin en çok olabilirlik (Maximum Likelihood- ML), en küçük kareler (Least Square- LS), ağırlıklı en küçük kareler (Weighted Least Square - WLS), Cramer-von Mises (CM) ve Anderson Darling (AD) tahmin edicileri elde edilecektir. Burada sırasıyla iki ve üç parametrelili DUS Weibull dağılımı $DW(\sigma, \beta)$ ve $DW(\mu, \sigma, \beta)$, iki ve üç parametrelili DUS Inverse Weibull dağılımı $DIW(\sigma, \beta)$ ve $DIW(\mu, \sigma, \beta)$ ile gösterilecektir.

3.1. Tahmin Yöntemleri

Önerilen dağılımların parametrelerinin tahmini ML , LS , WLS , CM ve AD tahmin edici yöntemleriyle yapılacaktır. Bu bölümde bahsedilen yöntemlerin prosedürleri incelenecektir.

3.1.1. ML yöntemi

ML tahmin yönteminin prosedürü aşağıda verildiği gibi tanımlanabilir:

$X_1, X_2, \dots, X_n$, $f(x; \theta)$ dağılımından rasgele bir örneklem olsun. Örneklemin olabilirlik (Likelihood- L) fonksiyonu;

$$L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) \quad (3.1)$$

olarak tanımlanır.

Olabilirlik fonksiyonu gözlemlenmiş örnek değerlerinin bilindiği varsayımı altında parametrenin (θ) bir fonksiyonudur. θ parametresine göre olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan değer θ 'nın ML tahmin edicisidir. Yani;

$$L(\hat{\theta}; x_1, x_2, \dots, x_n) = \max_{\theta \in \Theta} L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n)$$

dır. Ancak bazı durumlarda olabilirlik fonksiyonunu maksimize edilmesi oldukça zordur. Bunun yerine genellikle işlem kolaylığı olması açısından fonksiyonun logaritması (Log Likelihood- $\ln L$) maksimize edilir. θ 'nın ML tahmin edicisi log-olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan değerdir. Yani;

$$L(\hat{\theta}; x_1, x_2, \dots, x_n) = \max_{\theta \in \Theta} \ln L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (3.2)$$

3.1.2. LS yöntemi

Ele alınan dağılımın parametrelerinin LS tahmin edicileri Swain, Venkatraman ve Wilson (1988) tarafından önerilen Eş. 3.3 ün minimum yapılmasıyla elde edilecektir.

$$S = \sum_{i=1}^n \left(G(Y_{(i)}) - \frac{i}{n+1} \right)^2, \quad (3.3)$$

burada $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_n$, bir $G(\cdot)$ dağılım fonksiyonundan n çaplı rasgele örneklem olmak üzere, $Y_{(1)} \leq Y_{(2)} \leq \dots \leq Y_{(n)}$ ilgili sıra istatistiklerini, $\frac{i}{n+1}$ ise $G(Y_{(i)})$ 'nin beklenen değerini ifade eder.

3.1.3. WLS yöntemi

Ele alınan dağılımın parametrelerinin WLS tahmin edicileri Swain ve diğerleri (1988) tarafından önerilen Eş. 3.4 ün minimum yapılmasıyla elde edilecektir.

$$WS = \sum_{i=1}^n w_i \left(G(Y_{(i)}) - \frac{i}{n+1} \right)^2, \quad (3.4)$$

burada $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_n$, bir $G(\cdot)$ dağılım fonksiyonundan n çaplı rasgele örneklem olmak üzere, $Y_{(1)} \leq Y_{(2)} \leq \dots \leq Y_{(n)}$ ilgili sıra istatistiklerini, $\frac{i}{n+1}$ ise $G(Y_{(i)})$ 'nin beklenen değerini ifade eder. Ayrıca w_i ağırlığı $1/V(G(Y_{(i)})) = ((n+1)^2(n+2)) / (j(n-j+1))$ 'dir.

3.1.4. Cramer-von Mises Yöntemi

Ele alınan dağılımın Cramer-von Mises (CM) tahmin edicileri Eş. 3.5 'in minimum yapılmasıyla elde edilecektir.

$$CM = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left(G(Y_{(i)}) - \frac{2i-1}{2n} \right)^2, \quad (3.5)$$

burada $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_n$, bir $G(\cdot)$ dağılım fonksiyonundan n çaplı rasgele örneklem olmak üzere, $Y_{(1)} \leq Y_{(2)} \leq \dots \leq Y_{(n)}$ ilgili sıra istatistiklerini, $\frac{i}{n+1}$ ise $G(Y_{(i)})$ 'nin beklenen değerini ifade eder.

3.1.5. Anderson Darling yöntemi

Ele alınan dağılımın Anderson Darling (AD) tahmin edicileri Eş. 3.6 nın minimum yapılmasıyla elde edilecektir.

$$AD = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i-1) \log \left(G(Y_{(i)}) - \left(1 - G(Y_{(n-i+1)}) \right) \right), \quad (3.6)$$

burada $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_n$, bir $G(\cdot)$ dağılım fonksiyonundan n çaplı rasgele örneklem olmak üzere, $Y_{(1)} \leq Y_{(2)} \leq \dots \leq Y_{(n)}$ ilgili sıra istatistiklerini, $\frac{i}{n+1}$ ise $G(Y_{(i)})$ 'nin beklenen değerini ifade eder.

3.2. DW Dağılımı İçin Parametre Tahmini

Bu bölümde iki ve üç parametrelili DW dağılımının parametrelerinin tahmini için ML , LS , WLS , AD , ve CM tahmin edici yöntemleri karşılaştırılacaktır.

3.2.1. İki parametrelili DW dağılımı için parametre tahmini

İki parametrelili $DW(\sigma, \beta)$ dağılımının ölçek ve şekil parametrelerinin ML , LS ve WLS tahmin edicileri elde edilecektir.

DW dağılımının parametrelerinin ML tahmini

$DW(\sigma, \beta)$ dağılımının bilinmeyen ölçek ve şekil parametrelerinin ML tahmin edicileri elde edilecektir. Önerilen dağılımın ölçek ve şekil parametrelerinin ML tahmin edicileri log-olabilirlik fonksiyonun ilgili parametreye göre maksimize edilmesiyle elde edilir. $DW(\sigma, \beta)$ dağılımının olabilirlik ve log-olabilirlik fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$L(\sigma, \beta) = \left(\frac{e}{e-1} \right)^n \beta^n \sigma^{-\beta n} \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\beta-1} \exp \left(- \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\sigma} \right)^\beta \right) \exp \left(\sum_{i=1}^n \exp \left(- \left(\frac{x_i}{\sigma} \right)^\beta \right) \right), \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \ln L(\sigma, \beta) = & n \ln(\beta) - n\beta \ln(\sigma) + (\beta-1) \ln \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\sigma} \right)^\beta \\ & + \sum_{i=1}^n \exp \left(- \left(\frac{x_i}{\sigma} \right)^\beta \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Eş. 3.8 deki $\ln L(\sigma, \beta)$ fonksiyonu ölçek ve şekil parametrelerine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek aşağıdaki olabilirlik denklemleri elde edilir:

$$\frac{\partial l}{\partial \sigma} = -\frac{\beta n}{\sigma} + \frac{\beta}{\sigma^{\beta+1}} \sum_{i=1}^n x_i^\beta - \frac{\beta}{\sigma^{\beta+1}} \sum_{i=1}^n \exp \left(- \left(\frac{x_i}{\sigma} \right)^\beta \right) x_i^\beta = 0, \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \beta} = & \frac{n}{\beta} - n \ln(\sigma) + \ln \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) - \frac{1}{\sigma^\beta} \sum_{i=1}^n (x_i)^\beta \ln(x_i) \\ & - \sum_{i=1}^n \exp \left(- \left(\frac{x_i}{\sigma} \right)^\beta \right) \left(\frac{x_i}{\sigma} \right)^\beta \ln \left(- \frac{x_i}{\sigma} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

σ ve β parametrelerinin ML tahmin edicileri olan $\hat{\sigma}$ ve $\hat{\beta}$ 'yi elde etmek için Eş. 3.9-3.10 da elde edilen iki olabilirlik denklemi çözülmelidir. Ancak bu eşitlikler analitik olarak çözülemez. Bundan dolayı çözüm için sayısal teknik kullanılacaktır. Orta nokta, lineer interpolasyon, Newton-Rapson, sekant, katlı kökler yaygın olarak kullanılan sayısal tekniklerden bazılarıdır. Bu çalışmada çözüm için sayısal tekniklerden Newton-Rapson metodu seçilmiştir.

DW dağılımının parametrelerinin LS tahmini

Swain ve diğerleri (1988) tarafından önerilen eşitliğe bağlı olarak DW dağılımının σ ve β parametrelerinin LS tahmin edicileri

$$S_1 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{e-1} \left(\exp \left(1 - \exp \left(- \left(\frac{y_{(i)}}{\sigma} \right)^\beta \right) \right) - 1 \right) - \frac{i}{n+1} \right)^2 \quad (3.11)$$

eşitliğinin minimum yapılmasıyla elde edilir.

DW dağılımının parametrelerinin WLS tahmini

Swain ve diğerleri (1988) tarafından önerilen eşitliğe bağlı olarak DW dağılımının σ ve β parametrelerinin WLS tahmin edicileri

$$S_2 = \sum_{i=1}^n \frac{(n+1)^2 (n+2)}{i(n-i+1)} \left(\frac{1}{e-1} \left(\exp \left(1 - \exp \left(- \left(\frac{y_{(i)}}{\sigma} \right)^\beta \right) \right) - 1 \right) - \frac{i}{n+1} \right)^2 \quad (3.12)$$

eşitliğinin minimum yapılmasıyla elde edilir.

DW dağılımının parametrelerinin CM tahmini

DW dağılımının σ ve β parametrelerinin CM tahmin edicileri

$$CM = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{e-1} \left(\exp \left(1 - \exp \left(- \left(\frac{y_{(i)}}{\sigma} \right)^\beta \right) \right) - 1 \right) - \frac{2i-1}{2n} \right)^2 \quad (3.13)$$

eşitliğinin minimum yapılmasıyla elde edilir.

DW dağılımının parametrelerinin AD tahmini

DW dağılımının σ ve β parametrelerinin AD tahmin edicileri

$$AD = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i-1) \log \left\{ \frac{1}{e-1} \left(\exp \left(1 - \exp \left(- \left(\frac{y_{(i)}}{\sigma} \right)^\beta \right) \right) - 1 \right) - \left(1 - \frac{1}{e-1} \left(\exp \left(1 - \exp \left(- \left(\frac{y_{(n-i+1)}}{\sigma} \right)^\beta \right) \right) - 1 \right) \right) \right\} \quad (3.14)$$

eşitliğinin minimum yapılmasıyla elde edilir.

3.2.2. Üç parametrelili DW dağılımı için parametre tahmini

Üç parametrelili $DW(\mu, \sigma, \beta)$ dağılımının konum, ölçek ve şekil parametrelerinin ML , LS ve WLS tahmin edicileri elde edilecektir.

DW dağılımının parametrelerinin ML tahmini

$DW(\mu, \sigma, \beta)$ dağılımının bilinmeyen parametrelerinin ML tahmin edicileri elde edilecektir.

Önerilen dağılımın konum, ölçek ve şekil parametrelerinin ML tahmin edicileri log-olabilirlik fonksiyonun ilgili parametreye göre maksimize edilmesiyle elde edilir.

$DW(\mu, \sigma, \beta)$ dağılımının olabilirlik ve log-olabilirlik fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$L(\mu, \sigma, \beta) = \left(\frac{e}{e-1} \right)^n \beta^n \sigma^{-\beta n} \left(\prod_{i=1}^n (x_i - \mu) \right)^{\beta-1} \exp \left(- \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^\beta \right) \\ \times \exp \left(\sum_{i=1}^n \exp \left(- \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^\beta \right) \right), \quad (3.15)$$

$$\ln L(\mu, \sigma, \beta) = sbt + n \ln(\beta) - n\beta \ln(\sigma) + (\beta-1) \ln \left(\sum_{i=1}^n (x_i - \mu) \right) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^\beta \\ + \sum_{i=1}^n \exp \left(- \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^\beta \right). \quad (3.16)$$

Eş. 3.16 daki $\ln L(\mu, \sigma, \beta)$ fonksiyonu konum, ölçek ve şekil parametrelerine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek aşağıdaki olabilirlik denklemleri elde edilir:

$$\frac{\partial \ln L(\mu, \sigma, \beta)}{\partial \mu} = \frac{-n(\beta-1)}{\mu} + \frac{\beta}{\sigma} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^{\beta-1} \\ - \frac{\beta}{\sigma} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^{\beta-1} \exp \left(- \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^\beta \right) = 0 \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial \ln L(\mu, \sigma, \beta)}{\partial \sigma} = -\frac{\beta n}{\sigma} + \frac{\beta}{\sigma^{\beta+1}} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^\beta \\ - \frac{\beta}{\sigma^{\beta+1}} \sum_{i=1}^n \exp \left(- \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^\beta \right) (x_i - \mu)^\beta = 0, \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial \ln L(\mu, \sigma, \beta)}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} - n \ln(\sigma) + \ln \left(\sum_{i=1}^n (x_i - \mu) \right) - \frac{1}{\sigma^\beta} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^\beta \ln(x_i - \mu) \\ - \sum_{i=1}^n \exp \left(- \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^\beta \right) \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^\beta \ln \left(- \frac{(x_i - \mu)}{\sigma} \right) = 0. \quad (3.19)$$

Eş. 3.17-3.19 da elde edilen olabilirlik denklemleri analitik olarak çözülemeyeceğinden Newton-Rapson metodu kullanılacaktır.

DW dağılımının parametrelerinin LS tahmini

Swain ve diğerleri (1988) tarafından önerilen eşitliğe bağlı olarak DW dağılımının μ , σ ve β parametrelerinin LS tahmin edicileri

$$S_1 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{e-1} \left(\exp \left(1 - \exp \left(- \left(\frac{y_{(i)} - \mu}{\sigma} \right)^\beta \right) \right) - 1 \right) - \frac{i}{n+1} \right)^2 \quad (3.20)$$

-

eşitliğinin minimum yapılmasıyla elde edilir.

DW dağılımının parametrelerinin WLS tahmini

Swain ve diğerleri (1988) tarafından önerilen eşitliğe bağlı olarak DW dağılımının μ , σ ve β parametrelerinin WLS tahmin edicileri

$$S_2 = \sum_{i=1}^n \frac{(n+1)^2 (n+2)}{i(n-i+1)} \left(\frac{1}{e-1} \left(\exp \left(1 - \exp \left(- \left(\frac{y_{(i)} - \mu}{\sigma} \right)^\beta \right) \right) - 1 \right) - \frac{i}{n+1} \right)^2 \quad (3.21)$$

eşitliğinin minimum yapılmasıyla elde edilir.

DW dağılımının parametrelerinin CM tahmini

DW dağılımının σ ve β parametrelerinin CM tahmin edicileri

$$CM = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{e-1} \left(\exp \left(1 - \exp \left(- \left(\frac{y_{(i)} - \mu}{\sigma} \right)^\beta \right) \right) - 1 \right) - \frac{2i-1}{2n} \right)^2 \quad (3.22)$$

eşitliğinin minimum yapılmasıyla elde edilir.

DW dağılımının parametrelerinin AD tahmini

DW dağılımının σ ve β parametrelerinin AD tahmin edicileri

$$AD = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i-1) \log \left(\frac{1}{e-1} \left(\exp \left(1 - \exp \left(- \left(\frac{y_{(i)} - \mu}{\sigma} \right)^\beta \right) \right) - 1 \right) \right. \\ \left. - \left(1 - \frac{1}{e-1} \left(\exp \left(1 - \exp \left(- \left(\frac{y_{(n-i+1)} - \mu}{\sigma} \right)^\beta \right) \right) - 1 \right) \right) \right) \right) \quad (3.23)$$

eşitliğin minimum yapılmasıyla elde edilir.

3.3. DIW Dağılımı İçin Parametre Tahmini

Bu bölümde iki ve üç parametrelili *DIW* dağılımının parametrelerinin tahmini için *ML*, *LS* ve *WLS* tahmin edici yöntemleri karşılaştırılacaktır.

3.3.1. İki parametrelili *DIW* dağılımı için parametre tahmini

İki parametrelili *DIW*(σ, β) dağılımının ölçek ve şekil parametrelerinin *ML*, *LS* ve *WLS* tahmin edicileri elde edilecektir.

DIW dağılımının parametrelerinin *ML* tahmini

DIW(σ, β) dağılımının bilinmeyen ölçek ve şekil parametrelerinin *ML* tahmin edicileri elde edilecektir. Önerilen dağılımın ölçek ve şekil parametrelerinin *ML* tahmin edicileri log-olabilirlik fonksiyonun ilgili parametreye göre maksimize edilmesiyle elde edilir. *DIW*(σ, β) dağılımının olabilirlik ve log-olabilirlik fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$L(\sigma, \beta) = \left(\frac{1}{e-1} \right)^n \beta^n \sigma^{\beta n} \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{-(\beta+1)} \exp \left(- \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\sigma} \right)^{-\beta} \right) \exp \left(\sum_{i=1}^n \exp \left(- \left(\frac{x_i}{\sigma} \right)^{-\beta} \right) \right), \quad (3.24)$$

$$\ln L(\sigma, \beta) = sbt + n \ln(\beta) - n \ln(\beta) + n\beta \ln(\sigma) - (\beta + 1) \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\sigma} \right)^{-\beta} + \sum_{i=1}^n \exp \left(- \left(\frac{x_i}{\sigma} \right)^{-\beta} \right). \quad (3.25)$$

Eş. 3.25 deki $\ln L(\sigma, \beta)$ fonksiyonu ölçek ve şekil parametrelerine göre türevleri alınıp sıfıra eşitlenerek aşağıdaki olabilirlik denklemleri elde edilir:

$$\frac{\partial \ln L(\sigma, \beta)}{\partial \sigma} = \frac{n\beta}{\sigma} - \beta \sigma^{\beta-1} \sum_{i=1}^n (x_i)^{-\beta} - \beta \sigma^{\beta-1} \sum_{i=1}^n \exp \left(- \left(\frac{x_i}{\sigma} \right)^{-\beta} \right) x_i^{-\beta} = 0 \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\sigma, \beta)}{\partial \beta} &= \frac{n}{\beta} + n \ln(\sigma) - \sum_{i=1}^n x_i + \sigma^\beta \sum_{i=1}^n (x_i)^{-\beta} \ln(x_i) \\ &+ \sigma^\beta \sum_{i=1}^n \exp \left(- \left(\frac{x_i}{\sigma} \right)^{-\beta} \right) (x_i)^{-\beta} \ln(x_i) = 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

Eş. 3.26-3.27 deki elde edilen olabilirlik denklemleri analitik olarak çözülemeyeceğinden Newton-Rapson metodu kullanılacaktır.

DIW dağılımının parametrelerinin LS tahmini

Swain ve diğerleri (1988) tarafından önerilen eşitliğe bağlı olarak *DIW* dağılımının σ ve β parametrelerinin *LS* tahmin edicileri

$$S_1 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{e-1} \left(\exp \left(\exp \left(- \left(\frac{y_{(i)}}{\sigma} \right)^{-\beta} \right) \right) - 1 \right) - \frac{i}{n+1} \right)^2 \quad (3.28)$$

eşitliğinin minimum yapılmasıyla elde edilir.

DIW dağılımının parametrelerinin WLS tahmini

Swain ve diğerleri (1988) tarafından önerilen eşitliğe bağlı olarak *DIW* dağılımının σ ve β parametrelerinin WLS tahmin edicileri

$$S_2 = \sum_{i=1}^n \frac{(n+1)^2 (n+2)}{i(n-i+1)} \left(\frac{1}{e-1} \left(\exp \left(\exp \left(- \left(\frac{y_{(i)}}{\sigma} \right)^{-\beta} \right) \right) - 1 \right) - \frac{i}{n+1} \right)^2 \quad (3.29)$$

eşitliğinin minimum yapılmasıyla elde edilir.

DIW dağılımının parametrelerinin CM tahmini

DIW dağılımının σ ve β parametrelerinin CM tahmin edicileri

$$CM = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{e-1} \left(\exp \left(\exp \left(- \left(\frac{y_{(i)}}{\sigma} \right)^{-\beta} \right) \right) - 1 \right) - \frac{2i-1}{2n} \right)^2 \quad (3.30)$$

eşitliğinin minimum yapılmasıyla elde edilir.

DIW dağılımının parametrelerinin AD tahmini

DIW dağılımının σ ve β parametrelerinin AD tahmin edicileri

$$AD = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i-1) \log \left(\frac{1}{e-1} \left(\exp \left(\exp \left(- \left(\frac{y_{(i)}}{\sigma} \right)^{-\beta} \right) \right) - 1 \right) - \left(1 - \frac{1}{e-1} \left(\exp \left(\exp \left(- \left(\frac{y_{(n-i+1)}}{\sigma} \right)^{-\beta} \right) \right) - 1 \right) \right) \right) \quad (3.31)$$

eşitliğinin minimum yapılmasıyla elde edilir.

3.3.2. Üç parametrelili *DIW* dağılımı için parametre tahmini

İki parametrelili $DIW(\mu, \sigma, \beta)$ dağılımının konum, ölçek ve şekil parametrelerinin *ML*, *LS* ve *WLS* tahmin edicileri elde edilecektir.

DIW dağılımının parametrelerinin *ML* tahmini

$DIW(\mu, \sigma, \beta)$ dağılımının bilinmeyen parametrelerinin *ML* tahmin edicileri elde edilecektir. Önerilen dağılımın konum, ölçek ve şekil parametrelerinin *ML* tahmin edicileri log-olabilirlik fonksiyonun ilgili parametreye göre maksimize edilmesiyle elde edilir. $DIW(\mu, \sigma, \beta)$ dağılımının olabilirlik ve log-olabilirlik fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$L(\mu, \sigma, \beta) = \left(\frac{1}{e-1} \right)^n \beta^n \sigma^{\beta n} \left(\prod_{i=1}^n (x_i - \mu) \right)^{-(\beta+1)} \exp \left(- \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^{-\beta} \right) \times \exp \left(\sum_{i=1}^n \exp \left(- \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^{-\beta} \right) \right), \quad (3.32)$$

$$\ln L(\mu, \sigma, \beta) = n \ln(\beta) - n \ln(\sigma) - (\beta+1) \left(\sum_{i=1}^n (x_i - \mu) \right) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^{-\beta} + \sum_{i=1}^n \exp \left(- \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^{-\beta} \right) \quad (3.33)$$

Eş. 3.33 deki $\ln L(\mu, \sigma, \beta)$ fonksiyonu konum, ölçek ve şekil parametrelerine göre türevleri alınıp sıfıra eşitlenerek aşağıdaki olabilirlik denklemleri elde edilir:

$$\frac{\partial \ln L(\mu, \sigma, \beta)}{\partial \mu} = (\beta+1) - \frac{\beta}{\sigma} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^{-\beta-1} + \frac{\beta}{\sigma} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^{-\beta-1} \exp \left(- \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^{-\beta} \right) = 0 \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\mu, \sigma, \beta)}{\partial \sigma} &= \frac{n\beta}{\sigma} - \beta \sigma^{\beta-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^{-\beta} \\ &\quad - \beta \sigma^{\beta-1} \sum_{i=1}^n \exp\left(-\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^{-\beta}\right) (x_i - \mu)^{-\beta} = 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\mu, \sigma, \beta)}{\partial \beta} &= \frac{n}{\beta} + n \ln(\sigma) - \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) + \sigma^\beta \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^{-\beta} \ln(x_i - \mu) \\ &\quad + \sigma^\beta \sum_{i=1}^n \exp\left(-\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^{-\beta}\right) (x_i - \mu)^{-\beta} \ln(x_i - \mu) = 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

Eş. 3.34-3.36 da elde edilen olabilirlik denklemleri analitik olarak çözülemeyeceğinden Newton-Rapson metodu kullanılacaktır.

DIW dağılımının parametrelerinin LS tahmini

Swain ve diğerleri (1988) tarafından önerilen eşitliğe bağlı olarak DIW dağılımının μ , σ ve β parametrelerinin LS tahmin edicileri

$$S_1 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{e-1} \left(\exp \left(\exp \left(-\left(\frac{y_{(i)} - \mu}{\sigma} \right)^{-\beta} \right) \right) - 1 \right) - \frac{i}{n+1} \right)^2 \quad (3.37)$$

eşitliğinin minimum yapılmasıyla elde edilir.

DIW dağılımının parametrelerinin WLS tahmini

Swain ve diğerleri (1988) tarafından önerilen eşitliğe bağlı olarak DIW dağılımının μ , σ ve β parametrelerinin LS tahmin edicileri

$$S_2 = \sum_{i=1}^n \frac{(n+1)^2 (n+2)}{i(n-i+1)} \left(\frac{1}{e-1} \left(\exp \left(\exp \left(-\left(\frac{y_{(i)} - \mu}{\sigma} \right)^{-\beta} \right) \right) - 1 \right) - \frac{i}{n+1} \right)^2 \quad (3.38)$$

eşitliğinin minimum yapılmasıyla elde edilir.

DIW dağılımının parametrelerinin CM tahmini

DIW dağılımının σ ve β parametrelerinin CM tahmin edicileri

$$CM = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{e-1} \left(\exp \left(\exp \left(- \left(\frac{y_{(i)} - \mu}{\sigma} \right)^{-\beta} \right) \right) - 1 \right) - \frac{2i-1}{2n} \right)^2 \quad (3.39)$$

eşitliğinin minimum yapılmasıyla elde edilir.

DIW dağılımının parametrelerinin AD tahmini

DIW dağılımının σ ve β parametrelerinin AD tahmin edicileri

$$AD = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i-1) \log \left(\frac{1}{e-1} \left(\exp \left(\exp \left(- \left(\frac{y_{(i)} - \mu}{\sigma} \right)^{-\beta} \right) \right) - 1 \right) \right. \\ \left. - \left(1 - \frac{1}{e-1} \left(\exp \left(\exp \left(- \left(\frac{y_{(i)} - \mu}{\sigma} \right)^{-\beta} \right) \right) - 1 \right) \right) \right) \quad (3.40)$$

eşitliğinin minimum yapılmasıyla elde edilir.

3.4. Simülasyon Çalışması

Simülasyon çalışmasında iki ve üç parametrelili DW ve DIW dağılımlarının parametrelerinin *ML*, *LS*, *WLS*, *CM* ve *AD* tahmin edicileri elde edilip karşılaştırılmış. Örnek çapı (n) 30, 50 ve 100 olarak seçilmiştir. Parametrelerden $\mu = 0$, $\sigma = 1$, β ise 0.5, 1, 1.5, 2, 3 ve 4 olarak seçilmiştir. Tekrar sayısı 10.000 olarak seçilmiştir. $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$ ve $\hat{\beta}$ tahmin edicilerinin performansları ortalama, hata kare ortalaması (Mean Square Error-*MSE*) ve deficiency (*Def*) açısından karşılaştırılmıştır. *Def*, tahmin edicilerin etkinliklerinin birlikte değerlendirilmesi amacıyla kullanılan bir kriterdir. *MSE* ve *Def* aşağıda verildiği gibidir:

$$MSE(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) + [E(\hat{\theta}) - \theta]^2$$

$$Def = MSE(\hat{\theta}_1) + MSE(\hat{\theta}_2) + \dots + MSE(\hat{\theta}_k)$$

Simülasyon çalışması Matlab R2017b programı yardımıyla yapılmıştır.

Çizelge 3.1. İki parametrelili $DW(\sigma, \beta)$ dağılımının konum ve ölçek parametrelerinin ML , LS , WLS , AD ve CM tahmin edicilerinin Ortalama (Ort.) ve MSE değerleri; $\sigma = 1$.

β	n		$\hat{\sigma}$		$\hat{\beta}$		Def
			Ort.	MSE	Ort.	MSE	
0,5	30	ML	1,058	0,159	0,523	0,007	0,167
		LS	1,054	0,162	0,497	0,009	0,171
		WLS	1,054	0,161	0,504	0,008	0,169
		AD	1,052	0,160	0,507	0,007	0,167
		CM	1,060	0,166	0,526	0,011	0,177
	50	ML	1,042	0,094	0,515	0,004	0,098
		LS	1,029	0,096	0,499	0,005	0,101
		WLS	1,034	0,092	0,504	0,004	0,096
		AD	1,037	0,094	0,505	0,004	0,098
		CM	1,038	0,097	0,515	0,005	0,102
	100	ML	1,016	0,044	0,507	0,001	0,046
		LS	1,029	0,047	0,501	0,002	0,049
		WLS	1,018	0,045	0,502	0,002	0,047
		AD	1,015	0,043	0,502	0,002	0,045
		CM	1,014	0,044	0,507	0,002	0,046
1	30	ML	1,015	0,035	1,052	0,030	0,065
		LS	1,005	0,037	0,995	0,037	0,074
		WLS	1,009	0,035	1,007	0,031	0,066
		AD	1,008	0,036	1,015	0,028	0,064
		CM	1,008	0,037	1,049	0,043	0,080
	50	ML	1,006	0,020	1,028	0,015	0,036
		LS	1,004	0,022	1,001	0,021	0,043
		WLS	1,008	0,021	1,008	0,018	0,040
		AD	1,004	0,021	1,009	0,016	0,037
		CM	1,008	0,022	1,031	0,024	0,046
	100	ML	1,004	0,010	1,015	0,007	0,018
		LS	1,001	0,011	0,999	0,009	0,020
		WLS	1,004	0,011	1,004	0,008	0,019
		AD	1,002	0,011	1,003	0,007	0,018
		CM	1,003	0,011	1,014	0,010	0,021

Çizelge 3.1. (devam) İki parametrelili $DW(\sigma, \beta)$ dağılımının konum ve ölçek parametrelerinin ML , LS , WLS , AD ve CM tahmin edicilerinin Ortalama (Ort.) ve MSE değerleri; $\sigma = 1$.

β	n		$\hat{\sigma}$		$\hat{\beta}$		Def
			Ort.	MSE	Ort.	MSE	
1,5	30	ML	1,005	0,015	1,574	0,066	0,081
		LS	1,004	0,016	1,505	0,087	0,103
		WLS	1,001	0,015	1,513	0,073	0,088
		AD	1,003	0,015	1,527	0,064	0,079
		CM	1,002	0,016	1,578	0,102	0,118
	50	ML	1,003	0,009	1,543	0,035	0,044
		LS	1,002	0,009	1,501	0,046	0,055
		WLS	1,001	0,009	1,507	0,040	0,049
		AD	1,001	0,009	1,513	0,036	0,045
		CM	1,001	0,009	1,545	0,053	0,062
	100	ML	1,001	0,004	1,520	0,016	0,020
		LS	0,999	0,004	1,497	0,022	0,026
		WLS	1,001	0,004	1,505	0,019	0,023
		AD	0,999	0,004	1,506	0,018	0,022
		CM	1,001	0,004	1,524	0,024	0,028
2	30	ML	1,002	0,008	2,101	0,121	0,129
		LS	1,001	0,009	1,995	0,147	0,156
		WLS	1,001	0,008	2,016	0,129	0,137
		AD	1,001	0,009	2,033	0,115	0,124
		CM	1,001	0,009	2,097	0,172	0,181
	50	ML	1,002	0,005	2,060	0,063	0,068
		LS	0,999	0,005	1,998	0,083	0,088
		WLS	1,001	0,005	2,017	0,073	0,078
		AD	1,001	0,005	2,021	0,066	0,071
		CM	0,999	0,005	2,058	0,095	0,100
	100	ML	1,001	0,002	2,028	0,028	0,030
		LS	1,001	0,002	2,001	0,039	0,041
		WLS	1,001	0,002	2,008	0,033	0,035
		AD	0,999	0,002	2,006	0,032	0,034
		CM	1,001	0,002	2,031	0,041	0,043

Çizelge 3.1. (devam) İki parametrelili $DW(\sigma, \beta)$ dağılımının konum ve ölçek parametrelerinin ML , LS , WLS , AD ve CM tahmin edicilerinin Ortalama (Ort.) ve MSE değerleri; $\sigma = 1$.

β	n		$\hat{\sigma}$		$\hat{\beta}$		Def
			Ort.	MSE	Ort.	MSE	
3	30	ML	0,999	0,003	3,142	0,273	0,276
		LS	0,998	0,004	2,993	0,338	0,342
		WLS	0,999	0,004	3,028	0,293	0,297
		AD	0,998	0,004	3,055	0,258	0,262
		CM	0,998	0,004	3,159	0,417	0,421
	50	ML	1,001	0,002	3,091	0,143	0,145
		LS	0,998	0,002	2,993	0,187	0,189
		WLS	0,999	0,002	3,017	0,157	0,159
		AD	0,998	0,002	3,024	0,146	0,148
		CM	0,998	0,002	3,087	0,204	0,206
	100	ML	1,001	0,001	3,044	0,065	0,066
		LS	0,999	0,001	3,003	0,091	0,092
		WLS	1,001	0,001	3,009	0,072	0,073
		AD	0,999	0,001	3,014	0,072	0,073
		CM	0,998	0,001	3,035	0,095	0,096
4	30	ML	1,001	0,002	4,205	0,488	0,490
		LS	0,999	0,002	3,998	0,590	0,592
		WLS	0,999	0,002	4,032	0,523	0,525
		AD	0,998	0,002	4,062	0,468	0,470
		CM	0,998	0,002	4,200	0,698	0,700
	50	ML	0,999	0,001	4,110	0,247	0,248
		LS	0,999	0,001	4,007	0,337	0,338
		WLS	0,999	0,001	4,027	0,286	0,287
		AD	0,999	0,001	4,044	0,267	0,268
		CM	0,999	0,001	4,121	0,383	0,384
	100	ML	1,001	0,001	4,059	0,116	0,117
		LS	1,001	0,001	4,001	0,163	0,164
		WLS	1,001	0,001	4,022	0,133	0,134
		AD	0,999	0,001	4,019	0,124	0,125
		CM	0,999	0,001	4,054	0,171	0,172

Çizelge 3.2. İki parametrelili $DIW(\sigma, \beta)$ dağılımının konum ve ölçek parametrelerinin ML , LS , WLS , AD ve CM tahmin edicilerinin Ortalama ($Ort.$) ve MSE değerleri; $\sigma = 1$.

β	n		$\hat{\sigma}$		$\hat{\beta}$		Def
			$Ort.$	MSE	$Ort.$	MSE	
0,5	30	ML	1,142	0,285	0,523	0,006	0,291
		LS	1,079	0,298	0,498	0,008	0,306
		WLS	1,086	0,272	0,502	0,007	0,279
		AD	1,097	0,263	0,508	0,006	0,269
		CM	1,152	0,357	0,525	0,010	0,367
	50	ML	1,078	0,134	0,515	0,003	0,137
		LS	1,047	0,154	0,499	0,004	0,158
		WLS	1,053	0,138	0,503	0,004	0,142
		AD	1,052	0,132	0,504	0,003	0,135
		CM	1,082	0,168	0,514	0,005	0,173
	100	ML	1,036	0,057	0,507	0,001	0,058
		LS	1,020	0,068	0,499	0,002	0,070
		WLS	1,030	0,060	0,503	0,001	0,061
		AD	1,055	0,060	0,501	0,001	0,061
		CM	1,042	0,072	0,506	0,002	0,074
1	30	ML	1,048	0,051	1,050	0,026	0,077
		LS	1,010	0,055	0,997	0,032	0,087
		WLS	1,017	0,051	1,009	0,029	0,080
		AD	1,025	0,051	1,014	0,024	0,075
		CM	1,044	0,062	1,046	0,039	0,101
	50	ML	1,027	0,028	1,028	0,014	0,042
		LS	1,008	0,032	0,996	0,018	0,050
		WLS	1,011	0,028	1,006	0,015	0,043
		AD	1,014	0,029	1,009	0,014	0,043
		CM	1,030	0,034	1,030	0,021	0,055
	100	ML	1,012	0,013	1,012	0,006	0,019
		LS	1,002	0,015	0,998	0,008	0,023
		WLS	1,009	0,014	1,003	0,007	0,021
		AD	1,006	0,014	1,003	0,007	0,021
		CM	1,014	0,016	1,014	0,009	0,025

Çizelge 3.2. (devam) İki parametrelili $DIW(\sigma, \beta)$ dağılımının konum ve ölçek parametrelerinin ML , LS , WLS , AD ve CM tahmin edicilerinin Ortalama (Ort.) ve MSE değerleri; $\sigma = 1$.

β	n		$\hat{\sigma}$		$\hat{\beta}$		Def
			Ort.	MSE	Ort.	MSE	
1,5	30	ML	1,025	0,020	1,570	0,057	0,077
		LS	1,001	0,023	1,498	0,073	0,096
		WLS	1,005	0,021	1,511	0,063	0,084
		AD	1,009	0,020	1,525	0,056	0,076
		CM	1,026	0,025	1,579	0,093	0,118
	50	ML	1,016	0,012	1,541	0,031	0,043
		LS	1,002	0,013	1,499	0,042	0,055
		WLS	1,004	0,012	1,506	0,035	0,047
		AD	1,006	0,012	1,510	0,031	0,043
		CM	1,016	0,014	1,541	0,046	0,060
	100	ML	1,007	0,006	1,522	0,014	0,020
		LS	0,999	0,006	1,497	0,020	0,026
		WLS	1,003	0,006	1,506	0,016	0,022
		AD	1,002	0,006	1,504	0,015	0,021
		CM	1,007	0,007	1,520	0,021	0,028
2	30	ML	1,017	0,011	2,100	0,107	0,118
		LS	1,001	0,013	1,999	0,134	0,147
		WLS	1,003	0,012	2,013	0,116	0,128
		AD	1,007	0,011	2,027	0,098	0,109
		CM	1,017	0,014	2,098	0,160	0,174
	50	ML	1,009	0,006	2,058	0,054	0,060
		LS	0,999	0,007	1,996	0,076	0,083
		WLS	1,003	0,007	2,014	0,062	0,069
		AD	1,004	0,007	2,016	0,055	0,062
		CM	1,009	0,007	2,058	0,085	0,092
	100	ML	1,004	0,003	2,026	0,024	0,027
		LS	0,999	0,003	1,999	0,036	0,039
		WLS	1,001	0,003	2,007	0,030	0,033
		AD	1,002	0,003	2,010	0,027	0,030
		CM	1,005	0,003	2,029	0,037	0,040

Çizelge 3.2. (devam) İki parametrelili $DIW(\sigma, \beta)$ dağılımının konum ve ölçek parametrelerinin ML , LS , WLS , AD ve CM tahmin edicilerinin Ortalama ($Ort.$) ve MSE değerleri; $\sigma = 1$.

β	n		$\hat{\sigma}$		$\hat{\beta}$		Def
			$Ort.$	MSE	$Ort.$	MSE	
3	30	ML	1,010	0,004	3,144	0,239	0,243
		LS	0,997	0,005	2,995	0,299	0,304
		WLS	1,001	0,005	3,027	0,258	0,263
		AD	1,004	0,005	3,042	0,220	0,225
		CM	1,008	0,005	3,150	0,367	0,372
	50	ML	1,005	0,002	3,083	0,124	0,126
		LS	0,999	0,003	2,990	0,166	0,169
		WLS	1,001	0,003	3,020	0,144	0,147
		AD	1,002	0,003	3,019	0,127	0,130
		CM	1,005	0,003	3,191	0,192	0,195
	100	ML	1,002	0,001	3,042	0,056	0,057
		LS	0,999	0,001	2,995	0,080	0,081
		WLS	1,001	0,001	3,013	0,066	0,067
		AD	1,001	0,001	3,008	0,062	0,063
		CM	1,002	0,001	3,042	0,088	0,089
4	30	ML	1,008	0,002	4,194	0,427	0,429
		LS	0,997	0,003	3,990	0,525	0,528
		WLS	1,001	0,003	4,022	0,442	0,445
		AD	1,001	0,002	4,057	0,398	0,400
		CM	1,005	0,003	4,191	0,630	0,633
	50	ML	1,004	0,001	4,119	0,223	0,224
		LS	0,998	0,001	3,994	0,297	0,298
		WLS	1,001	0,001	4,025	0,254	0,255
		AD	1,001	0,001	4,032	0,225	0,226
		CM	1,004	0,002	4,115	0,334	0,336
	100	ML	1,002	0,001	4,052	0,100	0,101
		LS	0,998	0,001	3,995	0,143	0,144
		WLS	1,001	0,001	4,019	0,118	0,119
		AD	1,001	0,001	4,019	0,111	0,112
		CM	1,001	0,001	4,055	0,150	0,151

Çizelge 3.3. Üç parametrelili $DW(\mu, \sigma, \beta)$ dağılımının β (şekil) parametresinin bilindiği varsayımı altında konum ve ölçek parametrelerinin ML , LS , WLS , AD ve CM tahmin edicilerinin Ortalama ($Ort.$) ve MSE değerleri; $\mu = 0$, $\sigma = 1$.

β	n		$\hat{\mu}$		$\hat{\sigma}$		Def
			$Ort.$	MSE	$Ort.$	MSE	
0,5	30	ML	0,009	0,002	1,023	0,140	0,142
		LS	-0,001	0,002	1,079	0,157	0,159
		WLS	0,001	0,000	1,057	0,136	0,136
		AD	0,013	0,002	1,040	0,140	0,142
		CM	0,015	0,002	1,021	0,137	0,139
	50	ML	0,003	0,000	1,005	0,073	0,073
		LS	0,000	0,000	1,034	0,084	0,084
		WLS	0,001	0,000	1,029	0,078	0,078
		AD	0,007	0,000	1,021	0,076	0,076
		CM	0,010	0,000	1,016	0,079	0,079
	100	ML	0,001	0,000	1,001	0,030	0,030
		LS	0,002	0,000	1,014	0,039	0,039
		WLS	0,001	0,000	1,009	0,037	0,037
		AD	0,003	0,000	1,011	0,036	0,036
		CM	0,006	0,000	1,003	0,039	0,039
1	30	ML	0,800	0,661	0,727	0,089	0,750
		LS	-0,020	0,011	1,038	0,037	0,048
		WLS	-0,009	0,005	1,021	0,031	0,036
		AD	0,002	0,008	1,014	0,032	0,040
		CM	0,014	0,010	0,997	0,034	0,044
	50	ML	0,798	0,650	0,731	0,081	0,731
		LS	-0,012	0,006	1,020	0,021	0,027
		WLS	-0,005	0,002	1,011	0,018	0,020
		AD	-0,001	0,003	1,009	0,018	0,021
		CM	0,007	0,006	0,997	0,020	0,026
	100	ML	0,795	0,638	0,734	0,075	0,713
		LS	-0,006	0,003	1,010	0,010	0,013
		WLS	-0,002	0,000	1,005	0,008	0,008
		AD	-0,001	0,001	1,004	0,009	0,010
		CM	0,003	0,003	0,998	0,010	0,013

Çizelge 3.3. (devam) Üç parametrelili $DW(\mu, \sigma, \beta)$ dağılımının β (şekil) parametresinin bilindiği varsayımı altında konum ve ölçek parametrelerinin ML , LS , WLS , AD ve CM tahmin edicilerinin Ortalama ($Ort.$) ve MSE değerleri; $\mu = 0$, $\sigma = 1$.

β	n		$\hat{\mu}$		$\hat{\sigma}$		Def
			$Ort.$	MSE	$Ort.$	MSE	
1,5	30	ML	0,083	0,035	0,934	0,028	0,063
		LS	-0,017	0,026	1,024	0,029	0,055
		WLS	-0,002	0,018	1,009	0,023	0,041
		AD	-0,006	0,013	1,010	0,019	0,032
		CM	0,028	0,027	0,973	0,029	0,056
	50	ML	0,064	0,028	0,951	0,020	0,048
		LS	-0,010	0,014	1,014	0,016	0,030
		WLS	0,004	0,011	0,998	0,013	0,024
		AD	-0,004	0,008	1,007	0,011	0,019
		CM	0,017	0,015	0,984	0,016	0,031
	100	ML	0,038	0,014	0,972	0,010	0,024
		LS	-0,007	0,006	1,009	0,007	0,013
		WLS	0,004	0,005	0,997	0,006	0,011
		AD	-0,002	0,003	1,004	0,005	0,008
		CM	0,007	0,006	0,993	0,007	0,013
2	30	ML	0,049	0,014	0,958	0,014	0,028
		LS	-0,024	0,028	1,027	0,026	0,052
		WLS	-0,009	0,021	1,011	0,020	0,041
		AD	-0,007	0,017	1,008	0,017	0,034
		CM	0,023	0,026	0,978	0,024	0,050
	50	ML	0,033	0,008	0,971	0,008	0,016
		LS	-0,014	0,016	1,016	0,015	0,031
		WLS	-0,003	0,011	1,004	0,011	0,022
		AD	-0,004	0,010	1,004	0,010	0,020
		CM	0,012	0,015	0,998	0,014	0,029
	100	ML	0,019	0,003	0,983	0,003	0,006
		LS	-0,008	0,007	1,008	0,007	0,014
		WLS	0,000	0,005	0,999	0,005	0,010
		AD	-0,002	0,005	1,004	0,005	0,010
		CM	0,008	0,007	0,992	0,007	0,014

Çizelge 3.3. (devam) Üç parametrelili $DW(\mu, \sigma, \beta)$ dağılımının β (şekil) parametresinin bilindiği varsayımı altında konum ve ölçek parametrelerinin ML , LS , WLS , AD ve CM tahmin edicilerinin Ortalama ($Ort.$) ve MSE değerleri; $\mu = 0$, $\sigma = 1$.

β	n		$\hat{\mu}$		$\hat{\sigma}$		Def
			$Ort.$	MSE	$Ort.$	MSE	
3	30	ML	0,036	0,018	0,966	0,015	0,033
		LS	-0,030	0,032	1,030	0,027	0,059
		WLS	-0,015	0,025	1,015	0,022	0,047
		AD	-0,007	0,020	1,008	0,017	0,037
		CM	0,020	0,030	0,979	0,025	0,055
	50	ML	0,022	0,010	0,979	0,008	0,018
		LS	-0,019	0,018	1,019	0,016	0,034
		WLS	-0,007	0,014	1,007	0,012	0,026
		AD	-0,003	0,012	1,002	0,010	0,022
		CM	0,013	0,017	0,987	0,015	0,032
	100	ML	0,012	0,004	0,989	0,004	0,008
		LS	-0,010	0,009	1,010	0,007	0,016
		WLS	-0,002	0,006	1,002	0,005	0,011
		AD	-0,003	0,006	1,003	0,005	0,011
		CM	0,004	0,008	0,995	0,007	0,015
4	30	ML	0,031	0,019	0,969	0,016	0,035
		LS	-0,032	0,033	1,031	0,029	0,062
		WLS	-0,016	0,027	1,016	0,023	0,050
		AD	-0,010	0,023	1,009	0,019	0,042
		CM	0,018	0,030	0,984	0,026	0,056
	50	ML	0,019	0,011	0,981	0,009	0,020
		LS	-0,021	0,019	1,020	0,016	0,035
		WLS	-0,009	0,015	1,009	0,012	0,027
		AD	-0,005	0,014	1,004	0,011	0,025
		CM	0,011	0,018	0,988	0,015	0,033
	100	ML	0,010	0,005	0,989	0,004	0,009
		LS	-0,009	0,009	1,009	0,008	0,017
		WLS	-0,003	0,007	1,003	0,006	0,013
		AD	-0,002	0,007	1,002	0,005	0,012
		CM	0,006	0,009	0,993	0,008	0,017

Çizelge 3.4. Üç parametrelili $DIW(\mu, \sigma, \beta)$ dağılımının β (şekil) parametresinin bilindiği varsayımı altında, konum ve ölçek parametrelerinin ML , LS , WLS , AD ve CM tahmin edicilerinin Ortalama (Ort). ve MSE değerleri; $\mu = 0$, $\sigma = 1$.

β	n		$\hat{\mu}$		$\hat{\sigma}$		Def
			Ort ,	MSE	Ort ,	MSE	
0,5	30	ML	0,081	0,036	0,954	0,595	0,631
		LS	-0,095	0,081	1,206	0,540	0,621
		WLS	-0,038	0,028	1,156	0,458	0,486
		AD	-0,029	0,053	1,161	0,494	0,547
		CM	-0,030	0,051	1,165	0,516	0,567
	50	ML	0,045	0,012	0,0972	0,173	0,185
		LS	-0,050	0,027	1,110	0,243	0,270
		WLS	-0,018	0,008	1,089	0,213	0,221
		AD	-0,016	0,011	1,101	0,221	0,232
		CM	-0,023	0,019	1,097	0,228	0,247
	100	ML	0,020	0,003	0,981	0,066	0,069
		LS	-0,027	0,008	1,060	0,099	0,108
		WLS	-0,007	0,002	1,042	0,085	0,087
		AD	-0,008	0,003	1,048	0,087	0,090
		CM	-0,013	0,006	1,052	0,095	0,101
1	30	ML	0,062	0,023	0,968	0,080	0,103
		LS	-0,067	0,078	1,086	0,147	0,214
		WLS	-0,031	0,045	1,058	0,122	0,167
		AD	-0,024	0,039	1,051	0,115	0,154
		CM	0,006	0,061	1,038	0,123	0,184
	50	ML	0,039	0,011	0,977	0,048	0,059
		LS	-0,035	0,038	1,044	0,076	0,114
		WLS	-0,012	0,021	1,026	0,061	0,082
		AD	-0,014	0,019	1,032	0,062	0,081
		CM	0,007	0,033	1,022	0,068	0,101
	100	ML	0,018	0,004	0,988	0,022	0,026
		LS	-0,019	0,017	1,023	0,034	0,051
		WLS	-0,004	0,009	1,014	0,029	0,038
		AD	-0,008	0,008	1,017	0,028	0,036
		CM	0,004	0,016	1,011	0,032	0,048

Çizelge 3.4. (devam) Üç parametrelili $DIW(\mu, \sigma, \beta)$ dağılımının β (şekil) parametresinin bilindiği varsayımı altında, konum ve ölçek parametrelerinin ML , LS , WLS , AD ve CM tahmin edicilerinin Ortalama (Ort). ve MSE değerleri; $\mu = 0$, $\sigma = 1$.

β	n		$\hat{\mu}$		$\hat{\sigma}$		Def
			Ort ,	MSE	Ort ,	MSE	
1,5	30	ML	0,053	0,025	0,968	0,053	0,078
		LS	-0,055	0,066	1,059	0,085	0,151
		WLS	-0,027	0,047	1,039	0,075	0,122
		AD	-0,022	0,040	1,034	0,070	0,110
		CM	0,015	0,058	1,012	0,077	0,135
	50	ML	0,031	0,013	0,981	0,031	0,044
		LS	-0,031	0,037	1,033	0,048	0,085
		WLS	-0,010	0,024	1,016	0,040	0,064
		AD	-0,011	0,021	1,020	0,038	0,059
		CM	0,009	0,033	1,004	0,044	0,077
	100	ML	0,016	0,006	0,990	0,014	0,020
		LS	-0,014	0,016	1,015	0,022	0,038
		WLS	-0,002	0,010	1,004	0,018	0,028
		AD	-0,007	0,009	1,011	0,018	0,027
		CM	0,006	0,016	1,001	0,021	0,037
2	30	ML	0,045	0,026	0,970	0,040	0,066
		LS	-0,049	0,062	1,047	0,069	0,131
		WLS	-0,024	0,044	1,029	0,057	0,101
		AD	-0,019	0,036	1,028	0,051	0,087
		CM	0,022	0,053	0,994	0,060	0,113
	50	ML	0,028	0,014	0,980	0,024	0,038
		LS	-0,026	0,032	1,027	0,037	0,069
		WLS	-0,013	0,024	1,017	0,032	0,056
		AD	-0,011	0,020	1,015	0,029	0,049
		CM	0,007	0,030	1,002	0,035	0,065
	100	ML	0,016	0,006	0,988	0,011	0,017
		LS	-0,014	0,015	1,015	0,017	0,032
		WLS	-0,003	0,010	1,006	0,015	0,025
		AD	-0,004	0,009	1,006	0,014	0,020
		CM	0,006	0,014	0,998	0,016	0,030

Çizelge 3.4. (devam) Üç parametrelili $DIW(\mu, \sigma, \beta)$ dağılımının β (şekil) parametresinin bilindiği varsayımı altında, konum ve ölçek parametrelerinin ML , LS , WLS , AD ve CM tahmin edicilerinin Ortalama (Ort). ve MSE değerleri; $\mu = 0$, $\sigma = 1$.

β	n		$\hat{\mu}$		$\hat{\sigma}$		Def
			Ort ,	MSE	Ort ,	MSE	
3	30	ML	0,036	0,025	0,972	0,032	0,057
		LS	-0,044	0,053	1,043	0,054	0,107
		WLS	-0,023	0,040	1,025	0,044	0,084
		AD	-0,015	0,033	1,018	0,039	0,072
		CM	0,017	0,045	0,991	0,046	0,091
	50	ML	0,022	0,014	0,983	0,018	0,032
		LS	-0,025	0,028	1,024	0,029	0,057
		WLS	-0,012	0,021	1,014	0,024	0,045
		AD	-0,008	0,019	1,010	0,023	0,042
		CM	0,009	0,027	0,995	0,028	0,055
	100	ML	0,012	0,007	0,991	0,009	0,016
		LS	-0,015	0,013	1,014	0,014	0,027
		WLS	-0,005	0,011	1,006	0,011	0,022
		AD	-0,005	0,009	1,005	0,011	0,020
		CM	0,004	0,012	0,998	0,013	0,025
4	30	ML	0,034	0,024	0,972	0,028	0,052
		LS	-0,040	0,046	1,038	0,046	0,092
		WLS	-0,023	0,036	1,024	0,038	0,074
		AD	-0,013	0,031	1,015	0,034	0,065
		CM	0,015	0,041	0,990	0,041	0,082
	50	ML	0,022	0,014	0,981	0,016	0,030
		LS	-0,024	0,026	1,024	0,026	0,052
		WLS	-0,010	0,020	1,011	0,021	0,041
		AD	-0,007	0,018	1,008	0,020	0,038
		CM	0,009	0,024	0,994	0,024	0,048
	100	ML	0,009	0,007	0,992	0,008	0,015
		LS	-0,011	0,012	1,011	0,012	0,024
		WLS	-0,002	0,009	1,002	0,010	0,019
		AD	-0,004	0,009	1,005	0,010	0,019
		CM	0,005	0,011	0,996	0,011	0,022

Çizelge 3.5. Üç parametrelili $DW(\mu, \sigma, \beta)$ dağılımının konum, ölçek ve şekil parametrelerinin ML , LS , WLS , AD ve CM tahmin edicilerinin Ortalama (Ort.) ve MSE değerleri; $\mu = 0$, $\sigma = 1$.

$T.E.$		$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$		$\hat{\beta}$				
β	n	$Ort.$	MSE	$Ort.$	MSE	$Ort.$	MSE	Def	
0,5	50	ML	0,003	0,002	1,024	0,065	0,502	0,002	0,069
		LS	-0,002	0,002	1,030	0,107	0,498	0,008	0,117
		WLS	0,002	0,002	1,021	0,104	0,496	0,006	0,112
		AD	0,003	0,002	1,020	0,096	0,501	0,004	0,102
		CM	0,002	0,002	1,023	0,109	0,505	0,008	0,119
	100	ML	0,002	0,002	1,008	0,020	0,501	0,002	0,024
		LS	0,001	0,002	1,013	0,050	0,495	0,003	0,055
		WLS	0,001	0,001	1,001	0,051	0,492	0,003	0,055
		AD	0,002	0,001	1,008	0,045	0,498	0,002	0,048
		CM	0,003	0,001	1,005	0,050	0,499	0,003	0,054
0,5	200	ML	0,001	0,001	0,999	0,006	0,500	0,001	0,008
		LS	0,001	0,002	1,001	0,024	0,495	0,002	0,028
		WLS	0,001	0,001	0,988	0,027	0,489	0,001	0,029
		AD	0,001	0,001	1,002	0,022	0,498	0,001	0,024
		CM	0,001	0,002	1,001	0,024	0,498	0,001	0,027
	300	ML	0,001	0,001	0,999	0,004	0,500	0,001	0,006
		LS	0,001	0,001	0,999	0,015	0,496	0,001	0,017
		WLS	0,001	0,001	0,983	0,018	0,487	0,001	0,020
		AD	0,001	0,001	0,998	0,014	0,498	0,001	0,016
		CM	0,001	0,001	0,999	0,015	0,498	0,001	0,017
0,5	500	ML	0,000	0,001	1,004	0,002	0,501	0,001	0,004
		LS	0,000	0,001	0,999	0,009	0,500	0,001	0,011
		WLS	0,000	0,001	0,986	0,010	0,490	0,001	0,012
		AD	0,000	0,001	1,001	0,008	0,498	0,001	0,010
		CM	0,001	0,001	0,999	0,009	0,498	0,001	0,011

Çizelge 3.5. (devam) Üç parametrelili $DW(\mu, \sigma, \beta)$ dağılımının konum, ölçek ve şekil parametrelerinin ML , LS , WLS , AD ve CM tahmin edicilerinin Ortalama (Ort.) ve MSE değerleri; $\mu=0$, $\sigma=1$.

$T.E.$		$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$		$\hat{\beta}$				
β	n	$Ort.$	MSE	$Ort.$	MSE	$Ort.$	MSE	Def	
1	50	ML	0,297	0,240	0,722	0,178	0,800	0,081	0,499
		LS	-0,040	0,068	1,048	0,108	1,045	0,111	0,287
		WLS	-0,017	0,004	1,026	0,034	1,027	0,033	0,071
		AD	-0.004	0,007	1.010	0,039	1.018	0,036	0,082
		CM	-0,025	0,017	1,032	0,055	1,060	0,063	0,135
	100	ML	0,398	0,363	0,664	0,229	0,783	0,085	0,677
		LS	-0,019	0,005	1,025	0,022	1,025	0,021	0,048
		WLS	-0,007	0,001	1,013	0,014	1,013	0,011	0,026
		AD	-0.001	0,001	1.003	0,016	1.007	0,013	0,030
		CM	-0,012	0,005	1,017	0,022	1,030	0,023	0,050
	200	ML	0,567	0,571	0,575	0,312	0,760	0,100	0,984
		LS	-0,008	0,001	1,011	0,010	1,011	0,009	0,020
		WLS	-0,003	0,001	1,005	0,006	1,006	0,005	0,012
		AD	-0.001	0,001	1.003	0,007	1.005	0,006	0,014
		CM	-0,005	0,001	1,006	0,009	1,013	0,008	0,018
	300	ML	0,646	0,657	0,524	0,355	0,739	0,108	1,121
		LS	-0,005	0,001	1,007	0,006	1,007	0,005	0,012
		WLS	-0,002	0,001	1,003	0,004	1,005	0,003	0,008
		AD	-0.001	0,001	1.001	0,004	1.002	0,003	0,008
		CM	-0,003	0,001	1,004	0,006	1,008	0,005	0,010
	500	ML	0,758	0,806	0,456	0,415	0,712	0,121	1,343
		LS	-0,003	0,001	1,004	0,003	1,003	0,003	0,007
		WLS	-0,001	0,001	1,001	0,002	1,002	0,001	0,004
		AD	-0.001	0,001	1.001	0,002	1.002	0,002	0,005
		CM	-0,002	0,001	1,004	0,003	1,006	0,003	0,007

Çizelge 3.5. (devam) Üç parametrelili $DW(\mu, \sigma, \beta)$ dağılımının konum, ölçek ve şekil parametrelerinin ML , LS , WLS , AD ve CM tahmin edicilerinin Ortalama (Ort.) ve MSE değerleri; $\mu=0$, $\sigma=1$.

		$T.E.$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$		$\hat{\beta}$			
β	n		$Ort.$	MSE	$Ort.$	MSE	$Ort.$	MSE	Def
	50	ML	0,185	0,116	0,799	0,143	1,274	0,248	0,507
		LS	-	-	-	-	-	-	-
		WLS	-0,051	0,113	1,055	0,137	1,600	0,578	0,828
		AD	-0.028	0.038	1.027	0.062	1.566	0.178	0.278
		CM	-	-	-	-	-	-	-
	100	ML	0,141	0,088	0,848	0,103	1,326	0,161	0,352
		LS	-0,036	0,029	1,037	0,043	1,558	0,116	0,189
		WLS	-0,014	0,008	1,016	0,017	1,578	0,048	0,073
		AD	-0.015	0.009	1.018	0.019	1.536	0.056	0.084
		CM	-0.027	0.031	1.027	0.045	1.566	0.127	0.203
1,5	200	ML	0,088	0,055	0,904	0,063	1,386	0,094	0,212
		LS	-0,015	0,010	1,015	0,016	1,523	0,041	0,067
		WLS	-0,003	0,003	1,003	0,007	1,509	0,020	0,030
		AD	0.007	0.003	1.009	0.007	1.519	0.021	0.031
		CM	-0.011	0.010	1.012	0.016	1.531	0.045	0.071
	300	ML	0,071	0,044	0,923	0,049	1,408	0,072	0,166
		LS	-0,009	0,006	1,009	0,010	1,513	0,027	0,043
		WLS	-0,001	0,002	1,001	0,004	1,502	0,012	0,018
		AD	-0.005	0.002	1.006	0.004	1.512	0.013	0.019
		CM	-0.005	0.006	1.006	0.010	1.516	0.026	0.042
500	ML	0,051	0,032	0,946	0,033	1,434	0,050	0,116	
	LS	-0,006	0,003	1,007	0,006	1,511	0,015	0,027	
	WLS	-0,001	0,001	0,999	0,002	1,501	0,007	0,010	
	AD	-0.003	0.001	1.004	0.002	1.508	0.007	0.010	
	CM	-0.003	0.003	1.004	0.006	1.510	0.015	0.024	

Çizelge 3.5. (devam) Üç parametrelili $DW(\mu, \sigma, \beta)$ dağılımının konum, ölçek ve şekil parametrelerinin ML , LS , WLS , AD ve CM tahmin edicilerinin Ortalama (Ort.) ve MSE değerleri; $\mu=0$, $\sigma=1$.

β	n	$T.E.$	$\hat{\mu}$		$\hat{\sigma}$		$\hat{\beta}$		Def
			Ort.	MSE	Ort.	MSE	Ort.	MSE	
2	50	ML	0,115	0,089	0,871	0,114	1,821	0,493	0,696
		LS	-	-	-	-	-	-	-
		WLS	-	-	-	-	-	-	-
		AD	-	-	-	-	-	-	-
		CM	-	-	-	-	-	-	-
	100	ML	0,069	0,037	0,921	0,049	1,883	0,189	0,275
		LS	-	-	-	-	-	-	-
		WLS	-0,022	0,031	1,022	0,041	2,054	0,206	0,278
		AD	-0,034	0,028	1,035	0,037	2,085	0,190	0,255
		CM	-	-	-	-	-	-	-
	200	ML	0,038	0,015	0,956	0,020	1,930	0,079	0,115
		LS	-0,028	0,031	1,028	0,038	2,057	0,173	0,243
		WLS	-0,006	0,011	1,005	0,015	2,015	0,077	0,105
		AD	-0,016	0,009	1,016	0,013	2,040	0,069	0,091
		CM	-0,019	0,030	1,018	0,036	2,053	0,169	0,235
	300	ML	0,025	0,007	0,972	0,010	1,956	0,043	0,060
		LS	-0,016	0,017	1,016	0,021	2,032	0,098	0,138
		WLS	-0,001	0,007	1,001	0,009	2,004	0,048	0,064
		AD	-0,012	0,005	1,013	0,008	2,031	0,040	0,053
		CM	-0,014	0,018	1,014	0,022	2,040	0,101	0,141
500	500	ML	0,016	0,004	0,982	0,005	1,970	0,023	0,032
		LS	-0,010	0,009	1,010	0,011	2,020	0,052	0,073
		WLS	-0,001	0,003	1,000	0,005	2,003	0,025	0,033
		AD	-0,007	0,003	1,007	0,004	2,017	0,021	0,028
		CM	-0,005	0,009	1,005	0,011	2,018	0,052	0,072

Çizelge 3.5. (devam) Üç parametrelili $DW(\mu, \sigma, \beta)$ dağılımının konum, ölçek ve şekil parametrelerinin ML , LS , WLS , AD ve CM tahmin edicilerinin Ortalama (Ort.) ve MSE değerleri; $\mu = 0$, $\sigma = 1$.

		$T.E.$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$		$\hat{\beta}$			
β	n		Ort.	MSE	Ort.	MSE	Ort.	MSE	Def
3	50	ML	-0,058	3,235	1,053	3,263	3,342	45,537	52,035
		LS	-	-	-	-	-	-	-
		WLS	-	-	-	-	-	-	-
		AD	-	-	-	-	-	-	-
		CM	-	-	-	-	-	-	-
	100	ML	0,033	0,063	0,963	0,070	2,946	0,794	0,927
		LS	-	-	-	-	-	-	-
		WLS	-	-	-	-	-	-	-
		AD	-	-	-	-	-	-	-
		CM	-	-	-	-	-	-	-
	200	ML	0,020	0,016	0,977	0,019	2,956	0,209	0,244
		LS	-	-	-	-	-	-	-
		WLS	-0,036	0,041	1,036	0,045	3,116	0,476	0,562
		AD	-0,042	0,041	1,042	0,045	3,141	0,464	0,550
		CM	-	-	-	-	-	-	-
	300	ML	0,014	0,009	0,984	0,010	2,969	0,119	0,138
		LS	-0,051	0,067	1,050	0,071	3,156	0,707	0,845
		WLS	-0,020	0,022	1,020	0,024	3,069	0,255	0,302
		AD	-0,029	0,023	1,029	0,025	3,099	0,260	0,308
		CM	-	-	-	-	-	-	-
	500	ML	0,011	0,004	0,988	0,005	2,975	0,062	0,071
		LS	-0,028	0,031	1,028	0,034	3,087	0,329	0,394
		WLS	-0,009	0,011	1,009	0,013	3,033	0,133	0,157
		AD	-0,016	0,011	1,016	0,012	3,056	0,127	0,160
		CM	-0,026	0,031	1,026	0,033	3,089	0,331	0,395

Çizelge 3.5. (devam) Üç parametrelili $DW(\mu, \sigma, \beta)$ dağılımının konum, ölçek ve şekil parametrelerinin ML , LS , WLS , AD ve CM tahmin edicilerinin Ortalama (Ort.) ve MSE değerleri; $\mu=0$, $\sigma=1$.

		<i>T.E.</i>	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$		$\hat{\beta}$			
β	<i>n</i>		<i>Ort.</i>	<i>MSE</i>	<i>Ort.</i>	<i>MSE</i>	<i>Ort.</i>	<i>MSE</i>	<i>Def</i>
	50	<i>ML</i>	-0,669	23,244	1,666	23,301	7,240	504,097	550,642
		<i>LS</i>	-	-	-	-	-	-	-
		<i>WLS</i>	-	-	-	-	-	-	-
		<i>AD</i>	-	-	-	-	-	-	-
		<i>CM</i>	-	-	-	-	-	-	-
	100	<i>ML</i>	-0,055	1,351	1,053	1,361	4,311	25,969	28,681
		<i>LS</i>	-	-	-	-	-	-	-
		<i>WLS</i>	-	-	-	-	-	-	-
		<i>AD</i>	-	-	-	-	-	-	-
		<i>CM</i>	-	-	-	-	-	-	-
4	200	<i>ML</i>	0,001	0,036	0,997	0,038	4,027	0,741	0,815
		<i>LS</i>	-	-	-	-	-	-	-
		<i>WLS</i>	-	-	-	-	-	-	-
		<i>AD</i>	-	-	-	-	-	-	-
		<i>CM</i>	-	-	-	-	-	-	-
	300	<i>ML</i>	0,007	0,020	0,992	0,022	3,994	0,409	0,451
		<i>LS</i>	-	-	-	-	-	-	-
		<i>WLS</i>	-0,043	0,059	1,043	0,061	4,178	1,085	1,206
		<i>AD</i>	-0,051	0,060	1,051	0,062	4,217	1,083	1,206
		<i>CM</i>	-	-	-	-	-	-	-
500	<i>ML</i>	0,005	0,011	0,993	0,012	3,997	0,219	0,241	
	<i>LS</i>	-0,063	0,090	1,063	0,092	4,254	1,557	1,740	
	<i>WLS</i>	-0,024	0,027	1,024	0,028	4,104	0,501	0,557	
	<i>AD</i>	-0,026	0,026	1,026	0,027	4,112	0,479	0,532	
	<i>CM</i>	-0,056	0,086	1,056	0,088	4,244	1,521	1,695	

Çizelge 3.6. Üç parametrelili $DIW(\mu, \sigma, \beta)$ dağılımının konum, ölçek ve şekil parametrelerinin ML , LS , WLS , AD ve CM tahmin edicilerinin ortalama (Ort.) ve MSE değerleri; $\mu = 0$, $\sigma = 1$.

		$T.E.$	$\hat{\mu}$		$\hat{\sigma}$		$\hat{\beta}$		
β	n		Ort.	MSE	Ort.	MSE	Ort.	MSE	Def
0,5	50	ML	0,041	0,008	1,019	0,271	0,507	0,005	0,284
		LS	-0,029	0,049	1,124	0,331	0,512	0,008	0,388
		WLS	-0,030	0,016	1,099	0,240	0,509	0,006	0,262
		AD	-0,025	0,017	1,118	0,252	0,513	0,006	0,275
		CM	-0,054	0,046	1,169	0,343	0,527	0,009	0,399
	100	ML	0,020	0,002	0,994	0,091	0,501	0,002	0,095
		LS	-0,028	0,012	1,061	0,120	0,506	0,003	0,135
		WLS	-0,012	0,004	1,044	0,090	0,504	0,002	0,096
		AD	-0,013	0,004	1,058	0,099	0,506	0,002	0,105
		CM	-0,025	0,011	1,076	0,121	0,513	0,003	0,135
0,5	200	ML	0,010	0,001	0,991	0,036	0,498	0,001	0,038
		LS	-0,015	0,004	1,034	0,052	0,503	0,001	0,057
		WLS	-0,005	0,001	1,024	0,040	0,502	0,001	0,042
		AD	-0,007	0,001	1,029	0,041	0,504	0,001	0,043
		CM	-0,014	0,004	1,039	0,051	0,507	0,001	0,056
	300	ML	0,006	0,001	0,989	0,022	0,497	0,001	0,024
		LS	-0,010	0,002	1,022	0,032	0,502	0,001	0,035
		WLS	-0,002	0,001	1,013	0,026	0,501	0,001	0,028
		AD	0,005	0,001	1,021	0,026	0,503	0,001	0,028
		CM	-0,010	0,002	1,026	0,033	0,505	0,001	0,035
0,5	500	ML	0,004	0,001	0,993	0,012	0,498	0,001	0,014
		LS	-0,007	0,001	1,015	0,019	0,502	0,001	0,021
		WLS	-0,001	0,001	1,006	0,014	0,500	0,001	0,016
		CM	-0,003	0,001	1,012	0,015	0,501	0,001	0,017
		CM	-0,005	0,001	1,016	0,019	0,503	0,001	0,021

Çizelge 3.6. (devam) Üç parametrelili $DIW(\mu, \sigma, \beta)$ dağılımının konum, ölçek ve şekil parametrelerinin ML , LS , WLS , AD ve CM tahmin edicilerinin ortalama ($Ort.$) ve MSE değerleri; $\mu = 0$, $\sigma = 1$.

$T.E.$		$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$		$\hat{\beta}$				
β	n	$Ort.$	MSE	$Ort.$	MSE	$Ort.$	MSE	Def	
1	50	ML	0,033	0,035	0,975	0,095	0,999	0,042	0,172
		LS	-0,095	0,199	1,105	0,294	1,052	0,110	0,603
		WLS	-0,060	0,109	1,073	0,187	1,040	0,069	0,366
		AD	-0,064	0,114	1,085	0,194	1,052	0,069	0,377
		CM	-0,103	0,282	1,133	0,387	1,089	0,169	0,839
	100	ML	0,019	0,012	0,983	0,037	0,996	0,016	0,065
		LS	-0,039	0,049	1,046	0,087	1,021	0,032	0,168
		WLS	-0,021	0,025	1,026	0,057	1,013	0,051	0,133
		AD	-0,027	0,022	1,039	0,054	1,024	0,021	0,097
		CM	-0,041	0,056	1,057	0,098	1,037	0,035	0,190
	200	ML	0,010	0,005	0,990	0,017	0,998	0,007	0,029
		LS	-0,016	0,019	1,017	0,036	1,008	0,013	0,068
		WLS	-0,007	0,010	1,010	0,025	1,005	0,009	0,044
		AD	-0,013	0,009	1,018	0,025	1,012	0,009	0,043
		CM	-0,016	0,020	1,023	0,038	1,015	0,014	0,073
	300	ML	0,007	0,003	0,993	0,011	0,998	0,004	0,018
		LS	-0,010	0,012	1,011	0,024	1,004	0,008	0,044
		WLS	-0,005	0,006	1,008	0,016	1,004	0,006	0,028
		AD	-0,009	0,005	1,013	0,015	1,008	0,006	0,026
		CM	-0,011	0,012	1,017	0,024	1,010	0,008	0,044
	500	ML	0,004	0,001	0,995	0,006	0,998	0,002	0,009
		LS	-0,007	0,007	1,009	0,014	1,004	0,005	0,026
		WLS	-0,002	0,003	1,002	0,009	1,002	0,003	0,015
		AD	-0,005	0,003	1,007	0,009	1,004	0,003	0,015
		CM	-0,005	0,007	1,009	0,013	1,005	0,005	0,025

Çizelge 3.6. (devam) Üç parametrelili $DIW(\mu, \sigma, \beta)$ dağılımının konum, ölçek ve şekil parametrelerinin ML , LS , WLS , AD ve CM tahmin edicilerinin ortalama ($Ort.$) ve MSE değerleri; $\mu = 0$, $\sigma = 1$.

$T.E.$		$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$		$\hat{\beta}$				
β	n	$Ort.$	MSE	$Ort.$	MSE	$Ort.$	MSE	Def	
	50	ML	-0,003	0,142	1,011	0,185	1,550	0,298	0,625
		LS	-	-	-	-	-	-	-
		WLS	-	-	-	-	-	-	-
		AD	-0,112	0,257	1,125	0,316	1,639	0,380	0,953
		CM	-	-	-	-	-	-	-
	100	ML	0,010	0,028	0,992	0,046	1,509	0,063	0,136
		LS	-0,069	0,118	1,071	0,145	1,566	0,166	0,429
		WLS	-0,037	0,056	1,040	0,078	1,540	0,094	0,228
		AD	-0,043	0,050	1,048	0,072	1,555	0,087	0,209
		CM	-0,067	0,122	1,076	0,150	1,587	0,173	0,445
1,5	200	ML	0,005	0,020	0,995	0,012	1,503	0,027	0,059
		LS	-0,030	0,041	1,031	0,052	1,530	0,059	0,152
		WLS	-0,017	0,021	1,019	0,030	1,521	0,037	0,088
		AD	-0,020	0,020	1,022	0,029	1,524	0,036	0,085
		CM	-0,027	0,040	1,031	0,052	1,537	0,060	0,152
	300	ML	0,002	0,013	0,999	0,007	1,504	0,017	0,037
		LS	-0,017	0,024	1,018	0,031	1,516	0,036	0,091
		WLS	-0,009	0,013	1,009	0,019	1,510	0,023	0,055
		AD	-0,012	0,012	1,013	0,018	1,514	0,022	0,052
		CM	-0,019	0,025	1,022	0,032	1,524	0,038	0,095
500	ML	0,003	0,007	0,997	0,004	1,500	0,010	0,021	
	LS	-0,009	0,013	1,009	0,017	1,509	0,020	0,050	
	WLS	-0,005	0,007	1,006	0,011	1,508	0,014	0,032	
	AD	-0,008	0,007	1,009	0,010	1,510	0,013	0,030	
	CM	-0,009	0,013	1,011	0,017	1,513	0,020	0,050	

Çizelge 3.6. (devam) Üç parametrelili $DIW(\mu, \sigma, \beta)$ dağılımının konum, ölçek ve şekil parametrelerinin ML , LS , WLS , AD ve CM tahmin edicilerinin ortalama (Ort.) ve MSE değerleri; $\mu=0$, $\sigma=1$.

		$T.E.$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$		$\hat{\beta}$			
β	n		Ort.	MSE	Ort.	MSE	Ort.	MSE	Def
	50	ML	-0,075	3,592	1,083	3,642	2,187	8,696	15,931
		LS	-	-	-	-	-	-	-
		WLS	-	-	-	-	-	-	-
		AD	-	-	-	-	-	-	-
		CM	-	-	-	-	-	-	-
	100	ML	-0,016	0,057	1,020	0,072	2,059	0,207	0,336
		LS	-	-	-	-	-	-	-
		WLS	-0,060	0,110	1,062	0,128	2,096	0,323	0,561
		AD	-0,065	0,091	1,068	0,108	2,112	0,279	0,478
		CM	-	-	-	-	-	-	-
2	200	ML	0,001	0,020	1,001	0,027	2,015	0,073	0,120
		LS	-0,039	0,068	1,039	0,076	2,055	0,181	0,326
		WLS	-0,024	0,036	1,024	0,045	2,038	0,111	0,192
		AD	-0,027	0,033	1,029	0,041	2,046	0,104	0,178
		CM	-0,050	0,075	1,054	0,085	2,087	0,201	0,361
	300	ML	-0,001	0,013	1,002	0,017	2,014	0,047	0,077
		LS	-0,028	0,040	1,029	0,046	2,040	0,109	0,196
		WLS	-0,016	0,021	1,016	0,026	2,026	0,067	0,114
		AD	-0,019	0,021	1,020	0,026	2,032	0,065	0,112
		CM	-0,028	0,041	1,029	0,047	2,051	0,114	0,203
500	ML	0,000	0,007	1,001	0,009	2,006	0,027	0,043	
	LS	-0,013	0,020	1,014	0,024	2,020	0,057	0,102	
	WLS	-0,007	0,011	1,007	0,014	2,011	0,037	0,062	
	AD	-0,010	0,011	1,011	0,014	2,019	0,036	0,061	
	CM	-0,016	0,021	1,017	0,025	2,029	0,060	0,106	

Çizelge 3.6. (devam) Üç parametrelili $DIW(\mu, \sigma, \beta)$ dağılımının konum, ölçek ve şekil parametrelerinin ML , LS , WLS , AD ve CM tahmin edicilerinin ortalama (Ort.) ve MSE değerleri; $\mu = 0$, $\sigma = 1$.

		$T.E.$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$		$\hat{\beta}$			
β	n		$Ort.$	MSE	$Ort.$	MSE	$Ort.$	MSE	Def
	50	ML	-	-	-	-	-	-	-
		LS	-	-	-	-	-	-	-
		WLS	-	-	-	-	-	-	-
		AD	-	-	-	-	-	-	-
		CM	-	-	-	-	-	-	-
	100	ML	-0,076	1,005	1,080	1,020	3,251	7,569	9,593
		LS	-	-	-	-	-	-	-
		WLS	-	-	-	-	-	-	-
		AD	-	-	-	-	-	-	-
		CM	-	-	-	-	-	-	-
3	200	ML	-0,020	0,047	1,021	0,052	3,075	0,367	0,466
		LS	-0,104	0,412	1,104	0,421	3,256	2,876	3,710
		WLS	-0,050	0,096	1,051	0,102	3,129	0,678	0,876
		AD	-0,054	0,080	1,055	0,086	3,142	0,557	0,723
		CM	-	-	-	-	-	-	-
	300	ML	-0,012	0,028	1,013	0,032	3,048	0,222	0,282
		LS	-0,057	0,117	1,056	0,121	3,135	0,735	0,974
		WLS	-0,031	0,046	1,031	0,050	3,080	0,324	0,420
		AD	-0,034	0,043	1,034	0,047	3,090	0,309	0,400
		CM	-0,068	0,144	1,069	0,149	3,183	0,989	1,283
500	ML	-0,006	0,015	1,006	0,017	3,027	0,118	0,150	
	LS	-0,032	0,047	1,032	0,049	3,079	0,312	0,409	
	WLS	-0,017	0,023	1,017	0,026	3,043	0,169	0,218	
	AD	-0,018	0,022	1,019	0,024	3,050	0,161	0,208	
	CM	-0,033	0,046	1,033	0,049	3,087	0,307	0,404	

Çizelge 3.6. (devam) Üç parametrelili $DIW(\mu, \sigma, \beta)$ dağılımının konum, ölçek ve şekil parametrelerinin ML , LS , WLS , AD ve CM tahmin edicilerinin ortalama (Ort.) ve MSE değerleri; $\mu = 0$, $\sigma = 1$.

		$T.E.$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$		$\hat{\beta}$				
β	n		Ort.	MSE	Ort.	MSE	Ort.	MSE	Def	
	50	ML	-	-	-	-	-	-	-	
		LS	-	-	-	-	-	-	-	
		WLS	-	-	-	-	-	-	-	
		AD	-	-	-	-	-	-	-	
		CM	-	-	-	-	-	-	-	
	100	ML	-	-	-	-	-	-	-	
		LS	-	-	-	-	-	-	-	
		WLS	-	-	-	-	-	-	-	
		AD	-	-	-	-	-	-	-	
		CM	-	-	-	-	-	-	-	
	4	200	ML	-0,056	0,108	1,057	0,113	4,236	1,529	1,752
			LS	-	-	-	-	-	-	-
			WLS	-0,099	0,284	1,099	0,291	4,351	3,781	4,356
			AD	-	-	-	-	-	-	-
			CM	-	-	-	-	-	-	-
300		ML	-0,034	0,053	1,035	0,056	4,144	0,741	0,851	
		LS	-	-	-	-	-	-	-	
		WLS	-0,056	0,096	1,056	0,100	4,197	1,269	1,465	
		AD	-0,057	0,086	1,057	0,089	4,207	1,119	1,295	
		CM	-	-	-	-	-	-	-	
500	ML	-0,018	0,047	1,018	0,052	4,078	0,367	0,466		
	LS	-0,052	0,090	1,052	0,092	4,178	1,098	1,281		
	WLS	-0,029	0,042	1,029	0,044	4,104	0,556	0,642		
	AD	-0,030	0,040	1,030	0,042	4,106	0,521	0,604		
	CM	-0,053	0,092	1,054	0,094	4,195	1,139	1,327		

Çizelge 3.1 e bakıldığında, *MSE* kriterine göre, σ parametresi için, β 'nın farklı değerleri ve incelenen tüm örnek çaplarında, *ML*, *LS*, *WLS*, *AD* ve *CM* tahmin edicilerinin performansları birbirin oldukça yakındır. β parametresi için, düşük örnek çapında yani $n=30$ olduğunda, *AD* tahmin edicisi, örnek çapı arttığında ise *ML* tahmin edicisi en iyi performansı göstermişlerdir. Bu tahmin edicileri sırasıyla *WLS* ve *LS* tahmin edicileri takip ederken, en kötü performansı *CM* tahmin edicisi göstermiştir. Bilinmeyen parametrelerin tahmin edicilerinin etkinliklerini birer birer değil birlikte karşılaştırmak için *Def* kriteri kullanılmıştır. Bu kritere göre, daha düşük *Def* değerine sahip olan *ML* ve *AD* tahmin edicileri diğer tahmin edicilerden daha iyi performans göstermişlerdir. *MSE* kriterine benzer şekilde, bunları *WLS* ve *LS* tahmin edicileri takip ederken, en kötü performansı gösteren yani, en yüksek *Def* değerine sahip tahmin edici *CM* tahmin edicisidir.

Çizelge 3.2 ye bakıldığında, *MSE* kriterine göre, σ parametresi için, $\beta = 0,5$ ve $\beta = 1$ iken, *ML*, *WLS* ve *AD* tahmin edicileri birbirine yakın performans göstermişlerdir. Bu tahmin edicileri *LS* tahmin edicisi takip ederken, *CM* tahmin edicisi en kötü performansı göstermiştir. $\beta = 1,5$, $\beta = 2$, $\beta = 3$ ve $\beta = 4$ iken, tüm tahmin edicilerin performanslarının birbirine yakın olduğu görülmüştür. β parametresi için, şekil parametresi olan β 'nın tüm değerlerinde, düşük örnek çaplarında *ML*, *AD*, ve *WLS* tahmin edicileri, *LS* ve *CM* tahmin edicilerine göre daha iyi performans sergilemişlerdir. Örnek çapı arttıkça tüm tahmin edicilerin performanslarının birbirine yakın olduğu görülmüştür. *Def* kriterine göre, genel olarak *ML*, *AD* ve *WLS* tahmin edicileri daha düşük *Def* değerine sahip olduğundan dolayı daha iyi performans göstermişlerdir. Bu tahmin edicileri *LS* tahmin edicisi takip ederken *CM* tahmin edicisi, yüksek *Def* değerine sahip olduğundan dolayı, en kötü performansa sahiptir.

Çizelge 3.3 e bakıldığında, *MSE* kriterine göre, μ parametresi için, $\beta = 0,5$ iken, tüm tahmin ediciler birbirine yakın performans göstermişlerdir. $\beta = 1$ ve $\beta = 1,5$ iken *AD* ve *WLS* tahmin edicileri en iyi performansı gösterirken, bunları *LS* ve *CM* tahmin edicileri takip ederken, en kötü performansı *ML* tahmin edicisi göstermiştir. $\beta = 2$, $\beta = 3$ ve $\beta = 4$ iken ise, *ML* tahmin edicisi en iyi performansı sergilemiştir. Bunları sırasıyla *AD* ve *WLS* tahmin edicileri takip ederken, en kötü performansları *CM* ve *LS* tahmin edicileri göstermiştir. σ parametresi için, $\beta = 1$ ve $\beta = 1,5$ iken, *ML* tahmin edicisi dışındaki tüm tahmin ediciler iyi performans gösterirken, diğer tüm durumlarda *ML* tahmin edicisi en iyi performansı

göstermiştir. *Def* kriterine göre bakıldığında ise *MSE* kriterine benzer sonuçlar olduğu görülmüştür.

Çizelge 3.4 e bakıldığında, *MSE* kriterine göre, μ parametresi için, $\beta = 0,5$ iken, *WLS* tahmin edicisi en iyi performansı gösterirken, β 'nın diğer tüm durumlarında *ML* tahmin edicisi en iyi performansı sergilemiştir. *ML* tahmin edicisini sırasıyla *AD*, *WLS* ve *CM* izlerken en kötü performansı *LS* tahmin edicisi göstermiştir. σ parametresi için ise, β 'nın farklı değerleri ve incelenen tüm örnek çaplarında, *ML* tahmin edicisi en iyi performansı göstermiştir. *ML* tahmin edicisini sırasıyla *AD*, *WLS* ve *CM* tahmin edicileri takip ederken en kötü performansı *LS* tahmin edicisi göstermiştir. *Def* kriterine göre bakıldığında ise *MSE* kriterine benzer sonuçlar olduğu görülmüştür.

Çizelge 3.5 e bakıldığında, *MSE* kriterine göre, μ parametresi için, $\beta = 0,5$ iken, tüm tahmin ediciler birbirine yakın performans göstermişlerdir. $\beta = 1$ ve $\beta = 1,5$ iken, *AD* ve *WLS* tahmin edicileri en iyi performansı gösterirken, bunları *LS* ve *CM* tahmin edicileri takip ederken, en kötü performansı *ML* tahmin edicisi göstermiştir. $\beta = 2$, $\beta = 3$ ve $\beta = 4$ iken ise, *ML*, *AD* ve *WLS* tahmin edicileri birbirine yakın ve iyi performans gösterirlerken, en kötü performansları *CM* ve *LS* tahmin edicileri göstermiştir. σ parametresi için, $\beta = 0,5$ iken, *ML* tahmin edicisi en iyi performansı göstermiştir. $\beta = 1$ ve $\beta = 1,5$ iken, *WLS* ve *AD* tahmin edicileri en iyi performansı gösterirlerken bunları *CM* ve *LS* tahmin edicileri takip etmiştir. En kötü performansı ise *ML* tahmin edicisi göstermiştir. $\beta = 2$, $\beta = 3$ ve $\beta = 4$ iken ise, *ML* tahmin edicisi en iyi performansı sergilemiştir. β parametresi için ise μ parametresine yapılan yorumlarla aynı sonuçlar elde edilmiştir. *Def* kriterine göre ise, *MSE* kriterine benzer sonuçlar olduğu görülmüştür.

Çizelge 3.6 ya bakıldığında ise, *MSE* ve *Def* kriterlerine göre, μ , σ ve β parametreleri için, β 'nın farklı değerleri ve incelenen tüm örnek çaplarında, *ML* tahmin edicisi en iyi performansı göstermiştir. *ML* tahmin edicisini sırasıyla *AD*, *WLS* ve *LS* izlerken, en kötü performansı ise *CM* tahmin edicisi göstermiştir.

4. BASİT LİNEER REGRESYON MODELİ İÇİN PARAMETRE TAHMİNİ VE HİPOTEZ TESTİ

Regresyon analizi, değişkenler arasındaki ilişkiyi modellemek ve incelemek için kullanılan istatistiksel bir tekniktir. Bu bölümde, y bağımlı (yanıt) değişkeni ile doğrusal ilişkiye sahip x bağımsız (açıklayıcı) değişkeninin bulunduğu basit lineer regresyon modeli ele alınacaktır. Bu basit lineer regresyon modeli aşağıda verildiği gibidir:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.1)$$

burada β_0 kesim noktası ve β_1 eğim olmak üzere bilinmeyen parametreler ve ε bağımsız ve aynı dağılıma sahip rasgele hata bileşeni olarak tanımlanır. Bu da bir hatanın değerinin başka bir hatanın değerine bağlı olmaması anlamına gelmektedir. x değişkeni kontrol edilebilir bir bağımsız değişken olarak, y bağımlı değişkeni de bir rasgele değişken olarak ele alınır. β_0 ve β_1 parametreleri de regresyon katsayıları olarak adlandırılır (Montgomery, Peck ve Vining, 2012).

Eş. 4.1 de verilen lineer regresyon modelinde bilinmeyen parametreleri tahmin etmek için genellikle hataların dağılımının ortalaması 0 varyansı σ^2 olan normal dağılıma sahip oldukları varsayılır. Bilinmeyen β_0 ve β_1 parametrelerinin tahmini için *ML* yöntemi kullanılır. Hataların dağılımının normal olduğu varsayımı altında *ML* yöntemi kullanılarak elde edilen tahminler ile *LS* kullanılarak elde edilen tahminler eşittir (aynıdır). Fakat gerçek hayat problemlerinde genellikle hata terimleri normal dağılıma sahip olmazlar (Mutan ve Şenoğlu, 2009). Bu yüzden hataların dağılımının Eş. 2.22 ve Eş. 2.33 de verilen *DW* ve *DIW* dağılımına sahip olduğu varsayılmıştır. Ayrıca Eş. 4.1 de verilen lineer regresyon modelinin parametre tahmini için *ML* ve *LS* yöntemi tercih edilmiştir.

4.1. İki parametrelili $DW(\sigma, \gamma)$ Dağılımı için Model Parametrelerinin Tahmini

Lineer regresyon modelindeki hataların dağılımının $DW(\sigma, \gamma)$ dağılımına sahip olması durumunda, model parametrelerinin *ML* ve *LS* tahmin edicileri elde edilecektir.

Parametrelerin *ML* tahmini

Basit regresyon modeli için hata terimlerinin $DW(\sigma, \gamma)$ dağılımına sahip olması durumunda olabilirlik fonksiyonu;

$$\begin{aligned}
 L(\beta_0, \beta_1, \sigma, \gamma | y) &= \prod_{i=1}^n \left(\frac{e}{e-1} \right)^n \gamma^n \sigma^{-\gamma n} \left(\prod_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) \right)^{\gamma-1} \\
 &\times \exp \left(- \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^\gamma \right) \\
 &\times \exp \left(\sum_{i=1}^n \exp \left(- \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^\gamma \right) \right)
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

şeklindedir. Olabilirlik fonksiyonunun logaritması alınarak elde edilen log-olabilirlik fonksiyonu ise;

$$\begin{aligned}
 \ln L &= -n \ln \left(\frac{e}{e-1} \right) + n \ln(\gamma) - \gamma n \ln(\sigma) + (\gamma-1) \sum_{i=1}^n \ln(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) \\
 &- \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^\gamma \right) + \sum_{i=1}^n \exp \left(- \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^\gamma \right)
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

şeklinde elde edilir. Model parametrelerinin ML tahmin edicileri, log-olabilirlik fonksiyonunun, β_0, β_1, γ ve σ 'ya göre türevlerinin alınıp, sıfıra eşitlenmesiyle elde edilen olabilirlik denklemlerinin çözümüdür. Buna göre olabilirlik denklemleri;

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \ln L}{\partial \beta_0} &= (1-\gamma) \sum_{i=1}^n \frac{1}{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i} + \gamma \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{\gamma-1} \\
 &+ \gamma \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{\gamma-1} \exp \left(- \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^\gamma \right) = 0
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \ln L}{\partial \beta_1} &= (1-\gamma) \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i} + \gamma \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{\gamma-1} \\
 &+ \gamma \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{\gamma-1} \exp \left(- \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^\gamma \right) = 0
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = & + - \frac{\gamma}{\sigma} \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{\gamma} + \frac{\gamma}{\sigma} \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{\gamma} \\ & \times \exp \left(- \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{\gamma} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \gamma} = & \frac{n}{\gamma} - n \ln(\sigma) + \sum_{i=1}^n \ln(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{\gamma} \ln \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right) \\ & - \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{\gamma} \ln \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right) \exp \left(\left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{\gamma} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

şeklinde elde edilir.

β_0, β_1, σ ve γ parametrelerinin *ML* tahmin edicileri olan $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\sigma}$ ve $\hat{\gamma}$ 'yı elde etmek için Eş. 4.4-4.7 de elde edilen olabilirlik denklemleri analitik olarak çözülemeyeceğinden Newton-Rapson metodu kullanılacaktır.

Parametrelerin Düzeltilmiş *LS* Tahmini

β_0 ve β_1 parametrelerinin düzeltilmiş *LS* tahmini aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} - E(\varepsilon) \quad (4.8)$$

burada $E(\varepsilon) = E(z) \hat{\sigma}$ 'dır. Sırasıyla $E(z)$ ve $\hat{\sigma}$ aşağıda verildiği gibidir:

$$E(z) = \frac{e}{e-1} \Gamma \left(\frac{1}{\beta} + 1 \right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1}{(1+m)^{(1/\beta)+1}}, \quad (4.9)$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{S^2}{\frac{e}{e-1} \left(\Gamma \left(\frac{2}{\beta} + 1 \right) T_2 - \frac{e}{e-1} \Gamma^2 \left(\frac{1}{\beta} + 1 \right) T_1^2 \right)}}. \quad (4.10)$$

σ^2 'nin tahmini aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2}$$

burada $\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$ ve σ^2 'nin tahmin edicisi;

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)^2}{n-2} \quad (4.11)$$

olarak elde edilir.

4.2. İki parametrelili $DIW(\sigma, \gamma)$ Dağılımı için Model Parametrelerinin Tahmini

Lineer regresyon modelindeki hataların dağılımının $DIW(\sigma, \gamma)$ dağılımına sahip olması durumunda, model parametrelerinin ML ve LS tahmin edicileri elde edilecektir.

Parametrelerin ML tahmini

Basit regresyon modeli için hata terimlerinin $DIW(\sigma, \gamma)$ dağılımına sahip olması durumunda olabilirlik fonksiyonu;

$$\begin{aligned}
L(\beta_0, \beta_1, \sigma, \gamma | y) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{e-1} \frac{\gamma}{\sigma} \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{-(\gamma+1)} \exp \left(- \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{-\gamma} \right) \\
&\quad \times \exp \left(\exp \left(- \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{-\gamma} \right) \right) \\
&= \left(\frac{\gamma \sigma^\gamma}{e-1} \right)^n \prod_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^{-(\gamma+1)} \exp \left(- \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{-\gamma} \right) \\
&\quad \times \exp \left(\exp \left(- \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{-\gamma} \right) \right)
\end{aligned} \tag{4.12}$$

şeklindedir. Olabilirlik fonksiyonunun logaritması alınarak elde edilen log-olabilirlik fonksiyonu ise;

$$\begin{aligned}
\ln L &= -n \ln(e-1) + n \ln(\gamma) + n\gamma \ln(\sigma) - (\gamma+1) \sum_{i=1}^n \ln(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{-\gamma} \right) + \sum_{i=1}^n \exp \left(- \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{-\gamma} \right)
\end{aligned} \tag{4.13}$$

şeklinde elde edilir. Model parametrelerinin *ML* tahmin edicileri, log-olabilirlik fonksiyonunun, β_0, β_1, γ ve σ 'ya göre türevlerinin alınıp, sıfıra eşitlenmesiyle elde edilen olabilirlik denklemlerinin çözümüdür. Buna göre olabilirlik denklemleri;

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L}{\partial \beta_0} &= (\gamma+1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i} - \gamma \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{-\gamma-1} \\
&\quad - \gamma \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{-\gamma-1} \exp \left(- \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{-\gamma} \right) = 0
\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L}{\partial \beta_1} &= (\gamma+1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i} - \gamma \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{-\gamma-1} \\
&\quad - \gamma \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{-\gamma-1} \exp \left(- \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{-\gamma} \right) = 0
\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = & \frac{n\gamma}{\sigma} - \frac{\gamma}{\sigma} \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{-\gamma} - \frac{\gamma}{\sigma} \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{-\gamma} \\ & \times \exp \left(- \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{-\gamma} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \gamma} = & \frac{n}{\gamma} + n \ln(\sigma) - \sum_{i=1}^n \ln(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{-\gamma} \ln \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right) \\ & + \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{-\gamma} \ln \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right) \exp \left(\left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{-\gamma} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

şeklinde elde edilir.

β_0, β_1, σ ve γ parametrelerinin *ML* tahmin edicileri olan $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\sigma}$ ve $\hat{\gamma}$ 'yı elde etmek için Eş. 4.14-4.17 de elde edilen olabilirlik denklemleri analitik olarak çözülemeyeceğinden Newton-Rapson metodu kullanılacaktır.

Çizelge 4.1. $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\sigma}$ tahmin edicileri için ortalama (*ort.*) ve *MSE* değerleri; $\beta_0 = 0, \beta_1 = 1$
 $(\varepsilon \sim DW(\sigma, \gamma))$.

γ	n		$Ort(\hat{\beta}_0)$	$Ort(\hat{\beta}_1)$	$Ort(\hat{\sigma})$	$MSE(\hat{\beta}_0)$	$MSE(\hat{\beta}_1)$	$MSE(\hat{\sigma})$	Def
0,5	50	<i>ML</i>	0,003	1,004	1,002	0,002	0,002	0,001	0,005
		<i>LS</i>	0,223	0,996	0,919	0,458	0,593	0,159	1,211
	75	<i>ML</i>	0,002	1,002	1,001	0,001	0,001	0,001	0,003
		<i>LS</i>	0,160	0,991	0,947	0,401	0,410	0,126	0,938
	100	<i>ML</i>	0,001	0,999	1,000	0,001	0,001	0,000	0,002
		<i>LS</i>	0,139	1,002	0,950	0,317	0,296	0,098	0,712
	200	<i>ML</i>	0,001	1,000	1,000	0,000	0,001	0,000	0,001
		<i>LS</i>	0,085	0,998	0,968	0,195	0,146	0,055	0,397
	300	<i>ML</i>	0,000	1,000	1,000	0,000	0,001	0,000	0,001
		<i>LS</i>	0,055	1,003	0,981	0,156	0,098	0,041	0,295
	500	<i>ML</i>	0,000	1,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000
		<i>LS</i>	0,029	1,002	0,991	0,106	0,057	0,026	0,190
1	50	<i>ML</i>	0,813	0,992	0,739	0,673	0,009	0,078	0,760
		<i>LS</i>	0,018	0,998	0,988	0,026	0,027	0,029	0,082
	75	<i>ML</i>	0,799	0,999	0,731	0,648	0,006	0,079	0,733
		<i>LS</i>	0,010	1,001	0,991	0,017	0,016	0,019	0,053
	100	<i>ML</i>	0,801	1,009	0,734	0,646	0,004	0,073	0,723
		<i>LS</i>	0,011	1,001	0,992	0,013	0,012	0,015	0,040
	200	<i>ML</i>	0,805	0,993	0,737	0,650	0,002	0,070	0,722
		<i>LS</i>	0,006	1,001	0,995	0,006	0,006	0,007	0,019
	300	<i>ML</i>	0,784	0,999	0,738	0,617	0,000	0,070	0,687
		<i>LS</i>	0,002	0,999	0,998	0,004	0,004	0,005	0,013
	500	<i>ML</i>	0,782	0,994	0,724	0,613	0,000	0,076	0,689
		<i>LS</i>	0,001	1,000	0,998	0,002	0,002	0,003	0,007
1,5	50	<i>ML</i>	0,060	0,991	0,957	0,007	0,005	0,011	0,023
		<i>LS</i>	0,008	0,999	0,992	0,013	0,009	0,014	0,036
	75	<i>ML</i>	0,037	0,998	0,967	0,003	0,003	0,007	0,013
		<i>LS</i>	0,007	0,999	0,994	0,008	0,006	0,009	0,023
	100	<i>ML</i>	0,033	1,003	0,966	0,002	0,002	0,015	0,009
		<i>LS</i>	0,003	1,000	0,996	0,006	0,004	0,007	0,017
	200	<i>ML</i>	0,026	0,999	0,983	0,001	0,001	0,002	0,004
		<i>LS</i>	0,001	0,999	0,997	0,003	0,002	0,003	0,008
	300	<i>ML</i>	0,018	0,999	0,989	0,001	0,000	0,001	0,002
		<i>LS</i>	0,001	1,000	0,998	0,002	0,001	0,002	0,005
	500	<i>ML</i>	0,010	1,001	0,998	0,000	0,000	0,001	0,001
		<i>LS</i>	0,000	0,999	0,999	0,001	0,000	0,001	0,002

Çizelge 4.1. (devam) $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\sigma}$ tahmin edicileri için ortalama (ort.) ve MSE değerleri;
 $\beta_0 = 0, \beta_1 = 1$ ($\varepsilon \sim DW(\sigma, \gamma)$).

γ	n		$Ort(\hat{\beta}_0)$	$Ort(\hat{\beta}_1)$	$Ort(\hat{\sigma})$	$MSE(\hat{\beta}_0)$	$MSE(\hat{\beta}_1)$	$MSE(\hat{\sigma})$	Def
2	50	ML	0,054	0,996	0,958	0,011	0,003	0,008	0,022
		LS	0,006	0,999	0,993	0,011	0,004	0,010	0,025
	75	ML	0,024	1,003	0,979	0,005	0,002	0,005	0,012
		LS	0,003	0,999	0,995	0,007	0,003	0,006	0,016
	100	ML	0,026	1,001	0,982	0,003	0,001	0,003	0,007
		LS	0,002	0,999	0,996	0,005	0,002	0,005	0,012
	200	ML	0,010	0,998	0,986	0,001	0,001	0,001	0,003
		LS	0,001	1,000	0,998	0,002	0,001	0,002	0,005
	300	ML	0,014	1,009	0,992	0,001	0,001	0,000	0,002
		LS	0,001	1,000	0,998	0,001	0,000	0,001	0,002
	500	ML	0,010	0,999	0,988	0,001	0,000	0,000	0,001
		LS	0,000	1,000	0,999	0,001	0,000	0,001	0,002
3	50	ML	0,025	0,995	0,973	0,010	0,002	0,009	0,021
		LS	0,007	1,000	0,994	0,011	0,002	0,009	0,022
	75	ML	0,024	0,992	0,977	0,007	0,001	0,006	0,014
		LS	0,005	1,000	0,995	0,007	0,001	0,006	0,014
	100	ML	0,023	1,002	0,974	0,005	0,001	0,004	0,010
		LS	0,002	1,000	0,998	0,005	0,001	0,004	0,010
	200	ML	0,010	0,995	1,001	0,002	0,000	0,001	0,003
		LS	0,001	1,000	0,998	0,002	0,000	0,002	0,004
	300	ML	0,007	1,002	0,998	0,001	0,000	0,001	0,002
		LS	0,000	1,000	0,999	0,001	0,000	0,001	0,002
	500	ML	-0,004	0,997	1,003	0,000	0,000	0,001	0,001
		LS	0,000	1,000	0,999	0,001	0,000	0,000	0,001
4	50	ML	0,034	1,003	0,968	0,012	0,001	0,010	0,023
		LS	0,006	1,000	0,993	0,011	0,001	0,009	0,020
	75	ML	0,030	1,002	0,969	0,008	0,001	0,007	0,016
		LS	0,004	0,999	0,996	0,007	0,001	0,006	0,014
	100	ML	0,024	0,999	0,981	0,006	0,000	0,005	0,011
		LS	0,002	1,000	0,997	0,005	0,000	0,004	0,009
	200	ML	0,003	1,001	0,996	0,003	0,000	0,002	0,005
		LS	0,001	0,999	0,998	0,002	0,000	0,002	0,004
	300	ML	0,001	0,999	1,000	0,002	0,000	0,001	0,003
		LS	0,000	0,999	0,999	0,001	0,000	0,001	0,002
	500	ML	0,001	1,003	0,991	0,000	0,000	0,000	0,001
		LS	0,000	1,000	0,999	0,001	0,000	0,000	0,001

Çizelge 4.2. $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\sigma}$ tahmin edicileri için ortalama (*ort.*) ve *MSE* değerleri; $\beta_0 = 0, \beta_1 = 1$
 $(\varepsilon \sim DIW(\sigma, \gamma))$.

γ	n		$Ort(\hat{\beta}_0)$	$Ort(\hat{\beta}_1)$	$Ort(\hat{\sigma})$	$MSE(\hat{\beta}_0)$	$MSE(\hat{\beta}_1)$	$MSE(\hat{\sigma})$	<i>Def</i>
0,5	50	<i>ML</i>	0,061	1,003	0,915	0,007	0,011	0,113	0,131
		<i>LS</i>	-	-	-	-	-	-	-
	75	<i>ML</i>	0,040	1,015	0,981	0,003	0,007	0,090	0,100
		<i>LS</i>	-	-	-	-	-	-	-
	100	<i>ML</i>	0,010	1,001	0,965	0,001	0,001	0,018	0,020
		<i>LS</i>	-	-	-	-	-	-	-
	200	<i>ML</i>	0,017	1,005	0,984	0,000	0,000	0,020	0,020
		<i>LS</i>	-	-	-	-	-	-	-
	300	<i>ML</i>	0,010	1,000	0,973	0,000	0,000	0,018	0,018
		<i>LS</i>	-	-	-	-	-	-	-
1	50	<i>ML</i>	0,009	1,003	0,965	0,000	0,000	0,019	0,019
		<i>LS</i>	-	-	-	-	-	-	-
	75	<i>ML</i>	0,060	1,007	0,940	0,061	0,106	0,055	0,222
		<i>LS</i>	-	-	-	-	-	-	-
	100	<i>ML</i>	0,057	1,004	0,955	0,050	0,103	0,051	0,204
		<i>LS</i>	-	-	-	-	-	-	-
	200	<i>ML</i>	0,040	1,005	0,966	0,039	0,065	0,028	0,132
		<i>LS</i>	-	-	-	-	-	-	-
	300	<i>ML</i>	0,003	0,997	0,978	0,003	0,010	0,012	0,025
		<i>LS</i>	-	-	-	-	-	-	-
1,5	50	<i>ML</i>	0,014	1,002	0,980	0,003	0,000	0,012	0,015
		<i>LS</i>	-	-	-	-	-	-	-
	75	<i>ML</i>	0,010	1,000	0,990	0,002	0,000	0,007	0,009
		<i>LS</i>	-	-	-	-	-	-	-
	100	<i>ML</i>	0,052	0,993	0,985	0,015	0,009	0,034	0,058
		<i>LS</i>	-	-	-	-	-	-	-
	200	<i>ML</i>	0,045	1,000	0,962	0,049	0,003	0,076	0,128
		<i>LS</i>	-	-	-	-	-	-	-
	300	<i>ML</i>	0,034	1,000	0,958	0,030	0,002	0,049	0,079
		<i>LS</i>	-	-	-	-	-	-	-
	500	<i>ML</i>	0,022	0,998	0,980	0,012	0,001	0,022	0,034
		<i>LS</i>	-	-	-	-	-	-	-
	300	<i>ML</i>	0,015	1,002	0,984	0,006	0,000	0,011	0,017
		<i>LS</i>	-	-	-	-	-	-	-
	500	<i>ML</i>	0,006	1,000	0,995	0,005	0,000	0,009	0,014
		<i>LS</i>	-	-	-	-	-	-	-

Çizelge 4.2. (devam) $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\sigma}$ tahmin edicileri için ortalama (ort.) ve MSE değerleri;
 $\beta_0 = 0, \beta_1 = 1$ ($\varepsilon \sim DIW(\sigma, \gamma)$).

γ	n		$Ort(\hat{\beta}_0)$	$Ort(\hat{\beta}_1)$	$Ort(\hat{\sigma})$	$MSE(\hat{\beta}_0)$	$MSE(\hat{\beta}_1)$	$MSE(\hat{\sigma})$	Def
2	50	ML	0,066	0,990	0,951	0,019	0,005	0,025	0,049
		LS	-	-	-	-	-	-	-
	75	ML	0,015	0,997	0,999	0,009	0,002	0,014	0,025
		LS	-	-	-	-	-	-	-
	100	ML	0,010	0,998	1,004	0,008	0,001	0,012	0,021
		LS	-	-	-	-	-	-	-
	200	ML	0,009	1,000	0,992	0,003	0,001	0,007	0,011
		LS	-	-	-	-	-	-	-
	300	ML	0,003	0,999	0,998	0,003	0,000	0,003	0,005
		LS	-	-	-	-	-	-	-
3	50	ML	0,017	1,000	0,980	0,001	0,000	0,002	0,003
		LS	-	-	-	-	-	-	-
	75	ML	0,049	1,011	0,953	0,016	0,005	0,020	0,041
		LS	0,180	0,998	0,883	0,586	0,025	0,328	0,939
	100	ML	0,024	0,998	0,985	0,010	0,001	0,011	0,022
		LS	0,186	0,999	0,887	0,272	0,015	0,151	0,439
	200	ML	0,027	0,996	0,975	0,007	0,001	0,009	0,017
		LS	0,156	0,999	0,898	0,298	0,011	0,162	0,472
	300	ML	-0,002	0,996	1,006	0,004	0,000	0,005	0,009
		LS	0,115	1,000	0,924	0,247	0,006	0,126	0,379
4	50	ML	0,001	0,999	1,008	0,002	0,000	0,003	0,108
		LS	0,080	0,999	0,948	0,210	0,004	0,101	0,315
	100	ML	0,003	1,002	0,985	0,002	0,000	0,002	0,004
		LS	0,074	1,000	0,951	0,177	0,002	0,085	0,265
	200	ML	0,057	0,998	0,948	0,019	0,001	0,021	0,041
		LS	0,077	0,999	0,943	0,202	0,007	0,140	0,350
	300	ML	0,026	1,001	0,982	0,009	0,001	0,010	0,020
		LS	0,069	1,000	0,948	0,113	0,004	0,079	0,197
	500	ML	0,001	1,002	0,999	0,007	0,001	0,007	0,015
		LS	0,047	1,000	0,964	0,102	0,001	0,062	0,165
5	50	ML	-0,004	1,000	1,006	0,002	0,000	0,003	0,005
		LS	0,034	1,000	0,974	0,082	0,001	0,054	0,138
	100	ML	0,005	1,003	0,997	0,002	0,000	0,003	0,005
		LS	0,029	0,999	0,977	0,056	0,001	0,036	0,094
	200	ML	0,006	0,999	0,996	0,001	0,000	0,001	0,002
		LS	0,017	1,000	0,986	0,051	0,000	0,032	0,085

Çizelge 4.1 e bakıldığında, MSE kriterine göre, β_0 , β_1 , ve σ parametreleri için, $\beta = 0,5$ ve $\beta = 1$ iken, tüm örnek çaplarında, ML tahmin edicisi LS tahmin edicisinden daha iyi performans göstermiştir. $\beta = 1,5$, $\beta = 2$, $\beta = 3$ ve $\beta = 4$ iken ise, düşük örnek çaplarında ML tahmin edicisi daha iyi performans sergilerken, örnek çapı arttıkça LS tahmin edicisini performansının ML tahmin edicisine yaklaştığı ve bazı durumlarda aynı etkinlik değerlerine sahip oldukları görülmüştür. Def kriterine göre ise, β 'nın farklı değerleri ve incelenen tüm örnek çaplarında, ML tahmin edicisinin daha düşük Def değerine sahip olduğundan dolayı LS tahmin edicisinden daha iyi performans göstermiştir.

Çizelge 4.2 ye bakıldığında, hem MSE hem de Def kriterlerine göre, β_0 , β_1 , ve σ parametreleri için, β 'nın farklı değerleri ve incelenen tüm örnek çaplarında, ML tahmin edicisi LS tahmin edicisinden daha iyi performans göstermiştir.

4.3. Hipotez Testi

Bu bölümde, lineer regresyon modelinde, hata terimlerinin dağılımı $DW(\sigma, \gamma)$ ve $DIW(\sigma, \gamma)$ dağılımı alınarak, ilgili parametreler için, hipotez test prosedürleri geliştirilmiştir.

4.3.1. Lineer resgresyon modelinde hata terimlerinin dağılımının $DW(\sigma, \gamma)$ olması durumunda β_0 ve β_1 parametreleri için hipotez testi

Yokluk hipotezleri olan $H_{01} : \beta_0 = 0$ $H_{02} : \beta_1 = 1$ 'i karşıt hipotezler olan $H_{11} : \beta_0 \neq 0$ ve $H_{22} : \beta_1 \neq 1$ 'e karşı test etmek için önerilen test istatistikleri sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$T_{\beta_0, ML} = \frac{\hat{\beta}_{0, ML} - \beta_0}{\sqrt{Var(\hat{\beta}_{0, ML})}} \square N(0,1) \quad \text{ve} \quad T_{\beta_1, ML} = \frac{\hat{\beta}_{1, ML} - \beta_1}{\sqrt{Var(\hat{\beta}_{1, ML})}} \square N(0,1).$$

$T_{\beta_0, ML}$ ve $T_{\beta_1, ML}$ test istatistikleri ortalaması 0, varyansı 1 olan standart normal dağılıma sahiptir. Formüllerdeki $\sqrt{Var(\hat{\beta}_0)}$ ve $\sqrt{Var(\hat{\beta}_1)}$ değerlerini bulmak için, hata terimlerinin

dağılımı olan $DW(\sigma, \gamma)$ dağılımının Fisher Bilgi Matrisinin elde edilmesi gerekmektedir.

Bunun için bir önceki bölümde, $DW(\sigma, \gamma)$ dağılımının Eş. 4.2 de olabilirlik fonksiyonu,

Eş. 4.3 de log-olabilirlik fonksiyonu ve Eş. 4.4-4.7 de olabilirlik denklemleri elde edilmişti.

Olabilirlik denklemlerinin ilgili parametrelere göre 2. dereceden türevleri:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_0^2} = & -(\gamma-1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2} - \frac{\gamma(\gamma-1)}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{\gamma-2} \\ & + \frac{\gamma(\gamma-1)}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{\gamma-2} \exp \left(- \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^\gamma \right) \\ & - \frac{\gamma^2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{2\gamma-2} \exp \left(- \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^\gamma \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_1^2} = & -(\gamma-1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2} - \frac{\gamma(\gamma-1)}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{\gamma-2} \\ & + \frac{\gamma(\gamma-1)}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{\gamma-2} \exp \left(- \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^\gamma \right) \\ & - \frac{\gamma^2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{2\gamma-2} \exp \left(- \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^\gamma \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma^2} = & \frac{-n(1-2\gamma)}{\sigma^2} - \gamma(\gamma+1) \sigma^{-(\gamma+2)} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^\gamma \\ & + \gamma(\gamma+1) \sigma^{-(\gamma+2)} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^\gamma \exp \left(- \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^\gamma \right) \\ & - \gamma^2 \sigma^{-(2\gamma+2)} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^{2\gamma} \exp \left(- \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^\gamma \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_0 \partial \beta_1} = & -(\gamma-1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2} - \frac{\gamma(\gamma-1)}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{\gamma-2} \\ & + \frac{\gamma(\gamma-1)}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{\gamma-2} \exp \left(- \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^\gamma \right) \\ & - \frac{\gamma^2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{2\gamma-2} \exp \left(- \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^\gamma \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_0 \partial \sigma} &= -\gamma^2 \sigma^{-(\gamma+1)} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^{\gamma-1} \\ &\quad + \gamma^2 \sigma^{-(\gamma+1)} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^{\gamma-1} \exp\left(-\left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma}\right)^\gamma\right) \\ &\quad - \gamma^2 \sigma^{-(2\gamma+1)} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^{2\gamma-1} \exp\left(-\left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma}\right)^\gamma\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_1 \partial \sigma} &= -\gamma^2 \sigma^{-(\gamma+1)} \sum_{i=1}^n x_i (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^{\gamma-1} \\ &\quad + \gamma^2 \sigma^{-(\gamma+1)} \sum_{i=1}^n x_i (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^{\gamma-1} \exp\left(-\left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma}\right)^\gamma\right) \\ &\quad - \gamma^2 \sigma^{-(2\gamma+1)} \sum_{i=1}^n x_i (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^{2\gamma-1} \exp\left(-\left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma}\right)^\gamma\right)\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

$DW(\sigma, \gamma)$ dağılımının Fisher bilgi matrisi:

$$I = \begin{bmatrix} -E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_0^2}\right) & -E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_0 \partial \beta_1}\right) & -E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_0 \partial \sigma}\right) \\ -E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_0 \partial \beta_1}\right) & -E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_1^2}\right) & -E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_1 \partial \sigma}\right) \\ -E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_0 \partial \sigma}\right) & -E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_1 \partial \sigma}\right) & -E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma^2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}-E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_0^2}\right) &= E \left(\begin{aligned} & -(\gamma-1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2} - \frac{\gamma(\gamma-1)}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma}\right)^{\gamma-2} \\ & + \frac{\gamma(\gamma-1)}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma}\right)^{\gamma-2} \exp\left(-\left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma}\right)^\gamma\right) \\ & - \frac{\gamma^2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma}\right)^{2\gamma-2} \exp\left(-\left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma}\right)^\gamma\right) \end{aligned} \right) \end{aligned}$$

$DW(\sigma, \beta)$ dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verildiği gibidir:

$$f(x) = \frac{1}{e-1} \frac{\gamma}{\sigma^\gamma} x^{\gamma-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\gamma\right) \exp\left(1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\gamma\right)\right).$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_0^2} = & -(\gamma-1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2} - \frac{\gamma(\gamma-1)}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma}\right)^{\gamma-2} \\ & + \frac{\gamma(\gamma-1)}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma}\right)^{\gamma-2} \exp\left(-\left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma}\right)^\gamma\right) \\ & - \frac{\gamma^2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma}\right)^{2\gamma-2} \exp\left(-\left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma}\right)^\gamma\right) \end{aligned}$$

$(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = t_i$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_0^2} = & -(\gamma-1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{(t_i)^2} - \frac{\gamma(\gamma-1)}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\sigma}\right)^{\gamma-2} + \frac{\gamma(\gamma-1)}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\sigma}\right)^{\gamma-2} \exp\left(-\left(\frac{t_i}{\sigma}\right)^\gamma\right) \\ & - \frac{\gamma^2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\sigma}\right)^{2\gamma-2} \exp\left(-\left(\frac{t_i}{\sigma}\right)^\gamma\right) \end{aligned}$$

1. parçanın beklenen değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$E\left(\frac{1}{t^2}\right) = \int_0^\infty \frac{1}{t^2} \frac{1}{e-1} \frac{\gamma}{\sigma^\gamma} t^{\gamma-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right) \exp\left(1 - \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right)\right) dt$$

$\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma = z$ dönüşümü vasıtasıyla, $t = \sigma \sqrt[\gamma]{z}$ ve $\partial t = \frac{\sigma^\gamma \partial z}{\gamma t^{\gamma-1}}$ değerleri yerine yazılarak eşitlik,

$$E\left(\frac{1}{t^2}\right) = \frac{1}{(e-1)\sigma^2} \int_0^\infty z^{-2/\gamma} e^{-z} e^{1-e^{-z}} dz$$

şeklinde elde edilir. Daha sonra $e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}$ seri açılımı vasıtasıyla eşitlik:

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{t^2}\right) &= \frac{e}{(e-1)\sigma^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \int_0^{\infty} z^{-2/\gamma} e^{-z} e^{-zm} dy \\ &= \frac{e}{(e-1)\sigma^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \int_0^{\infty} z^{-2/\gamma} e^{-z(1+m)} dy \end{aligned}$$

$z(1+m) = y$ dönüşümü vasıtasıyla, $z = y/(1+m)$ ve $\partial z = \partial y/(1+m)$ değerleri yerine yazılarak eşitlik:

$$E\left(\frac{1}{t^2}\right) = \frac{e}{(e-1)\sigma^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1}{(1+m)^{1-(2/\gamma)}} \int_0^{\infty} y^{-2/\gamma} e^{-y} dy$$

şeklinde elde edilir. Son olarak $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$ Gamma fonksiyonu yardımıyla $E\left(\frac{1}{t^2}\right)$

aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E\left(\frac{1}{t^2}\right) = \frac{e}{(e-1)\sigma^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1}{(1+m)^{1-(2/\gamma)}} \Gamma\left(1 - \frac{2}{\gamma}\right).$$

II. parçanın beklenen değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$E(t^{\gamma-2}) = \int_0^{\infty} t^{\gamma-2} \frac{1}{e-1} \frac{\gamma}{\sigma^{\gamma}} t^{\gamma-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{\gamma}\right) \exp\left(1 - \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{\gamma}\right)\right) \partial t$$

$\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{\gamma} = z$ dönüşümü vasıtasıyla, $t = \sigma \sqrt[\gamma]{z}$ ve $\partial t = \frac{\sigma^{\gamma} \partial z}{\gamma t^{\gamma-1}}$ değerleri yerine yazılarak eşitlik,

$$E(t^{\gamma-2}) = \frac{\sigma^{\gamma-2}}{(e-1)} \int_0^{\infty} z^{(\gamma-2)/\gamma} e^{-z} e^{1-e^{-z}} dz$$

şeklinde elde edilir. Daha sonra $e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}$ seri açılımı vasıtasıyla eşitlik:

$$\begin{aligned} E(t^{\gamma-2}) &= \frac{e\sigma^{\gamma-2}}{(e-1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \int_0^{\infty} z^{(\gamma-2)/\gamma} e^{-z} e^{-zm} dy \\ &= \frac{e\sigma^{\gamma-2}}{(e-1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \int_0^{\infty} z^{(\gamma-2)/\gamma} e^{-z(1+m)} dy \end{aligned}$$

$z(1+m) = y$ dönüşümü vasıtasıyla, $z = y/(1+m)$ ve $\partial z = \partial y/(1+m)$ değerleri yerine yazılarak eşitlik:

$$E(t^{\gamma-2}) = \frac{e\sigma^{\gamma-2}}{(e-1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1}{(1+m)^{2-(2/\gamma)}} \int_0^{\infty} y^{1-2/\gamma} e^{-y} dy$$

şeklinde elde edilir. Son olarak $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$ Gamma fonksiyonu yardımıyla $E(t^{\gamma-2})$

aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E(t^{\gamma-2}) = \frac{e\sigma^{\gamma-2}}{(e-1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1}{(1+m)^{2-(2/\gamma)}} \Gamma\left(2 - \frac{2}{\gamma}\right).$$

III. parçanın beklenen değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} E\left(t^{\gamma-2} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{\gamma}\right)\right) &= \int_0^{\infty} t^{\gamma-2} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{\gamma}\right) \frac{1}{e-1} \frac{\gamma}{\sigma^{\gamma}} t^{\gamma-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{\gamma}\right) \\ &\quad \times \exp\left(1 - \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{\gamma}\right)\right) \partial t \end{aligned}$$

$\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{\gamma} = z$ dönüşümü vasıtasıyla, $t = \sigma^{\gamma} \sqrt[\gamma]{z}$ ve $\partial t = \frac{\sigma^{\gamma} \partial z}{\gamma t^{\gamma-1}}$ değerleri yerine yazılarak eşitlik,

$$E\left(t^{\gamma-2} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right)\right) = \frac{\sigma^{\gamma-2}}{(e-1)} \int_0^\infty z^{(\gamma-2)/\gamma} e^{-z} e^{-z} e^{1-e^{-z}} dz$$

şeklinde elde edilir. Daha sonra $e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}$ seri açılımı vasıtasıyla eşitlik:

$$\begin{aligned} E\left(t^{\gamma-2} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right)\right) &= \frac{e\sigma^{\gamma-2}}{(e-1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \int_0^\infty z^{(\gamma-2)/\gamma} e^{-2z} e^{-zm} dy \\ &= \frac{e\sigma^{\gamma-2}}{(e-1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \int_0^\infty z^{(\gamma-2)/\gamma} e^{-z(2+m)} dy \end{aligned}$$

$z(2+m) = y$ dönüşümü vasıtasıyla, $z = y / (2+m)$ ve $\partial z = \partial y / (2+m)$ değerleri yerine yazılarak eşitlik:

$$E\left(t^{\gamma-2} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right)\right) = \frac{e\sigma^{\gamma-2}}{(e-1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1}{(2+m)^{2-(2/\gamma)}} \int_0^\infty y^{1-2/\gamma} e^{-y} dy$$

şeklinde elde edilir. Son olarak $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$ Gamma fonksiyonu yardımıyla

$$E\left(t^{\gamma-2} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right)\right) \text{ aşağıdaki gibi elde edilir:}$$

$$E\left(t^{\gamma-2} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right)\right) = \frac{e\sigma^{\gamma-2}}{(e-1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1}{(2+m)^{2-(2/\gamma)}} \Gamma\left(2 - \frac{2}{\gamma}\right).$$

IV. parçanın beklenen değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$E\left(t^{2\gamma-2} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right)\right) = \int_0^\infty t^{2\gamma-2} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right) \frac{1}{e-1} \frac{\gamma}{\sigma^\gamma} t^{\gamma-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right) \\ \times \exp\left(1 - \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right)\right) dt$$

$\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma = z$ dönüşümü vasıtasıyla, $t = \sigma \sqrt[\gamma]{z}$ ve $\partial t = \frac{\sigma^\gamma \partial z}{\gamma t^{\gamma-1}}$ değerleri yerine yazılarak eşitlik,

$$E\left(t^{2\gamma-2} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right)\right) = \frac{\sigma^{2\gamma-2}}{(e-1)} \int_0^\infty z^{(2\gamma-2)/\gamma} e^{-z} e^{-z} e^{1-e^{-z}} dz$$

şeklinde elde edilir. Daha sonra $e^x = \sum_{m=0}^\infty \frac{x^m}{m!}$ seri açılımı vasıtasıyla eşitlik:

$$E\left(t^{2\gamma-2} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right)\right) = \frac{e\sigma^{2\gamma-2}}{(e-1)} \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{m!} \int_0^\infty z^{(2\gamma-2)/\gamma} e^{-2z} e^{-zm} dy \\ = \frac{e\sigma^{2\gamma-2}}{(e-1)} \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{m!} \int_0^\infty z^{(2\gamma-2)/\gamma} e^{-z(2+m)} dy$$

$z(2+m) = y$ dönüşümü vasıtasıyla, $z = y/(2+m)$ ve $\partial z = \partial y/(2+m)$ değerleri yerine yazılarak eşitlik:

$$E\left(t^{2\gamma-2} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right)\right) = \frac{e\sigma^{2\gamma-2}}{(e-1)} \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1}{(2+m)^{3-(2/\gamma)}} \int_0^\infty y^{1-2/\gamma} e^{-y} dy$$

şeklinde elde edilir. Son olarak $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$ Gamma fonksiyonu yardımıyla

$E\left(t^{2\gamma-2} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right)\right)$ aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E\left(t^{2\gamma-2} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right)\right) = \frac{e\sigma^{2\gamma-2}}{(e-1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1}{(2+m)^{3-(2/\gamma)}} \Gamma\left(3-\frac{2}{\gamma}\right).$$

Sonuç olarak Fisher bilgi matrisinin ilk elemanı olan I_{11} aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} I_{11} = \frac{ne}{\sigma^2(e-1)} & \left[(\gamma-1)\Gamma\left(1-\frac{2}{\gamma}\right) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(1+m)^{(1-2/\gamma)}} \right. \\ & + \gamma(\gamma-1)\Gamma\left(2-\frac{2}{\gamma}\right) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(1+m)^{(2-2/\gamma)}} \\ & - \gamma(\gamma-1)\Gamma\left(2-\frac{2}{\gamma}\right) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(2+m)^{(2-2/\gamma)}} \\ & \left. + \gamma^2\Gamma\left(3-\frac{2}{\gamma}\right) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(2+m)^{(3-2/\gamma)}} \right] \end{aligned}$$

Benzer şekilde I_{12} ve I_{22} aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} I_{12} = \frac{ne}{\sigma^2(e-1)} & \left[(\gamma-1)\Gamma\left(1-\frac{2}{\gamma}\right) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x_i}{m!(1+m)^{(1-2/\gamma)}} \right. \\ & + \gamma(\gamma-1)\Gamma\left(2-\frac{2}{\gamma}\right) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x_i}{m!(1+m)^{(2-2/\gamma)}} \\ & - \gamma(\gamma-1)\Gamma\left(2-\frac{2}{\gamma}\right) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x_i}{m!(2+m)^{(2-2/\gamma)}} \\ & \left. + \gamma^2\Gamma\left(3-\frac{2}{\gamma}\right) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x_i}{m!(2+m)^{(3-2/\gamma)}} \right] \end{aligned}$$

$$I_{22} = \frac{ne}{\sigma^2(e-1)} \left[(\gamma-1)\Gamma\left(1-\frac{2}{\gamma}\right) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x_i^2}{m!(1+m)^{(1-2/\gamma)}} \right. \\
+ \gamma(\gamma-1)\Gamma\left(2-\frac{2}{\gamma}\right) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x_i^2}{m!(1+m)^{(2-2/\gamma)}} \\
- \gamma(\gamma-1)\Gamma\left(2-\frac{2}{\gamma}\right) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x_i^2}{m!(2+m)^{(2-2/\gamma)}} \\
\left. + \gamma^2\Gamma\left(3-\frac{2}{\gamma}\right) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x_i^2}{m!(2+m)^{(3-2/\gamma)}} \right]$$

$$-E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_0 \partial \sigma}\right) = E \left(\begin{array}{l} -\gamma^2 \sigma^{-(\gamma+1)} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^{\gamma-1} \\ + \gamma^2 \sigma^{-(\gamma+1)} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^{\gamma-1} \exp\left(-\left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma}\right)^\gamma\right) \\ - \gamma^2 \sigma^{-(2\gamma+1)} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^{2\gamma-1} \exp\left(-\left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma}\right)^\gamma\right) \end{array} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_0 \partial \sigma} = -\gamma^2 \sigma^{-(\gamma+1)} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^{\gamma-1} \\
+ \gamma^2 \sigma^{-(\gamma+1)} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^{\gamma-1} \exp\left(-\left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma}\right)^\gamma\right) \\
- \gamma^2 \sigma^{-(2\gamma+1)} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^{2\gamma-1} \exp\left(-\left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma}\right)^\gamma\right)$$

$(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = t_i$ olmak üzere

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_0 \partial \sigma} = -\gamma^2 \sigma^{-(\gamma+1)} \sum_{i=1}^n (t_i)^{\gamma-1} + \gamma^2 \sigma^{-(\gamma+1)} \sum_{i=1}^n (t_i)^{\gamma-1} \exp\left(-\left(\frac{t_i}{\sigma}\right)^\gamma\right) \\
- \gamma^2 \sigma^{-(2\gamma+1)} \sum_{i=1}^n (t_i)^{2\gamma-1} \exp\left(-\left(\frac{t_i}{\sigma}\right)^\gamma\right)$$

I. parçanın beklenen değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$E(t^{\gamma-1}) = \int_0^{\infty} t^{\gamma-1} \frac{1}{e-1} \frac{\gamma}{\sigma^{\gamma}} t^{\gamma-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{\gamma}\right) \exp\left(1 - \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{\gamma}\right)\right) dt$$

$\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{\gamma} = z$ dönüşümü vasıtasıyla, $t = \sigma\sqrt[\gamma]{z}$ ve $\partial t = \frac{\sigma^{\gamma} \partial z}{\gamma t^{\gamma-1}}$ değerleri yerine yazılarak eşitlik,

$$E(t^{\gamma-1}) = \frac{\sigma^{\gamma-1}}{(e-1)} \int_0^{\infty} z^{(\gamma-1)/\gamma} e^{-z} e^{1-e^{-z}} dz$$

şeklinde elde edilir. Daha sonra $e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}$ seri açılımı vasıtasıyla eşitlik:

$$\begin{aligned} E(t^{\gamma-1}) &= \frac{e\sigma^{\gamma-1}}{(e-1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \int_0^{\infty} z^{(\gamma-1)/\gamma} e^{-z} e^{-zm} dy \\ &= \frac{e\sigma^{\gamma-1}}{(e-1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \int_0^{\infty} z^{(\gamma-1)/\gamma} e^{-z(1+m)} dy \end{aligned}$$

$z(1+m) = y$ dönüşümü vasıtasıyla, $z = y/(1+m)$ ve $\partial z = \partial y/(1+m)$ değerleri yerine yazılarak eşitlik:

$$E(t^{\gamma-1}) = \frac{e\sigma^{\gamma-1}}{(e-1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1}{(1+m)^{2-(1/\gamma)}} \int_0^{\infty} y^{1-1/\gamma} e^{-y} dy$$

şeklinde elde edilir. Son olarak $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$ Gamma fonksiyonu yardımıyla $E(t^{\gamma-1})$

aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E(t^{\gamma-1}) = \frac{e\sigma^{\gamma-1}}{(e-1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1}{(1+m)^{2-(1/\gamma)}} \Gamma\left(2 - \frac{1}{\gamma}\right).$$

II. parçanın beklenen değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$E\left(t^{\gamma-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right)\right) = \int_0^\infty t^{\gamma-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right) \frac{1}{e-1} \frac{\gamma}{\sigma^\gamma} t^{\gamma-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right) \\ \times \exp\left(1 - \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right)\right) \partial t$$

$\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma = z$ dönüşümü vasıtasıyla, $t = \sigma \sqrt[\gamma]{z}$ ve $\partial t = \frac{\sigma^\gamma \partial z}{\gamma t^{\gamma-1}}$ değerleri yerine yazılarak eşitlik,

$$E\left(t^{\gamma-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right)\right) = \frac{\sigma^{\gamma-1}}{(e-1)} \int_0^\infty z^{(\gamma-1)/\gamma} e^{-z} e^{-z} e^{1-e^{-z}} dz$$

şeklinde elde edilir. Daha sonra $e^x = \sum_{m=0}^\infty \frac{x^m}{m!}$ seri açılımı vasıtasıyla eşitlik:

$$E\left(t^{\gamma-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right)\right) = \frac{e\sigma^{\gamma-1}}{(e-1)} \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{m!} \int_0^\infty z^{(\gamma-1)/\gamma} e^{-2z} e^{-zm} dy \\ = \frac{e\sigma^{\gamma-1}}{(e-1)} \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{m!} \int_0^\infty z^{(\gamma-1)/\gamma} e^{-z(2+m)} dy$$

$z(2+m) = y$ dönüşümü vasıtasıyla, $z = y / (2+m)$ ve $\partial z = \partial y / (2+m)$ değerleri yerine yazılarak eşitlik:

$$E\left(t^{\gamma-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right)\right) = \frac{e\sigma^{\gamma-1}}{(e-1)} \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1}{(2+m)^{2-(1/\gamma)}} \int_0^\infty y^{1-1/\gamma} e^{-y} dy$$

şeklinde elde edilir. Son olarak $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$ Gamma fonksiyonu yardımıyla

$E\left(t^{\gamma-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right)\right)$ aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E\left(t^{\gamma-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right)\right) = \frac{e\sigma^{\gamma-1}}{(e-1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1}{(2+m)^{2-(1/\gamma)}} \Gamma\left(2-\frac{1}{\gamma}\right).$$

III. parçanın beklenen değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$E\left(t^{2\gamma-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right)\right) = \int_0^\infty t^{2\gamma-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right) \frac{1}{e-1} \frac{\gamma}{\sigma^\gamma} t^{\gamma-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right) \\ \times \exp\left(1 - \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right)\right) \partial t$$

$\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma = z$ dönüşümü vasıtasıyla, $t = \sigma \sqrt[\gamma]{z}$ ve $\partial t = \frac{\sigma^\gamma \partial z}{\gamma t^{\gamma-1}}$ değerleri yerine yazılarak eşitlik,

$$E\left(t^{2\gamma-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right)\right) = \frac{\sigma^{2\gamma-1}}{(e-1)} \int_0^\infty z^{(2\gamma-1)/\gamma} e^{-z} e^{-z} e^{1-e^{-z}} dz$$

şeklinde elde edilir. Daha sonra $e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}$ seri açılımı vasıtasıyla eşitlik:

$$E\left(t^{2\gamma-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right)\right) = \frac{e\sigma^{2\gamma-1}}{(e-1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \int_0^\infty z^{(2\gamma-1)/\gamma} e^{-2z} e^{-zm} dy \\ = \frac{e\sigma^{2\gamma-1}}{(e-1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \int_0^\infty z^{(2\gamma-1)/\gamma} e^{-z(2+m)} dy$$

$z(2+m) = y$ dönüşümü vasıtasıyla, $z = y/(2+m)$ ve $\partial z = \partial y/(2+m)$ değerleri yerine yazılarak eşitlik:

$$E\left(t^{2\gamma-1}\exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right)\right) = \frac{e\sigma^{2\gamma-1}}{(e-1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1}{(2+m)^{3-(1/\gamma)}} \int_0^{\infty} y^{2-1/\gamma} e^{-y} dy$$

şeklinde elde edilir. Son olarak $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$ Gamma fonksiyonu yardımıyla

$$E\left(t^{2\gamma-1}\exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right)\right) \text{ aşağıdaki gibi elde edilir:}$$

$$E\left(t^{2\gamma-1}\exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right)\right) = \frac{e\sigma^{2\gamma-1}}{(e-1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1}{(2+m)^{3-(1/\gamma)}} \Gamma\left(3-\frac{1}{\gamma}\right).$$

Sonuç olarak Fisher bilgi matrisinin elemanı olan I_{13} aşağıdaki gibi elde edilir:

$$I_{13} = \frac{ne}{\sigma^2(e-1)} \left[\gamma^2 \Gamma\left(2-\frac{1}{\gamma}\right) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(1+m)^{(2-1/\gamma)}} \right. \\ \left. - \gamma^2 (\gamma-1) \Gamma\left(2-\frac{1}{\gamma}\right) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(2+m)^{(2-1/\gamma)}} \right. \\ \left. + \gamma^2 \Gamma\left(3-\frac{1}{\gamma}\right) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(2+m)^{(3-1/\gamma)}} \right]$$

Benzer şekilde I_{23} aşağıdaki gibi elde edilir:

$$I_{23} = \frac{ne}{\sigma^2(e-1)} \left[\gamma^2 \Gamma\left(2-\frac{1}{\gamma}\right) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x_i}{m!(1+m)^{(2-1/\gamma)}} \right. \\ \left. - \gamma^2 (\gamma-1) \Gamma\left(2-\frac{1}{\gamma}\right) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x_i}{m!(2+m)^{(2-1/\gamma)}} \right. \\ \left. + \gamma^2 \Gamma\left(3-\frac{2}{\gamma}\right) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x_i}{m!(2+m)^{(3-2/\gamma)}} \right]$$

$$-E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial^2 \sigma^2}\right) = E\left(\begin{array}{l} \frac{-n(1-2\gamma)}{\sigma^2} - \gamma(\gamma+1)\sigma^{-(\gamma+2)} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^\gamma \\ + \gamma(\gamma+1)\sigma^{-(\gamma+2)} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^\gamma \exp\left(-\left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma}\right)^\gamma\right) \\ - \gamma^2 \sigma^{-(2\gamma+2)} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^{2\gamma} \exp\left(-\left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma}\right)^\gamma\right) \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma^2} &= \frac{-n(1-2\gamma)}{\sigma^2} - \gamma(\gamma+1)\sigma^{-(\gamma+2)} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^\gamma \\ &\quad + \gamma(\gamma+1)\sigma^{-(\gamma+2)} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^\gamma \exp\left(-\left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma}\right)^\gamma\right) \\ &\quad - \gamma^2 \sigma^{-(2\gamma+2)} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^{2\gamma} \exp\left(-\left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma}\right)^\gamma\right) \end{aligned}$$

$(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = t_i$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma^2} &= \frac{-n(1-2\gamma)}{\sigma^2} - \gamma(\gamma+1)\sigma^{-(\gamma+2)} \sum_{i=1}^n (t_i)^\gamma + \gamma(\gamma+1)\sigma^{-(\gamma+2)} \sum_{i=1}^n (t_i)^\gamma \exp\left(-\left(\frac{t_i}{\sigma}\right)^\gamma\right) \\ &\quad - \gamma^2 \sigma^{-(2\gamma+2)} \sum_{i=1}^n (t_i)^{2\gamma} \exp\left(-\left(\frac{t_i}{\sigma}\right)^\gamma\right) \end{aligned}$$

1. parçanın beklenen değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$E(t^\gamma) = \int_0^\infty t^\gamma \frac{1}{e-1} \frac{\gamma}{\sigma^\gamma} t^{\gamma-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right) \exp\left(1 - \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right)\right) dt$$

$\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma = z$ dönüşümü vasıtasıyla, $t = \sigma \sqrt[\gamma]{z}$ ve $\partial t = \frac{\sigma^\gamma \partial z}{\gamma t^{\gamma-1}}$ değerleri yerine yazılarak eşitlik,

$$E(t^\gamma) = \frac{\sigma^\gamma}{(e-1)} \int_0^\infty z^{\gamma/\gamma} e^{-z} e^{1-e^{-z}} dz$$

şeklinde elde edilir. Daha sonra $e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}$ seri açılımı vasıtasıyla eşitlik:

$$\begin{aligned} E(t^\gamma) &= \frac{e\sigma^\gamma}{(e-1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \int_0^\infty ze^{-z} e^{-zm} dy \\ &= \frac{e\sigma^\gamma}{(e-1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \int_0^\infty ze^{-z(1+m)} dy \end{aligned}$$

$z(1+m) = y$ dönüşümü vasıtasıyla, $z = y/(1+m)$ ve $\partial z = \partial y/(1+m)$ değerleri yerine yazılarak eşitlik:

$$E(t^\gamma) = \frac{e\sigma^\gamma}{(e-1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1}{(1+m)^2} \int_0^\infty ye^{-y} dy$$

şeklinde elde edilir. Son olarak $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$ Gamma fonksiyonu yardımıyla $E(t^\gamma)$

aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E(t^\gamma) = \frac{e\sigma^\gamma}{(e-1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1}{(1+m)^2}.$$

II. parçanın beklenen değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} E\left(t^\gamma \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right)\right) &= \int_0^\infty t^\gamma \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right) \frac{1}{e-1} \frac{\gamma}{\sigma^\gamma} t^{\gamma-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right) \\ &\quad \times \exp\left(1 - \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right)\right) \partial t \end{aligned}$$

$\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma = z$ dönüşümü vasıtasıyla, $t = \sigma^\gamma \sqrt[\gamma]{z}$ ve $\partial t = \frac{\sigma^\gamma \partial z}{\gamma t^{\gamma-1}}$ değerleri yerine yazılarak eşitlik,

$$E\left(t^\gamma \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right)\right) = \frac{\sigma^\gamma}{(e-1)} \int_0^\infty z^{\gamma/\gamma} e^{-z} e^{-z} e^{1-e^{-z}} dz$$

şeklinde elde edilir. Daha sonra $e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}$ seri açılımı vasıtasıyla eşitlik:

$$\begin{aligned} E\left(t^\gamma \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right)\right) &= \frac{e\sigma^\gamma}{(e-1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \int_0^\infty z e^{-2z} e^{-zm} dy \\ &= \frac{e\sigma^\gamma}{(e-1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \int_0^\infty z e^{-z(2+m)} dy \end{aligned}$$

$z(2+m) = y$ dönüşümü vasıtasıyla, $z = y/(2+m)$ ve $\partial z = \partial y/(2+m)$ değerleri yerine yazılarak eşitlik:

$$E\left(t^\gamma \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right)\right) = \frac{e\sigma^\gamma}{(e-1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1}{(2+m)^2} \int_0^\infty y e^{-y} dy$$

şeklinde elde edilir. Son olarak $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$ Gamma fonksiyonu yardımıyla

$$E\left(t^\gamma \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right)\right) \text{ aşağıdaki gibi elde edilir:}$$

$$E\left(t^\gamma \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right)\right) = \frac{e\sigma^\gamma}{(e-1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1}{(2+m)^2}.$$

III. parçanın beklenen değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$E\left(t^{2\gamma} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right)\right) = \int_0^\infty t^{2\gamma} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right) \frac{1}{e-1} \frac{\gamma}{\sigma^\gamma} t^{\gamma-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right) \\ \times \exp\left(1 - \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right)\right) dt$$

$\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma = z$ dönüşümü vasıtasıyla, $t = \sigma \sqrt[\gamma]{z}$ ve $\partial t = \frac{\sigma^\gamma \partial z}{\gamma t^{\gamma-1}}$ değerleri yerine yazılarak eşitlik,

$$E\left(t^{2\gamma} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right)\right) = \frac{\sigma^{2\gamma}}{(e-1)} \int_0^\infty z^{2\gamma/\gamma} e^{-z} e^{-z} e^{1-e^{-z}} dz$$

şeklinde elde edilir. Daha sonra $e^x = \sum_{m=0}^\infty \frac{x^m}{m!}$ seri açılımı vasıtasıyla eşitlik:

$$E\left(t^{2\gamma} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right)\right) = \frac{e\sigma^{2\gamma}}{(e-1)} \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{m!} \int_0^\infty z^2 e^{-2z} e^{-zm} dy \\ = \frac{e\sigma^{2\gamma}}{(e-1)} \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{m!} \int_0^\infty z^2 e^{-z(2+m)} dy$$

$z(2+m) = y$ dönüşümü vasıtasıyla, $z = y/(2+m)$ ve $\partial z = \partial y/(2+m)$ değerleri yerine yazılarak eşitlik:

$$E\left(t^{2\gamma} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right)\right) = \frac{e\sigma^{2\gamma}}{(e-1)} \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1}{(2+m)^3} \int_0^\infty y^2 e^{-y} dy$$

şeklinde elde edilir. Son olarak $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$ Gamma fonksiyonu yardımıyla

$E\left(t^{2\gamma} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right)\right)$ aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E\left(t^{2\gamma} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\gamma\right)\right) = \frac{2e\sigma^{2\gamma}}{(e-1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1}{(2+m)^3}.$$

$$I_{33} = \frac{n(1-2\gamma)}{\sigma^2} + \frac{n}{\sigma^2(e-1)} \left[\gamma(\gamma+1) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(1+m)^2} \right. \\ \left. - \gamma(\gamma+1) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(2+m)^2} \right. \\ \left. + 2\gamma^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(2+m)^3} \right]$$

LS tahmin edicisine dayalı olarak elde edilen $T_{\beta_0,LS}$ ve $T_{\beta_1,LS}$ testleri aşağıdaki gibidir:

$$T_{\beta_0,LS} = \tilde{\beta}_{0,LS} \quad \text{ve} \quad T_{\beta_1,LS} = \tilde{\beta}_{1,LS}.$$

$DW(\sigma, \gamma)$ dağılımının Fisher bilgi matrisi bulunarak $Var(\hat{\beta}_0)$ ve $Var(\hat{\beta}_1)$ değerleri teorik olarak yukarıdaki gibi elde edilmiştir. Ancak seri açılımlarını kullanarak bulunan I. tip hatalar sorunlara yol açmıştır. Bundan dolayı I. tip hatalar bulunurken $Var(\hat{\beta}_0)$ ve $Var(\hat{\beta}_1)$ için simülasyon değerleri kullanılmıştır. Simülasyon sonuçları Çizelge 4.3-4.6 de verildiği gibidir:

Çizelge 4.3. $T_{\beta_0,ML}$ test istatistiği için I. Tip hata sonuçları.

	γ					
n	4	6	8	10	15	20
50	0,054	0,053	0,053	0,053	0,051	0,053
100	0,050	0,054	0,052	0,053	0,050	0,052
150	0,053	0,052	0,053	0,052	0,053	0,050
200	0,050	0,053	0,053	0,051	0,053	0,049
250	0,054	0,054	0,049	0,051	0,052	0,052
300	0,053	0,052	0,049	0,053	0,050	0,049

Çizelge 4.4. $T_{\beta_1, ML}$ test istatistiği için I. Tip hata sonuçları.

γ						
n	4	6	8	10	15	20
50	0,051	0,049	0,051	0,052	0,052	0,049
100	0,049	0,053	0,049	0,051	0,051	0,051
150	0,050	0,049	0,050	0,050	0,050	0,050
200	0,049	0,050	0,051	0,051	0,051	0,052
250	0,051	0,050	0,049	0,049	0,050	0,051
300	0,050	0,051	0,050	0,051	0,051	0,050

Çizelge 4.5. $T_{\beta_0, LS}$ test istatistiği için I. Tip hata sonuçları.

γ						
n	4	6	8	10	15	20
50	0,049	0,051	0,048	0,051	0,049	0,047
100	0,050	0,052	0,049	0,053	0,048	0,050
150	0,049	0,051	0,051	0,048	0,049	0,051
200	0,048	0,050	0,048	0,052	0,048	0,051
250	0,050	0,049	0,050	0,049	0,051	0,050
300	0,051	0,051	0,051	0,051	0,048	0,053

Çizelge 4.6. $T_{\beta_1, LS}$ test istatistiği için I. Tip hata sonuçları.

γ						
n	4	6	8	10	15	20
50	0,051	0,052	0,051	0,052	0,054	0,050
100	0,053	0,051	0,052	0,050	0,052	0,051
150	0,053	0,051	0,048	0,049	0,048	0,050
200	0,049	0,048	0,053	0,050	0,050	0,049
250	0,049	0,050	0,049	0,052	0,048	0,051
300	0,054	0,049	0,050	0,050	0,049	0,048

Çizelge 4.3-4.6 ya bakıldığında, tüm örnek çaplarında, önerilen T_1 , T_2 , T_3 ve T_4 test istatistiklerinin, 0,050'ye çok yakın değerler aldıkları görülmektedir. Bu durum önerilen test istatistiklerinin düşük örnek çaplarında da iyi birer test istatistikleri olduklarının göstergesidir.

4.3.2. Lineer regresyon modelinde hata terimlerinin dağılımının $DIW(\sigma, \gamma)$ olması durumunda β_0 ve β_1 parametreleri için hipotez testi

Yokluk hipotezleri olan $H_{01} : \beta_0 = 0$ $H_{02} : \beta_1 = 1$ 'i karşıt hipotezler olan $H_{11} : \beta_0 \neq 0$ ve $H_{22} : \beta_1 \neq 1$ 'e karşı test etmek için önerilen test istatistikleri aşağıdaki gibidir:

$$T_{\beta_0, ML}^* = \frac{\hat{\beta}_{0, ML} - \beta_0}{\sqrt{Var(\hat{\beta}_{0, ML})}} \sim N(0, 1) \quad \text{ve} \quad T_{\beta_1, ML}^* = \frac{\hat{\beta}_{1, ML} - \beta_1}{\sqrt{Var(\hat{\beta}_{1, ML})}} \sim N(0, 1).$$

$T_{\beta_0, ML}^*$ ve $T_{\beta_1, ML}^*$ test istatistikleri ortalaması 0, varyansı 1 olan standart normal dağılıma sahiptir. Formüllerdeki $\sqrt{Var(\hat{\beta}_0)}$ ve $\sqrt{Var(\hat{\beta}_1)}$ değerlerini bulmak için, hata terimlerinin dağılımı olan $DIW(\sigma, \gamma)$ dağılımının Fisher Bilgi Matrisinin elde edilmesi gerekmektedir. Bunun için bir önceki bölümde, $DIW(\sigma, \gamma)$ dağılımının Eş. 4.12 de olabilirlik fonksiyonu, Eş. 4.13 de log-olabilirlik fonksiyonu ve Eş. 4.14-4.17 de olabilirlik denklemleri elde edilmişti. Olabilirlik denklemlerinin ilgili parametrelere göre 2. dereceden türevleri:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_0^2} &= (\gamma + 1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2} - \frac{\gamma^2 + \gamma}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{-\gamma-2} \\ &\quad - \frac{\gamma^2 + \gamma}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{-\gamma-2} \exp \left(- \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{-\gamma} \right) \\ &\quad + \frac{\gamma^2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{-2\gamma-2} \exp \left(- \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{-\gamma} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_1^2} &= (\gamma + 1) \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i} \right)^2 - \frac{\gamma^2 + \gamma}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{-\gamma-2} \\ &\quad - \frac{\gamma^2 + \gamma}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{-\gamma-2} \exp \left(- \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{-\gamma} \right) \\ &\quad + \frac{\gamma^2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{-2\gamma-2} \exp \left(- \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{-\gamma} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma^2} &= -\frac{n\gamma}{\sigma^2} - \gamma(\gamma-1)\sigma^{\gamma-2} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^{-\gamma} - \gamma(\gamma-1)\sigma^{\gamma-2} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^{-\gamma} \\ &\quad \times \exp\left(-\left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right) + \gamma^2 \sigma^{2\gamma-2} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^{-2\gamma} \\ &\quad \times \exp\left(-\left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_0 \partial \beta_1} &= (\gamma+1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2} - \frac{\gamma(\gamma+1)}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma}\right)^{-\gamma-2} \\ &\quad - \frac{\gamma(\gamma+1)}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma}\right)^{-\gamma-2} \exp\left(-\left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right) \\ &\quad + \frac{\gamma^2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma}\right)^{-2\gamma-2} \exp\left(-\left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L}{\partial \beta_0 \partial \sigma} &= -\gamma^2 \sigma^{\gamma-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^{-\gamma-1} - \gamma^2 \sigma^{\gamma-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^{-\gamma-1} \exp\left(-\left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right) \\ &\quad + \gamma^2 \sigma^{2\gamma-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^{-2\gamma-1} \exp\left(-\left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L}{\partial \beta_1 \partial \sigma} &= -\gamma^2 \sigma^{\gamma-1} \sum_{i=1}^n x_i (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^{-\gamma-1} - \gamma^2 \sigma^{\gamma-1} \sum_{i=1}^n x_i (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^{-\gamma-1} \exp\left(-\left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right) \\ &\quad + \gamma^2 \sigma^{2\gamma-1} \sum_{i=1}^n x_i (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^{-2\gamma-1} \exp\left(-\left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right) = 0\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

$DIW(\sigma, \gamma)$ dağılımının Fisher bilgi matrisi:

$$I = \begin{bmatrix} -E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_0^2}\right) & -E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_0 \partial \beta_1}\right) & -E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_0 \partial \sigma}\right) \\ -E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_0 \partial \beta_1}\right) & -E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_1^2}\right) & -E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_1 \partial \sigma}\right) \\ -E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_0 \partial \sigma}\right) & -E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_1 \partial \sigma}\right) & -E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma^2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix}$$

$$-E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_0^2}\right) = E \left(\begin{aligned} & -(\gamma+1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2} + \frac{\gamma^2 + \gamma}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{-\gamma-2} \\ & + \frac{\gamma^2 + \gamma}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{-\gamma-2} \exp \left(- \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{-\gamma} \right) \\ & - \frac{\gamma^2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{-2\gamma-2} \exp \left(- \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{-\gamma} \right) \end{aligned} \right)$$

$DIW(\sigma, \beta)$ dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verildiği gibidir:

$$f(x) = \frac{1}{e-1} \frac{\gamma}{\sigma^{-\gamma}} x^{-(\gamma+1)} \exp \left(- \left(\frac{x}{\sigma} \right)^{-\gamma} \right) \exp \left(\exp \left(- \left(\frac{x}{\sigma} \right)^{-\gamma} \right) \right).$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_0^2} &= (\gamma+1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2} - \frac{\gamma^2 + \gamma}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{-\gamma-2} \\ &\quad - \frac{\gamma^2 + \gamma}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{-\gamma-2} \exp \left(- \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{-\gamma} \right), \\ &\quad + \frac{\gamma^2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{-2\gamma-2} \exp \left(- \left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma} \right)^{-\gamma} \right) \end{aligned}$$

$(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = t_i$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_0^2} = & (\gamma+1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{(t_i)^2} - \frac{\gamma^2 + \gamma}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\sigma} \right)^{-\gamma-2} - \frac{\gamma^2 + \gamma}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\sigma} \right)^{-\gamma-2} \exp \left(- \left(\frac{t_i}{\sigma} \right)^{-\gamma} \right) \\ & + \frac{\gamma^2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\sigma} \right)^{-2\gamma-2} \exp \left(- \left(\frac{t_i}{\sigma} \right)^{-\gamma} \right) \end{aligned}$$

I. parçanın beklenen değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$E \left(\frac{1}{t^2} \right) = \int_0^\infty \frac{1}{t^2} \frac{1}{e-1} \frac{\gamma}{\sigma^{-\gamma}} t^{-(\gamma+1)} \exp \left(- \left(\frac{t}{\sigma} \right)^{-\gamma} \right) \exp \left(\exp \left(- \left(\frac{t}{\sigma} \right)^{-\gamma} \right) \right) dt$$

$\left(\frac{t}{\sigma} \right)^{-\gamma} = z$ dönüşümü vasıtasıyla, $t = \frac{\sigma}{\sqrt[\gamma]{z}}$ ve $\partial t = \frac{-\sigma^\gamma \partial z}{-\gamma t^{-\gamma+1}}$ değerleri yerine yazılarak eşitlik,

$$E \left(\frac{1}{t^2} \right) = \frac{1}{(e-1)\sigma^2} \int_0^\infty z^{2/\gamma} e^{-z} e^{e^{-z}} dz$$

şeklinde elde edilir. Daha sonra $e^x = \sum_{m=0}^\infty \frac{x^m}{m!}$ seri açılımı vasıtasıyla eşitlik:

$$E \left(\frac{1}{t^2} \right) = \frac{1}{(e-1)\sigma^2} \sum_{m=0}^\infty \frac{1}{m!} \int_0^\infty z^{2/\gamma} e^{-z} e^{-zm} dy$$

$$= \frac{1}{(e-1)\sigma^2} \sum_{m=0}^\infty \frac{1}{m!} \int_0^\infty z^{2/\gamma} e^{-z(1+m)} dy$$

$z(1+m) = y$ dönüşümü vasıtasıyla, $z = y/(1+m)$ ve $\partial z = \partial y/(1+m)$ değerleri yerine yazılarak eşitlik:

$$E \left(\frac{1}{t^2} \right) = \frac{1}{(e-1)\sigma^2} \sum_{m=0}^\infty \frac{1}{m!} \frac{1}{(1+m)^{1+(2/\gamma)}} \int_0^\infty y^{2/\gamma} e^{-y} dy$$

şeklinde elde edilir. Son olarak $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$ Gamma fonksiyonu yardımıyla $E\left(\frac{1}{t^2}\right)$

aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E\left(\frac{1}{t^2}\right) = \frac{1}{(e-1)\sigma^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{1}{(1+m)^{1+(2/\gamma)}} \Gamma\left(1+\frac{2}{\gamma}\right).$$

II. parçanın beklenen değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$E\left(t^{-\gamma-2}\right) = \int_0^{\infty} t^{-\gamma-2} \frac{1}{e-1} \frac{\gamma}{\sigma^{-\gamma}} t^{-(\gamma+1)} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right) \exp\left(\exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right)\right) \partial t$$

$\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma} = z$ dönüşümü vasıtasıyla, $t = \frac{\sigma}{\sqrt[\gamma]{z}}$ ve $\partial t = \frac{-\sigma^{\gamma} \partial z}{-\gamma t^{-\gamma+1}}$ değerleri yerine yazılarak eşitlik,

$$E\left(t^{-\gamma-2}\right) = \frac{1}{(e-1)\sigma^{\gamma+2}} \int_0^{\infty} z^{(2+\gamma)/\gamma} e^{-z} e^{e^{-z}} dz$$

şeklinde elde edilir. Daha sonra $e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}$ seri açılımı vasıtasıyla eşitlik:

$$\begin{aligned} E\left(t^{-\gamma-2}\right) &= \frac{1}{(e-1)\sigma^{\gamma+2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_0^{\infty} z^{(2+\gamma)/\gamma} e^{-z} e^{-zm} dy \\ &= \frac{1}{(e-1)\sigma^{\gamma+2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_0^{\infty} z^{(2+\gamma)/\gamma} e^{-z(1+m)} dy \end{aligned}$$

$z(1+m) = y$ dönüşümü vasıtasıyla, $z = y/(1+m)$ ve $\partial z = \partial y/(1+m)$ değerleri yerine yazılarak eşitlik:

$$E\left(t^{-\gamma-2}\right) = \frac{1}{(e-1)\sigma^{\gamma+2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{1}{(1+m)^{2+(2/\gamma)}} \int_0^{\infty} y^{1+2/\gamma} e^{-y} dy$$

şeklinde elde edilir. Son olarak $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$ Gamma fonksiyonu yardımıyla $E(t^{-\gamma-2})$

aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E(t^{-\gamma-2}) = \frac{1}{(e-1)\sigma^{\gamma+2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{1}{(1+m)^{2+(2/\gamma)}} \Gamma\left(2 + \frac{2}{\gamma}\right).$$

III. parçanın beklenen değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$E\left(t^{-\gamma-2} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right)\right) = \int_0^{\infty} t^{-\gamma-2} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right) \frac{1}{e-1} \frac{\gamma}{\sigma^{-\gamma}} t^{-(\gamma+1)} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right) \\ \times \exp\left(\exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right)\right) \partial t$$

$\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma} = z$ dönüşümü vasıtasıyla, $t = \frac{\sigma}{\sqrt[\gamma]{z}}$ ve $\partial t = \frac{-\sigma^{\gamma} \partial z}{-\gamma t^{-\gamma+1}}$ değerleri yerine yazılarak eşitlik,

$$E\left(t^{-\gamma-2} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right)\right) = \frac{1}{(e-1)\sigma^{\gamma+2}} \int_0^{\infty} z^{(2+\gamma)/\gamma} e^{-z} e^{-z} e^{e^{-z}} dz$$

şeklinde elde edilir. Daha sonra $e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}$ seri açılımı vasıtasıyla eşitlik:

$$E\left(t^{-\gamma-2} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right)\right) = \frac{1}{(e-1)\sigma^{\gamma+2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_0^{\infty} z^{(2+\gamma)/\gamma} e^{-2z} e^{-zm} dy \\ = \frac{1}{(e-1)\sigma^{\gamma+2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_0^{\infty} z^{(2+\gamma)/\gamma} e^{-z(2+m)} dy$$

$z(2+m) = y$ dönüşümü vasıtasıyla, $z = y/(2+m)$ ve $\partial z = \partial y/(2+m)$ değerleri yerine yazılarak eşitlik:

$$E\left(t^{-\gamma-2} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right)\right) = \frac{1}{(e-1)\sigma^{\gamma+2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{1}{(2+m)^{2+(2/\gamma)}} \int_0^{\infty} y^{1+2/\gamma} e^{-y} dy$$

şeklinde elde edilir. Son olarak $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$ Gamma fonksiyonu yardımıyla

$$E\left(t^{-\gamma-2} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right)\right) \text{ aşağıdaki gibi elde edilir:}$$

$$E\left(t^{-\gamma-2} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right)\right) = \frac{1}{(e-1)\sigma^{\gamma+2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{1}{(2+m)^{2+(2/\gamma)}} \Gamma\left(2+\frac{2}{\gamma}\right).$$

IV. parçanın beklenen değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} E\left(t^{-2\gamma-2} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right)\right) &= \int_0^{\infty} t^{-2\gamma-2} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right) \frac{1}{e-1} \frac{\gamma}{\sigma^{-\gamma}} t^{-(\gamma+1)} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right) \\ &\quad \times \exp\left(\exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right)\right) dt \end{aligned}$$

$\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma} = z$ dönüşümü vasıtasıyla, $t = \frac{\sigma}{\sqrt[\gamma]{z}}$ ve $\partial t = \frac{-\sigma^{\gamma} \partial z}{-\gamma t^{-\gamma+1}}$ değerleri yerine yazılarak eşitlik,

$$E\left(t^{-2\gamma-2} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right)\right) = \frac{1}{(e-1)\sigma^{2\gamma+2}} \int_0^{\infty} z^{(2\gamma+2)/\gamma} e^{-z} e^{-z} e^{e^{-z}} dz$$

şeklinde elde edilir. Daha sonra $e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}$ seri açılımı vasıtasıyla eşitlik:

$$\begin{aligned}
E\left(t^{-2\gamma-2} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right)\right) &= \frac{1}{(e-1)\sigma^{2\gamma+2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_0^{\infty} z^{(2\gamma+2)/\gamma} e^{-2z} e^{-zm} dy \\
&= \frac{1}{(e-1)\sigma^{2\gamma+2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_0^{\infty} z^{(2\gamma+2)/\gamma} e^{-z(2+m)} dy
\end{aligned}$$

$z(2+m) = y$ dönüşümü vasıtasıyla, $z = y/(2+m)$ ve $\partial z = \partial y/(2+m)$ değerleri yerine yazılarak eşitlik:

$$E\left(t^{-2\gamma-2} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right)\right) = \frac{1}{(e-1)\sigma^{2\gamma+2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{1}{(2+m)^{3+(2/\gamma)}} \int_0^{\infty} y^{2+2/\gamma} e^{-y} dy$$

şeklinde elde edilir. Son olarak $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$ Gamma fonksiyonu yardımıyla

$$E\left(t^{-2\gamma-2} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right)\right) \text{ aşağıdaki gibi elde edilir:}$$

$$E\left(t^{-2\gamma-2} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right)\right) = \frac{1}{(e-1)\sigma^{2\gamma+2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{1}{(2+m)^{3+(2/\gamma)}} \Gamma\left(3 + \frac{2}{\gamma}\right).$$

Sonuç olarak Fisher bilgi matrisinin ilk elemanı olan I_{11} aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
I_{11} = \frac{n}{\sigma^2(e-1)} &\left[-(\gamma+1)\Gamma\left(1 + \frac{2}{\gamma}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!(1+m)^{(1+2/\gamma)}} \right. \\
&+ \gamma(\gamma+1)\Gamma\left(2 + \frac{2}{\gamma}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!(1+m)^{(2+2/\gamma)}} \\
&+ \gamma(\gamma+1)\Gamma\left(2 + \frac{2}{\gamma}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!(2+m)^{(2+2/\gamma)}} \\
&\left. - \gamma^2\Gamma\left(3 + \frac{2}{\gamma}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!(2+m)^{(3+2/\gamma)}} \right]
\end{aligned}$$

Benzer şekilde I_{12} ve I_{22} aşağıdaki gibi elde edilir:

$$I_{12} = \frac{n}{\sigma^2(e-1)} \left[-(\gamma+1)\Gamma\left(1+\frac{2}{\gamma}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x_i}{m!(1+m)^{(1+2/\gamma)}} \right. \\ + \gamma(\gamma+1)\Gamma\left(2+\frac{2}{\gamma}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x_i}{m!(1+m)^{(2+2/\gamma)}} \\ + \gamma(\gamma+1)\Gamma\left(2+\frac{2}{\gamma}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x_i}{m!(2+m)^{(2+2/\gamma)}} \\ \left. - \gamma^2\Gamma\left(3+\frac{2}{\gamma}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x_i}{m!(2+m)^{(3+2/\gamma)}} \right]$$

$$I_{22} = \frac{n}{\sigma^2(e-1)} \left[-(\gamma+1)\Gamma\left(1+\frac{2}{\gamma}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x_i^2}{m!(1+m)^{(1+2/\gamma)}} \right. \\ + \gamma(\gamma+1)\Gamma\left(2+\frac{2}{\gamma}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x_i^2}{m!(1+m)^{(2+2/\gamma)}} \\ + \gamma(\gamma+1)\Gamma\left(2+\frac{2}{\gamma}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x_i^2}{m!(2+m)^{(2+2/\gamma)}} \\ \left. - \gamma^2\Gamma\left(3+\frac{2}{\gamma}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x_i^2}{m!(2+m)^{(3+2/\gamma)}} \right]$$

$$-E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_0 \partial \sigma}\right) = E \left[\begin{aligned} & \left(-\gamma^2 \sigma^{\gamma-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^{-\gamma-1} - \gamma^2 \sigma^{\gamma-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^{-\gamma-1} \right) \\ & \times \exp\left(-\left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right) + \gamma^2 \sigma^{2\gamma-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^{-2\gamma-1} \\ & \times \exp\left(-\left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right) \end{aligned} \right]$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_0 \partial \sigma} = -\gamma^2 \sigma^{\gamma-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^{-\gamma-1} - \gamma^2 \sigma^{\gamma-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^{-\gamma-1} \exp\left(-\left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right) \\ + \gamma^2 \sigma^{2\gamma-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^{-2\gamma-1} \exp\left(-\left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right)$$

$(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = t_i$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \beta_0 \partial \sigma} = & -\gamma^2 \sigma^{\gamma-1} \sum_{i=1}^n (t_i)^{-\gamma-1} - \gamma^2 \sigma^{\gamma-1} \sum_{i=1}^n (t_i)^{-\gamma-1} \exp\left(-\left(\frac{t_i}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right) \\ & + \gamma^2 \sigma^{2\gamma-1} \sum_{i=1}^n (t_i)^{-2\gamma-1} \exp\left(-\left(\frac{t_i}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right) \end{aligned}$$

1. parçanın beklenen değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$E(t^{-\gamma-1}) = \int_0^\infty t^{-\gamma-1} \frac{1}{e-1} \frac{\gamma}{\sigma^{-\gamma}} t^{-(\gamma+1)} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right) \exp\left(\exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right)\right) dt$$

$\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma} = z$ dönüşümü vasıtasıyla, $t = \frac{\sigma}{\sqrt[\gamma]{z}}$ ve $\partial t = \frac{-\sigma^\gamma \partial z}{-\gamma t^{-\gamma+1}}$ değerleri yerine yazılarak eşitlik,

$$E(t^{-\gamma-1}) = \frac{1}{(e-1)\sigma^{1+\gamma}} \int_0^\infty z^{(1+\gamma)/\gamma} e^{-z} e^{e^{-z}} dz$$

şeklinde elde edilir. Daha sonra $e^x = \sum_{m=0}^\infty \frac{x^m}{m!}$ seri açılımı vasıtasıyla eşitlik:

$$\begin{aligned} E(t^{-\gamma-1}) &= \frac{1}{(e-1)\sigma^{1+\gamma}} \sum_{m=0}^\infty \frac{1}{m!} \int_0^\infty z^{(1+\gamma)/\gamma} e^{-z} e^{-zm} dy \\ &= \frac{1}{(e-1)\sigma^{1+\gamma}} \sum_{m=0}^\infty \frac{1}{m!} \int_0^\infty z^{(1+\gamma)/\gamma} e^{-z(1+m)} dy \end{aligned}$$

$z(1+m) = y$ dönüşümü vasıtasıyla, $z = y/(1+m)$ ve $\partial z = \partial y/(1+m)$ değerleri yerine yazılarak eşitlik:

$$E(t^{-\gamma-1}) = \frac{1}{(e-1)\sigma^{1+\gamma}} \sum_{m=0}^\infty \frac{1}{m!} \frac{1}{(1+m)^{2+(1/\gamma)}} \int_0^\infty y^{1+1/\gamma} e^{-y} dy$$

şeklinde elde edilir. Son olarak $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$ Gamma fonksiyonu yardımıyla $E(t^{-\gamma-1})$

aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E(t^{-\gamma-1}) = \frac{1}{(e-1)\sigma^{1+\gamma}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{1}{(1+m)^{2+(1/\gamma)}} \Gamma\left(2 + \frac{1}{\gamma}\right).$$

II. parçanın beklenen değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$E\left(t^{-\gamma-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right)\right) = \int_0^{\infty} t^{-\gamma-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right) \frac{1}{e-1} \frac{\gamma}{\sigma^{-\gamma}} t^{-(\gamma+1)} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right) \\ \times \exp\left(\exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right)\right) \partial t$$

$\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma} = z$ dönüşümü vasıtasıyla, $t = \frac{\sigma}{\sqrt[\gamma]{z}}$ ve $\partial t = \frac{-\sigma^{\gamma} \partial z}{-\gamma t^{-\gamma+1}}$ değerleri yerine yazılarak eşitlik,

$$E\left(t^{-\gamma-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right)\right) = \frac{1}{(e-1)\sigma^{\gamma+1}} \int_0^{\infty} z^{(1+\gamma)/\gamma} e^{-z} e^{-z} e^{e^{-z}} dz$$

şeklinde elde edilir. Daha sonra $e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}$ seri açılımı vasıtasıyla eşitlik:

$$E\left(t^{-\gamma-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right)\right) = \frac{1}{(e-1)\sigma^{\gamma+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_0^{\infty} z^{(1+\gamma)/\gamma} e^{-2z} e^{-zm} dy \\ = \frac{1}{(e-1)\sigma^{\gamma+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_0^{\infty} z^{(1+\gamma)/\gamma} e^{-z(2+m)} dy$$

$z(2+m) = y$ dönüşümü vasıtasıyla, $z = y/(2+m)$ ve $\partial z = \partial y/(2+m)$ değerleri yerine yazılarak eşitlik:

$$E\left(t^{-\gamma-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right)\right) = \frac{1}{(e-1)\sigma^{\gamma+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{1}{(2+m)^{2+(1/\gamma)}} \int_0^{\infty} y^{1+1/\gamma} e^{-y} dy$$

şeklinde elde edilir. Son olarak $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$ Gamma fonksiyonu yardımıyla

$$E\left(t^{-\gamma-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right)\right) \text{ aşağıdaki gibi elde edilir:}$$

$$E\left(t^{-\gamma-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right)\right) = \frac{1}{(e-1)\sigma^{\gamma+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{1}{(2+m)^{2+(1/\gamma)}} \Gamma\left(2 + \frac{1}{\gamma}\right).$$

III. parçanın beklenen değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} E\left(t^{-\gamma-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right)\right) &= \int_0^{\infty} t^{-2\gamma-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right) \frac{1}{e-1} \frac{\gamma}{\sigma^{-\gamma}} t^{-(2\gamma+1)} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right) \\ &\quad \times \exp\left(\exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right)\right) \partial t \end{aligned}$$

$\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma} = z$ dönüşümü vasıtasıyla, $t = \frac{\sigma}{\sqrt[\gamma]{z}}$ ve $\partial t = \frac{-\sigma^{\gamma} \partial z}{-\gamma t^{-\gamma+1}}$ değerleri yerine yazılarak eşitlik,

$$E\left(t^{-2\gamma-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right)\right) = \frac{1}{(e-1)\sigma^{2\gamma+1}} \int_0^{\infty} z^{(2\gamma+1)/\gamma} e^{-z} e^{-z} e^{e^{-z}} dz$$

şeklinde elde edilir. Daha sonra $e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}$ seri açılımı vasıtasıyla eşitlik:

$$\begin{aligned}
E\left(t^{-2\gamma-1}\exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right)\right) &= \frac{1}{(e-1)\sigma^{2\gamma+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_0^{\infty} z^{(2\gamma+1)/\gamma} e^{-2z} e^{-zm} dy \\
&= \frac{1}{(e-1)\sigma^{2\gamma+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_0^{\infty} z^{(2\gamma+1)/\gamma} e^{-z(2+m)} dy
\end{aligned}$$

$z(2+m) = y$ dönüşümü vasıtasıyla, $z = y/(2+m)$ ve $\partial z = \partial y/(2+m)$ değerleri yerine yazılarak eşitlik:

$$E\left(t^{-2\gamma-1}\exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right)\right) = \frac{1}{(e-1)\sigma^{2\gamma+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{1}{(2+m)^{3+(1/\gamma)}} \int_0^{\infty} y^{2+1/\gamma} e^{-y} dy$$

şeklinde elde edilir. Son olarak $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$ Gamma fonksiyonu yardımıyla

$$E\left(t^{-2\gamma-1}\exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right)\right) \text{ aşağıdaki gibi elde edilir:}$$

$$E\left(t^{-2\gamma-1}\exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right)\right) = \frac{1}{(e-1)\sigma^{2\gamma+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{1}{(2+m)^{3+(1/\gamma)}} \Gamma\left(3+\frac{1}{\gamma}\right).$$

Sonuç olarak Fisher bilgi matrisinin elemanı olan I_{13} aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
I_{13} = \frac{n}{\sigma^2(e-1)} &\left[\gamma^2 \Gamma\left(2+\frac{1}{\gamma}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!(1+m)^{(2+1/\gamma)}} \right. \\
&+ \gamma^2 \Gamma\left(2+\frac{1}{\gamma}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!(2+m)^{(2+1/\gamma)}} \\
&\left. - \gamma^2 \Gamma\left(3+\frac{1}{\gamma}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!(2+m)^{(3+1/\gamma)}} \right]
\end{aligned}$$

Benzer şekilde I_{23} aşağıdaki gibi elde edilir:

$$I_{23} = \frac{n}{\sigma^2(e-1)} \left[\gamma^2 \Gamma\left(2 + \frac{1}{\gamma}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x_i}{m!(1+m)^{(2+1/\gamma)}} \right. \\ \left. + \gamma^2 \Gamma\left(2 + \frac{1}{\gamma}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x_i}{m!(2+m)^{(2+1/\gamma)}} \right. \\ \left. - \gamma^2 \Gamma\left(3 + \frac{1}{\gamma}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x_i}{m!(2+m)^{(3+1/\gamma)}} \right]$$

$$-E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial^2 \sigma^2}\right) = E \left(\begin{aligned} & -\frac{n\gamma}{\sigma^2} - \gamma(\gamma-1)\sigma^{\gamma-2} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^{-\gamma} - \gamma(\gamma-1)\sigma^{\gamma-2} \\ & \times \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^{-\gamma} \times \exp\left(-\left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma}\right)^{-2\gamma}\right) \\ & + \gamma^2 \sigma^{2\gamma-2} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) \times \exp\left(-\left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right) \end{aligned} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial^2 \sigma^2} = -\frac{n\gamma}{\sigma^2} - \gamma(\gamma-1)\sigma^{\gamma-2} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^{-\gamma} - \gamma(\gamma-1)\sigma^{\gamma-2} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^{-\gamma} \\ \times \exp\left(-\left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma}\right)^{-2\gamma}\right) + \gamma^2 \sigma^{2\gamma-2} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^{-2\gamma} \\ \times \exp\left(-\left(\frac{y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right)$$

$(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = t_i$ olmak üzere

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial^2 \sigma^2} = -\frac{n\gamma}{\sigma^2} + \gamma(\gamma-1)\sigma^{\gamma-2} \sum_{i=1}^n (t_i)^{-\gamma} - \gamma(\gamma-1)\sigma^{\gamma-2} \sum_{i=1}^n (t_i)^{-\gamma} \\ \times \exp\left(-\left(\frac{t_i}{\sigma}\right)^{-2\gamma}\right) - \gamma^2 \sigma^{2\gamma-2} \sum_{i=1}^n (t_i)^{-2\gamma} \times \exp\left(-\left(\frac{t_i}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right)$$

I. parçanın beklenen değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$E(t^{-\gamma}) = \int_0^{\infty} t^{-\gamma} \frac{1}{e-1} \frac{\gamma}{\sigma^{-\gamma}} t^{-(\gamma+1)} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right) \exp\left(\exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right)\right) dt$$

$\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma} = z$ dönüşümü vasıtasıyla, $t = \frac{\sigma}{\sqrt[\gamma]{z}}$ ve $\partial t = \frac{-\sigma^{\gamma} \partial z}{-\gamma t^{-\gamma+1}}$ değerleri yerine yazılarak eşitlik,

$$E(t^{-\gamma}) = \frac{1}{(e-1)\sigma^{\gamma}} \int_0^{\infty} z^{\gamma/\gamma} e^{-z} e^{e^{-z}} dz$$

şeklinde elde edilir. Daha sonra $e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}$ seri açılımı vasıtasıyla eşitlik:

$$\begin{aligned} E(t^{-\gamma}) &= \frac{1}{(e-1)\sigma^{\gamma}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_0^{\infty} z e^{-z} e^{-zm} dy \\ &= \frac{1}{(e-1)\sigma^{\gamma}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_0^{\infty} z e^{-z(1+m)} dy \end{aligned}$$

$z(1+m) = y$ dönüşümü vasıtasıyla, $z = y/(1+m)$ ve $\partial z = \partial y/(1+m)$ değerleri yerine yazılarak eşitlik:

$$E(t^{-\gamma}) = \frac{1}{(e-1)\sigma^{\gamma}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{1}{(1+m)^2} \int_0^{\infty} y e^{-y} dy$$

şeklinde elde edilir. Son olarak $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$ Gamma fonksiyonu yardımıyla $E(t^{-\gamma-1})$

aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E(t^{-\gamma}) = \frac{1}{(e-1)\sigma^{\gamma}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{1}{(1+m)^2}.$$

II. parçanın beklenen değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$E\left(t^{-\gamma} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right)\right) = \int_0^{\infty} t^{-\gamma} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right) \frac{1}{e-1} \frac{\gamma}{\sigma^{-\gamma}} t^{-(\gamma+1)} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right) \\ \times \exp\left(\exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right)\right) \partial t$$

$\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma} = z$ dönüşümü vasıtasıyla, $t = \frac{\sigma}{\sqrt[\gamma]{z}}$ ve $\partial t = \frac{-\sigma^{\gamma} \partial z}{-\gamma t^{-\gamma+1}}$ değerleri yerine yazılarak eşitlik,

$$E\left(t^{-\gamma} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right)\right) = \frac{1}{(e-1)\sigma^{\gamma}} \int_0^{\infty} z^{\gamma/\gamma} e^{-z} e^{-z} e^{e^{-z}} dz$$

şeklinde elde edilir. Daha sonra $e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}$ seri açılımı vasıtasıyla eşitlik:

$$E\left(t^{-\gamma} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right)\right) = \frac{1}{(e-1)\sigma^{\gamma}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_0^{\infty} z e^{-2z} e^{-zm} dy \\ = \frac{1}{(e-1)\sigma^{\gamma}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_0^{\infty} z e^{-z(2+m)} dy$$

$z(2+m) = y$ dönüşümü vasıtasıyla, $z = y/(2+m)$ ve $\partial z = \partial y/(2+m)$ değerleri yerine yazılarak eşitlik:

$$E\left(t^{-\gamma} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right)\right) = \frac{1}{(e-1)\sigma^{\gamma}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{1}{(2+m)^2} \int_0^{\infty} y e^{-y} dy$$

şeklinde elde edilir. Son olarak $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$ Gamma fonksiyonu yardımıyla

$E\left(t^{-\gamma} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right)\right)$ aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E\left(t^{-\gamma} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right)\right) = \frac{1}{(e-1)\sigma^\gamma} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{1}{(2+m)^2}.$$

III. parçanın beklenen değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$E\left(t^{-2\gamma} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right)\right) = \int_0^{\infty} t^{-2\gamma} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right) \frac{1}{e-1} \frac{\gamma}{\sigma^{-\gamma}} t^{-(\gamma+1)} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right) \\ \times \exp\left(\exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right)\right) \partial t$$

$\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma} = z$ dönüşümü vasıtasıyla, $t = \frac{\sigma}{\sqrt[\gamma]{z}}$ ve $\partial t = \frac{-\sigma^\gamma \partial z}{-\gamma t^{-\gamma+1}}$ değerleri yerine yazılarak eşitlik,

$$E\left(t^{-2\gamma} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right)\right) = \frac{1}{(e-1)\sigma^{2\gamma}} \int_0^{\infty} z^{2\gamma/\gamma} e^{-z} e^{-z} e^{e^{-z}} dz$$

şeklinde elde edilir. Daha sonra $e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}$ seri açılımı vasıtasıyla eşitlik:

$$E\left(t^{-2\gamma} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right)\right) = \frac{1}{(e-1)\sigma^{2\gamma}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_0^{\infty} z^2 e^{-2z} e^{-zm} dy \\ = \frac{1}{(e-1)\sigma^{2\gamma}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_0^{\infty} z^2 e^{-z(2+m)} dy$$

$z(2+m) = y$ dönüşümü vasıtasıyla, $z = y/(2+m)$ ve $\partial z = \partial y/(2+m)$ değerleri yerine yazılarak eşitlik:

$$E\left(t^{-2\gamma} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right)\right) = \frac{1}{(e-1)\sigma^{2\gamma}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{1}{(2+m)^3} \int_0^{\infty} y^2 e^{-y} dy$$

şeklinde elde edilir. Son olarak $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$ Gamma fonksiyonu yardımıyla

$$E\left(t^{-2\gamma} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right)\right) \text{ aşağıdaki gibi elde edilir:}$$

$$E\left(t^{-2\gamma} \exp\left(-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{-\gamma}\right)\right) = \frac{2}{(e-1)\sigma^{\gamma}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{1}{(2+m)^3}.$$

$$I_{33} = \frac{n\gamma}{\sigma^2} + \frac{n}{\sigma^2(e-1)} \left[\gamma(\gamma-1) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!(1+m)^2} + \gamma(\gamma-1) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!(2+m)^2} \right] - 2\gamma^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!(2+m)^3}$$

LS tahmin edicisine dayalı olarak elde edilen $T_{\beta_0,LS}^*$ ve $T_{\beta_1,LS}^*$ testleri aşağıdaki gibidir:

$$T_{\beta_0,LS}^* = \tilde{\beta}_{0,LS} \text{ ve } T_{\beta_1,LS}^* = \tilde{\beta}_{1,LS}.$$

$DIW(\sigma, \gamma)$ dağılımının Fisher bilgi matrisi bulunarak $Var(\hat{\beta}_0)$ ve $Var(\hat{\beta}_1)$ değerleri teorik olarak yukarıdaki gibi elde edilmiştir. Ancak seri açılımlarını kullanarak bulunan I. tip hatalar sorunlara yol açmıştır. Bundan dolayı I. tip hatalar bulunurken $Var(\hat{\beta}_0)$ ve $Var(\hat{\beta}_1)$ için simülasyon değerleri kullanılmıştır. Simülasyon sonuçları Çizelge 4.7-4.10 da verildiği gibidir.

Çizelge 4.7. $T_{\beta_0,ML}^*$ test istatistiği için I. Tip hata sonuçları.

γ						
n	4	6	8	10	15	20
50	0,0546	0,0530	0,0546	0,0541	0,0532	0,0544
100	0,0543	0,0535	0,0536	0,0545	0,0525	0,0532
150	0,0536	0,0541	0,0526	0,0535	0,0496	0,0512
200	0,0532	0,0539	0,0538	0,0498	0,0504	0,0525
250	0,0494	0,0528	0,0501	0,0516	0,0446	0,0523
300	0,0538	0,0514	0,0516	0,0523	0,0494	0,0518

Çizelge 4.8. $T_{\beta_1,ML}^*$ test istatistiği için I. Tip hata sonuçları.

γ						
n	4	6	8	10	15	20
50	0,0525	0,0517	0,0492	0,0515	0,0517	0,0530
100	0,0511	0,0502	0,0516	0,0522	0,0510	0,0501
150	0,0514	0,0513	0,0509	0,0492	0,0503	0,0511
200	0,0522	0,0515	0,0506	0,0496	0,0505	0,0502
250	0,0497	0,0511	0,0485	0,0500	0,0498	0,0511
300	0,0524	0,0502	0,0493	0,0523	0,0520	0,0499

Çizelge 4.9. $T_{\beta_0,LS}^*$ test istatistiği için I. Tip hata sonuçları.

γ						
n	4	6	8	10	15	20
50	0,0302	0,0355	0,0387	0,0404	0,0447	0,0421
100	0,0333	0,0353	0,0402	0,0403	0,0444	0,0452
150	0,0315	0,0348	0,0408	0,0435	0,0456	0,0482
200	0,0345	0,0370	0,0420	0,0420	0,0457	0,0458
250	0,0323	0,0407	0,0413	0,0428	0,0466	0,0474
300	0,0357	0,0379	0,0432	0,0437	0,0459	0,0471

Çizelge 4.10. $T_{\beta_1,LS}^*$ test istatistiği için I. Tip hata sonuçları.

γ						
n	4	6	8	10	15	20
50	0,0493	0,0479	0,0519	0,0530	0,0512	0,0498
100	0,0486	0,0522	0,0511	0,0518	0,0534	0,0536
150	0,0524	0,0539	0,0495	0,0515	0,0495	0,0505
200	0,0458	0,0517	0,0517	0,0522	0,0526	0,0481
250	0,0521	0,0539	0,0486	0,0511	0,0493	0,0488
300	0,0527	0,0510	0,0502	0,0504	0,0492	0,0478

Çizelge 4.7-4.10 a bakıldığında, tüm örnek çaplarında, önerilen $T_{\beta_0,ML}^*$, $T_{\beta_1,ML}^*$ ve $T_{\beta_1,LS}^*$ test istatistiklerinin, 0,050'ye çok yakın değerler aldıkları görülmektedir. $T_{\beta_0,LS}^*$ test istatistiğinin ise β 'nın düşük değerlerinde 0,050'nin biraz altında ancak β 'nın değeri arttıkça 0,050 civarında I. tip hatalara sahip olduğu görülmektedir. Bu durum önerilen test istatistiklerinin düşük örnek çaplarında da iyi birer test istatistikleri olduklarının göstergesidir.

Önerilen $T_{\beta_0,ML}^*$, $T_{\beta_1,ML}^*$, $T_{\beta_0,LS}^*$ ve $T_{\beta_1,LS}^*$ testleri için testin güç değerleri sonuçları Çizelge 4.11-4.14 de verildiği gibidir.

Çizelge 4.11. $T_{\beta_0,ML}$ ve $T_{\beta_0,LS}$ testleri için güç değerleri.

N	50			100			150		
γ	d	T_1	T_3	d	T_1	T_3	d	T_1	T_3
4	0,000	0,054	0,049	0,000	0,050	0,050	0,000	0,053	0,049
	0,07	0,18	0,11	0,04	0,11	0,09	0,03	0,12	0,09
	0,14	0,37	0,27	0,08	0,25	0,18	0,07	0,26	0,20
	0,21	0,65	0,51	0,12	0,45	0,36	0,11	0,46	0,42
	0,28	0,83	0,75	0,16	0,68	0,56	0,14	0,68	0,63
	0,35	0,93	0,90	0,21	0,87	0,80	0,18	0,86	0,82
	0,42	0,98	0,97	0,25	0,95	0,91	0,21	0,95	0,92
	0,50	0,99	0,99	0,30	0,99	0,98	0,25	0,99	0,97
6	0,000	0,053	0,051	0,000	0,054	0,052	0,000	0,052	0,051
	0,07	0,16	0,10	0,04	0,11	0,08	0,03	0,10	0,08
	0,14	0,36	0,24	0,08	0,22	0,17	0,07	0,23	0,20
	0,21	0,56	0,45	0,12	0,40	0,32	0,11	0,50	0,39
	0,28	0,78	0,69	0,16	0,65	0,51	0,14	0,62	0,56
	0,35	0,92	0,86	0,21	0,81	0,72	0,18	0,86	0,77
	0,42	0,98	0,94	0,25	0,90	0,88	0,21	0,94	0,89
	0,50	0,99	0,98	0,30	0,98	0,96	0,25	0,98	0,96
8	0,000	0,053	0,048	0,000	0,052	0,049	0,000	0,053	0,051
	0,07	0,14	0,08	0,04	0,11	0,08	0,03	0,10	0,07
	0,14	0,31	0,21	0,08	0,20	0,16	0,07	0,21	0,16
	0,21	0,54	0,41	0,12	0,39	0,30	0,11	0,43	0,34
	0,28	0,77	0,61	0,16	0,59	0,46	0,14	0,63	0,50
	0,35	0,92	0,81	0,21	0,79	0,67	0,18	0,81	0,71
	0,42	0,97	0,92	0,25	0,90	0,82	0,21	0,92	0,84
	0,50	0,99	0,97	0,30	0,97	0,93	0,25	0,97	0,94

Çizelge 4.11. (devam) $T_{\beta_0,ML}$ ve $T_{\beta_0,LS}$ testleri için güç değerleri.

10	0,000	0,053	0,051	0,000	0,053	0,053	0,000	0,052	0,048
	0,07	0,14	0,10	0,04	0,10	0,08	0,03	0,11	0,08
	0,14	0,30	0,20	0,08	0,20	0,15	0,07	0,21	0,15
	0,21	0,55	0,38	0,12	0,39	0,27	0,11	0,43	0,32
	0,28	0,76	0,61	0,16	0,56	0,45	0,14	0,62	0,48
	0,35	0,91	0,78	0,21	0,78	0,65	0,18	0,80	0,67
	0,42	0,97	0,90	0,25	0,90	0,80	0,21	0,91	0,81
	0,50	0,99	0,96	0,30	0,97	0,91	0,25	0,97	0,91
15	0,000	0,051	0,049	0,000	0,050	0,048	0,000	0,053	0,049
	0,07	0,13	0,08	0,04	0,10	0,09	0,03	0,09	0,08
	0,14	0,30	0,18	0,08	0,21	0,13	0,07	0,21	0,14
	0,21	0,52	0,35	0,12	0,38	0,25	0,11	0,42	0,29
	0,28	0,76	0,57	0,16	0,58	0,40	0,14	0,62	0,46
	0,35	0,90	0,74	0,21	0,78	0,60	0,18	0,80	0,64
	0,42	0,96	0,87	0,25	0,89	0,75	0,21	0,91	0,76
	0,50	0,99	0,94	0,30	0,96	0,87	0,25	0,98	0,88
20	0,000	0,053	0,047	0,000	0,052	0,050	0,000	0,050	0,051
	0,07	0,15	0,09	0,04	0,10	0,07	0,03	0,11	0,08
	0,14	0,29	0,17	0,08	0,20	0,13	0,07	0,22	0,13
	0,21	0,54	0,34	0,12	0,38	0,23	0,11	0,40	0,28
	0,28	0,75	0,55	0,16	0,56	0,39	0,14	0,60	0,43
	0,35	0,90	0,72	0,21	0,77	0,56	0,18	0,80	0,61
	0,42	0,96	0,85	0,25	0,89	0,72	0,21	0,91	0,73
	0,50	0,99	0,93	0,30	0,97	0,85	0,25	0,97	0,86

Çizelge 4.11. (devam) $T_{\beta_0,ML}$ ve $T_{\beta_0,LS}$ testleri için güç değerleri.

N	200			250			300		
γ	d	T_1	T_3	d	T_1	T_3	d	T_1	T_3
4	0,000	0,050	0,048	0,000	0,054	0,050	0,000	0,053	0,051
	0,03	0,14	0,10	0,028	0,12	0,10	0,028	0,14	0,10
	0,07	0,39	0,25	0,057	0,29	0,23	0,057	0,32	0,26
	0,11	0,59	0,54	0,085	0,46	0,42	0,085	0,51	0,47
	0,14	0,78	0,75	0,115	0,74	0,67	0,115	0,76	0,75
	0,18	0,92	0,91	0,145	0,91	0,85	0,145	0,93	0,89
	0,21	0,97	0,97	0,171	0,98	0,95	0,171	0,98	0,95
	0,25	0,99	0,99	0,200	0,99	0,98	0,200	0,99	0,99
6	0,000	0,053	0,050	0,000	0,054	0,049	0,000	0,052	0,051
	0,03	0,10	0,10	0,028	0,09	0,08	0,028	0,12	0,09
	0,07	0,27	0,22	0,057	0,22	0,20	0,057	0,29	0,24
	0,11	0,52	0,48	0,085	0,50	0,39	0,085	0,50	0,44
	0,14	0,77	0,66	0,115	0,65	0,61	0,115	0,77	0,69
	0,18	0,93	0,87	0,145	0,88	0,81	0,145	0,91	0,86
	0,21	0,98	0,95	0,171	0,94	0,91	0,171	0,95	0,95
	0,25	0,99	0,99	0,200	0,98	0,96	0,200	0,99	0,99

Çizelge 4.11. (devam) $T_{\beta_0,ML}$ ve $T_{\beta_0,LS}$ testleri için güç değerleri.

8	0,000	0,053	0,048	0,000	0,049	0,050	0,000	0,049	0,051
	0,03	0,11	0,08	0,028	0,10	0,09	0,028	0,11	0,09
	0,07	0,25	0,20	0,057	0,22	0,17	0,057	0,25	0,19
	0,11	0,52	0,43	0,085	0,42	0,34	0,085	0,48	0,38
	0,14	0,74	0,60	0,115	0,65	0,55	0,115	0,72	0,60
	0,18	0,90	0,82	0,145	0,83	0,75	0,145	0,88	0,80
	0,21	0,96	0,92	0,171	0,93	0,88	0,171	0,96	0,92
	0,25	0,99	0,98	0,200	0,98	0,95	0,200	0,99	0,98
10	0,000	0,051	0,052	0,000	0,051	0,049	0,000	0,053	0,051
	0,03	0,10	0,09	0,028	0,12	0,10	0,028	0,11	0,10
	0,07	0,25	0,19	0,057	0,22	0,17	0,057	0,23	0,18
	0,11	0,51	0,40	0,085	0,41	0,32	0,085	0,47	0,37
	0,14	0,72	0,58	0,115	0,65	0,52	0,115	0,71	0,58
	0,18	0,89	0,80	0,145	0,83	0,71	0,145	0,87	0,79
	0,21	0,96	0,91	0,171	0,93	0,85	0,171	0,96	0,90
	0,25	0,99	0,97	0,200	0,98	0,94	0,200	0,99	0,96
15	0,000	0,053	0,048	0,00	0,052	0,051	0,00	0,050	0,048
	0,03	0,12	0,10	0,028	0,10	0,09	0,028	0,11	0,10
	0,07	0,24	0,17	0,057	0,22	0,15	0,057	0,24	0,18
	0,11	0,49	0,35	0,085	0,43	0,30	0,085	0,47	0,34
	0,14	0,72	0,53	0,115	0,63	0,47	0,115	0,72	0,54
	0,18	0,91	0,74	0,145	0,82	0,67	0,145	0,88	0,73
	0,21	0,96	0,86	0,171	0,93	0,80	0,171	0,96	0,86
	0,25	0,99	0,95	0,200	0,98	0,89	0,200	0,99	0,94
20	0,000	0,049	0,051	0,000	0,052	0,050	0,000	0,049	0,053
	0,03	0,13	0,10	0,028	0,10	0,08	0,028	0,11	0,10
	0,07	0,26	0,17	0,057	0,21	0,14	0,057	0,25	0,16
	0,11	0,49	0,35	0,085	0,41	0,26	0,085	0,47	0,32
	0,14	0,72	0,53	0,115	0,64	0,46	0,115	0,71	0,51
	0,18	0,89	0,72	0,145	0,83	0,66	0,145	0,88	0,71
	0,21	0,96	0,84	0,171	0,92	0,76	0,171	0,95	0,85
	0,25	0,99	0,93	0,200	0,98	0,89	0,200	0,99	0,92

Çizelge 4.12. $T_{\beta_1,ML}$ ve $T_{\beta_1,LS}$ testleri için güç değerleri.

N	50			100			150		
γ	d	T_2	T_4	d	T_2	T_4	d	T_2	T_4
4	1,000	0,051	0,051	1,000	0,049	0,053	1,000	0,050	0,053
	1,021	0,09	0,08	1,017	0,10	0,10	1,014	0,12	0,09
	1,042	0,19	0,18	1,034	0,27	0,25	1,028	0,26	0,20
	1,063	0,41	0,38	1,051	0,53	0,50	1,042	0,46	0,42
	1,085	0,65	0,62	1,068	0,80	0,75	1,056	0,68	0,63
	1,110	0,85	0,85	1,085	0,92	0,90	1,070	0,86	0,82
	1,130	0,95	0,94	1,100	0,97	0,97	1,085	0,95	0,92
	1,150	0,98	0,98	1,120	0,99	0,99	1,100	0,99	0,97

Çizelge 4.12. (devam) $T_{\beta_1, ML}$ ve $T_{\beta_1, LS}$ testleri için güç değerleri.

6	1,000	0,049	0,052	1,0000	0,053	0,051	1,0000	0,049	0,051
	1,014	0,09	0,08	1,011	0,12	0,10	1,0085	0,10	0,08
	1,028	0,20	0,18	1,022	0,24	0,22	1,0170	0,23	0,20
	1,042	0,42	0,37	1,033	0,49	0,45	1,0255	0,50	0,39
	1,056	0,65	0,58	1,045	0,76	0,71	1,0340	0,62	0,56
	1,070	0,85	0,80	1,056	0,92	0,88	1,0425	0,86	0,77
	1,085	0,95	0,92	1,067	0,98	0,96	1,0510	0,94	0,89
	1,100	0,98	0,97	1,080	0,99	0,99	1,0600	0,98	0,96
8	1,000	0,051	0,051	1,0000	0,049	0,052	1,0000	0,050	0,048
	1,012	0,10	0,10	1,0085	0,13	0,10	1,0071	0,10	0,10
	1,025	0,27	0,23	1,0170	0,26	0,22	1,0142	0,26	0,22
	1,038	0,56	0,48	1,0255	0,58	0,45	1,0213	0,55	0,47
	1,051	0,83	0,73	1,0340	0,76	0,70	1,0284	0,81	0,71
	1,064	0,95	0,90	1,0425	0,94	0,88	1,0355	0,93	0,89
	1,077	0,98	0,97	1,0510	0,98	0,96	1,0426	0,98	0,97
	1,090	0,99	0,99	1,0600	0,99	0,99	1,0500	0,99	0,99
10	1,000	0,052	0,052	1,0000	0,051	0,050	1,0000	0,050	0,049
	1,010	0,11	0,09	1,0071	0,11	0,10	1,0050	0,10	0,09
	1,020	0,27	0,22	1,0142	0,28	0,24	1,0100	0,22	0,19
	1,030	0,57	0,45	1,0213	0,58	0,46	1,0150	0,49	0,37
	1,040	0,81	0,71	1,0284	0,83	0,72	1,0200	0,72	0,60
	1,050	0,94	0,88	1,0355	0,94	0,89	1,0250	0,89	0,80
	1,060	0,98	0,96	1,0426	0,98	0,97	1,0300	0,97	0,92
	1,070	0,99	0,99	1,0500	0,99	0,99	1,0350	0,99	0,97
15	1,0000	0,052	0,054	1,0000	0,051	0,052	1,0000	0,050	0,048
	1,0057	0,10	0,09	1,0040	0,11	0,08	1,0030	0,11	0,07
	1,0114	0,22	0,17	1,0080	0,20	0,17	1,0060	0,21	0,15
	1,0171	0,45	0,35	1,0120	0,50	0,34	1,0090	0,40	0,30
	1,0228	0,69	0,56	1,0160	0,70	0,54	1,0120	0,64	0,50
	1,0285	0,87	0,74	1,0200	0,88	0,75	1,0150	0,85	0,70
	1,0342	0,96	0,88	1,0240	0,96	0,88	1,0180	0,93	0,84
	1,0400	0,99	0,96	1,0280	0,99	0,95	1,0210	0,98	0,93
20	1,0000	0,049	0,050	1,0000	0,051	0,052	1,0000	0,050	0,050
	1,0043	0,09	0,08	1,0029	0,10	0,09	1,0024	0,10	0,08
	1,0086	0,23	0,17	1,0058	0,22	0,16	1,0048	0,22	0,17
	1,0129	0,46	0,32	1,0087	0,44	0,30	1,0072	0,45	0,32
	1,0172	0,69	0,53	1,0115	0,64	0,51	1,0096	0,69	0,53
	1,0215	0,88	0,74	1,0144	0,85	0,70	1,0120	0,89	0,73
	1,0258	0,97	0,88	1,0173	0,96	0,85	1,0144	0,96	0,87
	1,0300	0,99	0,95	1,0200	0,99	0,94	1,0170	0,99	0,95

Çizelge 4.12. (devam) $T_{\beta_1, ML}$ ve $T_{\beta_1, LS}$ testleri için güç değerleri.

N	200			250			300		
γ	d	T_2	T_4	d	T_2	T_4	d	T_2	T_4
4	1,000	0,049	0,049	1,000	0,051	0,049	1,0000	0,050	0,054
	1,011	0,10	0,10	1,010	0,09	0,08	1,0085	0,09	0,09
	1,022	0,23	0,22	1,020	0,25	0,23	1,0170	0,21	0,20
	1,033	0,49	0,45	1,030	0,47	0,44	1,0255	0,42	0,41
	1,045	0,71	0,70	1,040	0,69	0,68	1,0340	0,65	0,64
	1,056	0,90	0,88	1,050	0,89	0,87	1,0425	0,86	0,81
	1,067	0,98	0,96	1,060	0,96	0,96	1,0510	0,96	0,93
	1,080	0,99	0,99	1,070	0,99	0,99	1,0600	0,99	0,99
6	1,0000	0,050	0,048	1,0000	0,050	0,050	1,0000	0,051	0,049
	1,0071	0,10	0,09	1,0057	0,10	0,08	1,0053	0,08	0,08
	1,0142	0,23	0,19	1,0114	0,19	0,17	1,0105	0,20	0,17
	1,0213	0,48	0,40	1,0171	0,36	0,33	1,0158	0,41	0,34
	1,0284	0,67	0,63	1,0228	0,58	0,52	1,0211	0,58	0,54
	1,0355	0,85	0,82	1,0285	0,80	0,74	1,0264	0,82	0,74
	1,0426	0,94	0,93	1,0342	0,91	0,88	1,0317	0,92	0,87
	1,0500	0,99	0,98	1,0400	0,98	0,95	1,0370	0,98	0,95
8	1,0000	0,051	0,053	1,0000	0,049	0,049	1,0000	0,050	0,050
	1,0057	0,10	0,09	1,0036	0,09	0,08	1,0040	0,10	0,09
	1,0114	0,22	0,21	1,0071	0,18	0,15	1,0080	0,20	0,17
	1,0171	0,53	0,42	1,0107	0,32	0,29	1,0120	0,37	0,33
	1,0228	0,73	0,66	1,0143	0,54	0,50	1,0160	0,59	0,53
	1,0285	0,91	0,84	1,0203	0,79	0,75	1,0200	0,80	0,73
	1,0342	0,98	0,94	1,0231	0,91	0,87	1,0240	0,94	0,86
	1,0400	0,99	0,98	1,0240	0,97	0,96	1,0280	0,98	0,94
10	1,0000	0,051	0,050	1,0000	0,049	0,052	1,0000	0,051	0,050
	1,0043	0,11	0,09	1,0043	0,14	0,09	1,0033	0,08	0,08
	1,0086	0,20	0,18	1,0086	0,31	0,22	1,0066	0,23	0,18
	1,0129	0,46	0,36	1,0129	0,55	0,45	1,0099	0,42	0,35
	1,0172	0,70	0,60	1,0172	0,81	0,68	1,0131	0,65	0,54
	1,0215	0,86	0,78	1,0215	0,93	0,86	1,0164	0,85	0,74
	1,0258	0,96	0,91	1,0258	0,97	0,96	1,0197	0,94	0,88
	1,0300	0,99	0,97	1,0300	0,99	0,99	1,0230	0,99	0,96
15	1,0000	0,051	0,050	1,0000	0,050	0,048	1,0000	0,051	0,049
	1,0027	0,08	0,08	1,0024	0,10	0,08	1,0021	0,10	0,08
	1,0054	0,22	0,17	1,0048	0,23	0,18	1,0042	0,20	0,16
	1,0081	0,43	0,32	1,0072	0,45	0,32	1,0063	0,42	0,31
	1,0110	0,67	0,54	1,0096	0,67	0,53	1,0084	0,64	0,48
	1,0135	0,85	0,72	1,0120	0,86	0,72	1,0105	0,86	0,67
	1,0162	0,96	0,86	1,0144	0,96	0,86	1,0126	0,94	0,82
	1,0190	0,99	0,95	1,0170	0,99	0,95	1,0150	0,98	0,93

Çizelge 4.12. (devam) $T_{\beta_1,ML}$ ve $T_{\beta_1,LS}$ testleri için güç değerleri.

20	1,0000	0,052	0,049	1,0000	0,051	0,051	1,0000	0,050	0,048
	1,0020	0,10	0,08	1,0017	0,11	0,08	1,0015	0,08	0,07
	1,0040	0,22	0,16	1,0034	0,20	0,14	1,0030	0,19	0,15
	1,0060	0,44	0,31	1,0051	0,40	0,29	1,0045	0,40	0,28
	1,0080	0,70	0,50	1,0068	0,64	0,47	1,0060	0,59	0,46
	1,0100	0,88	0,69	1,0085	0,82	0,65	1,0075	0,77	0,66
	1,0120	0,95	0,86	1,0102	0,93	0,81	1,0090	0,90	0,81
	1,0140	0,99	0,94	1,0120	0,97	0,92	1,0110	0,98	0,92

Çizelge 4.13. $T_{\beta_0,ML}^*$ ve $T_{\beta_0,LS}^*$ testleri için güç değerleri.

N	50			100			150		
γ	d	T_5	T_7	d	T_5	T_7	d	T_5	T_7
4	0,000	0,055	0,030	0,000	0,054	0,033	0,000	0,053	0,031
	0,07	0,14	0,04	0,04	0,12	0,04	0,03	0,08	0,04
	0,14	0,31	0,04	0,08	0,22	0,04	0,07	0,23	0,04
	0,21	0,55	0,05	0,12	0,40	0,06	0,11	0,43	0,05
	0,28	0,76	0,08	0,16	0,58	0,08	0,14	0,60	0,07
	0,35	0,91	0,10	0,21	0,81	0,11	0,18	0,78	0,10
	0,42	0,96	0,14	0,25	0,89	0,16	0,21	0,88	0,15
	0,50	0,99	0,23	0,30	0,97	0,25	0,25	0,96	0,24
6	0,000	0,053	0,035	0,000	0,053	0,035	0,000	0,054	0,035
	0,07	0,14	0,04	0,04	0,12	0,04	0,03	0,11	0,04
	0,14	0,31	0,06	0,08	0,21	0,06	0,07	0,21	0,05
	0,21	0,55	0,09	0,12	0,37	0,09	0,11	0,45	0,09
	0,28	0,78	0,16	0,16	0,60	0,14	0,14	0,60	0,15
	0,35	0,89	0,33	0,21	0,80	0,24	0,18	0,82	0,25
	0,42	0,96	0,44	0,25	0,89	0,35	0,21	0,92	0,38
	0,50	0,99	0,63	0,30	0,96	0,47	0,25	0,97	0,51
8	0,000	0,055	0,039	0,000	0,054	0,040	0,000	0,053	0,041
	0,07	0,15	0,05	0,04	0,11	0,05	0,03	0,11	0,05
	0,14	0,32	0,08	0,08	0,22	0,07	0,07	0,22	0,07
	0,21	0,55	0,15	0,12	0,38	0,11	0,11	0,42	0,11
	0,28	0,76	0,26	0,16	0,60	0,18	0,14	0,66	0,18
	0,35	0,92	0,44	0,21	0,77	0,30	0,18	0,83	0,31
	0,42	0,96	0,61	0,25	0,90	0,43	0,21	0,91	0,42
	0,50	0,99	0,76	0,30	0,98	0,55	0,25	0,98	0,53
10	0,000	0,054	0,040	0,000	0,054	0,040	0,000	0,053	0,043
	0,07	0,15	0,05	0,04	0,11	0,05	0,03	0,09	0,05
	0,14	0,31	0,08	0,08	0,21	0,08	0,07	0,24	0,07
	0,21	0,53	0,18	0,12	0,39	0,16	0,11	0,44	0,15
	0,28	0,76	0,33	0,16	0,58	0,23	0,14	0,64	0,25
	0,35	0,91	0,49	0,21	0,79	0,38	0,18	0,80	0,39
	0,42	0,97	0,66	0,25	0,90	0,51	0,21	0,91	0,50
	0,50	0,99	0,80	0,30	0,97	0,65	0,25	0,97	0,62

Çizelge 4.13. (devam) $T_{\beta_0,ML}^*$ ve $T_{\beta_0,LS}^*$ testleri için güç değerleri.

15	0,000	0,053	0,045	0,000	0,052	0,044	0,000	0,050	0,046
	0,07	0,15	0,06	0,04	0,12	0,06	0,03	0,11	0,07
	0,14	0,29	0,10	0,08	0,24	0,11	0,07	0,22	0,11
	0,21	0,53	0,24	0,12	0,37	0,20	0,11	0,40	0,22
	0,28	0,76	0,43	0,16	0,62	0,30	0,14	0,53	0,31
	0,35	0,92	0,61	0,21	0,82	0,46	0,18	0,81	0,49
	0,42	0,96	0,76	0,25	0,92	0,59	0,21	0,91	0,60
	0,50	0,99	0,87	0,30	0,97	0,73	0,25	0,97	0,73
20	0,000	0,054	0,042	0,000	0,053	0,045	0,000	0,051	0,048
	0,07	0,14	0,07	0,04	0,10	0,07	0,03	0,10	0,07
	0,14	0,31	0,13	0,08	0,24	0,12	0,07	0,24	0,12
	0,21	0,54	0,27	0,12	0,40	0,21	0,11	0,47	0,23
	0,28	0,79	0,46	0,16	0,63	0,34	0,14	0,63	0,37
	0,35	0,92	0,64	0,21	0,83	0,50	0,18	0,82	0,53
	0,42	0,97	0,78	0,25	0,92	0,66	0,21	0,94	0,66
	0,50	0,99	0,89	0,30	0,98	0,78	0,25	0,99	0,78

Çizelge 4.13. (devam) $T_{\beta_0,ML}^*$ ve $T_{\beta_0,LS}^*$ testleri için güç değerleri.

N	200			250			300		
γ	d	T_5	T_7	d	T_5	T_7	d	T_5	T_7
4	0,000	0,053	0,034	0,000	0,049	0,032	0,000	0,054	0,036
	0,03	0,11	0,04	0,028	0,10	0,05	0,028	0,12	0,05
	0,07	0,25	0,05	0,057	0,19	0,06	0,057	0,22	0,06
	0,11	0,49	0,08	0,085	0,44	0,09	0,085	0,48	0,08
	0,14	0,70	0,12	0,115	0,66	0,13	0,115	0,71	0,12
	0,18	0,89	0,22	0,145	0,81	0,18	0,145	0,88	0,18
	0,21	0,96	0,36	0,171	0,93	0,24	0,171	0,96	0,25
	0,25	0,99	0,45	0,200	0,97	0,36	0,200	0,99	0,35
6	0,000	0,053	0,037	0,000	0,053	0,041	0,000	0,051	0,038
	0,03	0,11	0,04	0,028	0,12	0,05	0,028	0,11	0,05
	0,07	0,25	0,06	0,057	0,22	0,07	0,057	0,23	0,07
	0,11	0,51	0,11	0,085	0,42	0,11	0,085	0,48	0,10
	0,14	0,75	0,18	0,115	0,65	0,18	0,115	0,73	0,17
	0,18	0,90	0,30	0,145	0,84	0,24	0,145	0,89	0,24
	0,21	0,96	0,44	0,171	0,94	0,33	0,171	0,95	0,34
	0,25	0,99	0,58	0,200	0,98	0,45	0,200	0,98	0,46
8	0,000	0,054	0,042	0,000	0,050	0,041	0,000	0,052	0,043
	0,03	0,15	0,05	0,028	0,11	0,06	0,028	0,12	0,06
	0,07	0,23	0,08	0,057	0,22	0,08	0,057	0,23	0,08
	0,11	0,56	0,17	0,085	0,47	0,14	0,085	0,45	0,12
	0,14	0,75	0,24	0,115	0,66	0,22	0,115	0,69	0,25
	0,18	0,92	0,38	0,145	0,86	0,30	0,145	0,88	0,36
	0,21	0,96	0,51	0,171	0,96	0,43	0,171	0,96	0,47
	0,25	0,99	0,64	0,200	0,98	0,54	0,200	0,99	0,62

Çizelge 4.13. (devam) $T_{\beta_0,ML}^*$ ve $T_{\beta_0,LS}^*$ testleri için güç değerleri.

10	0,000	0,050	0,042	0,000	0,052	0,043	0,000	0,052	0,044
	0,03	0,10	0,06	0,028	0,12	0,07	0,028	0,11	0,07
	0,07	0,26	0,11	0,057	0,23	0,10	0,057	0,27	0,10
	0,11	0,54	0,19	0,085	0,44	0,17	0,085	0,55	0,19
	0,14	0,73	0,32	0,115	0,66	0,25	0,115	0,71	0,30
	0,18	0,90	0,46	0,145	0,84	0,37	0,145	0,89	0,44
	0,21	0,97	0,58	0,171	0,94	0,52	0,171	0,97	0,57
	0,25	0,99	0,71	0,200	0,98	0,63	0,200	0,99	0,68
15	0,000	0,050	0,046	0,00	0,048	0,047	0,00	0,049	0,046
	0,03	0,10	0,07	0,028	0,09	0,08	0,028	0,11	0,08
	0,07	0,24	0,13	0,057	0,22	0,13	0,057	0,26	0,14
	0,11	0,54	0,27	0,085	0,46	0,21	0,085	0,41	0,24
	0,14	0,77	0,39	0,115	0,71	0,32	0,115	0,72	0,37
	0,18	0,91	0,56	0,145	0,83	0,49	0,145	0,89	0,54
	0,21	0,97	0,71	0,171	0,93	0,60	0,171	0,96	0,68
	0,25	0,99	0,82	0,200	0,97	0,74	0,200	0,99	0,80
20	0,000	0,052	0,046	0,000	0,052	0,047	0,000	0,052	0,047
	0,03	0,10	0,08	0,028	0,10	0,08	0,028	0,15	0,09
	0,07	0,28	0,15	0,057	0,25	0,13	0,057	0,28	0,15
	0,11	0,52	0,28	0,085	0,42	0,24	0,085	0,51	0,25
	0,14	0,74	0,44	0,115	0,64	0,38	0,115	0,77	0,44
	0,18	0,92	0,62	0,145	0,85	0,54	0,145	0,90	0,58
	0,21	0,97	0,76	0,171	0,93	0,68	0,171	0,97	0,73
	0,25	0,99	0,87	0,200	0,98	0,79	0,200	0,99	0,85

Çizelge 4.14. $T_{\beta_1,ML}^*$ ve $T_{\beta_1,LS}^*$ testleri için güç değerleri.

N	50			100			150		
γ	d	T_6	T_8	d	T_6	T_8	d	T_6	T_8
4	1,000	0,052	0,049	1,000	0,051	0,049	1,000	0,051	0,052
	1,021	0,09	0,06	1,017	0,10	0,06	1,014	0,12	0,06
	1,042	0,16	0,07	1,034	0,24	0,08	1,028	0,26	0,08
	1,063	0,30	0,09	1,051	0,43	0,11	1,042	0,46	0,12
	1,085	0,51	0,14	1,068	0,65	0,19	1,056	0,68	0,19
	1,110	0,80	0,19	1,085	0,85	0,26	1,070	0,86	0,27
	1,130	0,90	0,29	1,100	0,95	0,36	1,085	0,95	0,39
	1,150	0,96	0,38	1,120	0,99	0,49	1,100	0,99	0,53
6	1,000	0,052	0,048	1,000	0,052	0,041	1,000	0,054	0,038
	1,014	0,10	0,06	1,011	0,09	0,07	1,0085	0,10	0,06
	1,028	0,23	0,09	1,022	0,20	0,10	1,0170	0,21	0,10
	1,042	0,47	0,13	1,033	0,42	0,16	1,0255	0,43	0,16
	1,056	0,73	0,21	1,045	0,64	0,27	1,0340	0,68	0,25
	1,070	0,90	0,32	1,056	0,84	0,40	1,0425	0,86	0,36
	1,085	0,96	0,45	1,067	0,94	0,55	1,0510	0,95	0,49
	1,100	0,99	0,59	1,080	0,99	0,71	1,0600	0,99	0,64

Çizelge 4.14. (devam) $T_{\beta_1,ML}^*$ ve $T_{\beta_1,LS}^*$ testleri için güç değerleri.

8	1,000	0,049	0,052	1,0000	0,052	0,051	1,0000	0,049	0,048
	1,012	0,09	0,07	1,0085	0,11	0,07	1,0071	0,12	0,07
	1,025	0,22	0,11	1,0170	0,19	0,12	1,0142	0,24	0,12
	1,038	0,41	0,22	1,0255	0,44	0,22	1,0213	0,41	0,21
	1,051	0,64	0,36	1,0340	0,65	0,36	1,0284	0,71	0,35
	1,064	0,82	0,53	1,0425	0,84	0,53	1,0355	0,87	0,51
	1,077	0,93	0,70	1,0510	0,94	0,70	1,0426	0,96	0,68
	1,090	0,99	0,83	1,0600	0,98	0,83	1,0500	0,99	0,81
10	1,000	0,051	0,053	1,0000	0,052	0,052	1,0000	0,049	0,051
	1,010	0,10	0,07	1,0071	0,09	0,07	1,0050	0,09	0,07
	1,020	0,21	0,13	1,0142	0,20	0,13	1,0100	0,17	0,11
	1,030	0,40	0,22	1,0213	0,46	0,25	1,0150	0,36	0,19
	1,040	0,65	0,37	1,0284	0,71	0,39	1,0200	0,55	0,31
	1,050	0,84	0,55	1,0355	0,89	0,56	1,0250	0,77	0,45
	1,060	0,95	0,72	1,0426	0,96	0,72	1,0300	0,90	0,61
	1,070	0,98	0,84	1,0500	0,99	0,85	1,0350	0,97	0,73
15	1,0000	0,052	0,051	1,0000	0,051	0,053	1,0000	0,050	0,049
	1,0057	0,11	0,07	1,0040	0,09	0,07	1,0030	0,09	0,07
	1,0114	0,21	0,11	1,0080	0,16	0,11	1,0060	0,17	0,10
	1,0171	0,48	0,20	1,0120	0,34	0,20	1,0090	0,29	0,18
	1,0228	0,69	0,33	1,0160	0,52	0,33	1,0120	0,48	0,28
	1,0285	0,86	0,49	1,0200	0,74	0,49	1,0150	0,62	0,43
	1,0342	0,93	0,63	1,0240	0,86	0,64	1,0180	0,82	0,58
	1,0400	0,99	0,77	1,0280	0,96	0,78	1,0210	0,95	0,71
20	1,0000	0,053	0,050	1,0000	0,050	0,054	1,0000	0,051	0,050
	1,0043	0,10	0,07	1,0029	0,08	0,07	1,0024	0,08	0,07
	1,0086	0,17	0,12	1,0058	0,15	0,11	1,0048	0,16	0,11
	1,0129	0,32	0,21	1,0087	0,30	0,21	1,0072	0,31	0,21
	1,0172	0,55	0,35	1,0115	0,51	0,32	1,0096	0,52	0,34
	1,0215	0,74	0,49	1,0144	0,71	0,48	1,0120	0,74	0,55
	1,0258	0,87	0,67	1,0173	0,86	0,64	1,0144	0,87	0,65
	1,0300	0,94	0,80	1,0200	0,94	0,76	1,0170	0,95	0,79

Çizelge 4.14. (devam) $T_{\beta_1,ML}^*$ ve $T_{\beta_1,LS}^*$ testleri için güç değerleri.

N	200			250			300		
γ	d	T_6	T_8	d	T_6	T_8	d	T_6	T_8
4	1,000	0,052	0,046	1,000	0,050	0,052	1,0000	0,052	0,053
	1,011	0,08	0,06	1,010	0,10	0,06	1,0085	0,09	0,06
	1,022	0,18	0,07	1,020	0,21	0,08	1,0170	0,19	0,07
	1,033	0,40	0,12	1,030	0,41	0,11	1,0255	0,38	0,11
	1,045	0,64	0,17	1,040	0,64	0,17	1,0340	0,59	0,16
	1,056	0,84	0,25	1,050	0,82	0,23	1,0425	0,77	0,21
	1,067	0,95	0,34	1,060	0,93	0,34	1,0510	0,92	0,31
	1,080	0,99	0,46	1,070	0,98	0,46	1,0600	0,97	0,40

Çizelge 4.14. (devam) $T_{\beta_1,ML}^*$ ve $T_{\beta_1,LS}^*$ testleri için güç değerleri.

6	1,0000	0,051	0,052	1,0000	0,051	0,054	1,0000	0,050	0,051
	1,0071	0,08	0,06	1,0057	0,09	0,06	1,0053	0,07	0,06
	1,0142	0,17	0,09	1,0114	0,15	0,09	1,0105	0,16	0,09
	1,0213	0,38	0,15	1,0171	0,29	0,14	1,0158	0,28	0,13
	1,0284	0,59	0,24	1,0228	0,48	0,21	1,0211	0,51	0,20
	1,0355	0,76	0,35	1,0285	0,72	0,29	1,0264	0,69	0,30
	1,0426	0,90	0,47	1,0342	0,83	0,39	1,0317	0,85	0,43
	1,0500	0,97	0,60	1,0400	0,92	0,50	1,0370	0,95	0,53
8	1,0000	0,051	0,052	1,0000	0,048	0,049	1,0000	0,049	0,050
	1,0057	0,08	0,06	1,0036	0,07	0,06	1,0040	0,08	0,06
	1,0114	0,19	0,11	1,0071	0,12	0,08	1,0080	0,16	0,09
	1,0171	0,40	0,19	1,0107	0,23	0,10	1,0120	0,29	0,15
	1,0228	0,64	0,31	1,0143	0,36	0,18	1,0160	0,47	0,26
	1,0285	0,82	0,47	1,0203	0,62	0,31	1,0200	0,71	0,37
	1,0342	0,92	0,60	1,0231	0,77	0,42	1,0240	0,87	0,49
	1,0400	0,98	0,74	1,0240	0,89	0,55	1,0280	0,94	0,61
10	1,0000	0,050	0,052	1,0000	0,050	0,051	1,0000	0,052	0,050
	1,0043	0,09	0,06	1,0043	0,10	0,07	1,0033	0,10	0,07
	1,0086	0,20	0,11	1,0086	0,20	0,13	1,0066	0,15	0,10
	1,0129	0,34	0,21	1,0129	0,44	0,24	1,0099	0,30	0,18
	1,0172	0,56	0,31	1,0172	0,68	0,34	1,0131	0,53	0,28
	1,0215	0,76	0,44	1,0215	0,85	0,54	1,0164	0,69	0,38
	1,0258	0,89	0,58	1,0258	0,94	0,69	1,0197	0,84	0,56
	1,0300	0,97	0,75	1,0300	0,99	0,82	1,0230	0,93	0,68
15	1,0000	0,050	0,053	1,0000	0,050	0,049	1,0000	0,052	0,049
	1,0027	0,09	0,07	1,0024	0,09	0,07	1,0021	0,10	0,07
	1,0054	0,17	0,10	1,0048	0,17	0,11	1,0042	0,18	0,10
	1,0081	0,31	0,19	1,0072	0,29	0,18	1,0063	0,30	0,18
	1,0110	0,53	0,30	1,0096	0,52	0,29	1,0084	0,48	0,30
	1,0135	0,74	0,45	1,0120	0,74	0,44	1,0105	0,66	0,42
	1,0162	0,87	0,59	1,0144	0,88	0,61	1,0126	0,82	0,57
	1,0190	0,96	0,72	1,0170	0,97	0,75	1,0150	0,93	0,70
20	1,0000	0,050	0,048	1,0000	0,051	0,049	1,0000	0,050	0,048
	1,0020	0,07	0,07	1,0017	0,10	0,07	1,0015	0,08	0,06
	1,0040	0,16	0,12	1,0034	0,15	0,11	1,0030	0,15	0,10
	1,0060	0,31	0,19	1,0051	0,27	0,18	1,0045	0,29	0,17
	1,0080	0,47	0,32	1,0068	0,48	0,29	1,0060	0,46	0,29
	1,0100	0,68	0,45	1,0085	0,67	0,42	1,0075	0,63	0,43
	1,0120	0,85	0,63	1,0102	0,82	0,58	1,0090	0,78	0,54
	1,0140	0,93	0,76	1,0120	0,91	0,72	1,0110	0,89	0,71

Çizelge 4.11-4.14 de verilen sonuçlara bakıldığında, DW ve DIW dağılımı için, ML tahmin edicisine dayalı olarak geliştirilen $T_{\beta_0,ML}$, $T_{\beta_1,ML}$, $T_{\beta_0,ML}^*$ ve $T_{\beta_1,ML}^*$ test istatistiklerinin güç

değerlerinin, β 'nın tüm farklı değerlerinde ve tüm örnek çaplarında, LS tahmin edicisine dayalı olarak geliştirilen $T_{\beta_0,LS}$, $T_{\beta_1,LS}$, $T_{\beta_0,LS}^*$ ve $T_{\beta_1,LS}^*$ test istatistiklerinin güç değerlerinden daha yüksek değerler aldığı görülmüştür.



5. UYGULAMA

Bu bölümde literatürden derlenmiş gerçek veri setleri kullanılarak önceki bölümlerde geliştirilen teorilerin uygulamaları yapılmıştır.

5.1. *DW* ve *DIW* Dağılımlarının Modelleme Performanslarını Gösteren Uygulamalar

Bu bölümde, önerilen $DW(\sigma, \beta)$ ve $DIW(\sigma, \beta)$ dağılımlarının model uygunluklarını kontrol etmek için gerçek veri setleri kullanılmıştır. Önerilen dağılımlar $W(\sigma, \beta)$ ve $IW(\sigma, \beta)$ dağılımları ile karşılaştırılmıştır. Model karşılaştırması için *AIC* (Akaike information criterion) ve *BIC* (Bayesian information criterion) kriterleri ile Kolmogorov–Smirnov (*KS*) testi kullanılmıştır. *AIC* ve *BIC* kriterlerinin formülleri sırasıyla aşağıda verildiği gibidir:

$$AIC = -2\log(L) + 2k \quad \text{ve} \quad BIC = -2\log(L) + k\log(n).$$

5.1.1. 50 cihazın bozulma zamanı verisi

Lawless'dan (1982) alınan 50 cihazın yaşam ömürlerine dayalı olarak bozulma zamanlarını gösteren bir veri seti kullanılmıştır. Veri seti Çizelge 5.1 de verildiği gibidir.

Çizelge 5.1. 50 cihazın bozulma zamanı verisi.

X_i :	0,1	0,2	1,0	1,0	1,0	1,0	2,0	3,0	6,0	7,0	11,0	12,0	18,0
	18,0	18,0	18,0	18,0	21,0	32,0	36,0	40,0	45,0	46,0	47,0	50,0	55,0
	60,0	63,0	63,0	67,0	67,0	67,0	67,0	72,0	75,0	79,0	82,0	82,0	83,0
	84,0	84,0	84,0	85,0	85,0	85,0	85,0	85,0	86,0	86,0			

Veri setinin *ML* tahminleri, *AIC*, *BIC* ve *K-S* değerleri Çizelge 5.2 de listelenmiştir. Verinin ele alınan dağılımlara uygunluğu için Kolmogorov-Smirnov testi yapılmıştır. Burada sıfır hipotezleri,

H_{01} : Veri seti $DW(\sigma, \beta)$ dağılımına uymaktadır.

H_{02} : Veri seti $W(\sigma, \beta)$ dağılımına uymaktadır.

şeklinde ifade edilir.

Çizelge 5.2. 50 cihazın bozulma zamanı verisi için ML tahminleri, *AIC*, *BIC* ve *KS* değerleri.

50 cihazın bozulma zamanı verisi						
ML Tahminleri			KS Test			
Dağılım	$\hat{\sigma}$	$\hat{\beta}$	<i>p</i> -değeri	Test İstatistiği	<i>AIC</i>	<i>BIC</i>
<i>DW</i>	34,1820	0,8793	0,0661	0,1811	483,5672	487,3912
<i>W</i>	44,9125	0,9490	0,0521	0,1928	486,0036	489,8277

Çizelge 5.2 incelendiğinde, 50 cihazın bozulma zamanı verisinin, *KS* testinin *p* değerlerine göre, her iki dağılıma da uygun olduğu görülmektedir. Dağılımların *AIC* ve *BIC* kriterlerine bakıldığında ise, $DW(\sigma, \beta)$ dağılımı, $W(\sigma, \beta)$ dağılımına göre daha düşük *AIC* ve *BIC* değerlerine sahip olduğundan dolayı, veri setini daha iyi modellediği söylenebilir

5.1.2. Havalandırma sisteminin bozulma zamanı verisi

Linhart ve Zuchini'den (1986) alınan bir uçağın havalandırma sisteminin bozulma zamanlarını gösteren bir veri seti kullanılmıştır. Veri seti Çizelge 5.3 de verildiği gibidir.

Çizelge 5.3. Havalandırma sisteminin bozulma zamanı verisi.

1	3	5	7	11	11	11	12	14	14
14	16	16	20	21	23	42	47	52	62
71	71	87	90	95	120	120	225	246	261

Veri setinin *ML* tahminleri, *AIC*, *BIC* ve *KS* değerleri Çizelge 5.4 de listelenmiştir. Verinin ele alınan dağılımlara uygunluğu için Kolmogorov-Smirnov testi yapılmıştır. Burada sıfır hipotezleri,

H_{01} : Veri seti $DIW(\sigma, \beta)$ dağılımına uymaktadır.

H_{02} : Veri seti $IW(\sigma, \beta)$ dağılımına uymaktadır.

şeklinde ifade edilir.

Çizelge 5.4. Havalandırma sisteminin bozulma zamanı verisi için *ML* tahminleri, *AIC*, *BIC* ve *KS* değerleri.

Havalandırma sisteminin bozulma zamanı verisi						
<i>ML</i> Tahminleri			<i>KS</i> Test			
Dağılım	$\hat{\sigma}$	$\hat{\beta}$	<i>p</i> -değeri	Test İstatistiği	<i>AIC</i>	<i>BIC</i>
<i>DIW</i>	9,7094	0,8006	0,4092	0,1569	313,0592	315,8616
<i>IW</i>	14,6159	0,7240	0,3897	0,1594	314,2288	317,0312

Çizelge 5.4 incelendiğinde, havalandırma sisteminin bozulma zamanı verisinin, *KS* testinin *p* değerlerine göre, her iki dağılıma da uygun olduğu görülmektedir. Dağılımların *AIC* ve *BIC* kriterlerine bakıldığında ise, $DIW(\sigma, \beta)$ dağılımı, $IW(\sigma, \beta)$ dağılımına göre daha düşük *AIC* ve *BIC* değerlerine sahip olduğundan dolayı, veri setini daha iyi modellediği söylenebilir.

5.2. DW ve DIW Dağılımlarının Basit Doğrusal Regresyondaki Kullanımlarına İlişkin Uygulamalar

Gerçek iki veri seti üzerinde, *Q-Q* grafiği ve *KS* testi kullanılarak hata terimlerinin dağılımının *DW* ve *DIW* dağılımlarına sahip olduğu gösterilmiştir. Ayrıca *ML* ve *LS* tahmin edicileri kullanılarak lineer regresyon denklemleri tahmin edilmiştir.

5.2.1. Buhar ve sıcaklık verisi

Draper ve Smith'den (1966) alınan buhar (y_i) ile sıcaklık (x_i) arasındaki ilişkiyi bulmak için bir çalışma yapmışlardır. Veri seti Çizelge 5.5 de verildiği gibidir.

Çizelge 5.5. Buhar ve sıcaklık verisi.

i	y_i	x_i	i	y_i	x_i	i	y_i	x_i	i	y_i	x_i
1	10,98	35,3	8	8,50	76,7	15	10,94	46,8	22	8,47	58,1
2	11,13	29,7	9	7,82	70,7	16	9,58	48,5	23	8,86	44,6
3	12,51	30,8	10	9,14	57,5	17	10,09	59,3	24	10,36	33,4
4	8,40	58,8	11	8,24	46,4	18	8,11	70,0	25	11,08	28,6
5	9,27	61,4	12	12,19	28,9	19	6,83	70,0			
6	8,73	71,3	13	11,88	28,1	20	8,88	74,5			
7	6,36	74,4	14	9,57	39,1	21	7,68	72,1			

Öncelikle hata terimlerinin dağılımını belirlemek için Q-Q grafiği tekniği kullanılmıştır. Q-Q grafiği tekniği, bir veri setinin belli bir dağılımdan gelip gelmediğini belirlemek için kullanılan görsel bir tekniktir. Q-Q grafiği tekniği aşağıdaki adımlar izlenerek yapılır:

- i. Veriler küçükten büyüğe doğru sıralanır

$$Y_{(1)} < Y_{(2)} < \dots < Y_{(n)}.$$

- ii. $t(i) = E\left(Z_{(i)}\right)\left(Z_{(i)} = \frac{Y_{(i)} - \mu}{\sigma}\right)$ değerleri yaklaşık olarak

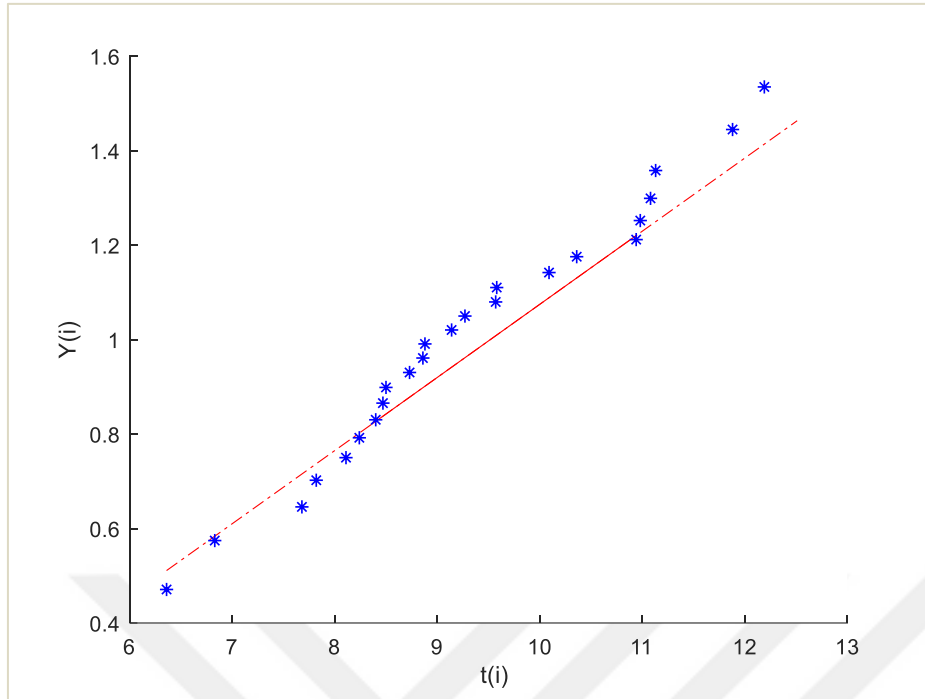
$$F(t_{(i)}) = \int_{-\infty}^{t_{(i)}} f(z) dz = \frac{i}{n+1} \quad \text{eşitliği} \quad \text{kullanılarak} \quad t_{(i)} = F^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right) \quad \text{şeklinde}$$

hesaplanır. Burada F , Y rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonudur. $t_{(i)}$ değerleri DW dağılımının birikimli dağılım fonksiyonu kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanmıştır:

$$t_{(i)} = \left[-\ln \left(1 - \ln \left(1 + \frac{i(e-1)}{n+1} \right) \right) \right]^{1/\beta}.$$

- iii. $Y_{(i)}$ değerleri y eksenine ve $t_{(i)}$ değerleri x eksenine gelecek şekilde grafiğe yerleştirilir. Eğer veriler düz bir doğru üzerinde yayılım gösteriyorsa verilerin belirtilen dağılıma uyduğuna karar verilir.

Farklı β değerleri için buhar ve sıcaklık verisine ait Q-Q grafikleri elde edilmiş ve bunlar arasından şekil parametresi $\beta = 3$ olan DW dağılımın hata terimlerinin dağılımına en iyi uyum gösterdiği belirlenmiştir.



Şekil 5.1. Buhar ve sıcaklık verisi için Q-Q grafiği.

Ayrıca, Q-Q grafik tekniği kullanılarak elde edilen sonucu desteklemek için KS testi yapılmıştır. Burada sıfır hipotezi,

H_0 : Veri seti DW dağılımına uymaktadır.

şeklinde ifade edilir. H_0 hipotezini test etmek için $D = \sup \{ |F_n(y) - F_0(y)| \}$ istatistiği kullanılır. Burada,

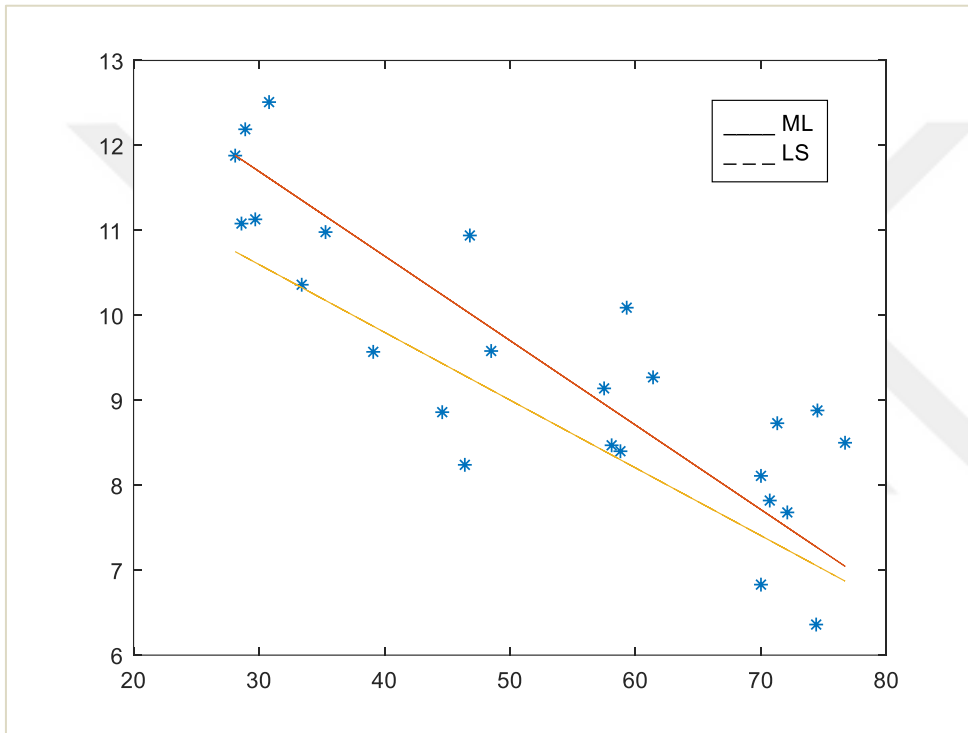
$$F_n(y) = \begin{cases} 0, & y < Y_{(1)} \\ \frac{i}{n}, & Y_{(i)} \leq y \leq Y_{(i+1)} \\ 1, & y \geq Y_{(n)} \end{cases}$$

şeklindedir.

Buhar ve sıcaklık veri seti için KS testi Matlab programı yardımıyla yapılmıştır. KS test istatistiğinin değeri $KS=0,133$ ve p değeri $p=0.715$ olarak elde edilmiştir. $p=0,715 > \alpha=0,05$

olduğundan H_0 hipotezi kabul edilir yani buhar ve sıcaklık veri seti DW dağılımına uymaktadır.

Hata terimlerinin DW olması durumunda, buhar ve sıcaklık verisi için, ML ve LS yöntemleriyle regresyon denklemi tahmin edilmiştir. ML ve LS tahmin edicileri kullanılarak elde edilen regresyon denklemleri ile buhar ve sıcaklık verisinin grafikleri Şekil 5.2 de verildiği gibidir.



Şekil 5.2. Tahmin edilen regresyon denklemleri ile buhar ve sıcaklık verisi grafiği.

Buhar ve sıcaklık verisi kullanılarak, ML ve LS yöntemleriyle elde edilen tahmini regresyon denklemleri sırasıyla

$$\hat{y}_i = 13.62 - 0.07x_i$$

ve

$$\hat{y}_i = 12.99 - 0.08x_i$$

olarak elde edilmiştir. Şekil 5.2 ye bakıldığında, buhar ve sıcaklık verisi için *ML* tahmin edicileri kullanılarak elde edilen regresyon denkleminin veriyi daha iyi fit ettiği görülmektedir.

5.2.2. Tüketicilerin gelir ve harcama verisi

Frisch'ten alınan veride, tüketicilerin harcamaları (y_i) ile gelirleri (x_i) arasındaki ilişkiyi bulmak için bir çalışma yapılmıştır. Çalışmalarında 1963-1990 yılları arasında İngiltere'de yaşayan 28 kişinin verilerini kullanmışlardır. Veri seti Çizelge 5.6 da verildiği gibidir.

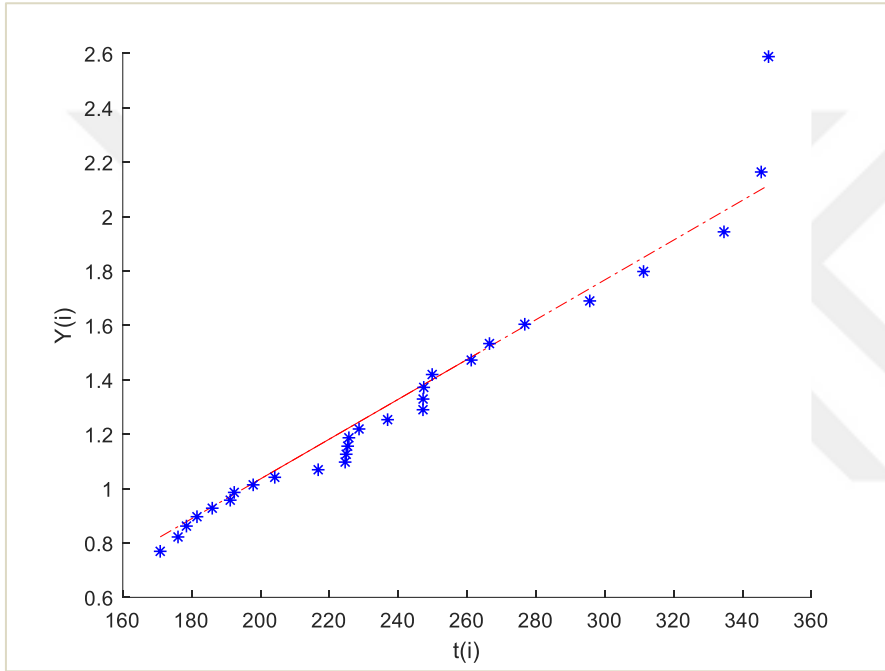
Çizelge 5.6. Tüketicilerin harcama ve gelir verileri, İngiltere, 1963-1990.

yıl	y_i	x_i	yıl	y_i	x_i
1963	170.874	185.426	1977	224.892	247.695
1964	176.044	193.247	1978	236.909	265.925
1965	178.493	196.998	1979	247.212	281.084
1966	181.550	201.207	1980	247.185	285.411
1967	185.985	204.171	1981	247.402	283.176
1968	191.209	207.772	1982	249.852	281.722
1969	192.366	209.684	1983	261.200	289.204
1970	197.873	217.675	1984	266.486	299.756
1971	204.139	220.344	1985	276.742	309.821
1972	216.752	238.744	1986	295.622	323.622
1973	228.615	254.329	1987	311.234	334.702
1974	225.317	252.360	1988	334.591	354.627
1975	224.580	253.814	1989	345.406	371.676
1976	225.666	253.012	1990	347.527	378.325

Öncelikle hata terimlerinin dağılımını belirlemek için *Q-Q* grafiği kullanılmıştır. Örnek 5.2.1 de verilen adımlar izlenerek $t_{(i)}$ değerleri *DIW* dağılımının birikimli dağılım fonksiyonu kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanmıştır:

$$t_{(i)} = \frac{1}{\left(-\ln \left(\ln \left(1 + \frac{i(e-1)}{n+1} \right) \right) \right)^{1/\beta}}$$

Farklı β değerleri için buhar ve sıcaklık verisine ait Q-Q grafikleri elde edilmiş ve bunlar arasından şekil parametresi $\beta = 4$ olan *DIW* dağılımının hata terimlerinin dağılımına en iyi uyum gösterdiği belirlenmiştir.



Şekil 5.3. Gelir ve harcama verisi için Q-Q grafiği.

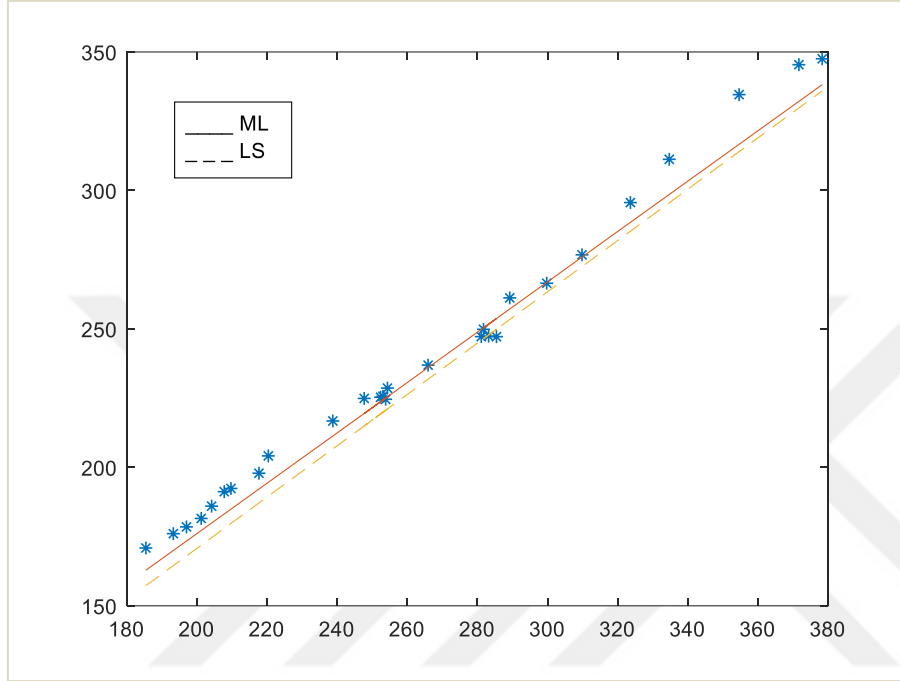
Ayrıca, Q-Q grafik tekniği kullanılarak elde edilen sonucu desteklemek için *KS* testi yapılmıştır. Burada sıfır hipotezi,

H_0 : Veri seti *DIW* dağılımına uymaktadır.

şeklinde ifade edilir.

Gelir ve harcama veri seti için *KS* testi Matlab programı yardımıyla yapılmıştır. *KS* test istatistiğinin değeri $KS=0,115$ ve p değeri $p=0,815$ olarak elde edilmiştir. $p=0,815 > \alpha=0,05$ olduğundan H_0 hipotezi kabul edilir yani gelir ve harcama veri seti *DIW* dağılımına uymaktadır.

Hata terimlerinin DIW olması durumunda, tüketicilerin gelir ve harcama verisi için, *ML* ve *LS* yöntemleriyle regresyon denklemi tahmin edilmiştir. *ML* ve *LS* tahmin edicileri kullanılarak elde edilen regresyon denklemleri ile gelir ve harcama verisinin grafikleri Şekil 5.4 de verildiği gibidir.



Şekil 5.4. Tahmin edilen regresyon denklemleri ile gelir ve harcama verisi grafiği.

Tüketicilerin gelir ve harcama verisi kullanılarak, *ML* ve *LS* yöntemleriyle elde edilen tahmini regresyon denklemleri sırasıyla

$$\hat{y}_i = -5.7 + 0.90x_i$$

ve

$$\hat{y}_i = -14.49 + 0.92x_i$$

olarak elde edilmiştir. Şekil 5.4 e bakıldığında, tüketicilerin gelir ve harcama verisi için *ML* tahmin edicileri kullanılarak elde edilen regresyon denkleminin veriyi daha iyi fit ettiği görülmektedir.



6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, Weibull ve inverse Weibull dağılımları temel alınarak, DUS dönüşüm metoduyla DW ve DIW dağılımları önerilmiştir. Bu dağılımların momentleri, basıklık ve çarpıklık katsayıları, moment çıkaran fonksiyonları ve quantile fonksiyonları gibi istatistiksel özellikleri incelenmiştir. Ayrıca önerilen dağılımların bilinmeyen parametreleri için ML , LS , WLS , CM ve AD tahmin edicileri elde edilmiştir. Farklı parametre ve örnek çapı değerleri için DW ve DIW dağılımlarının parametrelerinin ML , LS , WLS , CM ve AD tahmin edicilerinin etkinlikleri MSE ve Def kriterleri kullanılarak Monte Carlo simülasyonu yardımıyla karşılaştırılmıştır. Parametre sayısının tahmin edicilerin performansları üzerindeki etkisini görebilmek için iki ve üç parametrelili DW ve DIW dağılımları ayrı ayrı incelenmiş ve her iki durum için elde edilen Monte Carlo simülasyon sonuçları çizelgeler halinde verilmiştir.

İki parametrelili DW ve DIW dağılımlarının simülasyon sonuçlarına bakıldığında, MSE ve Def kriterlerine göre, ML ve AD tahmin edicileri LS , WLS ve CM tahmin edicilerine göre daha etkin tahmin ediciler olarak saptanmıştır. ML ve AD tahmin edicilerinin etkinliklerine bakıldığında ise düşük örnek çaplarında genellikle AD , örnek çapı arttıkça ise ML tahmin edicisinin daha etkin olduğu görülmüştür.

Üç parametrelili DW dağılımının, şekil parametresi β 'nin bilinen ve bilinmeyen durumlarındaki simülasyon sonuçlarına bakıldığında, MSE ve Def kriterlerine göre, $\beta = 0,5$ iken, tüm tahmin edicilerin etkinliklerinin birbirine yakın etkinlik değerlerine sahip olduğu, $\beta = 1$ ve $\beta = 1,5$ iken, AD ve WLS tahmin edicilerinin etkinlikleri en iyi performans gösterirken, bunları LS ve CM tahmin edicileri takip etmiş, en kötü etkinlik performansını ise ML tahmin edicisi göstermiştir. $\beta = 2$, $\beta = 3$ ve $\beta = 4$ iken ise, ML , AD ve WLS tahmin edicilerinin etkinlikleri birbirine yakın ve iyi performans sergilerken, en kötü etkinlik değerlerine CM ve LS tahmin edicilerinin sahip olduğu görülmüştür.

Üç parametrelili DIW dağılımının, şekil parametresi β 'nin bilinen ve bilinmeyen durumlarındaki simülasyon sonuçlarına bakıldığında, MSE ve Def kriterlerine göre, $\beta = 0,5$ iken, WLS tahmin edicisi en iyi etkinlik değerlerine sahipken, örnek çapı arttıkça diğer tahmin edicilerinin etkinlik değerlerinin de yükseldiği ve birbirlerine yaklaştığı görülmüştür.

β 'nın diğer tüm durumlarında *ML* tahmin edicisi en etkin değerlere sahip olup en iyi performansı sergilemiştir. *ML* tahmin edicisini sırasıyla *AD*, *WLS* ve *CM* izlerken en kötü etkinlik değerlerine sahip tahmin edicinin *LS* tahmin edicisi olduğu görülmüştür.

Önerilen dağılımların lineer modellere uygulanmasını göstermek amacıyla, *DW* ve *DIW* dağılımları basit doğrusal regresyon modeline uygulanmıştır. Lineer regresyon modelinde hataların dağılımı *DW* ve *DIW* dağılımı olarak alınıp, modelin bilinmeyen parametreleri için *ML* ve *LS* tahmin edicileri elde edilmiştir. Farklı parametre ve örnek çapı değerleri için model parametrelerinin *ML* ve *LS* tahmin edicilerinin etkinlikleri *MSE* ve *Def* kriterleri kullanılarak Monte Carlo simülasyonu yardımıyla karşılaştırılmıştır.

Simülasyon sonuçlarına bakıldığında, hem *MSE* hem de *Def* kriterlerine göre, β_0 , β_1 , ve σ parametreleri için, β 'nın farklı değerleri ve incelenen tüm örnek çaplarında, *ML* tahmin edicisi *LS* tahmin edicisinden daha iyi performans göstermiştir.

Ayrıca lineer regresyon modelindeki bilinmeyen parametreler için, *ML* ve *LS* tahmin edicileri kullanılarak hipotez test prosedürleri geliştirilmiştir. Regresyon modelindeki bilinmeyen parametreler için, geliştirilen test istatistiklerinin, I. tip hata ve testin gücü bakımından Monte Carlo simülasyon çalışması yapılmıştır.

I. tip hatalara bakıldığında, tüm örnek çaplarında, önerilen test istatistiklerinin, 0,050'ye çok yakın değerler aldıkları görülmektedir. Bu durum önerilen test istatistiklerinin düşük örnek çaplarında da iyi birer test istatistikleri olduklarının göstergesidir.

Test istatistiklerinin güç değerleri için yapılan simülasyon çalışmasına bakıldığında, *DW* ve *DIW* dağılımı için, *ML* tahmin edicisine dayalı olarak geliştirilen T_1 , T_2 , T_5 ve T_6 test istatistiklerinin güç değerlerinin, β 'nın tüm farklı değerlerinde ve tüm örnek çaplarında, *LS* tahmin edicisine dayalı olarak geliştirilen T_3 , T_4 , T_7 ve T_8 test istatistiklerinin güç değerlerinden daha yüksek testin gücü değerlerine sahip olduğu görülmüştür.

Son olarak literatürden derlenmiş gerçek veri setleri kullanılarak önceki bölümlerde geliştirilen teorilerin uygulamaları yapılmıştır. $DW(\sigma, \beta)$ ve $DIW(\sigma, \beta)$ dağılımlarının

model uygunluklarını kontrol etmek için 2 gerçek veri seti kullanılmıştır. Önerilen dağılımlar $W(\sigma, \beta)$ ve $IW(\sigma, \beta)$ dağılımları ile karşılaştırılmıştır. Model karşılaştırması için AIC ve BIC kriterleri ile KS testi kullanılmıştır.

$DW(\sigma, \beta)$ ve $W(\sigma, \beta)$ dağılımları ile $DIW(\sigma, \beta)$ ve $IW(\sigma, \beta)$ dağılımlarının model uygunluklarını kontrol etmek için, sırasıyla 50 cihazın bozulma zamanını gösteren bir veri seti ile bir uçağın havalandırma sisteminin bozulma zamanlarını gösteren veri setleri kullanılmıştır. Yapılan KS testlerinin p değerlerine bakıldığında, veri setlerinin dağılımlara uygun olduğu görülmektedir. AIC ve BIC kriterlerine bakıldığında ise, $DW(\sigma, \beta)$ dağılımı ve $DIW(\sigma, \beta)$ dağılımının, sırası ile $W(\sigma, \beta)$ ve $IW(\sigma, \beta)$ dağılımlarından daha düşük AIC ve BIC değerlerine sahip olduklarından dolayı, önerilen dağılımların veri setlerini daha iyi modellediği görülmüştür.

Ayrıca $DW(\sigma, \beta)$ ve $DIW(\sigma, \beta)$ dağılımlarının basit doğrusal regresyondaki kullanımlarına ilişkin uygulamalar gerçek iki veri seti üzerinde uygulama yapılmıştır. Her iki veri seti için de $Q-Q$ grafiği ve KS testi kullanılarak hata terimlerinin dağılımlarının $DW(\sigma, \beta)$ ve $DIW(\sigma, \beta)$ dağılımlarına sahip oldukları gösterilmiştir. Ayrıca ML ve LS tahmin edicileri kullanılarak lineer regresyon denklemleri tahmin edilmiştir. Her iki veri seti için de ML tahmin edicileri kullanılarak elde edilen regresyon denklemlerinin veriyi daha iyi fit ettiği görülmüştür. Şekil parametresi olan β 'nın uygun değerleri için, yapılan simülasyon çalışmasıyla sonuçlar desteklenmiştir.

Bu çalışmada kullanılan DUS tekniği ile, önerilen dağılımların dışında başka dağılımlar önerilebilir, önerilen dağılımlar regresyon, deney tasarımı, zaman serileri gibi alanlarda hata terimlerinin dağılımı olarak alınıp yeni test istatistikleri önerilebilir.



KAYNAKLAR

- Alshangiti, A. M., Kayid, M., and Alarfaj, B. (2014). A new family of Marshall–Olkin extended distributions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 271, 369-379.
- Aryal, G. R., and Tsokos, C. P. (2009). On the transmuted extreme value distribution with application. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 71(12), 1401-1407.
- Aryal, G. R., and Tsokos, C. P. (2011). Transmuted Weibull distribution: A generalization of the Weibull probability distribution. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 4(2), 89-102.
- Aryal, G. R. (2013). Transmuted log-logistic distribution. *Journal of Statistics Applications & Probability*, 2(1), 11.
- Ashour, S. K., and Eltehiwy, M. A. (2013). Transmuted lomax distribution. *American Journal of Applied Mathematics and Statistics*, 1(6), 121-127.
- Cordeiro, G. M., Ortega, E. M., and da Cunha, D. C. (2013). The exponentiated generalized class of distributions. *Journal of Data Science*, 11(1), 1-27.
- Draper, N. R., and Smith, H. (1966). *Applied linear regression*. New York, NY: Wiley.
- Gupta, R. C., Gupta, P. L., and Gupta, R. D. (1998). Modeling failure time data by Lehman alternatives. *Communications in Statistics-Theory and methods*, 27(4), 887-904.
- Islam, M. Q., Tiku, M. L., and Yildirim, F. (2001). Nonnormal regression. I. Skew distributions. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 30(6), 993-1020.
- Jahan, S., and Khan, A. (2012). Power of t-test for simple linear regression model with non-normal error distribution: a quantile function distribution approach. *Journal of Scientific Research*, 4(3), 609-622.
- Kumar, D., Singh, U., and Singh, S. K. (2015). A method of proposing new distribution and its application to Bladder cancer patients data. *Journal of Statistics Applications & Probability Letters*, 2(3), 235-245.
- Kumaraswamy, P. (1980). A generalized probability density function for double-bounded random processes. *Journal of Hydrology*, 46(1-2), 79-88.
- Lawless, H. (1982). Adapting efficiency of salt-sucrose mixtures. *Perception & psychophysics*, 32(5), 419-422.
- Linhart, H., and Zucchini, W. (1986). *Model selection*. John Wiley & Sons.
- MacGillivray, H. L., and Cannon, W. H. (2000). Generalizations of the g-and-h distributions and their uses. *Preprint copies may be obtained by contacting the first author*.
- Mahmoud, M. R., and Mandouh, R. M. (2013). On the transmuted Fréchet distribution. *Journal of Applied Sciences Research*, 9(10), 5553-5561.

- Maurya, S. K., Kaushik, A., Singh, R. K., Singh, S. K., and Singh, U. (2016). A new method of proposing distribution and its application to real data. *Imperial Journal of Interdisciplinary Research*, 2(6).
- Maurya, S. K., Kaushik, A., Singh, S. K., and Singh, U. (2017). A new class of distribution having decreasing, increasing, and bathtub-shaped failure rate. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 46(20), 10359-10372.
- Merovci, F. (2013). Transmuted lindley distribution. *International Journal of Open Problems in Computer Science and Mathematics*, 238(1393), 1-20.
- Merovci, F., and Puka, L. (2014, January). Transmuted pareto distribution. *In ProbStat Forum*, 7, 1-11.
- Montgomery, D. C., Peck, E. A., and Vining, G. G. (2012). *Introduction to linear regression analysis* (Vol. 821). John Wiley & Sons.
- Mudholkar, G. S., and Srivastava, D. K. (1993). Exponentiated Weibull family for analyzing bathtub failure-rate data. *IEEE transactions on reliability*, 42(2), 299-302.
- Mutan, O. C., and Şenoğlu, B. (2009). A Monte Carlo Comparison of Regression Estimators When the Error Distribution is Long-Tailed Symmetric. *Journal of Modern Applied Statistical Methods*, 8(1), 14.
- Nadarajah, S., and Kotz, S. (2006). The exponentiated type distributions. *Acta Applicandae Mathematica*, 92(2), 97-111.
- Sharma, V. K., Singh, S. K., and Singh, U. (2014). A new upside-down bathtub shaped hazard rate model for survival data analysis. *Applied Mathematics and Computation*, 239, 242-253.
- Shaw, W. T., and Buckley, I. R. (2007). The alchemy of probability distributions: Beyond gram-charlier & cornish-fisher expansions, and skew-normal or kurtotic-normal distributions. *Submitted*, 7, 64.
- Shaw, W. T., and Buckley, I. R. (2009). The alchemy of probability distributions: beyond Gram-Charlier expansions, and a skew-kurtotic-normal distribution from a rank transmutation map. *arXiv preprint arXiv*, 0901, 0434.
- Swain, J. J., Venkatraman, S., and Wilson, J. R. (1988). Least-squares estimation of distribution functions in Johnson's translation system. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 29(4), 271-297.
- Tiku, M. L., and Vaughan, D. C. (1999). A family of short-tailed symmetric distributions. *Technical Report*, McMaster University, Canada.
- Tiku, M. L., Islam, M. Q., and Selçuk, A. S. (2001). Nonnormal regression. II. Symmetric distributions. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 30(6), 1021-1045.
- Weibull, W. A. (1938). A statistical theory of the strength of material. *Ingvetensk. Akad. Handl*, 151, 5-45.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : GÜL, Hasan Hüseyin
 Uyruğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 22.11.1986, Konya
 Medeni hali : Evli
 Telefon : 0 (505) 807 70 07
 Faks : 0 (312) 202 15 51
 e-mail : hasangul@gazi.edu.tr



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Doktora	Gazi Üniversitesi / İstatistik Bölümü	Devam ediyor
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi / İstatistik Bölümü	2014
Lisans	Selçuk Üniversitesi / İstatistik Bölümü	2009
Lise	Bolu Atatürk Anadolu Lisesi	2004

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2011-Halen	Gazi Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
2010-2011	Giresun Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

Gokpinar, E., Hasan, G. U. L., Gokpinar, F., BAYRAK, H., & Ozonur, D. (2014). Permutation Test Approach for Ordered Alternatives in Randomized Complete Block Design: A Comparative Study. *Gazi University Journal of Science*, 27(1), 645-651.

Mutlu, H. T., Gökpinar, F., Gökpinar, E., Gül, H. H., & Güven, G. (2017). A new computational approach test for one-way ANOVA under heteroscedasticity. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 46(16), 8236-8256.

- Gül, H. H., Gökpınar, E., Ebeğil, M., Özdemir, Y. A., & Gökpınar, F. (2019). A New Test for the Homogeneity of Inverse Gaussian Scale Parameters Based on Computational Approach Test (Ujian Baru untuk Kehomogenan Parameter Skala Gaussian Songsang Berdasarkan Ujian Pendekatan Pengkomputeran). *Sains Malaysiana*, 48(8), 1777-1785.
- Akdur, H. T. K., Ozonur, D., Gul, H. H., & Bayrak, H. (2019). Comparison of Rank-Based Tests for Ordered Alternative Hypotheses in Randomized Complete Block Designs. *Gazi University Journal of Science*, 32(2), 705-716.
- Gül, H. H., ve Bayrak, H. (2019, 21-22 Aralık). *Karma tasarımlarda genel alternatifler için önerilen parametrik olmayan test kombinasyonu*. Uluslararası Bilim, Teknoloji ve Sosyal Bilimlerde Güncel Gelişmeler Sempozyumunda sunuldu, Ankara.
- Gül, H. H., Acıtaş, Ş., Şenoğlu, B. ve Bayrak, H. (2019, 26-28 Nisan). *Dus Weibull distribution and parameter estimation*. Çukurova II. Uluslararası Multidisipliner Çalışmalar Sempozyumunda sunuldu, Adana.
- Gül, H. H., Acıtaş, Ş., Şenoğlu, B. ve Bayrak, H. (2019, 26-28 Nisan). *Paremeter estimation in simple linear regression model under nonnormal error terms*. Çukurova II. Uluslararası Multidisipliner Çalışmalar Sempozyumunda sunuldu, Adana.
- Gül, H. H., Acıtaş, Ş., Şenoğlu, B. ve Bayrak, H. (2018, 17-20 Ekim). *Dus inverse Weibull dağılımı ve uygulaması*. Ekonometr, Yöneylem ve İstatistik Sempozyumunda sunuldu, Antalya.
- Akdur, H. T. K., Gül, H. H., Özönur, D. ve Bayrak, H. (2017, 24-26 Mayıs). *Rank-based nonparametric tests for ordered alternatives with randomized complete block design*. 3th International Researches Statisticians and Young Statisticians Sempozyumunda sunuldu, Konya.
- Gül, H. H., ve Bayrak, H. (2016, 7-9 Ekim). *Karma tasarımlarda sıralı alternatifler için önerilen test kombinasyonları*. Xth International Statistics Days Sempozyumunda sunuldu, Giresun.
- Gul, H. H., Gökpınar, F., Gökpınar, E. Y. ve Bayrak, H. (2016, 4-8 Mayıs). *Two test for equality of scale parameters of inverse Gaussian distribution using computational approach*. 2th International Researches Statisticians and Young Statisticians Sempozyumunda sunuldu, Ankara.
- Gul, H. H., Gökpınar, F. ve Gökpınar, E. Y. (2015, 28 Ekim-1 Kasım). *Hesaplamalı yaklaşım metoduyla inverse Gaussian dağılımının ölçek parametrelerinin homojenliği için bir test*. 9th Uluslararası İstatistik Sempozyumunda sunuldu, Antalya.
- Gul, H. H., Bayrak, H., Gökpınar, E. Y. ve Gökpınar, F. (2014, 10-14 Mayıs). *Bootstrap version for ordered alternatives in randomized complete block design and a comparison*. 9th International Statistical Day Sempozyumunda sunuldu, Antalya.

Hobiler

Spor yapmak, kitap okumak, müzik dinlemek.



GAZİ GELECEKTİR...