

T.C
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

KÜRESEL MEKANİZMALARDA DİZİSEL VE MODÜLER SLERP
İNTERPOLASYONLARI

Çetin KUŞÇU

OCAK 2020

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

KÜRESEL MEKANİZMALARDA DİZİSEL VE MODÜLER SLERP
İNTERPOLASYONLARI

Hazırlayan
Çetin KUŞÇU

Danışman
Doç. Dr. Hatice KUŞAK SAMANCI

Jüri Üyeleri
Prof. Dr. Şenay BAYDAŞ
Doç. Dr. Hatice KUŞAK SAMANCI
Doç. Dr. Ali ÇAKMAK

OCAK 2020

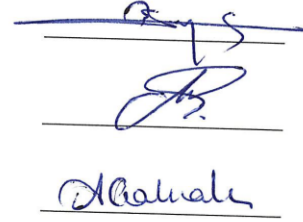
ONAY

Çetin KUŞÇU tarafından hazırlanan “**Küresel Mekanizmalarda Dizisel ve Modüler SLERP İnterpolasyonları**” adlı tez çalışması 17/01/2020 tarihinde yapılan sınavla aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Şenay BAYDAŞ
(Başkan)
Doç. Dr. Hatice KUŞAK SAMANCI
(Danışman)
Doç. Dr. Ali ÇAKMAK
(Üye)

İmza



Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun 02.03./2020 gün ve 01./22. Sayılı kararı ile onaylanmıştır.



Prof. Dr. Zeki ARGUNHAN
Enstitü Müdürü

BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZ ÇALIŞMASI

ETİK BEYANI

Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre hazırlamış olduğum **“Küresel Mekanizmalarda Dizisel ve Modüler SLERP İnterpolasyonları”** adlı tezimin özgün bir çalışma olduğunu, tez hazırlanırken tüm aşamalarda bilimsel etik ilkelerine uygun davrandığımı, tez kapsamında sunulan tüm verileri bilimsel etik ilkelerine uygun elde ettiğimi, tezde faydalandığım tüm eserlere atıf yaptığımı ve kaynaklar kısmında bu eserleri gösterdiğimi beyan ederim. 17/01/2020


Çetin KUŞÇU

SEVGİLİ EŞİM DİLEK VE BİRİCİK KIZIM RANA ECRİN'E

ÖZET

KÜRESEL MEKANİZMALARDA DİZİSEL VE MODÜLER SLERP İTERPOLASYONLARI

Çetin KUŞÇU

Yüksek Lisans Tezi

Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Hatice KUŞAK SAMANCI

Ocak 2020, 94 sayfa

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde çalışmamızın tarihsel gelişimi hakkında bilgiler verildi. Materyal ve yöntem bölümünde kuaterniyonlar, dual sayılar, dual vektörler, dual kuaterniyonlar, kuaterniyon interpolasyonları, dual kuaterniyon interpolasyonları, Blaschke çatısı ile ilgili temel tanım ve teoremler verilip, çeşitli örneklendirmeler yapıldı. Bulgular bölümünde, küresel mekanizmalarda dizisel ve modüler SLERP interpolasyonları uygulandı. Küresel mekanizmalarda SLERP interpolasyonu yardımı ile dönme hareketleri incelendi. Geometrik Slerp'in Frenet çatısı ve eğrilikleri hesaplandı. Ayrıca, birim dual küre üzerindeki dual küresel mekanizmalarda dizisel Sclerp interpolasyonları uygulandı. Fast dual küresel interpolasyonu ve fast vida lineer interpolasyonu tanımları verildikten sonra birim dual küresel interpolasyon eğrisinin Blaschke çatısı hesaplandı. Dördüncü bölümde ise sonuç ve öneriler verildikten sonra son bölümde kaynakçalar yazıldı.

Anahtar kelimeler: Dual kuaterniyon, İterpolasyon, Kuaterniyon, Robotik hareketler

ABSTRACT

SEQUENTIAL AND MODULAR SLERP INTERPOLATIONS IN SPHERICAL MECHANISMS

Çetin KUŞÇU

Master Thesis

Bitlis Eren University Institute of Science and Art

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Hatice KUŞAK SAMANCI

January 2020, 94 pages

This thesis consists of five chapters. In the introduction chapter; we give some information about the historical developments of our study. In the material and method chapter; basic definitions and theorems about the quaternions, dual numbers, dual vectors, dual quaternions, quaternion interpolations, dual quaternion interpolations and Blaschke frame were given and various examples were made. In the main results section; the sequential and modular SLERP interpolations were applied in the spherical mechanisms. The spherical motions were examined with the help of SLERP interpolation in the spherical mechanisms. The Geometric Slerp's Frenet frame and the curvatures were calculated. Furthermore, sequential Slerp interpolations were applied on the dual unit sphere in the dual spherical mechanisms. After the definitions of fast dual spherical interpolation and fast screw linear interpolation, the Blaschke frame of the unit dual spherical interpolation curve were calculated. In the fourth chapter, after the conclusions and suggestions of our study were given, the bibliography was written in the last chapter.

Keywords: Dual quaternion, Interpolation, Quaternion, Robotic movements

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim sürecinde görüş ve önerileriyle beni yönlendiren bilgi ve tecrübelerinden her zaman yararlandığım, bana her konuda fikirlerini ve desteğini esirgemeyen saygı değer hocam **Doç. Dr. Hatice KUŞAK SAMANCI**'ya en samimi duygularıyla, saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım. Tez çalışmalarımdaki çizimlerde yardımcı olan **Ali Fuat ÖLMEZ**'e ve özet kısmının çevirisinde yardımcı olan **Şule Nur KAYA**'ya teşekkürlerimi sunarım. Yüksek lisans eğitimim sürecinde her zaman yanımda olan ve manevi desteklerini esirgemeyen başta sevgili eşim **Dilek KUŞÇU**'ya ve aileme en içten sevgi, saygı ve teşekkürlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ.....	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vii
ÇİZELGE DİZİNİ.....	viii
SİMGELER DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. MATERYAL VE YÖNTEM	3
2.1. Kuaterniyonlar.....	3
2.1.1. Kuaterniyonların Cebirsel Yapısı	3
2.1.2. Düzlemsel Bir Noktanın Kompleks Sayılar ile Döndürülmesi.....	11
2.1.3. Üç Boyutlu Öklit Uzayında Dönme Matrisi	14
2.1.4. Birim Kuaterniyonlar ile Dönme	16
2.2. Euler Açılarını	19
2.2.1. Euler Açılarından Dönme Matrisine Geçiş.....	20
2.2.2. Euler Açılarından Birim Kuaterniyona Geçiş.....	21
2.2.3. Birim Kuaterniyondan Dönme Matrisine Geçiş	22
2.2.4. Dönme Matrisinden Birim Kuaterniyona Geçiş	23
2.2.5. Kuaterniyondan Kuaterniyon Matrisine Geçiş	25
2.3. Dual Uzaylar	26
2.3.1. Dual Vektörler	26
2.3.2. Blaschke Çatısı	31
2.3.3. Dual Kuaterniyonlar	32

2.4. İnterpolasyon Çeşitleri	38
2.4.1. İki Dönme Arasında İnterpolasyon.....	38
2.4.2. Lineer Euler İnterpolasyon (LinEuler).....	38
2.4.3. Lineer Matris İnterpolasyon (LinMat).....	39
2.4.4. Lineer İnterpolasyon (Lerp).....	39
2.4.5. Lineer Kuaterniyon İnterpolasyon (LERP).....	40
2.4.6. Küresel Lineer Kuaterniyon İnterpolasyon (SLERP).....	42
2.4.7. Geometrik Slerp	44
2.4.8. Hızlı Artımlı SLERP (Fast SLERP)	46
2.4.9. Normalleştirilmiş Lineer İnterpolasyon (Nlerp).....	46
2.4.10. Küresel Spline Kuaterniyon İnterpolasyon (Squad).....	47
2.4.11. Vida Lineer İnterpolasyon (Sclerp)	47
2.4.12. Geometrik Vida Lineer İnterpolasyon	48
2.4.13. Dual Kuaterniyon Lineer Blending (DLB).....	48
2.4.14. Dual Kuaterniyon İterasyon Blending (DIB).....	49
2.5. Robotik Hareketler	49
2.5.1. Robot Tanımı	49
2.5.2. Robotların Tarihçesi	49
2.5.3. Küresel Mekanizmalarda Kuaterniyonlarla Robot Kolu Hareketleri	50
3. BULGULAR	53
3.1. Küresel Mekanizmalarda Dizisel ve Modüler SLERP İnterpolasyonları	53
3.2. Küresel Mekanizmanın Mafsalları Arasındaki Uzuvarın Geometrik Slerp ile Tasarımı ..	57
3.2.1. İki Serbestlik Dereceli Küresel Mekanizmaların Mafsalları Arasındaki Uzuvarın Geometrik Slerp ile Tasarımı	58
3.2.2. Üç Serbestlik Dereceli Küresel Mekanizmaların Mafsalları Arasındaki Uzuvarın Geometrik Slerp ile Tasarımı.....	60
3.3. Geometrik Slerpin Frenet Çatısı ve Eğrilikleri	63

3.4. İki ve Üç Serbestlik Dereceli Küresel Mekanizmalarda SLERP İnterpolasyonu ile Dönme Hareketlerinin İncelenmesi.....	67
3.4.1. İki Serbestlik Dereceli Küresel Mekanizmalarda SLERP İnterpolasyonu ile Dönme Hareketlerinin İncelenmesi.....	67
3.4.2. Üç Serbestlik Dereceli Küresel Mekanizmalarda SLERP İnterpolasyonu ile Dönme Hareketlerinin İncelenmesi.....	69
3.5. Dual Küresel Mekanizmalarda Sclerp İnterpolasyonu.....	72
3.6. Dual Küresel İnterpolasyon Eğrisinin Blaschke Çatısı	79
4. SONUÇ VE ÖNERİLER	83
5. KAYNAKLAR.....	84
EKLER	87
ÖZGEÇMİŞ	94

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>ŞEKİL</u>	<u>Sayfa</u>
2.1. p kompleks sayısının 90° lik döndürme işlemleri	12
2.2. p kompleks sayısının 90° döndürmeleri ile çizilen birim çember	13
2.3. Birim kuaterniyonlarla uzayda döndürme hareketi	17
2.4. Birim kuaterniyon ve tersinin geometrik yorumu	18
2.5. q ve $-q$ kuaterniyonlarının geometrik yorumu	19
2.6. Euler açısı dizisi (3,1,3)	20
2.7. Lerp interpolasyonunda noktalar arası uzaklık.....	39
2.8. p_0 ile p_1 arasında ki Slerp, p_1 ile p_0 arasındaki Slerp aynıdır	42
2.9. Geometrik Slerp interpolasyonu	45
2.10. Katı cisimlerin kuaterniyonlarla dizisel dönme yöntemi	51
2.11. Katı cisimlerin kuaterniyonlarla modüler dönme yöntemi	52
3.1. Robot kolunun üç kuaterniyon noktasına göre SLERP metodu ile yörünge oluşturulması ...	54
3.2. 2DoF küresel mekanizmada geometrik Slerp ile mafsallar arası uzunlukların tasarımı	58
3.3. 3DoF küresel mekanizmada geometrik Slerp ile mafsallar arası uzunlukların tasarımı	61

ÇİZELGE DİZİNİ

ÇİZELGE	Sayfa
2.1. Kuaterniyon Çarpımı	5
2.2. Lerp interpolasyon eğrisinin $t \in [0,1]$ aralığındaki değerleri	40
2.3. LERP interpolasyon eğrisinin $t \in [0,1]$ aralığındaki değerleri	41
2.4. Geometrik $Slerp(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, t)$ 'ın başlangıç, orta ve bitiş noktalarının değerleri	46
3.1. 2DoF mekanizmanın uzuvlarının başlangıç, orta ve bitiş noktalarının değerleri	60
3.2. 3DoF mekanizmanın uzuvlarının başlangıç, orta ve bitiş noktalarının değerleri	63

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^3$	3 boyutlu Öklit uzayı
$\langle, \rangle$	İç çarpım
$\wedge$	Vektörel çarpım
$\times$	Kuaterniyon çarpımı
$\ \cdot \ $	Norm
κ	Frenet çatısının eğrilik fonksiyonu
τ	Frenet çatısının burulma fonksiyonu
T	Frenet çatısının birim teğet vektör alanı
N	Frenet çatısının asli normal vektör alanı
B	Frenet çatısının binormal vektör alanı
q^*	Kuaterniyon Eşleniği
q^{-1}	Kuaterniyon Ters
H	Kuaterniyon cümlesi
H_1	Birim Kuaterniyon cümlesi
H_D	Dual Kuaterniyon cümlesi
D	Dual Vektörler
H_{D1}	Birim Dual Kuaterniyon cümlesi
DoF	Serbestlik Derecesi

1. GİRİŞ

İrlandalı matematikçi Sir William Rowan Hamilton (1843), karmaşık sayıların bir genişletilmesi olan “kuaterniyon” yapısının matematiksel ifadesini $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ olmak üzere bir reel ve üç sanal terimden oluşan $s + ix + jy + kz$ dördül yapısı ile tanımlamaktadır. [1,2,3]. Değişmeli olmayan reel cebir yapısına sahip olan kuaterniyonlar, karmaşık sayıların özelliklerinin çoğunu sağladığı için kuaterniyonlar aynı zamanda hyperkompleks sayı olarak da adlandırılmaktadır. Uzaydaki bir noktanın dönme hareketini kolaylıkla gerçekleştirebildiği için kuaterniyonların oldukça geniş uygulama alanları vardır. Özellikle mekanik, kinematik, robotik, fizik gibi geometrik hareketlerin yer aldığı alanlarda kuaterniyonlar temsil ve işlem açısından çok avantajlı bir kullanıma sahiptir.

Sheomake (1985), ilk kez iki kuaterniyon arasında SLERP interpolasyonunu oluşturmuştur. Jafari vd. (2014) lineer ve geometrik Slerp interpolasyon tanımlarını, Kremer (2008) normalleştirilmiş lineer interpolasyon tanımını vermiş, Hast vd. (2003) Gram-Schmidt’in ortogonalleştirme adımını kullanarak hızlı artımlı Slerpi tanımlamıştır [4-9]. James (2006), birim kuaterniyonlar, dönme matrisleri ve Euler açıları arasındaki dönüşümlerin geçiş matrislerini ele almıştır [10].

Dual sayılar, ilk kez W. Clifford (1873) tarafından $a, a^* \in \mathbb{H}$ ve $\varepsilon \neq 0, \varepsilon^2 = 0$ olmak üzere $A = a + \varepsilon a^*$ olarak tanımlanmıştır. 21. yüzyılın başlarından itibaren ise E. Study dual noktalar ile yönlü doğru arasındaki ilişkiyi inceleyerek birim dual küre üzerindeki bir birim dual vektörün üç boyutlu Öklit uzayında yönlü bir doğruya karşılık geldiğini ispatlamıştır. Baky (2002) ise küresel kapalı dual eğrilerin bazı karakterizasyonları üzerine çalışmalar yapmıştır [11].

Ravani vd. (1994) ilk defa geometrik vida lineer interpolasyonu tanımlamıştır [12]. Smitth (2013), Sclerp dual kuaterniyon interpolasyonlarını ve Kavan vd. (2006) DLB ve DIB interpolasyonlarını kullanarak çalışmalar yapmışlardır [13-14]. Yaylı vd. (2012) Bezier algoritmasını kullanarak Lorentz küresinde spline split kuaterniyon interpolasyonlarını, hızlı küresel lineer interpolasyonunu ve küresel lineer interpolasyonu için hızlı De-Moivre kuralını tanımlamışlardır [15-17].

Bu tez çalışmamızda, kuaterniyon ve dual kuaterniyon interpolasyonları küresel mekanizmaların tasarımında kullanılmış, bu interpolasyonlar ile küresel mekanizmaların hareket denklemleri incelenmiştir. Dual fast küresel interpolasyon, vida fast interpolasyon gibi bazı yeni tanımlar verilmiştir. Ayrıca geometrik Slerp'in Frenet çatısı hesaplanmış ve dual küresel interpolasyon eğrisinin de Blashke çatısı incelenerek interpolasyonların diferansiyel geometri açısından özellikleri ele alınmıştır. Makine mühendisliğinde robotik çalışma alanının önemli bir bölümünü oluşturan küresel mekanizmalarda daha önceden yapılan bazı çalışmalarda kuaterniyon ve dual kuaterniyon yapıları kullanılmasına rağmen interpolasyonların kullanılmadığı fark edilmiştir. Bu nedenle çalışmamızın mühendislik çalışmalarına teorik bir alt yapı oluşturacağı düşünülmektedir.



2. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde kuaterniyonlar, dual uzay ve dual kuaterniyonlar, kuaterniyon interpolasyon çeşitleri (Lerp, LERP, Slerp, SLERP, Nlerp, Squad), dual kuaterniyon interpolasyon çeşitleri (SClerp, DLB, DIB) ile ilgili temel kavramlar verilmiştir. Ayrıca robotik hareketlerin tarihsel gelişimi verilerek küresel mekanizma hareketleri ile ilgili genel bilgiler verilmiştir.

2.1. Kuaterniyonlar

2.1.1. Kuaterniyonların Cebirsel Yapısı

Tanım 2.1.1.1. $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, $ij = k$ ve $ji = -k$, $jk = i$, $kj = -i$, $ik = -j$, $ki = j$ ve $s, x, y, z \in \mathbb{R}$ olmak üzere bir kuaterniyon $q \equiv s + ix + jy + kz$ ifadesi ile tanımlanır. Kuaterniyonlar cümlesi H ile gösterilir [1,2,9].

Tanım 2.1.1.2. $q \in H$ kuaterniyonu, skaler kısmı $s \in \mathbb{R}$ ve vektörel kısmı $\mathbf{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere

$$q \equiv [s, \mathbf{v}] \equiv [s, (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})]$$

biçiminde gösterilebilir. Bu gösterimde kuaterniyonların skaler kısmı $\{[s, 0] | s \in \mathbb{R}\}$ ile vektörel kısmı ise $\{[0, \mathbf{v}] | \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3\}$ cümleleriyle ifade edilir [1,2,9].

Tanım 2.1.1.3. Kuaterniyonlar için eşitlik bağıntısı

$$\forall q_1, q_2 \in H \text{ için } q_1 = q_2 \Leftrightarrow s_{q_1} = s_{q_2} \text{ ve } \mathbf{v}_{q_1} = \mathbf{v}_{q_2}$$

ile tanımlanır [1,2,9].

Tanım 2.1.1.4. $s \in \mathbb{R}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3, q, q' \in H$ olmak üzere $q = [s, (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})]$ ve $q' = [s', (\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}')]]$ kuaterniyonların (+) toplama işlemi

$$q + q' \equiv (s + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z) + (s' + \mathbf{i}x' + \mathbf{j}y' + \mathbf{k}z') \equiv [s + s', \mathbf{v} + \mathbf{v}']$$

ile tanımlanır [1,2,9].

Örnek 2.1.1.5. $q_a = 2 + 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ ile $q_b = 0.2 + 0.3\mathbf{i} + 0.6\mathbf{j} + 0.7\mathbf{k}$ kuaterniyonlarının toplamı

$$\begin{aligned} q_a + q_b &= (2 + 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 7\mathbf{k}) + (0.2 + 0.3\mathbf{i} + 0.6\mathbf{j} + 0.7\mathbf{k}) \\ &= 2.2 + 3.3\mathbf{i} + 6.6\mathbf{j} + 7.7\mathbf{k} \end{aligned}$$

dır.

Tanım 2.1.1.6. $q, q' \in H, s \in \mathbb{R}$ ve $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere $q = [s, (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})]$ ve $q' = [s', (\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}')]]$ kuaterniyonların (-) çıkarma işlemi

$$q - q' \equiv (s + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z) - (s' + \mathbf{i}x' + \mathbf{j}y' + \mathbf{k}z') \equiv [s - s', \mathbf{v} - \mathbf{v}']$$

ile tanımlanır [1,2,9].

Örnek 2.1.1.7. $q_a = 2 + 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ ile $q_b = 0.2 + 0.3\mathbf{i} + 0.6\mathbf{j} + 0.7\mathbf{k}$ kuaterniyonlarının farkı

$$\begin{aligned} q_a - q_b &= (2 + 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 7\mathbf{k}) - (0.2 + 0.3\mathbf{i} + 0.6\mathbf{j} + 0.7\mathbf{k}) \\ &= 1.8 + 2.7\mathbf{i} + 5.4\mathbf{j} + 6.3\mathbf{k} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Tanım 2.1.1.8. $q, q' \in H$ olsun. $q = s + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$ ve $q' = s' + \mathbf{i}x' + \mathbf{j}y' + \mathbf{k}z'$ kuaterniyonlarının çarpımı

$$[s, \mathbf{v}] \times [s', \mathbf{v}'] = \begin{bmatrix} ss' - xx' - yy' - zz', \\ s(\mathbf{i}x' + \mathbf{j}y' + \mathbf{k}z') + s'(\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z) \\ + (yz' - y'z)\mathbf{i} + (zx' - z'x)\mathbf{j} + (xy' - x'y)\mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -x & -y & -z \\ x & s & -z & y \\ y & z & s & -x \\ z & -y & x & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır [3].

Örnek 2.1.1.9. $q_a = [2 + 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}]$ ve $q_b = [3 + 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 6\mathbf{k}]$ kuaterniyonlarının çarpımı

$$q_a \times q_b = [2 + 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}] \times [3 + 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 6\mathbf{k}]$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 & -5 \\ 3 & 2 & -5 & 4 \\ 4 & 5 & 2 & -3 \\ 5 & -4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -56 \\ 16 \\ 24 \\ 26 \end{bmatrix} = -56 + 16\mathbf{i} + 24\mathbf{j} + 26\mathbf{k}$$

ile hesaplanır. Kuaterniyon çarpımının sonucunda yine bir kuaterniyon elde edildiği görülmektedir.

Tanım 2.1.1.10. $q, q' \in H$ olmak üzere $q = s + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$ ve $q' = s' + \mathbf{i}x' + \mathbf{j}y' + \mathbf{k}z'$ kuaterniyonlardaki bazların çarpımında

Çizelge 2.1. Kuaterniyon çarpımı

x	+1	i	j	k
+1	+1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

Çizelge 2.1. den yararlanıldığında

$$H \times H \rightarrow H$$

$$(q, q') \rightarrow q \times q'$$

kuaterniyon çarpımı aynı zamanda

$$q \times q' = (s + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z) \times (s' + \mathbf{i}x' + \mathbf{j}y' + \mathbf{k}z')$$

$$= ss' - (xx' + yy' + zz') + \mathbf{i}(sx' + s'x + yz' - zy')$$

$$+ \mathbf{j}(sy' + s'y + zx' - xz') + \mathbf{k}(sz' + s'z + xy' - yx').$$

olarak da tanımlanabilir [1,2,9] .

Örnek 2.1.1.11. $q_a = [2 + 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}]$ ve $q_b = [4 + 5\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 7\mathbf{k}]$ kuaterniyonlarının çarpımı Tanım 2.1.1.10 daki yöntem ile yapıldığında

$$q_a \times q_b = [2 + 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}] \times [4 + 5\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 7\mathbf{k}]$$

$$= \left[\begin{array}{l} 2 \times 4 - (3 \times 5 + 4 \times 6 + 6 \times 7), 2(5\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 7\mathbf{k}) + 4(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) \\ + 18\mathbf{i}\mathbf{j} + 21\mathbf{i}\mathbf{k} + 20\mathbf{j}\mathbf{i} + 28\mathbf{j}\mathbf{k} + 30\mathbf{k}\mathbf{i} + 36\mathbf{k}\mathbf{j} \end{array} \right]$$

$$= \left[\begin{array}{l} (8 - 81), 10\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 14\mathbf{k} + 12\mathbf{i} + 16\mathbf{j} + 24\mathbf{k} \\ + 18\mathbf{k} - 21\mathbf{j} - 20\mathbf{k} + 28\mathbf{i} + 30\mathbf{j} - 36\mathbf{i} \end{array} \right]$$

$$= [-73 + 14\mathbf{i} + 37\mathbf{j} + 36\mathbf{k}]$$

kuaterniyonu elde edilir.

Tanım 2.1.1.12. $q, q' \in H$, $s \in \mathbb{R}$ ve $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere $q = [s, \mathbf{v}]$ ve $q' = [s', \mathbf{v}']$ kuaterniyonların çarpımı

$$q \times q' = [ss' - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}', \mathbf{v} \times \mathbf{v}' + s\mathbf{v}' + s'\mathbf{v}],$$

ile de ifade edilir [1,2,9] .

Tanım 2.1.1.13. $q, q' \in H$ olmak üzere $q = [s, \mathbf{v}] = [s, (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})]$, $q' = [s', \mathbf{v}'] = [s', (\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}')]]$

kuaterniyonları verilsin. $\langle . \rangle : H \times H \rightarrow R$ kuaterniyon iç çarpımı

$$\langle q, q' \rangle = ss' + \mathbf{v}\mathbf{v}' = ss' + xx' + yy' + zz'$$

ile tanımlanır. Özel olarak

$$\langle q, q \rangle = s^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

eşitliği sağlanır [1,2,9].

Tanım 2.1.1.14. $q \in H$ ve $r \in \square$ olsun. Bir skaler ile bir kuaterniyon çarpımı

$$rq \equiv [r, 0]q$$

ile tanımlanır [1,2,9].

Sonuç 2.1.1.15. H kuaterniyonlar cümlesi olmak üzere

- 1) $\forall p, q \in H$, $p \times q \neq q \times p$ olduğu için kuaterniyon çarpımı genel olarak değişmeli değildir.
- 2) $\forall p, q, r \in H$, $(p \times q)r = p(q \times r)$ eşitliği sağlandığı için kuaterniyon çarpımı birleşmelidir.
- 3) $\forall p, q, q' \in H$, $p(q + r) = pq + pr$ ve $(q + r)p = qp + rp$ olduğundan kuaterniyon çarpımı soldan ve sağdan dağılma özelliği sağlar [1,2,9].

Tanım 2.1.1.16. $q \in H$ olsun $q = s_q + \mathbf{v}_q$ kuaterniyonun eşleniği $q^* = s_q - \mathbf{v}_q$ ifadesiyle tanımlanır. Burada $\mathbf{v}_q^* = -\mathbf{v}_q$ olduğundan

$$q \times q^* = q^* \times q = s^2 + x^2 + y^2 + z^2 \in R,$$

$$q \times q^* = q^* \times q \geq 0,$$

$$q \times q^* = q^* \times q = 0 \Leftrightarrow q = 0$$

eşitliklerinin sağlandığı görülür. Eşlenik işleminin aşağıdaki özelliklere sahip olduğu açıktır [1,2,9].

$$(i) \quad q^* (aq_1 + bq_2) = aq_{q_1}^* + bq_{q_2}^*$$

$$(ii) \quad q^* (q_1 \times q_2) = q_{q_1}^* \times q_{q_2}^*$$

$$(iii) \quad q^* (q_q^*) = q$$

Örnek 2.1.1.17. $q = [8, 3\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 9\mathbf{k}]$ kuaterniyonun eşleniği $q^* = [8, -3\mathbf{i} - 8\mathbf{j} - 9\mathbf{k}]$ olur.

Tanım 2.1.1.18. $q = s + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z \in H$ kuaterniyonun normu

$$N : H \rightarrow R$$

$$q \rightarrow N(q) = N_q = q \times q^* = q^* \times q = \|q\|^2 = q \square q^* = s^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

ile tanımlanır [1,2,9].

Özellik 2.1.1.19. Kuaterniyonlarda norm işlemi $N(q_1 \times q_2) = N(q_1)N(q_2)$ özelliğini sağlar [1,2,9].

Örnek 2.1.1.20. $q = 3 + 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \in H$ kuaterniyonun eşleniği $q^* = 3 - 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ olmak üzere q kuaterniyonun normu

$$\begin{aligned} \|q\| &= \sqrt{\langle q, q^* \rangle} \\ &= \sqrt{[3 + 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}] \cdot [3 - 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}]} \\ &= \sqrt{9 + 4 + 4 + 4} \\ &= \sqrt{21} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Tanım 2.1.1.21. $\forall q \in H$ için $q \neq 0$ olmak üzere q kuaterniyonun tersi

$$\begin{aligned} ()^{-1} : H - \{0\} &\rightarrow H - \{0\} \\ q &\rightarrow q^{-1} = \frac{q^*}{N_q} \end{aligned}$$

ile tanımlanır ve $q \times q^{-1} = q^{-1} \times q = 1$ ifadesi elde edilir. $q \neq 0$ olmak üzere $\forall q \in H$ elemanın bir q^{-1} tersinin olması H cebirini bir **bölüm cebiri** yapar. Bu durumda H cümlesinde bölme işlemini tanımlamak mümkün olur [1,2,9].

Örnek 2.1.1.22. $q = 2 + 4\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ kuaterniyonun eşleniği $q^* = [2 - 4\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 3\mathbf{k}]$ ve normu $|q|^2 = 4 + 16 + 49 + 9 = 78$ olmak üzere tersi $q^{-1} = \frac{q^*}{|q|^2} = \frac{1}{78} [2, -4\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 3\mathbf{k}]$ olarak hesaplanır.

Burada q kuaterniyonun ve tersinin Tanım 2.1.1.21 den

$$\begin{aligned} q^{-1} \times q &= \frac{1}{78} [2, +4\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 3\mathbf{k}] \times [2, -4\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 3\mathbf{k}] \\ &= \frac{1}{78} \left[2.2 + (16 + 49 + 9), \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & -7 & -3 \\ 4 & 7 & 3 \end{vmatrix} + 2.(-4\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) + 2(4\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \right] \\ &= (1, 0, 0, 0) = 1 \end{aligned}$$

özelliğinin sağladığı görülmektedir.

Tanım 2.1.1.23. $\forall p, q \in H$ ve $q \neq 0$ olsun. Bir p kuaterniyonunun bir q kuaterniyonu ile bölme işleminin yapılması için p yi q^{-1} ile çarpmak gerekir. Ancak kuaterniyon çarpımı değişimli olmadığından bu çarpma işlemi iki çeşittir ve $r_1 = pq^{-1}, r_2 = q^{-1}p$ olacak biçimde p yi q ile iki türlü bölmek gerekir. Bu eşitliklerdeki r_1 kuaterniyonuna p nin q ile **sağdan** ve r_2 kuaterniyonuna da p nin q ile **soldan bölümü** denir. Genel olarak r_1 ile r_2 farklıdır, bundan dolayı $\frac{p}{q}$ notasyonu kullanılmaz.

$\forall q_1, q_2, \dots, q_n \in H$ kuaterniyonlarının genelleştirilmesi yapılırsa;

$$(q_1 + q_2 + \dots + q_n)^* = q_1^* + q_2^* + \dots + q_n^*$$

$$(q_1 \times q_2 \times \dots \times q_n)^* = q_1^* \times q_2^* \times \dots \times q_n^*$$

$$N(q_1 \times q_2 \times \dots \times q_n) = N_{q_1} \times N_{q_2} \times \dots \times N_{q_n}$$

$$(q_1 \times q_2 \times \dots \times q_n)^{-1} = q_n^{-1} \times q_{n-1}^{-1} \times \dots \times q_1^{-1}$$

eşitlikleri elde edilir [1,2,9].

Tanım 2.1.1.24. $q \in H$ olsun. Eğer q kuaterniyonun normu $\|q\|=1$ ise q bir birim kuaterniyon olarak adlandırılır. Birim kuaterniyonlar kümesi H_1 ile sembolize edilir. Birim kuaterniyonlar kümesi dört boyutlu uzayda bir birim küre oluşturur. Birim kuaterniyonlar kümesi uzayda üç boyutlu dönmelerde önemli rol oynamaktadır [1,2,9].

Örnek 2.1.1.25. $q = [5 + 9\mathbf{i} + \mathbf{j} + 6\mathbf{k}]$ kuaterniyonunun normu $|q| = \sqrt{5^2 + 9^2 + 1^2 + 6^2} = \sqrt{143}$ olmak üzere q kuaterniyonunun birim kuaterniyonu

$$\frac{q}{\|q\|} = \frac{1}{\sqrt{143}} [5 + 9\mathbf{i} + \mathbf{j} + 6\mathbf{k}]$$

olarak hesaplanır.

Tanım 2.1.1.26. $q \in H_1$ olmak üzere bir birim kuaterniyon

$$q = [\cos \theta, \sin \theta \mathbf{v}]$$

ile gösterilebilir.

Tanım 2.1.1.27. $q \in H_1$ olsun. $q = [\cos \theta, \sin \theta \mathbf{v}]$ kuaterniyonunun logaritmik fonksiyonu $\log q = [0, \theta \mathbf{v}]$ eşitliği ile tanımlanır. Özel olarak $\log [1, (0, 0, 0)] = [0, (0, 0, 0)]$ dir ve $\log q$ genel bir birim kuaterniyon belirtmemektedir [1,2,9].

Tanım 2.1.1.28. $q \in H_1$ olsun. $\theta \in R, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3, \|\mathbf{v}\| = 1$ olmak üzere $q = [0, \theta \mathbf{v}]$ kuaterniyonunun üstel fonksiyonu $\exp q = [\cos \theta, \sin \theta \mathbf{v}]$ ile tanımlanır [1,2,9].

Tanım 2.1.1.29. $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere $q \in H_1$ kuaterniyonunun üstel fonksiyonu $q^t \equiv \exp(t \log q)$ ile de tanımlanabilir. Üstel ve logaritmik fonksiyonlar birbirinin tersi olduğu için bu kuaterniyonlar H_1 cümlesi içindedir [1,2,9].

2.1.2. Düzlemsel Bir Noktanın Kompleks Sayılar İle Döndürülmesi

Tanım 2.1.2.1. Kompleks sayılar, $i^2 = -1$ olmak üzere baz vektörlerin $[1, 0]$ ve $[0, i]$ olduğu ortogonal bir sistemde $z = x + iy$ olarak tanımlanır. Kompleks sayılar, Öklidyen uzayında iki boyutlu vektörler olarak da kabul edilebilir [4].

Teorem 2.1.2.2. $v = [\Re(Z), \Im(Z)] = (\cos \theta + i \sin \theta)$ kompleks sayısının De Moivre formülü

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

ile verilir [4].

Tanım 2.1.2.3. Düzlemsel bir noktanın karmaşık sayılar ile döndürme işlemi

$$\begin{pmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

matrisi ile gerçekleştirilir [12].

Örnek 2.1.2.4. İki boyutlu düzlemde alınan bir $p = 1 + 2i$ kompleks sayının 90° döndürme işlemi

$$\begin{pmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90 & -\sin 90 \\ \sin 90 & \cos 90 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

matrisi ile gerçekleştirilir. Döndürme işlemi yapıldığında yeni oluşan nokta $p' = -2 + i$ kompleks sayısıdır. Böylece düzlemde $p = 1 + 2i$ noktası 1. bölgeden 2. bölgeye taşınmış olur.

Örnek 2.1.2.5. Düzlemde alınan $p = 1 + 2i$ noktasına 90° lik döndürme işlemleri uygulandığında aslında p noktasının i ile çarpılması yeterlidir. Bu durumda aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

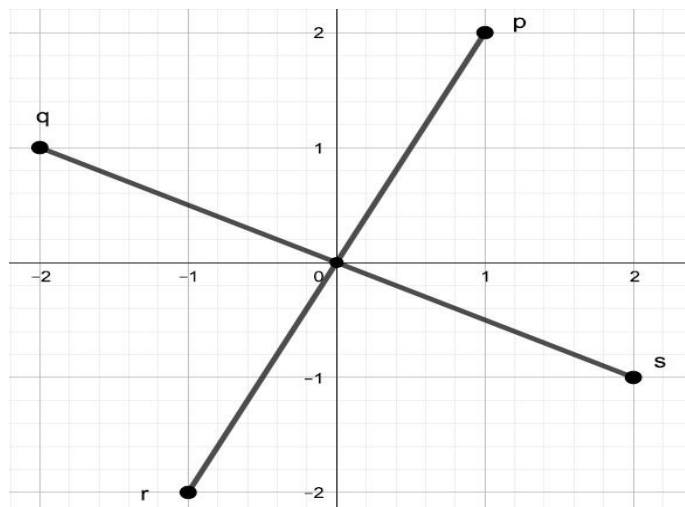
p noktasının 90° döndürme işleminde $q = i.p = -2 + i$,

q noktasının 90° döndürme işleminde $r = i.q = -1 - 2i$,

r noktasının 90° döndürme işleminde $s = i.r = 2 - i$,

s noktasının 90° döndürme işleminde $t = i.s = 1 + 2i$

elde edilir. Bir karmaşık sayıyı dört defa 90° döndürme işlemi yaptığımızda aynı konumuna gelmektedir. Yukardaki döndürmeler ile elde edilen noktalar **Geogebra** programı yardımıyla aşağıdaki grafikte verilmiştir.



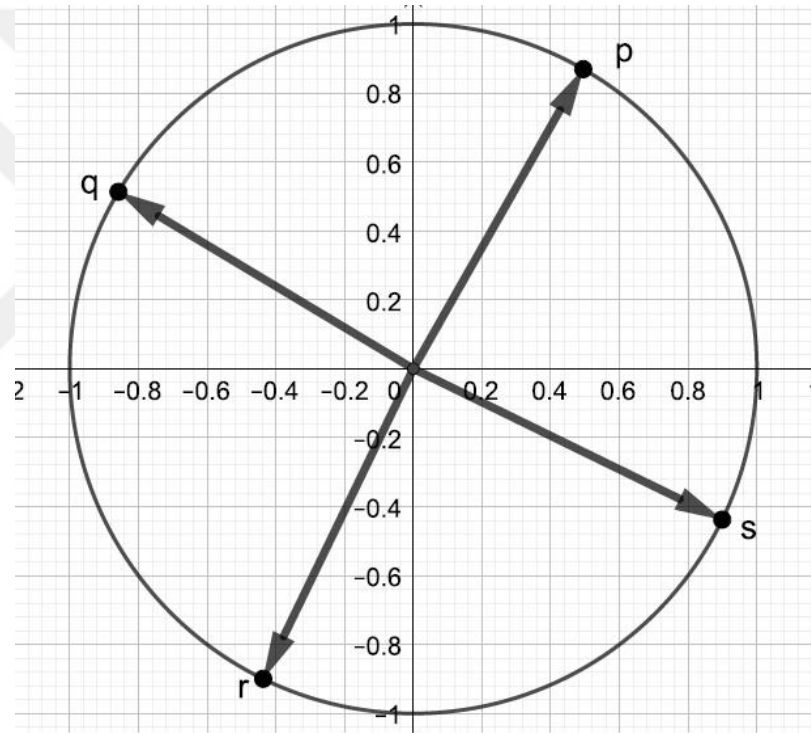
Şekil 2.1. p kompleks sayısının 90° lik döndürme işlemleri

Örnek 2.1.2.6. Düzlemde alınan $p = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 + \sqrt{2}i)$ birim kompleks sayısının 90° döndürme işlemi sonuçları:

$$p \text{ noktasının } 90^\circ \text{ döndürme işleminde } q = i.p = -\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2} - i),$$

$$q \text{ noktasının } 90^\circ \text{ döndürme işleminde } r = i.q = -\frac{1}{\sqrt{3}}(1 + \sqrt{2}i),$$

r noktasının 90° döndürme işleminde $s = i.r = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2} - i)$, elde edilir. **Geogebra** programı yardımıyla p, q, r, s noktalarının konumları Şekil 2.2 de gösterilmiştir.



Şekil 2.2. p kompleks sayısının 90° döndürmeleri ile çizilen birim çember

2.1.3. Üç Boyutlu Öklit Uzayında Dönme Matrisi

Tanım 2.1.3.1. $K=1-\cos \alpha$ olmak üzere üç boyutlu Öklit uzayında alınan $n=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$ eksenini etrafında α açısı kadar dönme hareketi

$$R_{\alpha,n} = \begin{pmatrix} a^2K + \cos \alpha & abK - c \sin \alpha & acK + b \sin \alpha \\ abK + c \sin \alpha & b^2K + \cos \alpha & bcK - a \sin \alpha \\ acK - b \sin \alpha & bcK + a \sin \alpha & c^2K + \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

matrisi ile verilir [3].

Örnek 2.1.3.2. Uzayda herhangi bir noktanın $n = \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{j} + \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{k}$ eksenini etrafında $\alpha = 90^\circ$ döndürme işlemini sağlayan matris

$$\begin{aligned} R_{90,n} R_{90,n} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} - \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{6} + \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{6} + \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} - \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{6} - \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{6} + \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{4}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} - \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{6} + \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{6} + \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} - \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{6} - \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{6} + \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{4}{6} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-24}{36} & \frac{12}{36} & \frac{24}{36} \\ \frac{12}{36} & \frac{-24}{36} & \frac{24}{36} \\ \frac{24}{36} & \frac{24}{36} & \frac{12}{36} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Sonuç 2.1.3.3. (2.1) matrisinde $a=1$ ve $b=c=0$ alındığında $n=a\mathbf{i}$ eksenini oluştur. Böylece x eksenini etrafında dönmeyi sağlayan matris

$$R_{\alpha,x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

ile verilir [3].

Örnek 2.1.3.4. Üç boyutlu Öklit uzayında alınan $p = (0,0,8)$ noktasına x eksenini etrafında 90° döndürme işlemi uygulandığında

$$\begin{bmatrix} x'_p \\ y'_p \\ z'_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

noktası elde edilir.

Sonuç 2.1.3.5. (2.1) matrisinde $b=1$ ve $a=c=0$ alındığında $n=b\mathbf{j}$ eksenini oluşur. Böylece y eksenini etrafında dönmeyi sağlayan matris

$$R_{\alpha,y} = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}$$

ile gösterilir [3].

Örnek 2.1.3.6. Üç boyutlu Öklit uzayında alınan $p = (0,0,8)$ noktasına y eksenini etrafında 90° döndürme işlemi uygulandığında

$$\begin{bmatrix} x'_p \\ y'_p \\ z'_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

noktası elde edilir.

Sonuç 2.1.3.7 (2.1) matrisinde $c=1$ ve $a=b=0$ alındığında $n=ck$ eksenini oluştur. Böylece z eksenini etrafında dönmeyi sağlayan matris

$$R_{\alpha,x} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ile verilir [3].

Örnek 2.1.3.8. Üç boyutlu Öklit uzayında alınan $p=(8,0,0)$ noktası z eksenini etrafında 90° döndürüldüğünde

$$\begin{bmatrix} x'_p \\ y'_p \\ z'_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

noktası elde edilir.

Örnek 2.1.3.9. Üç boyutlu Öklit uzayında alınan $p=(0,0,8)$ noktasına sırasıyla x,y,z eksenleri etrafında 90° döndürme işlemini uygulandığında

$$R_{90^\circ,x}, R_{90^\circ,y}, R_{90^\circ,z} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

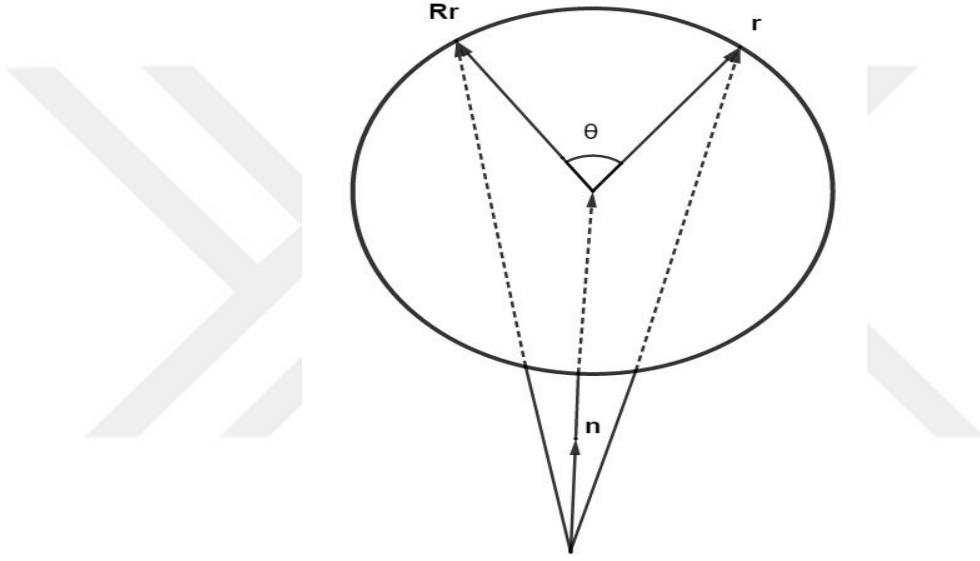
noktası elde edilir.

2.1.4. Birim Kuaterniyonlar ile Dönme

Hamilton, karmaşık sayıların düzlemdeki dönmelerine benzer olarak uzaydaki dönmeleri kuaterniyonlarla tanımlamaya çalışmıştır. Bu bölümde uzaydaki noktaların döndürülmesinde kullanılan birim kuaterniyonların geometrik yorumları üzerinde durulacaktır.

Teorem 2.1.4.1. $q = \left[\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{n} \right] \in H_1$ birim kuaterniyonu ve $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vektörü ile tanımlı $p = [0, \mathbf{r}] \in H$ kuaterniyonu verilsin. $p' = q \times p \times q^{-1}$ çarpımı ile üç boyutlu uzaydaki bir p noktasının $\mathbf{n}$ eksenini etrafında θ açısı kadar döndürme işlemi gerçekleştirilmiş olur [1,2,9].

Uyarı 2.1.4.2. Kullanım kolaylığı açısından $p' = q \times p \times q^{-1}$ kuaterniyon çarpımı $p' = qpq^{-1}$ notasyonu ile gösterilecektir.



Şekil 2.3. Birim kuaterniyonlar ile uzayda döndürme hareketi [9]

Örnek 2.1.4.3. Uzayda alınan $p = [0, \mathbf{k}]$ noktasının x eksenini etrafında 90° döndürülmesi için $q = \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{i} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{i}$ birim kuaterniyonun alınması gerekmektedir. Bu kuaterniyonun tersi $q^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{i}$ olmak üzere p noktasının x eksenini etrafında 90° döndürülmesi sonucu

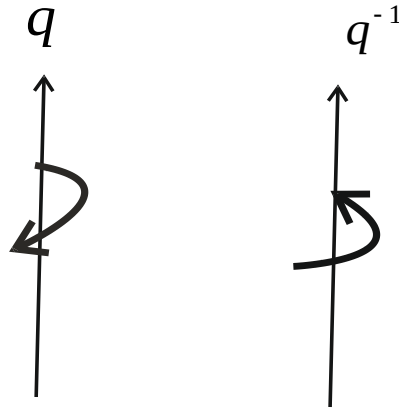
$$\begin{aligned}
p' &= qpq^{-1} \\
&= \left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{i} \right] [0 + \mathbf{k}] \left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{i} \right] \\
&= \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{j} + \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{k} \right] \left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{i} \right] \\
&= -\mathbf{j}
\end{aligned}$$

vektörü elde edilir.

Tanım 2.1.4.4. $q = [s, \mathbf{v}] \in H_1$ birim kuaterniyon olmak üzere q kuaterniyonun tersi ve eşleniği

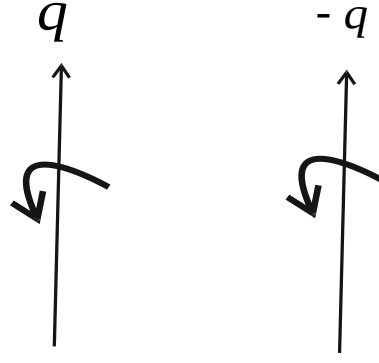
$$[s, \mathbf{v}]^{-1} = q^{-1} = q^* = [s, -\mathbf{v}]$$

denkleminde görüldüğü gibi birbirine eşittir. Burada q kuaterniyonun tersi olan q^{-1} kuaterniyonun dönme açısının aynı olduğu ancak dönme yönünün ters yönde hareket ettiği geometrik yorumu verilir [9].



Şekil 2.4. Birim kuaterniyon ve tersinin geometrik yorumu [9]

Teorem 2.1.4.5. $q \in H_1$ birim kuaterniyon olmak üzere $-q$ birim kuaterniyonu, q birim kuaterniyonun dönmesi ile aynı dönmeyi tam olarak temsil eder. q kuaterniyonu ile n ekseninde θ açısı kadar yapılan dönme hareketi ile $-q$ birim kuaterniyonu ile $-n$ ekseninde $-\theta$ açısı kadar yapılan dönmeler aynıdır.



Şekil 2.5. q ve $-q$ kuaterniyonlarının geometrik yorumu [9]

2.2. Euler Açıları

Katı bir cismin konumunu temsil etmenin en yaygın yolu Euler açılarıdır. Euler açıları birçok alanda uygulama kolaylığı açısından yaygınca kullanılmaktadır. Euler açıları kullanıldığı alana göre farklı isimler alabilmektedir. Örneğin hava savunma sanayinde bir uçağın ϕ , θ ve ψ Euler açıları **yunuslama (dönme)**, **sapma (yönelim)** ve **yuvarlanma (yalpalama)** gibi terimlerle ifade edilmektedir. Euler açılarının bazı durumlarda tekilliklere sahip olması bu açıların önemli dezavantajlarından biridir. Euler açı gösterimindeki bu eksiklikler araştırmacıları birim kuaterniyonları katı bir cismin hareketinin bir parametresi olarak kullanmaya yönlendirmiştir. Birim kuaterniyonların ilgili fonksiyonları tekilliklere sahip değildir ve açısal hız gösterimini zamanla bütünleştirmek için çok uygundur. Saf kuaterniyonların üç boyutlu Öklit uzayında hareket geometrisi açısından bir yorumunun olmamasına rağmen birim kuaterniyonların üç boyutlu uzayda dönme hareketine karşılık gelmesi birim kuaterniyonların avantajlarından biridir.

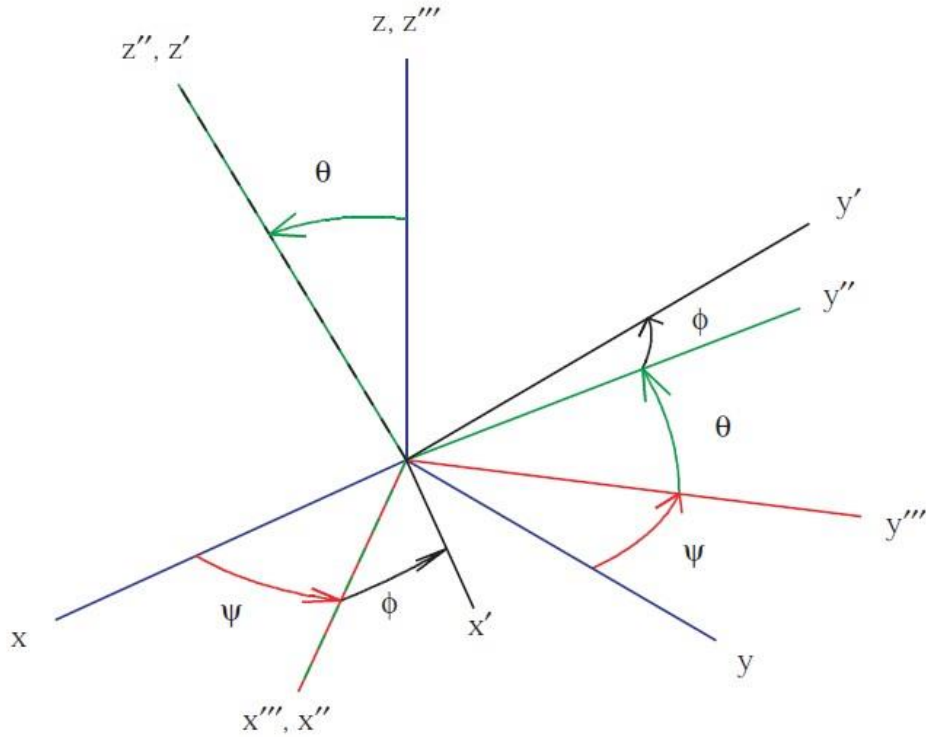
18. yüzyılda İsviçreli matematikçi ve fizikçi olan Leonhard Euler, uzayda dönme açılarını Euler açıları ile tanımlamıştır. Euler açı dizileri $(1,2,1)$, $(1,2,3)$, $(1,3,1)$, $(1,3,2)$, $(2,1,2)$, $(2,1,3)$, $(2,3,1)$, $(2,3,2)$, $(3,1,2)$, $(3,1,3)$, $(3,2,1)$, $(3,2,3)$ şeklinde on iki farklı matris dizisi ile de alternatif olarak gösterilebilir. Bu matrislerden en yaygın kullanılanı ise $(3,1,3)$ dizisidir ve bundan sonra bu diziye göre işlemler yapılacaktır. İstenildiği takdirde farklı diziler alınarak farklı matrisler elde edilebilir. Bu bölümde dönme matrisleri, Euler açıları ve birim kuaterniyonlar arasındaki geçişler ele alınacaktır [10].

2.2.1. Euler Açılarından Dönme Matrisine Geçiş

Yazım kolaylığı açısından $c_\theta = \cos(\theta)$, $s_\phi = \sin(\phi)$ olarak alındığında Euler açılarını döndürme matrisine eşleyen fonksiyon

$$R_{313}(\phi, \theta, \psi) = R_3(\phi)R_1(\theta)R_3(\psi) = \begin{pmatrix} c_\phi c_\psi - s_\phi c_\theta s_\psi & c_\phi s_\psi + s_\phi c_\theta c_\psi & s_\phi s_\theta \\ -s_\phi c_\psi - c_\phi c_\theta s_\psi & -s_\phi s_\psi + c_\phi c_\theta c_\psi & c_\phi s_\theta \\ s_\theta s_\phi & -s_\theta c_\psi & c_\theta \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

matrisi ile yazılır [10].



Şekil 2.6. Euler açı dizisi (3,1,3) [10]

Örnek 2.2.1.1. Euler açıları $\phi = 60^\circ$, $\theta = 30^\circ$ ve $\psi = 30^\circ$ olarak alındığında dönme matrisi

$$R_{313}(60, 30, 30) = R_3(60)R_1(30)R_3(30)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{3}-3}{8} & \frac{5}{8} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{-6-\sqrt{3}}{8} & \frac{-2\sqrt{3}+3}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

ile hesaplanır.

2.2.2. Euler Açılarından Birim Kuaterniyona Geçiş

Euler açılarını ilgili birim kuaterniyonuna eşleyen fonksiyon

$$q_{313}(\phi, \theta, \psi) = \begin{bmatrix} C_{\phi/2} C_{\theta/2} C_{\psi/2} - S_{\phi/2} C_{\theta/2} S_{\psi/2} \\ C_{\phi/2} C_{\psi/2} S_{\theta/2} + S_{\phi/2} S_{\psi/2} S_{\theta/2} \\ C_{\phi/2} S_{\theta/2} S_{\psi/2} - S_{\phi/2} C_{\psi/2} S_{\theta/2} \\ C_{\phi/2} C_{\theta/2} S_{\psi/2} + C_{\theta/2} C_{\psi/2} S_{\phi/2} \end{bmatrix}$$

ile elde edilmiştir. Ayrıca farklı bir Euler açı dizisinden oluşturulan birim kuaterniyon, üç eksen açısı ile birim kuaterniyonunun birleşimi olarak yazılabilir. Euler açı dizisi $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ ve dönme açısı (ϕ, θ, ψ) olmak üzere Euler açı dizisinden oluşturulan birim kuaterniyon

$$q_{(i,j,k)}(\phi, \theta, \psi) = q_a(\phi, \bar{e}_i) \cdot q_a(\theta, \bar{e}_j) \cdot q_a(\psi, \bar{e}_k)$$

ile elde edilir [10].

Örnek 2.2.2.1. $\phi = 60^\circ$, $\theta = 30^\circ$ ve $\psi = 30^\circ$ Euler açılarının karşılık geldiği kuaterniyon

$$\begin{aligned} q_{313}(90, 60, 60) &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \\ &= \left[\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{8} + \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{8}i + \frac{\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{8}j + \frac{\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{8}k \right] \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

2.2.3. Birim Kuaterniyondan Dönme Matrisine Geçiş

Birim kuaterniyonlar birim normlu kuaterniyonlardır. $\|q\|=1$ olmak üzere bir q birim kuaterniyon, katı bir cismin hareketini temsil etmek için kullanılabilir. $z \in \mathbb{R}^3$ vektörü global koordinatta, $z' \in \mathbb{R}^3$ ise yerel koordinattaki vektöre karşılık geldiğine göre

$$\begin{bmatrix} 0 \\ z' \end{bmatrix} = q \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ z \end{bmatrix} \cdot q^{-1} = q \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ z \end{bmatrix} \cdot \bar{q} = \bar{Q}(q)^T Q(q) \begin{bmatrix} 0 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & R_q(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ z \end{bmatrix}$$

hareket denklemi elde edilir. Böylece birim kuaterniyonun bileşenleri ile ifade edilen dönme matrisi

$$R_q(q) = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2q_1q_2 + 2q_0q_3 & 2q_1q_3 - 2q_0q_2 \\ 2q_1q_2 - 2q_0q_3 & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2q_2q_3 + 2q_0q_1 \\ 2q_1q_3 + 2q_0q_2 & 2q_2q_3 - 2q_0q_1 & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

biçiminde verilir. $z' = R_q(q)z$ ve $z = R_q(q)^T z'$ dönme matrislerinde olduğu gibi, dönme dizileri de kuaterniyonların çarpımları ile temsil edilir. p ve q birim kuaterniyonların açık halleri ise $R_q(q.p) = R_q(q)R_q(p)$ denklemi ile verilir [10].

Örnek 2.2.3.1. $\|q\|=1$ olmak üzere $q = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}k\right)$ kuaterniyonun dönme matrisine geçiş

$$R_q(q) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisi ile sağlanır.

2.2.4. Dönme Matrisinden Birim Kuaterniyona Geçiş

Bir dönme matrisinden bir kuaterniyona ters dönüşüm biraz daha karmaşıktır. (2.2) ve (2.3) denklemlerinden aşağıdaki eşitlikler elde edilir. $r_{q11}, r_{q12}, r_{q13}, r_{q21}, r_{q22}, r_{q23}, r_{q31}, r_{q32}, r_{q33}$ ifadeleri dönme matrisinin elemanları olmak üzere;

$$\begin{aligned} 4q_0^2 &= 1 + r_{q11}(q) + r_{q22}(q) + r_{q33}(q) & 4q_2q_3 &= r_{q23}(q) + r_{q32}(q) \\ 4q_1^2 &= 1 + r_{q11}(q) - r_{q22}(q) - r_{q33}(q) & 4q_1q_3 &= r_{q31}(q) + r_{q13}(q) \\ 4q_2^2 &= 1 - r_{q11}(q) + r_{q22}(q) - r_{q33}(q) & 4q_1q_2 &= r_{q12}(q) + r_{q21}(q) \\ 4q_3^2 &= 1 - r_{q11}(q) - r_{q22}(q) + r_{q33}(q) & 4q_0q_1 &= r_{q23}(q) - r_{q32}(q) \\ & & 4q_0q_2 &= r_{q31}(q) - r_{q13}(q) \\ & & 4q_0q_3 &= r_{q12}(q) - r_{q21}(q) \end{aligned} \quad \text{ve}$$

ifadelerinin sonucunda aşağıdaki dört farklı ters dönüşüme ulaşılır:

$$q_R^0(R) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1+r_{11}+r_{22}+r_{33})^{\frac{1}{2}} \\ (r_{23}-r_{32})/(1+r_{11}+r_{22}+r_{33})^{\frac{1}{2}} \\ (r_{31}-r_{13})/(1+r_{11}+r_{22}+r_{33})^{\frac{1}{2}} \\ (r_{12}-r_{21})/(1+r_{11}+r_{22}+r_{33})^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}, \quad q_R^1(R) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (r_{23}-r_{32})/(1+r_{11}-r_{22}-r_{33})^{\frac{1}{2}} \\ (1+r_{11}-r_{22}-r_{33})^{\frac{1}{2}} \\ (r_{12}+r_{21})/(1+r_{11}-r_{22}-r_{33})^{\frac{1}{2}} \\ (r_{31}+r_{13})/(1+r_{11}-r_{22}-r_{33})^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

$$q_R^2(R) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (r_{31}-r_{13})/(1-r_{11}+r_{22}-r_{33})^{\frac{1}{2}} \\ (r_{12}+r_{21})/(1-r_{11}+r_{22}-r_{33})^{\frac{1}{2}} \\ (1-r_{11}+r_{22}-r_{33})^{\frac{1}{2}} \\ (r_{23}+r_{32})/(1-r_{11}+r_{22}-r_{33})^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}, \quad q_R^3(R) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (r_{12}-r_{21})/(1-r_{11}-r_{22}+r_{33})^{\frac{1}{2}} \\ (r_{31}+r_{13})/(1-r_{11}-r_{22}+r_{33})^{\frac{1}{2}} \\ (r_{23}+r_{32})/(1-r_{11}-r_{22}+r_{33})^{\frac{1}{2}} \\ (1-r_{11}-r_{22}+r_{33})^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}.$$

R değerlerine bağlı olarak, bu işlevlerden bazıları karmaşık sonuçlar üretecektir. Böyle bir olaydan kaçınmak için, R'nin parametrelerine bağlı olarak, bu dördünün en iyisini seçen aşağıdaki parçalı fonksiyonu tanımlarız. Bu fonksiyon $q_R : SO(3) \rightarrow H$ olmak üzere

$$q_R(R) = \begin{cases} q_R^0(R) & \text{eğer } r_{22} > -r_{33}, r_{11} > -r_{22}, r_{11} > -r_{33} \\ q_R^1(R) & \text{eğer } r_{22} < -r_{33}, r_{11} > r_{22}, r_{11} > -r_{33} \\ q_R^2(R) & \text{eğer } r_{22} > r_{33}, r_{11} < r_{22}, r_{11} < -r_{33} \\ q_R^3(R) & \text{eğer } r_{22} < r_{33}, r_{11} < -r_{22}, r_{11} < r_{33} \end{cases}$$

ifadesi ile verilir [10].

Örnek 2.2.4.1. Euler $(90^\circ, 60^\circ, 0^\circ)$ alındığında dönme matrislerinden birim kuaterniyonlara geçiş işlemleri θ için,

$$q_{313}(90^\circ, 60^\circ, 0^\circ) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -1 & -1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

matrisi hesaplandıktan sonra $q_R(R)$ denkleminde $q_R^3 = -1 < \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} < 1, -\frac{1}{2} < \frac{1}{2}$ ifadesini sağladığı görülmektedir, q_R^3 matris formunu kullanarak

$$q_R^3(R) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} + 1 \left/ \left(1 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} \right)^{1/2} \right. \\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left/ \left(1 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} \right)^{1/2} \right. \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \left/ \left(1 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} \right)^{1/2} \right. \\ \left(1 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} \right)^{1/2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{3}+4}{4\sqrt{3}} + i - \frac{1}{2}j + \sqrt{3}k \right]$$

birim kuaterniyona geçiş sağlanır.

2.2.5. Kuaterniyondan Kuaterniyon Matrisine Geçiş

Bir $q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$ kuaterniyonu $Q: H \rightarrow R^{4 \times 4}$ kuaterniyon matris fonksiyonu ile dönüştürüldüğünde

$$Q(q) = \begin{bmatrix} q_0 & -q_{1:3}^T \\ q_{1:3} & q_0 I_3 - C(q_{1:3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix}$$

matris formunu alır. Ayrıca $Q(\bar{q}) = Q(q)^T$ ve $\bar{Q}(\bar{q}) = \bar{Q}(q)^T$ olduğu için kuaterniyon matris formunun eşleniği

$$\bar{Q}(q) = \begin{bmatrix} q_0 & -q_{1:3}^T \\ q_{1:3} & q_0 I_3 + C(q_{1:3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix}$$

ile hesaplanır. Burada kuaterniyonunun eşleniği ile transpozunun birbirine eşit olduğu açıkça görülmektedir [10].

Örnek 2.2.5.1. $q = [3 + 4i + 6j + 9k]$ kuaterniyonun, kuaterniyon matrisine geçiş işlemleri

$$q = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -6 & -9 \\ 4 & 3 & 9 & -6 \\ 6 & -9 & 3 & 4 \\ 9 & 6 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

matrisi ile sağlanır.

2.3. Dual Uzaylar

2.3.1. Dual Vektörler

W.K. Clifford 1873 yılında $a, a^* \in \mathbb{H}$ ve $\varepsilon \neq 0, \varepsilon^2 = 0$ olmak üzere $A = a + \varepsilon a^*$ sayısını dual sayı olarak tanımlamıştır. ε bir dual birim olarak kabul edilir. Dual sayılar halkası sıfır bölünli olmadığından yani $\varepsilon a^* \cdot \varepsilon b^* = 0$ olduğu için εa^* elemanlarının tersi yoktur. Bu nedenle dual sayılar bir cisim belirtmez sadece bir cebir belirtmektedir. Dual sayılar cümlesi

$$D = \{A = a + \varepsilon a^* : a, a^* \in \mathbb{H}, \varepsilon^2 = 0\}$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.3.1.1. $a, a^*, b, b^* \in \mathbb{H}$ ve $\varepsilon^2 = 0$ olmak üzere $A = a + \varepsilon a^*$ ve $B = b + \varepsilon b^*$ dual sayılarının $+: D \times D \rightarrow D$ toplama işlemi

$$A + B = (a + b) + \varepsilon(a^* + b^*)$$

ile tanımlanır [2].

Örnek 2.3.1.2. $A = 6 + \varepsilon 8$ ve $B = 7 + \varepsilon 9$ dual sayıların toplamı işlemi

$$A + B = (6 + 7) + \varepsilon(8 + 9) = 13 + \varepsilon 17$$

ile hesaplanır.

Tanım 2.3.1.3. $a, a^*, b, b^* \in R$ ve $\varepsilon^2 = 0$ olmak üzere $A = a + \varepsilon a^*$ ve $B = b + \varepsilon b^*$ dual sayıların $- : D \times D \rightarrow D$ çıkarma işlemi

$$A - B = (a - b) + \varepsilon(a^* - b^*)$$

ile tanımlanır [2].

Örnek 2.3.1.4. $A = 12 + \varepsilon 9$ ve $B = 2 + \varepsilon 5$ dual sayıların çıkarma işlemi;

$$A - B = (12 - 2) + \varepsilon(9 - 5) = 10 + \varepsilon 4$$

ile elde edilir.

Tanım 2.3.1.5. $a, a^*, b, b^* \in \square$ ve $\varepsilon^2 = 0$ olmak üzere $A = a + \varepsilon a^*$ ve $B = b + \varepsilon b^*$ dual sayıların $\cdot : D \times D \rightarrow D$ çarpma işlemi

$$A.B = ab + \varepsilon(ab^* + a^*b)$$

olarak tanımlanır [2].

Örnek 2.3.1.6. $A = 5 + \varepsilon 8$ ve $B = 4 + \varepsilon 2$ dual sayıların çarpma işlemi

$AB = 5.4 + \varepsilon(5.2 + 8.4) = 20 + \varepsilon 42$ denklemi ile bulunur.

Tanım 2.3.1.7. $a, a^*, b, b^* \in R$ $\varepsilon^2 = 0$ olsun. $A = a + \varepsilon a^*, B = b + \varepsilon b^*$ dual sayıların eşitlik bağıntısı

$$A = B \Leftrightarrow a = b \text{ ve } \varepsilon a^* = \varepsilon b^*$$

ile verilir [2].

Böylece $D = \{A : A = a + \varepsilon a^* \ a, \varepsilon a^* \in R\}$ cümlesi yukarıdaki işlemler ile değişmeli bir halka oluşturur.

Tanım 2.3.1.8. $a, a^*, b, b^* \in \square$ $\varepsilon^2 = 0, b \neq 0$ olmak üzere $A = a + \varepsilon a^*$ ve $B = b + \varepsilon b^*$ dual sayılarının $\div : D \times D \rightarrow D$ ile tanımlı bölme işlemi

$$\frac{A}{B} = \frac{a}{b} + \varepsilon \frac{a^*b - ab^*}{b^2}$$

biçimindedir [2].

Örnek 2.3.1.9. $A = 3 + \varepsilon 1$ ve $B = 9 + \varepsilon 4$ dual sayıların bölme işlemi

$$\frac{A}{B} = \frac{3}{9} + \varepsilon \frac{1 \cdot 9 - 3 \cdot 4}{81} = \frac{1}{3} - \varepsilon \frac{1}{27}$$

denklemleri ile hesaplanır.

Tanım 2.3.1.10. $(D^3, +)$ sistemi bir abel gruptur ve D üzerinde bir modüldür ve D^3 cümlesine D -modül de denir. D -modül'ün elemanları olan sıralı dual üçlülere **dual vektörler** denir [2].

Tanım 2.3.1.11. $\mathbf{a}, \mathbf{a}^*, \mathbf{b}, \mathbf{b}^* \in \mathbb{R}^3$ ve $\varepsilon^2 = 0$ olmak üzere $\mathbf{A} = \mathbf{a} + \varepsilon \mathbf{a}^*$ ve $\mathbf{B} = \mathbf{b} + \varepsilon \mathbf{b}^*$ dual vektörlerinin $+: D \times D \rightarrow D$ toplama işlemi

$$\begin{aligned}\mathbf{A} + \mathbf{B} &= (\mathbf{a} + \varepsilon \mathbf{a}^*) + (\mathbf{b} + \varepsilon \mathbf{b}^*) \\ &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \varepsilon (\mathbf{a}^* + \mathbf{b}^*)\end{aligned}$$

ile tanımlanır [2].

Örnek 2.3.1.12. $\mathbf{A} = (4, 5, 6) + \varepsilon (1, 2, 3)$ ve $\mathbf{B} = (1, 2, 3) + \varepsilon (4, 5, 6)$ verilen dual vektörlerin toplama işlemini yapalım;

$$\begin{aligned}\mathbf{A} + \mathbf{B} &= (4+1, 5+2, 6+3) + \varepsilon (1+4, 2+5, 3+6) \\ &= (5, 7, 9) + \varepsilon (5, 7, 9)\end{aligned}$$

denklemleri ile bulunur.

Tanım 2.3.1.13. $\mathbf{a}, \mathbf{a}^*, \mathbf{b}, \mathbf{b}^* \in \mathbb{R}^3$ ve $\varepsilon^2 = 0$ olmak üzere $\mathbf{A} = \mathbf{a} + \varepsilon \mathbf{a}^*$ ve $\mathbf{B} = \mathbf{b} + \varepsilon \mathbf{b}^*$ dual vektörlerinin iç çarpımı ve vektörel çarpımı

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \varepsilon [\langle \mathbf{a}^*, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}^* \rangle] \text{ ve } \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \varepsilon (\mathbf{a} \times \mathbf{b}^* + \mathbf{a}^* \times \mathbf{b})$$

ile tanımlıdır [2].

Örnek 2.3.1.14. $\mathbf{A} = (4, 5, 6) + \varepsilon (1, 2, 3)$ ve $\mathbf{B} = (2, 3, 4) + \varepsilon (5, 6, 7)$ dual vektörlerinin iç çarpımı

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle &= \langle (4, 5, 6), (2, 3, 4) \rangle + \varepsilon [\langle (1, 2, 3), (2, 3, 4) \rangle + \langle (4, 5, 6), (5, 6, 7) \rangle] \\ &= 47 + \varepsilon 112\end{aligned}$$

ile hesaplanır.

Örnek 2.3.1.15. $\mathbf{A} = (4, 5, 6) + \varepsilon(1, 2, 3)$ ve $\mathbf{B} = (2, 3, 4) + \varepsilon(5, 6, 7)$ dual vektörlerinin vektörel çarpımı

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (4, 5, 6) \times (2, 3, 4) + \varepsilon((4, 5, 6) \times (5, 6, 7) + (1, 2, 3) \times (2, 3, 4)) \\ &= (2, 4, 2) + \varepsilon(-2, 0, -2)\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Tanım 2.3.1.16. $\mathbf{a}, \mathbf{a}^*, \mathbf{b}, \mathbf{b}^* \in \mathbb{R}^3$ ve $\varepsilon^2 = 0$ olmak üzere $\mathbf{A} = \mathbf{a} + \varepsilon \mathbf{a}^*$ dual vektörünün normu

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\langle \mathbf{A}, \mathbf{A} \rangle} = \|\mathbf{a}\| + \varepsilon \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}^* \rangle}{\|\mathbf{a}\|}$$

$\|\mathbf{A}\| = 1$ olduğunda $\mathbf{A}$ birim dual vektör denir ve

$$S^2 = \left\{ \mathbf{A} \in D^3 : \langle \mathbf{A}, \mathbf{A} \rangle = (1, 0) \right\}$$

cümlesi birim dual küreyi temsil eder [2].

Örnek 2.3.1.17. $\mathbf{A} = (4, 0, 3) + \varepsilon(3, 5, 6)$ dual vektörün normu

$$\|\mathbf{A}\| = \|(4, 0, 3)\| + \varepsilon \frac{\langle (4, 0, 3), (3, 5, 6) \rangle}{\|(4, 0, 3)\|} = 5 + \varepsilon 6$$

olarak hesaplanır.

Teorem 2.3.1.18. (E. Study) $\mathbf{A} \neq (\mathbf{0}, \mathbf{a}) \in D$ olmak üzere $\|\mathbf{A}\| = (1, 0)$ koşulunu sağlayan birim dual kürenin dual noktaları üç boyutlu Öklit uzayında yönlü doğrulara karşılık gelir [2].

2.3.2. Blaschke Çatısı

Tanım 2.3.2.1. $X(t) = x(t) + \varepsilon x^*(t)$ eğrisi dual birim küre üzerindeki bir dual eğri olmak üzere, $X(t)$ dual eğrisinin Blaschke çatısı

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= X(t), \\ \mathbf{A}_2 &= \frac{\mathbf{A}_1'}{\|\mathbf{A}_1'\|}, \\ \mathbf{A}_3 &= \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \end{aligned}$$

ile tanımlanır. Blaschke çatısı için

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_1 \rangle &= \langle \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_2 \rangle = \langle \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_3 \rangle = 1 \\ \langle \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \rangle &= \langle \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3 \rangle = \langle \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_2 \rangle = 0 \end{aligned}$$

iç çarpım özellikleri sağlandığı için $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$ doğruları üç boyutlu Öklit uzayında aynı anda karşılıklı olarak dik doğruları göstermektedir. Kesişme noktasının merkezi $\mathbf{A}_1$ noktasıdır ve bu nokta dual eğrinin teğeti olarak adlandırılır. $\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}(t)$ doğrusuna merkezi noktadaki $\mathbf{A}(t)$ nin normal ortası denir. Blaschke çatısının türev formülleri

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1' \\ \mathbf{A}_2' \\ \mathbf{A}_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & P & 0 \\ -P & 0 & Q \\ 0 & -Q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \end{pmatrix}$$

ile verilir. $P = p + \varepsilon p^* = \|\mathbf{A}_1'\|$, $Q = q + \varepsilon q^* = \frac{\det(\mathbf{A}, \mathbf{A}', \mathbf{A}'')}{p^2}$ ifadeleri ise Blaschke integral

invariantları olarak isimlendirilir. $\int P d(t)$ ve $\int Q d(t)$ integralleri sırasıyla $\mathbf{A}_1(t)$ ve $\mathbf{A}_3(t)$ dual eğrileri arasındaki dual yay uzunluğudur [11].

2.3.3. Dual Kuaterniyonlar

Üç boyutlu Öklit uzayında dönme ve öteleme hareketlerini sağlayan dual kuaterniyonlar yapısı uzay kinematiği açısından oldukça önemlidir. Bu bölümde dual kuaterniyonların temel cebirsel özellikleri verilecektir.

Tanım 2.3.3.1. Dual kuaterniyonlar kümesi H_D ile gösterilsin,

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad jk = i, \quad ij = k, \quad ki = j, \quad ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j$$

bazıları ve $D = d + \varepsilon d_0^*$, $X = x + \varepsilon x_1^*$, $Y = y_2 + \varepsilon y_2^*$ ve $Z = z_3 + \varepsilon z_3^*$ dual sayıları ile oluşturulan $Q = D + iX + jY + kZ$ ifadesine dual kuaterniyon denir [2].

Görüldüğü gibi Q dual kuaterniyonun bileşenleri dual sayılardan oluşmaktadır. Skaler ve vektörel kısımları sırası ile S_{H_D} ve V_{H_D} isimlendirildiğinde $S_{H_D} = s_q + \varepsilon s_q^* = D$ ve $V_{H_D} = \mathbf{v}_q + \varepsilon \mathbf{v}_q^* = iX + jY + kZ$ olur. Ayrıca dual kuaterniyonun diğer bir gösterimi de $\varepsilon^2 = 0$ olmak üzere $Q = q + \varepsilon q^*$ biçimindedir [2].

Örnek 2.3.3.2. Bir dual kuaterniyonun

$$Q = [5 + 4i + 3j + 2k + \varepsilon(2 + 3i + 4j + 5k)] = ((5 + 2\varepsilon) + (4 + 3\varepsilon)i + (3 + 4\varepsilon)j + (2 + 5\varepsilon)k)$$

şeklinde farklı gösterimleri de mevcuttur.

Tanım 2.3.3.3. $P, M \in H_D$ olmak üzere, $M = M_0 + M_1i + M_2j + M_3k$, $P = P_0 + P_1i + P_2j + P_3k$, iki dual kuaterniyon toplamı $+: H_D \rightarrow H_D$

$$\begin{aligned}
M + P &= (m_0 + \mathbf{m}) + (p_0 + \mathbf{p}) = (m_0 + p_0) + (\mathbf{m} + \mathbf{p}) \\
&= (m_0 + m_1i + m_2j + m_3k) + (p_0 + p_1i + p_2j + p_3k) \\
&= (m_0 + p_0) + (m_1 + p_1)i + (m_2 + p_2)j + (m_3 + p_3)k
\end{aligned}$$

ile tanımlanır. Dual kuaterniyonlarda toplama işlemi tanımlanır ve $(H_D, +)$ abelyen gruptur [2].

Örnek 2.3.3.4 $M = [3 + 2i + 4j + 5k + \varepsilon(6 + 7i + 3j + 4k)]$ ve

$P = [3 + 5i + 7j + 8k + \varepsilon(2 + 6i + 4j + 9k)]$ dual kuaterniyonların toplama işlemi

$$\begin{aligned}
M + P &= [(3+3) + (2+5)i + (4+7)j + (5+8)k + \varepsilon((6+2) + (7+6)i + (3+4)j + (4+9)k)] \\
&= [6 + 7i + 11j + 13k + \varepsilon(8 + 13i + 7j + 13k)]
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Tanım 2.3.3.5. Bir dual kuaterniyonun bütün bileşenleri ayrı ayrı sıfır ise bu dual kuaterniyona sıfır dual kuaterniyon denir [2].

Tanım 2.3.3.6. İki dual kuaterniyonun reel kısımları ve dual kısımları birbirine eşit iseler eşit iki dual kuaterniyon denir [2].

Tanım 2.3.3.7. $P, M \in H_D$ olmak üzere $M = M_0 + M_1i + M_2j + M_3k$, $P = P_0 + P_1i + P_2j + P_3k$, iki dual kuaterniyon farkı,

$$\begin{aligned}
M - P &= (m_0 - \mathbf{m}) + (p_0 - \mathbf{p}) \\
&= (m_0 - p_0) + (\mathbf{m} - \mathbf{p}) \\
&= (m_0 + m_1i + m_2j + m_3k) - (p_0 + p_1i + p_2j + p_3k) \\
&= (m_0 - p_0) + (m_1 - p_1)i + (m_2 - p_2)j + (m_3 - p_3)k
\end{aligned}$$

işlemi ile tanımlanır ve değişmeli değildir [2].

Örnek 2.3.3.8. $M = [3 + 2i + 4j + 5k + \varepsilon(6 + 7i + 3j + 4k)]$ ve

$P = [3 + 5i + 7j + 8k + \varepsilon(2 + 6i + 4j + 9k)]$ dual kuaterniyonlarının

$$\begin{aligned} M + P &= [(3-3) + (2-5)i + (4-7)j + (5-8)k + \varepsilon((6-2) + (7-6)i + (3-4)j + (4-9)k)] \\ &= [0 - 3i - 3j - 3k + \varepsilon(4 + i - j - 5k)] \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Tanım 2.3.3.9. $M \in H_D$, $\lambda \in R$ olmak üzere dual kuaterniyonlarda skalerle çarpma işlemi

$$\square : R \times H_D \rightarrow H_D ,$$

$$(\lambda, M) \rightarrow \square (\lambda, M) = \lambda \square M = \lambda \square (m_0 + \mathbf{m}) = \lambda m_0 + \lambda \mathbf{m}$$

şeklinde tanımlanır [2].

Örnek 2.3.3.10. $M = [3 + 2i + 4j + 5k + \varepsilon(6 + 7i + 3j + 4k)]$ dual kuaterniyonun skaler üç sayısı ile çarpımı

$$(3, M) = 3.M = [9 + 6i + 12j + 15k + \varepsilon(18 + 21i + 9j + 12k)]$$

şeklinde bulunur.

Tanım 2.3.3.11. Bir $M = m + \varepsilon m^*$ dual kuaterniyonun eşleniği $\overline{M}$ olsun,

$$\overline{M} = \overline{m} + \varepsilon \overline{m^*} = m_0 - m_1 i - m_2 j - m_3 k$$

ile tanımlanır [2].

Tanım 2.3.3.12. $P, M \in H_D$ olmak üzere $M = m + \varepsilon m^*$, $\hat{P} = p + \varepsilon p^*$ iki dual kuaterniyonun çarpımı

$$M \times P = m \times p + \varepsilon(m \times p^* + m^* \times p)$$

ile tanımlanır [2].

Örnek 2.3.3.13. $M = [3 + 2i + 4j + 5k + \varepsilon(6 + 7i + 3j + 4k)]$,

$$P = [3 + 5i + 7j + 8k + \varepsilon(2 + 6i + 4j + 9k)]$$

dual kuaterniyonların çarpımı

$$\begin{aligned} M \times P &= (3 + 2i + 4j + 5k) \times (3 + 5i + 7j + 8k) \\ &+ \varepsilon((3 + 2i + 4j + 5k) \times (2 + 6i + 4j + 9k) + (6 + 7i + 3j + 4k) \times (3 + 5i + 7j + 8k)) \\ &= (3.3 + 3.(5i + 7j + 8k) + 3.(2i + 4j + 5k) + 10i^2 + 14ij \\ &+ 16ik + 20ji + 28j^2 + 32jk + 25ki + 35kj + 40k^2) + \varepsilon((3.2 + 3(6i + 4j + 9k) + 2.(2i + 4j + 5k) \\ &+ 12i^2 + 8ij + 18ik + 24ji + 16j^2 + 36jk + 30ki + 20kj + 45k^2) + (6.3 + 6(5i + 7j + 8k) \\ &+ 3(7i + 3j + 4k) + 35i^2 + 49ij + 56ik + 15ji + 21j^2 + 24jk + 20ki + 28kj + 32k^2)) \\ &= (-69 + 18i + 42j + 33k) + \varepsilon(-137 + 85i + 47j + 115k) \end{aligned}$$

ifadesi bulunur.

Tanım 2.3.3.14. $M \in H_D$ dual kuaterniyonun normu

$$\| \cdot \| : H_D \rightarrow R$$

$$M \rightarrow \|M\| = \sqrt{\langle M, \overline{M} \rangle} = \sqrt{M_0^2} = |M_0|$$

ile tanımlanır [2].

Örnek 2.3.3.15. $M = [3 + 2i + 4j + 5k + \varepsilon(6 + 7i + 3j + 4k)]$ dual kuaterniyonun eşleniği

$\overline{M} = [3 - 2i - 4j - 5k + \varepsilon(6 - 7i - 3j - 4k)]$ dir. Böylece M dual kuaterniyonun normu

$$\begin{aligned}
\|M\| &= \sqrt{\langle M, \overline{M} \rangle} \\
&= \sqrt{(3+2i+4j+5k+\varepsilon(6+7i+3j+4k))(3-2i-4j-5k+\varepsilon(6-7i-3j-4k))} \\
&= \sqrt{54+\varepsilon 118}
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Tanım 2.3.3.16. Bir M dual kuaterniyonun tersi,

$$M^{-1} = \frac{1}{M} = \frac{1}{m+\varepsilon m^*} = \frac{m-\varepsilon m^*}{|m|^2} = \frac{\overline{M}}{|m|^2} = \frac{\overline{M}}{\|M\|^2}$$

dir. Eğer $M = M_0 + M_1i + M_2j + M_3k$ dual kuaterniyonunda $m_0 = 0$ ise M dual kuaterniyonuna **saf dual kuaterniyon** denir ve saf dual kuaterniyonun tersi hesaplanamaz [2].

Tanım 2.3.3.17. Bir M dual kuaterniyonu bir P dual kuaterniyonuna bölündüğünde

$$Z_1 P = M, \quad P Z_2 = M$$

yukarıdaki denklemleri sırasıyla P^{-1} ile sağdan ve soldan çarpma işlemi uygulandığında $Z_1 = M \times P^{-1}$, $Z_2 = P^{-1} \times M$ bölme işlemi yapılmış olur [2].

Tanım 2.3.3.18. Normu bir birim olan bir dual kuaterniyona birim dual kuaterniyon denir ve birim dual kuaterniyonlar cümlesi H_{D1} ile gösterilir. $D = d + \varepsilon d_0^*$, $X = x + \varepsilon x_1^*$, $Y = y_2 + \varepsilon y_2^*$, $Z = z_3 + \varepsilon z_3^*$ dual sayı katsayıları ile verilen $Q = D + iX + jY + kZ$ dual kuaterniyon birim dual kuaterniyon ise

$$d^2 + a^2 + b^2 + c^2 = 1 \text{ ve } dd^* + aa^* + bb^* + cc^* = 0$$

koşulları sağlanmaktadır. Birim dual kuaterniyon aynı zamanda $\hat{Q} = \cos \theta + \hat{S}_0 \sin \theta$ ile gösterilebilir. Burada $\theta_1 = \theta + \varepsilon \theta^*$ dual açı olmak üzere $\cos \theta = D$, $\sin \theta = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ ve $\hat{S}_0 = S_0 + \varepsilon S_0^* = \frac{iX + jY + kZ}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$ birim dual vektörü eksenini dual dönme vermektedir. Böylece

dual açının $\theta = \arccos(d)$ ve dual kısmı $\theta^* = -\frac{d^*}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$ olur. Birim dual eksenin reel

$$\text{kısmı } S_0 = \frac{iX + jY + kZ}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} \text{ ve dual kısmı } S_0^* = \frac{iX^* + jY^* + kZ^*}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} + \frac{dd^*(iX + jY + kZ)}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

olarak elde edilir [2].

Tanım 2.3.3.19. $\hat{\theta}$ dual açı, $\hat{S}$ birim dual eksen olmak üzere $P = \cos \hat{\theta} + \hat{S} \sin \hat{\theta}$ dual kuaterniyonun De Moivre kuralı

$$P^k = (\cos \hat{\theta} + \hat{S} \sin \hat{\theta})^k = \cos(k\hat{\theta}) + \hat{S} \sin(k\hat{\theta})$$

formülü ile tanımlanır [2].

Örnek 2.3.3.20. $\theta = 30^\circ$ dönme açısı, $\theta^* = 2$ öteleme uzaklığı olmak üzere $\hat{S} = (1, 0, 0) + \varepsilon(1, 0, 0)$ birim dual eksen etrafında $\theta = 30^\circ + \varepsilon 2$ dual açısı kadar döndürme yapan $P = \cos \hat{\theta} + \hat{S} \sin \hat{\theta}$ birim dual kuaterniyonun dördüncü kuvvetinin De Moivre kuralı

$$\begin{aligned} P^4 &= (\cos(30 + \varepsilon 2) + ((1, 0, 0) + \varepsilon(1, 0, 0)) \sin(30 + \varepsilon 2))^4 \\ &= (\cos(120 + \varepsilon 8) + ((1, 0, 0) + \varepsilon(1, 0, 0)) \sin(120 + \varepsilon 8)) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

2.4. İnterpolasyon Çeşitleri

Başlangıç ve bitiş noktalarını kullanarak ara değerlerin tahmini hesaplanması olarak bilinen interpolasyon kavramı sayısal analiz yöntemlerinden biridir. Tasarı geometride de uzaydaki dönme ve öteleme hareketlerini daha sistematik olarak üretebilmek için bazı interpolasyon çeşitlerine ihtiyaç duyulmaktadır. Bu bölümde tasarı geometride kullanılan bazı interpolasyon çeşitleri hakkında temel bilgiler verilecektir.

2.4.1. İki Dönme Arasında İnterpolasyon

Keyfi bir M kümesi verilsin. $t \in [0,1]$ parametre aralığı olmak üzere $x_0 \in M$ ve $x_1 \in M$ noktaları arasındaki $\gamma: M \times M \times [0,1] \rightarrow M$ interpolasyon eğrisi

$$\begin{aligned}\gamma(x_0, x_1, 0) &= x_0 \\ \gamma(x_0, x_1, 1) &= x_1\end{aligned}$$

koşullarını sağlar [9].

2.4.2. Lineer Euler İnterpolasyon (LinEuler)

İki Euler açısı çifti arasındaki en belirgin basit doğrusal interpolasyon yöntemidir. $t \in [0,1]$ parametre olmak üzere $\mathbf{v}_0 = (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0) \in \mathbb{R}^3$ ve $\mathbf{v}_1 = (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1) \in \mathbb{R}^3$ noktaları arasındaki doğrusal interpolasyon eğrisi

$$LinEuler(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, t) = \mathbf{v}_0(1-t) + \mathbf{v}_1t$$

ile tanımlanır [9].

2.4.3. Lineer Matrix İnterpolasyon (LinMat)

$M_0 \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ ve $M_1 \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ iki dönme matrisi ve $t \in [0,1]$ olsun. Alternatif olarak dönme matrisleri arasında doğrusal interpolasyon alındığında

$$\text{LinMat}(M_0, M_1, t) = M_0(1-t) + M_1t$$

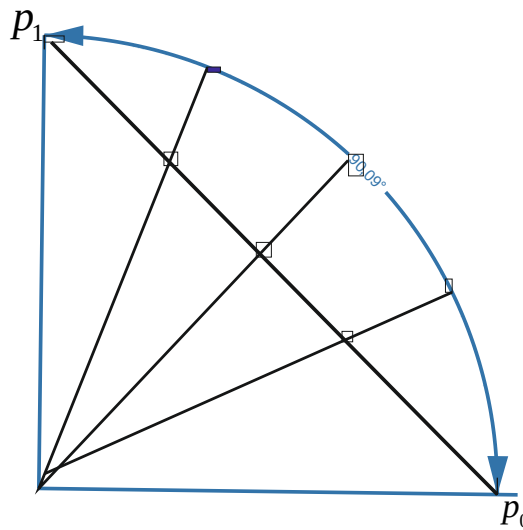
ile LinMat interpolasyonu tanımlanmış olur. Genellikle ortonormal matrisler arasındaki doğrusal Euler interpolasyonlar sonucunda ortonormal matris üretilmediği için LinMat interpolasyon eğrisi genel olarak birim küre üzerinde değildir. Bu interpolasyon matrisleri öteleme, ölçekleme, izdüşüm ve diğer dönüşüm unsurlarını içeren genel homojen dönüşüm matrisleridir [9].

2.4.4. Lineer interpolasyon (Lerp)

İki nokta arasındaki eğri üretmenin en kolay yolu, doğrusal interpolasyon yöntemidir. $t \in [0,1]$ interpolasyon parametresi olmak üzere üç boyutlu Öklit uzayında alınan $\mathbf{p}_0$ ve $\mathbf{p}_1$ başlangıç ve bitiş noktaları arasındaki lineer interpolasyon

$$\text{Lerp}(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, t) = (1-t)\mathbf{p}_0 + t\mathbf{p}_1$$

ile tanımlanır [5].



Şekil 2.7. Lerp interpolasyonunda noktalar arası uzaklık [5]

Örnek 2.4.4.1. $\mathbf{p}_0 = (2, 3, 4)$ ve $\mathbf{p}_1 = (3, 4, 5)$ vektörlerini kullanarak lineer interpolasyonu uygulamasını yapalım,

$$\text{Lerp}(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, t) = (1-t)\mathbf{p}_0 + t\mathbf{p}_1$$

$$\begin{aligned}\text{Lerp}(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, t) &= (2, 3, 4)(1-t) + (3, 4, 5)t \\ &= (2+t, 3+t, 4+t)\end{aligned}$$

denklemleriyle hesaplanır. Lineer interpolasyonunda t her değeri için interpolasyon eğrisinin noktaları Çizelge 2.2’de verilmiştir.

Çizelge 2.2. Lerp interpolasyon eğrisinin $t \in [0, 1]$ aralığındaki değerleri

$t \in [0, 1]$	$p_{01} = (2+t, 3+t, 4+t)$
0	(2, 3, 4)
0.1	(2.1, 3.1, 4.1)
0.2	(2.2, 3.2, 4.2)
0.3	(2.3, 3.3, 4.3)
0.4	(2.4, 3.4, 4.4)
0.5	(2.5, 3.5, 4.5)
0.6	(2.6, 3.6, 4.6)
0.7	(2.7, 3.7, 4.7)
0.8	(2.8, 3.8, 4.8)
0.9	(2.9, 3.9, 4.9)
1	(3, 4, 5)

2.4.5. Lineer Kuaterniyon İnterpolasyon (LERP)

Diğer interpolasyon çeşidi dönme kuaterniyonları arasındaki doğrusal interpolasyondur. Bu interpolasyona kısaca LERP adı verilir. $q_0, q_1 \in H$ ve $t \in [0, 1]$ olmak üzere bu iki kuaterniyonik nokta arasındaki lineer interpolasyon eğrisi

$$LERP(q_0, q_1, t) = q_0(1-t) + q_1t$$

ile tanımlanır. Kuaterniyonlar arasındaki lineer interpolasyon kuaterniyon uzayında düz bir çizgi verir. Bu nedenle eğri, birim küre yüzeyinin altında kalır [9].

Örnek 2.4.5.1. $q_0 = [0, 1, 0, 0]$ ve $q_1 = [0, 0, 1, 0]$ birim kuaterniyonların lineer kuaterniyon interpolasyon eğrisi

$$LERP(q_0, q_1, t) = (0, 1, 0, 0)(1-t) + (0, 0, 1, 0)t = (0, 1-t, t, 0)$$

denklemleriyle hesaplanır. Lineer kuaterniyon interpolasyon eğrisinin noktaları Çizelge 2.3’de verilmiştir.

Çizelge 2.3. LERP interpolasyon eğrisinin $t \in [0, 1]$ aralığındaki değerleri

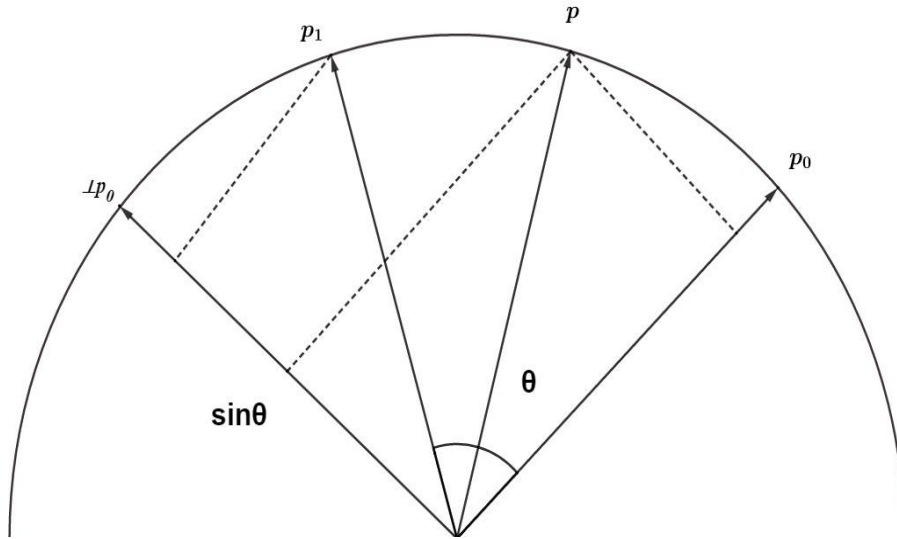
$t \in [0, 1]$	$q_{01} = (0, 1-t, t, 0)$
0	$(0, 1, 0, 0)$
0.1	$(0, 0.9, 0.1, 0)$
0.2	$(0, 0.8, 0.2, 0)$
0.3	$(0, 0.7, 0.3, 0)$
0.4	$(0, 0.6, 0.4, 0)$
0.5	$(0, 0.5, 0.5, 0)$
0.6	$(0, 0.4, 0.6, 0)$
0.7	$(0, 0.3, 0.7, 0)$
0.8	$(0, 0.2, 0.8, 0)$
0.9	$(0, 0.1, 0.9, 0)$
1	$(0, 0, 1, 0)$

2.4.6. Küresel Lineer Kuaterniyon İnterpolasyon (SLERP)

SLERP tanımını ilk kez Ken Shoemake 1985'te vermiştir [8]. Doğrusal interpolasyondan farklı olarak SLERP'ler iki birim kuaterniyon arasındaki açının sabit olacağı şekilde küresel bir interpolasyon sağlarlar. SLERP interpolasyonunda oluşan kuaterniyonlar her zaman birim kuaterniyonları vereceği için SLERP interpolasyonunun normalize edilmesi gerekmemektedir. $t \in [0,1]$ parametre olmak üzere p_0 ile p_1 noktaları arasındaki SLERP interpolasyonu

$$SLERP(p_1, p_2, t) = p_0 (p_0^{-1} p_1)^t = p_1 \frac{\sin((1-t)\theta)}{\sin \theta} + p_2 \frac{\sin(t\theta)}{\sin \theta}$$

ile verilir. Burada iki birim kuaterniyon arasındaki açı $\theta = \cos^{-1}(q_1 \cdot q_2)$ ile hesaplanır. SLERP interpolasyonunda p_0 ile p_1 arasındaki SLERP, p_1 ile p_0 arasındaki SLERP aynı olduğu yani $SLERP(p_0, p_1; t) = SLERP(p_1, p_0; 1-t)$ eşitliğinin sağlandığı görülmektedir [5, 7].



Şekil 2.8. p_0 ile p_1 arasındaki SLERP, p_1 ile p_0 arasındaki SLERP aynıdır [5]

Örnek 2.4.6.1. $p_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}k$ ve $p_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ birim kuaterniyonları arasındaki SLERP interpolasyonunu hesaplayıp $(0,1,1)$ noktasının $t = 0.5$ deki interpolasyon değeri ile döndürülmesini hesaplayalım. İki kuaterniyon arasındaki iç çarpım tanımından

$$\cos \theta = p_1 \cdot p_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 \cdot 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2}$$

olduğu için $\theta = 60^\circ$ olarak bulunur. $t = 0.5$ değeri için SLERP interpolasyonu

$$\begin{aligned} SLERP(p_1, p_2, 0.5) &= p_1 \frac{\sin((1-t)\theta)}{\sin \theta} + p_2 \frac{\sin(t\theta)}{\sin \theta} \\ &= \frac{\sin 30}{\sin 60} q_1 + \frac{\sin 30}{\sin 60} q_2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{k} \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{i} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{6}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{6}} \mathbf{k} \end{aligned}$$

ile hesaplanır. $SLERP(p_1, p_2, 0.5)$ kuaterniyonu (2.3) deki birim kuaterniyonların dönme matrisine dönüştürüldüğünde $(0,1,1)$ noktasının konumu

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Örnek 2.4.6.2. $p_1 = 0 + \frac{1}{\sqrt{3}}i + \frac{1}{\sqrt{3}}j + \frac{1}{\sqrt{3}}k$ ve $p_2 = 0 - \frac{1}{\sqrt{3}}i - \frac{1}{\sqrt{3}}j - \frac{1}{\sqrt{3}}k$ birim kuaterniyonları arasındaki açı $\theta = 180^\circ$ olur. $t = 0.5$ için SLERP interpolasyonu

$$SLERP(p_1, p_2, t) = \frac{\sin 90^\circ}{\sin 180^\circ} p_1 + \frac{\sin 90^\circ}{\sin 180^\circ} p_2$$

ile hesaplanır. Bu durumda payda sıfır olduğundan tanımsız olacağı için interpolasyon yapılamaz. Sonuç olarak bir saf kuaterniyonun eşleniği ile interpolasyon yapılamaz.

Örnek 2.4.6.3. $p_1 = 0 + \frac{1}{\sqrt{6}}i + \frac{1}{\sqrt{6}}j - \frac{2}{\sqrt{6}}k$ ve $p_2 = 0 - \frac{1}{\sqrt{3}}i - \frac{1}{\sqrt{3}}j - \frac{1}{\sqrt{3}}k$ iki saf birim kuaterniyonları arasındaki açı $\theta = 90^\circ$ dir. $t = 0.5$ için SLERP interpolasyonu

$$\begin{aligned} SLERP(p_1, p_2, t) &= \frac{\sin 45^\circ}{\sin 90^\circ} p_1 + \frac{\sin 45^\circ}{\sin 90^\circ} p_2 \\ &= \frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}i + \frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}j + \frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}k \end{aligned}$$

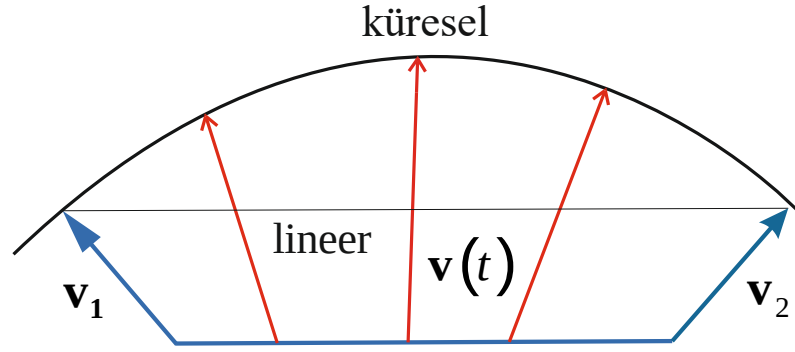
olarak elde edilir.

2.4.7. Geometrik Slerp

Üç boyutlu uzayda alınan $t \in [0,1]$ olmak üzere $\mathbf{v}_1$ ve $\mathbf{v}_2$ vektörleri arasındaki küresel interpolasyon

$$\mathbf{v}(t) = \frac{\sin(1-t)\alpha}{\sin \alpha} \mathbf{v}_1 + \frac{\sin t\alpha}{\sin \alpha} \mathbf{v}_2,$$

ile bulunur. Bu interpolasyon küresel kuaterniyon interpolasyonu ile karıştırılmaması için geometrik Slerp, $Slerp(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t)$ olarak gösterilecektir. Bu iki vektör arasındaki açı $\cos \alpha = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$ denklemi ile hesaplanır.



Şekil 2.9. Geometrik Slerp interpolasyonu [5]

Örnek 2.4.7.1. $\mathbf{v}_0 = (2, 1, 1)$ ve $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 2)$ vektörleri alınarak oluşturulan geometrik Slerp interpolasyon eğrisinin $t = 0.5$ deki değerini hesaplayalım.

İlk olarak $\mathbf{v}_0$ ve $\mathbf{v}_1$ vektörleri arasındaki açı $\cos \alpha = \frac{\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_0\| \|\mathbf{v}_1\|}$ ifadesi ile hesaplandığında $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ve $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ elde edilir. Burada $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{6}}{6}}$ bulunur. Böylece $\mathbf{v}_0$ ve $\mathbf{v}_1$ vektörleri ile oluşturulan geometrik Slerp interpolasyon eğrisinin $t = 0.5$ deki değeri

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{01}(t) &= \text{Slerp}(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, t) = \mathbf{v}_0 \frac{\sin((1-t)\alpha)}{\sin \alpha} + \mathbf{v}_1 \frac{\sin(t\alpha)}{\sin \alpha} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{1-\sqrt{6}}{6}}}{\frac{\sqrt{6}}{3}} (2, 1, 1) + \frac{\sqrt{\frac{1-\sqrt{6}}{6}}}{\frac{\sqrt{6}}{3}} (1, 2, 2) \\ &= \frac{\sqrt{1-\sqrt{6}}}{2} (3, 3, 3) \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Çizelge 2.4. Geometrik $Slerp(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, t)$ 'ın başlangıç, orta ve bitiş noktalarının değerleri

t 'nin değerleri	$Slerp(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, t)$ interpolasyonu
$t = 0$	$\mathbf{v}_0 = (2, 1, 1)$
$t = 0.5$	$\mathbf{v}_{01} = \frac{\sqrt{1-\sqrt{6}}}{2} (3, 3, 3)$
$t = 1$	$\mathbf{v}_1 = (1, 2, 2)$

2.4.8. Hızlı Artımlı SLERP (Fast SLERP)

Hast 2003 yılında q_0 Gram-Schmidt'in ortogonalleştirme algoritmasının bir adımını uygulayarak elde ettiği

$$q(n) = q_1 \cos(nK_\theta) + q_0 \sin(nK_\theta)$$

hızlı artımlı Slerp interpolasyonunu tanımlamıştır. Bu kuaterniyon, q_1 kuaterniyonuna ortogonaldir ayrıca q_1 ve q_2 tarafından gerilen aynı hiper düzlemde uzanır. Eğer k basamağı varsa, her kuaterniyon arasındaki açı $K_\theta = \frac{\cos^{-1}(q_1 \cdot q_2)}{k}$ olarak hesaplanır [7].

2.4.9. Normalleştirilmiş Lineer interpolasyon (Nlerp)

NLERP normalleştirilmiş SLERP anlamına gelmektedir ve $t \in [0, 1]$ olmak üzere;

$$NLERP(q_1, q_2, t) = |q_1| \left(|q_1|^{-1} |q_2| \right)^t = \frac{LERP(q_0, q_1, t)}{|LERP(q_0, q_1, t)|}$$

eşitliği ile tanımlanır. Kuaterniyonlar normalleştirildiği için NLERP ler değişmeli olduğu halde SLERP interpolasyonu değişmeli değildir [6].

Örnek 2.4.9.1. $q_0 = [2 + 4i + 6j + 8k]$ ve $q_1 = [4 + 6i + 8j + 10k]$ kuaterniyonları kullanarak NLERP interpolasyon eğrisinin $t = 0.5$ deki değerini hesaplayalım. Öncelikle bu kuaterniyonlar için LERP interpolasyonun $t = 0.5$ deki değeri

$$\begin{aligned} LERP(q_0, q_1, t) &= [2 + 4i + 6j + 8k](1 - 0.5) + [4 + 6i + 8j + 10k]0.5 \\ &= [3 + 5i + 7j + 9k] \end{aligned}$$

ile bulunur. O halde NLERP interpolasyonu $\frac{LERP(q_0, q_1, t)}{|LERP(q_0, q_1, t)|}$

$$NLERP = \frac{3 + 5i + 7j + 9k}{|3 + 5i + 7j + 9k|}$$

olarak hesaplanır.

2.4.10. Küresel Spline Kuaterniyon İnterpolasyonu (Squad)

Shoemake 1987 yılında Squad interpolasyonunu $h \in [0, 1]$ olmak üzere;

$$s_i = q_i \exp \left(- \frac{\log(q_i^{-1} q_{i+1}) + \log(q_i^{-1} q_{i-1})}{4} \right),$$

$$Squad(q_i, q_{i+1}, s_i, s_{i+1}, h) = Slerp(Slerp(q_i, q_{i+1}, h), Slerp(s_i, s_{i+1}, h), 2h(1-h))$$

ile tanımlamıştır [1].

2.4.11. Vida Lineer İnterpolasyon (Screw linear Interpolation-Sclerp)

Kavan 2006 yılında yaptığı çalışmada Sclerp kısaltması ile bilinen vida lineer interpolasyonunu SLERP'in genişletilmiş bir hali olarak incelemiştir. Sclerp vida lineer interpolasyonunda dual kuaterniyon kullanıldığı için hem dönme hem de öteleme hareketini içermektedir. Bu nedenle $t\alpha$ dönme açısını u da vida eksenini üzerindeki ötelemeyi göstermek üzere Sclerp interpolasyon eğrisi

$$Sclerp(D_1, D_2; t) = D_1 \times \left(\cos t \frac{\alpha}{2} + \sin t \frac{\alpha}{2} u \right)$$

ifadesi ile tanımlanır [8, 13].

2.4.12. Geometrik Vida Lineer İnterpolasyonu

Geometrik vida lineer interpolasyonu birim dual küre üzerinde iki birim dual vektör arasındaki interpolasyondur ve bu interpolasyon birim dual küre üzerindeki dual büyük daire üzerinde bir dual eğri çizer. $t \in [0,1]$ parametresi ile B_0 ve B_1 birim dual vektörleri arasındaki geometrik vida lineer interpolasyon eğrisi

$$\mathbf{B}(t) = L(\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, t) = \frac{\sin(1-t)\phi}{\sin \phi} \mathbf{B}_0 + \frac{\sin t\phi}{\sin \phi} \mathbf{B}_1 \quad t \in [0,1]$$

şeklinde tanımlanmıştır [12].

2.4.13. Dual Kuaterniyon Lineer Blending (DLB)

Dual kuaterniyon lineer blending Nlerp'in bir genişletilmiş hali olarak düşünülebilir. $t \in [0,1]$ parametresi ile D_1 ve D_2 birim dual kuaterniyonu arasındaki lineer blending interpolasyonu

$$DLB(D_1, D_2; t) = \frac{D_1(1-t) + D_2t}{\|D_1(1-t) + D_2t\|}$$

ile tanımlanır [13, 14].

2.4.14. Dual Kuaterniyon İterasyon Blending (DIB)

Kavan 2006 yılında DIB kısaltması ile bilinen bir iterasyon algoritması tanımlamıştır. Bu algoritmada dual kuaterniyonların uygun jeodezik ortalamasını kullanarak küresel interpolasyonun genelleştirilmesini sağlamaktadır. Sclerpler ve dual kuaterniyon lineer blendingler kullanılırken alınan dual kuaterniyonların birim dual kuaterniyon olması gerektiğinden dual kuaterniyon iterasyon blending (DIB) algoritması daha hızlı işlem yapabilmeyi sağlamaktadır [14]. DIB algoritması ile ilgili ayrıntılı bilgi Kavan [14] da bulunabilir.

2.5. Robotik Hareketler

Robot Tanımı 2.5.1. Robot programlanarak verilen komutları eksiksiz bir şekilde yapabilen elektro-mekanik bir makinedir. Robotların uzaktan kumanda ile yönetilmesi yanında aynı zamanda birebir kullanımı da mevcuttur. Amerika Robot Enstitüsü'ne göre (1979), bir robot, farklı işlevleri yapabilmek için programlanmış hareketlerle malzeme, parça, alet, veya özel cihazları taşımak için yapılmış çok yönlü, tekrar programlanabilir düzenek olarak tanımlanırken, Webster sözlüğüne göre (1993), normal koşullarda insanlara atfedilen işlevleri yapan, veya şekilsel olarak insana benzeyen otomatik bir düzenek olarak tanımlanmıştır [23,24].

2.5.2. Robotların Tarihçesi

Robotiğin babası olarak bilinen El- Cezeri 1153 yılında Diyarbakır ilinin Cizre ilçesinde Tor mahallesinde dünyaya geldi. M.Ö. 300 yıllarında Yunan matematikçisi Archytas tarafından buharla çalışan güvercin yapıldığı belirtilse de robotik ile ilgili bilinen en eski kayıt Cezeri'ye aittir. Bugüne kadar ulaşan en eski mühendislik uygulamaları el yazması “Harikalar Kitabı” olarak kabul ediliyor. Bu kitapta renkli resimler, şekiller ve ilk insansı robotlardan krank miline teknolojinin ilk aletleri yer alıyor. Ayrıca, El-Cezeri yaptığı çalışmalarını “Otomat Kitabında” toplamıştır [21, 22].

Robot teknolojisinin tarihçesindeki şu gelişmeler literatürde yer almaktadır: Jacques de Vaucanson, Pierre ve Henri-Louis Jacquet Droz, Henri Maillerdet 1800 yılında otomatik yazı yazan ve müzik enstrümanı çalan makineler geliştirdiler. İlk kez “robot” kelimesini Çekoslovak Karel Capek'in 1920-1921 yıllarında yazdığı tiyatrodaki kullanımıdır. İnsan biçimli robot 1927

yılında Metropolis filminde görüldü. Robot kelimesinden “Robotik” olarak Isaac Asimov 1941 yılında türeterek robot teknolojisinde çalışmaları kapsayan bilim literatürüne girdi. 1942 yılında ise Isaac Asimov kitabında Üç Robot yasasından bahsetmiştir. Çalıştırılması tekrar yapılabilen bir manyetik kayıt yapan makineyi George Devol 1946 yılında yaparak kullanmıştır. İkinci makalesinde Alan Turing “ Zeka ve Hesaplama Mekanizması “ nı 1950 yılında yayınlarak zeka ile makinelerle ilgili bir çok muallakta kalan sorulara cevap olmuştur. Robot kullanılarak bilgisayar destekli üretim amaçlı bazı çalışmalar MIT’de 1959’da yapılmıştır. Altı eklemlilik ilk yapay kol bilgisayar denetimi ile 1963’te geliştirilmiştir. 1964 yılında ilk kez yapay zeka araştırmaları ve laboratuvarlar, dünyanın önde gelen bazı üniversitelerinde başlanmıştır. PUMA isimli robot 1978’de üretilerek pazarlamaya başlanmıştır. Shakey’den daha fazla gelişmiş Lakey robot SRI tarafından 1984’te üretilmiştir. 1990 yılında ABD’de 12 tane robot firması bulunurken Japonya’da 40’den fazla robot firması kurulmuştur. Asimo’yu Honda firması 2000 yılında dünyaya tanıtmıştır. 2014 yılında ise Japonya’da insan görünümlü robot ilk kez spikerlik yapmıştır. Sofia adlı robot Hanson Robotics şirketi tarafından 2016 yılında tanıtılmıştır. 2017 yılındaki robot teknolojisindeki gelişmelerden bazıları ise şunlardır: “Laundroid” robot bayanların gözünde büyüttüğü kıyafet katlama işlemini düzenleyen bir robot olarak tasarlanmıştır [23-25]. Robotik alanda kinematik modelleme en önemli araçlardandır. Kinematik modelleme, robotların olduğu her yerde ve her alanda kullanılmaktadır. Ayrıca, çatı değişimli robotik modellemeler ile ilgili çalışmalar da Baydaş (2006) tarafından ele alınmıştır [26, 27].

2.5.3 Küresel Mekanizmalarda Kuaterniyonlarla Robot Kolu Hareketleri

Tanım 2.5.3.1 (Küresel Mekanizma) Hareketleri sınırlandırılmamış olan bir katı nesnenin üç boyutlu uzaydaki pozisyonu ve açısal konumları en genel olarak altı bağımsız değişken ile saptanır. Bağımsız değişkenler birbirlerine genel olarak dik(ortogonal), bu eksenler üçü’nde öteleme hareketi oluşurken aynı zamanda kendi eksenlerinde dönme hareketini yapıyorlar. Katı nesneler birbirlerine eklem (mafsal, joint) olarak bağlandıklarında kinematik zinciri oluşturmaktadırlar. Kinematik zincirde herhangi bir eleman durağan olarak bir çerçeveye bağlanırsa düzenek yada mekanizma denir. Mekanizmaların en önemli kısımları serbestlik derecesi (DoF) denir. Serbestlik derecesi bir mekanizmadaki bağımsız hareket katsayılarını verir.

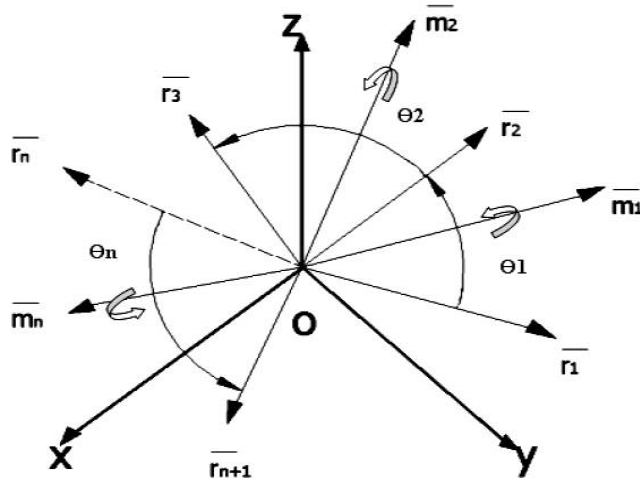
Makineler ve düzenekler kuramı 1800’li yıllarda Rusya’da kullanılmış ve Avrupa’ya yayıldıktan sonra tüm dünyayı sarmıştır. Polonya’da 1969’lı yıllarda makineler ve mekanizmalar kuramı üzerine ikinci dünya toplantısı yapılmış ve kongre kurulmuştur. Kongrenin temel konusu

kinematik olduğu vurgulanmıştır, makineler ve düzenekler kuramına katkı sağlayan bazı öncüler; Leonhard Euler katı bir cismin bir nokta etrafında dönmesini ilk defa göstermiş (1776, Euler), Rowan Hamilton kuaterniyonların yoğun bir şekilde robotikte ve bilgisayar çizimlerinde kullanıldığını bulmuştur (1844, Hamilton). Kinematik tarihi eski olmasına rağmen çözülmeyi bekleyen bir çok probleme karşı her geçen gün gelişme gösteren bilim dalıdır [18,19].

Tanım 2.5.3.2. $q_i = \cos \frac{\theta_i}{2} + \mathbf{m}_i \sin \frac{\theta_i}{2}$ birim kuaterniyonları ile $\mathbf{r}_i$ vektörleri $\mathbf{m}_i$ eksenleri etrafında θ_i ($i=1, \dots, n$) açısı kadar döndürülsün. Burada $\mathbf{r}_{i+1}$ vektörü $\mathbf{r}_{i+1} = q_i(\mathbf{r}_i)q_i^{-1}$ kuaterniyon çarpımı ile hesaplanır. Kuaterniyon operatörleri ile **dizisel yöntem** kullanarak katı cisim dönmeleri

$$\mathbf{r}_{n+1} = q_n q_{n-1} \dots q_2 q_1(\mathbf{r}_i) q_1^{-1} q_2^{-1} \dots q_{n-1}^{-1} q_n^{-1}$$

ile tanımlanmıştır [18,19].



Şekil 2.10. Katı cisimlerin kuaterniyonlarla dizisel dönme yöntemi [18,19]

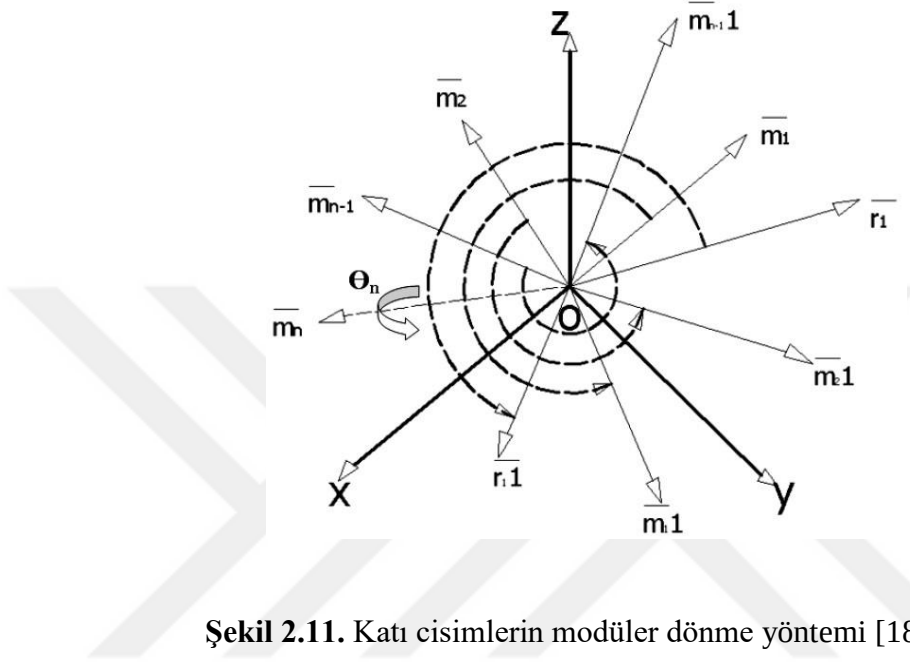
Tanım 2.5.3.3. $\bar{r}_1$ ve $\bar{m}_n$ dışındaki tüm $\bar{m}_i$ ler θ_n kadar $\bar{m}_n$ etrafında döndükten sonra ve yeni vektörler $\bar{r}_1'$ ve $\bar{m}_1'$ olur ve bu işlem $\bar{r}_1^n$ 'e ulaşıncaya kadar devam eder. Böylece

$$r_1^i = q_i^*(r_1)q_i^{*-1} \quad \text{ve} \quad m_j^i = q_i^*(m_j^{i-1})q_i^{*-1}$$

denklemlerini kullanarak katı cisimlerin kuaterniyon operatörleri ile **modüler döndürme** işlemi

$$r_1^n = q_n^* q_{n-1}^* \dots q_2^* q_1^* (r_1) q_1^{*-1} q_2^{*-1} \dots q_{n-1}^{*-1} q_n^{*-1}$$

denklemini ile tanımlanır [18,19].



Şekil 2.11. Katı cisimlerin modüler dönme yöntemi [18,19]

3. BULGULAR

Tez çalışmamızda küresel mekanizmalarda dizisel SLERP, dizisel fast SLERP tanımlarını, De-Moivre ile dizisel SLERP ve modüler SLERP interpolasyonlarının tanımları verilecektir. Ayrıca küresel mekanizmaların mafsalları ve hareket yörüngeleri dizisel SLERP metodu ile oluşturulacaktır. Geometrik Slerp'in Frenet Çatısı ve eğrilikleri, Dual küresel interpolasyon eğrisinin Blaschke çatısı ve dual küresel fast interpolasyon yöntemleri verilecek. Küresel mekanizmalarda dizisel Sclerp interpolasyonu ve fast vida lineer interpolasyon tanımları yapıldıktan sonra bu tanımlarla ilgili bazı MATLAB örnekleri verilecektir.

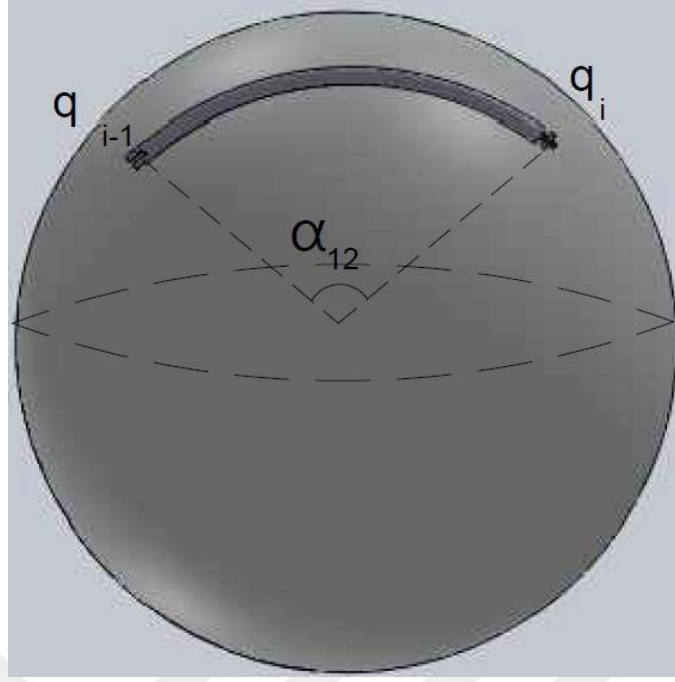
3.1. Küresel Mekanizmalarda Dizisel ve Modüler SLERP İnterpolasyonları

Gezgin (2006) ve Kilit (2007), ilk defa küresel mekanizmalarda $m_i \in R^3$ eksenleri etrafında θ_i ($i=1,...,n$) açısı kadar döndürmeyi sağlayan $q_i = \cos \frac{\theta_i}{2} + \mathbf{m}_i \sin \frac{\theta_i}{2}$ birim kuaterniyonları ile dizisel ve modüler dönme hareketini tanımlamışlardır [18, 19]. Çalışmamızın bu bölümünde kuaterniyonların kullanımıyla tanımlanan dizisel ve modüler dönme hareketlerini SLERP interpolasyonları ile oluşturarak yeni dönme yöntemleri elde edildi. Ayrıca dizisel fast SLERP ve De-Moivre ile Dizisel Fast SLERP yöntemleri tanımlandı.

Tanım 3.1.1. $q_{(i-1)}, q_i \in H_1$ olsun ve $t \in [0,1]$ parametre olmak üzere küresel bir mekanizmada robot kolunun $q_{(i-1)}$ den q_i kuaterniyonuna dönme hareketi sırasında oluşan SLERP interpolasyonunun dört boyutlu kuaterniyonik hiperküre üzerinde çizdiği yörünge [8] de verilen

$$q_{(i-1)i} = SLERP(q_{(i-1)}, q_i, t) = q_{(i-1)} \frac{\sin((1-t)\phi)}{\sin \phi} + q_i \frac{\sin(t\phi)}{\sin \phi}$$

denklemini ile tanımlanır. Burada $q_{(i-1)}$ ve q_i kuaterniyonları arasındaki açı $\cos \phi = q_{(i-1)} \cdot q_i$ eşitliğinden elde edilir.



Şekil 3.1. Robot kolunun üç ardışık kuaterniyon noktasına göre SLERP metodu ile yörünge oluşturulması

Tanım 3.1.2. $q_{(i-1)}, q_i, q_{(i+1)} \in H_1$ olsun ve $t \in [0,1]$ parametre olmak üzere verilen üç ardışık kuaterniyonun SLERP'lerinin üç aşamalı hesabından sonra, küresel mekanizmada robot kolunun hareketi boyunca dönmeyi $q_{(i-1)}$, q_i ve $q_{(i+1)}$ kuaterniyonik noktaların, dört boyutlu kuaterniyonik hiperküre üzerinde izlediği yörünge için alternatif bir yöntem;

$$SLERP(q_{(i-1)}, q_{(i+1)}, t) = q_{(i-1)i(i+1)} = q_{(i-1)i} \frac{\sin((1-t)\phi)}{\sin \phi} + q_{i(i+1)} \frac{\sin(t\phi)}{\sin \phi}$$

ile tanımlanabilir. Burada $q_{(i-1)i}$ ve $q_{i(i+1)}$ arasındaki açı $\cos \phi = q_{(i-1)i} \cdot q_{i(i+1)}$ denkleminde elde edilir [8,9].

Tanım 3.1.3. (Dizisel SLERP Metodu) $q_{(i-1)}, q_i, q_{(i+1)} \in H_1$ olsun ve $t = 0.5$ parametresi ile küresel mekanizma boyunca gerçekleştirilen üç ardışık dönmeyi veren $q_{(i-1)}$, q_i ve $q_{(i+1)}$ kuaterniyonik noktaların dört boyutlu kuaterniyonik hiperküre üzerinde robot kol uç işlevcisinin konumun denklemi $r_{n+1} = q_{(n-1)n}^{-1} \dots q_{23} q_{12} r_1 q_{12}^{-1} q_{23}^{-1} \dots q_{(n-1)n}^{-1}$ **dizisel SLERP metodu** olarak tanımlanır.

Burada kullanılan kuaterniyonlar $q_{(i-1)i}(0.5) = SLERP(q_{(i-1)}, q_i, 0.5)$ denklemi ile hesaplanır. Ayrıca kuaterniyonlar arasındaki açı $\cos \phi = q_{(i-1)i}(0.5) \cdot q_{i(i+1)}(0.5)$ ifadesi ile bulunur. Robot kolu hareketlerinin dönme yörüngelerinin dizisel SLERP yöntemi kullanılarak modellenmesi yörünge hareketlerini oluşturmak için kolay bir yöntem sunmaktadır.

Örnek 3.1.4. $q_1, q_2, q_3 \in H_1$, $q_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}k \right)$, $q_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$, $q_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j \right)$

kuaterniyonlarını kullanarak dizisel SLERP yöntemi ile küresel mekanizmalarda dizisel hareketi oluşturalım. q_1 ve q_2 kuaterniyonları arasındaki açı değeri $\cos \theta = q_1 \cdot q_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$ olduğu için $\theta = 60^\circ$ olarak hesaplanır. O halde bu iki kuaterniyonun SLERP interpolasyon eğrisinin denklemi

$$SLERPq_{12} = q_1 \frac{\sin(1-t)\theta}{\sin \theta} + q_2 \frac{\sin t\theta}{\sin \theta}$$

olarak yazılır. q_1 ve q_2 arasındaki SLERP interpolasyon eğrisinin $t = 0.5$ deki değeri

$$SLERPq_{12} = q_1 \frac{\sin 30^\circ}{\sin 60^\circ} + q_2 \frac{\sin 30^\circ}{\sin 60^\circ} = \left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}i + 0j + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}k \right]$$

biçiminde hesaplanır. Şimdi ise q_2 ve q_3 kuaterniyonları arasındaki SLERP interpolasyonunu inceleyelim. İlk olarak q_2 ve q_3 kuaterniyonları arasındaki açı değeri hesaplandığında $\cos \theta = q_2 \cdot q_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$ eşitliğinden $\theta = 60^\circ$ açısı elde edilir. q_2 ve q_3 kuaterniyonları arasındaki SLERP interpolasyonun $t = 0.5$ deki değeri

$$SLERPq_{23} = q_2 \frac{\sin 30^\circ}{\sin 60^\circ} + q_3 \frac{\sin 30^\circ}{\sin 60^\circ} = \left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}i + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}j + 0k \right]$$

denklemleri ile hesaplanır. Son olarak q_{12} ve q_{23} kuaterniyonları birim olduğundan q_{12} ve q_{23} kuaterniyonların SLERP'lerini hesaplama işlemine geçelim; q_{12} ve q_{23} kuaterniyonunun arasındaki açı değerleri $\cos \theta = q_{12} \cdot q_{23} = \frac{10}{12}$ ve $\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{11}{12}}$ olarak hesaplanır ve SLERP interpolasyon denkleminin $t = 0.5$ deki değeri

$$SLERP_{q_{12}q_{23}} = q_{12} \frac{1}{2 \cos \frac{\theta}{2}} + q_{23} \frac{1}{2 \cos \frac{\theta}{2}} = \left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}} i + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{11}} j + \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{11}} k \right]$$

olarak elde edilir.

Şimdi de küresel mekanizmalarda robot kolu hareketlerinin ardışık dönmelerini daha hızlı hale getirmek için, Bölüm 2.4.8 de tanımlanan Fast SLERP metodu Tanım 3.1.3.'daki Dizisel SLERP metodu ile birleştirilerek Dizisel Fast SLERP yöntemi oluşturulmuştur.

Tanım 3.1.5. (Dizisel Fast SLERP Metodu) $i = 1, 2, \dots, n$ için $q_0, q_1, q_i, q_{i+1} \in H_1$ birim kuaterniyonları verilsin. Bölüm 2.4.8 de tanımlanan Fast SLERP $q(n) = q_0 \cos(nk_\theta) + q_1 \sin(nk_\theta)$ denkleminde q_0 yerine q_i ve q_1 yerine q_{i+1} kuaterniyonları alındığında $q_{bi} = q_{i+1} - (q_i \cdot q_{i+1}) q_i$ kuaterniyonu elde edilir. Bu kuaterniyonlar arasındaki açı $i = 1, 2, \dots, n$ için $\cos \theta = q_i \cdot q_{i+1}$ ile hesaplanır. $0 \leq k \leq N$ ve $\theta_N = \theta/N$ olmak üzere q_i ve q_{i+1} birim kuaterniyonlar arasındaki Fast SLERP interpolasyonu $q_i(k) = q_i \cos(k\theta_N) + q_{bi} \sin(k\theta_N)$ ile ifade edilir. Bu denklemde k değişkeni $k = k_0$ gibi keyfi değer alabilir ya da hesaplamalardaki kolaylık için $k = 0.5$ gibi ortalama değerler de alınabilir. Fast SLERP interpolasyonunda $k = 0.5$ alındığında $q_i = \cos \frac{\theta_i}{2} + m_i \sin \frac{\theta_i}{2}$ Fast SLERP interpolasyon değeri elde edilir. Küresel mekanizmalarda mafsalların konum vektörleri r_i alındığında $i = 1, 2, \dots, n$ için her bir r_i vektörünün q_i birim kuaterniyonları ile dönme işlemi $r_{i+1} = q_i(r_i) q_i^{-1}$ ile elde edilir. Şimdi bu dönmeler, Tanım 3.1.3. verilen dizisel SLERP denkleminde dizisel olarak yerine yazıldığında $r_{n+1} = q_n q_{n-1} \dots q_2 q_1(r_1) q_1^{-1} q_2^{-1} \dots q_{n-1}^{-1} q_n^{-1}$ ile oluşturulan bu yeni yönteme **dizisel Fast SLERP metodu** adı verilecektir.

Tanım 3.1.6. (De-Moivre ile Dizisel Fast SLERP Metodu) $q_i, q_{i+1} \in H_1$ birim kuaterniyon olsun. $Z = \cos \theta_N + i \sin \theta_N$ karmaşık sayısı için De-Moivre kuralı kullanıldığında $Z^k = \cos(k\theta_N) + i \sin(k\theta_N)$ elde edilir. Bu ifade $i = 1, 2, \dots, n$ için $q_i(k) = (q_i, q_{i+1}) Z^k$ denkleminde yerine yazıldıktan sonra elde edilen $q_i \in H_1$ kuaterniyonları dizisel olarak küresel mekanizmanın uç mafsalları konumuna uygulandığında $r_{n+1} = q_n q_{n-1} \dots q_2 q_1 (r_1) q_1^{-1} q_2^{-1} \dots q_{n-1}^{-1} q_n^{-1}$ denklemi elde edilir. Bu yöntem **De-Moivre ile dizisel fast SLERP** adı verilecektir.

Tanım 3.1.7. (Modüler SLERP İnterpolasyonu) r_i ve m_i ler küresel mekanizmalardaki mafsalların konum vektörleri olsun. Bu yöntemde r_1 ve m_n dışında ki tüm m_i ler θ_n kadar m_n etrafında dönerler ve yeni vektörler r_1' ve m_1' olur ve bu işlem r_1^n vektörüne ulaşana kadar devam eder. $q_i = \cos \frac{\theta_i}{2} + m_i \sin \frac{\theta_i}{2}$ kuaterniyonlarının arasındaki açılar $\cos \phi = q_{(i-1)i} \cdot q_{i(i+1)}$ ile hesaplanarak $q_{i(i+1)}^* = q_i \frac{\sin((1-t)\theta_i)}{\sin \theta_i} + q_{i+1} \frac{\sin(t\theta_i)}{\sin \theta_i}$ SLERP denkleminde yazıldığında $t = 0.5$ için SLERP interpolasyonun denklemi $q_{i(i+1)}^*(t) = q_{i(i+1)}^*(0.5)$ olarak bulunur. Elde edilen kuaterniyonlar ile r_1 konum vektörünün döndürülmesi $r_1^i = q_{i(i+1)}^*(0.5)(r_1)q_{i(i+1)}^{*-1}(0.5)$ denklemi ile sağlanırken m_j^i eksenlerin döndürülmesi $m_j^i = q_i^*(m_j^{i-1})q_i^{*-1}$ denklemi ile sağlanır. Böylece modüler olarak oluşturulan $r_1^n = q_n^* q_{n-1}^* \dots q_{23}^* q_{12}^* (r_1) q_{12}^{*-1} q_{23}^{*-1} \dots q_{n-1}^{*-1} q_n^{*-1}$ yöntemine **Modüler SLERP interpolasyon** yöntemi adı verilecektir.

3.2. Küresel Mekanizmanın Mafsalları Arasındaki Uzunlukların Geometrik Slerp ile Tasarımı

Bu bölümde ise Gezgin (2006) ve Kilit(2007) çalışmalarındaki 2DoF ve 3DoF serbestlik dereceli küre mekanizmalarındaki mafsallar arası uzunluklar, çalışmamızın bu bölümünde ilk kez geometrik Slerp'lerin kullanımı ile oluşturulmuştur.

3.2.1. İki Serbestlik Dereceli Küresel Mekanizmaların Mafsalları Arasındaki Uzunlukların Geometrik Slerp ile Tasarımı

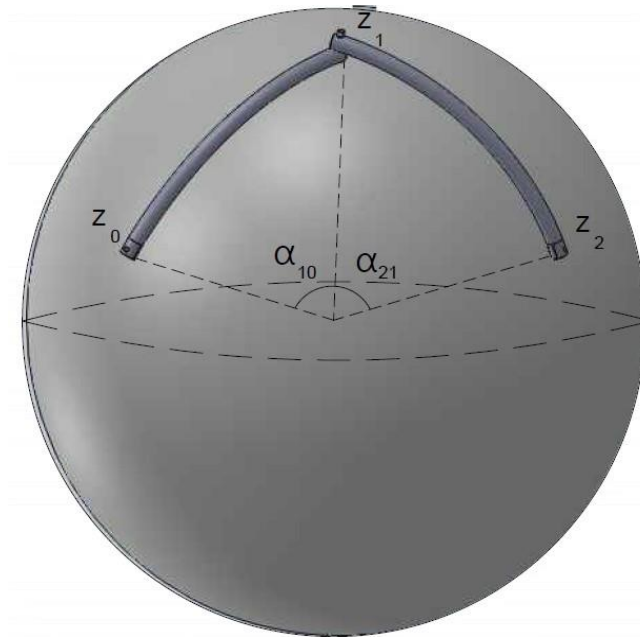
İki serbestlik dereceli küre mekanizmalarının mafsallarının konum vektörleri $\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1 \in R^3$ olsun. Bu küre mekanizmasında alınan $\mathbf{z}_0$ ve $\mathbf{z}_1$ birinci ve ikinci mafsalsal vektörleri arasındaki uzunluk denklemini

$$\mathbf{z}_{01} = Slerp(\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, t) = \mathbf{z}_0 \frac{\sin((1-t)\alpha_{10})}{\sin \alpha_{10}} + \mathbf{z}_1 \frac{\sin(t\alpha_{10})}{\sin \alpha_{10}}$$

biçiminde geometrik Slerp yöntemi ile elde edilir. Şimdi ise ikinci ve üçüncü mafsalsal vektörleri $\mathbf{z}_1$ ve $\mathbf{z}_2$ arasındaki uzunluk denklemini

$$\mathbf{z}_{12} = Slerp(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, t) = \mathbf{z}_1 \frac{\sin((1-t)\alpha_{21})}{\sin \alpha_{21}} + \mathbf{z}_2 \frac{\sin(t\alpha_{21})}{\sin \alpha_{21}}$$

ile hesaplanır. Böylece iki serbestlik dereceli küresel mekanizmaların mafsalları arasındaki uzunlukların denklemleri Şekil 3.2’te görüldüğü gibi geometrik Slerp yardımı ile hesaplanmış olur.



Şekil 3.2. 2DoF küresel mekanizmada geometrik Slerp ile mafsallar arası uzunlukların tasarımı

Örnek 3.2.1.1. İki serbestlik dereceli bir küresel mekanizmanın mafsallarının konum vektörleri $\mathbf{z}_0 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{z}_1 = (0, 1, 1)$ ve $\mathbf{z}_2 = (1, 1, 0)$ olsun. İki mafsal vektörleri arasındaki açı $\cos \alpha_{10} = \frac{\langle \mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1 \rangle}{\|\mathbf{z}_0\| \|\mathbf{z}_1\|}$ denkleminde $\alpha_{10} = \pi/3$ olmak üzere $\mathbf{z}_0$ ve $\mathbf{z}_1$ mafsal vektörlerinin arasındaki uzuv denklemi

$$\mathbf{z}_{01} = \text{Slerp}(\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, t) = (1, 0, 1) \frac{\sin(\pi(1-t)/3)}{\sin \pi/3} + (0, 1, 1) \frac{\sin(\pi t/3)}{\sin \pi/3}$$

interpolasyonu ile hesaplanır. $t = 0.5$ daki interpolasyonun değeri

$$\mathbf{z}_{01}(t) = \text{Slerp}(\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, t) = (1, 0, 1) \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} + (0, 1, 1) \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}} \right)$$

olarak hesaplanır. Birinci uzvun oluşumundan sonra, $\mathbf{z}_1$ ve $\mathbf{z}_2$ mafsalları arasındaki uzvun denklemini hesaplayalım. $\mathbf{z}_1$ ve $\mathbf{z}_2$ mafsal vektörleri arasındaki açı $\cos \alpha_{21} = \frac{\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \rangle}{\|\mathbf{z}_1\| \|\mathbf{z}_2\|}$ ifadesinden $\alpha_{21} = \pi/3$ olduğu için bu mafsallar arasındaki uzvun denklemi geometrik Slerp yöntemi ile

$$\mathbf{z}_{01} = \text{Slerp}(\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, t) = (0, 1, 1) \frac{\sin(\pi(1-t)/3)}{\sin \pi/3} + (1, 1, 0) \frac{\sin(\pi t/3)}{\sin \pi/3}$$

olarak hesaplanır. Hesaplanan uzvun $t = 0.5$ daki interpolasyon değeri

$$\mathbf{z}_{12}(t) = \text{Slerp}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, t) = (0, 1, 1) \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} + (1, 1, 0) \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

eşitliği ile elde edilir. Mafsallar arasındaki uzuv interpolasyon eğrisinin başlangıç orta ve bitiş noktalarının değerleri Çizelge 3.1’de verilmiştir.

Çizelge 3.1. 2DoF mekanizmanın uzuvlarının başlangıç, orta ve bitiş noktalarının değerleri

$t \in [0,1]$	$Slerp(\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, t)$ interpolasyon ($\mathbf{z}_0$ ve $\mathbf{z}_1$ arasında ki uzuv)	$Slerp(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, t)$ interpolasyon ($\mathbf{z}_1$ ve $\mathbf{z}_2$ arasında ki uzuv)
$t = 0$	$\mathbf{z}_0 = (1, 0, 1)$	$\mathbf{z}_1 = (0, 1, 1)$
$t = 0.5$	$\mathbf{z}_{01} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}} \right)$	$\mathbf{z}_{12} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$
$t = 1$	$\mathbf{z}_1 = (0, 1, 1)$	$\mathbf{z}_2 = (1, 1, 0)$

3.2.2. Üç Serbestlik Dereceli Küresel Mekanizmaların Mafsalları Arasındaki Uzuvların Geometrik Slerp ile Tasarımı

Üç serbestlik dereceli küre mekanizmalarının mafsallarının konum vektörleri $\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in R^3$ olsun. Küre mekanizmasındaki $\mathbf{z}_0$ ve $\mathbf{z}_1$ mafsalsal vektörleri arasındaki birinci uzvun denklemi

$$\mathbf{z}_{01} = Slerp(\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, t) = \mathbf{z}_0 \frac{\sin((1-t)\alpha_{10})}{\sin \alpha_{10}} + \mathbf{z}_1 \frac{\sin(t\alpha_{10})}{\sin \alpha_{10}}$$

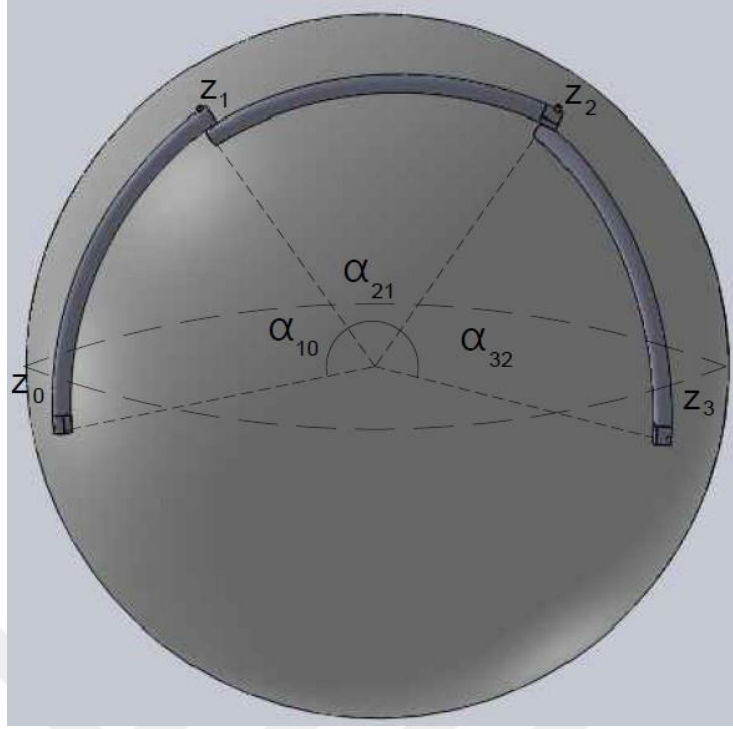
şeklinde ifade edilir. Şimdi de ikinci ve üçüncü mafsalsal vektörleri $\mathbf{z}_1$ ve $\mathbf{z}_2$ arasındaki α_{21} açısını kullanarak ikinci uzvun denklemi

$$\mathbf{z}_{12} = Slerp(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, t) = \mathbf{z}_1 \frac{\sin((1-t)\alpha_{21})}{\sin \alpha_{21}} + \mathbf{z}_2 \frac{\sin(t\alpha_{21})}{\sin \alpha_{21}}$$

olarak elde edilir. $\mathbf{z}_2$ ve $\mathbf{z}_3$ vektörleri arasındaki α_{32} açısını kullanarak üçüncü uzvun denklemini

$$\mathbf{z}_{23} = Slerp(\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, t) = \mathbf{z}_2 \frac{\sin((1-t)\alpha_{32})}{\sin \alpha_{32}} + \mathbf{z}_3 \frac{\sin(t\alpha_{32})}{\sin \alpha_{32}}$$

ile verilir. Böylece üç serbestlik dereceli küresel mekanizmaların mafsalları arasındaki uzuvların denklemleri Şekil 3.3'te görüldüğü gibi geometrik Slerp yardımı ile hesaplanmış olur.



Şekil 3.3. 3DoF küresel mekanizmada geometrik Slerp ile mafsallar arası uzuvların tasarımı

Örnek 3.2.2.1. Üç serbestlik dereceli bir küresel mekanizmanın mafsal vektörleri $\mathbf{z}_0 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{z}_1 = (0, 1, 1)$, $\mathbf{z}_2 = (1, 1, 0)$ ve $\mathbf{z}_3 = (1, 1, 1)$ olsun. $\cos \alpha_{10} = \frac{\langle \mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1 \rangle}{\|\mathbf{z}_0\| \|\mathbf{z}_1\|}$ eşitliğinden $\alpha_{10} = \pi/3$ olur $\mathbf{z}_0$ ve $\mathbf{z}_1$ mafsal vektörleri arasındaki birinci uzvun denklemi

$$\mathbf{z}_{01} = \text{Slerp}(\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, t) = (1, 0, 1) \frac{\sin(\pi(1-t)/3)}{\sin \pi/3} + (0, 1, 1) \frac{\sin(t \pi/3)}{\sin \pi/3}$$

olur ve bu interpolasyon eğrisinin $t = 0.5$ daki değeri

$$\mathbf{z}_{01}(t) = \text{Slerp}(\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, t) = (1, 0, 1) \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} + (0, 1, 1) \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}} \right)$$

ile hesaplanır. Mafsal vektörleri $\mathbf{z}_1$ ve $\mathbf{z}_2$ arasındaki açı değeri $\cos \alpha_{21} = \frac{\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \rangle}{\|\mathbf{z}_1\| \|\mathbf{z}_2\|}$ ifadesinden

$\alpha_{21} = \pi/3$ olarak hesaplanır. Böylece $\mathbf{z}_1$ ve $\mathbf{z}_2$ mafsalları arasındaki ikinci uzvun denklemi

$$\mathbf{z}_{12} = Slerp(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, t) = (0, 1, 1) \frac{\sin((1-t)\pi/3)}{\sin \pi/3} + (1, 1, 0) \frac{\sin(t\pi/3)}{\sin \pi/3}$$

geometrik Slerp denklemi ile hesaplanır. Bu interpolasyon eğrisinin $t = 0.5$ daki değeri

$$\mathbf{z}_{12}(t) = slerp(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, t) = (0, 1, 1) \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} + (1, 1, 0) \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

olarak elde edilir. Şimdi de küresel mekanizmanın üçüncü uzuv denklemini hesaplayalım.

$$\mathbf{z}_2 = (1, 1, 0) \text{ ve } \mathbf{z}_3 = (1, 1, 1) \text{ mafsalsal vektörlerinin arasındaki açı değeri } \cos \alpha_{32} = \frac{\langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3 \rangle}{\|\mathbf{z}_2\| \|\mathbf{z}_3\|}$$

denklemden hesaplanır. Bu denklemden yararlanarak $\cos \alpha_{32} = \frac{2}{\sqrt{6}}$, $\sin \alpha_{32} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$ ve

$$\sin \frac{\alpha_{32}}{2} = \sqrt{\frac{\sqrt{6}-2}{2\sqrt{6}}} \text{ eşitlikleri hesaplanıp}$$

$$\mathbf{z}_{23} = Slerp(\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, t) = \mathbf{z}_2 \frac{\sin((1-t)\alpha_{32})}{\sin \alpha_{32}} + \mathbf{z}_3 \frac{\sin(t\alpha_{32})}{\sin \alpha_{32}}$$

üçüncü uzuv denkleminde yerine yazıldığında $t = 0.5$ değeri için

$$\mathbf{z}_{23}(t) = Slerp(\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, t) = (1, 1, 0) \frac{\sqrt{\frac{\sqrt{6}-2}{2\sqrt{6}}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} + (1, 1, 1) \frac{\sqrt{\frac{\sqrt{6}-2}{2\sqrt{6}}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = (2, 2, 1) \sqrt{\frac{\sqrt{6}-2}{2\sqrt{6}}} \sqrt{3}$$

vektörü hesaplanır.

Çizelge 3.2. 3DoF mekanizmanın uzuvlarının başlangıç, orta ve bitiş noktalarının değerleri

$t \in [0,1]$	$Slerp(\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, t)$ interpolasyon ($\mathbf{z}_0$ ve $\mathbf{z}_1$ arasında ki uzuv)	$Slerp(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, t)$ interpolasyon ($\mathbf{z}_1$ ve $\mathbf{z}_2$ arasında ki uzuv)	$Slerp(\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, t)$ interpolasyon ($\mathbf{z}_2$ ve $\mathbf{z}_3$ arasında ki uzuv)
$t = 0$	$\mathbf{z}_0 = (1, 0, 1)$	$\mathbf{z}_1 = (0, 1, 1)$	$\mathbf{z}_2 = (1, 1, 0)$
$t = 0.5$	$\mathbf{z}_{01} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}} \right)$	$\mathbf{z}_{12} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$	$\mathbf{z}_{23} = (2, 2, 1) \sqrt{\frac{\sqrt{6}-2}{2\sqrt{6}}} \sqrt{3}$
$t = 1$	$\mathbf{z}_1 = (0, 1, 1)$	$\mathbf{z}_2 = (1, 1, 0)$	$\mathbf{z}_3 = (1, 1, 1)$

3.3. Geometrik Slerpin Frenet Çatısı ve Eğrilikleri

Öklit 3-uzayında alınan iki $\mathbf{z}_0 = (z_{0x}, z_{0y}, z_{0z})$ $\mathbf{z}_1 = (z_{1x}, z_{1y}, z_{1z})$ birim vektörlerinin normları $\|\mathbf{z}_0\| = z_{0x}^2 + z_{0y}^2 + z_{0z}^2 = 1$ ve $\|\mathbf{z}_1\| = z_{1x}^2 + z_{1y}^2 + z_{1z}^2 = 1$ olmak üzere oluşan Geometrik Slerpin denklemi

$$\beta = Slerp(\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, t) = \mathbf{z}_0 \frac{\sin((1-t)\alpha)}{\sin \alpha} + \mathbf{z}_1 \frac{\sin(t\alpha)}{\sin \alpha}$$

şeklinde verilir. Bu iki vektör arasındaki açı $\cos \alpha = \mathbf{z}_0 \cdot \mathbf{z}_1$ eşitliği ile bulunur. Şimdi ise geometrik Slerp interpolasyon eğrisinin Frenet çatısını hesaplayalım. β eğrisinin türevi

$$\begin{aligned} \beta' &= \mathbf{z}_0 \left(\frac{\sin((1-t)\alpha)}{\sin \alpha} \right)' + \mathbf{z}_1 \left(\frac{\sin(t\alpha)}{\sin \alpha} \right)' \\ &= \mathbf{z}_0 \frac{-\alpha \cos(1-t)\alpha}{\sin \alpha} + \mathbf{z}_1 \frac{\alpha \cos(t\alpha)}{\sin \alpha} = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_{0x} \frac{-\alpha \cos(1-t)\alpha}{\sin \alpha} + \mathbf{z}_{1x} \frac{\alpha \cos(t\alpha)}{\sin \alpha}, \\ \mathbf{z}_{0y} \frac{-\alpha \cos(1-t)\alpha}{\sin \alpha} + \mathbf{z}_{1y} \frac{\alpha \cos(t\alpha)}{\sin \alpha}, \\ \mathbf{z}_{0z} \frac{-\alpha \cos(1-t)\alpha}{\sin \alpha} + \mathbf{z}_{1z} \frac{\alpha \cos(t\alpha)}{\sin \alpha} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eşitliği ile hesaplanır.

Basitleştirmek için

$$A = \sqrt{\cos^2((1-t)\alpha) + \cos^2(t\alpha) - 2\cos((1-t)\alpha)\cos(t\alpha)\cos\alpha}$$

kısaltması kullanıldığında β eğrisinin türevinin normu $\|\beta'\| = A \left| \frac{\alpha}{\sin\alpha} \right|$ olarak hesaplanır.

Böylece birim hızlı olmayan β geometrik Slerp eğrisinin teğeti

$$\mathbf{T} = \frac{\beta'}{\|\beta'\|} = \frac{\mathbf{z}_0 \frac{-\alpha \cos(1-t)\alpha}{\sin\alpha} + \mathbf{z}_1 \frac{\alpha \cos(t\alpha)}{\sin\alpha}}{A \left| \frac{\alpha}{\sin\alpha} \right|} = \pm \frac{\mathbf{z}_0 \cos(1-t)\alpha + \mathbf{z}_1 \cos(t\alpha)}{A}$$

olarak hesaplanır. Şimdi de β geometrik Slerp eğrisinin binormal vektörünü hesaplayalım. β

eğrisinin ikinci türevi $\beta'' = -\alpha^2 \beta = -\alpha^2 \left[\mathbf{z}_0 \frac{\sin((1-t)\alpha)}{\sin\alpha} + \mathbf{z}_1 \frac{\sin(t\alpha)}{\sin\alpha} \right]$ olduğu için β' ve β''

türev vektörlerinin vektörel çarpımı

$$\begin{aligned} \beta' \wedge \beta'' &= \left[\mathbf{z}_0 \frac{-\alpha \cos(1-t)\alpha}{\sin\alpha} + \mathbf{z}_1 \frac{\alpha \cos(t\alpha)}{\sin\alpha} \right] \wedge \left[\mathbf{z}_0 \frac{-\alpha^2 \sin((1-t)\alpha)}{\sin\alpha} + \mathbf{z}_1 \frac{-\alpha^2 \sin(t\alpha)}{\sin\alpha} \right] \\ &= \frac{\alpha^3}{\sin\alpha} \cdot \mathbf{z}_0 \wedge \mathbf{z}_1 \end{aligned}$$

eşitliği ile hesaplanır ve bu vektörel çarpımın normu $\|\beta' \wedge \beta''\| = \left\| \frac{\alpha^3}{\sin\alpha} \cdot \mathbf{z}_0 \wedge \mathbf{z}_1 \right\| = \alpha^3$ eşitliği ile

bulunur. Böylece binormal vektörü $\mathbf{B} = \frac{\beta' \wedge \beta''}{\|\beta' \wedge \beta''\|} = \frac{\mathbf{z}_0 \wedge \mathbf{z}_1}{\sin\alpha}$ olarak hesaplanır. $\mathbf{N}$ asli normal

vektörü ise $\mathbf{N} = \mathbf{B} \wedge \mathbf{T}$ vektörel çarpımından

$$\begin{aligned} \mathbf{N} = \mathbf{B} \wedge \mathbf{T} &= \frac{\mathbf{z}_0 \wedge \mathbf{z}_1}{\sin\alpha} \wedge \mathbf{T} = \pm \frac{\mathbf{z}_0 \cos(1-t)\alpha + \mathbf{z}_1 \cos(t\alpha)}{A} \\ &= \pm \frac{1}{A \sin\alpha} \left\{ \left[\cos((1-t)\alpha) + \cos(t\alpha)\cos\alpha \right] \mathbf{z}_1 - \left[\cos\alpha \cos((1-t)\alpha) + \cos(t\alpha) \right] \mathbf{z}_0 \right\} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. β geometrik Slerp interpolasyon eğrisinin $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ Frenet çatısı hesaplanmış olur. Frenet çatısının κ eğriliği

$$\kappa = \frac{\|\beta' \wedge \beta''\|}{\|\beta'\|^3} = \frac{\alpha^3}{\left\| \frac{\alpha}{\sin \alpha} A \right\|^3} = \frac{\sin^3 \alpha}{[A]^3}$$

ve τ burulması

$$\tau = \frac{(\beta' \beta'' \beta''')}{\|\beta' \wedge \beta''\|^2} = -\frac{1}{\sin \alpha} \left\langle \mathbf{z}_0 \wedge \mathbf{z}_1, \left[\mathbf{z}_0 \frac{-\alpha \cos(1-t)\alpha}{\sin \alpha} + \mathbf{z}_1 \frac{\alpha \sin(t\alpha)}{\sin \alpha} \right] \right\rangle = 0$$

eşitlikleri ile bulunur. Burada β geometrik interpolasyon eğrisi kürenin geodezikleri olan büyük çember yayından oluştuğu için bu interpolasyon eğrisinin burulmasının sıfır olması tahmin edilebilen bir sonuçtur. β geometrik interpolasyon eğrisinin $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ Frenet çatısının türev formülleri

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 v & 0 \\ -k_1 v & 0 & k_2 v \\ 0 & -k_2 v & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{|\alpha| \sin^2 \alpha}{A^2} & 0 \\ -\frac{|\alpha| \sin^2 \alpha}{A^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

matrisi ile hesaplanır. Burada $v = \|\beta'\| = \left| \frac{\alpha}{\sin \alpha} \right| A$ dir. Bu geometrik interpolasyon eğrisinin yay

uzunluğu da $\int \|\beta'\| dt = \int \left| \frac{\alpha}{\sin \alpha} \right| A dt = \left| \frac{\alpha}{\sin \alpha} \right| \int A dt$ denklemi ile bulunur.

Örnek 3.3.1. Başlangıç vektörü $\mathbf{z}_0 = (1, 0, 0)$ ve bitiş vektörü $\mathbf{z}_1 = (0, 1, 0)$ arasındaki geometrik Slerp interpolasyon eğrisi $\beta = \text{Slerp}(z_0, z_1, t) = \left(\sin\left((1-t)\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right), 0 \right)$ denklemi ile ifade edilir. Elde edilen bu β geometrik Slerp'nin teğet vektörü

$$\mathbf{T} = \left(\frac{-\cos\frac{\pi}{2}(1-t)}{\sqrt{\cos^2\frac{\pi}{2}(1-t) + \cos^2\frac{\pi}{2}t}}, \frac{\cos\frac{\pi}{2}t}{\sqrt{\cos^2\frac{\pi}{2}(1-t) + \cos^2\frac{\pi}{2}t}}, 0 \right)$$

olarak hesaplanır. Geometrik Slerp'in Binormal vektörü $\mathbf{B} = \frac{\beta' \wedge \beta''}{\|\beta' \wedge \beta''\|} = \frac{\mathbf{z}_0 \wedge \mathbf{z}_1}{\sin \alpha} = (0, 0, 1)$ ve asli normal vektörü

$$\mathbf{N} = \mathbf{B} \wedge \mathbf{T} = \left(\frac{-\cos\frac{\pi}{2}t}{\sqrt{\cos^2\frac{\pi}{2}(1-t) + \cos^2\frac{\pi}{2}t}}, \frac{-\cos\frac{\pi}{2}(1-t)}{\sqrt{\cos^2\frac{\pi}{2}(1-t) + \cos^2\frac{\pi}{2}t}}, 0 \right)$$

denklemleri ile bulunur. Eğrilik ve burulması ise

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{\cos^2(1-t)\frac{\pi}{2} + \cos^2\frac{\pi}{2}t}} \text{ ve } \tau = 0$$

dir. Ayrıca geometrik Slerp'in Frenet çatısının türev formülleri de

$$T' = \left(\frac{-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}t}{\sqrt{\left(\cos^2\frac{\pi}{2}(1-t) + \cos^2\frac{\pi}{2}t\right)^3}}, \frac{-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}(1-t)}{\sqrt{\left(\cos^2\frac{\pi}{2}(1-t) + \cos^2\frac{\pi}{2}t\right)^3}}, 0 \right)$$

$$N' = \left(\frac{\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} (1-t)}{\sqrt{\left(\cos^2 \frac{\pi}{2} (1-t) + \cos^2 \frac{\pi}{2} t \right)^3}}, \frac{-\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} t}{\sqrt{\left(\frac{\pi}{2} \cos^2 (1-t) + \cos^2 \frac{\pi}{2} t \right)^3}}, 0 \right)$$

$$B' = 0$$

olarak hesaplanır.

3.4. İki ve Üç Serbestlik Dereceli Küresel Mekanizmalarda SLERP İnterpolasyonu ile Dönme Hareketlerinin İncelenmesi

Bu bölümde geometrik Slerp'ler ile Bölüm 3.2'de oluşturduğumuz küresel mekanizmalardaki mafsalların dönme hareketlerini SLERP'ler ile incelenecektir.

3.4.1. İki Serbestlik Dereceli Küresel Mekanizmalarda SLERP İnterpolasyonu ile Dönme Hareketlerinin İncelenmesi

İki serbestlik dereceli bir küresel mekanizmanın Z_2, Z_1, Z_0 mafsal vektörlerinin dönme hareketlerini sağlayan birim kuaterniyonlar $q_{Z_2}, q_{Z_1}, q_{Z_0} \in H_1$ olsun. q_{Z_2} ve q_{Z_1} birim kuaterniyonlarının SLERP interpolasyonu

$$q_{21} = SLERP(q_{Z_2}, q_{Z_1}, t) = q_{Z_2} \frac{\sin((1-t)\alpha_{21})}{\sin \alpha_{21}} + q_{Z_1} \frac{\sin(t\alpha_{21})}{\sin \alpha_{21}}$$

denklemleri ile oluşturulur. Burada $\alpha_{Z_{21}}$ açısı q_{Z_2} ve q_{Z_1} kuaterniyonları arasındaki açıyı gösterir ve $\cos \alpha_{Z_{21}} = q_{Z_2} \cdot q_{Z_1}$ denklemi ile hesaplanır. İki serbestlik dereceli küresel mekanizmanın uç mafsalı Z_2 vektörünün q_{21} birim kuaterniyonu ile dönme denklemi $Z_2^1 = q_{21}(Z_2)q_{21}^{-1}$ ile yazılır. q_{Z_1} ve q_{Z_0} birim kuaterniyonlarının SLERP interpolasyonu

$$q_{10} = SLERP(q_{Z_1}, q_{Z_0}, t) = q_{Z_1} \frac{\sin((1-t)\alpha_{10})}{\sin \alpha_{10}} + q_{Z_0} \frac{\sin(t\alpha_{10})}{\sin \alpha_{10}}$$

denklemleri ile verilir ve $\alpha_{Z_{10}}$ açısı q_{Z_1} ve q_{Z_0} kuaterniyonları arasındaki açıyı gösterir ve $\cos \alpha_{Z_{10}} = q_{Z_1} \cdot q_{Z_0}$ denklemi ile hesaplanır. İki serbestlik dereceli küresel mekanizmanın uç mafsalları Z_2 vektörünün q_{10} birim kuaterniyonu ile dönme denklemi $Z_2^2 = q_{10}(Z_2^1)q_{10}^{-1}$ ile yazılır. Ayrıca uç mafsalları dönme yörüngeleri dizisel SLERP yöntemi ile yazıldığında,

$$Z_2^2 = q_{10}q_{21}(Z_2^1)q_{21}^{-1}q_{10}^{-1}$$

denklemleri ile dönme hareketi modellenmiş olur. Benzer işlemler modüler hareket için ya da diğer mafsalları vektörleri için de yapılabilir.

Örnek 3.4.1.1. İki serbestlik dereceli bir küresel mekanizmada $Z_2 = (1, 0, 0)$, $Z_1 = (0, 1, 0)$ ve $Z_0 = (0, 0, 1)$ mafsalları vektörlerine $q_{Z_2} = (0, 1, 0, 0)$, $q_{Z_1} = (0, 0, 1, 0)$ ve $q_{Z_0} = (0, 0, 0, 1)$ birim kuaterniyonları kullanarak SLERP interpolasyon dönme hareketini sağlayan denklemleri yazalım.

Öncelikle q_{Z_2} ve q_{Z_1} arasındaki açı $q_{Z_2} \cdot q_{Z_1} = \cos \alpha_{21} = 0$ denklemlerinden $\alpha_{21} = 90^\circ$ olarak bulunur ve $t = 0.5$ değeri için kuaterniyon interpolasyonu

$$\begin{aligned} q_{21} &= SLERP(q_{Z_2}, q_{Z_1}, 0.5) = (0, 1, 0, 0) \frac{\sin 45^\circ}{\sin 90^\circ} + (0, 0, 1, 0) \frac{\sin 45^\circ}{\sin 90^\circ} \\ &= (0, 1, 0, 0) \frac{\sqrt{2}}{2} + (0, 0, 1, 0) \frac{\sqrt{2}}{2} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) \end{aligned}$$

eşitliği ile hesaplanır. $q_{21} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)$ ve $q_{21}^{-1} = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)$ olduğu için Z_2 mafsalları

vektörünün dönmesi

$$Z_2^1 = \left(0 + \frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}j + 0k \right) (0 + i + 0j + 0k) \left(0 - \frac{\sqrt{2}}{2}i - \frac{\sqrt{2}}{2}j - 0k \right) = (0 + 0i + j + 0k)$$

denklemleri ile hesaplanır. Benzer şekilde $q_{z_1} = (0, 0, 1, 0)$ ve $q_{z_0} = (0, 0, 0, 1)$ kuaterniyonları ile SLERP interpolasyon hareketini oluşturalım. Bu birim kuaterniyonlar arasındaki açı $q_{z_1} \cdot q_{z_0} = \cos \alpha_{10} = 0$ eşitliğinden $\alpha_{10} = 90^\circ$ olarak bulunur ve $t = 0.5$ değeri için SLERP dönme hareketi

$$\begin{aligned} q_{10} &= SLERP(q_{z_1}, q_{z_0}, 0.5) = (0, 0, 1, 0) \frac{\sin 45^\circ}{\sin 90^\circ} + (0, 0, 0, 1) \frac{\sin 45^\circ}{\sin 90^\circ} \\ &= (0, 0, 1, 0) \frac{\sqrt{2}}{2} + (0, 0, 0, 1) \frac{\sqrt{2}}{2} = \left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \end{aligned}$$

eşitliği ile elde edilir. Böylece $q_{10} = \left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ ve $q_{10}^{-1} = \left(0, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ için Z_1 mafsalı döndürülürse

$$\begin{aligned} Z_2^2 &= \left(0 + 0i + \frac{\sqrt{2}}{2}j + \frac{\sqrt{2}}{2}k \right) (0 + 0i + j + 0k) \left(0 - 0i - \frac{\sqrt{2}}{2}j - \frac{\sqrt{2}}{2}k \right) \\ &= (0 + 0i + 0j + k) \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Böylece hareket ettirilmek istenen mafsalların istenilen dönme interpolasyonu ile döndürülmesi sağlanabilir.

3.4.2. Üç Serbestlik Dereceli Küresel Mekanizmalarda SLERP İnterpolasyonu ile Dönme Hareketlerinin İncelenmesi

Üç serbestlik dereceli bir küresel mekanizmada Z_3, Z_2, Z_1, Z_0 mafsalları için dönme hareketi $q_{z_3}, q_{z_2}, q_{z_1}, q_{z_0} \in H_1$ birim kuaterniyonları ile tanımlansın. Kuaterniyonların SLERP dönme hareketi ile interpolasyonu

$$\begin{aligned} q_{32} &= SLERP(q_{z_3}, q_{z_2}, t) = q_{z_3} \frac{\sin((1-t)\alpha_{32})}{\sin \alpha_{32}} + q_{z_2} \frac{\sin(t\alpha_{32})}{\sin \alpha_{32}} \\ q_{21} &= SLERP(q_{z_2}, q_{z_1}, t) = q_{z_2} \frac{\sin((1-t)\alpha_{21})}{\sin \alpha_{21}} + q_{z_1} \frac{\sin(t\alpha_{21})}{\sin \alpha_{21}} \end{aligned}$$

$$q_{10} = SLERP(q_{Z_1}, q_{Z_0}, t) = q_{Z_1} \frac{\sin((1-t)\alpha_{10})}{\sin \alpha_{10}} + q_{Z_0} \frac{\sin(t\alpha_{10})}{\sin \alpha_{10}}$$

olarak hesaplanır. Burada açılar $\cos \alpha_{Z_{32}} = q_{Z_3} \cdot q_{Z_2}$, $\cos \alpha_{Z_{21}} = q_{Z_2} \cdot q_{Z_1}$ ve $\cos \alpha_{Z_{10}} = q_{Z_1} \cdot q_{Z_0}$ eşitliklerinden hesaplanır. Daha sonra istenilen mafsaldın döndürme hareketleri sırasıyla yapılır. Örneğin Z_3 mafsaldının dizisel yöntem ile döndürülmesi sonucu mafsaldın konum vektörleri sırasıyla

$$Z_3^1 = q_{32}(Z_3)q_{32}^{-1}$$

$$Z_3^2 = q_{21}(Z_3^1)q_{21}^{-1}$$

$$Z_3^3 = q_{10}(Z_3^2)q_{10}^{-1}$$

vektörleri haline dönüşür. Eğer hareket zinciri sonucundaki konum vektörü bulunmak istenilirse

$$Z_3^3 = q_{10}q_{21}q_{32}(Z_3)q_{32}^{-1}q_{21}^{-1}q_{10}^{-1}$$

denklemini yazılarak hesaplanabilir.

Örnek 3.4.2.1. Üç serbestlik dereceli küresel mekanizmada $Z_3 = (1, 0, 0)$ mafsaldının dönme hareketleri $q_{Z_3} = (0, 1, 0, 0)$, $q_{Z_2} = (0, 0, 1, 0)$, $q_{Z_1} = (0, 0, 0, 1)$ ve $q_{Z_0} = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ kuaterniyonları ile tanımlansın.

q_{Z_3} ve q_{Z_2} arasındaki açı hesaplaması $q_{Z_3} \cdot q_{Z_2} = \cos \alpha_{32} = 0$ ve $\alpha_{32} = 90^\circ$ bulunur ve $t = 0.5$ değeri için dönme hareketi

$$\begin{aligned} q_{32} &= SLERP(q_{Z_3}, q_{Z_2}, 0.5) = (0, 1, 0, 0) \frac{\sin 45^\circ}{\sin 90^\circ} + (0, 0, 1, 0) \frac{\sin 45^\circ}{\sin 90^\circ} \\ &= (0, 1, 0, 0) \frac{\sqrt{2}}{2} + (0, 0, 1, 0) \frac{\sqrt{2}}{2} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. $q_{32} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ ve $q_{32}^{-1} = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ kuaterniyonları hareket denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} Z_3^1 &= \left(0 + \frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}j + 0k\right)(0 + i + 0j + 0k)\left(0 - \frac{\sqrt{2}}{2}i - \frac{\sqrt{2}}{2}j - 0k\right) \\ &= (0 + 0i + j + 0k) \end{aligned}$$

mafsal konumu hesaplanır. Z_3^1 mafsalını $q_{z_2} = (0, 0, 1, 0)$ ve $q_{z_1} = (0, 0, 0, 1)$ kuaterniyonları ile tekrar döndürelim. Bu kuaterniyonlar arasındaki açı $q_{z_2} \cdot q_{z_1} = \cos \alpha_{21} = 0$ denkleminde $\alpha_{21} = 90^\circ$ olarak bulunur ve $t = 0.5$ değeri için dönme hareketinin denklemi

$$\begin{aligned} q_{z_1} &= SLERP(q_{z_2}, q_{z_1}, 0.5) = (0, 0, 1, 0) \frac{\sin 45^\circ}{\sin 90^\circ} + (0, 0, 0, 1) \frac{\sin 45^\circ}{\sin 90^\circ} \\ &= (0, 0, 1, 0) \frac{\sqrt{2}}{2} + (0, 0, 0, 1) \frac{\sqrt{2}}{2} = \left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{aligned}$$

dir. $q_{z_1} = \left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ve $q_{z_1}^{-1} = \left(0, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ olduğu için Z_3^1 mafsalının döndürme sonucu konum vektörü

$$Z_3^2 = \left(0 + 0i + \frac{\sqrt{2}}{2}j + \frac{\sqrt{2}}{2}k\right)(0 + 0i + j + 0k)\left(0 - 0i - \frac{\sqrt{2}}{2}j - \frac{\sqrt{2}}{2}k\right) = (0 + 0i + 0j + k)$$

olarak hesaplanır. Şimdi de Z_3^2 konum vektörünü $q_{z_1} = (0, 0, 0, 1)$ ve $q_{z_0} = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ birim kuaterniyonlarının SLERP interpolasyonu ile hareket ettirelim. Bu iki kuaterniyon arasındaki açı $q_{z_1} \cdot q_{z_0} = \cos \alpha_{10} = 0$ eşitliğinden $\alpha_{10} = 90^\circ$ olarak bulunur ve $t = 0.5$ değeri için interpolasyon değeri

$$\begin{aligned}
q_{10} &= SLERP(q_{z_1}, q_{z_0}, 0.5) = (0, 0, 0, 1) \frac{\sin 45^\circ}{\sin 90^\circ} + \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \frac{\sin 45^\circ}{\sin 90^\circ} \\
&= (0, 0, 0, 1) \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \frac{\sqrt{2}}{2} = \left(0, \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. $q_{10} = \left(0 + \frac{\sqrt{6}}{4}i + \frac{\sqrt{2}}{4}j + \frac{\sqrt{2}}{2}k\right)$ ve $q_{10}^{-1} = \left(0 - \frac{\sqrt{6}}{4}i - \frac{\sqrt{2}}{4}j - \frac{\sqrt{2}}{2}k\right)$

kuaterniyonlarından

$$\begin{aligned}
Z_3^3 &= \left(0 + \frac{\sqrt{6}}{4}i + \frac{\sqrt{2}}{4}j + \frac{\sqrt{2}}{2}k\right)(0 + 0i + 0j + k)\left(0 - \frac{\sqrt{6}}{4}i - \frac{\sqrt{2}}{4}j - \frac{\sqrt{2}}{2}k\right) \\
&= \left(0 + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}j + 0k\right)
\end{aligned}$$

sonuç konum vektörü hesaplanmış olur. Böylece $Z_3 = (1, 0, 0)$ mafsalının SLERP kuaterniyon interpolasyonu ile dönme hareketleri tasarlanmış olur.

3.5. Dual Küresel Mekanizmalarda Sclerp İnterpolasyonu

Gezgin (2006) ve Kilit (2007), küresel mekanizmalardaki dönme hareketini kuaterniyonların kullanılması ile oluşturmuştur [18,19]. Kusak vd. (2011), dual küresel mekanizmaları dual kuaterniyonlar ile incelemiştir [20]. Ravani (1994), dual kuaterniyon Sclerp interpolasyonunu tanımlamıştır [12]. Bu çalışmamızda ise ilk defa dual küresel mekanizmalardaki yörünge tayini Ravani (1994) tarafından verilen dual kuaterniyon Sclerp interpolasyonunu kullanarak yapılmıştır. Ayrıca dual küresel interpolasyon eğrilerinin Blaschke çatıları hesaplanarak diferansiyel geometri açısından özellikleri incelenmiştir. İlk kez dizisel Sclerp, fast dual küresel interpolasyonu ve fast Sclerp tanımları verilmiştir. Bu tanımlar ile örneğin uzaya fırlatılan uyduların yörüngelerini otopilottan çizerek yönlendirme imkanı sunarken, bağımsız bir uydunun yörünge hareketlerinin takibi ve nereye hareket edeceğinin yorumlanması gibi konulara katkıda bulunabilecektir.

Tanım 3.5.1. (Dual Küresel Mekanizmaların Sclerp İnterpolasyon Hareketi) Bir dual küresel mekanizmalarda $t \in [0,1]$ için $Q_{(i-1)}, Q_i \in H_{D1}$ birim dual kuaterniyonların interpolasyonu

$$Q_{(i-1)t} = Q_{(i-1)} \frac{\sin((1-t)\phi)}{\sin \phi} + Q_i \frac{\sin(t\phi)}{\sin \phi}$$

denklemleri ile verilir. Bu iki birim dual kuaterniyon arasındaki ϕ açısı dual açıdır ve ϕ dönme açısı ϕ^* ise öteleme olmak üzere bu dual açı $\phi = \phi + \varepsilon \phi^*$ denklemi ile gösterilir [12].

Örnek 3.5.1.1. Öklit 3 uzayında $M_1(1,1,1)$ noktasından geçen $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 0)$ doğrultman vektörlü doğrunun dual uzayda karşılık geldiği birim dual vektör $\mathbf{A}_1 = \mathbf{a}_1 + \varepsilon \mathbf{a}_1^* = (1, 0, 0) + \varepsilon(0, 1, -1)$ ile gösterilir. Burada $\mathbf{a}_1^*$ momenti

$$\mathbf{a}_1^* = \mathbf{OM}_1 \wedge \mathbf{a}_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 1, -1)$$

ile hesaplanır. Öklit 3 uzayında $M_2(1, 0, 1)$ noktasından geçen $\mathbf{a}_2 = (0, 1, 0)$ doğrultman vektörlü bir doğrunun dual uzayda karşılık geldiği birim dual vektör ise $\mathbf{A}_2 = \mathbf{a}_2 + \varepsilon \mathbf{a}_2^* = (0, 1, 0) + \varepsilon(-1, 0, 1)$ ile gösterilir. Burada $\mathbf{a}_2^*$ momenti

$$\mathbf{a}_2^* = \mathbf{OM}_2 \wedge \mathbf{a}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 0, 1)$$

ile hesaplanır. $\mathbf{A}_1$ ve $\mathbf{A}_2$ birim dual vektörler arasındaki dual açı

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \rangle &= \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle + \varepsilon (\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2^* \rangle + \langle \mathbf{a}_1^*, \mathbf{a}_2 \rangle) \\
&= \cos \theta = \cos(\theta + \varepsilon \theta^*) \\
&= \cos \theta + \varepsilon \theta^* \sin \theta \\
&= 0 + \varepsilon 0
\end{aligned}$$

ile hesaplanır. Burada $\cos \theta = 0$ eşitliğinden $\theta = \frac{\pi}{2}$ ve $\theta^* \sin \theta = 0$ eşitliğinden de $\theta^* = 0$ elde

edilir. Böylece $\mathbf{A}_1$ ve $\mathbf{A}_2$ birim dual vektörler arasındaki dual açı $\theta = \frac{\pi}{2} + \varepsilon 0$ olarak bulunur.

$\mathbf{A}_1$ ve $\mathbf{A}_2$ birim dual vektörleri arasındaki Sclerp interpolasyon eğrisinin denklemi

$$\begin{aligned}
Sclerp(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, t) &= \mathbf{A}_1 \frac{\sin((1-t)\theta)}{\sin \theta} + \mathbf{A}_2 \frac{\sin(t\theta)}{\sin \theta} \\
&= (\sin((1-t)\frac{\pi}{2}), \sin(t\frac{\pi}{2}), 0) + \varepsilon ((-\sin(t\frac{\pi}{2}), \sin((1-t)\frac{\pi}{2}), -\sin((1-t)\frac{\pi}{2}) + \sin(t\frac{\pi}{2}))
\end{aligned}$$

ile elde edilir. $t = 0.5$ noktasındaki interpolasyon değeri

$$\begin{aligned}
Sclerp(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, 0.5) &= (1, 0, 0) + \varepsilon (0, 1, -1) \frac{\sin 45^\circ}{\sin 90^\circ} + (0, 1, 0) + \varepsilon (-1, 0, 1) \frac{\sin 45^\circ}{\sin 90^\circ} \\
&= (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0) + \varepsilon (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Tanım 3.5.2. (Dual Küresel Mekanizmalarda Dizisel Sclerp İnterpolasyon Yöntemi) Bir dual küresel mekanizmada mafsalların $\mathbf{R}_i$ birim dual konum vektörleri olsun. $Q_{(i-1)}, Q_i \in H_{D1}$ birim dual kuaterniyonları ile $t \in [0, 1]$ için $Sclerp(Q_{(i-1)}, Q_i, t) = Q_{(i-1)i}(t)$ denklemi ile hesaplanır. Ayrıca $t = 0.5$ deki Sclerp interpolasyonu $Sclerp(Q_{(i-1)}, Q_i, 0.5) = Q_{(i-1)i}(0.5)$ denklemi ile bulunur. Burada bu iki dual kuaterniyon arasındaki dual açı $\cos \phi = Q_{(i-1)i}(0.5) \cdot Q_{i(i+1)}(0.5)$ denkleminde bulunur. Böylece dual kuaterniyon interpolasyon

sonucunda dual küresel mekanizmanın $\mathbf{R}_i$ mafsallarının konum vektörleri

$R_{i+1} = Q_{(i-1)i} \left(R_i \right) Q_{(i-1)i}^{-1}$ ile bulunur. Bu işlem

$$R_{n+1} = Q_{(n-1)n} \dots Q_{23} Q_{12} R_1 Q_{12}^{-1} Q_{23}^{-1} \dots Q_{(n-1)n}^{-1}$$

dizisel olarak yapıldığında **dizisel Sclerp interpolasyonu** elde edilir.

Tanım 3.5.3. (Dual Küresel Mekanizmalarda Alternatif Bir Sclerp İnterpolasyonu) Bir dual küre mekanizmasının hareketini sağlayan birim dual kuaterniyonlar Tanım 3.5.2. de tanımlanan Sclerp interpolasyonundan elde edilen ardışık $Q_{(i-1)i}, Q_{i(i+1)} \in H_{D1}$ interpolasyonlarının $t = t_0 \in [0,1]$ değeri için

$$Q_{(i-1)i(i+1)}(t) = Q_{(i-1)i} \frac{\sin((1-t)\phi)}{\sin \phi} + Q_{i(i+1)} \frac{\sin(t\phi)}{\sin \phi}$$

denklemleri ile yeni bir interpolasyon hareketi elde edilebilir. Burada $t = t_0 \in [0,1]$ için $Q_{(i-1)i}$ ve $Q_{i(i+1)}$ birim dual kuaterniyonları arasındaki dual açı $\cos \phi = Q_{(i-1)i} \cdot Q_{i(i+1)}$ denkleminde elde edilmektedir.

Tanım 3.5.4. (Dual Küresel Mekanizmalarda Mafsallar Arasındaki Uzunlukların Sclerp İnterpolasyonu İle Tasarımı) Bir dual küresel mekanizmada iki ardışık mafsalın $\mathbf{A}_i$ ve $\mathbf{A}_{i+1}$ birim dual konum vektörleri arasındaki dual küresel eğrilerden oluşan mekanizma uzunlukları $t \in [0,1]$ için

$$Sclerp(\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_{i+1}, t) = \mathbf{A}_i \frac{\sin((1-t)\phi)}{\sin \phi} + \mathbf{A}_{i+1} \frac{\sin(t\phi)}{\sin \phi}$$

Sclerp interpolasyonu ile hesaplanabilir.

Teorem 3.5.5. (Fast Dual Küresel İnterpolasyon) $\mathbf{D}_0, \mathbf{D}_1 \in \mathcal{D}$ birim dual vektörler arasındaki dual açı $\theta = \theta + \varepsilon\theta^*$ olsun. $\mathbf{D}_0$ ve $\mathbf{D}_1$ birim dual vektörleri arasındaki dual açı $\theta = \theta + \varepsilon\theta^*$ olmak üzere

$$L_{fast}(\mathbf{D}_0, \mathbf{D}_1, t) = \mathbf{D}_0 \cos(t\theta) + \mathbf{D}_1 \sin(t\theta)$$

dual küresel interpolasyonuna **fast dual küresel interpolasyonu** denir.

İspat. $t \in [0, 1]$ için dual küresel interpolasyon

$$\begin{aligned} L_{fast}(\mathbf{D}_0, \mathbf{D}_1, t) &= \mathbf{D}_0 \frac{\sin((1-t)\theta)}{\sin \theta} + \mathbf{D}_1 \frac{\sin(t\theta)}{\sin \theta} \\ &= \mathbf{D}_0 \cos(t\theta) - \mathbf{D}_0 \frac{\cos \theta \sin(t\theta)}{\sin \theta} + \mathbf{D}_1 \frac{\sin(t\theta)}{\sin \theta} \end{aligned}$$

denklemleri ile yazılır [12]. $\mathbf{D}_0$ ve $\mathbf{D}_1$ birim dual vektörleri arasındaki dual açı

$\mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{D}_1 = \|\mathbf{D}_0\| \|\mathbf{D}_1\| \cos \theta = \cos \theta$, $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ ve $\sin \theta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$ dual trigonometrik

özdeşliklerinden $\sin \theta = \sqrt{1 - (\mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{D}_1)^2}$ ifadesini elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} L_{fast}(\mathbf{D}_0, \mathbf{D}_1, t) &= \mathbf{D}_0 \cos(t\theta) + \frac{\mathbf{D}_1 \sin(t\theta) - \mathbf{D}_0 \cos \theta \sin(t\theta)}{\sin \theta} \\ &= \mathbf{D}_0 \cos(t\theta) + \frac{\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_0 (\mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{D}_1)}{\sqrt{1 - (\mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{D}_1)^2}} \sin(t\theta) \end{aligned}$$

dual interpolasyon denklemi bulunur. Gram-Schmidt ortogonalleştirme yönteminden

$$\mathbf{D}_r = \mathbf{D}_1 - \frac{(\mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{D}_1)}{\|\mathbf{D}_0\|^2} \mathbf{D}_0 = \mathbf{D}_1 - (\mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{D}_1) \mathbf{D}_0$$

ifadesi elde edilir ve bu vektörün normu alındığında

$$\|\mathbf{D}_r\| = \sqrt{\left(\mathbf{D}_1 - (\mathbf{D}_0 \mathbf{D}_1) \mathbf{D}_0\right)^2} = \sqrt{1 - (\mathbf{D}_0 \mathbf{D}_1)^2}$$

denklemleri elde edilir ve $\mathbf{D}_R = \frac{\mathbf{D}_r}{\|\mathbf{D}_r\|}$ notasyonu kullanıldığında $L_{fast}(\mathbf{D}_0, \mathbf{D}_1, t)$ interpolasyonu

$$L_{fast}(\mathbf{D}_0, \mathbf{D}_1, t) = \mathbf{D}_0 \cos(t\theta) + \mathbf{D}_R \sin(t\theta)$$

halini alır. Dual küresel interpolasyonun bu formuna **fast dual küresel interpolasyonu** denir. Bu denklemlerde $\theta = \theta + \varepsilon\theta^*$ dual açısı açılarak yazıldığında fast dual küresel interpolasyonu

$$\begin{aligned} L_{fast}(\mathbf{D}_0, \mathbf{D}_1, t) &= \mathbf{D}_0 \cos(t\theta) + \mathbf{D}_R \sin(t\theta) \\ &= \mathbf{D}_0 \cos(t\theta) + \mathbf{D}_R \sin(t\theta) + \varepsilon t\theta^* (\mathbf{D}_R \cos(-t\theta) + \mathbf{D}_0 \sin(-t\theta)) \end{aligned}$$

denklemleri ile de tanımlanabilir.

Teorem 3.5.6. (Fast Vida Lineer İnterpolasyon) Q_0 ve Q_1 birim dual kuaterniyonlar arasındaki dual açı $\theta = \theta + \varepsilon\theta^*$ olsun. Q_0 ve Q_1 birim dual kuaterniyonlar arasındaki

$$Sclerp_{fast} = L_{fast}(Q_0, Q_1, t) = Q_0 \cos(t\theta) + Q_R \sin(t\theta)$$

interpolasyonuna **fast vida lineer interpolasyonu** denir. Burada $Q_R = \frac{Q_r}{\|Q_r\|}$ ve

$$Q_r = Q_1 - (Q_0 \cdot Q_1) Q_0 \text{ dir.}$$

İspat. [12] de Ravani (1994) tarafından verilen Sclerp dual lineer interpolasyonu $t = [0,1]$ için

$$\begin{aligned} L_{fast}(Q_0, Q_1, t) &= Q_0 \frac{\sin((1-t)\theta)}{\sin \theta} + Q_1 \frac{\sin(t\theta)}{\sin \theta} \\ &= Q_0 \cos(t\theta) - Q_0 \frac{\cos \theta \sin(t\theta)}{\sin \theta} + Q_1 \frac{\sin(t\theta)}{\sin \theta} \end{aligned}$$

denklemleri ile yazılır. Dual açı hesaplaması $Q_0 \cdot Q_1 = \|Q_0\| \|Q_1\| \cos \theta = \cos \theta$ denkleminde yapılır.

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ dual trigonometrik özdeşliğinden yararlanarak $\sin \theta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$ elde edilir. Böylece $\sin \theta = \sqrt{1 - (Q_0 \cdot Q_1)^2}$ ifadesi interpolasyon denkleminde yazıldığında

$$\begin{aligned} L_{fast}(Q_0, Q_1, t) &= Q_0 \cos(t\theta) + \frac{Q_1 \sin(t\theta) - Q_0 \cos \theta \sin(t\theta)}{\sin \theta} \\ &= Q_0 \cos(t\theta) + \frac{Q_1 - Q_0 (Q_0 \cdot Q_1)}{\sqrt{1 - (Q_0 \cdot Q_1)^2}} \sin(t\theta) \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Gram-Schmidt ortogonalleştirme yönteminden

$$Q_r = Q_1 - \frac{(Q_0 \cdot Q_1)}{\|Q_0\|^2} Q_0 = Q_1 - (Q_0 \cdot Q_1) Q_0 \text{ ve } \|Q_r\| = \sqrt{(Q_1 - (Q_0 \cdot Q_1) Q_0)^2} = \sqrt{1 - (Q_0 \cdot Q_1)^2}$$

hesaplanıp $Q_R = \frac{Q_r}{\|Q_r\|}$ notasyonu ile gösterildiğinde

$$Sclerp_{fast} = L_{fast}(Q_0, Q_1, t) = Q_0 \cos(t\theta) + Q_R \sin(t\theta)$$

ile fast vida lineer interpolasyon denklemi oluşturulur. Burada $\theta = \theta + \varepsilon\theta^*$ dual açısı açılarak yazıldığında fast vida lineer interpolasyonu ($Sclerp_{fast}$),

$$\begin{aligned} L_{fast}(Q_0, Q_1, t) &= Q_0 \cos(t\theta) + Q_R \sin(t\theta) \\ &= Q_0 \cos(t\theta) + Q_R \sin(t\theta) + \varepsilon t\theta^* (Q_R \cos(-t\theta) + Q_0 \sin(-t\theta)) \end{aligned}$$

denklemleri ile de gösterilebilir.

3.6. Dual Küresel İnterpolasyon Eğrisinin Blaschke Çatısı

Birim dual küre üzerinde alınan iki $\mathbf{D}_0, \mathbf{D}_1 \in D$ dual noktaları E.Study dönüşümüne göre R^3 de iki yönlü doğru belirtir. $\mathbf{D}_0$ ve $\mathbf{D}_1$ birim dual vektörleri arasındaki dual açı $\phi = \phi + \varepsilon\phi^*$ olsun. Burada ϕ açısı dönmeyi, ϕ^* açısı da ötelemeyi sağlayan açılardır. $\mathbf{D}_0$ ve $\mathbf{D}_1$ birim dual vektörlerin $t \in [0,1]$ için dual küresel interpolasyonu ile

$$A(t) = \mathbf{D}(t) = L(\mathbf{D}_0, \mathbf{D}_1, t) = \frac{\sin((1-t)\phi)}{\sin \phi} \mathbf{D}_0 + \frac{\sin(t\phi)}{\sin \phi} \mathbf{D}_1$$

birim dual küresel eğrisi oluşur. $\mathbf{D}(t) = L(\mathbf{D}_0, \mathbf{D}_1, t)$ interpolasyon eğrisi birim dual küre üzerinde bir eğri iken E.Study dönüşümüne göre aynı zamanda üç boyutlu Öklid uzayında bir regle yüzeyine karşılık gelir. Bu bölümde $\mathbf{D}(t)$ dual küresel interpolasyon eğrisinin Blaschke çatısı hesaplanacaktır. Öncelikle Blaschke çatısının birinci vektörü

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{D}(t) = \frac{\sin((1-t)\phi)}{\sin \phi} \mathbf{D}_0 + \frac{\sin(t\phi)}{\sin \phi} \mathbf{D}_1$$

olsun. $\mathbf{D}'(t) = \frac{-\phi \cos((1-t)\phi)}{\sin \phi} \mathbf{D}_0 + \frac{\phi \cos(t\phi)}{\sin \phi} \mathbf{D}_1$ vektörünün normu

$$\begin{aligned}\left\|\mathbf{D}'(t)\right\|^2 &= \left\|\frac{-\phi \cos((1-t)\phi)}{\sin \phi} \mathbf{D}_0 + \frac{\phi \cos(t\phi)}{\sin \phi} \mathbf{D}_1\right\|^2 \\ &= \frac{\phi^2}{\sin \phi} \left[\cos^2((1-t)\phi) + \cos^2(t\phi) - 2 \cos((1-t)\phi) \cos(t\phi) \cos \phi \right]\end{aligned}$$

eşitliği ile elde edilir. Burada basitleştirmek için

$$G = \left[\cos^2((1-t)\phi) + \cos^2(t\phi) - 2 \cos((1-t)\phi) \cos(t\phi) \cos \phi \right]^{\frac{1}{2}}$$

kısaltması alındığında $\left\|\mathbf{D}'(t)\right\| = \frac{\phi}{\sin \phi} G$ eşitliği yazılır. Böylece Blaschke çatısının ikinci vektörü

$$\mathbf{A}_2 = \frac{\mathbf{A}'_1}{\left\|\mathbf{A}'_1\right\|} = \pm \frac{1}{G} \left[-\cos((1-t)\phi) \mathbf{D}_0 + \cos(t\phi) \mathbf{D}_1 \right]$$

olarak elde edilir. Çatının üçüncü vektörü ise $\mathbf{A}_1$ ve $\mathbf{A}_2$ vektörlerinin vektörel çarpımından

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_3 &= \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 = \mathbf{D}(t) \times \frac{\mathbf{D}'(t)}{\left\|\mathbf{D}'(t)\right\|} = \frac{1}{\left\|\mathbf{D}'(t)\right\|} \left[\mathbf{D}(t) \times \mathbf{D}'(t) \right] \\ &= \left[\frac{\sin((1-t)\phi)}{\sin \phi} \mathbf{D}_0 + \frac{\sin(t\phi)}{\sin \phi} \mathbf{D}_1 \right] \wedge \left[\pm \frac{1}{G} \left\{ -\cos((1-t)\phi) \mathbf{D}_0 + \phi \cos(t\phi) \mathbf{D}_1 \right\} \right] \\ &= \frac{1}{G} \mathbf{D}_0 \wedge \mathbf{D}_1\end{aligned}$$

denklemini ile hesaplanır. Dual küresel interpolasyonun Blaschke çatısının integral varyantlarından biri $P = p + \varepsilon p^* = \|\mathbf{A}_1\| = \|\mathbf{D}'_1\| = \left| \frac{\phi}{\sin \phi} \right| G$ olarak hesaplanır. Diğer ise

$$Q = q + \varepsilon q^* = \frac{\det(\mathbf{A}, \mathbf{A}', \mathbf{A}'')}{P^2} \text{ ifadesi ile hesaplanır. Burada}$$

$$\mathbf{D}''(t) = -\phi^2 \mathbf{D}_0 = -\phi^2 \cdot \left[\frac{\sin((1-t)\phi)}{\sin \phi} \mathbf{D}_0 + \frac{\sin(t\phi)}{\sin \phi} \mathbf{D}_1 \right]$$

ikinci mertebeden türev denkleminde

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}, \mathbf{A}', \mathbf{A}'') &= \langle \mathbf{A} \wedge \mathbf{A}', \mathbf{A}'' \rangle = \langle \mathbf{D}(t) \wedge \mathbf{D}'(t), \mathbf{D}''(t) \rangle \\ &= \left\langle \left[\frac{\sin((1-t)\phi)}{\sin \phi} \mathbf{D}_0 + \frac{\sin(t\phi)}{\sin \phi} \mathbf{D}_1 \right] \wedge \left[\frac{-\phi \cos((1-t)\phi)}{\sin \phi} \mathbf{D}_0 + \frac{\phi \cos(t\phi)}{\sin \phi} \mathbf{D}_1 \right], \right. \\ &\quad \left. -\phi^2 \cdot \left[\frac{\sin((1-t)\phi)}{\sin \phi} \mathbf{D}_0 + \frac{\sin(t\phi)}{\sin \phi} \mathbf{D}_1 \right] \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

böylece ikinci invariant da $Q = \frac{\det(\mathbf{A}, \mathbf{A}', \mathbf{A}'')}{P^2} = 0$ olarak hesaplanır.

Örnek 3.6.1. $\mathbf{D}_0 = (1, 0, 0) + \varepsilon(0, 1, -1)$ ve $\mathbf{D}_1 = (0, 1, 0) + \varepsilon(-1, 0, 1)$ birim dual vektörleri ile tanımlanan

$$\text{Sclerp}(\mathbf{D}_0, \mathbf{D}_1, t) = \mathbf{D}(t) = \frac{\sin((1-t)\phi)}{\sin \phi} \mathbf{D}_0 + \frac{\sin(t\phi)}{\sin \phi} \mathbf{D}_1$$

Sclerp interpolasyon eğrisinin $t = 0.5$ noktasındaki Blaschke çatısını hesaplayalım.

$\mathbf{D}_0$ ve $\mathbf{D}_1$ birim dual vektörleri arasındaki dual açı $\theta = \frac{\pi}{2} + \varepsilon 0$ dir. Blaschke çatısının birinci vektörü

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_1 = \mathbf{D}(t) &= \frac{\sin((1-t)\phi)}{\sin \phi} \mathbf{D}_0 + \frac{\sin(t\phi)}{\sin \phi} \mathbf{D}_1 \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) + \varepsilon \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)\end{aligned}$$

ile hesaplanır. $G = \left[\cos^2((1-t)\phi) + \cos^2(t\phi) - 2 \cos((1-t)\phi) \cos(t\phi) \cos \phi \right]^{\frac{1}{2}} = 1$ için Blaschke çatısının ikinci vektörü

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_2 &= \frac{\mathbf{A}'_1}{\|\mathbf{A}'_1\|} = \pm \frac{1}{G} \left[-\cos((1-t)\phi) \mathbf{D}_0 + \cos(t\phi) \mathbf{D}_1 \right] \\ &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) + \varepsilon \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{2\sqrt{2}}{2}\right)\end{aligned}$$

şeklinde olur. Son olarak Blaschke çatısının üçüncü vektörü $\mathbf{A}_1$ ve $\mathbf{A}_2$ dual vektörlerinin vektörel çarpımından

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 &= \frac{1}{G} \mathbf{D}_0 \wedge \mathbf{D}_1 \\ &= (0, 0, 1) + \varepsilon (1, -2, 1)\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Dual küresel interpolasyonun Blaschke çatısının integral invaryantlarından biri

$$P = p + \varepsilon p^* = \left| \frac{\phi}{\sin \phi} \right| G = 90 \text{ dir. Diğeri ise } Q = q + \varepsilon q^* = \frac{\det(\mathbf{A}, \mathbf{A}', \mathbf{A}'')}{P^2} = 0 \text{ dir}$$

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında ilk olarak uzaydaki dönme ve öteleme hareketlerini kolaylıkla gösterebilmemizi sağlayan kuaterniyon ve dual kuaterniyon yapılarının cebirsel temel tanım ve teoremleri verilmiştir. Ayrıca dönme matrisi ve Euler açılarının kuaterniyonlarla geçiş işlemleri verilmiştir. Daha sonra animasyon ve geometrik tasarı çalışmalarında yaygın bir şekilde kullanılan interpolasyon çeşitleri incelenmiştir. Robotların tarihçesinden bahsedildikten sonra küresel mekanizmalardaki dizisel ve modüler metod ile ilgili temel bilgiler verilmiştir. Tezimizin orijinal kısmında ise reel ve dual küresel mekanizmalarda dizisel SLERP ve Sclerp interpolasyonu ile oluşan dönme hareketleri incelenmiştir. Geometrik Slerp tanımlanarak bir, iki ve üç serbestlik dereceli küresel mekanizmalarda mafsallar arasında uzuvları oluşturma işlemi tanımlanmıştır. Geometrik Slerp interpolasyon eğrisinin Frenet çatısı hesaplanmıştır. Ayrıca ilk defa fast dual küresel interpolasyon ve fast vıda lineer interpolasyon tanımları verilerek dual küresel interpolasyon eğrisinin Blaschke çatıları incelenmiştir. Bu çalışmanın konusu dual Lorentz uzayı gibi bazı farklı geometrik uzaylarda da incelenebilir. Çalışmamızın ileride hem geometri hem de farklı bilim dallarında interpolasyonlar ile ilgili yapılacak bilimsel çalışmalara ışık tutacağına inanıyoruz.

5. KAYNAKLAR

- [1] Hamilton WR, 1848. On quaternions; or on a new system of imaginaries in algebra, The London, Edinburg, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 33(219), 58-60.
- [2] Hacısalıhoğlu HH, 1983. Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi. Gazi Üniversitesi, Ankara.
- [3] Vince J, 2011. Quaternions for Computer Graphics. Bournemouth Universite, Bournemouth, UK.
- [4] Hast A, Barrera T, Bengtsson E, 2003. Shading by Spherical Linear Interpolation Using De Moivre's Formula, Proc. 11th Int. Conf. Central Europe on Computer Graphics, Visualization and Computer Vision.
- [5] Jafari M, Molaei H, 2014. Spherical Linear Interpolation and Bezier Curves. General Scientific Researches, 2(1): 13-17.
- [6] Kremer VE, 2008. Quaternions and Slerp. Department for Computer Science Universty of Saarbrücken.
- [7] Hast A, Barrera T, Bengtsson E, 2004. Incremental Spherical Linear Interpolation. In The Annual SIGRAD Conference. Special Theme-Environmental Visualization, 13:7-10. Linköping University Electronic Press.
- [8] Sheomake K, 1985. Animating Rotation with Quaternion Curves. San Francisco, 19(3): 245-254.
- [9] Dam E.B, Koch M, Lillholm M, 1998. Quaternions, Interpolation and Animation, Institute of Computer Science University of Copenhagen.

- [10] Diebel J, 2006. Representing Attitude: Euler Angles Unit Quaternions and Rotation Vectors. Stanford University, California: 1-35
- [11] Baky R.A.A, 2002. An Explicit Characterization of Dual Spherical Curve. Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1, 51(2):1-9.
- [12] Ge Q.J, Ravani B, 1994b. Geometric Construction of Bezier Type Motions. To Appear in ASME. Of Mechanical Design
- [13] Smith M, 2013. Applications of Dual Quaternions in Three Dimensional Transformation and Interpolation. Department for Computer Science and Software Engineering University of Canterbury, Christchurch, New Zealand.
- [14] Kavan L, Collins S, O'Sullivan C, Zara J, 2006. Dual Quaternions For Rigid Transformation Blending. Trinity College Dublin, Tech.Rep. TCD-CS-2006-46.
- [15] Ghademi R, Rahebi J ve Yaylı Y, 2012. A Novel Approach for Spherical Spline Split Quaternion Interpolation Lorentzian Sphere Using Bezier Curve Algorithm. Life Science Journal, 9(4): 3394-3397.
- [16] Ghademi R, Rahebi J ve Yaylı Y, 2012. A Fast Method Based on DeMoivre for Spherical Linear Interpolation in Minkowski Space. Advances in Applied Clifford Algebras. 25(4), 863-873.
- [17] Ghademi R, Rahebi J ve Yaylı Y, 2012. A Fast Method Spherical Linear Interpolation in Minkowski Space. Advances in Applied Clifford Algebras. 25(4), 863-873.
- [18] Gezgin E, 2006. Biokinematic Analysis Of Human Arm. Yüksek Lisans Tezi, İzmir Yüksek Teknolojisi Üniversitesi İzmir Yüksek Teknolojisi Enstitüsü, İzmir.
- [19] Kilit Ö, 2007. Küresel Düzeneklerin Kinematik Tasarımı ve Çözümlemesi. Doktora Tezi, Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

- [20] Kuşak H, Çalışkan A, 2011. About Dual Spherical Wrist Motion and Its Trajectory Surface as a Ruled Surface. Mathematical and Computational Applications, 16(1): 309-316, 2011.
- [21] <https://www.fikriyat.com/galeri/tarih/dunyada-ilk-robotu-yapan-musulman-el-cezeri> (Erişim Tarihi 15.02.2019).
- [22] https://www.youtube.com/watch?v=WqP_uc6uOU4 (Erişim Tarihi 13.02.2019)
- [23] <https://tr.wikipedia.org/wiki/Robot> (Erişim Tarihi 06.06.2009)
- [24] <https://www.bilimkurgukulubu.com/genel/bilim-teknoloji/robotlarin-kisa-tarihi>(Erişim Tarihi 07.10.2016).
- [25] <https://pazarlamasyon.com/2017-mobilin-degil-robotlarin-yili-oldu/> (Erişim Tarihi 20.12.2017).
- [26] Baydaş Ş, 2006. $2 \times 3R$ Sabit Çatı Değişimli Robotik Modelleme. Doktora Tezi, Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Van.
- [27] Küçük S, Bingül Z, 2004. Robot Sistemlerinde Kinematik Yöntemlerin Karşılaştırılması. Politeknik Dergisi, 7(2):107-117.

EKLER

EK 1

Bu bölümde MATLAB da kullanılan kuaterniyon ile ilgili bazı fonksiyonlar verilmiştir.

```
.....
quat = quaternion()           % Kuaterniyon gösterimi
.....

quat = quaternion(A,B,C,D)    % Kuaterniyon ifadelerini yazar
quat = quaternion(1,5,7,8)
ans = quaternion
1 + 5i + 7j + 8k
.....

quat = quaternion(matrix)     % Kuaterniyonu matris formunda yazar
quat = quaternion(rand(4,4))
ans =
4x1 quaternion array

0.78025 + 0.096455i + 0.57521j + 0.82119k
0.38974 + 0.13197i + 0.05978j + 0.015403k
0.24169 + 0.94205i + 0.23478j + 0.043024k
0.40391 + 0.95613i + 0.35316j + 0.16899k
.....

quat = quaternion(RV,'rotvec') % Kuaterniyon dönme vektörü
quat = quaternion(rand(4,3),'rotvec')
ans =
4x1 quaternion array

0.81556 + 0.4107i + 0.097403j + 0.39587k
0.94656 + 0.27016i + 0.14793j + 0.095641k
0.91859 + 0.30275i + 0.22904j + 0.10988k
0.94711 + 0.28833i + 0.11321j + 0.083844k
.....
```

```

quat = quaternion(RV,'rotvecd')    % Dönme matrisini temsil eder.
quat = quaternion(RM,'rotmat',PF)
quaternion(rand(3),'rotmat','point')
ans =
    quaternion
    0.73711 - 0.18477i + 0.03126j + 0.071651k
.....
quat = quaternion(E,'euler',RS,PF) % Euler açısından kuaterniyona
geçiş dönüşümü
quaternion([60,30,30],'euler','YZY','point')
ans =
    quaternion
    -0.39908 - 0.42287i - 0.64642j - 0.49402k
quat = quaternion(E,'eulerd',RS,PF) % Kuaterniyondan euler
açılarına geçiş
.....
N = norm(quat) % Kuaterniyonun norm hesaplaması yapar
.....

```

EK 2

Bu bölümde MATLAB programında kuaterniyonlar ile ilgili bazı sayısal örnekler verilmiştir.

```
.....
%q Kuaterniyon Fonksiyonu
>> quat = quaternion(1,2,3,4)
1 + 2i + 3j + 4k
.....

% $q_a = (2,3,6,7)$  ve  $q_a = (0.2,0.3,0.6,0.7)$  Kuaterniyonlarının Toplama İşlemi
>> qa=quaternion(2,3,6,7);
>> qb=quaternion(0.2,0.3,0.6,0.7);
>> plus(qa,qb)
ans =
    quaternion
      2.2 + 3.3i + 6.6j + 7.7k
.....

% $q_a = (2,3,6,7)$  ve  $q_a = (0.2,0.3,0.6,0.7)$  Kuaterniyonların Çıkarma İşlemi
>> qa=quaternion(2,3,6,7);
qb=quaternion(0.2,0.3,0.6,0.7);
minus(qa,qb)
ans =
    quaternion
      1.8 + 2.7i + 5.4j + 6.3k
.....

% $q_a = (2,3,6,7)$  ve  $q_a = (0.2,0.3,0.6,0.7)$  Kuaterniyonların Çarpımı
>> qa=quaternion(2,3,4,5);
qb=quaternion(3,4,5,6);
>> times(qa,qb)
ans =
    quaternion
     -56 + 16i + 24j + 26k
```

```

.....
%  $q_a = (2, 3, 4, 6)$  Kuaterniyonun  $q_b = 4$  Skaler Sayı ile Çarpımı
qa=quaternion(2,3,4,6);
qb=4;
times(qa,qb)
ans =
    quaternion
      8 + 12i + 16j + 24k
.....

%  $q_a = (8, 3, 8, 9)$  Kuaterniyonun Eşleniği
q=quaternion(8,3,8,9);
>> conj(q)
ans =
    quaternion
      8 - 3i - 8j - 9k
.....

%  $q_a = (3, 2, 2, 2)$  Kuaterniyonun Normunu
>> q=quaternion(3,2,2,2);
>> norm(q)
ans =    4.5826
.....

%  $q_a = (2, 3, 4, 7)$  Kuaterniyonu Tersİ
>> q=quaternion(2,3,4,7);
>> inverse(q)
ans = (0.025641 ) + i(-0.038462 ) + j(-0.051282 ) + k(-0.089744 )
.....

%  $q_a = (5, 9, 1, 6)$  Kuaterniyonun Normalleştirilmesi
>> q=quaternion(5,9,1,6);
>> normalize(q)
ans = 0.41812 + 0.75262i + 0.083624j + 0.50175k
.....

```

% $q_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ve $q_2 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0)$ Birim Kuaterniyonların SLERP Fonksiyonu

```
>> q1=quaternion((sqrt(2))/2,0,0,(sqrt(2))/2);
```

```
>> q2=quaternion((sqrt(2))/2,(sqrt(2))/2,0,0);
```

```
>> q0 = slerp(q1,q2,0.5)
```

```
q0 =
```

```
    quaternion
```

```
    0.8165 + 0.40825i + 0j + 0.40825k
```

.....
% $q_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $q_2 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0)$ ve $q_3 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ Birim

Kuaterniyonlarının SLERP Fonksiyonu

```
q1=quaternion(sqrt(2)/2,0,0,sqrt(2)/2);
```

```
q2=quaternion(sqrt(2)/2,sqrt(2)/2,0,0);
```

```
q3=quaternion(sqrt(2)/2,0,sqrt(2)/2,0);
```

```
slerp(slerp(q1,q2,0.5),slerp(q2,q3,0.5),0.5)
```

```
ans = 0.8528 + 0.4264i + 0.2132j + 0.2132k
```

.....
% $q_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $q_2 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0)$ ve $q_3 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ Birim

Kuaterniyonların $t \in [0,1]$ aralığındaki değerlerinin SLERP Fonksiyonu

```
>> q1=quaternion(sqrt(2)/2,0,0,sqrt(2)/2);
```

```
q2=quaternion(sqrt(2)/2,sqrt(2)/2,0,0);
```

```
q3=quaternion(sqrt(2)/2,0,sqrt(2)/2,0);
```

```
>> slerp(slerp(q1,q2,[0:0.1:1]),slerp(q2,q3,[0:0.1:1]),[0:0.1:1])
```

```
ans(1,1) = (0.70711) + i(0) + j(0) + k(0.70711)
```

```
ans(1,2) = (0.77607) + i(0.15503) + j(0.0098277) + k(0.61121)
```

```
ans(1,3) = (0.81746) + i(0.27543) + j(0.037571) + k(0.5044)
```

```
ans(1,4) = (0.8397) + i(0.36007) + j(0.081343) + k(0.39829)
```

```
ans(1,5) = (0.84993) + i(0.40996) + j(0.14009) + k(0.29988)
```

```
ans(1,6) = (0.8528) + i(0.4264) + j(0.2132) + k(0.2132)
```

```
ans(1,7) = (0.84993) + i(0.40996) + j(0.29988) + k(0.14009)
ans(1,8) = (0.8397) + i(0.36007) + j(0.39829) + k(0.081343)
ans(1,9) = (0.81746) + i(0.27543) + j(0.50446) + k(0.037571)
ans(1,10) = (0.77607) + i(0.15503) + j(0.61121) + k(0.0098277)
ans(1,11) = (0.70711) + i(0) + j(0.70711) + k(0)
```

.....

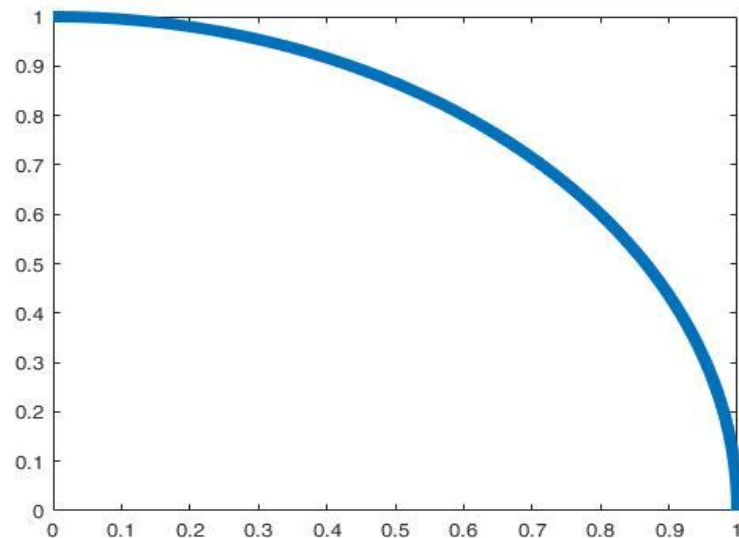
%Geometrik Slerp İnterpolasyonu

t=0:0.01:1;

x=sin(pi/2.*(1-t));

y=sin(pi/2.*t);

plot(x,y,'LineWidth',6)



.....

q = quaternion.eulerangles('xyz',30,60,60) % Euler açılarından
kuaterniyona geçiş

q = (0.61674) + i(0.75708) + j(0.016673) + k(0.21489)

.....

q=quaternion(2,3,4,5) % Kuaterniyondan euler açılarına geçiş

angles = EulerAngles(q,'xyz')

angles =

1.4940

-0.2623

2.1375

```

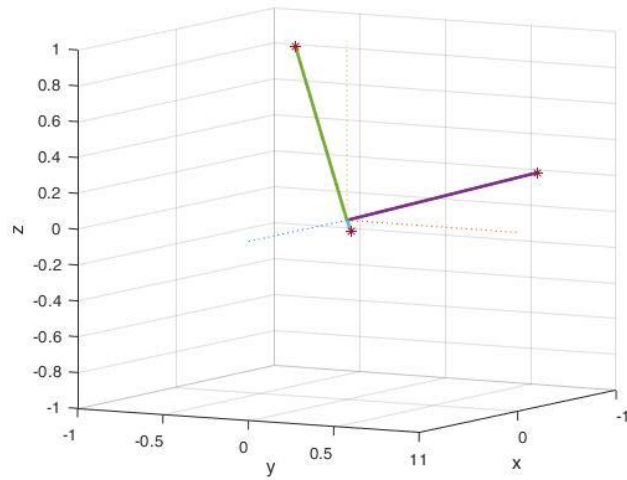
.....
q=quaternion(1,2,3,4)      % Kuaterniyonun dönme matrisi
>> R = RotationMatrix(q)

R =

    -0.6667    0.1333    0.7333
     0.6667   -0.3333    0.6667
     0.3333    0.9333    0.1333

q=quaternion(2,3,4,5)      % Kuaterniyonun dönme ifadeleri
>> PlotRotation(q,'0-1')

```



ÖZGEÇMİŞ

1993 yılında Adıyaman ilinin Gölbaşı ilçesinde doğdu. İlköğretimi Balkar İlköğretim Okulu'nda, ortaokulu Balkar Ortaokulu'nda ve liseyi Hatay ili Reyhanlı ilçesinde Yahya Turan Anadolu Öğretmen lisesini 2011'de tamamladı. 2011 yılında kazandığı Fırat Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği eğitimini tamamlarken çeşitli özel eğitim kurslarında matematik öğretmenliği yaptı ve 2015 yılında mezun oldu. 2016 yılında ücretli öğretmenlik yaptı ve Eylül 2017'de MEB'de Bitlis ilinin Güroymak ilçesi Güzelli köyü Güzelli Ortaokuluna Matematik öğretmeni olarak atandı. Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans programına Eylül 2017'de başladı. Güroymak Atatürk Ortaokulunda müdür yardımcılığı görevini halen yürütmektedir. Yabancı dili ingilizcedir. Evli ve bir kız babasıdır.

Çetin KUŞÇU