



T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



**İKİ BOYUTLU POTANSİYEL VE SİNGÜLER İNTEGRALLERİN BAZI
YAKLAŞIMLARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sedanur EFE

ARALIK 2019

GÜMÜŞHANE

T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**İKİ BOYUTLU POTANSİYEL VE SİNGÜLER İNTEGRALLERİN BAZI
YAKLAŞIMLARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sedanur EFE

Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Mühendisliği “Anabilim Dalı”

Yüksek Lisans Programında Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 18.12.2019

Tezin Sözlü Savunma Tarihi : 22.01.2020

ARALIK 2019



KABUL ve ONAY



Prof. Dr. Charyyar ASHYRALYYEV danışmanlığında Sedanur EFE tarafından hazırlanan “İKİ BOYUTLU POTANSİYEL VE SİNGÜLER İNTEGRALLERİN BAZI YAKLAŞIMLARI” isimli bu çalışma jürimiz tarafından Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Mühendisliği** Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans Tezi olarak Oy Birliği/Oy Çokluğu ile kabul edilmiştir.

Başkan

.....
Doç.Dr.Mehmet MERDAN

Üye (Danışman)

.....
Prof. Dr. Charyyar ASHYRALYYEV

Üye

.....
Dr. Öğretim Üyesi Zafer BEKİRYAZICI

ONAY

Bu tez 26/02/2020 tarihinde Enstitü Yönetim Kurulunca kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Ferkan SİPAHİ. Y

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

.....

TEZ BEYANNAMESİ

Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlamış olduğum **“İKİ BOYUTLU POTANSİYEL VE SİNGÜLER İNTEGRALLERİN BAZI YAKLAŞIMLARI”** isimli tez çalışmada; bütün bilgi ve belgeleri genel akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, görsel ve yazılı bütün bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak hazırlayıp sunduğumu, başka kaynaklardan yararlandığım bilgileri metin ve kaynaklarda eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma süresince bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksi durumda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim.18/12/2019


Sedanur EFE

ÖZET
YÜKSEK LİSANS TEZİ

**İKİ BOYUTLU POTANSİYEL VE SİNGÜLER İNTEGRALLERİN BAZI
YAKLAŞIMLARI**

Sedanur EFE

Gümüşhane Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Charyyar ASHYRALYYEV

2019, 63 sayfa

Bu çalışmada, iki boyutlu potansiyel ve singüler integraller ele alınmıştır. Karmaşık değerli fonksiyonların yaklaşımları için gerçek değerli iki değişkenli fonksiyonların spline yaklaşımları kullanılmıştır.

Karmaşık değerli fonksiyonların yaklaşımları uygulanarak iki boyutlu potansiyel integraller için birinci ve ikinci mertebeden yaklaşım formülleri araştırılmıştır.

Sonra, iki boyutlu singüler integrallerin yaklaşımları incelenmiştir. İki boyutlu singüler integrallerin ikinci mertebeden yaklaşımı için formül sunulmuştur. MATLAB kullanmak üzere test örneklerde birinci ve ikinci mertebeden yaklaşımların hataları potansiyel ve singüler integraller için irdelenmiştir.

Anahtar Sözcükler: Karmaşık değerli fonksiyonlar, Potansiyel integral, Singüler integral, Singüler integral denklem, Yaklaşım.



ABSTRACT

MS THESIS

SOME APPROXIMATIONS OF TWODIMENSIONAL POTENTIAL AND SINGULAR INTEGRALS

Sedanur EFE

Gumushane University

The Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematical Engineering

Supervisor: Prof. Dr. Charyyar ASHYRALYYEV

2019, 63 pages

In this study, two-dimensional potentials and singular integrals were discussed. Spline approximations of real-valued functions with two variables have been used for approximations of complex-valued functions.

First and second order of accuracy approximate formulas for two-dimensional potential integrals were studied by using some approximations of complex valued functions.

Then, approximations of two-dimensional singular integrals were investigated. Second order of accuracy approximate formula for twodimensional singular integral is proposed. The errors of first and second order accuracy approaches were examined for potential and singular integrals in the test samples by using MATLAB.

Key Words: Complex valued functions, Potential integral, Singular integral, Singular integral equation, Approximation.



TEŞEKKÜR

Bu çalışma Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlanmıştır. Tez konusunun belirlenmesi ve bu tezin hazırlanması için geçen süre zarfında yol gösterici olan, bilgi ve tecrübelerini paylaşan, her türlü görüş ve önerilerini esirgemeyen çok kıymetli danışmanım Sayın Prof. Dr. Charyyar ASHERYRALYYEV'e, yüksek lisans eğitim ve öğretim hayatım boyunca üzerimde emeği olan Matematik Mühendisliği bölümündeki tüm hocalarıma; emekleri ve sevgileriyle beni bu zamana kadar yetiştiren, hiçbir zaman desteklerini eksik etmeyen, her zaman yanımda olan ve bu hayattaki mucizem olan değerli aileme ve destekçim olan yardımsever arkadaşlarıma sonsuz teşekkür ederim.

Sedanur EFE
Gümüşhane, 2019

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖZET.....	IV
ABSTRACT.....	VI
TEŞEKKÜR.....	VIII
İÇİNDEKİLER.....	IX
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	X
TABLolar DİZİNİ.....	XI
SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	XII
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Temel Kavramlar.....	1
1.2. Potansiyel ve Singüler İntegral Operatörleri.....	8
1.3. Literatür Taraması.....	14
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	16
2.1. Grid Noktalar Kümesi.....	16
2.2. Birinci Mertebeden Potansiyel İntegral Yaklaşımları.....	20
2.3. Birinci Mertebe Doğrulukla Potansiyel İntegral için Hata Analizi.....	23
2.4. Birinci Mertebeden Singüler İntegral Yaklaşımları.....	25
2.5. Birinci Mertebeden Doğrulukla Singüler İntegral için Hata Analizi.....	27
3. BULGULAR VE TARTIŞMA.....	29
3.1. $T(\rho z)$ Potansiyel İntegralin İkinci Mertebeden Doğrulukla Yaklaşımı.....	29
3.2. İkinci Mertebeden Doğrulukla Potansiyel İntegral için Hata Analizi.....	52
3.3. $S(\rho z)$ Singüler İntegralin İkinci Mertebeden Doğrulukla Yaklaşımı.....	54
3.4. İkinci Mertebeden Doğrulukla Singüler İntegral için Hata Analizi.....	58
4. SONUÇLAR ve ÖNERİLER.....	60
5. KAYNAKLAR.....	62
6. EKLER.....	64
ÖZGEÇMİŞ	

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1.1. İki dairenin çakışmasından oluşan halka.....	16
Şekil 1.2. $D_{k,m}$ bölgesi.....	17
Şekil 1.3. $D_{k,m}^*$ bölgesi.....	18



TABLÖLAR DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 2.1. $T(\rho z)$ 'nin birinci mertebeden yaklaşımının hata.....	24
Tablo 2.2. $T(\rho z)$ 'nin birinci mertebeden yaklaşımının hata analizi devamı.....	25
Tablo 2.3. $S(\rho z)$ 'nin birinci mertebeden yaklaşımının hata analizi.....	27
Tablo 2.4. $S(\rho z)$ 'nin birinci mertebeden yaklaşımının hata analizi devamı.....	28
Tablo 3.1. $T(\rho z)$ 'nin ikinci mertebeden yaklaşımları için hata analizi.....	53
Tablo 3.2. $T(\rho z)$ 'nin ikinci mertebeden yaklaşımları için hata analizi devamı.....	54
Tablo 3.3. $S(\rho z)$ 'nin ikinci mertebeden yaklaşımları için hata analizi.....	59

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

C	:	Karmaşık sayılar kümesi
z	:	x ve y değişkenlerine bağlı karmaşık sayı
$\bar{z}$	:	z 'nin karmaşık eşleniği
$ z $	:	Karmaşık sayının mutlak değeri
f	:	Kompleks fonksiyon
z_0	:	Karmaşık sayıda bir nokta
$f'(z_0)$	:	z_0 noktasında kompleks fonksiyonun türevi
G	:	Karmaşık sayılar kümesinde bir bölge
w	:	$w: G \rightarrow C$ tanımlı karmaşık fonksiyon
$\frac{\partial w}{\partial x} \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$	:	w 'nin x 'e bağlı kısmi türev
$\frac{\partial w}{\partial y} \equiv \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y}$	:	w 'nin y 'e bağlı kısmi türev
w_z	:	z 'e göre kısmi türev
$w_{\bar{z}}$	:	$\bar{z}$ ' e göre kısmi türev
g ve h	:	Gerçek değerli fonksiyonlar
R	:	Reel sayılar kümesi
$[a,b]$	:	Kapalı aralık
γ	:	$\gamma:[a,b] \rightarrow C$ tanımlı eğri
X	:	C üzerinde bir vektör uzayı
$\ \cdot\ $	:	Norm
D	:	Karmaşık sayılar kümesinde bir bölge
$\bar{D}$	:	D ' nin kapanışı

$H^\alpha(\overline{D})$	:	α üslü Hölder şartını sağlayan fonksiyonlar uzayı
ζ	:	G bölgesinde sabit bir nokta
$T(\rho z)$	:	İki boyutlu potansiyel operatör
$S(\rho z)$	:	İki boyutlu singüler operatör
G_ε	:	G bölgesinin ve $ z - \zeta > \varepsilon$ 'nın kesişimi
r_k, r_{k+1}	:	Yarıçaplar
Γ	:	G bölgesinde nokta
K_r	:	C kompleks sayılar düzleminde r yarıçaplı 0 merkezli daire
H_k	:	Halka
$\Omega^{(1)}, \Omega^{(2)}$	:	Grid noktalar
ρ	:	$D_{k,m}$ bölgede tanımlanan iki değişkenli fonksiyon
$C^\alpha(\overline{D})$	:	α üslü Hölder şartını sağlayan Banach uzay
$C^{m+\alpha}(\overline{D})$	:	m 'e kadar türevleri sürekli olan ve türevleri α üslü Hölder şartını sağlayan Banach uzay
$L_p(\overline{D})$	:	Normlu lineer uzayı

1.GENEL BİLGİLER

1.1. Temel Kavramlar

Herhangi bir $z = x + iy$ karmaşık değeri iki tane x, y gerçekteğerler oluşturur.

Ayrıca, z 'in eşleniği $\bar{z}$ ile gösterilir ve $\bar{z} = x - iy$ formunda tanımlanır. Buna göre,

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \text{ ve } y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \text{ dir.}$$

$z = x + iy$ karmaşık sayısının mutlak modülü $|z|$ ile gösterilir ve $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.1.1. (Mathews –Howell,2012)

Eğer z_0 noktası için

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limit varsa f kompleks fonksiyonu z_0 noktasında türevlenebilir denir ve türev $f'(z_0)$ ile gösterilir.

z_0 karmaşık sayısı ve $\varepsilon > 0$ gerçekteğeri için

$$D_\varepsilon(z_0) = \{z : |z - z_0| < \varepsilon\}$$

kümesine z_0 noktasının ε komşuluğu denir.

Tanım 1.1.2. (Mathews –Howell,2012)

f kompleks fonksiyonun z_0 noktasında ve her $z \in D_\varepsilon(z_0)$ noktalarında $f'(z)$ var olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir denir. Başka bir ifadeyle f fonksiyonu sadece z_0 noktasında değil z_0 noktasının bir komşuluğunun tüm noktalarında türevlenebilir olmalıdır.

Karmaşık sayılar kümesini C ve ondaki herhangi bir bölgeyi G ile göstereceğiz.

G bölgesinde tanımlanan karmaşık değerli $w: G \rightarrow C$ fonksiyonunu iki değişkenli gerçek değerli $u(x, y)$ ve $v(x, y)$ fonksiyonları için $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ şeklinde yazılabilir. $u(x, y)$, $v(x, y)$ fonksiyonların x ve y değişkenlerine göre kısmi türevlerini $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ ile belirleyelim.

Buna göre, karmaşık değerli w fonksiyonun x ve y değişkenlerine göre kısmi türevleri

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &\equiv \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial w}{\partial y} &\equiv \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

şeklindedir.

O zaman, w fonksiyonun z değişkenine göre türevi

$$\frac{\partial w}{\partial z} \equiv \partial_z w \equiv w_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - i \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (1.1.2)$$

ile w fonksiyonun $\bar{z}$ değişkenine göre türevi ise

$$w_{\bar{z}} \equiv \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (1.1.3)$$

şeklinde tanımlanır (Muskhelishvili, 1953).

$u(x, y)$ ve $v(x, y)$ fonksiyonları için

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= 0\end{aligned}\tag{1.1.4}$$

formundaki Cauchy-Riemann sistemi kısaca

$$w_z = 0, w = u + iv, z = x + iy$$

şeklinde yazılabilir (Vekua, 1962).

g ve h , gerçekteğerli iki (x, y) değışkenli bilinen fonksiyonlar olmak üzere bilinmeyen $u(x, y)$ ve $v(x, y)$ fonksiyonları için homojen olmayan Cauchy-Riemann sistemi

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} &= g(x, y), \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= h(x, y), \quad x, y \in R,\end{aligned}\tag{1.1.5}$$

şeklindedir.

$$w = u + iv, \quad f = \frac{g + ih}{2} \text{ notasyonları kullanılırsa, (1.1.3) formülüne göre,}$$

(1.1.5) denklem sistemi

$$\frac{\partial w}{\partial z} = f\tag{1.1.6}$$

formunda yazılabilir.

Tanım 1.1.3. (Başkan,2010)

$[a,b] \subset R$ olmak üzere sürekli bir

$$\gamma:[a,b] \rightarrow C$$

fonksiyonuna C düzleminde bir eğri denir. Burada $\gamma(a)$ ve $\gamma(b)$ noktalarına sırasıyla eğrinin başlangıç noktası ve bitim noktaları denir.

Bir γ eğrisi verildiğinde $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise, γ ya kapalı eğridir denir.

Bir γ eğrisi sadece $t_1=t_2$ için $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ oluyorsa basit eğridir denir.

Bazen basit eğrilere Jordan eğrisi de denir. γ basit bir eğri ve $\gamma(a) = \gamma(b)$ basit kapalı eğri (kapalı Jordan eğrisi) denir.

Bir γ eğrisi verildiğinde γ' türevi var ve sürekli ise γ diferansiyellenebilir eğri (yay) diye adlandırılır. γ diferansiyellenebilir bir eğri olsun. Eğer $\gamma'(t) \neq 0$ ise, γ ya düzgün eğri (regüler eğri) denir.

$[a,b]$ aralığının sonlu tane noktası hariç, γ eğrisi diferansiyellenebiliyorsa ve bu söz konusu noktalarda γ nın sağdan ve soldan türevleri var ve bunlar γ' nün bu noktalardaki sağ ve sol limitlerine eşitse γ parçalı diferansiyellenebilir eğridir denir. γ parçalı diferansiyellenebilir eğri olsun. Eğer her $t \in [a,b]$ için $\gamma'(t) \neq 0$ ise γ parçalı düzgün eğridir denir.

Tanım 1.1.4. (Muskhelishvili,1952)

L bir parçalı diferansiyellenebilir eğri olsun. $\varphi(t)$ fonksiyonun L 'nin sonlu C_k noktaları hariç her noktasında sınırlı fonksiyon olduğunu ve C , $\alpha < 1$ pozitif sayılar olmak üzere $C = C_k$ noktalarda $t \rightarrow C_k$

$$|\varphi(t)| \leq \frac{C}{|t - C|^\alpha}$$

şeklindeki kestirimin olduğunu varsayalım. O taktirde, her Z karmaşık sayı için

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t - z}$$

integraline Cauchy integrali denir.

Şimdi, norm uzay ve Banach uzayının tanımlarını verelim.

Tanım 1.1.5. (Gohberg vd, 2000)

X , C üzerinde bir vektör uzayı olsun. X üzerinde tanımlanan gerçek değerli $\|\cdot\|$ fonksiyon aşağıdaki özelliklere sahip ise norm uzay denir.

- i. $\forall x \in X, \|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0.$
- ii. $\forall x \in X, \forall \alpha \in C, \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|.$
- iii. $\forall x, y \in X, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği).

X uzayı ile $\|\cdot\|$ birlikte normlu lineer uzay denir.

Tanım 1.1.6. (Gohberg vd, 2000)

Elemanları X normlu lineer uzayında olan $\{x_n\}$ dizisi, eğer $n, m \rightarrow \infty$ $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$ ise Cauchy dizisi olarak tanımlanır.

Eğer elemanları X normlu lineer uzayında olan her $\{x_n\}$ Cauchy dizisinin limiti X de olursa bu uzaya tam uzay denir.

Tam normlu lineer uzayına Banach uzayı denir.

C karmaşık sayılar kümesindeki D bölgesinin $\overline{D}$ kapanışında sürekli f fonksiyonlardan oluşan ve

$$\|f\|_{C(\overline{D})} = \max_{z \in \overline{D}} |f(z)|$$

normu ile tanımlanan Banach uzayını $C(\overline{D})$ ile belirleyelim.

Tanım 1.1.7. (Monakhov, 1983)

$0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere $\overline{D}$ de tanımlanan karmaşık değerli f fonksiyonlarından oluşan ve normu

$$\|f\|_{H^\alpha(\bar{D})} = \sup_{z_1, z_2 \in \bar{D}} \frac{|f(z_1) - f(z_2)|}{|z_1 - z_2|^\alpha}$$

şeklinde ifade eden Banach uzayı $H^\alpha(\bar{D})$ ile gösterilir ve α üslü Hölder şartını sağlayan fonksiyonlar uzayı denir.

$C^\alpha(\bar{D})$, α üslü Hölder şartını sağlayan sürekli fonksiyonlardan oluşan ve normu

$$\|f\|_{C^\alpha(\bar{D})} = \|f\|_{C(D)} + \sup_{z_1, z_2 \in \bar{D}} \frac{|f(z_1) - f(z_2)|}{|z_1 - z_2|^\alpha}$$

ile tanımlanan Banach uzayıdır.

$C^{m+\alpha}(\bar{D})$, m de dahil olmak üzere m 'e kadar türevleri sürekli olan ve türevleri α üslü Hölder şartını sağlayan fonksiyonlardan oluşan bir Banach uzayıdır.

$p \geq 1$ olmak üzere $L_p(\bar{D})$ normlu lineer uzayı, bu D de p üssü ile integrallenebilir olan f fonksiyonlarından oluşan ve

$$\|f\|_{L_p(\bar{D})} = \left(\iint_D |f|^p dx dy \right)^{1/p}$$

normu ile tanımlanan Banach uzayıdır.

Spline interpolasyon yaklaşımları, mühendisliğin farklı alanlarındaki modellerin çözümlerinin hesaplanmasında yaygın olarak kullanılır. Buna başlıca örnekler akışkanlar mekaniği, hidrodinamik, aerodinamik, jeodezi gibi farklı mühendislik alanlarındaki modellerdir.

Belirli bir $\Omega = [p, q] \times [r, s]$ dikdörtgen bölgesinde iki değişkenli bir $\rho(x, y)$ fonksiyonu için birinci mertebeden spline yaklaşımın tanımını verelim.

$$\Delta_x : p = x_0 < x_1 < \dots < x_N = q,$$

$$\Delta_y: r = y_0 < y_1 < \dots < y_M = s$$

olmak üzere $\Delta = \Delta_x \times \Delta_y$ ile gösterilen bir grid noktalar kümesi verilmiş olsun. Buda Ω bölgesini küçük dikdörtgenlere böler :

$$\Omega_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] = \left\{ (x, y) \mid x \in [x_i, x_{i+1}], y \in [y_j, y_{j+1}] \right\},$$

$$i = 0, \dots, N-1; \quad j = 0, \dots, M-1.$$

Tanım 1.1.8. (Zavyalov, Kvasov ve Miroshnichenko, 1980, Kvasov ,2000)

Her $i = 0, \dots, N-1; \quad j = 0, \dots, M-1$ indisler için a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} , d_{ij} bazı sabitler olmak üzere, Ω_{ij} bölgesinde

$$S_{1,1}(x, y) = a_{ij} + b_{ij}x + c_{ij}y + d_{ij}xy, (x, y) \in \Omega$$

olarak tanımlanan ve köşe noktalarında

$$S_{1,1}(x_i, y_j) = \rho(x_i, y_j)$$

koşulunu sağlayan $S_{1,1}$ fonksiyonuna $\rho(x, y)$ fonksiyonu için birinci mertebeden spline fonksiyonu denir.

Tanım 1.1.9. (Zavyalov, Kvasov ve Miroshnichenko, 1980, Kvasov ,2000)

Her $i = 0, \dots, N-1; \quad j = 0, \dots, M-1$ indisler için a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} , d_{ij} , e_{kl}^{ij}

$$S_{n,m,v,\mu}(x, y) = \sum_{\alpha=0}^{n-1} \sum_{\beta=0}^{m-1} a_{\alpha\beta}^{ij} (x - x_i)^\alpha (y - y_j)^\beta a_{ij} + b_{ij}x + c_{ij}y + d_{ij}xy, (x, y) \in \Omega$$

olarak tanımlanan ve

$$S_{n,m,v,\mu}(x, y) \in C^{n-v, m-\mu}(\Omega)$$

şartını sağlayan $S_{n,m,v,\mu}(x, y)$ fonksiyonuna $\rho(x, y)$ fonksiyonu için x değişkene göre n . mertebeden v katlı ve y değişkene göre m . mertebeden μ katlı iki boyutlu spline fonksiyonu denir.

1.2. Potansiyel ve Singüler İntegral Operatörleri

Singüler integral denklemler fizik ve uygulamalı mekaniğin geniş alanlarında farklı modellerin çözümü için kullanılır. Özellikle aerodinamik, hidrodinamik, akışkanlar mekaniği, elastik mekaniği dallarında kullanımı yaygındır (Muskhelishvili, 1953; Vekua, 1962; Monakhov, 1983; Ashyralyev, 1994 kitaplar). Diğer yandan, iki boyutlu singüler integral denklemler için yaklaşım yöntemleri üzerine az sayıda çalışma yapılmıştır. Vekua tarafından tanımlanan iki boyutlu potansiyel ve singüler

$$T(\rho | z) = -\frac{1}{\pi} \iint_G \frac{\rho(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad S(\rho | z) = -\frac{1}{\pi} \iint_G \frac{\rho(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta,$$

operatörlerini ele alalım. T ve S operatörlerinin bazı özellikleri Vekua (1962); Monakhov (1983) kitaplarında verilmiştir.

Teorem 1.2.1. (Monakhov, 1983)

$D \subset C$ bir sınırlı bölge olmak üzere T potansiyel operatörü ve S singüler operatörü aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i. $\frac{\partial T f}{\partial \bar{z}} = f, \quad \frac{\partial T f}{\partial z} = S f, \quad \forall f \in L_p(\bar{D}), p > 1.$

ii. Eğer $f \in C^{m+\alpha}(\bar{D}), 0 < \alpha < 1, D \in C^{m+1+\alpha}$ ise

$$T f \in C^{m+1+\alpha}(\bar{D}), S f \in C^{m+\alpha}(\bar{D}).$$

iii. Eğer $f \in L_p(\bar{D}), p > 2$ ise $T f \in C^\alpha(D), \alpha = \frac{p-2}{p}, S f \in L_p(D).$

iv. S singüler operatörü $C^{l+\alpha}(\bar{D}), (0 < \alpha < 1, l \geq 0)$ ve $L_p(\bar{D}), p > 1$

uzaylarda sınırlıdır. Ayrıca, $\|S f\|_{L_2} \leq \|f\|_{L_2}, \forall f \in L_2(\bar{D}),$ yani,

$$\wedge_2 = \|S\|_{L_2} \leq 1.$$

Teorem 1.2.2. Green Teoremi (Mathews –Howell,2012)

$G \subset C$ ve ∂G basit kapalı eğri olsun. Eğer P ve Q fonksiyonların P_x , P_y , Q_x ve Q_y kısmi türevleri $G \cup \Gamma$ 'nin her noktasında sürekli iseler, bu takdirde

$$\int_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_G [Q_x(x, y) - P_y(x, y)] dx dy$$

geçerlidir.

$w \in C^1(\overline{G})$ ve Γ eğri G bölgesinin sınırı olduğunu varsayalım. Bu takdirde, iki boyutlu integralleri bir boyutlu integrallere dönüştürmek için (Vekua, 1962)

$$\iint_G \frac{\partial w}{\partial z} dx dy = \frac{1}{2i} \int_{\Gamma} w(z) dz, \quad (1.2.7)$$

$$\iint_G \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} dx dy = -\frac{1}{2i} \int_{\Gamma} w(z) d\bar{z}.$$

Green formülü olarak adlandırılan ifadeler kullanılmaktadır.

$w \in C^1(G)$ fonksiyonu $\overline{G}$ kapalı bölgesinde sürekli ise (1.1.5) ile ifade edilen formüller geçerlidir. Eğer ζ noktası G bölgesinin sabit bir noktasıysa (1.1.5) ile verilen denklemler,

$$\frac{1}{2i} \int_{\Gamma} \frac{w(z) dz}{z - \zeta} - \frac{1}{2i} \int_{|z-\zeta|=\varepsilon} \frac{w(z) dz}{z - \zeta} = \iint_{G_\varepsilon} \frac{\partial w(z)}{\partial \bar{z}} \frac{dx dy}{z - \zeta} \quad (1.2.8)$$

şeklinde yazılabilir.

G_ε , G bölgesinin ve $|z - \zeta| > \varepsilon$ 'nın kesişimidir. Dolayısıyla $G_\varepsilon \subset G$ 'dir.

Limit $(\varepsilon \rightarrow 0)$ 'a bakılırsa

$$w(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w(z) dz}{z - \zeta} - \frac{1}{\pi} \iint_G \frac{\partial w(z)}{\partial \bar{z}} \frac{dx dy}{z - \zeta} \quad (1.2.9)$$

olur.

Benzer şekilde

$$w(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w(z) d\bar{z}}{\bar{z} - \bar{\zeta}} - \frac{1}{\pi} \iint_G \frac{\partial w(z)}{\partial \bar{z}} \frac{dx dy}{\bar{z} - \bar{\zeta}} \quad (1.2.10)$$

formülü doğrudur.

(1.2.9) ve (1.2.10) ile ifade edilen denklemler Pompeu formüllerini oluşturur (Pompeu, 1912).

w , (1.1.6) denklemin bir çözümü ise

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad Tf = -\frac{1}{\pi} \iint_G \frac{f(\xi) d\xi d\eta}{\zeta - z} \quad (1.2.11)$$

olmak üzere

$$w(z) = \Phi(z) + Tf \quad (1.2.12)$$

biçimindedir.

$f = f(x, y)$, x ve y değişkenlerine bağlı analitik bir fonksiyonsa, Tf

integralinin hesaplanmasını kolaylaştıracak bir formül elde edilebilir. Sırasıyla x ve y

değişkenlerinin yerlerine $\frac{1}{2}(z + \bar{z})$ ve $\frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ yazılırsa $\bar{z}$ 'e göre belirsiz

integralin hesabı

$$F(z, \bar{z}) = \int f\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) d\bar{z}$$

(1.2.7) formüllerinden yararlanılırsa

$$\begin{aligned}
Tf &\equiv -\frac{1}{\pi} \iint_G \frac{f(\xi, \eta)}{\zeta - z} d\xi d\eta \\
&= F(z, \bar{z}) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(\zeta, \bar{\zeta})}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in G
\end{aligned} \tag{1.2.13}$$

yazılır. Eğer z , $G + \Gamma$ alanının dışında kalırsa

$$Tf \equiv -\frac{1}{\pi} \iint_G \frac{f(\xi, \eta)}{\zeta - z} d\xi d\eta = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(\zeta, \bar{\zeta})}{\zeta - z} d\zeta \tag{1.2.14}$$

olarak yazılır.

Tf bütün düzlemde sürekli ise $G + \Gamma$ alanının dışında holomorftir.

G , karmaşık sayılar düzleminde 1 yarıçaplı daire olsun.

n ve m negatif olmayan tamsayılar olmak üzere $f = z^n \bar{z}^m$ fonksiyonunu ele alalım. Buna göre ,

$$-\frac{1}{\pi} \iint_G \frac{\partial \omega}{\partial \bar{\zeta}} \frac{1}{\zeta - z} d\xi d\eta = \omega(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad \zeta = \xi + i\eta,$$

olduğu görülür.

$$\frac{\partial \omega}{\partial \bar{\zeta}} = \zeta^n \bar{\zeta}^m \Rightarrow \omega(z) = \frac{\zeta^n \bar{\zeta}^{m+1}}{m+1} \quad \text{ifadesi}$$

$$-\frac{1}{\pi} \iint_G \frac{\partial \omega}{\partial \bar{\zeta}} \frac{1}{\zeta - z} d\xi d\eta = \omega(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

eşitliğinde yerine yazılırsa; $|z| < 1, z \in G$ için

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\pi} \iint_G \frac{\partial \omega}{\partial \bar{\zeta}} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta d\eta &= \frac{z^n \bar{z}^{m+1}}{m+1} - \frac{1}{2\pi i(m+1)} \int_{\Gamma} \frac{\zeta^n \bar{\zeta}^{m+1}}{\zeta - z} d\zeta \\
&= \frac{z^n \bar{z}^{m+1}}{m+1} - \frac{1}{2\pi i(m+1)} \int_{\Gamma} \frac{\zeta^{n-m-1}}{\zeta - z} d\zeta
\end{aligned}$$

ifadesine ulaşılır.

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} \frac{\zeta^{n-m-1}}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{integralini ele alalım. } \alpha = n - m - 1 \quad \text{notasyonu kullanılırsa,} \\
\int_{\Gamma} \frac{\zeta^{\alpha}}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\Gamma} (\zeta^{\alpha-1} + z\zeta^{\alpha-2} + z^2\zeta^{\alpha-3} + z^3\zeta^{\alpha-4} + \dots + z^{\alpha-1}\zeta^0) d\zeta + \\
+z^{\alpha} \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = z^{\alpha} \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = z^{\alpha} \ln(\zeta - z) \Big|_{\Gamma} \\
= z^{\alpha} 2\pi i = z^{n-m-1} 2\pi i
\end{aligned}$$

elde edilir.

$n \geq m - 1$ için;

$$-\frac{1}{\pi} \iint_G \frac{\partial \omega}{\partial \bar{\zeta}} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta d\eta = \frac{z^n \bar{z}^{m+1}}{m+1} - \frac{z^{n-m-1}}{m+1}$$

ifadesine ulaşılır.

$n < m - 1$ için;

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\pi} \iint_G \frac{\partial \omega}{\partial \bar{\zeta}} \frac{1}{\zeta - z} d\xi d\eta &= \frac{z^n \bar{z}^{-m+1}}{m+1} - \frac{1}{2\pi i(m+1)} \int_{\Gamma} \frac{\zeta^n \bar{\zeta}^{-m+1}}{\zeta - z} d\zeta \\
&= \frac{z^{n-m+1}}{m+1} - \frac{1}{2\pi i(m+1)} \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta^{-n+m+1}(\zeta - z)}
\end{aligned}$$

olur.

$n < m-1$ durumunda

$$-\frac{1}{\pi} \iint_G \frac{\partial \omega}{\partial \bar{\zeta}} \frac{1}{\zeta - z} d\xi d\eta = \frac{z^n \bar{z}^{-m+1}}{m+1}$$

bulunur.

Sonuçta,

$$-\frac{1}{\pi} \iint_G \frac{\zeta^n \bar{\zeta}^m}{\zeta - z} d\xi d\eta = \begin{cases} \frac{z^n \bar{z}^{-m+1}}{m+1} - \frac{z^{n-m-1}}{m+1}, & n \geq m-1, \\ \frac{z^n \bar{z}^{-m+1}}{m+1}, & n < m-1. \end{cases}$$

z , $G + \Gamma$ alanının dışında kalırsa

$$-\frac{1}{\pi} \iint_G \frac{\zeta^n \bar{\zeta}^m}{\zeta - z} d\xi d\eta = \begin{cases} 0, & n \geq m-1, \\ \frac{z^{n-m-1}}{m+1}, & n < m-1. \end{cases}$$

formülleri elde edilir (Vekua, 1962).

1.3. Literatür Taraması

Ashyralyev ve Monakhov, 1991 makalesinde, dikdörtgen bölgede singüler S operatörü içeren iki boyutlu singüler integral denklemin sayısal çözümü için algoritma sunulmuştur. İki boyutlu singüler integral için yaklaşım yöntemi araştırılmıştır.

İntegral denklem yöntemleri, iki değişkenli kısmi diferansiyel denklemlerin çözülebilirliğini ve Fredholm özelliklerini araştırmak için yaygın olarak kullanılmaktadır. Öte yandan, karşılık gelen iki boyutlu integral denklemler için yaklaştırma yöntemleri hakkında çalışılmaya devam edilmektedir.

Didenko ve Silbermann, 2001 makalede iki boyutlu integral denklemlerin geniş bir sınıfı için özel bir fonksiyon sisteminin kullanılmasına dayanmakta olup elde edilen yaklaşım yöntemi önerilmiştir. Bu yöntem bir özel fonksiyonlar sistemine dayanılarak oluşturulmuştur. Bu sistemin ortanormallığı, kısmi diferansiyel denklemlere uygulanabilme özelliği, integral operatörler ile iyi ilişkisi, önemli özelliklerindendir. Ayrıca, temel elemanların hepsi rekürens bağlantılar ile hesaplanmıştır. Bu özelliklere dikkat edilerek sayısal algoritma sunulmuştur.

Daripa ve Mashat, 1998 makalesinde, karmaşık sayılar düzleminde birim daire içindeki belirli kısmi diferansiyel denklemlerin çözülmesi bağlamında ortaya çıkan bazı singüler integral operatörlerin yaklaşımları için hızlı algoritmalar sunmaktadır.

Karmaşık sayılar düzleminin birim çemberindeki kısmi diferansiyel denklemin çözümünü tespit etmek için bir singüler integral operatörü yaklaşımını içeren hızlı algoritma sunulmuştur. Bu algoritma Fourier uzayındaki bazı rekürsif bağıntıları ve hızlı Fourier dönüşümünü uygulayarak oluşturulmuştur.

Badea ve Daripa, 2002 makalesinde iki boyutlu alanda homojen olmayan eliptik denklemler için birkaç sınır değer probleminin sayısal çözümünün hızlı algoritması sunulmuştur.

Rogozin, 2006 makalesinde lineer olmayan analizin bazı yöntemlerine dayanarak lineer olmayan Vekua-Bers tipindeki diferansiyel denklemleri araştırmıştır.

Mustafa ve Ardil, 2012 makalesinde karmaşık düzlemdeki bölgede doğrusal olmayan singüler integral denklemin çözümünün varlığı ve tekliğini kanıtlamıştır ve çözümü bulmak için bir yöntem verilmiştir.

Ashyralyyev ve Cakir, 2014 makalesinde birim dairede T ve S operatörleri için birinci mertebeden doğruluk yaklaşımları elde edilmiştir. İkinci mertebeden doğruluk yaklaşımları bu operatörler için kurulmamıştır.

Bu tezin amacı, iki boyutlu potansiyel ve singüler integrallerin yaklaşımlarının öğrenilmesi, karmaşık değerli fonksiyonların spline yaklaşımları uygulanarak iki boyutlu potansiyel ve singüler integraller için ikinci mertebeden doğrulukla yaklaşım formüllerin elde edilmesi ve MATLAB kullanmak üzere test örneklerde potansiyel ve singüler integraller için yaklaşımların hata analizinin araştırılmasıdır.

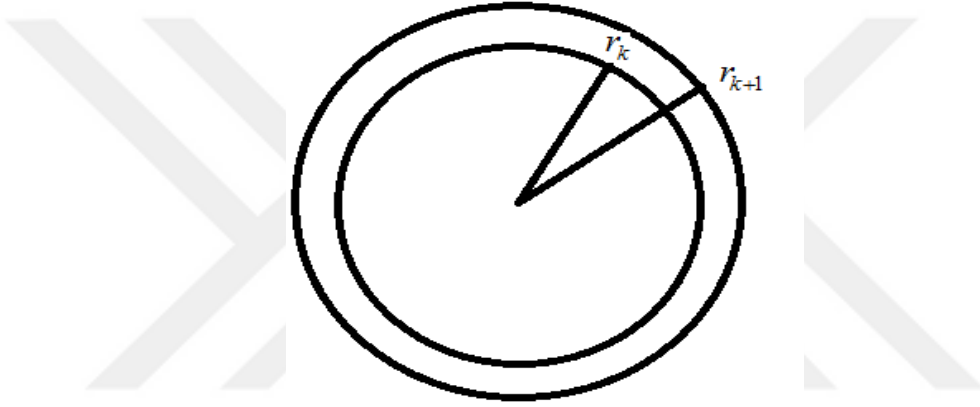


2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Grid Noktalar Kümesi

İlk önce Ashyralyyev ve Cakir (2014), makalede kullanılmış olan ağ noktalar kümesini tanımlayalım. $N\tau = 1$ olmak üzere her $1 \leq k \leq N$ indis için $r_k = k\tau$ yarıçapları belirleyelim.

Şekil 1. 1.'deki gibi aynı merkezli ve r_k , r_{k+1} yarıçaplı iki dairenin çakışmasından oluşan halkayı ele alalım.

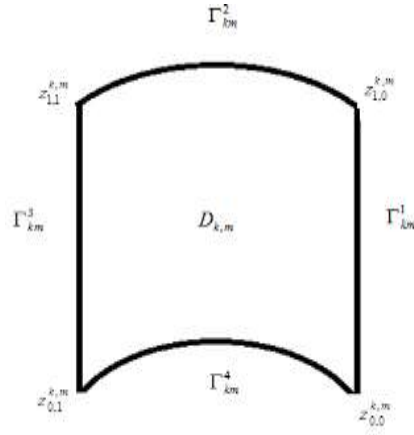


Şekil 1. 1. İki dairenin çakışmasından oluşan halka

Elde edilmiş halka küçük bölgelere bölünür. Bu nedenle $M_k = 2k + 1$, $M_k h_k = 2\pi$ olmak üzere her $0 \leq m \leq M_k$ indis için $\theta_{k,m} = -\pi + mh_k$ açıları ve aşağıdaki grid noktaları tanımlayalım:

$$z_{0,0}^{k,m} = r_k e^{i\theta_{k,m}}, \quad z_{1,0}^{k,m} = r_{k+1} e^{i\theta_{k,m}},$$

$$z_{1,1}^{k,m} = r_{k+1} e^{i\theta_{k,m+1}}, \quad z_{0,1}^{k,m} = r_k e^{i\theta_{k,m+1}}.$$



Şekil 1.2. $D_{k,m}$ bölgesi

Şekil 1.2.'deki gibi küçük bölgeleri

$$D_{k,m} = \left\{ \zeta \mid \zeta = re^{i\theta}, r_k \leq r \leq r_{k+1}, 1 \leq k \leq N-1, \right. \\ \left. \theta_{k,m} \leq \theta \leq \theta_{k,m+1}, 0 \leq m \leq M_k - 1 \right\} \text{ olarak tanımlayalım.}$$

$D_{k,m}$ alanı için $\pi\tau^2$ olduğu açıktır. $D_{k,m}$ bölgesinin sınırı dört eğriden oluşmuştur. Yani,

$$\partial D_{k,m} = \Gamma_{km} = \Gamma_{km}^1 \cup \Gamma_{km}^2 \cup \Gamma_{km}^3 \cup \Gamma_{km}^4,$$

$$\Gamma_{km}^1 = \left\{ \zeta \mid \zeta = re^{i\theta_{k,m+1}}, r_k \leq r \leq r_{k+1} \right\},$$

$$\Gamma_{km}^2 = \left\{ \zeta \mid \zeta = r_{k+1}e^{i\theta}, \theta_{k,m+1} \geq \theta \geq \theta_{k,m} \right\},$$

$$\Gamma_{km}^3 = \left\{ \zeta \mid \zeta = re^{i\theta_{k,m}}, r_{k+1} \geq r \geq r_k \right\},$$

$$\Gamma_{km}^4 = \left\{ \zeta \mid \zeta = r_k e^{i\theta}, \theta_{k,m} \leq \theta \leq \theta_{k,m+1} \right\}.$$

Şekil 1.1. den yararlanılarak halkanın alanı,

$$\pi r_k^2 = \pi k^2 \tau^2$$

$$\pi r_{k+1}^2 = \pi (k+1)^2 \tau^2$$

denklemleri taraf tarafa çıkarılırsa,

$$\pi r_{k+1}^2 - \pi r_k^2 = \pi r^2 (2k+1)$$

$$M_k = 2k+1$$

şeklindedir.

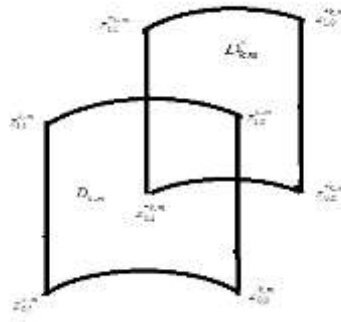
Şekil 1. 2. ' deki $D_{k,m}$ 'in alanı H_k 'nın alanının $\frac{1}{M_k}$ katıdır. Böylece, $D_{k,m}$ 'in alanı $\pi \tau^2$ olur.

İki boyutlu potansiyel ve singüler integral yaklaşımlarında Şekil 1.3.'deki gibi $D_{k,m}^*$ küçük bölgeler kullanılacaktır. Buradaki grid noktalar,

$$z_{0,0}^{*k,m} = \left(r_k + \frac{\tau}{2} \right) e^{i \left(\theta_{k,m} + \frac{h_k}{2} \right)}, \quad z_{1,0}^{*k,m} = \left(r_{k+1} + \frac{\tau}{2} \right) e^{i \left(\theta_{k,m} + \frac{h_k}{2} \right)},$$

$$z_{1,1}^{*k,m} = \left(r_{k+1} + \frac{\tau}{2} \right) e^{i \left(\theta_{k,m+1} + \frac{h_k}{2} \right)}, \quad z_{0,1}^{*k,m} = \left(r_k + \frac{\tau}{2} \right) e^{i \left(\theta_{k,m+1} + \frac{h_k}{2} \right)}$$

şeklindedir.



Şekil 1.3. $D_{k,m}^*$ bölgesi

C kompleks sayılar düzleminde r yarıçaplı 0 merkezli daireyi $K_r = \{z \in C : |z| < r\}$ olarak belirleyelim. O zaman $H_{r_k} = K_{r_{k+1}} - K_{r_k}$ halkadır,

$$K = K_\tau \bigcup_{k=1}^{N-1} H_{r_k} = K_\tau \bigcup_{k=1}^{N-1} \bigcup_{m=0}^{M_k-1} D_{k,m}$$

olarak yazılabilir. Sonuçta,

$$\Omega^{(1)} = \Omega_{\tau,h}^{(1)} = \{z_{0,0}^{k,m}, z_{1,0}^{k,m}, z_{1,1}^{k,m}, z_{0,1}^{k,m} \mid 1 \leq k \leq N-1, 0 \leq m \leq M_k-1\} \cup \{0\}$$

grid noktalar kümesi tanımlanmış olur. Daha sonra potansiyel ve singüler integrallerinin değerlerini

$$\Omega^{(2)} = \Omega_{\tau,h}^{(2)} = \{z_{0,0}^{*k,m}, z_{1,0}^{*k,m}, z_{1,1}^{*k,m}, z_{0,1}^{*k,m} \mid 1 \leq k \leq N-1, 0 \leq m \leq M_k-1\} \cup \{0\}$$

grid noktalar kümesinde vereceğiz.

Ω^j ($j = 1, 2$) grid noktalar kümesinde tanımlanan $l_2(\Omega^j)$ grid fonksiyonlar

uzayındaki $\rho^{\tau,h}$ fonksiyonun normunu

$$\|\rho^{\tau,h}\|_{l_2(\Omega^j)} = \sqrt{\pi\tau} \left[\sum_{k=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{M_k-1} |\rho_{k,m}|^2 \right]^{1/2} \quad (2.1.1)$$

şekilde alacağız.

Bundan sonraki kısımlarda potansiyel ve singüler integrallerin birinci ve ikinci mertebeden doğruluklu yaklaşımlarını elde etmek için tanımlamış olduğumuz $\Omega^{(1)}$ ve $\Omega^{(2)}$ grid noktalar kümeleri kullanılacaktır.

2.2. Birinci Mertebeden Potansiyel İntegral Yaklaşımları

Bu alt başlıkta birinci mertebeden potansiyel integral yaklaşımları hesaplanacaktır. İntegral yaklaşımlarını hesaplamak için birtakım integraller küçük bölgelerde hesaplanır. Verilen ρ fonksiyonu için her $D_{k,m}$ bölgede

$$\rho(z) = \rho_{km}, z \in D_{k,m}, \rho_{km} = \rho(r_k e^{i\theta_{k,m}}), 1 \leq k \leq N-1, 0 \leq m \leq M_{k-1}$$

yaklaşımı kullanılmıştır. Ashyralyyev ve Cakir (2014) , makalesine göre $T(\rho|z)$ ' nin hesaplanması için yaklaşık bir formül alınır:

$$T(\rho|z) \approx T(p|z) = \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{m=0}^{M_k-1} \rho_{km} T_{k,m}(z),$$

burada

$$T_{k,m}(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{D_{k,m}} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

şeklindedir. Pompeu formülünü kullanarak iki katlı integrali bir katlı integrale dönüştürüp,

$$T_{k,m}(z) = \begin{cases} z - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{k,m}} \frac{\bar{\zeta} d\zeta}{\zeta - z}, & z \in D_{k,m}, \\ -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{k,m}} \frac{\bar{\zeta} d\zeta}{\zeta - z}, & z \notin D_{k,m}. \end{cases}$$

ele alınır. Dört parçadan oluşan $\Gamma_{k,m}$ kapalı eğri için

$$\int_{\Gamma_{k,m}} \frac{\bar{\zeta} d\zeta}{\zeta - z} = \sum_{j=1}^4 \int_{\Gamma_{k,m}^j} \frac{\bar{\zeta} d\zeta}{\zeta - z}$$

olur. Şimdi birinci doğru parçası için

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_{k,m}^1} \frac{\bar{\zeta} d\zeta}{\zeta - z} &= e^{-2i\theta_m} \int_{\Gamma_{k,m}^1} \frac{\zeta d\zeta}{\zeta - z} = e^{-2i\theta_m} \left[\int_{\Gamma_{k,m}^1} d\zeta + z \int_{\Gamma_{k,m}^1} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \right] \\
&= \frac{\overline{z_{0,0}^{k,m}}}{z_{0,0}^{k,m}} \left[z_{1,0}^{k,m} - z_{0,0}^{k,m} + z \ln \frac{z_{1,0}^{k,m} - z}{z_{0,0}^{k,m} - z} \right]
\end{aligned}$$

integrali hesaplanır. İkinci eğri parçası için integral hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_{k,m}^2} \frac{\bar{\zeta} d\zeta}{\zeta - z} &= \int_{\Gamma_{k,m}^1} \frac{r_{k+1} e^{i\theta} d\zeta}{\zeta - z} = r_{k+1}^2 \int_{\Gamma_{k,m}^2} \frac{d\zeta}{\zeta (\zeta - z)} \\
&= \frac{z_{1,0}^{k,m} \overline{z_{1,0}^{k,m}}}{z} \left(\int_{\Gamma_{k,m}^2} \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \int_{\Gamma_{k,m}^2} \frac{d\zeta}{\zeta} \right) \\
&= \frac{z_{1,0}^{k,m} \overline{z_{1,0}^{k,m}}}{z} \left[\ln \frac{z_{1,0}^{k,m} - z}{z_{1,1}^{k,m} - z} - \ln \frac{z_{1,0}^{k,m}}{z_{1,1}^{k,m}} \right] \\
&= \frac{z_{1,0}^{k,m} \overline{z_{1,0}^{k,m}}}{z} \ln \left[\frac{(z_{1,0}^{k,m} - z) z_{1,1}^{k,m}}{(z_{1,1}^{k,m} - z) z_{1,0}^{k,m}} \right].
\end{aligned}$$

Üçüncü doğru parçası için ise

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_{k,m}^3} \frac{\bar{\zeta} d\zeta}{\zeta - z} &= e^{-2i\theta_{m+1}} \int_{\Gamma_{k,m}^3} \frac{\zeta d\zeta}{\zeta - z} = e^{-2i\theta_{m+1}} \left[\int_{\Gamma_{k,m}^3} d\zeta + z \int_{\Gamma_{k,m}^3} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \right] \\
&= \frac{\overline{z_{1,1}^{k,m}}}{z_{1,1}^{k,m}} \left[z_{0,1}^{k,m} - z_{1,1}^{k,m} + z \ln \frac{z_{0,1}^{k,m} - z}{z_{1,1}^{k,m} - z} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Dördüncü eğri parçası için integral

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_{k,m}^4} \frac{\overline{\zeta} d\zeta}{\zeta - z} &= r_k^2 \int_{\Gamma_{k,m}^4} \frac{d\zeta}{\zeta(\zeta - z)} \\
&= \frac{z_{0,1}^{k,m} \overline{z_{0,1}^{k,m}}}{z} \left(\int_{\Gamma_{k,m}^4} \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \int_{\Gamma_{k,m}^4} \frac{d\zeta}{\zeta} \right) \\
&= \frac{z_{0,1}^{k,m} \overline{z_{0,1}^{k,m}}}{z} \left[\ln \frac{z_{0,1}^{k,m} - z}{z_{0,0}^{k,m} - z} - \ln \frac{z_{0,1}^{k,m}}{z_{0,0}^{k,m}} \right] \\
&= \frac{z_{0,1}^{k,m} \overline{z_{0,1}^{k,m}}}{z} \ln \left[\frac{(z_{0,1}^{k,m} - z) z_{0,0}^{k,m}}{(z_{0,0}^{k,m} - z) z_{0,1}^{k,m}} \right]
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece, Pompeu formüllerine göre $T(\rho|z)$ 'nin yaklaşım değeri

$$T_{k,m}(z) = \begin{cases} z + T_{k,m}(z), & z \in D_{k,m}, \\ T_{k,m}(z), & z \notin D_{k,m} \end{cases}$$

biçiminde hesaplanır. Burada $z \neq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
T_{k,m}(z) &= \frac{\overline{z_{0,0}^{k,m}}}{z_{0,0}^{k,m}} \left[z_{1,0}^{k,m} - z_{0,0}^{k,m} + z \ln \frac{z_{1,0}^{k,m} - z}{z_{0,0}^{k,m} - z} \right] + z_{1,1}^{k,m} \frac{\overline{z_{1,1}^{k,m}}}{z_{1,1}^{k,m}} \frac{1}{z} \ln \frac{(z_{1,1}^{k,m} - z) z_{1,0}^{k,m}}{(z_{1,0}^{k,m} - z) z_{1,1}^{k,m}} \\
&+ \frac{\overline{z_{1,1}^{k,m}}}{z_{1,1}^{k,m}} \left[z_{0,1}^{k,m} - z_{1,1}^{k,m} + z \ln \frac{z_{0,1}^{k,m} - z}{z_{1,1}^{k,m} - z} \right] + \frac{z_{0,0}^{k,m} \overline{z_{0,0}^{k,m}}}{z} \ln \left(\frac{(z_{0,0}^{k,m} - z) z_{0,1}^{k,m}}{(z_{0,1}^{k,m} - z) z_{0,0}^{k,m}} \right)
\end{aligned}$$

şeklindedir.

Teorem 2.1.1. (Ashyralyyev ve Cakir, 2014)

$\rho \in L_2(\overline{K})$ olsun. Potansiyel T integralinin yaklaşım formülünün hatası için

aşağıdaki eşitsizlik doğrudur:

$$\left\| T(\rho|z) - T(\rho|z) \right\|_{L_2(\overline{K})} \leq M\tau.$$

şeklindedir.

2.3. Birinci Mertebe Doğrulukla Potansiyel İntegral için Hata Analizi

$l_2(\Omega^j)(j = 1, 2)$ (2.1.1) ile tanımlanan norm olmak üzere $T(\rho|z)$ için hata değerini

$$ErrorT = \left\| T\rho^{\tau,h} - (T\rho)^{\tau,h} \right\|_{l_2(\Omega^j)} \quad (2.3.1)$$

şekilde hesaplayacağız.

$T(\rho|z)$ 'nin farklı gerçek değerleri için MATLAB kodları ile hesaplanan hata analizleri Tablo 2.1. ve 2.2. 'de sunulmuştur.

Bu tablolardaki $T(\rho|z)$ 'nin gerçek değerleri, Vekua, I.N.,1962 kitabından alınmıştır ve $T(\rho|z)$ 'nin birinci mertebeden yaklaşımları ile gerçek değerlerin farkının normu verilmiştir. Hesaplamalar $N = 5, 10, 20, 40$ değerleri için yapılmıştır.

Tablo 2.1. ve 2.2.'de görüldüğü gibi N değerleri iki kat değiştiğinde hata $\frac{1}{2}$ civarında azaldığı görülür.

Tablo 2. 1. $T(\rho|z)$ 'nin birinci mertebeden yaklaşımının hata analizi

ρ değeri	$T(\rho z)$ gerçek değeri	Hata			
		N=5	N=10	N=20	N=40
$\bar{z}z$	$\frac{\bar{z}z^{-2}}{2}$	0.1435	0.0555	0.0305	0.0159
$\bar{z}z^{-2}$	$\frac{\bar{z}z^{-3}}{3}$	0.1085	0.0704	0.0394	0.0207
$\bar{z}z^{-3}$	$\frac{\bar{z}z^{-4}}{4}$	0.1106	0.0804	0.0468	0.0250
$\bar{z}$	$\bar{z}z - 1$	0.4114	0.2600	0.1457	0.0773
$\bar{z}$	$\frac{\bar{z}^{-2}}{2}$	0.3079	0.1030	0.0534	0.0271
z^2	$z^2\bar{z} - z$	0.2912	0.1567	0.0810	0.0410
$\bar{z}^{-2}$	$\frac{\bar{z}^{-3}}{3}$	0.1825	0.1146	0.0621	0.0321
$\bar{z}^{-3}$	$\frac{\bar{z}^{-4}}{4}$	0.1549	0.1126	0.0643	0.0338
$z^2\bar{z}$	$\frac{z^2\bar{z}^{-2}}{2} - \frac{1}{2}$	0.2440	0.1344	0.0699	0.0356
$z^2\bar{z}^{-2}$	$\frac{z^2\bar{z}^{-3}}{3}$	0.0732	0.0548	0.0332	0.0182
$z^2\bar{z}^{-3}$	$\frac{z^2\bar{z}^{-4}}{4}$	0.0734	0.0570	0.0349	0.0192
$z^3\bar{z}$	$\frac{z^3\bar{z}^{-2}}{2} - \frac{z}{2}$	0.1926	0.1092	0.0569	0.0290
$z^3\bar{z}^{-2}$	$\frac{z^3\bar{z}^{-3}}{3} - \frac{1}{3}$	0.1916	0.1072	0.0564	0.0289
$z^3\bar{z}^{-3}$	$\frac{z^3\bar{z}^{-4}}{4}$	0.0546	0.0487	0.0324	0.0186
$z^3\bar{z}^{-4}$	$\frac{z^3\bar{z}^{-5}}{5}$	0.0519	0.0478	0.0321	0.0185

Tablo 2. 2. $T(\rho|z)$ 'nin birinci mertebeden yaklaşımının hata analizi devamı

z^3	$z^3\bar{z} - z^2$	0.2432	0.1356	0.0717	0.0364
1	$\bar{z}$	0.8000	0.4000	0.2000	0.1000
$z^2 - \bar{z}^2$	$z^2\bar{z} - z - \frac{\bar{z}^3}{3}$	0.4082	0.1936	0.1008	0.0511

2.4. Birinci Mertebeden Singüler İntegral Yaklaşımları

Bu bölümde singüler integrallerin birinci mertebeden doğruluklu yaklaşımı hesaplanacaktır. Birim yarıçaplı daire küçük bölgelerin birleşimi olarak alınırsa, bu bölgelerde integral değerlerinin hesaplanması gerekir. Verilen ρ fonksiyonu için her $D_{k,m}$ bölgede

$$\rho(z) = \rho_{km}, z \in D_{k,m}, \rho_{km} = \rho(r_k e^{i\theta_{k,m}}), 1 \leq k \leq N-1, 0 \leq m \leq M_{k-1}$$

yaklaşımı kullanılmıştır. Ashyralyyev ve Cakir, (2014) makalesine göre $S(\rho|z)$ 'nin yaklaşımı için:

$$S(\rho|z) \approx S(p|z) = \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{m=0}^{M_k-1} \rho_{km} S_{k,m}(z),$$

geçerlidir.

Burada

$$S_{k,m}(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{D_{k,m}} \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^2}$$

şeklindedir. $z \neq 0$ olmak üzere

$$T_{k,m}(z) = \frac{\overline{z_{0,0}^{k,m}}}{z_{0,0}^{k,m}} \left[z_{1,0}^{k,m} - z_{0,0}^{k,m} + z \ln \frac{z_{1,0}^{k,m} - z}{z_{0,0}^{k,m} - z} \right] + z_{1,1}^{k,m} \overline{z_{1,1}^{k,m}} \frac{1}{z} \ln \frac{(z_{1,1}^{k,m} - z) z_{1,0}^{k,m}}{(z_{1,0}^{k,m} - z) z_{1,1}^{k,m}}$$

$$+ \frac{\overline{z_{1,1}^{k,m}}}{z_{1,1}^{k,m}} \left[z_{0,1}^{k,m} - z_{1,1}^{k,m} + z \ln \frac{z_{0,1}^{k,m} - z}{z_{1,1}^{k,m} - z} \right] + \frac{z_{0,0}^{k,m} \overline{z_{0,0}^{k,m}}}{z} \ln \left(\frac{(z_{0,0}^{k,m} - z) z_{0,1}^{k,m}}{(z_{0,1}^{k,m} - z) z_{0,0}^{k,m}} \right)$$

olduğunu 2.2 alt başlığında göstermiştik. Şimdi $S_{k,m}(z) = \frac{\partial}{\partial z}(T_{k,m}(z))$ ilişkisi

kullanılarak

$$S_{k,m}(z) = -\frac{1}{2\pi i} \left\{ \frac{\overline{z_{0,1}^{k,m}}}{z_{0,1}^{k,m}} \left[\ln \frac{z_{1,1}^{k,m} - z}{z_{0,1}^{k,m} - z} + z \frac{(z_{1,1}^{k,m} - z_{0,1}^{k,m})}{(z_{1,1}^{k,m} - z)(z_{0,1}^{k,m} - z)} \right] \right.$$

$$+ \frac{z_{1,1}^{k,m} \overline{z_{1,1}^{k,m}}}{z} \left[\frac{z_{1,0}^{k,m} - z_{1,1}^{k,m}}{(z_{1,1}^{k,m} - z)(z_{1,0}^{k,m} - z)} + \frac{1}{z} \ln \frac{(z_{1,1}^{k,m} - z) z_{1,0}^{k,m}}{(z_{1,0}^{k,m} - z) z_{1,1}^{k,m}} \right]$$

$$+ \frac{\overline{z_{1,0}^{k,m}}}{z_{1,0}^{k,m}} \left[\ln \frac{z_{0,0}^{k,m} - z}{z_{1,0}^{k,m} - z} + z \frac{(z_{0,0}^{k,m} - z_{1,0}^{k,m})}{(z_{0,0}^{k,m} - z)(z_{1,0}^{k,m} - z)} \right]$$

$$\left. + \frac{z_{0,1}^{k,m} \overline{z_{0,1}^{k,m}}}{z} \left[\frac{z_{0,1}^{k,m} - z_{0,0}^{k,m}}{(z_{0,0}^{k,m} - z)(z_{0,1}^{k,m} - z)} + \frac{1}{z} \ln \frac{(z_{0,0}^{k,m} - z) z_{0,1}^{k,m}}{(z_{0,1}^{k,m} - z) z_{0,0}^{k,m}} \right] \right\} \quad (2.4.1)$$

elde edilir.

Teorem 2.1.2 (Ashyralyyev ve Cakir, 2014)

$\rho \in L_2(\overline{K})$ olsun. Singüler S integralinin yaklaşım formülünün hatası için

aşağıdaki eşitsizlik doğrudur:

$$\left\| S(\rho|z) - S(\rho|z) \right\|_{L_2(\overline{K})} \leq M\tau.$$

dır.

2.5. Birinci Mertebeden Doğrulukla Singüler İntegral için Hata Analizi

$l_2(\Omega^j)$ ($j = 1, 2$) (2.1.1) ile tanımlanan norm olmak üzere $S(\rho|z)$ için hata değerini

$$ErrorS = \left\| S\rho^{\tau,h} - (S\rho)^{\tau,h} \right\|_{l_2(\Omega^j)} \quad (2.5.1)$$

şekilde hesaplayacağız.

$S(\rho|z)$ 'nin farklı gerçek değerleri için MATLAB kodları ile hesaplanılan hata analizleri Tablo 2.3. ve 2.4.'de verilmiştir.

$S(\rho|z)$ 'nin birinci mertebeden yaklaşımları ile gerçek değerlerin farkının normu sunulmuştur. Hesaplamalar $N = 5, 10, 20, 40$ değerleri için yapılmıştır.

Tablo 2.3. ve 2.4. 'deki verilere göre, N değerleri iki kat büyüdüğünde hatanın $\frac{1}{2}$ civarlarında azaldığı görülür.

Tablo 2.3. $S(\rho|z)$ 'nin birinci mertebeden yaklaşımının hata analizi

ρz	$S(\rho z)$	Yaklaşım hataları			
		N=5	N=10	N=20	N=40
$\frac{-2}{z\bar{z}}$	$\frac{-2}{z\bar{z}}$	0.0971	0.0327	0.0115	0.0041
$\frac{-2}{z\bar{z}}$	$\frac{-3}{z\bar{z}}$	0.1083	0.0433	0.0164	0.0060
$\frac{-3}{z\bar{z}}$	$\frac{-4}{z\bar{z}}$	0.1283	0.0483	0.0191	0.0072
z	$\frac{-1}{z}$	0.2422	0.0858	0.0303	0.0107
$\frac{-1}{z}$	0	0.2182	0.1844	0.0269	0.0095
z^2	$2z\bar{z}-1$	0.2848	0.1209	0.0464	0.0171
$\frac{-2}{z\bar{z}}$	0	0.1683	0.0550	0.0207	0.0076
$\frac{-3}{z\bar{z}}$	0	0.1851	0.0640	0.0221	0.0083
$z^2\bar{z}$	$\frac{-2}{z\bar{z}}$	0.2035	0.0801	0.0298	0.0108

Tablo 2.4. $S(\rho|z)$ 'nin birinci mertebeden yaklaşımının hata analizi devamı

$z^2 \bar{z}^{-2}$	$\frac{2}{3} z \bar{z}^{-3}$	0.1440	0.0563	0.0208
$z^2 \bar{z}^{-3}$	$\frac{1}{2} z \bar{z}^{-4}$	0.1412	0.0595	0.0230
$z^3 \bar{z}^{-2}$	$\frac{3}{2} z^2 \bar{z}^{-2} - \frac{1}{2}$	0.2131	0.0951	0.0374
$z^3 \bar{z}^{-2}$	$z^2 \bar{z}^{-3}$	0.1993	0.0848	0.0328
$z^3 \bar{z}^{-3}$	$\frac{3}{4} z^2 \bar{z}^{-4}$	0.1619	0.0692	0.0267
$z^3 \bar{z}^{-4}$	$\frac{3}{5} z^2 \bar{z}^{-5}$	0.1525	0.0692	0.0276
z^3	$3z^2 \bar{z} - 2z$	0.2708	0.1100	0.0435
1	0	0.3790	0.1895	0.0947
$z^2 - \bar{z}^{-2}$	$2z \bar{z} - 1$	0.2978	0.1228	0.0468

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

3.1. $T(\rho|z)$ Potansiyel İntegralin İkinci Mertebeden Doğrulukla Yaklaşımı

Şimdi $D_{k,m}$ bölgede iki değişkenli $\rho(x, y)$ fonksiyonu birinci mertebeden doğrulukla iki boyutlu spline ile yaklaştıralım:

$$\rho(x, y) \approx \rho(x, y) = \alpha_{km} x + \beta_{km} y + \gamma_{km} xy + \eta_{km} \quad , \quad z = x + iy \in D_{k,m}.$$

$\alpha_{km}, \beta_{km}, \gamma_{km}$ ve η_{km} katsayılarının spline değerleri Zavyalov, Kvasov ve Miroshnichenko, (1980); Ashyralyev, (1994) kitaplarındaki gibi

$$z_{0,0}^{k,m} = r_k e^{i\theta_{k,m}}, \quad z_{1,0}^{k,m} = r_{k+1} e^{i\theta_{k,m}}, \quad z_{1,1}^{k,m} = r_{k+1} e^{i\theta_{k,m+1}}, \quad z_{0,1}^{k,m} = r_k e^{i\theta_{k,m+1}}$$

köşe noktalarında, fonksiyonun değerlerine eşit olması koşulundan elde edilecektir.

Bu noktalardaki değerleri yerine koyarsak,

$$\begin{aligned} \rho(r_k \cos \theta_{k,m}, r_k \sin \theta_{k,m}) &\approx \alpha_{km} r_k \cos \theta_{k,m} + \beta_{km} r_k \sin \theta_{k,m} + \\ &+ \gamma_{km} r_k^2 \cos \theta_{k,m} \sin \theta_{k,m} + \eta_{km} \quad , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho(r_k \cos \theta_{k,m+1}, r_k \sin \theta_{k,m+1}) &\approx \alpha_{km} r_k \cos \theta_{k,m+1} + \beta_{km} r_k \sin \theta_{k,m+1} + \\ &+ \gamma_{km} r_k^2 \cos \theta_{k,m+1} \sin \theta_{k,m+1} + \eta_{km} \quad , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho(r_{k+1} \cos \theta_{k,m+1}, r_{k+1} \sin \theta_{k,m+1}) &\approx \alpha_{km} r_{k+1} \cos \theta_{k,m+1} + \beta_{km} r_{k+1} \sin \theta_{k,m+1} + \\ &+ \gamma_{km} r_{k+1}^2 \cos \theta_{k,m+1} \sin \theta_{k,m+1} + \eta_{km} \quad , \end{aligned}$$

$$\rho(r_{k+1} \cos \theta_{k,m}, r_{k+1} \sin \theta_{k,m}) \approx \alpha_{km} r_{k+1} \cos \theta_{k,m} + \beta_{km} r_{k+1} \sin \theta_{k,m} + \gamma_{km} r_{k+1}^2 \cos \theta_{k,m} \sin \theta_{k,m} + \eta_{km}$$

olur.

Bu takdirde , $z = x + iy$ alınır

$$\rho(x, y) \approx \rho(z) = \alpha_{km} \frac{z + \bar{z}}{2} + \beta_{km} \frac{z - \bar{z}}{2i} + \gamma_{km} \frac{z + \bar{z}}{2} \cdot \frac{z - \bar{z}}{2i} + \eta_{km}$$

olur. Buna göre,

$$a_{k,m} = \frac{\alpha_{km} - \beta_{km}i}{2},$$

$$b_{k,m} = \frac{\alpha_{km} + \beta_{km}i}{2},$$

$$c_{k,m} = -\frac{\gamma_{km}i}{4},$$

$$d_{k,m} = \eta_{km}$$

olmak üzere

$$\rho(z) \approx \rho(z) = a_{km} z + b_{km} \bar{z} + c_{km} (z^2 - \bar{z}^2) + d_{km}, \quad z \in D_{k,m}$$

elde edilir. Burada $a_{k,m}$, $b_{k,m}$, $c_{k,m}$ ve $d_{k,m}$ katsayıları, köşe noktalarında fonksiyonun değeri ile aynı değere sahip olma şartlarından hesaplanacaktır. Yani,

$$\begin{aligned}
\rho(z_{0,0}^{k,m}) &= a_{km} z_{0,0}^{k,m} + b_{km} \overline{z_{0,0}^{k,m}} + c_{km} \left[\left(z_{0,0}^{k,m} \right)^2 - \overline{z_{0,0}^{k,m}}^2 \right] + d_{km}, \\
\rho(z_{1,0}^{k,m}) &= a_{km} z_{1,0}^{k,m} + b_{km} \overline{z_{1,0}^{k,m}} + c_{km} \left[\left(z_{1,0}^{k,m} \right)^2 - \overline{z_{1,0}^{k,m}}^2 \right] + d_{km}, \\
\rho(z_{1,1}^{k,m}) &= a_{km} z_{1,1}^{k,m} + b_{km} \overline{z_{1,1}^{k,m}} + c_{km} \left[\left(z_{1,1}^{k,m} \right)^2 - \overline{z_{1,1}^{k,m}}^2 \right] + d_{km}, \\
\rho(z_{0,1}^{k,m}) &= a_{km} z_{0,1}^{k,m} + b_{km} \overline{z_{0,1}^{k,m}} + c_{km} \left[\left(z_{0,1}^{k,m} \right)^2 - \overline{z_{0,1}^{k,m}}^2 \right] + d_{km}.
\end{aligned} \tag{3.1.1}$$

(3.1.1) lineer denklem sisteminin çözümünü sembolik Matlab kodları kullanılarak aşağıdaki biçimde bulunmuştur.

$$\begin{aligned}
Q_{k,m} &= z_{0,0}^{k,m} \cdot \left(z_{0,1}^{k,m} \right)^2 \cdot \overline{z_{1,0}^{k,m}} - z_{0,0}^{k,m} \cdot \left(z_{1,0}^{k,m} \right)^2 \cdot \overline{z_{0,1}^{k,m}} + z_{0,1}^{k,m} \cdot \left(z_{1,0}^{k,m} \right)^2 \cdot \overline{z_{0,0}^{k,m}} \\
&\quad - \left(z_{0,0}^{k,m} \right)^2 \cdot z_{0,1}^{k,m} \cdot \overline{z_{1,0}^{k,m}} + \left(z_{0,0}^{k,m} \right)^2 \cdot z_{1,0}^{k,m} \cdot \overline{z_{0,1}^{k,m}} - \left(z_{0,1}^{k,m} \right)^2 \cdot z_{1,0}^{k,m} \cdot \overline{z_{0,0}^{k,m}} - z_{0,0}^{k,m} \cdot \left(z_{0,1}^{k,m} \right)^2 \cdot \overline{z_{1,1}^{k,m}} \\
&\quad + z_{0,0}^{k,m} \left(z_{1,1}^{k,m} \right)^2 \cdot \overline{z_{0,1}^{k,m}} - z_{0,1}^{k,m} \cdot \left(z_{1,1}^{k,m} \right)^2 \cdot \overline{z_{0,0}^{k,m}} + \left(z_{0,0}^{k,m} \right)^2 \cdot z_{0,1}^{k,m} \cdot \overline{z_{1,1}^{k,m}} - \left(z_{0,0}^{k,m} \right)^2 \cdot z_{1,1}^{k,m} \cdot \overline{z_{0,1}^{k,m}} \\
&\quad + \left(z_{0,1}^{k,m} \right)^2 \cdot z_{1,1}^{k,m} \cdot \overline{z_{0,0}^{k,m}} + z_{0,0}^{k,m} \cdot \left(z_{1,0}^{k,m} \right)^2 \cdot \overline{z_{1,1}^{k,m}} - z_{0,0}^{k,m} \cdot \left(z_{1,1}^{k,m} \right)^2 \cdot \overline{z_{1,0}^{k,m}} + z_{1,0}^{k,m} \cdot \left(z_{1,1}^{k,m} \right)^2 \cdot \overline{z_{0,0}^{k,m}} \\
&\quad - \left(z_{0,0}^{k,m} \right)^2 \cdot z_{1,0}^{k,m} \cdot \overline{z_{1,1}^{k,m}} + \left(z_{0,0}^{k,m} \right)^2 \cdot z_{1,1}^{k,m} \cdot \overline{z_{1,0}^{k,m}} - \left(z_{1,0}^{k,m} \right)^2 \cdot z_{1,1}^{k,m} \cdot \overline{z_{0,0}^{k,m}} - z_{0,1}^{k,m} \cdot \left(z_{1,0}^{k,m} \right)^2 \cdot \overline{z_{1,1}^{k,m}} \\
&\quad + z_{0,1}^{k,m} \cdot \left(z_{1,1}^{k,m} \right)^2 \cdot \overline{z_{1,0}^{k,m}} - z_{1,0}^{k,m} \cdot \left(z_{1,1}^{k,m} \right)^2 \cdot \overline{z_{0,1}^{k,m}} + \left(z_{0,1}^{k,m} \right)^2 \cdot z_{1,0}^{k,m} \cdot \overline{z_{1,1}^{k,m}} - \left(z_{0,1}^{k,m} \right)^2 \cdot z_{1,1}^{k,m} \cdot \overline{z_{1,0}^{k,m}} \\
&\quad + \left(z_{1,0}^{k,m} \right)^2 \cdot z_{1,1}^{k,m} \cdot \overline{z_{0,1}^{k,m}} + z_{0,0}^{k,m} \cdot \overline{z_{0,1}^{k,m}} \cdot \left(\overline{z_{1,0}^{k,m}} \right)^2 - z_{0,0}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{0,1}^{k,m}} \right)^2 \cdot \overline{z_{1,0}^{k,m}} \\
&\quad - z_{0,1}^{k,m} \cdot \overline{z_{0,0}^{k,m}} \cdot \left(\overline{z_{1,0}^{k,m}} \right)^2 + z_{0,1}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{0,0}^{k,m}} \right)^2 \cdot \overline{z_{1,0}^{k,m}} + z_{1,0}^{k,m} \cdot \overline{z_{0,0}^{k,m}} \cdot \left(\overline{z_{0,1}^{k,m}} \right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -z_{1,0}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{0,0}^{k,m}}\right)^2 \cdot \overline{z_{0,1}^{k,m}} - z_{0,0}^{k,m} \cdot \overline{z_{0,1}^{k,m}} \cdot \left(\overline{z_{1,1}^{k,m}}\right)^2 + z_{0,0}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{0,1}^{k,m}}\right)^2 \cdot \overline{z_{1,1}^{k,m}} \\
& + z_{0,1}^{k,m} \cdot \overline{z_{0,0}^{k,m}} \cdot \left(\overline{z_{1,1}^{k,m}}\right)^2 - z_{0,1}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{0,0}^{k,m}}\right)^2 \cdot \overline{z_{1,1}^{k,m}} - z_{1,1}^{k,m} \cdot \overline{z_{0,0}^{k,m}} \cdot \left(\overline{z_{0,1}^{k,m}}\right)^2 \\
& + z_{1,1}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{0,0}^{k,m}}\right)^2 \cdot \overline{z_{0,1}^{k,m}} + z_{0,0}^{k,m} \cdot \overline{z_{1,0}^{k,m}} \cdot \left(\overline{z_{1,1}^{k,m}}\right)^2 - z_{0,0}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{1,0}^{k,m}}\right)^2 \cdot \overline{z_{1,1}^{k,m}} \\
& - z_{1,0}^{k,m} \cdot \overline{z_{0,0}^{k,m}} \cdot \left(\overline{z_{1,1}^{k,m}}\right)^2 + z_{1,0}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{0,0}^{k,m}}\right)^2 \cdot \overline{z_{1,1}^{k,m}} + z_{1,1}^{k,m} \cdot \overline{z_{0,0}^{k,m}} \cdot \left(\overline{z_{1,0}^{k,m}}\right)^2 \\
& - z_{1,1}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{0,0}^{k,m}}\right)^2 \cdot \overline{z_{1,0}^{k,m}} - z_{0,1}^{k,m} \cdot \overline{z_{1,0}^{k,m}} \cdot \left(\overline{z_{1,1}^{k,m}}\right)^2 + z_{0,1}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{1,0}^{k,m}}\right)^2 \cdot \overline{z_{1,1}^{k,m}} \\
& + z_{1,0}^{k,m} \cdot \overline{z_{0,1}^{k,m}} \cdot \left(\overline{z_{1,1}^{k,m}}\right)^2 - z_{1,0}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{0,1}^{k,m}}\right)^2 \cdot \overline{z_{1,1}^{k,m}} - z_{1,1}^{k,m} \cdot \overline{z_{0,1}^{k,m}} \cdot \left(\overline{z_{1,0}^{k,m}}\right)^2 \\
& + z_{1,1}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{0,1}^{k,m}}\right)^2 \cdot \overline{z_{1,0}^{k,m}} \Big)
\end{aligned} \tag{3.1.2}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
a_{k,m} &= Q_{k,m}^{-1} \cdot \left(r_{0,0}^{k,m} \cdot \left(z_{0,1}^{k,m}\right)^2 \cdot \overline{z_{1,0}^{k,m}} - r_{0,0}^{k,m} \cdot \left(z_{1,0}^{k,m}\right)^2 \cdot \overline{z_{0,1}^{k,m}} - r_{0,1}^{k,m} \cdot \left(z_{0,0}^{k,m}\right)^2 \cdot \overline{z_{1,0}^{k,m}} \right. \\
& + r_{0,1}^{k,m} \cdot \left(z_{1,0}^{k,m}\right)^2 \cdot \overline{z_{0,0}^{k,m}} + r_{1,0}^{k,m} \cdot \left(z_{0,0}^{k,m}\right)^2 \cdot \overline{z_{0,1}^{k,m}} - r_{1,0}^{k,m} \cdot \left(z_{0,1}^{k,m}\right)^2 \cdot \overline{z_{0,0}^{k,m}} \\
& - r_{0,0}^{k,m} \cdot \left(z_{0,1}^{k,m}\right)^2 \cdot \overline{z_{1,1}^{k,m}} + r_{0,0}^{k,m} \cdot \left(z_{1,1}^{k,m}\right)^2 \cdot \overline{z_{0,1}^{k,m}} \\
& + r_{0,1}^{k,m} \cdot \left(z_{0,0}^{k,m}\right)^2 \cdot \overline{z_{1,1}^{k,m}} - r_{0,1}^{k,m} \cdot \left(z_{1,1}^{k,m}\right)^2 \cdot \overline{z_{0,0}^{k,m}} - r_{1,1}^{k,m} \cdot \left(z_{0,0}^{k,m}\right)^2 \cdot \overline{z_{0,1}^{k,m}} + \\
& \left. + r_{1,1}^{k,m} \cdot \left(z_{0,1}^{k,m}\right)^2 \cdot \overline{z_{0,0}^{k,m}} \right)
\end{aligned}$$

$$+r_{0,0}^{k,m} \cdot \left(z_{1,0}^{k,m}\right)^2 \cdot \overline{z_{1,1}^{k,m}} - r_{0,0}^{k,m} \cdot \left(z_{1,1}^{k,m}\right)^2 \cdot \overline{z_{1,0}^{k,m}} - r_{1,0}^{k,m} \cdot \left(z_{0,0}^{k,m}\right)^2 \cdot \overline{z_{1,1}^{k,m}} +$$

$$+r_{1,0}^{k,m} \cdot \left(z_{1,1}^{k,m}\right)^2 \cdot \overline{z_{0,0}^{k,m}}$$

$$+r_{1,1}^{k,m} \cdot \left(z_{0,0}^{k,m}\right)^2 \cdot \overline{z_{1,0}^{k,m}} - r_{1,1}^{k,m} \cdot \left(z_{1,0}^{k,m}\right)^2 \cdot \overline{z_{0,0}^{k,m}} - r_{0,1}^{k,m} \cdot \left(z_{1,0}^{k,m}\right)^2 \cdot \overline{z_{1,1}^{k,m}} +$$

$$+r_{0,1}^{k,m} \cdot \left(z_{1,1}^{k,m}\right)^2 \cdot \overline{z_{1,0}^{k,m}}$$

$$+r_{0,0}^{k,m} \cdot \left(z_{1,0}^{k,m}\right)^2 \cdot \overline{z_{1,1}^{k,m}} - r_{0,0}^{k,m} \cdot \left(z_{1,1}^{k,m}\right)^2 \cdot \overline{z_{1,0}^{k,m}} - r_{1,0}^{k,m} \cdot \left(z_{0,0}^{k,m}\right)^2 \cdot \overline{z_{1,1}^{k,m}} +$$

$$+r_{1,0}^{k,m} \cdot \left(z_{1,1}^{k,m}\right)^2 \cdot \overline{z_{0,0}^{k,m}}$$

$$+r_{1,1}^{k,m} \cdot \left(z_{0,0}^{k,m}\right)^2 \cdot \overline{z_{1,0}^{k,m}} - r_{1,1}^{k,m} \cdot \left(z_{1,0}^{k,m}\right)^2 \cdot \overline{z_{0,0}^{k,m}} - r_{0,1}^{k,m} \cdot \left(z_{1,0}^{k,m}\right)^2 \cdot \overline{z_{1,1}^{k,m}} +$$

$$+r_{0,1}^{k,m} \cdot \left(z_{1,1}^{k,m}\right)^2 \cdot \overline{z_{1,0}^{k,m}}$$

$$+r_{1,0}^{k,m} \cdot \left(z_{0,1}^{k,m}\right)^2 \cdot \overline{z_{1,1}^{k,m}} - r_{1,0}^{k,m} \cdot \left(z_{1,1}^{k,m}\right)^2 \cdot \overline{z_{0,1}^{k,m}} - r_{1,1}^{k,m} \cdot \left(z_{0,1}^{k,m}\right)^2 \cdot \overline{z_{1,0}^{k,m}} +$$

$$+r_{1,1}^{k,m} \cdot \left(z_{1,0}^{k,m}\right)^2 \cdot \overline{z_{0,1}^{k,m}}$$

$$+r_{0,0}^{k,m} \cdot \overline{z_{0,1}^{k,m}} \cdot \left(\overline{z_{1,0}^{k,m}}\right)^2 - r_{0,0}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{0,1}^{k,m}}\right)^2 \cdot \overline{z_{1,0}^{k,m}} - r_{0,1}^{k,m} \cdot \overline{z_{0,0}^{k,m}} \cdot \left(\overline{z_{1,0}^{k,m}}\right)^2$$

$$+r_{0,1}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{0,0}^{k,m}}\right)^2 \cdot \overline{z_{1,0}^{k,m}} + r_{1,0}^{k,m} \cdot \overline{z_{0,0}^{k,m}} \cdot \left(\overline{z_{0,1}^{k,m}}\right)^2 - r_{1,0}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{0,0}^{k,m}}\right)^2 \cdot \left(\overline{z_{0,1}^{k,m}}\right)^2$$

$$-r_{0,0}^{k,m} \cdot \overline{z_{0,1}^{k,m}} \cdot \left(\overline{z_{1,1}^{k,m}}\right)^2 + r_{0,0}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{0,1}^{k,m}}\right)^2 \cdot \overline{z_{1,1}^{k,m}} + r_{0,1}^{k,m} \cdot \overline{z_{0,0}^{k,m}} \cdot \left(\overline{z_{1,1}^{k,m}}\right)^2$$

$$\begin{aligned}
& -r_{0,1}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{0,0}^{k,m}}\right)^2 \cdot \overline{z_{1,1}^{k,m}} - r_{1,1}^{k,m} \cdot \overline{z_{0,0}^{k,m}} \cdot \left(\overline{z_{0,1}^{k,m}}\right)^2 + r_{1,1}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{0,0}^{k,m}}\right)^2 \cdot \overline{z_{0,1}^{k,m}} \\
& + r_{0,0}^{k,m} \cdot \overline{z_{1,0}^{k,m}} \cdot \left(\overline{z_{1,1}^{k,m}}\right)^2 - r_{0,0}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{1,0}^{k,m}}\right)^2 \cdot \overline{z_{1,1}^{k,m}} - r_{1,0}^{k,m} \cdot \overline{z_{0,0}^{k,m}} \cdot \left(\overline{z_{1,1}^{k,m}}\right)^2 \\
& + r_{1,0}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{0,0}^{k,m}}\right)^2 \cdot \overline{z_{1,1}^{k,m}} + r_{1,1}^{k,m} \cdot \overline{z_{0,0}^{k,m}} \cdot \left(\overline{z_{1,0}^{k,m}}\right)^2 - r_{1,1}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{0,0}^{k,m}}\right)^2 \cdot \overline{z_{1,0}^{k,m}} \\
& - r_{0,1}^{k,m} \cdot \overline{z_{1,0}^{k,m}} \cdot \left(\overline{z_{1,1}^{k,m}}\right)^2 + r_{0,1}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{1,0}^{k,m}}\right)^2 \cdot \overline{z_{1,1}^{k,m}} + r_{1,0}^{k,m} \cdot \overline{z_{0,1}^{k,m}} \cdot \left(\overline{z_{1,1}^{k,m}}\right)^2 \\
& - r_{1,0}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{0,1}^{k,m}}\right)^2 \cdot \overline{z_{1,1}^{k,m}} - r_{1,1}^{k,m} \cdot \overline{z_{0,1}^{k,m}} \cdot \left(\overline{z_{1,0}^{k,m}}\right)^2 + r_{1,1}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{0,1}^{k,m}}\right)^2 \cdot \overline{z_{1,0}^{k,m}} \Big), \tag{3.1.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{k,m} &= Q_{k,m}^{-1} \cdot \left(r_{0,0}^{k,m} \cdot z_{0,1}^{k,m} \cdot \left(z_{1,0}^{k,m}\right)^2 - r_{0,0}^{k,m} \cdot \left(z_{0,1}^{k,m}\right)^2 \cdot z_{1,0}^{k,m} - r_{0,1}^{k,m} \cdot z_{0,0}^{k,m} \cdot \left(z_{1,0}^{k,m}\right)^2 \right. \\
& + r_{0,1}^{k,m} \cdot \left(z_{0,0}^{k,m}\right)^2 \cdot z_{1,0}^{k,m} + r_{1,0}^{k,m} \cdot z_{0,0}^{k,m} \cdot \left(z_{0,1}^{k,m}\right)^2 \\
& - r_{1,0}^{k,m} \cdot \left(z_{0,0}^{k,m}\right)^2 \cdot z_{0,1}^{k,m} - r_{0,0}^{k,m} \cdot z_{0,1}^{k,m} \cdot \left(z_{1,1}^{k,m}\right)^2 + r_{0,0}^{k,m} \cdot \left(z_{0,1}^{k,m}\right)^2 \cdot z_{1,1}^{k,m} \\
& + r_{0,1}^{k,m} \cdot z_{0,0}^{k,m} \cdot \left(z_{1,1}^{k,m}\right)^2 - r_{0,1}^{k,m} \cdot \left(z_{0,0}^{k,m}\right)^2 \cdot z_{1,1}^{k,m} \\
& - r_{1,1}^{k,m} \cdot z_{0,0}^{k,m} \cdot \left(z_{0,1}^{k,m}\right)^2 + r_{1,1}^{k,m} \cdot \left(z_{0,0}^{k,m}\right)^2 \cdot z_{0,1}^{k,m} + r_{0,0}^{k,m} \cdot z_{1,0}^{k,m} \cdot \left(z_{1,1}^{k,m}\right)^2 \\
& \left. - r_{1,1}^{k,m} \cdot z_{0,0}^{k,m} \cdot \left(z_{0,1}^{k,m}\right)^2 + r_{1,1}^{k,m} \cdot \left(z_{0,0}^{k,m}\right)^2 \cdot z_{0,1}^{k,m} + r_{0,0}^{k,m} \cdot z_{1,0}^{k,m} \cdot \left(z_{1,1}^{k,m}\right)^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -r_{0,0}^{k,m} \cdot \left(z_{1,0}^{k,m}\right)^2 \cdot z_{1,1}^{k,m} - r_{1,0}^{k,m} \cdot z_{0,0}^{k,m} \cdot \left(z_{1,1}^{k,m}\right)^2 \\
& + r_{1,0}^{k,m} \cdot \left(z_{0,0}^{k,m}\right)^2 \cdot z_{1,1}^{k,m} + r_{1,1}^{k,m} \cdot z_{0,0}^{k,m} \cdot \left(z_{1,0}^{k,m}\right)^2 - r_{1,1}^{k,m} \cdot \left(z_{0,0}^{k,m}\right)^2 \cdot z_{1,0}^{k,m} \\
& - r_{0,1}^{k,m} \cdot z_{1,0}^{k,m} \cdot \left(z_{1,1}^{k,m}\right)^2 + r_{0,1}^{k,m} \cdot \left(z_{1,0}^{k,m}\right)^2 \cdot z_{1,1}^{k,m} + r_{1,0}^{k,m} \cdot z_{0,1}^{k,m} \cdot \left(z_{1,1}^{k,m}\right)^2 \\
& - r_{1,0}^{k,m} \cdot \left(z_{0,1}^{k,m}\right)^2 \cdot z_{1,1}^{k,m} - r_{1,1}^{k,m} \cdot z_{0,1}^{k,m} \cdot \left(z_{1,0}^{k,m}\right)^2 + r_{1,1}^{k,m} \cdot \left(z_{0,1}^{k,m}\right)^2 \cdot z_{1,0}^{k,m} - r_{0,0}^{k,m} \cdot z_{0,1}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{1,0}^{k,m}}\right)^2 \\
& + r_{0,0}^{k,m} \cdot z_{1,0}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{0,1}^{k,m}}\right)^2 + r_{0,1}^{k,m} \cdot z_{0,0}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{1,0}^{k,m}}\right)^2 - r_{0,1}^{k,m} \cdot z_{1,0}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{0,0}^{k,m}}\right)^2 - r_{1,0}^{k,m} \cdot z_{0,0}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{0,1}^{k,m}}\right)^2 \\
& + r_{1,0}^{k,m} \cdot z_{0,1}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{0,0}^{k,m}}\right)^2 + r_{0,0}^{k,m} \cdot z_{0,1}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{1,1}^{k,m}}\right)^2 - r_{0,0}^{k,m} \cdot z_{1,1}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{0,1}^{k,m}}\right)^2 - r_{0,1}^{k,m} \cdot z_{0,0}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{1,1}^{k,m}}\right)^2 \\
& + r_{0,1}^{k,m} \cdot z_{1,1}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{0,0}^{k,m}}\right)^2 + r_{1,1}^{k,m} \cdot z_{0,0}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{0,1}^{k,m}}\right)^2 - r_{1,1}^{k,m} \cdot z_{0,1}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{0,0}^{k,m}}\right)^2 - r_{0,0}^{k,m} \cdot z_{1,0}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{1,1}^{k,m}}\right)^2 \\
& + r_{0,0}^{k,m} \cdot z_{1,1}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{1,0}^{k,m}}\right)^2 + r_{1,0}^{k,m} \cdot z_{0,0}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{1,1}^{k,m}}\right)^2 - r_{1,0}^{k,m} \cdot z_{1,1}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{0,0}^{k,m}}\right)^2 - r_{1,1}^{k,m} \cdot z_{0,0}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{1,0}^{k,m}}\right)^2 \\
& + r_{1,1}^{k,m} \cdot z_{1,0}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{0,0}^{k,m}}\right)^2 + r_{0,1}^{k,m} \cdot z_{1,0}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{1,1}^{k,m}}\right)^2 - r_{0,1}^{k,m} \cdot z_{1,1}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{1,0}^{k,m}}\right)^2 - r_{1,0}^{k,m} \cdot z_{0,1}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{1,1}^{k,m}}\right)^2 \\
& + r_{1,0}^{k,m} \cdot z_{1,1}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{0,1}^{k,m}}\right)^2 + r_{1,1}^{k,m} \cdot z_{0,1}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{1,0}^{k,m}}\right)^2 - r_{1,1}^{k,m} \cdot z_{1,0}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{0,1}^{k,m}}\right)^2 \div z_{0,0}^{k,m} \cdot \left(z_{0,1}^{k,m}\right)^2 \cdot \left(\overline{z_{1,0}^{k,m}}\right) \\
& - z_{0,0}^{k,m} \cdot \left(z_{1,0}^{k,m}\right)^2 \cdot \left(\overline{z_{0,1}^{k,m}}\right) + z_{0,1}^{k,m} \cdot \left(z_{1,0}^{k,m}\right)^2 \cdot \left(\overline{z_{0,0}^{k,m}}\right) - \left(z_{0,0}^{k,m}\right)^2 \cdot z_{0,1}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{1,0}^{k,m}}\right) + \left(z_{0,0}^{k,m}\right)^2 \cdot z_{1,0}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{0,1}^{k,m}}\right) \\
& - \left(z_{1,0}^{k,m}\right)^2 \cdot z_{1,0}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{0,0}^{k,m}}\right) - z_{0,0}^{k,m} \cdot \left(z_{0,1}^{k,m}\right)^2 \cdot \left(\overline{z_{1,1}^{k,m}}\right) + z_{0,0}^{k,m} \cdot \left(z_{1,1}^{k,m}\right)^2 \cdot \left(\overline{z_{0,1}^{k,m}}\right) - z_{0,1}^{k,m} \cdot \left(z_{1,1}^{k,m}\right)^2 \cdot \left(\overline{z_{0,0}^{k,m}}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(z_{0,0}^{k,m} \right)^2 \cdot z_{0,1}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{1,1}^{k,m}} \right) - \left(z_{0,0}^{k,m} \right)^2 \cdot z_{1,1}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{0,1}^{k,m}} \right) + \left(z_{0,1}^{k,m} \right)^2 \cdot z_{1,1}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{0,0}^{k,m}} \right) + z_{0,0}^{k,m} \cdot \left(z_{1,0}^{k,m} \right)^2 \cdot \left(\overline{z_{1,1}^{k,m}} \right) \\
& - z_{0,0}^{k,m} \cdot \left(z_{1,1}^{k,m} \right)^2 \cdot \left(\overline{z_{1,0}^{k,m}} \right) + z_{1,0}^{k,m} \cdot \left(z_{1,1}^{k,m} \right)^2 \cdot \left(\overline{z_{0,0}^{k,m}} \right) - \left(z_{0,0}^{k,m} \right)^2 \cdot z_{1,0}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{1,1}^{k,m}} \right) + \left(z_{0,0}^{k,m} \right)^2 \cdot z_{1,1}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{1,0}^{k,m}} \right) \\
& (3.1.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{k,m} = Q^{-1}_{k,m} \cdot & \left(- \left(r_{0,0}^{k,m} \cdot z_{0,1}^{k,m} \cdot \overline{z_{1,0}^{k,m}} - r_{0,0}^{k,m} \cdot z_{1,0}^{k,m} \cdot \overline{z_{0,1}^{k,m}} - r_{0,1}^{k,m} \cdot z_{0,0}^{k,m} \cdot \overline{z_{1,0}^{k,m}} + \right. \right. \\
& + r_{0,1}^{k,m} \cdot z_{1,0}^{k,m} \cdot \overline{z_{0,0}^{k,m}} \\
& - r_{0,1}^{k,m} \cdot z_{1,1}^{k,m} \cdot \overline{z_{0,0}^{k,m}} - r_{1,1}^{k,m} \cdot z_{0,0}^{k,m} \cdot \overline{z_{0,1}^{k,m}} + r_{1,1}^{k,m} \cdot z_{0,1}^{k,m} \cdot \overline{z_{0,0}^{k,m}} + r_{0,0}^{k,m} \cdot z_{1,0}^{k,m} \cdot \overline{z_{1,1}^{k,m}} \\
& - r_{0,0}^{k,m} \cdot z_{1,1}^{k,m} \cdot \overline{z_{1,0}^{k,m}} - r_{1,0}^{k,m} \cdot z_{0,0}^{k,m} \cdot \overline{z_{1,1}^{k,m}} + r_{1,0}^{k,m} \cdot z_{1,1}^{k,m} \cdot \overline{z_{0,0}^{k,m}} + r_{1,1}^{k,m} \cdot z_{0,0}^{k,m} \cdot \overline{z_{1,0}^{k,m}} - \\
& r_{1,1}^{k,m} \cdot z_{1,0}^{k,m} \cdot \overline{z_{0,0}^{k,m}}, \\
& - r_{0,1}^{k,m} \cdot z_{1,0}^{k,m} \cdot \overline{z_{1,1}^{k,m}} + r_{0,1}^{k,m} \cdot z_{1,1}^{k,m} \cdot \overline{z_{1,0}^{k,m}} + r_{1,0}^{k,m} \cdot z_{0,1}^{k,m} \cdot \overline{z_{1,1}^{k,m}} - r_{1,0}^{k,m} \cdot z_{1,1}^{k,m} \cdot \overline{z_{0,1}^{k,m}} \\
& \left. - r_{1,1}^{k,m} \cdot z_{0,1}^{k,m} \cdot \overline{z_{1,0}^{k,m}} + r_{1,1}^{k,m} \cdot z_{1,0}^{k,m} \cdot \overline{z_{0,1}^{k,m}} \right), \tag{3.1.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{k,m} = Q^{-1}_{k,m} \cdot & \left(r_{0,0}^{k,m} \cdot z_{0,1}^{k,m} \cdot \left(z_{1,0}^{k,m} \right)^2 \cdot \overline{z_{1,1}^{k,m}} - r_{0,0}^{k,m} \cdot z_{0,1}^{k,m} \cdot \left(z_{1,1}^{k,m} \right)^2 \cdot \overline{z_{1,0}^{k,m}} + \right. \\
& + r_{0,0}^{k,m} \cdot z_{1,0}^{k,m} \cdot \left(z_{1,1}^{k,m} \right)^2 \cdot \overline{z_{0,1}^{k,m}} \\
& - r_{0,0}^{k,m} \cdot \left(z_{0,1}^{k,m} \right)^2 \cdot z_{1,0}^{k,m} \cdot \overline{z_{1,1}^{k,m}} + r_{0,0}^{k,m} \cdot \left(z_{0,1}^{k,m} \right)^2 \cdot z_{1,1}^{k,m} \cdot \overline{z_{1,0}^{k,m}} \\
& \left. - r_{0,0}^{k,m} \cdot \left(z_{1,0}^{k,m} \right)^2 \cdot z_{1,1}^{k,m} \cdot \overline{z_{0,1}^{k,m}} - r_{0,1}^{k,m} \cdot z_{0,0}^{k,m} \cdot \left(z_{1,0}^{k,m} \right)^2 \cdot \overline{z_{1,1}^{k,m}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +r_{0,1}^{k,m} \cdot z_{0,0}^{k,m} \cdot \left(z_{1,1}^{k,m}\right)^2 \cdot \overline{z_{1,0}^{k,m}} - r_{1,0}^{k,m} \cdot z_{1,0}^{k,m} \cdot \left(z_{1,1}^{k,m}\right)^2 \cdot \overline{z_{0,0}^{k,m}} \\
& +r_{0,1}^{k,m} \cdot \left(z_{0,0}^{k,m}\right)^2 \cdot z_{1,0}^{k,m} \cdot \overline{z_{1,1}^{k,m}} - r_{0,1}^{k,m} \cdot \left(z_{0,0}^{k,m}\right)^2 \cdot z_{1,1}^{k,m} \cdot \overline{z_{1,0}^{k,m}} + \\
& +r_{0,1}^{k,m} \cdot \left(z_{1,0}^{k,m}\right)^2 \cdot z_{1,1}^{k,m} \cdot \overline{z_{0,0}^{k,m}} \\
& +r_{1,0}^{k,m} \cdot z_{0,0}^{k,m} \cdot \left(z_{0,1}^{k,m}\right)^2 \cdot \overline{z_{1,1}^{k,m}} - r_{1,0}^{k,m} \cdot z_{0,0}^{k,m} \cdot \left(z_{1,1}^{k,m}\right)^2 \cdot \overline{z_{0,1}^{k,m}} + \\
& +r_{1,0}^{k,m} \cdot z_{0,1}^{k,m} \cdot \left(z_{1,1}^{k,m}\right)^2 \cdot \overline{z_{0,0}^{k,m}} \\
& -r_{1,0}^{k,m} \cdot \left(z_{0,0}^{k,m}\right)^2 \cdot z_{0,1}^{k,m} \cdot \overline{z_{1,1}^{k,m}} + r_{1,0}^{k,m} \cdot \left(z_{0,0}^{k,m}\right)^2 \cdot z_{1,1}^{k,m} \cdot \overline{z_{0,1}^{k,m}} \\
& -r_{1,0}^{k,m} \cdot \left(z_{0,1}^{k,m}\right)^2 \cdot z_{1,1}^{k,m} \cdot \overline{z_{0,0}^{k,m}} - r_{1,1}^{k,m} \cdot z_{0,0}^{k,m} \cdot \left(z_{0,1}^{k,m}\right)^2 \cdot \overline{z_{1,0}^{k,m}} + \\
& +r_{1,1}^{k,m} \cdot z_{0,0}^{k,m} \cdot \left(z_{1,0}^{k,m}\right)^2 \cdot \overline{z_{0,1}^{k,m}} \\
& +r_{1,1}^{k,m} \cdot z_{0,1}^{k,m} \cdot \left(z_{1,0}^{k,m}\right)^2 \cdot \overline{z_{0,0}^{k,m}} + r_{1,1}^{k,m} \cdot \left(z_{0,0}^{k,m}\right)^2 \cdot z_{0,1}^{k,m} \cdot \overline{z_{1,0}^{k,m}} \\
& -r_{1,1}^{k,m} \cdot \left(z_{0,0}^{k,m}\right)^2 \cdot z_{1,0}^{k,m} \cdot \overline{z_{0,1}^{k,m}} + r_{1,1}^{k,m} \cdot \left(z_{0,1}^{k,m}\right)^2 \cdot \overline{z_{0,0}^{k,m}} \\
& +r_{0,0}^{k,m} \cdot z_{0,1}^{k,m} \cdot \overline{z_{1,0}^{k,m}} \cdot \left(\overline{z_{1,1}^{k,m}}\right)^2 - r_{0,0}^{k,m} \cdot z_{0,1}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{1,0}^{k,m}}\right)^2 \cdot \overline{z_{1,1}^{k,m}} - \\
& -r_{0,0}^{k,m} \cdot z_{1,0}^{k,m} \cdot \overline{z_{0,1}^{k,m}} \cdot \left(\overline{z_{1,1}^{k,m}}\right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +r_{0,0}^{k,m} \cdot z_{1,0}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{0,1}^{k,m}}\right)^2 \cdot \overline{z_{1,1}^{k,m}} + r_{0,0}^{k,m} \cdot z_{1,1}^{k,m} \cdot \overline{z_{0,1}^{k,m}} \cdot \left(\overline{z_{1,0}^{k,m}}\right)^2 - \\
& -r_{0,0}^{k,m} \cdot z_{1,1}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{0,1}^{k,m}}\right)^2 \cdot \overline{z_{1,0}^{k,m}} \\
& -r_{0,1}^{k,m} \cdot z_{0,0}^{k,m} \cdot \overline{z_{1,0}^{k,m}} \cdot \left(\overline{z_{1,1}^{k,m}}\right)^2 + r_{0,1}^{k,m} \cdot z_{0,0}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{1,0}^{k,m}}\right)^2 \cdot \overline{z_{1,1}^{k,m}} + \\
& +r_{0,1}^{k,m} \cdot z_{1,0}^{k,m} \cdot \overline{z_{0,0}^{k,m}} \cdot \left(\overline{z_{1,1}^{k,m}}\right)^2 \\
& -r_{0,1}^{k,m} \cdot z_{1,0}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{0,0}^{k,m}}\right)^2 \cdot \overline{z_{1,1}^{k,m}} - r_{0,1}^{k,m} \cdot z_{1,1}^{k,m} \cdot \overline{z_{0,0}^{k,m}} \cdot \left(\overline{z_{1,0}^{k,m}}\right)^2 \\
& -r_{1,1}^{k,m} \cdot z_{1,0}^{k,m} \cdot \overline{z_{0,1}^{k,m}} \cdot \left(\overline{z_{0,1}^{k,m}}\right)^2 + r_{1,1}^{k,m} \cdot z_{1,0}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{0,0}^{k,m}}\right)^2 \cdot \overline{z_{0,1}^{k,m}} \\
& +r_{0,1}^{k,m} \cdot z_{1,1}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{0,0}^{k,m}}\right)^2 \cdot \overline{z_{1,0}^{k,m}} + r_{1,0}^{k,m} \cdot z_{0,0}^{k,m} \cdot \overline{z_{0,1}^{k,m}} \cdot \left(\overline{z_{1,1}^{k,m}}\right)^2 \\
& -r_{1,0}^{k,m} \cdot z_{0,0}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{0,1}^{k,m}}\right)^2 \cdot \overline{z_{1,1}^{k,m}} - r_{1,0}^{k,m} \cdot z_{0,1}^{k,m} \cdot \overline{z_{0,0}^{k,m}} \cdot \left(\overline{z_{1,1}^{k,m}}\right)^2 + r_{1,0}^{k,m} \cdot z_{0,1}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{0,0}^{k,m}}\right)^2 \cdot \overline{z_{1,1}^{k,m}} \\
& +r_{1,0}^{k,m} \cdot z_{1,1}^{k,m} \cdot \overline{z_{0,0}^{k,m}} \cdot \left(\overline{z_{0,1}^{k,m}}\right)^2 - r_{1,0}^{k,m} \cdot z_{1,1}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{0,0}^{k,m}}\right)^2 \cdot \overline{z_{0,1}^{k,m}} - r_{1,1}^{k,m} \cdot z_{0,0}^{k,m} \cdot \overline{z_{0,1}^{k,m}} \cdot \left(\overline{z_{1,0}^{k,m}}\right)^2 \\
& +r_{1,1}^{k,m} \cdot z_{0,0}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{0,1}^{k,m}}\right)^2 \cdot \overline{z_{1,0}^{k,m}} + r_{1,1}^{k,m} \cdot z_{0,1}^{k,m} \cdot \overline{z_{0,0}^{k,m}} \cdot \left(\overline{z_{0,1}^{k,m}}\right)^2 - r_{1,1}^{k,m} \cdot z_{0,1}^{k,m} \cdot \left(\overline{z_{0,0}^{k,m}}\right)^2 \cdot \overline{z_{1,0}^{k,m}}
\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

elde edilmiştir. Şimdi potansiyel integralin yaklaşım değerini bulalım. Spline yaklaşımlar kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
T(\rho|z) &= -\frac{1}{\pi} \iint_K \frac{\rho(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \\
&= -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{m=0}^{M_k-1} \left(a_{k,m} \iint_{D_{k,m}} \frac{\zeta d\zeta}{\zeta - z} + b_{k,m} \iint_{D_{k,m}} \frac{\bar{\zeta} d\zeta}{\zeta - z} \right. \\
&\quad \left. + c_{k,m} \iint_{D_{k,m}} \frac{(\zeta^2 - \bar{\zeta}^2) d\zeta}{\zeta - z} + d_{k,m} \iint_{D_{k,m}} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \right)
\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

olur. Daha sonra

$$T_{k,m}^a(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{D_{k,m}} \frac{\zeta d\zeta}{\zeta - z}, \tag{3.1.8}$$

$$T_{k,m}^b(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{D_{k,m}} \frac{\bar{\zeta} d\zeta}{\zeta - z}, \tag{3.1.9}$$

$$T_{k,m}^c(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{D_{k,m}} \frac{(\zeta^2 - \bar{\zeta}^2) d\zeta}{\zeta - z}, \tag{3.1.10}$$

$$T_{k,m}^d(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{D_{k,m}} \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \tag{3.1.11}$$

notasyonlarını kullanacağız. İlk önce $T_{k,m}^a$ 'yı hesaplayalım.

$$\frac{\partial(\zeta \bar{\zeta})}{\partial \bar{\zeta}} = \zeta \text{ olduğuna göre, (3.1.8)'deki formül kullanılırsa}$$

$$T_{k,m}^a(z) = \int_{\Gamma_{k,m}} \frac{\zeta \bar{\zeta}}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{j=1}^4 \int_{\Gamma_{k,m}^j} \frac{\zeta \bar{\zeta}}{\zeta - z} d\zeta$$

alınır. Şimdi bu integrali hesaplayalım.

Birinci , $\Gamma_{k,m}^1 = \left\{ \zeta \mid \zeta = r e^{i\theta_{k,m+1}}, r_k \leq r \leq r_{k+1} \right\}$ doğru parçası için,

$$\begin{aligned}
T_{k,m}^{a,1}(z) &= \int_{\Gamma_{k,m}^1} \frac{\zeta \bar{\zeta}}{\zeta - z} d\zeta = e^{-2i\theta_{k,m}} \int_{\Gamma_{k,m}^1} \frac{\zeta^2}{\zeta - z} d\zeta = e^{-2i\theta_{k,m}} \int_{\Gamma_{k,m}^1} \frac{\zeta^2 - z^2 + z^2}{\zeta - z} d\zeta \\
&= e^{-2i\theta_{k,m}} \left[\int_{\Gamma_{k,m}^1} \frac{\zeta^2 - z^2}{\zeta - z} d\zeta + z^2 \int_{\Gamma_{k,m}^1} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \right] \\
&= e^{-2i\theta_{k,m}} \left[\int_{\Gamma_{k,m}^1} (\zeta + z) d\zeta + z^2 \int_{\Gamma_{k,m}^1} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \right] \\
&= e^{-2i\theta_{k,m}} \left[\frac{\zeta^2}{2} + z\zeta + z^2 \ln(\zeta - z) \right]_{z_{0,0}^{k,m}}^{z_{1,0}^{k,m}} \\
&= \frac{\overline{z_{0,0}^{k,m}}}{z_{0,0}^{k,m}} \left[\frac{(z_{1,0}^{k,m})^2}{2} - \frac{(z_{0,0}^{k,m})^2}{2} + z z_{1,0}^{k,m} - z z_{0,0}^{k,m} + z^2 \ln \left| \frac{z_{1,0}^{k,m} - z}{z_{0,0}^{k,m} - z} \right| \right]
\end{aligned}$$

elde edilir.

İkinciden, $\Gamma_{k,m}^2 = \left\{ \zeta \mid \zeta = r_{k+1} e^{i\theta}, \theta_{k+1,m+1} \leq \theta \leq \theta_{k+1,m} \right\}$ eğri parçası için

$\zeta \bar{\zeta} = r_{k+1} e^{i\theta} r_{k+1} e^{-i\theta} = r_{k+1}^2$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned}
T_{k,m}^{a,2}(z) &= \int_{\Gamma_{k,m}^2} \frac{\zeta \bar{\zeta}}{\zeta - z} d\zeta = r_{k+1}^2 \int_{\Gamma_{k,m}^2} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = r_{k+1}^2 \ln(\zeta - z) \Big|_{z_{1,0}^{k,m}}^{z_{1,1}^{k,m}} \\
&= z_{1,0}^{k,m} \overline{z_{1,0}^{k,m}} \ln \frac{z_{1,1}^{k,m} - z}{z_{1,0}^{k,m} - z}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Üçüncü, $\Gamma_{k,m}^3 = \left\{ \zeta \mid \zeta = r e^{i\theta_{k,m}}, r_k \leq r \leq r_{k+1} \right\}$ doğru parçası için

$\zeta \bar{\zeta} = r e^{i\theta_{k,m}} r e^{-i\theta_{k,m}} = r^2 = \zeta^2 e^{-2i\theta_{k,m}}$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned}
T_{k,m}^{a,3}(z) &= \int_{\Gamma_{k,m}^3} \frac{\zeta \bar{\zeta}}{\zeta - z} d\zeta = e^{-2i\theta_{k,m}} \int_{\Gamma_{k,m}^3} \frac{\zeta^2}{\zeta - z} d\zeta \\
&= e^{-2i\theta_{k,m}} \int_{\Gamma_{k,m}^3} \frac{\zeta^2 - z^2 + z^2}{\zeta - z} d\zeta = e^{-2i\theta_{k,m}} \left(\int_{\Gamma_{k,m}^3} (\zeta + z) d\zeta + \int_{\Gamma_{k,m}^3} \frac{z^2}{\zeta - z} d\zeta \right) \\
&= \frac{\overline{z_{1,1}^{k,m}}}{z_{1,1}^{k,m}} \left[\frac{\zeta^2}{2} + z\zeta + z^2 \ln|\zeta - z| \right]_{z_{1,1}^{k,m}}^{z_{0,1}^{k,m}} \\
&= \frac{\overline{z_{1,1}^{k,m}}}{z_{1,1}^{k,m}} \left[\frac{(z_{0,1}^{k,m})^2}{2} - \frac{(z_{1,1}^{k,m})^2}{2} + zz_{0,1}^{k,m} - zz_{1,1}^{k,m} + z^2 \ln \left| \frac{z_{0,1}^{k,m} - z}{z_{1,1}^{k,m} - z} \right| \right]
\end{aligned}$$

integrali hesaplanır.

Dördüncü olarak, $\Gamma_{k,m}^4 = \{ \zeta \mid \zeta = r_k e^{i\theta}, \theta_{k,m} \leq \theta \leq \theta_{k,m+1} \}$ eğri parçası için

$\zeta \bar{\zeta} = r_k e^{i\theta} r_k e^{-i\theta} = r_k^2 = z_{k,m} \overline{z_{k,m}}$ olduğuna göre, integralin değeri

$$\begin{aligned}
T_{k,m}^{a,4}(z) &= \int_{\Gamma_{k,m}^4} \frac{\zeta \bar{\zeta}}{\zeta - z} d\zeta = r_k^2 \int_{\Gamma_{k,m}^4} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = r_k^2 (\ln(\zeta - z))_{z_{0,1}^{k,m}}^{z_{0,0}^{k,m}} \\
&= z_{0,0}^{k,m} \overline{z_{0,0}^{k,m}} \ln \frac{z_{0,0}^{k,m} - z}{z_{0,1}^{k,m} - z}
\end{aligned}$$

şeklindedir. Böylece,

$$T_{k,m}^a(z) = \frac{\overline{z_{0,0}^{k,m}}}{z_{0,0}^{k,m}} \left[\frac{(z_{1,0}^{k,m})^2}{2} - \frac{(z_{0,0}^{k,m})^2}{2} + zz_{1,0}^{k,m} - zz_{0,0}^{k,m} + z^2 \ln \left| \frac{z_{1,0}^{k,m} - z}{z_{0,0}^{k,m} - z} \right| \right]$$

$$+ z_{1,0}^{k,m} \overline{z_{1,0}^{k,m}} \ln \frac{z_{1,1}^{k,m} - z}{z_{1,0}^{k,m} - z}$$

$$+ \frac{\overline{z_{1,1}^{k,m}}}{z_{1,1}^{k,m}} \left[\frac{(z_{0,1}^{k,m})^2}{2} - \frac{(z_{1,1}^{k,m})^2}{2} + z z_{0,1}^{k,m} - z z_{1,1}^{k,m} + z^2 \ln \left| \frac{z_{0,1}^{k,m} - z}{z_{1,1}^{k,m} - z} \right| \right] \quad (3.1.12)$$

$$+ z_{0,0}^{k,m} \overline{z_{0,0}^{k,m}} \ln \frac{z_{0,0}^{k,m} - z}{z_{0,1}^{k,m} - z}$$

olarak bulunur.

Şimdi $T_{k,m}^b$ 'yi hesaplayalım.

$$\frac{\partial(\frac{\overline{\zeta}^2}{2})}{\partial \zeta} = \overline{\zeta} \text{ ve (3.1.9) 'deki formülleri kullanarak}$$

$$T_{k,m}^b(z) = \int_{\Gamma_{k,m}} \frac{\overline{\zeta}^2}{2(\zeta - z)} d\zeta = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 \int_{\Gamma_{k,m}^j} \frac{\overline{\zeta}^2}{\zeta - z} d\zeta$$

integralini hesaplayalım.

Birinci, $\Gamma_{k,m}^1 = \{ \zeta \mid \zeta = r e^{i\theta_{k,m}}, r_k \leq r \leq r_{k+1} \}$ doğru parçası için

$$\begin{aligned} T_{k,m}^{b,1}(z) &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{k,m}^1} \frac{\overline{\zeta}^2}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2} e^{-4i\theta_{k,m}} \int_{\Gamma_{k,m}^1} \frac{\zeta^2 - z^2 + z^2}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2} e^{-4i\theta_{k,m}} \left[\int_{\Gamma_{k,m}^1} \frac{\zeta^2 - z^2}{\zeta - z} d\zeta + \int_{\Gamma_{k,m}^1} \frac{z^2}{\zeta - z} d\zeta \right] \\ &= \frac{1}{2} e^{-4i\theta_{k,m}} \left[\int_{\Gamma_{k,m}^1} (\zeta + z) d\zeta + \int_{\Gamma_{k,m}^1} \frac{z^2}{\zeta - z} d\zeta \right] \\ &= \frac{1}{2} e^{-4i\theta_{k,m}} \left[\frac{\zeta^2}{2} + z\zeta + z^2 \ln(\zeta - z) \right]_{z_{0,0}^{k,m}}^{z_{1,0}^{k,m}} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\overline{z_{0,0}^{k,m}}}{z_{0,0}^{k,m}} \right)^2 \left[\frac{(z_{1,0}^{k,m})^2}{2} - \frac{(z_{0,0}^{k,m})^2}{2} + z z_{1,0}^{k,m} - z z_{0,0}^{k,m} + z^2 \ln \left| \frac{z_{1,0}^{k,m} - z}{z_{0,0}^{k,m} - z} \right| \right]$$

ifadesi elde edilir.

İkinci, $\Gamma_{k,m}^2 = \{ \zeta \mid \zeta = r_{k+1} e^{i\theta}, \theta_{k+1,m} \leq \theta \leq \theta_{k+1,m+1} \}$ eğri parçası için

$$\zeta = r_{k+1} e^{i\theta}, \quad \overline{\zeta} = r_{k+1} e^{-i\theta} = \frac{r_{k+1}^2}{r_{k+1} e^{i\theta}} = \frac{r_{k+1}^2}{\zeta} \text{ olduğuna göre,}$$

$$\frac{1}{\zeta^2 (\zeta - z)} = \frac{1}{z} \frac{1}{\zeta} \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta} \right) = \frac{1}{z} \left(\frac{1}{\zeta} \frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta^2} \right)$$

$$= \frac{1}{z} \left[\frac{1}{z} \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta} \right) - \frac{1}{\zeta^2} \right] = \frac{1}{z^2} \frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{z^2} \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{z} \frac{1}{\zeta^2},$$

$$T_{k,m}^{b,2}(z) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{k,m}^2} \frac{\overline{\zeta^2}}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2} r_{k+1}^4 \int_{\Gamma_{k,m}^2} \frac{1}{\zeta^2 (\zeta - z)} d\zeta$$

$$= \frac{1}{2} r_{k+1}^4 \int_{\Gamma_{k,m}^2} \left(\frac{1}{z^2} \frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{z^2} \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{z} \frac{1}{\zeta^2} \right) d\zeta = \frac{1}{2} r_{k+1}^4 \left[\frac{1}{z^2} \ln(\zeta - z) - \frac{1}{z^2} \ln \zeta + \frac{1}{z} \frac{1}{\zeta} \right]_{z_{1,0}^{k,m}}^{z_{1,1}^{k,m}}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\overline{z_{1,1}^{k,m}} z_{1,1}^{k,m} \right)^2 \left[\frac{1}{z^2} \ln \frac{(z_{1,1}^{k,m} - z) z_{1,0}^{k,m}}{(z_{1,0}^{k,m} - z) z_{1,1}^{k,m}} + \frac{1}{z} \left(\frac{1}{z_{1,1}^{k,m}} - \frac{1}{z_{1,0}^{k,m}} \right) \right]$$

şeklindedir.

Üçüncü, $\Gamma_{k,m}^3 = \{ \zeta \mid \zeta = r e^{i\theta_{k,m}}, r_k \leq r \leq r_{k+1} \}$ doğru parçası için

$$\overline{\zeta} = r e^{-i\theta_{k,m}} = \zeta e^{-2i\theta_{k,m}} \text{ olduğuna göre, integrali değeri}$$

$$T_{k,m}^{b,3}(z) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{k,m}^3} \frac{\overline{\zeta^2}}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2} e^{-4i\theta_{k,m}} \int_{\Gamma_{k,m}^3} \frac{\zeta^2 - z^2 + z^2}{\zeta - z} d\zeta$$

$$= \frac{1}{2} e^{-4i\theta_{k,m}} \left[\int_{\Gamma_{k,m}^3} (\zeta + z) d\zeta + \int_{\Gamma_{k,m}^3} \frac{z^2}{\zeta - z} d\zeta \right] = \frac{1}{2} e^{-4i\theta_{k,m}} \left[\frac{\zeta^2}{2} + z\zeta + z^2 \ln(\zeta - z) \right]_{z_{1,1}^{k,m}}^{z_{0,1}^{k,m}}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\overline{z_{0,1}^{k,m}}}{z_{0,1}^{k,m}} \right)^2 \left[\frac{\left(z_{0,1}^{k,m} \right)^2}{2} - \frac{\left(z_{1,1}^{k,m} \right)^2}{2} + z z_{0,1}^{k,m} - z z_{1,1}^{k,m} + z^2 \ln \frac{z_{0,1}^{k,m} - z}{z_{1,1}^{k,m} - z} \right]$$

olarak bulunur.

Dördüncü, $\Gamma_{k,m}^4 = \{ \zeta \mid \zeta = r_k e^{i\theta}, \theta_{k,m} \leq \theta \leq \theta_{k,m+1} \}$ eğri parçası için

$$\overline{\zeta^2} = r_k^2 e^{-2i\theta} = \frac{r_k^4}{r_k^2 e^{2i\theta}} = \frac{r_k^4}{\zeta^2} \text{ için integral}$$

$$\frac{1}{\zeta^2 (\zeta - z)} = \frac{1}{z^2} \frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{z^2} \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{z} \frac{1}{\zeta^2}$$

$$\begin{aligned} T_{k,m}^{b,4}(z) &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{k,m}^4} \frac{\overline{\zeta^2}}{(\zeta - z)^2} d\zeta = \frac{1}{2} r_k^4 \int_{\Gamma_{k,m}^4} \frac{1}{\zeta^2 (\zeta - z)^2} d\zeta \\ &= \frac{1}{2} r_k^4 \int_{\Gamma_{k,m}^4} \left(\frac{1}{z^2} \frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{z^2} \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{z} \frac{1}{\zeta^2} \right) d\zeta = \frac{1}{2} r_k^4 \left[\frac{1}{z^2} \ln(\zeta - z) - \frac{1}{z^2} \ln \zeta + \frac{1}{z} \frac{1}{\zeta} \right]_{z_{0,1}^{k,m}}^{z_{0,0}^{k,m}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\overline{z_{0,0}^{k,m}} z_{0,0}^{k,m} \right)^2 \left[\frac{1}{z^2} \ln \frac{(z_{0,0}^{k,m} - z) z_{0,1}^{k,m}}{(z_{0,1}^{k,m} - z) z_{0,0}^{k,m}} + \frac{1}{z} \left(\frac{1}{z_{0,0}^{k,m}} - \frac{1}{z_{0,1}^{k,m}} \right) \right] \end{aligned}$$

bulunur. Sonuçta,

$$\begin{aligned} T_{k,m}^b(z) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\overline{z_{0,0}^{k,m}}}{z_{0,0}^{k,m}} \right)^2 \left[\frac{\left(z_{1,0}^{k,m} \right)^2}{2} - \frac{\left(z_{0,0}^{k,m} \right)^2}{2} + z z_{1,0}^{k,m} - z z_{0,0}^{k,m} + z^2 \ln \left| \frac{z_{1,0}^{k,m} - z}{z_{0,0}^{k,m} - z} \right| \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left(\overline{z_{1,1}^{k,m}} z_{1,1}^{k,m} \right)^2 \left[\frac{1}{z^2} \ln \frac{(z_{1,1}^{k,m} - z) z_{1,0}^{k,m}}{(z_{1,0}^{k,m} - z) z_{1,1}^{k,m}} + \frac{1}{z} \left(\frac{1}{z_{1,1}^{k,m}} - \frac{1}{z_{1,0}^{k,m}} \right) \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\overline{z_{0,1}^{k,m}}}{z_{0,1}^{k,m}} \right)^2 \left[\frac{\left(z_{0,1}^{k,m} \right)^2}{2} - \frac{\left(z_{1,1}^{k,m} \right)^2}{2} + z z_{0,1}^{k,m} - z z_{1,1}^{k,m} + z^2 \ln \frac{z_{0,1}^{k,m} - z}{z_{1,1}^{k,m} - z} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left(\overline{z_{0,0}^{k,m}} z_{0,0}^{k,m} \right)^2 \left[\frac{1}{z^2} \ln \frac{(z_{0,0}^{k,m} - z) z_{0,1}^{k,m}}{(z_{0,1}^{k,m} - z) z_{0,0}^{k,m}} + \frac{1}{z} \left(\frac{1}{z_{0,0}^{k,m}} - \frac{1}{z_{0,1}^{k,m}} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

olarak elde edilir.

Şimdi sırada $T_{k,m}^c$ 'yi hesaplamak vardır.

$$\frac{\partial \zeta^2 \bar{\zeta} - \frac{\bar{\zeta}^3}{3}}{\partial \bar{\zeta}} = \zeta^2 - \bar{\zeta}^2 \text{ ve (3.1.10) 'deki formülleri kullanılırsa,}$$

$$T_{k,m}^c(z) = \int_{\Gamma_{k,m}} \frac{\zeta^2 \bar{\zeta} - \frac{\bar{\zeta}^3}{3}}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{j=1}^4 \left[\int_{\Gamma_{k,m}^j} \frac{\zeta^2 \bar{\zeta} - \frac{\bar{\zeta}^3}{3}}{\zeta - z} d\zeta \right] = \sum_{j=1}^4 T_{k,m}^{c,j}(z)$$

şeklindedir.

Birinci, $\Gamma_{k,m}^1 = \left\{ \zeta \mid \zeta = r e^{i\theta_{k,m}}, r_k \leq r \leq r_{k+1} \right\}$ doğru parçasında

$$q_{k,m} = \left(e^{-2i\theta_{k,m}} - \frac{1}{3} e^{-6i\theta_{k,m}} \right) = \left(\frac{\overline{z_{0,0}^{k,m}}}{z_{0,0}^{k,m}} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{\overline{z_{0,0}^{k,m}}}{z_{0,0}^{k,m}} \right)^3 \text{ olmak üzere integral}$$

$$T_{k,m}^{c,1}(z) = \int_{\Gamma_{k,m}^1} \frac{r^3 \left(e^{i\theta_{k,m}} - \frac{1}{3} e^{-3i\theta_{k,m}} \right)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\Gamma_{k,m}^1} \frac{r^3 e^{3i\theta_{k,m}} \left(e^{-2i\theta_{k,m}} - \frac{1}{3} e^{-6i\theta_{k,m}} \right)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$= \left(e^{-2i\theta_{k,m}} - \frac{1}{3} e^{-6i\theta_{k,m}} \right) \int_{\Gamma_{k,m}^1} \frac{\zeta^3}{\zeta - z} d\zeta = q_{k,m} \int_{\Gamma_{k,m}^1} \frac{\zeta^3 - z^3 + z^3}{\zeta - z} d\zeta$$

$$= q_{k,m} \left[\int_{\Gamma_{k,m}^1} (\zeta^2 + \zeta z + z^2) d\zeta + z^3 \int_{\Gamma_{k,m}^1} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta \right]$$

$$= q_{k,m} \left[\frac{\zeta^3}{3} + \frac{z\zeta^2}{2} + z^2 \zeta + z^3 \ln(\zeta - z) \right]_{z_{0,0}^{k,m}}^{z_{1,0}^{k,m}} = \left(\left(\frac{\overline{z_{0,0}^{k,m}}}{z_{0,0}^{k,m}} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{\overline{z_{0,0}^{k,m}}}{z_{0,0}^{k,m}} \right)^3 \right) \times$$

$$\left[\frac{\left(z_{1,0}^{k,m}\right)^3}{3} - \frac{\left(z_{0,0}^{k,m}\right)^3}{3} + z \frac{\left(z_{1,0}^{k,m}\right)^2}{2} - z \frac{\left(z_{0,0}^{k,m}\right)^2}{2} + z^2 \left(z_{1,0}^{k,m} - z_{0,0}^{k,m}\right) + z^3 \ln \frac{z_{1,0}^{k,m} - z}{z_{0,0}^{k,m} - z} \right]$$

olarak bulunur.

İkinci, $\Gamma_{k,m}^2 = \left\{ \zeta \mid \zeta = r_{k+1} e^{i\theta}, \theta_{k,m} \leq \theta \leq \theta_{k,m} + h_k \right\}$ eğri parçası için

$$\begin{aligned} T_{k,m}^{c,2}(z) &= \int_{\Gamma_{k,m}^2} \frac{\zeta^2 \bar{\zeta} - \frac{\bar{\zeta}^3}{3}}{(\zeta - z)} d\zeta = \int_{\Gamma_{k,m}^2} \frac{\left(r_{k+1}^2 \zeta - \frac{r_{k+1}^6}{3 \zeta^3} \right)}{(\zeta - z)} d\zeta \\ &= r_{k+1}^2 \int_{\Gamma_{k,m}^2} \frac{\zeta}{\zeta - z} d\zeta - \frac{r_{k+1}^6}{3} \int_{\Gamma_{k,m}^2} \frac{1}{\zeta^3 (\zeta - z)} d\zeta \end{aligned}$$

integralini bulalım.

$$\frac{1}{\zeta^3 (\zeta - z)} \text{ ifadesini}$$

$$\frac{1}{\zeta^3 (\zeta - z)} = \frac{A\zeta^2 + B\zeta + C}{\zeta^3} + \frac{D}{\zeta - z} = A \frac{1}{\zeta} + B \frac{1}{\zeta^2} + C \frac{1}{\zeta^3} + \frac{D}{\zeta - z}$$

şeklinde arayalım.

$$(A\zeta^2 + B\zeta + C)(\zeta - z) + D\zeta^3 = 1,$$

$$A + D = 0, B - Az = 0, C - Bz = 0, -Cz = 1. \text{Çözüm}$$

$$C = -\frac{1}{z}, B = -\frac{1}{z^2}, A = -\frac{1}{z^3}, D = \frac{1}{z^3}. \text{ formunda olduğuna göre,}$$

$$\frac{1}{\zeta^3 (\zeta - z)} = -\frac{1}{z^3} \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{z^2} \frac{1}{\zeta^2} - \frac{1}{z} \frac{1}{\zeta^3} + \frac{1}{z^3} \frac{1}{\zeta - z} \text{ alınır. O halde,}$$

$$\begin{aligned}
T_{k,m}^{c,2}(z) &= r_{k+1}^2 \int_{\Gamma_{k,m}^2} \frac{\zeta}{\zeta - z} d\zeta - \frac{r_{k+1}^6}{3} \int_{\Gamma_{k,m}^2} \frac{1}{\zeta^3 (\zeta - z)} d\zeta \\
&= r_{k+1}^2 \int_{\Gamma_{k,m}^2} \left[1 + \frac{z}{\zeta - z} \right] d\zeta - \frac{r_{k+1}^6}{3} \int_{\Gamma_{k,m}^2} \left\{ -\frac{1}{z^3} \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{z^2} \frac{1}{\zeta^2} - \frac{1}{z} \frac{1}{\zeta^3} + \frac{1}{z^3} \frac{1}{\zeta - z} \right\} d\zeta \\
&= r_{k+1}^2 \left\{ \zeta + z \ln(\zeta - z) \right\}_{z_{1,0}^{k,m}}^{z_{1,1}^{k,m}} \\
&\quad - \frac{r_{k+1}^6}{3} \left\{ -\frac{1}{z^3} \cdot \ln \zeta + \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{2z} \cdot \frac{1}{\zeta^2} + \frac{1}{z^3} \cdot \ln(\zeta - z) \right\}_{z_{1,0}^{k,m}}^{z_{1,1}^{k,m}} \\
&= \left(z_{1,0}^{k,m} \overline{z_{1,0}^{k,m}} \right) \left\{ z_{1,1}^{k,m} - z_{1,0}^{k,m} + z \ln \left(\frac{z_{1,1}^{k,m} - z}{z_{1,0}^{k,m} - z} \right) \right\} - \frac{\left(z_{1,0}^{k,m} \overline{z_{1,0}^{k,m}} \right)^3}{3} \\
&\quad \times \left\{ -\frac{1}{z^3} \cdot \ln \left(\frac{z_{1,1}^{k,m}}{z_{1,0}^{k,m}} \right) + \frac{1}{z^2} \cdot \left(\frac{1}{z_{1,1}^{k,m}} - \frac{1}{z_{1,0}^{k,m}} \right) + \frac{1}{2z} \cdot \left(\frac{1}{\left(z_{1,1}^{k,m} \right)^2} - \frac{1}{\left(z_{1,0}^{k,m} \right)^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{z^3} \cdot \ln \left(\frac{z_{1,1}^{k,m} - z}{z_{1,0}^{k,m} - z} \right) \right\}
\end{aligned}$$

hesaplanır.

Üçüncü, $\Gamma_{k,m}^3 = \left\{ \zeta \mid \zeta = r e^{i\theta_{k,m+1}}, r_k \leq r \leq r_{k+1} \right\}$ doğru parçası için

$$\overline{\zeta} = r e^{-i\theta_{k,m+1}} = \zeta e^{-2i\theta_{k,m+1}}$$

$$p_{k,m} = \left(e^{-2i\theta_{k,m+1}} - \frac{1}{3} e^{-6i\theta_{k,m+1}} \right) = \left(\frac{\overline{z_{0,1}^{k,m}}}{z_{0,1}^{k,m}} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{\overline{z_{0,1}^{k,m}}}{z_{0,1}^{k,m}} \right)^3 \text{ olmak üzere}$$

$$\begin{aligned}
T_{k,m}^{c,3}(z) &= \int_{\Gamma_{k,m}^3} \frac{r^3 \left(e^{i\theta_{k,m+1}} - \frac{1}{3} e^{-3i\theta_{k,m+1}} \right)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\Gamma_{k,m}^3} \frac{r^3 e^{3i\theta_{k,m+1}} \left(e^{-2i\theta_{k,m+1}} - \frac{1}{3} e^{-6i\theta_{k,m+1}} \right)}{\zeta - z} d\zeta \\
&= \left(e^{-2i\theta_{k,m+1}} - \frac{1}{3} e^{-6i\theta_{k,m+1}} \right) \int_{\Gamma_{k,m}^3} \frac{\zeta^3}{\zeta - z} d\zeta = p_{k,m} \int_{\Gamma_{k,m}^3} \frac{\zeta^3 - z^3 + z^3}{\zeta - z} d\zeta = p_{k,m} \left[\left(\zeta^2 + z\zeta + z^2 \right) d\zeta + z^3 \int_{\Gamma_{k,m}^3} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \right] \\
&= p_{k,m} \left[\frac{\zeta^2}{3} + z \frac{\zeta^2}{2} + z^2 \zeta + z^3 \ln(\zeta - z) \right]_{z_{1,1}^{k,m}}^{z_{0,1}^{k,m}}
\end{aligned}$$

$$= \left(\left(\frac{\overline{z_{0,1}^{k,m}}}{z_{0,1}^{k,m}} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{\overline{z_{0,1}^{k,m}}}{z_{0,1}^{k,m}} \right)^3 \right) \\ \times \left[\frac{\left(z_{0,1}^{k,m} \right)^3}{3} - \frac{\left(z_{1,1}^{k,m} \right)^3}{3} + z \frac{\left(z_{0,1}^{k,m} \right)^2}{2} - z \frac{\left(z_{1,1}^{k,m} \right)^2}{2} + z^2 \left(z_{0,1}^{k,m} - z_{1,1}^{k,m} \right) + z^3 \ln \left| \frac{z_{0,1}^{k,m} - z}{z_{1,1}^{k,m} - z} \right| \right]$$

ifadesi elde edilir.

Dördüncü, $\Gamma_{k,m}^4 = \{ \zeta \mid \zeta = r_k e^{i\theta}, \theta_{k,m+1} \leq \theta \leq \theta_{k,m} \}$ eğri parçası için

$$\zeta = r_k e^{i\theta} \Rightarrow \bar{\zeta} = r_k e^{-i\theta} = \frac{r_k^2}{\zeta} \text{ ve}$$

$$\frac{1}{\zeta^3 (\zeta - z)} = -\frac{1}{z^3} \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{z^2} \frac{1}{\zeta^2} - \frac{1}{z} \frac{1}{\zeta^3} + \frac{1}{z^3} \frac{1}{\zeta - z}$$

olduğuna göre,

$$\begin{aligned} T_{k,m}^{c,4}(z) &= \int_{\Gamma_{k,m}^4} \frac{\zeta^2 \bar{\zeta} - \frac{\bar{\zeta}^3}{3}}{(\zeta - z)} d\zeta = \int_{\Gamma_{k,m}^4} \frac{\zeta^2 \bar{\zeta} - \frac{\bar{\zeta}^3}{3}}{(\zeta - z)} d\zeta = \int_{\Gamma_{k,m}^4} \frac{\left(r_k^2 \zeta - \frac{r_k^6}{3\zeta^3} \right)}{(\zeta - z)} d\zeta \\ &= r_k^2 \int_{\Gamma_{k,m}^4} \frac{\zeta}{(\zeta - z)^2} d\zeta - \frac{r_k^6}{3} \int_{\Gamma_{k,m}^4} \frac{1}{\zeta^3 (\zeta - z)} d\zeta \\ &= r_k^2 \int_{\Gamma_{k,m}^4} \frac{\zeta}{\zeta - z} d\zeta - \frac{r_k^6}{3} \int_{\Gamma_{k,m}^4} \left\{ -\frac{1}{z^3} \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{z^2} \frac{1}{\zeta^2} - \frac{1}{z} \frac{1}{\zeta^3} + \frac{1}{z^3} \frac{1}{\zeta - z} \right\} d\zeta \\ &= r_k^2 \left\{ \zeta + z \ln(\zeta - z) \right\}_{z_{0,1}^{k,m}}^{z_{0,0}^{k,m}} - \frac{r_k^6}{3} \left\{ -\frac{1}{z^3} \cdot \ln \zeta + \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{2z} \cdot \frac{1}{\zeta^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{z^3} \cdot \ln(\zeta - z) \right\}_{z_{0,1}^{k,m}}^{z_{0,0}^{k,m}} \\ &= \left(z_{0,0}^{k,m} \overline{z_{0,0}^{k,m}} \right) \left\{ z_{0,0}^{k,m} - z_{0,1}^{k,m} + z \ln \left(\frac{z_{0,0}^{k,m} - z}{z_{0,1}^{k,m} - z} \right) \right\} - \frac{\left(z_{0,0}^{k,m} \overline{z_{0,0}^{k,m}} \right)^3}{3} \end{aligned}$$

$$\times \left\{ -\frac{1}{z^3} \cdot \ln \left(\frac{z_{0,0}^{k,m}}{z_{0,1}^{k,m}} \right) + \frac{1}{z^2} \cdot \left(\frac{1}{z_{0,0}^{k,m}} - \frac{1}{z_{0,1}^{k,m}} \right) + \frac{1}{2z} \cdot \left(\frac{1}{(z_{0,0}^{k,m})^2} - \frac{1}{(z_{0,1}^{k,m})^2} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{z^3} \cdot \ln \left(\frac{z_{0,0}^{k,m} - z}{z_{0,1}^{k,m} - z} \right) \right\}$$

elde edilir. Böylece ,

$$T_{k,m}^c(z) = \left(\left(\frac{\overline{z_{0,0}^{k,m}}}{z_{0,0}^{k,m}} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{\overline{z_{0,0}^{k,m}}}{z_{0,0}^{k,m}} \right)^3 \right) \left[\frac{(z_{1,0}^{k,m})^3}{3} - \frac{(z_{0,0}^{k,m})^3}{3} + z \frac{(z_{1,0}^{k,m})^2}{2} \right. \\ \left. - z \frac{(z_{0,0}^{k,m})^2}{2} + z^2 (z_{1,0}^{k,m} - z_{0,0}^{k,m}) + z^3 \ln \frac{z_{1,0}^{k,m} - z}{z_{0,0}^{k,m} - z} \right] \\ + (z_{1,0}^{k,m} \overline{z_{1,0}^{k,m}}) \left\{ z_{1,1}^{k,m} - z_{1,0}^{k,m} + z \ln \left(\frac{z_{1,1}^{k,m} - z}{z_{1,0}^{k,m} - z} \right) \right\} - \frac{(z_{1,0}^{k,m} \overline{z_{1,0}^{k,m}})^3}{3} \\ \times \left\{ -\frac{1}{z^3} \cdot \ln \left(\frac{z_{1,1}^{k,m}}{z_{1,0}^{k,m}} \right) + \frac{1}{z^2} \cdot \left(\frac{1}{z_{1,1}^{k,m}} - \frac{1}{z_{1,0}^{k,m}} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{2z} \cdot \left(\frac{1}{(z_{1,1}^{k,m})^2} - \frac{1}{(z_{1,0}^{k,m})^2} \right) + \frac{1}{z^3} \cdot \ln \left(\frac{z_{1,1}^{k,m} - z}{z_{1,0}^{k,m} - z} \right) \right\} \\ + \left(\left(\frac{\overline{z_{0,1}^{k,m}}}{z_{0,1}^{k,m}} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{\overline{z_{0,1}^{k,m}}}{z_{0,1}^{k,m}} \right)^3 \right) \left[\frac{(z_{0,1}^{k,m})^3}{3} - \frac{(z_{1,1}^{k,m})^3}{3} + z \frac{(z_{0,1}^{k,m})^2}{2} - z \frac{(z_{1,1}^{k,m})^2}{2} \right. \\ \left. + z^2 (z_{0,1}^{k,m} - z_{1,1}^{k,m}) + z^3 \ln \left| \frac{z_{0,1}^{k,m} - z}{z_{1,1}^{k,m} - z} \right| \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \left(z_{0,0}^{k,m} \overline{z_{0,0}^{k,m}} \right) \left\{ z_{0,0}^{k,m} - z_{0,1}^{k,m} + z \ln \left(\frac{z_{0,0}^{k,m} - z}{z_{0,1}^{k,m} - z} \right) \right\} - \frac{\left(z_{0,0}^{k,m} \overline{z_{0,0}^{k,m}} \right)^3}{3} \\
& \times \left\{ -\frac{1}{z^3} \cdot \ln \left(\frac{z_{0,0}^{k,m}}{z_{0,1}^{k,m}} \right) + \frac{1}{z^2} \cdot \left(\frac{1}{z_{0,0}^{k,m}} - \frac{1}{z_{0,1}^{k,m}} \right) \right. \\
& \left. + \frac{1}{2z} \cdot \left(\frac{1}{\left(z_{0,0}^{k,m} \right)^2} - \frac{1}{\left(z_{0,1}^{k,m} \right)^2} \right) + \frac{1}{z^3} \cdot \ln \left(\frac{z_{0,0}^{k,m} - z}{z_{0,1}^{k,m} - z} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{3.1.14}$$

olarak hesaplanır. Şimdi $T_{k,m}^d$ 'yi hesaplayalım.

$$\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \zeta} = 1 \text{ ve (3.1.11) formüllerinden yararlanarak}$$

$$T_{k,m}^d(z) = \int_{\Gamma_{k,m}} \frac{\bar{\zeta}}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{j=1}^4 \int_{\Gamma_{k,m}^j} \frac{\bar{\zeta}}{\zeta - z} d\zeta$$

integralini hesaplayalım.

Birinci,

$$\begin{aligned}
T_{k,m}^{d,1}(z) &= \int_{\Gamma_{k,m}^1} \frac{\bar{\zeta}}{\zeta - z} d\zeta = e^{-i\theta_m} \int_{\Gamma_{k,m}^1} \frac{rd\zeta}{\zeta - z} \\
&= e^{-2i\theta_m} \int_{\Gamma_{k,m}^1} \frac{\zeta}{\zeta - z} d\zeta = e^{-2i\theta_m} \left[\int_{\Gamma_{k,m}^1} d\zeta + z \int_{\Gamma_{k,m}^1} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \right] \\
&= \frac{\overline{z_{0,0}^{k,m}}}{z_{0,0}^{k,m}} \left[z_{1,0}^{k,m} - z_{0,0}^{k,m} + z \ln \frac{z_{1,0}^{k,m} - z}{z_{0,0}^{k,m} - z} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir.

İkinci,

$$\begin{aligned}
T_{k,m}^{d,2}(z) &= \int_{\Gamma_{k,m}^2} \frac{\bar{\zeta}}{(\zeta - z)} d\zeta = r_{k+1}^2 \int_{\Gamma_{k,m}^2} \frac{d\zeta}{\zeta(\zeta - z)} = r_{k+1}^2 \frac{1}{z} \int_{\Gamma_{k,m}^2} \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta} \right) d\zeta \\
&= r_{k+1}^2 \frac{1}{z} \left(\ln \frac{\zeta - z}{\zeta} \right)_{z_{1,0}^{k,m}}^{z_{1,1}^{k,m}} = z_{1,1}^{k,m} \overline{z_{1,1}^{k,m}} \frac{1}{z} \ln \frac{(z_{1,1}^{k,m} - z) z_{1,0}^{k,m}}{(z_{1,0}^{k,m} - z) z_{1,1}^{k,m}}
\end{aligned}$$

bulunur.

Üçüncü,

$$\begin{aligned}
T_{k,m}^{d,3}(z) &= \int_{\Gamma_{k,m}^3} \frac{\bar{\zeta}}{(\zeta - z)^2} d\zeta = e^{-2i(\theta_m + h_k)} \int_{\Gamma_{k,m}^3} \frac{rd\zeta}{\zeta - z} = e^{-2i(\theta_m + h_k)} \int_{\Gamma_{k,m}^3} \frac{\zeta d\zeta}{\zeta - z} \\
&= e^{-2i(\theta_m + h_k)} \left[\int_{\Gamma_{k,m}^3} d\zeta + z \int_{\Gamma_{k,m}^3} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \right] \\
&= \frac{\overline{z_{1,1}^{k,m}}}{z_{1,1}^{k,m}} \left[z_{0,1}^{k,m} - z_{1,1}^{k,m} + z \ln \frac{z_{0,1}^{k,m} - z}{z_{1,1}^{k,m} - z} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir.

Dördüncü,

$$\begin{aligned}
T_{k,m}^{d,4}(z) &= \int_{\Gamma_{k,m}^4} \frac{\bar{\zeta}}{\zeta - z} d\zeta = r_k^2 \int_{\Gamma_{k,m}^4} \frac{d\zeta}{\zeta(\zeta - z)} = r_k^2 \frac{1}{z} \int_{\Gamma_{k,m}^4} \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta} \right) d\zeta \\
&= r_k^2 \frac{1}{z} \left(\ln \frac{\zeta - z}{\zeta} \right)_{z_{0,1}^{k,m}}^{z_{0,0}^{k,m}} = \frac{z_{0,0}^{k,m} \overline{z_{0,0}^{k,m}}}{z} \ln \left(\frac{(z_{0,0}^{k,m} - z) z_{0,1}^{k,m}}{(z_{0,1}^{k,m} - z) z_{0,0}^{k,m}} \right)
\end{aligned}$$

hesaplanır. Böylece,

$$\begin{aligned}
T_{k,m}^d(z) &= \frac{\overline{z_{0,0}^{k,m}}}{z_{0,0}^{k,m}} \left[z_{1,0}^{k,m} - z_{0,0}^{k,m} + z \ln \frac{z_{1,0}^{k,m} - z}{z_{0,0}^{k,m} - z} \right] \\
&+ z_{1,1}^{k,m} \frac{\overline{z_{1,1}^{k,m}}}{z_{1,1}^{k,m}} \frac{1}{z} \ln \frac{(z_{1,1}^{k,m} - z) z_{1,0}^{k,m}}{(z_{1,0}^{k,m} - z) z_{1,1}^{k,m}} \\
&+ \frac{\overline{z_{1,1}^{k,m}}}{z_{1,1}^{k,m}} \left[z_{0,1}^{k,m} - z_{1,1}^{k,m} + z \ln \frac{z_{0,1}^{k,m} - z}{z_{1,1}^{k,m} - z} \right] \\
&+ \frac{z_{0,0}^{k,m} \overline{z_{0,0}^{k,m}}}{z} \ln \left(\frac{(z_{0,0}^{k,m} - z) z_{0,1}^{k,m}}{(z_{0,1}^{k,m} - z) z_{0,0}^{k,m}} \right)
\end{aligned} \tag{3.1.15}$$

bulunur.

En sonunda ;

$$T(\rho|z) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{m=0}^{M_k-1} (a_{k,m} T_{k,m}^a(z) + b_{k,m} T_{k,m}^b(z) + c_{k,m} T_{k,m}^c(z) + d_{k,m} T_{k,m}^d(z))$$

formül geçerlidir. Burada $T_{k,m}^a(z), T_{k,m}^b(z), T_{k,m}^c(z), T_{k,m}^d(z)$ terimleri sırasıyla (3.1.12), (3.1.13), (3.1.14), (3.1.15) formülleriyle hesaplanır.

3.2. İkinci Mertebeden Doğrulukla Potansiyel İntegral için Hata Analizi

$l_2(\Omega^j) (j=1, 2)$ (2.1.1) ile tanımlanan norm olmak üzere $T(\rho|z)$ için

hata değerini

$$ErrorT = \left\| T\rho^{\tau,h} - (T\rho)^{\tau,h} \right\|_{l_2(\Omega^j)} \tag{3.2.1}$$

şekilde hesaplayacağız.

$T(\rho|z)$ 'nin farklı gerçek değerleri için MATLAB kodları ile hesaplanan hata analizleri Tablo 3.1. ve Tablo 3.2'de sunulmuştur.

Bu tablolardaki $T(\rho|z)$ 'nin gerçek değerleri, Vekua, (1962) kitabından alınmıştır ve $T(\rho|z)$ 'nin birinci mertebeden yaklaşımları ile gerçek değerlerin farkının normu verilmiştir. Hesaplamalar $N = 5, 10, 20, 40$ değerleri için yapılmıştır.

Tablo 3. 1. ve Tablo 3.2.'de görüldüğü gibi N değerleri iki kat değiştiğinde hata $\frac{1}{4}$ civarında azaldığı görülür.

Tablo 3.1. $T(\rho|z)$ 'nin ikinci mertebeden yaklaşımının hata analizi

ρ	$T(\rho z)$	Yaklaşım hataları			
		N=5	N=10	N=20	N=40
$\frac{-2}{zz}$	$\frac{\frac{-2}{zz}}{2}$	0.2450	0.0278	0.0059	0.0014
$\frac{-2}{zz}$	$\frac{\frac{-3}{zz}}{3}$	0.1803	0.0162	0.0038	9.4950e-04
$\frac{-3}{zz}$	$\frac{\frac{-4}{zz}}{4}$	0.1611	0.0338	0.0076	0.0019
$\frac{z}{zz-1}$	$\frac{z}{zz-1}$	0.3018	0.0377	0.0047	5.8945e-04
$\frac{-2}{z}$	$\frac{\frac{-2}{z}}{2}$	0.0989	0.0124	0.0015	1.9314e-04
$\frac{z^2}{z^2z-z}$	$\frac{z^2z-z}{z^2z-z}$	0.1902	0.0227	0.0048	0.0012
$\frac{-2}{z}$	$\frac{\frac{-3}{z}}{3}$	0.1489	0.0206	0.0047	0.0012
$\frac{-3}{z}$	$\frac{\frac{-4}{z}}{4}$	0.2027	0.0526	0.0133	0.0033
$\frac{z^2}{z^2z}$	$\frac{\frac{z^2z}{2} - \frac{1}{2}}{2}$	0.1112	0.0226	0.0059	0.0015
$\frac{z^2}{z^2z}$	$\frac{\frac{z^2z}{3} - \frac{1}{3}}{3}$	0.1417	0.0194	0.0048	0.0012
$\frac{z^2}{z^2z}$	$\frac{\frac{z^2z}{4} - \frac{1}{4}}{4}$	0.1215	0.0212	0.0049	0.0012
$\frac{z^3}{z^3z}$	$\frac{\frac{z^3z}{2} - \frac{z}{2}}{2}$	0.1369	0.0279	0.0061	0.0015
$\frac{z^3}{z^3z}$	$\frac{\frac{z^3z}{3} - \frac{1}{3}}{3}$	0.1144	0.0344	0.0086	0.0022

Tablo 3.2. $T(\rho|z)$ 'nin ikinci mertebeden yaklaşımının hata analizi devamı

$z^3 \bar{z}^3$	$\frac{z^3 \bar{z}^4}{4}$	0.0885	0.0181	0.0045	0.0011
$z^3 \bar{z}^4$	$\frac{z^3 \bar{z}^5}{5}$	0.1096	0.0254	0.0057	0.0014
z^3	$z^3 \bar{z} - z^2$	0.1807	0.0388	0.0096	0.0024
1	$\bar{z}$	0.5353	0.1355	0.0343	0.0087
$z^2 - \bar{z}^2$	$z^2 \bar{z} - z - \frac{\bar{z}^3}{3}$	0.1785	0.0112	6.9724e-04	4.3577e-05

3.3. $S(\rho|z)$ Singüler İntegralin İkinci Mertebeden Doğrulukla Yaklaşımı

Bu bölümde ikinci mertebeden doğruluk yaklaşımlarının formüllerini elde etmek için $D_{k,m}$ bölgesindeki iki boyutlu spline yaklaşımını kullanacağız. $a_{k,m}$, $b_{k,m}$, $c_{k,m}$ ve $d_{k,m}$ katsayılarını, köşe noktalarda fonksiyonun değeri ile aynı değere sahip olma şartından (3.1.1) lineer denklem sisteminin çözümü (3.1.2) -(3.1.6) gibi elde edilir.

Şimdi singüler integralin yaklaşım değerini bulalım. Spline yaklaşımlar kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
 S(\rho|z) &= -\frac{1}{\pi} \iint_K \frac{\rho(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2} \\
 &= -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{m=0}^{M_k-1} \left(a_{k,m} \iint_{D_{k,m}} \frac{\zeta d\zeta}{(\zeta - z)^2} + b_{k,m} \iint_{D_{k,m}} \frac{\bar{\zeta} d\zeta}{(\zeta - z)^2} \right. \\
 &\quad \left. + c_{k,m} \iint_{D_{k,m}} \frac{(\zeta^2 - \bar{\zeta}^2) d\zeta}{(\zeta - z)^2} + d_{k,m} \iint_{D_{k,m}} \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^2} \right)
 \end{aligned}$$

olur.

$$S_{k,m}^a(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{D_{k,m}} \frac{\zeta d\zeta}{(\zeta - z)^2}, \quad (3.3.1)$$

$$S_{k,m}^b(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{D_{k,m}} \frac{\bar{\zeta} d\zeta}{(\zeta - z)^2}, \quad (3.3.2)$$

$$S_{k,m}^c(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{D_{k,m}} \frac{(\zeta^2 - \bar{\zeta}^2) d\zeta}{(\zeta - z)^2}, \quad (3.3.3)$$

$$S_{k,m}^d(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{D_{k,m}} \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^2} \quad (3.3.4)$$

notasyonlarını kullanacağız. Şimdi bu integrali hesaplayalım. S singüler integralin

özelliklerine göre $T_{k,m}^a(z)$, (3.1.8) ile tanımlanmak üzere $\frac{\partial T_{k,m}^a(z)}{\partial z} = S_{k,m}^a(z)$

olur. (3.1.12) formülü kullanılıp, z 'ye göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} S_{k,m}^a(z) &= \frac{\bar{z}_{0,0}^{k,m}}{z_{0,0}^{k,m}} \left[z_{1,0}^{k,m} - z_{0,0}^{k,m} + 2z \ln \left(\frac{z_{1,0}^{k,m} - z}{z_{0,0}^{k,m} - z} \right) - z^2 \left(\frac{1}{z_{1,0}^{k,m} - z} - \frac{1}{z_{0,0}^{k,m} - z} \right) \right] \\ &+ z_{1,0}^{k,m} \frac{\bar{z}_{1,0}^{k,m}}{z_{1,0}^{k,m}} \left[\frac{1}{z_{1,0}^{k,m} - z} - \frac{1}{z_{1,1}^{k,m} - z} \right] \\ &+ \frac{\bar{z}_{1,1}^{k,m}}{z_{1,1}^{k,m}} \left[z_{0,1}^{k,m} - z_{1,1}^{k,m} + 2z \ln \left(\frac{z_{0,1}^{k,m} - z}{z_{1,1}^{k,m} - z} \right) - z^2 \left(\frac{1}{z_{0,1}^{k,m} - z} - \frac{1}{z_{1,1}^{k,m} - z} \right) \right] \\ &+ z_{0,0}^{k,m} \frac{\bar{z}_{0,0}^{k,m}}{z_{0,0}^{k,m}} \left[\frac{1}{z_{0,1}^{k,m} - z} - \frac{1}{z_{0,0}^{k,m} - z} \right] \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

elde edilir.

$T_{k,m}^b(z)$, (3.1.9) ile tanımlanan notasyon olmak üzere

$\frac{\partial T_{k,m}^b(z)}{\partial z} = S_{k,m}^b(z)$ olur. (3.1.13) formülü kullanılıp, z 'ye göre türevi

$$\begin{aligned}
S_{k,m}^b(z) = & \frac{1}{2} \left(\frac{\overline{z_{0,0}^{k,m}}}{z_{0,0}^{k,m}} \right)^2 \left[z_{1,0}^{k,m} - z_{0,0}^{k,m} + 2z \ln \left(\frac{z_{1,0}^{k,m} - z}{z_{0,0}^{k,m} - z} \right) + z^2 \left(\frac{1}{z_{0,0}^{k,m} - z} - \frac{1}{z_{1,0}^{k,m} - z} \right) \right] \\
& + \frac{1}{2} \left(\frac{\overline{z_{1,1}^{k,m}}}{z_{1,1}^{k,m}} \right)^2 \left[-\frac{2}{z^3} \ln \left(\frac{(z_{1,1}^{k,m} - z) z_{1,0}^{k,m}}{(z_{1,0}^{k,m} - z) z_{1,1}^{k,m}} \right) + \frac{1}{z^2} \left(\frac{1}{z_{1,0}^{k,m} - z} - \frac{1}{z_{1,1}^{k,m} - z} \right) - \frac{1}{z^2} \left(\frac{1}{z_{1,1}^{k,m}} - \frac{1}{z_{1,0}^{k,m}} \right) \right] \\
& + \frac{1}{2} \left(\frac{\overline{z_{0,1}^{k,m}}}{z_{0,1}^{k,m}} \right)^2 \left[z_{0,1}^{k,m} - z_{1,1}^{k,m} + 2z \ln \left(\frac{z_{0,1}^{k,m} - z}{z_{1,1}^{k,m} - z} \right) + z^2 \left(\frac{1}{z_{1,1}^{k,m} - z} - \frac{1}{z_{0,1}^{k,m} - z} \right) \right] \\
& + \frac{1}{2} \left(\frac{\overline{z_{0,0}^{k,m}}}{z_{0,0}^{k,m}} \right)^2 \left[-\frac{2}{z^3} \ln \left(\frac{(z_{0,0}^{k,m} - z) z_{0,1}^{k,m}}{(z_{0,1}^{k,m} - z) z_{0,0}^{k,m}} \right) + \frac{1}{z^2} \left(\frac{1}{z_{0,1}^{k,m} - z} - \frac{1}{z_{0,0}^{k,m} - z} \right) - \frac{1}{z^2} \left(\frac{1}{z_{0,0}^{k,m}} - \frac{1}{z_{0,1}^{k,m}} \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

biçimindedir.

Sırada $S_{k,m}^c$ 'yi hesaplayalım. $T_{k,m}^c(z)$, (3.1.10) ile tanımlamak üzere

$$\frac{\partial T_{k,m}^c(z)}{\partial z} = S_{k,m}^c(z) \text{ şeklindedir. (3.1.14) formülü kullanılarak } z \text{ 'ye göre türevi}$$

$$\begin{aligned}
S_{k,m}^c(z) = & \left(\left(\frac{\overline{z_{0,0}^{k,m}}}{z_{0,0}^{k,m}} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{\overline{z_{0,0}^{k,m}}}{z_{0,0}^{k,m}} \right)^3 \right) \left[\frac{(z_{1,0}^{k,m})^2}{2} - \frac{(z_{0,0}^{k,m})^2}{2} + 2z(z_{1,0}^{k,m} - z_{0,0}^{k,m}) \right. \\
& + 3z^2 \ln \frac{z_{1,0}^{k,m} - z}{z_{0,0}^{k,m} - z} + z^3 \left(\frac{1}{z_{0,0}^{k,m} - z} - \frac{1}{z_{1,0}^{k,m} - z} \right) \Big] \\
& + \left(z_{1,0}^{k,m} \overline{z_{1,0}^{k,m}} \right) \left\{ \ln \left(\frac{z_{1,1}^{k,m} - z}{z_{1,0}^{k,m} - z} \right) + z \left(\frac{1}{z_{1,0}^{k,m} - z} - \frac{1}{z_{1,1}^{k,m} - z} \right) \right\} - \frac{(z_{1,0}^{k,m} \overline{z_{1,0}^{k,m}})^3}{3} \\
& \times \left\{ \frac{3}{z^4} \cdot \ln \left(\frac{z_{1,1}^{k,m}}{z_{1,0}^{k,m}} \right) - \frac{2}{z^3} \cdot \left(\frac{1}{z_{1,1}^{k,m}} - \frac{1}{z_{1,0}^{k,m}} \right) - \frac{1}{2z^2} \cdot \left(\frac{1}{(z_{1,1}^{k,m})^2} - \frac{1}{(z_{1,0}^{k,m})^2} \right) \right. \\
& \left. - \frac{3}{z^4} \cdot \ln \left(\frac{z_{1,1}^{k,m} - z}{z_{1,0}^{k,m} - z} \right) + \frac{1}{z^3} \cdot \left(\frac{1}{z_{1,0}^{k,m} - z} - \frac{1}{z_{1,1}^{k,m} - z} \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\left(\frac{\overline{z_{0,1}^{k,m}}}{z_{0,1}^{k,m}} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{\overline{z_{0,1}^{k,m}}}{z_{0,1}^{k,m}} \right)^3 \right) \left[\frac{(z_{0,1}^{k,m})^2}{2} - \frac{(z_{1,1}^{k,m})^2}{2} + 2z(z_{0,1}^{k,m} - z_{1,1}^{k,m}) \right. \\
& \left. + 3z^2 \ln \left(\frac{z_{0,1}^{k,m} - z}{z_{1,1}^{k,m} - z} \right) + z^3 \left(\frac{1}{z_{1,1}^{k,m} - z} - \frac{1}{z_{0,1}^{k,m} - z} \right) \right] \\
& + (z_{0,0}^{k,m} \overline{z_{0,0}^{k,m}}) \left\{ \ln \left(\frac{z_{0,0}^{k,m} - z}{z_{0,1}^{k,m} - z} \right) + z \left(\frac{1}{z_{0,1}^{k,m} - z} - \frac{1}{z_{0,0}^{k,m} - z} \right) \right\} - \frac{(z_{0,0}^{k,m} \overline{z_{0,0}^{k,m}})^3}{3} \\
& \times \left\{ \frac{3}{z^4} \cdot \ln \left(\frac{z_{0,0}^{k,m}}{z_{0,1}^{k,m}} \right) - \frac{2}{z^3} \cdot \left(\frac{1}{z_{0,0}^{k,m}} - \frac{1}{z_{0,1}^{k,m}} \right) - \frac{1}{2z^2} \cdot \left(\frac{1}{(z_{0,0}^{k,m})^2} - \frac{1}{(z_{0,1}^{k,m})^2} \right) \right. \\
& \left. - \frac{3}{z^4} \cdot \ln \left(\frac{z_{0,0}^{k,m} - z}{z_{0,1}^{k,m} - z} \right) + \frac{1}{z^3} \cdot \left(\frac{1}{z_{0,1}^{k,m} - z} - \frac{1}{z_{0,0}^{k,m} - z} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

şeklinde hesaplanır.

Şimdi $S_{k,m}^d$ 'yi hesaplayalım. $T_{k,m}^d(z)$, (3.1.11) ile tanımlanmak üzere

$$\frac{\partial T_{k,m}^d(z)}{\partial z} = S_{k,m}^d(z) \text{ yazılır. (3.1.15) formülü kullanılıp } Z \text{ 'ye göre türevi alınırsa,}$$

$$\begin{aligned}
S_{k,m}^d(z) &= \frac{\overline{z_{0,0}^{k,m}}}{z_{0,0}^{k,m}} \left[\ln \frac{z_{1,0}^{k,m} - z}{z_{0,0}^{k,m} - z} + z \left(\frac{1}{z_{0,0}^{k,m} - z} - \frac{1}{z_{1,0}^{k,m} - z} \right) \right] \\
&- z_{1,1}^{k,m} \overline{z_{1,1}^{k,m}} \frac{1}{z^2} \ln \left(\frac{(z_{1,1}^{k,m} - z) z_{1,0}^{k,m}}{(z_{1,0}^{k,m} - z) z_{1,1}^{k,m}} \right) + z_{1,1}^{k,m} \overline{z_{1,1}^{k,m}} \frac{1}{z} \left(\frac{1}{z_{1,0}^{k,m} - z} - \frac{1}{z_{1,1}^{k,m} - z} \right) \\
&+ \frac{\overline{z_{1,1}^{k,m}}}{z_{1,1}^{k,m}} \left[\ln \frac{z_{0,1}^{k,m} - z}{z_{1,1}^{k,m} - z} + z \left(\frac{1}{z_{1,1}^{k,m} - z} - \frac{1}{z_{0,1}^{k,m} - z} \right) \right] \\
&- \frac{z_{0,0}^{k,m} \overline{z_{0,0}^{k,m}}}{z^2} \ln \left(\frac{(z_{0,0}^{k,m} - z) z_{0,1}^{k,m}}{(z_{0,1}^{k,m} - z) z_{0,0}^{k,m}} \right) + \frac{z_{0,0}^{k,m} \overline{z_{0,0}^{k,m}}}{z} \left(\frac{1}{z_{0,1}^{k,m} - z} - \frac{1}{z_{0,0}^{k,m} - z} \right)
\end{aligned} \tag{3.3.8}$$

bulunur.

Sonuçta;

$$S(\rho|z) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{m=0}^{M_k-1} \left(a_{k,m} S_{k,m}^a(z) + b_{k,m} S_{k,m}^b(z) + c_{k,m} S_{k,m}^c(z) + d_{k,m} S_{k,m}^d(z) \right)$$

formülü geçerlidir. Burada $S_{k,m}^a(z), S_{k,m}^b(z), S_{k,m}^c(z), S_{k,m}^d(z)$ terimleri sırasıyla (3.3.5), (3.3.6), (3.3.7), (3.3.8) formülleriyle hesaplanır.

3.4. İkinci Mertebeden Doğrulukla Singüler İntegral için Hata Analizi

$l_2(\Omega^j)(j=1,2)$ (2.1.1) ile tanımlanan norm olmak üzere $S(\rho|z)$ için hata değerini

$$ErrorS = \left\| S\rho^{\tau,h} - (S\rho)^{\tau,h} \right\|_{l_2(\Omega^j)} \quad (3.4.1)$$

şeklindedir.

$S(\rho|z)$ 'nin gerçek değerleri için singüler integral hataları aşağıdaki tabloda gösterilmiştir. Tablo 3.3. ' deki $S(\rho|z)$ gerçek değerleri Vekua, (1962) kitabından alınmıştır.

Tablo 3.3.'de $S(\rho|z)$ 'nin birinci ve ikinci mertebeden yaklaşımları ve gerçek değerleri arasındaki hata verilmiştir. Hesaplamalar $N=5, 10, 20, 40$ değerleri için yapılmıştır.

Tablo 3.3.'de görüldüğü gibi N değerleri iki kat değiştiğinde hata $\frac{1}{4}$ civarında azaldığı görülür.

Tablo 3.3. $S(\rho|z)$ 'nin ikinci mertebeden yaklaşımları için hata analizi

ρ	$S(\rho z)$	Yaklaşım hataları			
		N=5	N=10	N=20	N=40
$\frac{-}{zz}$	$\frac{\frac{-2}{z}}{2}$	0.0775	0.0138	0.0030	7.1263e-04
$\frac{-2}{zz}$	$\frac{\frac{-3}{z}}{3}$	0.4025	0.0683	0.0230	0.0083
$\frac{-3}{zz}$	$\frac{\frac{-4}{z}}{4}$	0.6517	0.1549	0.0567	0.0207
z	$\frac{-}{z}$	8.7601e-15	1.5566e-13	2.1109e-12	5.0659e-11
$\frac{-}{z}$	0	0.3072	0.0768	0.0192	0.0048
z^2	$2z\frac{-}{z}-1$	0.6155	0.1169	0.0324	0.0110
$\frac{-2}{z}$	0	0.6525	0.1174	0.0322	0.0110
$\frac{-3}{z}$	0	0.7794	0.1901	0.0685	0.0249
$z^2\frac{-}{z}$	$\frac{-2}{zz}$	0.4335	0.0724	0.0239	0.0085
$z^2\frac{-2}{z}$	$\frac{2}{3}\frac{-3}{zz}$	0.0985	0.0261	0.0067	0.0017
$z^2\frac{-3}{z}$	$\frac{1}{2}\frac{-4}{zz}$	0.3466	0.0906	0.0332	0.0121
$z^3\frac{-}{z}$	$\frac{3}{2}z^2\frac{-2}{z}-\frac{1}{2}$	0.5976	0.1478	0.0557	0.0206
$z^3\frac{-2}{z}$	$z^2\frac{-3}{z}$	0.3912	0.0981	0.0346	0.0124
$z^3\frac{-3}{z}$	$\frac{3}{4}z^2\frac{-4}{z}$	0.1748	0.0463	0.0118	0.0030
$z^3\frac{-4}{z}$	$\frac{3}{5}z^2\frac{-5}{z}$	0.3654	0.1114	0.0407	0.0150
z^3	$3z^2\frac{-}{z}-2z$	0.8176	0.1897	0.0682	0.0248
1	0	0.8832	0.4427	0.2215	0.1107
$z^2 - \frac{-2}{z}$	$2z\frac{-}{z}-1$	0.7305	0.0913	0.0114	0.0014

4. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

K kümesi, karmaşık sayılar düzleminde birim daire olmak üzere iki boyutlu

potansiyel $T(\rho | z) = -\frac{1}{\pi} \iint_K \frac{\rho(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ ve singüler

$S(\rho | z) = -\frac{1}{\pi} \iint_K \frac{\rho(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$ operatörlerin yaklaşımları araştırılmıştır.

K dairesinde grid noktalar kümesi ele alınmıştır. İntegral içerisindeki fonksiyonların yaklaşımı için

$$\Omega^{(1)} = \Omega_{\tau,h}^{(1)} = \left\{ z_{0,0}^{k,m}, z_{1,0}^{k,m}, z_{1,1}^{k,m}, z_{0,1}^{k,m} \mid 1 \leq k \leq N-1, 0 \leq m \leq M_k - 1 \right\}$$

grid noktalar kümesi, integralin değerini hesaplamak için ise

$$\Omega^{(2)} = \Omega_{\tau,h}^{(2)} = \left\{ z_{0,0}^{*k,m}, z_{1,0}^{*k,m}, z_{1,1}^{*k,m}, z_{0,1}^{*k,m} \mid 1 \leq k \leq N-1, 0 \leq m \leq M_k - 1 \right\}$$

grid noktalar kümesi kullanılmıştır.

Burada $r_k = k\tau$, $M_k = 2k+1$, $M_k h_k = 2\pi$, $\theta_{k,m} = -\pi + mh_k$ olmak üzere

$$z_{0,0}^{k,m} = r_k e^{i\theta_{k,m}}, z_{1,0}^{k,m} = r_{k+1} e^{i\theta_{k,m}}, z_{1,1}^{k,m} = r_{k+1} e^{i\theta_{k,m+1}},$$

$$z_{0,1}^{k,m} = r_k e^{i\theta_{k,m+1}}, z_{0,0}^{*k,m} = \left(r_k + \frac{\tau}{2} \right) e^{i\left(\theta_{k,m} + \frac{h_k}{2}\right)},$$

$$z_{1,0}^{*k,m} = \left(r_{k+1} + \frac{\tau}{2} \right) e^{i\left(\theta_{k,m} + \frac{h_k}{2}\right)},$$

$$z_{1,1}^{*k,m} = \left(r_{k+1} + \frac{\tau}{2} \right) e^{i\left(\theta_{k,m+1} + \frac{h_k}{2}\right)}, z_{0,1}^{*k,m} = \left(r_k + \frac{\tau}{2} \right) e^{i\left(\theta_{k,m+1} + \frac{h_k}{2}\right)}.$$

$$D_{k,m} = \left\{ \zeta \mid \zeta = r e^{i\theta}, r_k \leq r \leq r_{k+1}, 1 \leq k \leq N-1, \right. \\ \left. \theta_{k,m} \leq \theta \leq \theta_{k,m+1}, 0 \leq m \leq M_k - 1 \right\} \text{ dir.}$$

$D_{k,m}$, $1 \leq k \leq N-1, 0 \leq m \leq M_{k-1}$ bölgede fonksiyonun birinci mertebeden iki boyutlu spline ile yaklaşımı kullanılmıştır:

$$\rho(z) \approx a_{km} z + b_{km} \bar{z} + c_{km} (z^2 - \bar{z}^2) + d_{km}, z \in D_{k,m}.$$

$a_{km}, b_{km}, c_{km}, d_{km}$ katsayılarını, köşe noktalarda fonksiyonun değeri spline yaklaşımın değeri ile aynı değere sahip olma şartlarından hesaplanmıştır:

$$\rho(z_{0,0}^{k,m}) = a_{km} z_{0,0}^{k,m} + b_{km} \overline{z_{0,0}^{k,m}} + c_{km} \left[\left(z_{0,0}^{k,m} \right)^2 - \overline{z_{0,0}^{k,m}}^2 \right] + d_{km},$$

$$\rho(z_{1,0}^{k,m}) = a_{km} z_{1,0}^{k,m} + b_{km} \overline{z_{1,0}^{k,m}} + c_{km} \left[\left(z_{1,0}^{k,m} \right)^2 - \overline{z_{1,0}^{k,m}}^2 \right] + d_{km},$$

$$\rho(z_{1,1}^{k,m}) = a_{km} z_{1,1}^{k,m} + b_{km} \overline{z_{1,1}^{k,m}} + c_{km} \left[\left(z_{1,1}^{k,m} \right)^2 - \overline{z_{1,1}^{k,m}}^2 \right] + d_{km},$$

$$\rho(z_{0,1}^{k,m}) = a_{km} z_{0,1}^{k,m} + b_{km} \overline{z_{0,1}^{k,m}} + c_{km} \left[\left(z_{0,1}^{k,m} \right)^2 - \overline{z_{0,1}^{k,m}}^2 \right] + d_{km}.$$

Karmaşık değerli fonksiyonların spline yaklaşımları uygulanarak iki boyutlu potansiyel integral için ikinci mertebeden doğrulukla yaklaşım formülleri elde edilmiştir. İki boyutlu singüler integralin ikinci mertebeden doğrulukla yaklaşım formülleri sunulmuştur.

İki boyutlu singüler ve potansiyel integralin doğrulukla hata analizleri elde edilmiştir.

MATLAB kullanmak üzere iki boyutlu potansiyel ve singüler integral yaklaşımlarının sayısal örneklerde hata analizi değerlendirmeleri yapılmıştır.

Sonuçların farklı sınır koşullarıyla, karmaşık değişkenli kısmi diferansiyel denklemleri içeren modellerin incelemesinde katkısı olabilir.

Sunulan potansiyel ve singüler integrallerin yaklaşımları iki boyutlu singüler integral denklemlerin sayısal çözümünü bulmakta ve hidrodinamik modellerin sayısal çözümlerini hesaplamakta kullanılabilir.

5. KAYNAKLAR:

- Anderes, E. ve Coram, M. A., 2011. Two-dimensional density estimation using smooth invertible transformation, J. of Stat. Plan. and Infer., 141, 1183-1193.
- Ashyralyev, C., 1994. Numerical Algorithms of the Solution for Singular Integral Equations and Their Applications in Hydrodynamics, Ylym Publishing House Ashgabat.
- Ashyralyev, C. ve Cakir, Z., 2014. Approximate solution of the two-dimensional singular integral equation, AIP Conference Proceedings, 1611, 73-77.
- Ashyralyev, C. ve Monakhov, V.N., 1991. Iterative algorithm for solving two dimensional singular integral equations, Din. Sploshnoi Sredy 101, 21-29.
- Ashyralyev, C. ve Öztürk, B., 2018. Finite difference approximations of first order derivatives of complex-valued functions, AIP Conference Proceedings, 1997, 020054.
- Ashyralyev, C. ve Öztürk, B., 2018. Some approximations of second order derivatives complex-valued function, Bulletin of the Karaganda University-Mathematics 91(3), 17-23.
- Başkan, T., 2010. Kompleks Fonksiyonlar Teorisi, Dora Basım-Yayım-Dağıtım, Bursa.
- Daripa, P. ve Mashat, D., 1998. Singular integral transforms and fast numerical algorithms, Numerical Algorithms 18, 133-157.
- Daripa, P. ve Badea, L., 2002. A fast algorithm for two-dimensional elliptic problems, Numerical Algorithms 30, 199-239.
- Didenko, V.D. ve Silbermann, B., 2001. On the approximate solution of some two-dimensional singular integral equations, Math. Meth. Appl. Sci. 24, 1125-1138.
- Gohberg, I. ve Goldberg, S. ve Kaashoek, M.A., 2000. Basic Classes of Linear Operators, Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Berlin.
- Didenko, V.D. ve Silbermann, B., 2001. On the approximate solution of some two-dimensional singular integral equations, Math. Meth. Appl. Sci. 24, 1125-1138.
- Gohberg, I. ve Goldberg, S. ve Kaashoek, M.A., 2000. Basic Classes of Linear Operators, Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Berlin.
- Ismail, A.S., 2006. On the numerical solution of two-dimensional singular integral equation, Applied Mathematics and Computation, 173(1), 389-393.

- Kvasov, B., 2000. Shape Preserving Spline Approximation, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore.
- Mathews, J.H. ve Howell, R.W., 2012. Complex Analysis For Mathematics and Engineering — Sixth Edition, Jones & Bartlett Learning.
- Monakhov, V., 1983. Boundary-Value Problems with Free Boundaries for Elliptic Systems of Equations. Translations of Mathematical Monographs (AMS), Providence, Rhode Island.
- Muskhelishvili, N.I., 1953. Singular Integral Equations Noordhoff International Publishing, Dover Publications, Inc., Mineola, New York.
- Mustafa, N. ve Ardil, C., 2012. International Journal of Mathematical, Computational Science and Engineering 6, 26-32.
- Pompeiu, D., 1912. Sur une classe de fonctions d'une variable complexe, Rend. Circolo Mat. Palermo 33, 108-113.
- Samaraskii, A.A., 2001. The Theory of Difference Schemes, Marcell Dekker, Inc., New York, USA.
- Rogosin, S.V., 2006. On nonlinear Vekua type equations, Nonlinear Analysis: Modeling and Control 11, 187-200.
- Vekua, I.N., 1962. Generalized Analytic Functions, Pergamon Press, Oxford.
- Zavalov, Yu. S., Kvasov, B.I. ve Miroshnichenko, V.L., 1980. Methods of Spline Functions, Nauka, Moscow.

6. EKLER

6.1. Katsayıların Sembolik Tanımı Kodları

```
function Cozum=denklem(f)
% Sembolik değişkenleri tanımlayalım
syms z00 z10 z11 z01 r00 r10 r11 r01 a b c d t
f=a*t+b*conj(t)+c*(t*t-conj(t)*conj(t))+d
% f fonksiyonunda z yerine sırasıyla z00, z10, z11, z01 değerlerini yazalım
X=subs(f,t,z00);
Y=subs(f,t,z10);
Z=subs(f,t,z11);
T=subs(f,t,z01);
% Solve komutu ile X==x, Y==y, Z==z, T==t denklem sistemini çözelim.
Cozum=solve(X==r00,Y==r10,Z==r11,T==r01,a,b,c,d);
```

6.2. Birinci Mertebe Potansiyel İntegral Yaklaşımları için MATLAB Kodları

```
function ts(N)
tau=1/N;
for k=1:N; r(k)=k*tau; end;
for k=1:N; Mk(k)=2*k+1; h(k)=2*pi/Mk(k);
    for m=1:Mk(k)+1; o(k,m)=-pi+(m-1)*h(k);
end;end;
l=0;
for k=1:N;
    for m=1:Mk(k)+1; l=l+1; q(k,m)=l;
end;end;
aa=l0; for k=1:N;
    for m=1:Mk(k)+1;
l=q(k,m); z(l)=exp(i*o(k,m))*r(k);    zp(l)=exp(i*(o(k,m)+h(k)/2))*(r(k)+tau/2);
    end;end;for u=1:N;
for v=1:Mk(u)+1; ju=q(u,v); zz=zp(ju);
```

```

for k=1:N-1; for m=1:Mk(k);
    l=q(k,m); z00=z(l); z01=z(q(k,m+1)); z10=r(k+1)*exp(i*o(k,m));
    z11=r(k+1)*exp(i*o(k,m+1));
    t1=conj(z01)/z01*(z11-z01+zz*log((z11-zz)/(z01-zz)));
    t2=z10*conj(z10)/zz*log((z10-zz)*z11/((z11-zz)*z10));
    t3=conj(z00)/z00*(z00-z10+zz*log((z00-zz)/(z10-zz)));
    t4=z00*conj(z00)/zz*log((z01-zz)*z00/((z00-zz)*z01));
    tkm=t1+t2+t3+t4; tkm=tkm/(2*pi*i);
if abs(zz)<=r(k+1)& abs(zz)>=r(k)& angle(zz)<=o(k,m+1) & angle(zz)>=o(k,m);
    too(ju,l)=conj(zz)+tkm;
else
    too(ju,l)=tkm;
end; end; end; end; end;
for u=1:N-1; for v=1:Mk(u);
    s=0; ju=q(u,v);
for k=1:N-1; for m=1:Mk(k);
    l=q(k,m); z00=z(l); s=s+too(ju,l)*ro(z00);
end; end;
tt(ju)=s; et(ju)=t(zp(ju)); errs(ju)=abs(tt(ju)-et(ju));
end; end;
aaa=max(errs)
for k=1:N-1;
    for m=1:Mk(k);
l=q(k,m); z00=z(l); z01=z(q(k,m+1)); z10=r(k+1)*exp(i*o(k,m));
z11=r(k+1)*exp(i*o(k,m+1));
t1=conj(z01)/z01*(z11-z01); t2=conj(z10)*(z10-z11)/z11;
t3=conj(z00)/z00*(z00-z10); t4=conj(z01)*(z01-z00)/z00;
tkm=t1+t2+t3+t4; to(l)=-1/(2*pi*i)*tkm;
end;end;
s=0;
for k=1:N-1;
    for m=1:Mk(k);
        l=q(k,m); s=s+to(l)*ro(z(l));
    end;end;

```

```

function esro=ro(z)
esro=z^2-(conj(z))^2;
function estx=t(z)
if abs(z)<=1 & abs(z)>0
estx=z^2*conj(z)-z-(conj(z))^3/3;
else
    estx=0;
end;

```

6.3. Birinci Mertebe Singüler İntegral Yaklaşımları için MATLAB Kodları

```

function s(N)
l=1;tau=l/N;
for k=1:N;
    r(k)=k*tau;
end;
for k=1:N;
    Mk(k)=2*k+1;    h(k)=2*pi/Mk(k);
    for m=1:Mk(k)+1;
        o(k,m)=-pi+(m-1)*h(k);
    end;end;
j=0;
for k=1:N;
    for m=1:Mk(k)+1;
        j=j+1; q(k,m)=j;
    end;end;
ss=j
for k=1:N;
    for m=1:Mk(k)+1;
        j=q(k,m);    z(j)=exp(i*o(k,m))*r(k); zp(j)=exp(i*(o(k,m)+h(k)/2))*(r(k)+tau/2);
    end;end;
for u=1:N;
    for v=1:Mk(u)+1;

```

```

    ju=q(u,v);    zz=zp(ju);
for k=1:N-1;
    for m=1:Mk(k);
        j=q(k,m); z00=z(j); z01=z(j+1); z10=z(j)+tau*exp(i*o(k,m));
        z11=z(j+1)+tau*exp(i*o(k,m+1));
        s1=conj(z01)/z01*(log((z11-zz)/(z01-zz))+zz*(z11-z01)/((z11-zz)*(z01-zz)));
        s2=z10*conj(z10)/zz*((z10-z11)/((z11-zz)*(z10zz))+1/zz*log((z11zz)*z10/z11/(z10zz)));
        s3=conj(z10)/z10*(log((z00-zz)/(z10-zz))+zz*(z00-z10)/((z00-zz)*(z10-zz)));
        s4=z01*conj(z01)/zz*((z01-z00)/((z00-zz)*(z01-zz)) +1/zz*log((z00-zz)
        *z01/z00/(z01 zz))); skm=s1+s2+s3+s4; skm=1/(2*pi*i)*skm; soo(ju,j)=skm;
    end;end; end;end;
for u=1:N-1;
    for v=1:Mk(u);
        ss=0;    ju=q(u,v);
for k=1:N-1;
    for m=1:Mk(k);
        j=q(k,m);ss=ss+soo(ju,j)*ro(z(j));
    end;end;
s(ju)=ss;errs(ju)=abs(s(ju)-exacts(zp(ju)));
end; end;
sss=max(errs);sss=sqrt(sss*pi)*tau
function esro=ro(z)
esro=z^2-(conj(z))^2;
function estx=exacts(z)
estx=2*z*conj(z)-1;

```

6.4. İkinci Mertebe Potansiyel İntegral Yaklaşımların MATLAB Kodları

```

function t2(N)
l=1;M=1;tau=l/N;
for k=1:N;
    r(k)=k*tau; rp(k)=r(k)+tau/2;
end;

```

```

for k=1:N;
    Mk(k)=(2*k+1)*M; h(k)=2*pi/Mk(k);
    for m=1:Mk(k)+1;
        o(k,m)=-pi+(m-1)*h(k); op(k,m)=o(k,m)+h(k)/2;
    end;end;
j=0;
for k=1:N;
    for m=1:Mk(k)+1;
        j=j+1; q(k,m)=j;
    end;end;
ss=j; too1=zeros(j);
too2=too1;too3=too1;too4=too1;
for k=1:N;
    for m=1:Mk(k)+1;
        j=q(k,m); z(j)=exp(i*o(k,m))*r(k); zp(j)=exp(i*op(k,m))*rp(k);
    end;end;
for u=1:N;
    for v=1:Mk(u)+1;
        ju=q(u,v); zz=zp(ju);
        for k=1:N-1;
            for m=1:Mk(k);
                j=q(k,m); z00=z(j); z10=r(k+1)*exp(i*o(k,m)); z11=r(k+1)*exp(i*(o(k,m)+h(k)));
                z01=r(k)*exp(i*(o(k,m)+h(k)));
                %too1 d 1
                t1=conj(z00)/z00*(z10-z00+zz*log((z10-zz)/(z00-zz)));
                t2=z11*conj(z11)/zz*log((z11-zz)*z10/(z10-zz)/z11);
                t3=conj(z11)/z11*(z01-z11+zz*log((z01-zz)/(z11-zz)));
                t4=z00*conj(z00)/zz*log((z00-zz)*z01/(z01-zz)/z00);
                tkm=t1+t2+t3+t4; tkm=-1/(2*pi*i)*tkm;
                if op(u,v)<=o(k,m+1)& op(u,v)>=o(k,m) & r(k)<=rp(u)& r(k+1)>=rp(u)
                    too1(ju,j)=conj(zz)+tkm; else too1(ju,j)=tkm;
                end;
            end;
        end;
    end;
    %too2 c z^2-conj(zz)^2

```

```

t1=((conj(z00)/z00)-(conj(z00)/z00)^3/3)*(z10^3/3-z00^3/3+zz*z10^2/2-
zz*z00^2/2+zz^2*(z10-z00)+zz^3*log((z10-zz)/(z00-zz)));
t2=(z10*conj(z10))*(z11-z10+zz*log((z11-zz)/(z10-zz)))-(z10*conj(z10))^3/3*(-
1/zz^3*log(z11/z10)+1/zz^2*(1/z11-1/z10)+1/(2*zz)*(1/z11^2-1/z10^2)+1/zz^3*log((z11-
zz)/(z10-zz)));
t3=((conj(z01)/z01)-(conj(z01)/z01)^3/3)*(z01^3/3-z11^3/3+zz*z01^2/2-
zz*z11^2/2+zz^2*(z01-z11)+zz^3*log((z01-zz)/(z11-zz)));
t4=(z00*conj(z00))*(z00-z01+zz*log((z00-zz)/(z01-zz)))-(z00*conj(z00))^3/3*(-
1/zz^3*log(z00/z01)+1/zz^2*(1/z00-1/z01)+1/(2*zz)*(1/z00^2-1/z01^2)+1/zz^3*log((z00-
zz)/(z01-zz)));
tkm=t1+t2+t3+t4; tkm=-1/(2*pi*i)*tkm;
if op(u,v)<=o(k,m+1)& op(u,v)>=o(k,m) & r(k)<=rp(u)& r(k+1)>=rp(u)
    too2(ju,j)=zz*zz*conj(zz)-(conj(zz))^3/3+tkm; else too2(ju,j)=tkm;
end;
%too3 b conj(zz)
t1=1/2*(conj(z00)/z00)^2*(z10^2/2-z00^2/2+zz*z10-zz*z00
+zz^2*log((z10-zz)/(z00-zz)));
t2=1/2*(conj(z11)*z11)^2*(1/zz^2*log(z10*(z11-zz)/(z11*(z10-zz)))
+1/zz*(1/z11-1/z10));
t3=1/2*(conj(z01)/z01)^2*(z01^2/2-z11^2/2+zz*z01-zz*z11
+zz^2*log((z01-zz)/(z11-zz)));
t4=1/2*(conj(z00)*z00)^2*(1/zz^2*log(z01*(z00-zz)/(z00*(z01-zz)))
+1/zz*(1/z00-1/z01)); tkm=t1+t2+t3+t4; tkm=-1/(2*pi*i)*tkm;
if op(u,v)<=o(k,m+1)& op(u,v)>=o(k,m) & r(k)<=rp(u)& r(k+1)>=rp(u)
    too3(ju,j)=(conj(zz))^2/2+tkm; else too3(ju,j)=tkm;
end;
%t004 a z
t1=(conj(z00)/z00)*(z10^2/2-z00^2/2+zz*z10-zz*z00+zz^2*log((z10-zz)/(z00-zz)));
t2=(z10*conj(z10))*log((z11-zz)/(z10-zz));
t3=(conj(z11)/z11)*(z01^2/2-z11^2/2+zz*z01-zz*z11+zz^2*log((z01-zz)/(z11-zz)));
t4=(z00*conj(z00))*log((z00-zz)/(z01-zz));
tkm=t1+t2+t3+t4;
tkm=-1/(2*pi*i)*tkm;

```

```

if op(u,v)<=o(k,m+1)& op(u,v)>=o(k,m) & r(k)<=rp(u)& r(k+1)>=rp(u)
too4(ju,j)=zz*conj(zz)+tkm;
else too4(ju,j)=tkm;
end; end;end; end;end;
for u=1:N;
for v=1:Mk(u)+1;
ss=0; ju=q(u,v);
for k=1:N-1;
for m=1:Mk(k);
j=q(k,m); z00=z(j); z10=r(k+1)*exp(i*o(k,m)); z11=r(k+1)*exp(i*(o(k,m)+h(k)));
z01=r(k)*exp(i*(o(k,m)+h(k))); r00=ro(z00); r01=ro(z01); r10=ro(z10); r11=ro(z11);
a=(r00*z01^2*conj(z10) - r00*z10^2*conj(z01) - r01*z00^2*conj(z10)
+ r01*z10^2*conj(z00) + r10*z00^2*conj(z01) - r10*z01^2*conj(z00)
- r00*z01^2*conj(z11) + r00*z11^2*conj(z01) + r01*z00^2*conj(z11)
- r01*z11^2*conj(z00) - r11*z00^2*conj(z01) + r11*z01^2*conj(z00)
+ r00*z10^2*conj(z11) - r00*z11^2*conj(z10) - r10*z00^2*conj(z11)
+ r10*z11^2*conj(z00) + r11*z00^2*conj(z10) - r11*z10^2*conj(z00)
- r01*z10^2*conj(z11) + r01*z11^2*conj(z10) + r10*z01^2*conj(z11)
- r10*z11^2*conj(z01) - r11*z01^2*conj(z10) + r11*z10^2*conj(z01)
+ r00*conj(z01)*conj(z10)^2 - r00*conj(z01)^2*conj(z10) - r01*conj(z00)*conj(z10)^2
+ r01*conj(z00)^2*conj(z10) + r10*conj(z00)*conj(z01)^2 - r10*conj(z00)^2*conj(z01)
- r00*conj(z01)*conj(z11)^2 + r00*conj(z01)^2*conj(z11) + r01*conj(z00)*conj(z11)^2
- r01*conj(z00)^2*conj(z11) - r11*conj(z00)*conj(z01)^2 + r11*conj(z00)^2*conj(z01)
+ r00*conj(z10)*conj(z11)^2 - r00*conj(z10)^2*conj(z11) - r10*conj(z00)*conj(z11)^2
+ r10*conj(z00)^2*conj(z11) + r11*conj(z00)*conj(z10)^2 - r11*conj(z00)^2*conj(z10)
- r01*conj(z10)*conj(z11)^2 + r01*conj(z10)^2*conj(z11) + r10*conj(z01)*conj(z11)^2
- r10*conj(z01)^2*conj(z11) - r11*conj(z01)*conj(z10)^2
+ r11*conj(z01)^2*conj(z10))/(z00*z01^2*conj(z10) - z00*z10^2*conj(z01)
+ z01*z10^2*conj(z00) - z00^2*z01*conj(z10) + z00^2*z10*conj(z01)
- z01^2*z10*conj(z00) - z00*z01^2*conj(z11) + z00*z11^2*conj(z01)
- z01*z11^2*conj(z00) + z00^2*z01*conj(z11) - z00^2*z11*conj(z01)
+ z01^2*z11*conj(z00) + z00*z10^2*conj(z11) - z00*z11^2*conj(z10)
+ z10*z11^2*conj(z00) - z00^2*z10*conj(z11) + z00^2*z11*conj(z10)

```

$$\begin{aligned}
& - z_{10}^2 z_{11} \text{conj}(z_{00}) - z_{01} z_{10}^2 \text{conj}(z_{11}) + z_{01} z_{11}^2 \text{conj}(z_{10}) \\
& - z_{10} z_{11}^2 \text{conj}(z_{01}) + z_{01}^2 z_{10} \text{conj}(z_{11}) - z_{01}^2 z_{11} \text{conj}(z_{10}) \\
& + z_{10}^2 z_{11} \text{conj}(z_{01}) + z_{00} \text{conj}(z_{01}) \text{conj}(z_{10})^2 - z_{00} \text{conj}(z_{01})^2 \text{conj}(z_{10}) \\
& - z_{01} \text{conj}(z_{00}) \text{conj}(z_{10})^2 + z_{01} \text{conj}(z_{00})^2 \text{conj}(z_{10}) + z_{10} \text{conj}(z_{00}) \text{conj}(z_{01})^2 \\
& - z_{10} \text{conj}(z_{00})^2 \text{conj}(z_{01}) - z_{00} \text{conj}(z_{01}) \text{conj}(z_{11})^2 + z_{00} \text{conj}(z_{01})^2 \text{conj}(z_{11}) \\
& + z_{01} \text{conj}(z_{00}) \text{conj}(z_{11})^2 - z_{01} \text{conj}(z_{00})^2 \text{conj}(z_{11}) - z_{11} \text{conj}(z_{00}) \text{conj}(z_{01})^2 \\
& + z_{11} \text{conj}(z_{00})^2 \text{conj}(z_{01}) + z_{00} \text{conj}(z_{10}) \text{conj}(z_{11})^2 - z_{00} \text{conj}(z_{10})^2 \text{conj}(z_{11}) \\
& - z_{10} \text{conj}(z_{00}) \text{conj}(z_{11})^2 + z_{10} \text{conj}(z_{00})^2 \text{conj}(z_{11}) + z_{11} \text{conj}(z_{00}) \text{conj}(z_{10})^2 \\
& - z_{11} \text{conj}(z_{00})^2 \text{conj}(z_{10}) - z_{01} \text{conj}(z_{10}) \text{conj}(z_{11})^2 + z_{01} \text{conj}(z_{10})^2 \text{conj}(z_{11}) \\
& + z_{10} \text{conj}(z_{01}) \text{conj}(z_{11})^2 - z_{10} \text{conj}(z_{01})^2 \text{conj}(z_{11}) - z_{11} \text{conj}(z_{01}) \text{conj}(z_{10})^2 \\
& + z_{11} \text{conj}(z_{01})^2 \text{conj}(z_{10});
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b = & (r_{00} z_{01} z_{10}^2 - r_{00} z_{01}^2 z_{10} - r_{01} z_{00} z_{10}^2 + r_{01} z_{00}^2 z_{10} + r_{10} z_{00} z_{01}^2 \\
& - r_{10} z_{00}^2 z_{01} - r_{00} z_{01} z_{11}^2 + r_{00} z_{01}^2 z_{11} + r_{01} z_{00} z_{11}^2 - r_{01} z_{00}^2 z_{11} \\
& - r_{11} z_{00} z_{01}^2 + r_{11} z_{00}^2 z_{01} + r_{00} z_{10} z_{11}^2 - r_{00} z_{10}^2 z_{11} - r_{10} z_{00} z_{11}^2 \\
& + r_{10} z_{00}^2 z_{11} + r_{11} z_{00} z_{10}^2 - r_{11} z_{00}^2 z_{10} - r_{01} z_{10} z_{11}^2 + r_{01} z_{10}^2 z_{11} \\
& + r_{10} z_{01} z_{11}^2 - r_{10} z_{01}^2 z_{11} - r_{11} z_{01} z_{10}^2 + r_{11} z_{01}^2 z_{10} \\
& - r_{00} z_{01} \text{conj}(z_{10})^2 + r_{00} z_{10} \text{conj}(z_{01})^2 + r_{01} z_{00} \text{conj}(z_{10})^2 \\
& - r_{01} z_{10} \text{conj}(z_{00})^2 - r_{10} z_{00} \text{conj}(z_{01})^2 + r_{10} z_{01} \text{conj}(z_{00})^2 \\
& + r_{00} z_{01} \text{conj}(z_{11})^2 - r_{00} z_{11} \text{conj}(z_{01})^2 - r_{01} z_{00} \text{conj}(z_{11})^2 \\
& + r_{01} z_{11} \text{conj}(z_{00})^2 + r_{11} z_{00} \text{conj}(z_{01})^2 - r_{11} z_{01} \text{conj}(z_{00})^2 \\
& - r_{00} z_{10} \text{conj}(z_{11})^2 + r_{00} z_{11} \text{conj}(z_{10})^2 + r_{10} z_{00} \text{conj}(z_{11})^2 \\
& - r_{10} z_{11} \text{conj}(z_{00})^2 - r_{11} z_{00} \text{conj}(z_{10})^2 + r_{11} z_{10} \text{conj}(z_{00})^2 \\
& + r_{01} z_{10} \text{conj}(z_{11})^2 - r_{01} z_{11} \text{conj}(z_{10})^2 - r_{10} z_{01} \text{conj}(z_{11})^2 \\
& + r_{10} z_{11} \text{conj}(z_{01})^2 + r_{11} z_{01} \text{conj}(z_{10})^2 \\
& - r_{11} z_{10} \text{conj}(z_{01})^2) / (z_{00} z_{01}^2 \text{conj}(z_{10}) - z_{00} z_{10}^2 \text{conj}(z_{01}) \\
& + z_{01} z_{10}^2 \text{conj}(z_{00}) - z_{00}^2 z_{01} \text{conj}(z_{10}) + z_{00}^2 z_{10} \text{conj}(z_{01}) \\
& - z_{01}^2 z_{10} \text{conj}(z_{00}) - z_{00} z_{01}^2 \text{conj}(z_{11}) + z_{00} z_{11}^2 \text{conj}(z_{01}) \\
& - z_{01} z_{11}^2 \text{conj}(z_{00}) + z_{00}^2 z_{01} \text{conj}(z_{11}) - z_{00}^2 z_{11} \text{conj}(z_{01}) \\
& + z_{01}^2 z_{11} \text{conj}(z_{00}) + z_{00} z_{10}^2 \text{conj}(z_{11}) - z_{00} z_{11}^2 \text{conj}(z_{10}) \\
& + z_{10} z_{11}^2 \text{conj}(z_{00}) - z_{00}^2 z_{10} \text{conj}(z_{11}) + z_{00}^2 z_{11} \text{conj}(z_{10}) \\
& - z_{10}^2 z_{11} \text{conj}(z_{00}) - z_{01} z_{10}^2 \text{conj}(z_{11}) + z_{01} z_{11}^2 \text{conj}(z_{10}) \\
& - z_{10} z_{11}^2 \text{conj}(z_{01}) + z_{01}^2 z_{10} \text{conj}(z_{11}) - z_{01}^2 z_{11} \text{conj}(z_{10}) \\
& + z_{10}^2 z_{11} \text{conj}(z_{01}) + z_{00} \text{conj}(z_{01}) \text{conj}(z_{10})^2 - z_{00} \text{conj}(z_{01})^2 \text{conj}(z_{10})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - z_{01} \text{conj}(z_{00}) \text{conj}(z_{10})^2 + z_{01} \text{conj}(z_{00})^2 \text{conj}(z_{10}) + z_{10} \text{conj}(z_{00}) \text{conj}(z_{01})^2 \\
& - z_{10} \text{conj}(z_{00})^2 \text{conj}(z_{01}) - z_{00} \text{conj}(z_{01}) \text{conj}(z_{11})^2 + z_{00} \text{conj}(z_{01})^2 \text{conj}(z_{11}) \\
& + z_{01} \text{conj}(z_{00}) \text{conj}(z_{11})^2 - z_{01} \text{conj}(z_{00})^2 \text{conj}(z_{11}) - z_{11} \text{conj}(z_{00}) \text{conj}(z_{01})^2 \\
& + z_{11} \text{conj}(z_{00})^2 \text{conj}(z_{01}) + z_{00} \text{conj}(z_{10}) \text{conj}(z_{11})^2 - z_{00} \text{conj}(z_{10})^2 \text{conj}(z_{11}) \\
& - z_{10} \text{conj}(z_{00}) \text{conj}(z_{11})^2 + z_{10} \text{conj}(z_{00})^2 \text{conj}(z_{11}) + z_{11} \text{conj}(z_{00}) \text{conj}(z_{10})^2 \\
& - z_{11} \text{conj}(z_{00})^2 \text{conj}(z_{10}) - z_{01} \text{conj}(z_{10}) \text{conj}(z_{11})^2 + z_{01} \text{conj}(z_{10})^2 \text{conj}(z_{11}) \\
& + z_{10} \text{conj}(z_{01}) \text{conj}(z_{11})^2 - z_{10} \text{conj}(z_{01})^2 \text{conj}(z_{11}) - z_{11} \text{conj}(z_{01}) \text{conj}(z_{10})^2 \\
& + z_{11} \text{conj}(z_{01})^2 \text{conj}(z_{10}));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c = & -(r_{00} z_{01} \text{conj}(z_{10}) - r_{00} z_{10} \text{conj}(z_{01}) - r_{01} z_{00} \text{conj}(z_{10}) + r_{01} z_{10} \text{conj}(z_{00}) \\
& + r_{10} z_{00} \text{conj}(z_{01}) - r_{10} z_{01} \text{conj}(z_{00}) - r_{00} z_{01} \text{conj}(z_{11}) + r_{00} z_{11} \text{conj}(z_{01}) \\
& + r_{01} z_{00} \text{conj}(z_{11}) - r_{01} z_{11} \text{conj}(z_{00}) - r_{11} z_{00} \text{conj}(z_{01}) + r_{11} z_{01} \text{conj}(z_{00}) \\
& + r_{00} z_{10} \text{conj}(z_{11}) - r_{00} z_{11} \text{conj}(z_{10}) - r_{10} z_{00} \text{conj}(z_{11}) + r_{10} z_{11} \text{conj}(z_{00}) \\
& + r_{11} z_{00} \text{conj}(z_{10}) - r_{11} z_{10} \text{conj}(z_{00}) - r_{01} z_{10} \text{conj}(z_{11}) + r_{01} z_{11} \text{conj}(z_{10}) \\
& + r_{10} z_{01} \text{conj}(z_{11}) - r_{10} z_{11} \text{conj}(z_{01}) - r_{11} z_{01} \text{conj}(z_{10}) \\
& + r_{11} z_{10} \text{conj}(z_{01}))/ (z_{00} z_{01}^2 \text{conj}(z_{10}) - z_{00} z_{10}^2 \text{conj}(z_{01}) \\
& + z_{01} z_{10}^2 \text{conj}(z_{00}) - z_{00}^2 z_{01} \text{conj}(z_{10}) + z_{00}^2 z_{10} \text{conj}(z_{01}) \\
& - z_{01}^2 z_{10} \text{conj}(z_{00}) - z_{00} z_{01}^2 \text{conj}(z_{11}) + z_{00} z_{11}^2 \text{conj}(z_{01}) \\
& - z_{01} z_{11}^2 \text{conj}(z_{00}) + z_{00}^2 z_{01} \text{conj}(z_{11}) - z_{00}^2 z_{11} \text{conj}(z_{01}) \\
& + z_{01}^2 z_{11} \text{conj}(z_{00}) + z_{00} z_{10}^2 \text{conj}(z_{11}) - z_{00} z_{11}^2 \text{conj}(z_{10}) \\
& + z_{10} z_{11}^2 \text{conj}(z_{00}) - z_{00}^2 z_{10} \text{conj}(z_{11}) + z_{00}^2 z_{11} \text{conj}(z_{10}) \\
& - z_{10}^2 z_{11} \text{conj}(z_{00}) - z_{01} z_{10}^2 \text{conj}(z_{11}) + z_{01} z_{11}^2 \text{conj}(z_{10}) \\
& - z_{10} z_{11}^2 \text{conj}(z_{01}) + z_{01}^2 z_{10} \text{conj}(z_{11}) - z_{01}^2 z_{11} \text{conj}(z_{10}) \\
& + z_{10}^2 z_{11} \text{conj}(z_{01}) + z_{00} \text{conj}(z_{01}) \text{conj}(z_{10})^2 - z_{00} \text{conj}(z_{01})^2 \text{conj}(z_{10}) \\
& - z_{01} \text{conj}(z_{00}) \text{conj}(z_{10})^2 + z_{01} \text{conj}(z_{00})^2 \text{conj}(z_{10}) + z_{10} \text{conj}(z_{00}) \text{conj}(z_{01})^2 \\
& - z_{10} \text{conj}(z_{00})^2 \text{conj}(z_{01}) - z_{00} \text{conj}(z_{01}) \text{conj}(z_{11})^2 + z_{00} \text{conj}(z_{01})^2 \text{conj}(z_{11}) \\
& + z_{01} \text{conj}(z_{00}) \text{conj}(z_{11})^2 - z_{01} \text{conj}(z_{00})^2 \text{conj}(z_{11}) - z_{11} \text{conj}(z_{00}) \text{conj}(z_{01})^2 \\
& + z_{11} \text{conj}(z_{00})^2 \text{conj}(z_{01}) + z_{00} \text{conj}(z_{10}) \text{conj}(z_{11})^2 - z_{00} \text{conj}(z_{10})^2 \text{conj}(z_{11}) \\
& - z_{10} \text{conj}(z_{00}) \text{conj}(z_{11})^2 + z_{10} \text{conj}(z_{00})^2 \text{conj}(z_{11}) + z_{11} \text{conj}(z_{00}) \text{conj}(z_{10})^2 \\
& - z_{11} \text{conj}(z_{00})^2 \text{conj}(z_{10}) - z_{01} \text{conj}(z_{10}) \text{conj}(z_{11})^2 + z_{01} \text{conj}(z_{10})^2 \text{conj}(z_{11}) \\
& + z_{10} \text{conj}(z_{01}) \text{conj}(z_{11})^2 - z_{10} \text{conj}(z_{01})^2 \text{conj}(z_{11}) - z_{11} \text{conj}(z_{01}) \text{conj}(z_{10})^2 \\
& + z_{11} \text{conj}(z_{01})^2 \text{conj}(z_{10}));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d = & -(r_{00} z_{01} z_{10}^2 \text{conj}(z_{11}) - r_{00} z_{01} z_{11}^2 \text{conj}(z_{10}) + r_{00} z_{10} z_{11}^2 \text{conj}(z_{01}) \\
& - r_{00} z_{01}^2 z_{10} \text{conj}(z_{11}) + r_{00} z_{01}^2 z_{11} \text{conj}(z_{10}) - r_{00} z_{10}^2 z_{11} \text{conj}(z_{01})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - r_{01} * z_{00} * z_{10}^2 * \text{conj}(z_{11}) + r_{01} * z_{00} * z_{11}^2 * \text{conj}(z_{10}) - r_{01} * z_{10} * z_{11}^2 * \text{conj}(z_{00}) \\
& + r_{01} * z_{00}^2 * z_{10} * \text{conj}(z_{11}) - r_{01} * z_{00}^2 * z_{11} * \text{conj}(z_{10}) + r_{01} * z_{10}^2 * z_{11} * \text{conj}(z_{00}) \\
& + r_{10} * z_{00} * z_{01}^2 * \text{conj}(z_{11}) - r_{10} * z_{00} * z_{11}^2 * \text{conj}(z_{01}) + r_{10} * z_{01} * z_{11}^2 * \text{conj}(z_{00}) \\
& - r_{10} * z_{00}^2 * z_{01} * \text{conj}(z_{11}) + r_{10} * z_{00}^2 * z_{11} * \text{conj}(z_{01}) - r_{10} * z_{01}^2 * z_{11} * \text{conj}(z_{00}) \\
& - r_{11} * z_{00} * z_{01}^2 * \text{conj}(z_{10}) + r_{11} * z_{00} * z_{10}^2 * \text{conj}(z_{01}) - r_{11} * z_{01} * z_{10}^2 * \text{conj}(z_{00}) \\
& + r_{11} * z_{00}^2 * z_{01} * \text{conj}(z_{10}) - r_{11} * z_{00}^2 * z_{10} * \text{conj}(z_{01}) + r_{11} * z_{01}^2 * z_{10} * \text{conj}(z_{00}) \\
& + r_{00} * z_{01} * \text{conj}(z_{10}) * \text{conj}(z_{11})^2 - r_{00} * z_{01} * \text{conj}(z_{10})^2 * \text{conj}(z_{11}) \\
& - r_{00} * z_{10} * \text{conj}(z_{01}) * \text{conj}(z_{11})^2 + r_{00} * z_{10} * \text{conj}(z_{01})^2 * \text{conj}(z_{11}) \\
& + r_{00} * z_{11} * \text{conj}(z_{01}) * \text{conj}(z_{10})^2 - r_{00} * z_{11} * \text{conj}(z_{01})^2 * \text{conj}(z_{10}) \\
& - r_{01} * z_{00} * \text{conj}(z_{10}) * \text{conj}(z_{11})^2 + r_{01} * z_{00} * \text{conj}(z_{10})^2 * \text{conj}(z_{11}) \\
& + r_{01} * z_{10} * \text{conj}(z_{00}) * \text{conj}(z_{11})^2 - r_{01} * z_{10} * \text{conj}(z_{00})^2 * \text{conj}(z_{11}) \\
& - r_{01} * z_{11} * \text{conj}(z_{00}) * \text{conj}(z_{10})^2 + r_{01} * z_{11} * \text{conj}(z_{00})^2 * \text{conj}(z_{10}) \\
& + r_{10} * z_{00} * \text{conj}(z_{01}) * \text{conj}(z_{11})^2 - r_{10} * z_{00} * \text{conj}(z_{01})^2 * \text{conj}(z_{11}) \\
& - r_{10} * z_{01} * \text{conj}(z_{00}) * \text{conj}(z_{11})^2 + r_{10} * z_{01} * \text{conj}(z_{00})^2 * \text{conj}(z_{11}) \\
& + r_{10} * z_{11} * \text{conj}(z_{00}) * \text{conj}(z_{01})^2 - r_{10} * z_{11} * \text{conj}(z_{00})^2 * \text{conj}(z_{01}) \\
& - r_{11} * z_{00} * \text{conj}(z_{01}) * \text{conj}(z_{10})^2 + r_{11} * z_{00} * \text{conj}(z_{01})^2 * \text{conj}(z_{10}) \\
& + r_{11} * z_{01} * \text{conj}(z_{00}) * \text{conj}(z_{10})^2 - r_{11} * z_{01} * \text{conj}(z_{00})^2 * \text{conj}(z_{10}) \\
& - r_{11} * z_{10} * \text{conj}(z_{00}) * \text{conj}(z_{01})^2 \\
& + r_{11} * z_{10} * \text{conj}(z_{00})^2 * \text{conj}(z_{01})) / (z_{00} * z_{01}^2 * \text{conj}(z_{10}) - z_{00} * z_{10}^2 * \text{conj}(z_{01}) \\
& + z_{01} * z_{10}^2 * \text{conj}(z_{00}) - z_{00}^2 * z_{01} * \text{conj}(z_{10}) + z_{00}^2 * z_{10} * \text{conj}(z_{01}) \\
& - z_{01}^2 * z_{10} * \text{conj}(z_{00}) - z_{00} * z_{01}^2 * \text{conj}(z_{11}) + z_{00} * z_{11}^2 * \text{conj}(z_{01}) \\
& - z_{01} * z_{11}^2 * \text{conj}(z_{00}) + z_{00}^2 * z_{01} * \text{conj}(z_{11}) - z_{00}^2 * z_{11} * \text{conj}(z_{01}) \\
& + z_{01}^2 * z_{11} * \text{conj}(z_{00}) + z_{00} * z_{10}^2 * \text{conj}(z_{11}) - z_{00} * z_{11}^2 * \text{conj}(z_{10}) \\
& + z_{10} * z_{11}^2 * \text{conj}(z_{00}) - z_{00}^2 * z_{10} * \text{conj}(z_{11}) + z_{00}^2 * z_{11} * \text{conj}(z_{10}) \\
& - z_{10}^2 * z_{11} * \text{conj}(z_{00}) - z_{01} * z_{10}^2 * \text{conj}(z_{11}) + z_{01} * z_{11}^2 * \text{conj}(z_{10}) \\
& - z_{10} * z_{11}^2 * \text{conj}(z_{01}) + z_{01}^2 * z_{10} * \text{conj}(z_{11}) - z_{01}^2 * z_{11} * \text{conj}(z_{10}) \\
& + z_{10}^2 * z_{11} * \text{conj}(z_{01}) + z_{00} * \text{conj}(z_{01}) * \text{conj}(z_{10})^2 - z_{00} * \text{conj}(z_{01})^2 * \text{conj}(z_{10}) \\
& - z_{01} * \text{conj}(z_{00}) * \text{conj}(z_{10})^2 + z_{01} * \text{conj}(z_{00})^2 * \text{conj}(z_{10}) + z_{10} * \text{conj}(z_{00}) * \text{conj}(z_{01})^2 \\
& - z_{10} * \text{conj}(z_{00})^2 * \text{conj}(z_{01}) - z_{00} * \text{conj}(z_{01}) * \text{conj}(z_{11})^2 + z_{00} * \text{conj}(z_{01})^2 * \text{conj}(z_{11}) \\
& + z_{01} * \text{conj}(z_{00}) * \text{conj}(z_{11})^2 - z_{01} * \text{conj}(z_{00})^2 * \text{conj}(z_{11}) - z_{11} * \text{conj}(z_{00}) * \text{conj}(z_{01})^2 \\
& + z_{11} * \text{conj}(z_{00})^2 * \text{conj}(z_{01}) + z_{00} * \text{conj}(z_{10}) * \text{conj}(z_{11})^2 - z_{00} * \text{conj}(z_{10})^2 * \text{conj}(z_{11}) \\
& - z_{10} * \text{conj}(z_{00}) * \text{conj}(z_{11})^2 + z_{10} * \text{conj}(z_{00})^2 * \text{conj}(z_{11}) + z_{11} * \text{conj}(z_{00}) * \text{conj}(z_{10})^2 \\
& - z_{11} * \text{conj}(z_{00})^2 * \text{conj}(z_{10}) - z_{01} * \text{conj}(z_{10}) * \text{conj}(z_{11})^2 + z_{01} * \text{conj}(z_{10})^2 * \text{conj}(z_{11})
\end{aligned}$$

```

+ z10*conj(z01)*conj(z11)^2 - z10*conj(z01)^2*conj(z11) - z11*conj(z01)*conj(z10)^2
+ z11*conj(z01)^2*conj(z10));
ss=ss+too1(ju,j)*d+too2(ju,j)*c+too3(ju,j)*b+too4(ju,j)*a;
    end;end;
s(ju)=ss;
    end; end;
    ss=0;
for k=1:N-1;
    for m=1:Mk(k);
        j=q(k,m); ss=ss+abs(s(j)-exacts(zp(j)))^2;
    end;
end;
ss=sqrt(ss*pi)*tau;
hata=ss
function esro=ro(z)
esro=1;
function estx=exacts(z)
estx=conj(z);

```

6.5. İkinci Mertebe Singüler İntegral Yaklaşımların MATLAB Kodları

```

function s2(N)
l=1;M=1;tau=l/N;
for k=1:N;
    r(k)=k*tau; rp(k)=r(k)-tau/2;
end;
for k=1:N;
    Mk(k)=(2*k+1)*M; h(k)=2*pi/Mk(k);
    for m=1:Mk(k)+1;
        o(k,m)=-pi+(m-1)*h(k); op(k,m)=o(k,m)+h(k)/2;
    end; end;
j=0;
for k=1:N;

```

```

for m=1:Mk(k)+1;
    j=j+1; q(k,m)=j;
end; end;
ss=j; s=zeros(j); soo1=zeros(j);soo2=soo1;soo3=soo1;soo4=soo1;
for k=1:N;
    for m=1:Mk(k)+1;
        j=q(k,m);    z(j)=exp(i*o(k,m))*r(k);    zp(j)=exp(i*op(k,m))*rp(k);    hs(j)=0;
    end; end;
for u=1:N;
    for v=1:Mk(u)+1;
        ju=q(u,v);    zz=zp(ju);
        for k=1:N-1;
            for m=1:Mk(k);
                j=q(k,m); z00=z(j); z10=r(k+1)*exp(i*o(k,m)); z11=r(k+1)*exp(i*(o(k,m)+h(k)));
                z01=r(k)*exp(i*(o(k,m)+h(k)));
                %soo1 d 1
                s1=conj(z00)/z00*(log((z10-zz)/(z00-zz))+zz*(1/(z00-zz)-1/(z10-zz)));
                s2=z11*conj(z11)*(-1/zz^2*log((z11-zz)*z10/(z10-zz)/z11)
                +1/zz*(1/(z10-zz)-1/(z11-zz)));
                s3=conj(z11)/z11*(log((z01-zz)/(z11-zz))+zz*(1/(z11-zz)-1/(z01-zz)));
                s4=z00*conj(z00)*(-1/zz^2*log((z00-zz)*z01/(z01-zz)/z00)
                +1/zz*(1/(z01-zz)-1/(z00-zz)));
                skm=s1+s2+s3+s4; skm=-1/(2*pi*i)*skm; soo1(ju,j)=skm;
                %soo2 c z^2-conj(z)^2
                s1=(conj(z00)/z00 -1/3*(conj(z00)/z00)^3)*(z10^2/2-z00^2/2+2*zz*(z10-
                z00)+3*zz^2*log((z10-zz)/(z00-zz))-zz^3*(1/(z10-zz)-1/(z00-zz)));
                s2=z10*conj(z10)*(log((z11-zz)/(z10-zz))-zz/(z11-zz)+zz/(z10-zz))-
                (z10*conj(z10))^3/3*(3/zz^4*log(z11/z10)-2/zz^3*(1/z11-1/z10)-1/(2*zz^2)*(1/z11^2-
                1/z10^2)-3/zz^4*log((z11-zz)/(z10-zz))+1/zz^3*(1/(z10-zz)-1/(z11-zz)));
                s3=(conj(z01)/z01 -1/3*(conj(z01)/z01)^3)*(z01^2/2-z11^2/2+2*zz*(z01-
                z11)+3*zz^2*log((z01-zz)/(z11-zz))-zz^3*(1/(z01-zz)-1/(z11-zz)));

```

```

s4=z00*conj(z00)*(log((z00-zz)/(z01-zz))-zz/(z00-zz)+zz/(z01-zz))-
(z01*conj(z01))^3/3*(3/zz^4*log(z00/z01)-2/zz^3*(1/z00-1/z01)-1/(2*zz^2)*(1/z00^2-
1/z01^2)-3/zz^4*log((z00-zz)/(z01-zz))+1/zz^3*(1/(z01-zz)-1/(z00-zz)));
skm=s1+s2+s3+s4; skm=-1/(2*pi*i)*skm;
if op(u,v)<=o(k,m+1)& op(u,v)>=o(k,m) & r(k)<=rp(u)& r(k+1)>=rp(u)
    soo2(ju,j)=2*zz*conj(zz)+skm;
else soo2(ju,j)=skm;
end;
%soo3 b conj(z)
s1=1/2*(conj(z00)/z00)^2*(z10-z00+2*zz*log((z10-zz)/(z00-zz))
-zz^2*(1/(z10-zz)-1/(z00-zz)));
s2=1/2*(conj(z11)*z11)^2*(2/zz^3*log(z11*(z10-zz)/(z10*(z11-zz)))
-1/zz^2*(1/z11-1/z10+1/(z11-zz)-1/(z10-zz)));
s3=1/2*(conj(z01)/z01)^2*(z01-z11+2*zz*log((z01-zz)/(z11-zz))
-zz^2*(1/(z01-zz)-1/(z11-zz)));
s4=1/2*(conj(z00)*z00)^2*(2/zz^3*log(z00*(z01-zz)/z01/(z00-zz))
-1/zz^2*(1/z00-1/z01+1/(z00-zz)-1/(z01-zz)));
skm=s1+s2+s3+s4; skm=-1/(2*pi*i)*skm; soo3(ju,j)=skm;
%s004 a z
s1=conj(z00)/z00*(z10-z00+2*zz*log((z10-zz)/(z00-zz))-zz^2*(1/(z10-zz)-1/(z00-zz)));
s2=z10*conj(z10)*(1/(z10-zz)-1/(z11-zz));
s3=conj(z11)/z11*(z01-z11+2*zz*log((z01-zz)/(z11-zz))-zz^2*(1/(z01-zz)-1/(z11-zz)));
s4=z00*conj(z00)*(1/(z01-zz)-1/(z00-zz));
skm=s1+s2+s3+s4; skm=-1/(2*pi*i)*skm;
if op(u,v)<=o(k,m+1)& op(u,v)>=o(k,m) & r(k)<=rp(u)& r(k+1)>=rp(u)
    soo4(ju,j)=conj(zz)+skm;
else soo4(ju,j)=skm;
end; end; end; end; end;
for u=1:N;
    for v=1:Mk(u)+1;
        ss=0; ju=q(u,v);
    for k=1:N-1;
        for m=1:Mk(k);

```

```

j=q(k,m); z00=z(j); z10=r(k+1)*exp(i*o(k,m)); z11=r(k+1)*exp(i*(o(k,m)+h(k)));
z01=r(k)*exp(i*(o(k,m)+h(k))); r00=ro(z00); r01=ro(z01); r10=ro(z10); r11=ro(z11);
%
%70-74 sayfalardaki a,b,c ve d katsayıları için aynı kodlar eklenecektir.
%
ss=ss+soo1(ju,j)*d+soo2(ju,j)*c+soo3(ju,j)*b+soo4(ju,j)*a;
end; end;
s(ju)=ss; se(ju)=exacts(zp(ju)); hs(ju)=abs(ss-se(ju));
end; end;
ss=0;
for k=1:N-1;
for m=1:Mk(k);
j=q(k,m); ss=ss+abs(s(j)-se(j))^2;
end; end;
ss=sqrt(ss*pi)*tau; hata=ss
%disp(hs)
function esro=ro(z)
esro=z^3;
function estx=exacts(z)
estx=3*z^2*conj(z)-2*z;

```

ÖZGEMİŞ

Sedanur EFE, 12.10.1994' de Ankara'nın Yenimahalle ilçesinde dünyaya geldi. İlk ve ortaokulu Ankara Afet İnan Ortaokulu'nda 2008/2009 eğitim öğretim yılında tamamladı. Ardından lise eğitimini Batıkent Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi Web Tasarım Programcılığı bölümünde 2011/2012 eğitim-öğretim yılında bitirdi. 2013 yılında Gümüşhane Üniversitesi Matematik Mühendisliği bölümüne yerleşip 2017 yılında mezun oldu. 2017 yılında Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü bünyesinde Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda tezli yüksek lisansa başlayıp 2020 yılında tezli yüksek lisans eğitimini tamamladı. Aynı zamanda 2019 yılında eJAAM dergisinde makale yayımladı.