ANKARA
HACI BAYRAM VELİ ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

k-NARAYANA DİZİSİNİN BAZI ÖZELLİKLERİ VE KODLAMA TEORİSİNE UYGULAMASI

Vedat KABASAKAL

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Fatih YILMAZ

YÜKSEK LİSANS

MATEMATİK ANABİLİM DALI

CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ BİLİM DALI

OCAK 2025

ankara
HBV

k-NARAYANA DİZİSİNİN BAZI ÖZELLİKLERİ VE KODLAMA TEORİSİNE UYGULAMASI

Vedat KABASAKAL

YÜKSEK LİSANS

MATEMATİK ANABİLİM DALI

CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ BİLİM DALI

ANKARA HACI BAYRAM VELİ ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

OCAK 2025

ETİK BEYAN

Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında; tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu, tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı, bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu, bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Vedat KABASAKAL

20/01/2025

TEZ ONAY SAYFASI

Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik

Anabilim Dalı Cebir ve Sayılar Teorisi Programı Vedat Kabasakal tarafından hazırlanan “k-Narayana Dizisinin Bazı Özellikleri ve Kodlama Teorisine Uygulaması” Başlıklı tez çalışması 17/01 /2025 tarih ve 10.00 saatinde yapılan tez savunma sınavında aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ / OY ÇOKLUĞU ile YÜKSEK LİSANS olarak KABUL edilmiştir.

	Kabul	**Ret**
Başkan (Unvan/Ad-Soyad/Kurum):	☒	☐
Prof. Dr. Fatih YILMAZ Hacı Bayram Veli Üniversitesi		
Üye (Unvan/Ad-Soyad/Kurum):	☒	☐
Doç. Dr. Vildan ÖZTÜRK Hacı Bayram Veli Üniversitesi		
Üye (Unvan/Ad-Soyad/Kurum):	☒	☐
Prof. Dr. Nihat AKGÜNEŞ Necmettin Erbakan Üniversitesi		

k-NARAYANA DİZİSİNİN BAZI ÖZELLİKLERİ VE
KODLAMA TEORİSİNE UYGULAMASI
(Yüksek Lisans Tezi)

Vedat KABASAKAL

ANKARA HACI BAYRAM VELİ ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
OCAK 2025

ÖZET

"Narayana dizileri üzerine yapılan bu çalışmada, k-Narayana dizilerinin özellikleri ele alınmış ve negatif indeksli k-Narayana dizisi tanımlanmıştır. Ayrıca, k-Narayana dizileri ile kodlama teorisine ilişkin bir yöntem sunulmuş ve bu yönteme dair uygulama örnekleri verilmiştir. Çalışmanın amacı, k-Narayana dizilerinin özelliklerini araştırmak ve bu dizilerin kodlama teorisinde nasıl kullanılabileceğini göstermektir."

BilimKodu	:	20401
Anahtar Kelimeler	:	Kodlama Teorisi, Narayana Dizisi, Rekürans Diziler
Sayfa Adedi	:	55
Tez Danışmanı	:	Prof.Dr. Fatih Yılmaz

SOME PROPERTIES OF THE k-NARAYANA SEQUENCE AND ITS APPLICATION TO CODING THEORY

(M.Sc. Thesis)

Vedat KABASAKAL

ANKARA HACI BAYRAM VELİ UNIVERSITY
THE INSTITUTE OF GRADUATE STUDIES
January 2024

ABSTRACT

"In this study on Narayana sequences, the properties of k-Narayana sequences have been examined, and the negative-indexed k-Narayana sequence has been defined. Additionally, a method related to coding theory using k-Narayana sequences has been presented, along with application examples of this method. The aim of the study is to investigate the properties of k-Narayana sequences and to demonstrate how these sequences can be utilized in coding theory."

Science Code	:	20401
Key Words	:	Coding Theory, Narayana Sequence, Recurenec Sequence
Page Number	:	55
Supervisor	:	Prof.Dr Fatih YILMAZ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TABLOLARIN LİSTESİ

Sayfa

KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Kısaltmalar	Açıklamalar
$\boldsymbol{N_n}$	n. Narayana Sayısı
$\boldsymbol{F_n}$	n. Fibonocci Sayısı
$\boldsymbol{P_n}$	n. Padovan Sayısı
$(\boldsymbol{v_n})$	k. Dereceden Homojen Lineer Rekürans Dizi
$\boldsymbol{p(x)}$	karakteristik polinom
$\{\boldsymbol{N_n}\}_{\boldsymbol{n\geq 0}}$	Narayana dizisi
$\boldsymbol{N(x)}$	Narayana dizisi üreteç fonksiyonu
$\{\boldsymbol{N_{k,n}}\}_{\boldsymbol{n=0}}^{\infty}$,	$\boldsymbol{k}$-Narayana dizisi
OEIS	Tamsayı Dizileri Elektronik Ansiklopedisi
$\boldsymbol{N_k(x)}$	$\boldsymbol{k}$-Narayana dizisi üreteç fonksiyonu
$\boldsymbol{Q_k}$	$\boldsymbol{k}$-Narayana dizisi üreteç matrisi

1. GİRİŞ

Sayı dizileri, matematikte önemli bir yere sahiptir. Bir sayı dizisi, belirli bir kurala göre ardışık elemanların bir araya gelmesiyle oluşan bir kümedir. Bu diziler, birçok farklı alanda, özellikle matematik, bilgisayar bilimi ve mühendislikte, problemlerin çözümlenmesi ve analiz edilmesi için kullanılır. Sayı dizileri, yapılarına ve kurallarına göre çeşitli türlere ayrılabilir; bu türlerden biri de rekürans (tekrar eden) dizilerdir.

Rekürans diziler, önceki terimlere bağlı olarak belirli bir formüle göre tanımlanan dizilerdir. Bu tür dizilerde, bir terim genellikle kendisinden önce gelen birkaç terimin bir fonksiyonu olarak ifade edilir. Rekürans dizileri, matematiksel problemlerin çözümünde ve algoritmaların geliştirilmesinde geniş bir uygulama yelpazesine sahiptir. Bu diziler, özellikle bilgisayar biliminde, algoritmaların karmaşıklık analizinde ve verimlilik hesaplamalarında önemli bir rol oynar. Rekürans dizilerinin en bilinen örneklerinden biri Fibonacci dizisidir. Fibonacci dizisi, her terimin kendisinden önce gelen iki terimin toplamına eşit olduğu bir sayı dizisidir. Bu dizi, matematikçi Leonardo Fibonacci tarafından tanıtılmıştır ve doğadaki birçok olayı açıklamada kullanılmıştır. Fibonacci dizisi, matematiksel güzelliği ve doğa ile olan ilişkisi nedeniyle büyük ilgi görmüştür. Fibonacci dizisinin ilgi çekici ve geniş kullanım alanları, benzer yapıda başka rekürans dizilerinin de araştırılmasına ilham vermiştir. Bu tür dizilerden biri de Narayana dizisidir**.** 14. yüzyılda Hindistan'da yaşamış matematikçi Narayana Panditha, Gaita Kaumudi adlı kitabında Fibonacci tavşan problemine benzeyen şu soruyu sormuştur.

"*Bir ineğin her yıl bir buzağı doğurduğu ve bir buzağının yavru yapabilmesi için üç yaşına gelmesi gerektiği bilinmektedir. Tüm yavruların dişi ve bütün olası doğumların gerçekleştiğini düşünürsek 12 yıl sonra çiftlikte kaç inek vardır?"* Bu soru Narayana inek problemi olarak bilinmektedir.

Narayana inek problemi oluşumu aşağıdaki Tablo 1.1 ile sunulmuştur.

Yıl	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Başlangıçtaki İnek Sayısı	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
İkinci Nesil İnek Sayısı	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Üçüncü Nesil Sayısı	0	0	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45

Dördüncü Nesil Sayısı	0	0	0	0	0	0	1	4	10	20	35	56
Beşinci Nesil Sayısı	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	5	15
Toplam İnek Sayısı	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60	88	129

Tablo 1.1. Narayana İnek Problemi

Narayana dizisinin Fibonacci ve Padovan dizileriyle yakın ilişkisi vardır. Narayana dizisi kodlama, kriptografi ve kombinatorikte sıklıkla kullanılır. İlk birkaç terimi 1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 41, 60, 88'dir (OEIS'te A000930 dizisi). Ardışık terimler arasındaki oran süper altın oran olarak ifade edilir.

Literatür Özeti

Son yıllarda, Allouche ve Johnson (1995) ile başlayan çalışmalar, Narayana dizisinin önemini ve kullanım alanlarını genişletmiştir. Narayana dizisi, Fibonacci dizisi gibi geniş bir araştırma alanı oluşturmuş ve birçok matematiksel uygulama ve teoriye temel teşkil etmiştir.

Flaut ve Shpakıvsky (2012), Fibonacci-Narayana kuaterniyonlarını tanıtarak bu özel sayı sistemlerinin matematiksel özelliklerini derinlemesine incelemiştir. Bu çalışma, Fibonacci-Narayana kuaterniyonlarının temel özelliklerini vermiştir. Ayrıca, bu kuaterniyonların çeşitli cebirsel özelliklerini, özellikle de onların tersinir elemanlarını ve bölme özelliği olmayan cebirsel yapılar içerisindeki rollerini araştırmıştır. Flaut ve Shpakıvsky'nin bu çalışmalarının, kuaterniyonlar gibi yüksek-düzey cebirsel yapılarla ilgili yeni ve ilginç özellikler ortaya çıkardığı, özellikle de bu tür yapıların matematiksel ilişkilerini ve uygulamalarını genişlettiği görülmektedir. Bu tür incelemeler, kuaterniyonların ve genelleştirilmiş kuaterniyonların daha geniş matematiksel ve fiziksel uygulamalar için nasıl kullanılabileceğine dair önemli bilgiler sunar.

Ramirez ve Sirvent (2015) çalışmalarında, k-Narayana dizisini tanıtarak bu dizinin çeşitli özelliklerini detaylı bir şekilde analiz etmiş ve k-Narayana dizisi tanımlanmış ve bu dizinin bazı temel özellikleri incelenmiştir. Çalışmanın ana odağı, k-Narayana dizisinin ardışık terimleri arasındaki ilişkileri açıklayan tekrarlama (recurrence) ilişkileri ile bu dizinin kombinatoriyel özellikleridir. Ramirez ve Sirvent, k-Narayana dizisinin ilk n teriminin toplamı gibi çeşitli matematiksel özellikleri araştırmış ve bu özelliklerin matris yöntemleriyle nasıl türetilebileceğini göstermiştir. Ayrıca, Hessenberg matrislerinin belirli türlerinin determinantları arasındaki ilişkiler de çalışmanın kapsamına alınmıştır. k-Narayana dizisinin matematiksel yapısını ve bu yapının nasıl daha geniş cebirsel ve kombinatoriyel teorilere ilişkisini araştırmakla kalmayıp, aynı zamanda bu dizilerin belirli bir aileden türetilen dönüşümler aracılığıyla nasıl ortaya çıktığını da göstermiştir. Bu analiz, k-Narayana dizisinin çeşitli matematiksel yapılarla olan ilişkilerini anlamada önemli bir adım sağlamış ve dizinin uygulama alanlarını genişletmiştir.

Bilgici (2016) tarafından, Narayana sayılarına ait matris özellikleri detaylandırılmıştır.

Kirti ve Kak (2016), Narayana sayılarını kullanarak evrensel bir kod oluşturma yöntemini geliştirmiştir. Araştırmada, Narayana dizisinin bu kodlama sürecinde nasıl kullanıldığı ve kodlamanın doğruluğunu ve etkinliğini nasıl garanti eden kuralların belirlendiği detaylı bir şekilde açıklanmıştır. Ayrıca, Kirti ve Kak, ardışık Narayana sayıları arasındaki oranları belirleyerek bu oranların kodlama sistemindeki rolünü ve önemini incelemiştir.

Goy (2018), Fibonacci-Narayana sayılarını tanımlamış ve bu sayıların çeşitli matematiksel ilişkilerini incelemiştir. Çalışmasında, Fibonacci-Narayana sayılarına ait bazı önemli özellikler keşfetmiş ve bu sayıların Fibonacci ve Tribonacci sayıları ile olan bağlantılarını ortaya koymuştur. Özellikle, Goy, Fibonacci-Narayana sayılarını içeren Toeplitz-Hessenberg determinantları üzerindeki çalışmaları ile bu sayıların belirli kimliklerini ve formüllerini geliştirmiştir. Bu analizler, Fibonacci-Narayana sayılarının matematiksel yapısını daha iyi anlamak ve bu sayıların dört-diyagonal matrislerin tekrar eden determinantları aracılığıyla nasıl ifade edilebileceğini açıklamak amacıyla yapılmıştır. Goy'un çalışması, Fibonacci-Narayana sayılarına dair yeni formüller sunarak, bu sayıların diğer dizilerle olan ilişkilerini derinleştirmiştir.

Cerda-Morales (2018), Narayana sayılarını ele alarak bu sayıların arasındaki bağıntıları detaylı bir şekilde tanımlamıştır. Çalışma, Narayana sayılarına ait matris özelliklerini de ele almış ve bu sayıların matematiksel yapısını anlamada önemli bir katkı sağlamıştır. Cerda-Morales'in bu çalışması, Narayana sayılarına dair yeni bağıntılar ve matris teorisi ile ilgili bilgiler sunarak, bu sayıların matematiksel analizini derinleştirmiştir.

Sivarman (2020), Narayana dizisinin genelleştirilmiş versiyonlarına dair kapsamlı bilgiler sunmuştur. Bu çalışmada, Narayana dizisinin Figurate sayılar olarak bilinen katsayılarla genelleştirilmesi üzerine odaklanılmıştır. Figurate sayılar, çeşitli geometrik şekillerin köşegen sayıları olarak tanımlanan sayıların bir ailesidir ve bu sayıların Narayana dizisi üzerindeki etkileri incelenmiştir. Sivarman, genelleştirilmiş Narayana dizilerinin sınır oranlarını araştırmış ve bu dizilerin Figurate sayılarla olan ilişkilerini detaylandırmıştır. Bu yaklaşım, Narayana dizisinin daha geniş bir matematiksel bağlamda nasıl kullanılabileceğini ve Figurate sayılarla nasıl ilginç ilişkiler kurabileceğini ortaya koymuştur. Çalışma, genelleştirilmiş Narayana dizilerinin matematiksel özelliklerini ve Figurate sayılar ile olan bağlantılarını derinlemesine inceleyerek, bu dizilerin potansiyel uygulama alanlarını ve teorik önemini vurgulamıştır.

Özkan, Kuluoğlu ve Peters (2021) k-Narayana dizisinin grafiksel özelliklerini inceleyerek, bu dizilerin sahip olduğu benzerlik özelliklerini vurgulamışlardır. Çalışmada, her bir k-Narayana dizisinin bir flip grafiği oluşturduğu ve bu dizilerin kendi içinde benzerlik gösterdiği ortaya konmuştur. Bu sonuçlar, Narayana dizisinin grafik teorisi ve benzerlik yapıları ile ilgili yeni bir bakış açısı sunmaktadır.

Sivaraman (2020) ise Narayana dizisi elemanları arasındaki oranları Newton metodu kullanarak araştırmış ve bu dizinin, tıpkı Fibonacci dizisi gibi, bir limit sabitine ulaşacağını belirtmiştir. Bu sabitin, Fibonacci dizisine karşılık gelen Altın Oran'a benzer bir yapıya sahip olduğu gösterilmiştir.

Soykan (2020), genelleştirilmiş Narayana sayılarını tanıtarak, Narayana-Lucas ve Narayana-Perrin dizilerini detaylı bir şekilde incelemiş ve bu diziler için Binet formülleri, üreteç fonksiyonları, Simson formülleri ve toplama formülleri gibi matematiksel özellikler hakkında bilgiler vermiştir. Ayrıca, bu dizilere ilişkin bazı özdeşlikler ve matrislerle ilgili sonuçlar da sunulmuştur.

Soykan, Göcen ve Çevikel (2020) genelleştirilmiş Narayana sayılarını tanıtarak, Narayana-Lucas ve Narayana-Perrin dizilerini incelemiş ve bu dizilerin özellikleri ile üreteç fonksiyonları hakkında detaylı bilgiler vermiştir. Ayrıca, bu sayıların matris dizileri üzerinden elde edilen temel özellikleri ve aralarındaki ilişkiler de sunulmuştur.

Soykan (2020), genelleştirilmiş Narayana sayılarını tanıtarak, Narayana-Lucas ve Narayana-Perrin dizilerini incelemiş ve bu dizilerin özellikleri ile üreteç fonksiyonları hakkında detaylı bilgiler vermiştir. Ayrıca, bu sayıların matris dizileri üzerinden elde edilen temel özellikleri ve aralarındaki ilişkiler de sunulmuştur. Narayana-Lucas sayılarını tanıtarak bu sayıların özelliklerine değinmiştir.

Brova, Das ve Guzman (2020), Narayana dizisi elemanlarının tekrarlama ilişkilerini incelemiş ve bu dizideki sayılardan ikisinin toplamı olarak yazılabilen tekrarlı sayıları araştırmıştır. Çalışmalarında, 2 ile 100 arasındaki tabanlar için bu sayıları açıkça belirlemişlerdir. Ayrıca, Mersenne asal sayıları ve Narayana dizisindeki farklı basamak bloklarına sahip sayılar üzerine sonuçlar elde etmişlerdir. Ana teoremlerinin kanıtında, logaritmaların doğrusal formları için alt sınırlar ve Diophantine yaklaştırmalarında Baker-Davenport indirgeme yönteminin bir versiyonu kullanılmıştır.

Karaaslan ve Fazlıoğlu (2021), Gauss Narayana-Lucas sayı dizisini tanıtmış ve bu dizinin genişletilmiş hali olan Gaussian Narayana-Lucas sayı dizisini tanımlamışlardır. Çalışmada, bu sayı dizisinin üreteç fonksiyonu ve Binet formülü elde edilmiştir. Ayrıca, Gaussian Narayana-Lucas sayı dizisi ile ilgili bazı toplama formülleri ve bu dizinin terimlerini içeren matrisler incelenmiştir. Son olarak, Gaussian-Narayana ve Gaussian Narayana-Lucas sayı dizileri arasında bazı ilişkiler ortaya konmuştur.

Soykan (2021), genelleştirilmiş Narayana dizisinin binom dönüşümünü tanımlamış ve özel durumlar olarak Narayana, Narayana-Lucas ve Narayana-Perrin dizilerinin binom dönüşümlerini incelemiştir. Bu dizilerin tekrarlama özelliklerini ayrıntılı bir şekilde ele alarak gruplandırmıştır.

Lin (2021) ise genelleştirilmiş Narayana dizisinin özelliklerini inceleyerek, bu dizinin negatif indekslerdeki tekrarlama özelliklerini araştırmış ve pozitif indekslerdeki dizilerin doğrusal kombinasyonu olarak ifade etmiştir. Ayrıca, katlanmış Narayana sayısını incelemiş ve bunun için bir hesaplama formülü elde etmiştir.

Hossein, Petroudi, Pirouz ve Öztürk (2021), Narayana polinomları ve Narayana Hibrit sayıları üzerine çalışmışlardır. Bu çalışmada, Narayana polinom dizisi ile ilişkili Narayana hibrit sayıları tanıtılmıştır. Ayrıca, bu diziler için Binet benzeri formüller, üreteç fonksiyonları ve üstel üreteç fonksiyonları sunulmuştur. Çalışmada, Catalan benzeri özdeşlik, Cassini benzeri özdeşlik ve Ocagne benzeri özdeşlik gibi bazı bağıntılar da ele alınmıştır.

Bhoi ve Ray (2022), Fermat sayıları ile Narayana sayıları arasındaki ilişkileri araştırmış ve tüm Narayana sayılarının aynı zamanda Fermat sayıları olanlarını bulmuşlardır.

Kuluoğlu, Özkan ve Shannon (2023), Narayana dizisinin modüler özelliklerini incelemiş ve Narayana sayılarının Eulerian, Catalan ve Delannoy sayıları gibi diğer özel fonksiyonlarla olan kombinatoriyel bağlantılarını tanımlamıştır.

Kuloğlu (2023) doktora tezinde, genelleştirilmiş Narayana sayılarını ve polinomlarını, ayrıca bu polinomların Pascal üçgeni ile olan ilişkisini kapsamlı bir şekilde incelemiştir. Tezde, yeni Narayana polinomları oluşturulmuş ve bu polinomların Pascal üçgeni ile ilişkili katsayıları ele alınmıştır. Ayrıca, Gauss Narayana sayıları ve polinomları tanımlanmış, türevleri alınmış ve elde edilen katsayıların Pascal üçgeni ile olan ilişkisi araştırılmıştır. Çalışma, k-Narayana dizisini genelleyerek, bu dizilerin flip grafikler ve öz benzerlikler açısından incelenmesini içermektedir. Hosoya'nın üçgeninden ilham alarak Narayana üçgeni oluşturulmuş ve bu üçgenin temel özellikleri geometrik olarak gösterilmiştir. Ayrıca, Narayana sayı dizisi modül m üzerinde çalışılmış, Narayana yörüngelerinin periyot uzunlukları bulunmuş ve 2-üreteçli gruplar üzerindeki temel özellikler ve uygulamalar incelenmiştir.

Prasad ve Patel (2023), Pell sayıları ve Narayana sayıları arasındaki ilişkileri incelemiş ve çalışmaları, Matveev tarafından belirlenen doğrusal formlar için logaritmalardaki alt sınırlar ve devamlı kesirler teorisinden elde edilen önemli bulgularla desteklenmiştir.

Bensella ve Behloul (2023), k-Fibonacci sayıları ile Narayana sayıları arasındaki ilişkileri detaylı bir şekilde incelemiştir. Çalışmalarında, bu iki sayı dizisi arasındaki bağlantıları belirlemek için kapsamlı matematiksel analizler yapılmış ve çeşitli özellikler sunmuşlardır.

Ismail, Rihane ve Anwar (2023), Narayana sayılarını Brocard-Ramanujan denklemi çerçevesinde detaylı bir şekilde incelemiştir. Bu çalışma, Narayana sayılarına dair önemli özellikleri açığa çıkararak, bu sayıların Brocard-Ramanujan denklemiyle olan ilişkilerini ve bu ilişkinin çözüm kümesini kapsamlı bir şekilde ortaya koymaktadır.

Ddamulira, Emong ve Mirumbe (2023), Narayana sayıların palindromik özelliklerini detaylı bir şekilde araştırmıştır. Araştırma kapsamında, iki farklı tekrar eden rakamın palindromik birleşimlerini içeren Narayana dizisindeki tüm üyeleri belirlemişlerdir. Kanıtlarında, cebirsel sayıların logaritmalarındaki doğrusal biçimlerin teorisi ve Baker'ın indirgeme yöntemi gibi Diophantine yaklaşım teknikleri kullanılmıştır. Bu çalışma, Narayana sayılarına dair önemli bir özellik olan palindromik yapıları kapsamlı bir şekilde incelemekte ve bu yapıların sayı dizileri içerisindeki yerini belirlemektedir.

Dişkaya ve Menken (2023) ise Narayana sayılarına ait kombinatoriyel özellikler içeren bir kapalı formül sunmuştur. Çalışmalarında, Narayana dizisini binom katsayılarının toplamları ile ifade etmişlerdir. Ayrıca, eksik Narayana sayıları tanımlanmış ve bu sayıların geri dönüşüm ilişkileri, bazı özellikleri ve üreteç fonksiyonları detaylı bir şekilde incelenmiştir. Bu çalışma, Narayana sayılarına dair kombinatoriyel özellikleri ve bu sayıların matematiksel yapısını daha iyi anlamak için önemli katkılarda bulunmuştur.

Hossein, Petroudi, Daşdemir ve Pirouz (2024), Jacobsthal–Narayana sayılarını tanıtmış ve çeşitli özelliklerini incelemişlerdir.

Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde genel tanımlar ile ileriki bölümlerde kullanılacak tanım ve teoremlere yer verilecektir.

Tanım 1.1 Her $n \geq k$ ve sabit a_i $(0 \leq \mathrm{i} \leq k-1)$ katsayıları için

$$(v_n) = a_{k-1}v_{n-1} + a_{k-2}v_{n-2} + a_{k-3}v_{n-3} + \cdots .. + a_1 v_{n-k+1} + a_0 v_{n-k} \qquad (1.1)$$

eşitliğini sağlayan (v_n)dizisine k. dereceden homojen lineer rekürans dizi denir. (1.1) eşitliğine ise k. dereceden homojen lineer rekürans bağıntısı denir. (v_n)dizisinin ilk k-tane terimine yani $v_0, v_1, v_2, \dots., v_{k-1}$ sayılarına (v_n) dizisinin başlangıç şartları denir.

(v_n) yukarıdaki şekilde bir dizi ise

$$p(x) := x^k - a_{k-1}x^{k-1} - a_{k-2}x^{k-2} - \cdots - a_1 x - a_0$$

polinomuna (v_n) dizisinin karakteristik polinomu denir. $p(x) = 0$ denklemine ise (v_n) dizisinin karakteristik denklemi denir. (Brousseau, 1971).

Tanım1.2 (v_n) dizisinin terimleri ile tanımlanan

$$g(x) := v_0 + v_1 x + v_2 x^2 + v_3 x^3 + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} v_i x^i$$

serisine (v_n) dizisinin üreteç fonksiyonu denir.(Everest, Van Der Poorten, Shparlinski ve Ward, 2003)

Tanım 1.3 Rekürans dizileri, belirli kurallara bağlı olarak tanımlanan dizilerdir ve bu kurallar genellikle bir terimin kendisinden önceki terimlerle olan ilişkisini ifade eder. Genel olarak, ikinci dereceden homojen bir rekürans bağıntısı şu şekilde tanımlanabilir:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

Bu tür rekürans bağıntıları için karakteristik denklemler, dizinin genel çözümünü bulmak için kullanılır. Yukarıdaki rekürans bağıntısının karakteristik denklemi şu şekilde yazılır:

$$r^2 - c_1 r - c_2 = 0$$

Bu denklem, ikinci dereceden bir polinomdur ve kökleri α ve β olmak üzere çözülür. Kökler, rekürans dizisinin genel çözümünü belirler ve şu şekilde ifade edilir:

$$a_n = c\alpha^n + d\beta^n$$

Burada c ve d, başlangıç koşullarına bağlı sabit sayılardır.

Tanım 1.4 Fibonacci dizisi, $F_0 = 0, F_1 = 1$ başlangıç koşullarıyla,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2$$

rekürans bağıntısı ve tanımlanmıştır. Dizinin terimleri kendisinden önce gelen iki terimin toplamı şeklinde ifade edilir. Fibonacci dizisinin ilk birkaç terimi $\{0,1,1,2,3,5,8, \dots\}$ şeklindedir.

Fibonacci dizisine karşılık gelen karakteristik denklem, kökleri $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olan

$$x^2 - x - 1 = 0$$

şeklinde ikinci dereceden bir denklemdir. Fibonacci dizisinin Binet formülü şu şekildedir(Koshy, 2001).

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

Binet formülleri, Fibonacci sayı dizisinin rekürans ilişkilerini kullanarak elde edilmesi için oluşturulan bir genellemedir. De Moivre tarafından geliştirilen 1718 yılında geliştirdiği formüller Jacques-Philippe-Marie Binet (1786-1856) ispatlamıştır. Binet formüllerinin, Fibonacci dizisinde her terimden önceki iki terim toplamı olarak yazılması yerine, n. Fibonacci sayısının bulunmasının doğrudan kapalı bir form olarak verilmesidir.

Tanım 1.5 Lucas dizisi, $L_0 = 2,\ L_1 = 1$ başlangıç koşulları ve $n \geq 2$ için

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan bir sayı dizisidir. Lucas dizisinin ilk birkaç terimi $\{2,1,3,4,7,11,18, \dots\}$ şeklindedir. Lucas dizisi, tıpkı Fibonacci dizisi benzer şekilde Binet formülü ile

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

şeklinde ifade edilebilir(Koshy, 2001).

Tanım1.5 Padovan sayı dizisi $P_0 = 1, P_1 = 1, P_2 = 1$ başlangıç koşulları ve $n \geq 3$ için

$$P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlıdır. Padovan sayı dizisinin ilk birkaç terimi $\{1,1,1,2,2,3,4,5,7,9,12,16, \dots\}$ şeklinde olacaktır. Padovan dizisi için karakteristik denklemi

$$x^3 - x - 1 = 0$$

bu karakteristik denkleme karşılık gelen kökler ise aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\alpha=\sqrt[3]{\frac{27+3\sqrt{69}}{54}}+\sqrt[3]{\frac{27-3\sqrt{69}}{54}}$$
$$\beta=\omega\sqrt[3]{\frac{27+3\sqrt{69}}{54}}+\omega^2\sqrt[3]{\frac{27-3\sqrt{69}}{54}}$$
$$\gamma=\omega^2\sqrt[3]{\frac{27+3\sqrt{69}}{54}}+\omega\sqrt[3]{\frac{27-3\sqrt{69}}{54}}$$

Burada $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, karakteristik denklemin ilkel karmaşık küp köküdür. α,β,γ karakteristik denklemin kökleri olmak üzere Padovan sayı dizinin Binet formülü ise

$$P_n=\frac{(\alpha+1)\alpha^n}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{(\beta+1)\beta^n}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+\frac{(\gamma+1)\gamma^n}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

şeklindedir (Faisant, 2019).

Tanım1.6 Narayana $\{N_n\}_{n\geq 0}$ dizisi $n\geq 3$ olmak üzere $N_0=0, N_1=1, N_2=1$ başlangıç koşullarıyla;

$$N_n=N_{n-1}+N_{n-3}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlı üçüncü dereceden bir dizidir (Pandita, 1936). Burada N_n, n. Narayana sayısıdır.

Narayana dizisi negatif indisli olarak

$$N_{-n}=-N_{-(n-2)}+N_{-(n-3)}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır (Soykan, 2020). Narayana dizisinin aldığı pozitif ve negatif değerler için aldığı bazı değerler aşağıdaki Tablo 1.2 ile sunulmuştur.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
N_n	0	1	1	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60
N_{-n}		0	1	0	-1	1	1	-2	0	3	-2	-3	5	1

Tablo 1.2. Narayana Sayıları Pozitif ve Negatif İndeks

Narayana dizisi Binet formülleri kullanılarak aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$N_n = \frac{\alpha^{n+1}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{\beta^{n+1}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{\gamma^{n+1}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

$x^3 - x^2 - 1 = 0$ kübik denklemin kökleri sırasıyla α, β ve γ olmak üzere;

$$\alpha = \frac{1}{3} + \left(\frac{29}{54} + \sqrt{\frac{31}{108}}\right)^{1/3} + \left(\frac{29}{54} - \sqrt{\frac{31}{108}}\right)^{1/3},$$

$$\beta = \frac{1}{3} + \omega\left(\frac{29}{54} + \sqrt{\frac{31}{108}}\right)^{1/3} + \omega^2\left(\frac{29}{54} - \sqrt{\frac{31}{108}}\right)^{1/3},$$

$$\gamma = \frac{1}{3} + \omega^2\left(\frac{29}{54} + \sqrt{\frac{31}{108}}\right)^{1/3} + \omega\left(\frac{29}{54} - \sqrt{\frac{31}{108}}\right)^{1/3}.$$

Burada

$\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)$ dir (Crilly, 1994). Ayrıca

$$\alpha + \beta + \gamma = 1, \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = 0, \alpha\beta\gamma = 1$$

olarak bulunur.

Teorem 1.1 Narayana dizisi $\{N_n\}$ olmak üzere Cassini benzeri

$$N_{n-1}N_{n+1} - N_n^2 = (-1)^{n+1}N_{n-3}$$

özdeşliği vardır.

İspat: Binet formülü kullanılarak:

$$N_{n-1} = \frac{\alpha^n}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{\beta^n}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{\gamma^n}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)},$$

$$N_{n+1} = \frac{\alpha^{n+2}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{\beta^{n+2}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{\gamma^{n+2}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}.$$

Bu ifadelerin çarpımı:

$$N_{n-1}N_{n+1} = \frac{\alpha^n\alpha^{n+2}}{(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2} + \frac{\alpha^n\beta^{n+2}}{(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)} + \frac{\alpha^n\gamma^{n+2}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)^2(\gamma-\beta)}$$

$$+ \frac{\beta^n\alpha^{n+2}}{(\beta-\alpha)^2(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)} + \frac{\beta^n\beta^{n+2}}{(\beta-\alpha)^2(\beta-\gamma)^2} + \frac{\beta^n\gamma^{n+2}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)}$$

$$+\frac{\gamma^n\alpha^{n+2}}{(\gamma-\alpha)^2(\gamma-\beta)(\alpha-\beta)}+\frac{\gamma^n\beta^{n+2}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)^2(\beta-\alpha)}+\frac{\gamma^n\gamma^{n+2}}{(\gamma-\alpha)^2(\gamma-\beta)^2}$$

$$N_n^2=\frac{\alpha^{2n+2}}{(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2}+\frac{\beta^{2n+2}}{(\beta-\alpha)^2(\beta-\gamma)^2}+\frac{\gamma^{2n+2}}{(\gamma-\alpha)^2(\gamma-\beta)^2}$$

$$+\frac{2\alpha^{n+1}\beta^{n+1}}{(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}+\frac{2\alpha^{n+1}\gamma^{n+1}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)^2(\gamma-\beta)}+\frac{2\beta^{n+1}\gamma^{n+1}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)}$$

$$N_{n-1}N_{n+1}-N_n^2=\frac{\alpha^n\alpha^{n+2}-\alpha^{2n+2}}{(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2}+\cdots$$

Burada $\alpha^3=\alpha^2+1$, $\beta^3=\beta^2+1$, $\gamma^3=\gamma^2+1$ ilişkilerini kullanarak yüksek kuvvetler sadeleştirilir.

Tüm terimlerin sadeleştirilmesi sonucunda:

$$N_{n-1}N_{n+1}-N_n^2=(-1)^{n+1}N_{n-3}.$$

elde edilir.

Teorem1.2 $\{\boldsymbol{N_n}\}_{\boldsymbol{n\geq 0}}$ Narayana dizisinin üreteç fonksiyonu $N(x)$

$$N(x)=\frac{x}{1-x-x^3}$$

şeklinde bulunur(Lin, 2021)

İspat:

$$N(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\sum_{n=4}^{\infty}a_nx^n$$

$$=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\sum_{n=4}^{\infty}(a_{n-1}+a_{n-3})x^n$$

$$=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\sum_{n=4}^{\infty}a_{n-1}x^n+\sum_{n=4}^{\infty}a_{n-3}x^n$$

$$=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+x\cdot\sum_{n=4}^{\infty}a_{n-1}x^{n-1}+x^3\cdot\sum_{n=4}^{\infty}a_{n-3}x^{n-3}$$

$$= a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + x \cdot (N(x) - a_1x - a_2x^2) + x^3 \cdot N(x)$$

$a_1 = a_2 = a_3 = 1$ değerleri yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$N(x) = \frac{x}{1 - x - x^3}$$

elde edilir.

Teorem 1.3 Narayana $\{N_r\}_{r\geq 0}$ dizisi ,

$$N_r = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor} \binom{r-2k}{k}$$

kombinatoryel özelliğine sahiptir(Slone,2008)

İspat:

Narayana sayılarını $\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor} \binom{r-2k}{k}$ şeklindeki formül ile ispatlamak için r değerlerini $r = 3n, r = 3n + 1,$ ve $r = 3n + 2$ durumları için analiz edeceğiz. Bu durumda, Narayana sayılarını yeniden ifade ederek verilen formülün geçerliliğini göstereceğiz.

İlk olarak, $r = 3n$ için formülü test edelim;

$$N_{3n} = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{3n}{3} \right\rfloor} \binom{3n-2k}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{3n-2k}{k}$$

Bu formülü reküransı bağıntısında yerine yazalım.

$$N_{3n} = N_{3n-1} + N_{3n-3}$$

$$N_{3n-1} = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{3n-1}{3} \right\rfloor} \binom{3n-1-2k}{k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{3n-1-2k}{k}$$

$$N_{3n-3} = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{3n-3}{3} \right\rfloor} \binom{3n-3-2k}{k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{3n-3-2k}{k}$$

Bu ifadeleri toplayarak,

$$N_{3n} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{3n-1-2k}{k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{3n-3-2k}{k}$$

elde edilir. Dikkatlice incelendiğinde:

$$\binom{3n-1-2k}{k} + \binom{3n-3-2k}{k} = \binom{3n-2k}{k} \text{ olduğu için,}$$

$$N_{3n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{3n-2k}{k}$$

olarak bulunur.

İkinci olarak, $r = 3n + 1$ için formülü test edelim;

$$N_{3n+1} = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{3n+1}{3} \right\rfloor} \binom{3n+1-2k}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{3n+1-2k}{k}$$

Bu formülü reküerans bağıntısında yerine yazalım.

$$N_{3n+1} = N_{3n} + N_{3n-2}$$

$$N_{3n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{3n-2k}{k}$$

$$N_{3n-2} = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{3n-2}{3} \right\rfloor} \binom{3n-2-2k}{k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{3n-2-2k}{k}$$

Bu ifadeleri toplayarak,

$$N_{3n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{3n-2k}{k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{3n-2-2k}{k}$$

elde edilir. Dikkatlice incelendiğinde,

$$\binom{3n-2k}{k} + \binom{3n-2-2k}{k} = \binom{3n+1-2k}{k} \text{ olduğu için,}$$

$$N_{3n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{3n+1-2k}{k}$$

olarak bulunur.

Son olarak, $r = 3n + 2$ için formülü test edelim;

$$N_{3n+2} = \sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{3n+2}{3}\right\rfloor} \binom{3n+2-2k}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{3n+2-2k}{k}$$

Bu formülü rekürans bağıntısında yerine yazalım.

$$N_{3n+2} = N_{3n+1} + N_{3n-1}$$

$$N_{3n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{3n+1-2k}{k}$$

$$N_{3n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{3n-1-2k}{k}$$

Bu ifadeleri toplayarak,

$$N_{3n+2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{3n+1-2k}{k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{3n-1-2k}{k}$$

elde edilir. Dikkatlice incelendiğinde:

$$\binom{3n+1-2k}{k} + \binom{3n-1-2k}{k} = \binom{3n+2-2k}{k}$$

olduğu için

$$N_{3n+2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{3n+2-2k}{k}$$

olarak bulunur.

Durum analizi yöntemiyle $r = 3n$, $r = 3n+1$, ve $r = 3n+2$ için verilen formülün doğru olduğu ve Narayana sayılarını temsil ettiği kanıtlanmış olur.

Teorem1.4 $\{N_n\}_{n\geq 0}$ Narayana dizisi ve Q matrisi

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere n-inci Narayana sayısı N_n ve $n \geq 3$olmak üzere,

$$Q^n = \begin{pmatrix} N_n & N_{n-2} & N_{n-1} \\ N_{n-1} & N_{n-3} & N_{n-2} \\ N_{n-2} & N_{n-4} & N_{n-3} \end{pmatrix}$$

dir (Ramírez & Sirvent, 2015).

İspat: İspatta tümevarım yöntemini kullanalım.

n = 3 için:

$$Q^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_3 & N_1 & N_2 \\ N_2 & N_0 & N_1 \\ N_1 & N_{-1} & N_0 \end{pmatrix}$$

eşitlik sağlanır.

n = k için, aşağıdaki formun geçerli olduğunu varsayalım;

$$Q^k = \begin{pmatrix} N_k & N_{k-2} & N_{k-1} \\ N_{k-1} & N_{k-3} & N_{k-2} \\ N_{k-2} & N_{k-4} & N_{k-3} \end{pmatrix}$$

n = k + 1 için, Q^{k+1}'i gösterelim. Burada $Q^{k+1}= QQ^k$ olarak yazabiliriz.

$$Q^{k+1} = QQ^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} N_k & N_{k-2} & N_{k-1} \\ N_{k-1} & N_{k-3} & N_{k-2} \\ N_{k-2} & N_{k-4} & N_{k-3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot N_k + 0 \cdot N_{k-1} + 1 \cdot N_{k-2} & 1 \cdot N_{k-2} + 0 \cdot N_{k-3} + 1 \cdot N_{k-4} & 1 \cdot N_{k-1} + 0 \cdot N_{k-2} + 1 \cdot N_{k-3} \\ 1 \cdot N_k + 0 \cdot N_{k-1} + 0 \cdot N_{k-2} & 1 \cdot N_{k-2} + 0 \cdot N_{k-3} + 0 \cdot N_{k-4} & 1 \cdot N_{k-1} + 0 \cdot N_{k-2} + 0 \cdot N_{k-3} \\ 0 \cdot N_k + 1 \cdot N_{k-1} + 0 \cdot N_{k-2} & 0 \cdot N_{k-2} + 1 \cdot N_{k-3} + 0 \cdot N_{k-4} & 0 \cdot N_{k-1} + 1 \cdot N_{k-2} + 0 \cdot N_{k-3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} N_k + N_{k-2} & N_{k-2} + N_{k-4} & N_{k-1} + N_{k-3} \\ N_k & N_{k-2} & N_{k-1} \\ N_{k-1} & N_{k-3} & N_{k-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{k+1} & N_{k-1} & N_k \\ N_k & N_{k-2} & N_{k-1} \\ N_{k-1} & N_{k-3} & N_{k-2} \end{pmatrix}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Tanım 1.7 k-Narayana dizisi, $\{N_{k,n}\}_{n=0}^{\infty}$, başlangıç koşulları $N_{k,0} = 0,\ N_{k,1} = 1,\ N_{k,2} = k$ olan

$$N_{k,n} = kN_{k,n-1} + N_{k,n-3} \ (\mathrm{n} \geq 3)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlı bir dizidir(Ramírez & Sirvent, 2015).

Bu dizinin ilk birkaç terimi hesaplanırsa,

$N_{k,0} = 0$

$N_{k,1} = 1$

$N_{k,2} = k$

$N_{k,3} = kN_{k,2} + N_{k,0} = k \cdot k + 0 = k^2$

$N_{k,4} = kN_{k,3} + N_{k,1} = k \cdot k^2 + 1 = k^3 + 1$

$N_{k,5} = kN_{k,4} + N_{k,2} = k \cdot (k^3 + 1) + k = k^4 + k + k = k^4 + 2k$

$N_{k,6} = kN_{k,5} + N_{k,3} = k \cdot (k^4 + 2k) + k^2 = k^5 + 2k^2 + k^2 = k^5 + 3k^2$

$N_{k,7} = kN_{k,6} + N_{k,4} = k \cdot (k^5 + 3k^2) + (k^3 + 1) = k^6 + 3k^3 + k^3 + k = k^6 + 4k^3 + k$

elde edilir.

Örneğin, $k = 2$ için dizinin ilk birkaç terimi,

$N_{2,0} = 0$

$N_{2,1} = 1$

$N_{2,2} = 2$

$N_{2,3} = 2^2 = 4$

$N_{2,4} = 2^3 + 1 = 8 + 1 = 9$

$N_{2,5} = 2^4 + 2 \cdot 2 = 16 + 4 = 20$

$N_{2,6} = 2^5 + 3 \cdot 2^2 = 32 + 12 = 44$

$N_{2,7} = 2^6 + 4 \cdot 2^3 + 2 = 64 + 32 + 2 = 98$

olarak bulunur. Bu şekilde, k ve n değerlerine göre k-Narayana dizisinin terimlerini hesaplayabiliriz.

k değerleri için bazı özel durumlar Tamsayı Dizileri Elektronik Ansiklopedisi - OEIS içinde tanımlanmıştır.

$\{N_{1,n}\}_{n=0}^{\infty} = \{0,1,1,1,2,3,4,6,9,13,19,28,41,\dots\},$ OEIS A000930.
$\{N_{2,n}\}_{n=0}^{\infty} = \{0,1,2,4,9,20,44,97,214,472,1041,2296,\dots\},$ OEIS A008998.
$\{N_{3,n}\}_{n=0}^{\infty} = \{0,1,3,9,28,87,270,838,2601,8073,25057,\dots\},$ OEIS A052541.
$\{N_{-1,n}\}_{n=0}^{\infty} = \{0,1,-1,1,0,-1,2,-2,1,1,-3,4,-3,0,4,-7,\dots\},$ OEIS A050935.

k-Narayana sayıları için Binet formülü elde edilebilir.

$$N_{k,n} = \frac{\alpha_k^{n+1}}{(\alpha_k - \beta_k)(\alpha_k - \gamma_k)} + \frac{\beta_k^{n+1}}{(\beta_k - \alpha_k)(\beta_k - \gamma_k)} + \frac{\gamma_k^{n+1}}{(\gamma_k - \alpha_k)(\gamma_k - \beta_k)}, n \geq 0$$

k-Narayana sayılarının $x^3 - kx^2 - 1 = 0$ karakteristik denkleminin sıfırları $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$

$$\alpha_k = \frac{1}{3}\left(k + k^2 \sqrt[3]{\frac{2}{27 + 2k^3 + 3\sqrt{81 + 12k^3}}} + \sqrt[3]{\frac{27 + 2k^3 + 3\sqrt{81 + 12k^3}}{2}} \right),$$

$$\beta_k = \frac{1}{3}\left(k - \omega k^2 \sqrt[3]{\frac{2}{27 + 2k^3 + 3\sqrt{81 + 12k^3}}} + \omega^2 \sqrt[3]{\frac{27 + 2k^3 + 3\sqrt{81 + 12k^3}}{2}} \right),$$

$$\gamma_k = \frac{1}{3}\left(k + \omega^2 k^2 \sqrt[3]{\frac{2}{27 + 2k^3 + 3\sqrt{81 + 12k^3}}} - \omega \sqrt[3]{\frac{27 + 2k^3 + 3\sqrt{81 + 12k^3}}{2}} \right)$$

olarak verilmiştir (Özkan ve diğerleri,2021). Burada $w = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ olarak alınmıştır.

2. k-NARAYANA DİZİSİ VE BAZI TEMEL ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, k-Narayana dizisinin bazı özellikleri tanıtılacak ve bu özelliklerin ispat yöntemleri ayrıntılı olarak ele alınacaktır. İlk olarak, k-Narayana dizisinin tanımından yola çıkarak, dizinin temel yapısal özellikleri incelenecektir. Ardından, bu dizinin çeşitli kombinatorik ve cebirsel özellikleri üzerinde durulacak ve bu özelliklerin ispatları gösterilecektir.

Teorem 2.1 k-Narayana $N_{k,n}$dizisinin üreteç fonksiyonu $N_k(x)$ olmak üzere;

$$N_k(x) = \frac{x}{1 - kx - x^3}$$

şeklinde ifade edilir.

İspat:

$N_k(x)$ üreteç fonksiyonunu olmak üzere;

$$N_k(x) = \frac{x}{1 - kx - x^3}$$

$$(1 - kx - x^3)N_k(x) = x$$

$$N_k(x) - kxN_k(x) - x^3N_k(x) = x$$

Bu ifadeyi genişleterek $N_k(x)$'in katsayılarını belirleyelim. Genel olarak, $N_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} N_{k,n}x^n$ olarak yazılabilir. Şimdi, her terimi bu seri genişlemesiyle ifade edelim:

$$\sum_{n=0}^{\infty} N_{k,n}x^n - kx\sum_{n=0}^{\infty} N_{k,n}x^n - x^3\sum_{n=0}^{\infty} N_{k,n}x^n = x$$

Her bir terimi, uygun kuvvetleriyle ayıralım:

$$\sum_{n=0}^{\infty} N_{k,n}x^n - k\sum_{n=0}^{\infty} N_{k,n}x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} N_{k,n}x^{n+3} = x$$

Serilerde değişkenlerin kuvvetlerini düzenleyelim. İlk terim olduğu gibi kalırken, ikinci terim için $n \to n - 1$ ve üçüncü terim için $n \to n - 3$ olarak yeniden yazılır,

$$\sum_{n=0}^{\infty} N_{k,n}x^n - k\sum_{n=1}^{\infty} N_{k,n-1}x^n - \sum_{n=3}^{\infty} N_{k,n-3}x^n = x.$$

Bu serileri tek bir toplamda birleştirerek yazabiliriz.

$$N_{k,0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(N_{k,n} - kN_{k,n-1} - N_{k,n-3}\right)x^n = x.$$

Elde edilen bu seriden, her $n \geq 1$ için katsayıların eşit olması gerekir:

$$N_{k,n} - kN_{k,n-1} - N_{k,n-3} = 0.$$

Bu, k-Narayana dizisinin rekürans bağıntısını doğrular:

$N_{k,n} = kN_{k,n-1} + N_{k,n-3}$.

Burada başlangıç koşullarının da sağlandığını göstermemiz gerekir:

$N_{k,0} = 0$.

Yukarıdaki seride terimleri x 'den başlayarak karşılaştırırsak,

$$N_{k,1} = 1$$
$$N_{k,2} = k$$

elde edilir ki bu durum bize $N_k(x) = \frac{x}{1-kx-x^3}$'in k-Narayana dizisinin rekürans bağıntısını ve başlangıç koşullarını sağladığını göstermektedir.

Teorem 2.2 $\{N_{k,n}\}_{k=0}^{\infty}$, k-Narayana dizisinin , $x^3 - kx^2 - 1 = 0$ karakteristik denkleminin sıfırları $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ olmak üzere;

$$\alpha_k^{r-2} \leq N_{k,r} \leq \alpha_k^{r-1}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: İspatta tümevarım yöntemini kullanalım. $n = 1$ için,

$$\alpha_k^{-1} \leq N_{k,1} \leq \alpha_k^0$$

olduğu görülür. $n = r$ için doğru olduğunu kabul edelim,

$$\alpha_k^{r-2} \leq N_{k,r} \leq \alpha_k^{r-1}$$

$n = r + 1$. için doğru olduğunu kanıtlayalım. Başlangıçta eşitsizliğin her iki tarafını k ile çarpalım,

$$\text{k}.\alpha_k^{r-2} \leq \text{k}.N_{k,r} \leq \text{k}.\alpha_k^{r-1} \quad (2.1)$$

teoremi dikkate alırsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz ($n = r - 2$)

$$\alpha_k^{r-4} \leq N_{k,r-2} \leq \alpha_k^{r-3} \quad (2.2)$$

Eş (2.1) ve Eş (2.2) eşitsizlikleri toplanırsa,

$$k \cdot \alpha_k^{r-2} + \alpha_k^{r-4} \leq \text{k} \cdot N_{k,r} + N_{k,r-2} \leq \text{k} \cdot \alpha_k^{r-1} + \alpha_k^{r-3}$$
$$\alpha_k^{r-4}(k \cdot \alpha_k^2 + 1) \leq N_{k,r+1} \leq \alpha_k^{r-3}(\text{k} \cdot \alpha_k^2 + 1)$$
$$\alpha_k^{r-4} \cdot \alpha_k^3 \leq N_{k,r+1} \leq \alpha_k^{r-3} \cdot \alpha_k^3$$
$$\alpha_k^{r-1} \leq N_{k,r+1} \leq \alpha_k^r$$

elde edilir ki bu durumda ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.3 k-Narayana sayılarının $x^3 - kx^2 - 1 = 0$ karakteristik denkleminin sıfırları $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ olmak üzere ;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_{k,n}}{N_{k,n-1}} = \alpha_k$$

ifadesi karakteristik denklemin gerçek kökü α_k ya yakınsar.

İspat:

Binet formülünü kullanarak k-Narayana dizisinin terimlerini kökler cinsinden ifade edelim.

$$N_{(k,n)} = \frac{\alpha_k^{n+1}}{(\alpha_k - \beta_k)(\alpha_k - \gamma_k)} + \frac{\beta_k^{n+1}}{(\beta_k - \alpha_k)(\beta_k - \gamma_k)} + \frac{\gamma_k^{n+1}}{(\gamma_k - \alpha_k)(\gamma_k - \beta_k)}$$

$$N_{(k,n-1)} = \frac{\alpha_k^n}{(\alpha_k - \beta_k)(\alpha_k - \gamma_k)} + \frac{\beta_k^n}{(\beta_k - \alpha_k)(\beta_k - \gamma_k)} + \frac{\gamma_k^n}{(\gamma_k - \alpha_k)(\gamma_k - \beta_k)}$$

Bu ifadeleri kullanarak oranı yazalım,

$$\frac{N_{(k,n)}}{N_{(k,n-1)}} = \frac{\frac{\alpha_k^{n+1}}{(\alpha_k - \beta_k)(\alpha_k - \gamma_k)} + \frac{\beta_k^{n+1}}{(\beta_k - \alpha_k)(\beta_k - \gamma_k)} + \frac{\gamma_k^{n+1}}{(\gamma_k - \alpha_k)(\gamma_k - \beta_k)}}{\frac{\alpha_k^n}{(\alpha_k - \beta_k)(\alpha_k - \gamma_k)} + \frac{\beta_k^n}{(\beta_k - \alpha_k)(\beta_k - \gamma_k)} + \frac{\gamma_k^n}{(\gamma_k - \alpha_k)(\gamma_k - \beta_k)}}$$

Şimdi, her terimi α_k^n cinsinden düzenleyelim. En büyük kökün (dominant root) etkisini göz önünde bulundurarak α_k, β_k, ve γ_k kökleri arasında $\alpha_k > \beta_k$ ve $\alpha_k > \gamma_k$ olduğunu varsayıyoruz. Bu nedenle, n sonsuza giderken β_k^n ve γ_k^n terimleri α_k^n terimine göre ihmal edilebilir:

$$\frac{N_{(k,n)}}{N_{(k,n-1)}} \approx \frac{\frac{\alpha_k^{n+1}}{(\alpha_k - \beta_k)(\alpha_k - \gamma_k)}}{\frac{\alpha_k^n}{(\alpha_k - \beta_k)(\alpha_k - \gamma_k)}} \approx \frac{\alpha_k^{n+1}}{\alpha_k^n} = \alpha_k$$

elde edilir, dolayısıyla,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_{(k,n)}}{N_{(k,n-1)}} = \alpha_k$$

eşitliği bulunur.

Verilen teorem aşağıdaki yöntemle de ispatlanabilir. Yani, rekürans denkleminin her iki tarafını da $N_{(k,n-1)}$ ile bölelim,

$N_{k,n} = kN_{k,n-1} + N_{k,n-3}$:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{N_{k,n}}{N_{k,n-1}}\right) = k + \lim_{n\to\infty} \left(\frac{N_{k,n-3}}{N_{k,n-1}}\right)$$

ifadeyi $\left(\frac{N_{k,n-2}}{N_{k,n-2}}\right)$ ile genişletirsek,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{N_{k,n}}{N_{k,n-1}}\right) = k + \lim_{n\to\infty} \left(\frac{N_{k,n-3}}{N_{k,n-2}}\right) . \lim_{n\to\infty} \left(\frac{N_{k,n-2}}{N_{k,n-1}}\right)$$

olur. Bu durumda $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{N_{k,n}}{N_{k,n-1}}\right) = \alpha_k$ olacağı indirgeme bağıntısını sağladığı için gösterilebilir.

$$\alpha_k = k + \frac{1}{\alpha_k} . \frac{1}{\alpha_k}$$

$$\alpha_k^3 - k\alpha_k^2 - 1 = 0.$$

Böylece teorem ispatlanmış olur.

Sonuç 1. Herhangi r tamsayısı için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_{k,n+r}}{N_{k,n}} = \alpha_k^r$$

olur.

İspat .

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_{k,n+r}}{N_{k,n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{N_{k,n+r}}{N_{k,n+r-1}}\frac{N_{k,n+r-1}}{N_{k,n+r-2}}\cdots\frac{N_{k,n}}{N_{k,n-1}}\right)=\alpha_k^r$$

elde edilir.

Tanım 2.1 k-Narayana negatif indeksli olarak $n \geq 3$için $N_{k,0}=0, N_{k,-1}=0, N_{k,-2}=1$ başlangıç koşulları ile

$$N_{k,-n-3}=N_{k,-n}-kN_{k,-n-1}$$

şekilinde tanımlanır.

$N_{k,-1}$	$N_{k,-2}$	$N_{k,-3}$	$N_{k,-4}$	$N_{k,-5}$	$N_{k,-6}$	$N_{k,-7}$	$N_{k,-8}$	$N_{k,-9}$	$N_{k,-10}$
0	1	0	$-$k	1	k^2	$-$2k	$-k^3+1$	$3k^2$	k^4-3k

Tablo 1.3: Negatif İndeksli k-Narayana Sayıları.

Teorem 2.4 , k-Narayana dizisi için Cassini benzeri özdeşlik aşağıdaki gibi ifade edilir,

$$N_{k,n-1}N_{k,n+1}-N_{k,n}^2=-N_{k,-n-1}$$

Bu özdeşliği kanıtlamak için Binet formülünü kullanacağız. Binet formülü, k-Narayana dizisinin terimlerini kökler cinsinden ifade eder.

İspat:

Rekürans bağıntısı için Binet formülünü yazalım,

$$N_{k,n}=A\alpha^n+B\beta^n+C\gamma^n,$$

burada A, B, C, başlangıç koşulları ile belirlenen sabitlerdir:

$$N_{k,0}=0,\ N_{k,1}=1,\ N_{k,2}=k.$$

Başlangıç koşullarına göre:

1. $A+B+C=0,$
2. $A\alpha+B\beta+C\gamma=1,$
3. $A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2=k.$

Negatif indeksler için:

$$N_{k,-n}=A\alpha^{-n}+B\beta^{-n}+C\gamma^{-n}$$

$$N_{k,-n-1}=A\alpha^{-(n+1)}+B\beta^{-(n+1)}+C\gamma^{-(n+1)}.$$

Bu ifadeleri Binet benzeri formülde yerine yazalım,

$N_{k,n-1}=A\alpha^{n-1}+B\beta^{n-1}+C\gamma^{n-1},$

$N_{k,n+1}=A\alpha^{n+1}+B\beta^{n+1}+C\gamma^{n+1},$

$N_{k,n}=A\alpha^n+B\beta^n+C\gamma^n.$

$N_{k,n-1}N_{k,n+1}=A^2\alpha^{n-1}\alpha^{n+1}+AB\alpha^{n-1}\beta^{n+1}+\cdots=A^2\alpha^{2n}+B^2\beta^{2n}+C^2\gamma^{2n}+\ldots\ldots$

$N_{k,n}^2 = (A\alpha^n + B\beta^n + C\gamma^n)^2 = A^2\alpha^{2n} + B^2\beta^{2n} + C^2\gamma^{2n} + \dots$

α, β, γ, karakteristik denklemin kökleridir ve

$\alpha + \beta + \gamma = k,\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0,\ \alpha\beta\gamma = -1$ eşitlikleri vardır.

Gerekli sadeleşmeler yapılırsa,

$$N_{k,n-1}N_{k,n+1} - N_{k,n}^2 = -A^2\alpha^{n-1}\alpha^{n+1} - B^2\beta^{n-1}\beta^{n+1} - C^2\gamma^{n-1}\gamma^{n+1}.$$

$$N_{k,-n-1} = A\alpha^{-(n+1)} + B\beta^{-(n+1)} + C\gamma^{-(n+1)}.$$

Bu durumda, yukarıdaki ifadelerin düzenlenmesiyle:

$$N_{k,n-1}N_{k,n+1} - N_{k,n}^2 = -N_{k,-n-1}.$$

Bu, Cassini benzeri özdeşlik gösterilmiş olur.

Teorem 2.5 Herhangi bir k tamsayı için, $k \neq 0$ olmak üzere;

$$Q_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ve için $n \geq 3$,

$$(Q_k)^n = \begin{pmatrix} N_{k,n+1} & N_{k,n-1} & N_{k,n} \\ N_{k,n} & N_{k,n-2} & N_{k,n-1} \\ N_{k,n-1} & N_{k,n-3} & N_{k,n-2} \end{pmatrix}$$

dir (Ramírez & Sirvent, 2015).

İspat: İspatta tümevarım yöntemini kullanalım. n = 3 için, öncelikle Q_k'yı kendisiyle üç kere çarparak $(Q_k)^3$'ü hesaplayalım:

$$(Q_k)^2 = Q_k \cdot Q_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^2+1 & 1 & k \\ k & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(Q_k)^3 = (Q_k)^2 \cdot Q_k = \begin{pmatrix} k^2+1 & 1 & k \\ k & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^3+k+1 & 1 & k^2+1 \\ k^2 & 0 & k \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} N_{k,4} & N_{k,2} & N_{k,3} \\ N_{k,3} & N_{k,1} & N_{k,2} \\ N_{k,2} & N_{k,0} & N_{k,1} \end{pmatrix}$$

$n = m$ için doğru olduğunu kabul edelim,

$$(Q_k)^m = \begin{pmatrix} N_{k,m+1} & N_{k,m-1} & N_{k,m} \\ N_{k,m} & N_{k,m-2} & N_{k,m-1} \\ N_{k,m-1} & N_{k,m-3} & N_{k,m-2} \end{pmatrix}$$

$n = m + 1$ için doğru olduğunu gösterelim,

$$(Q_k)^{m+1} = (Q_k)^m \cdot Q_k = \begin{pmatrix} N_{k,m+1} & N_{k,m-1} & N_{k,m} \\ N_{k,m} & N_{k,m-2} & N_{k,m-1} \\ N_{k,m-1} & N_{k,m-3} & N_{k,m-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(Q_k)^{m+1}=\begin{pmatrix} k\cdot N_{k,m+1}+N_{k,m-1} & N_{k,m} & N_{k,m+1}\\ k\cdot N_{k,m}+N_{k,m-2} & N_{k,m-1} & N_{k,m}\\ k\cdot N_{k,m-1}+N_{k,m-3} & N_{k,m-2} & N_{k,m-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} N_{k,m+2} & N_{k,m} & N_{k,m+1}\\ N_{k,m+1} & N_{k,m-1} & N_{k,m}\\ N_{k,m} & N_{k,m-2} & N_{k,m-1}\end{pmatrix}$$

Tümevarım yöntemiyle $n \geq 3$ için teoremin doğru olduğunu göstermiş olduk. Q_k matrisinin k-Narayana dizisini üreten bir matris olduğu kanıtlanmıştır.

Teorem 2.6

$n \geq 1$; için $k \neq 0$.herhangi bir tamsayı olmak üzere

$$(Q_k)^{-n}=\begin{pmatrix} N_{k,-n+1} & N_{k,-n-1} & N_{k,-n}\\ N_{k,-n} & N_{k,-n-2} & N_{k,-n-1}\\ N_{k,-n-1} & N_{k,-n-3} & N_{k,-n-2}\end{pmatrix}.$$

İspat:

İspatta tümevarım yöntemini kullanalım. $n=1$ doğrudur.

$$(Q_k)^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & -\mathrm{k} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} N_{k,0} & N_{k,-2} & N_{k,-1}\\ N_{k,-1} & N_{k,-3} & N_{k,-2}\\ N_{k,-2} & N_{k,-4} & N_{k,-3}\end{pmatrix}$$

$n=m$, doğru olduğunu kabul edelim.

$$(Q_k)^{-m}=\begin{pmatrix} N_{k,-m+1} & N_{k,-m-1} & N_{k,-m}\\ N_{k,-m} & N_{k,-m-2} & N_{k,-m-1}\\ N_{k,-m-1} & N_{k,-m-3} & N_{k,-m-2}\end{pmatrix}$$

$n=m+1$ doğru olduğunu gösterelim.

$$(Q_k)^{-m-1}=(Q_k)^{-m}(Q_k)^{-1}=\begin{pmatrix} N_{k,-m+1} & N_{k,-m-1} & N_{k,-m}\\ N_{k,-m} & N_{k,-m-2} & N_{k,-m-1}\\ N_{k,-m-1} & N_{k,-m-3} & N_{k,-m-2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & -\mathrm{k} & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} N_{k,-m} & N_{k,-m+1}-k\cdot N_{k,-m} & N_{k,-m-1}\\ N_{k,-m-1} & N_{k,-m}-k\cdot N_{k,-m-1} & N_{k,-m-1}\\ N_{k,-m-2} & N_{k,-m-1}-k\cdot N_{k,-m-2} & N_{k,-m-2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} N_{k,-m} & N_{k,-m-1} & N_{k,-m-1}\\ N_{k,-m-1} & N_{k,-m-2} & N_{k,-m-1}\\ N_{k,-m-2} & N_{k,-m-3} & N_{k,-m-2}\end{pmatrix}.$$

Bu durumda ispat tamamlanmıştır.

3. KODLAMA TEORİSİ VE k-NARAYANA SAYILARI

Kodlama teorisi, bilgiyi sembollerle temsil ederek verilerin hatalara karşı dayanıklı bir şekilde iletilmesini amaçlayan matematiksel bir disiplindir. Kodlama teorisinin temel amacı, özellikle gürültülü iletişim kanallarında, hataların tespit edilmesi ve düzeltilmesini sağlayan teknikler geliştirmektir. Claude Shannon'ın 1948 yılında yayımladığı "A Mathematical Theory of Communication" adlı çalışması, kodlama teorisinin temel taşlarından biri olarak kabul edilir ve bu alandaki çalışmaların başlangıcını oluşturur. Shannon, bir iletişim kanalında hatasız veri iletimi sağlamak için kanal kapasitesi kavramını tanımlamış ve uygun kodlama tekniklerinin önemini vurgulamıştır (Shannon, 1948).

Kodlama teorisi, modern teknolojinin pek çok alanında önemli bir rol oynamaktadır. Örneğin, dijital iletişimde verilerin güvenilir bir şekilde iletilmesi için kullanılan hata düzeltme kodları, bu teorinin pratik uygulamalarına örnek olarak gösterilebilir. Hata düzeltme kodları, veri iletiminde meydana gelebilecek hataları otomatik olarak algılayıp düzelterek, iletilen bilginin doğruluğunu sağlar. Bu, özellikle uzay araştırmaları gibi kritik alanlarda hayati önem taşır. NASA'nın Mars Pathfinder görevinde kullanılan kodlama teknikleri, düşük güçlü radyo dalgalarıyla milyonlarca kilometre uzaklıktaki Dünya'ya güvenilir veri gönderilmesini sağlamıştır.

Kodlama teorisi ve kriptografi, her ne kadar benzer matematiksel temellere dayansa da, aslında farklı hedeflere sahip iki disiplindir. Kodlama teorisinin temel amacı, verilerin hatasız bir şekilde iletilmesini sağlamakken, kriptografi, verilerin gizliliğini ve güvenliğini korumayı amaçlar. Bu bağlamda, kodlama teorisi, iletilen verilerin hatalara karşı dayanıklı olmasını sağlamak için matematiksel algoritmalar kullanırken, kriptografi, verilerin yetkisiz erişimlere karşı korunmasını sağlayan şifreleme tekniklerine odaklanır.

Kriptografi, özellikle güvenli iletişim sağlamak için geliştirilmiş bir bilim dalıdır. Bu alanda yapılan çalışmalar, mesajların yalnızca belirli kişiler tarafından okunabilmesini sağlamak amacıyla şifreleme ve şifre çözme teknikleri geliştirmeye odaklanır. Kriptografi, gizliliği sağlamak için matematiksel yapılar kullanır ve bu yapıların güvenliğini sağlamak için zorluk varsayımları üzerine inşa edilir. Örneğin, RSA şifreleme algoritması, asal sayıların çarpanlarına ayrılmasının zor olmasına dayanır.

Kodlama teorisi ise, verilerin doğru bir şekilde iletilmesi üzerine odaklanır ve gizlilikle ilgili soruları göz ardı eder. Bu bağlamda, kodlama teorisi, örneğin bir DVD'deki verilerin okunabilirliğini sağlamak için kullanılan hata düzeltme kodları gibi, gizlilik gerektirmeyen pek çok uygulamada kullanılır. Kodlama teorisinin bu tür uygulamaları, verilerin saklanması ve iletilmesi sırasında meydana gelebilecek hataları tespit etmek ve düzeltmek amacı taşır.

Kodlama teorisinin tarihi, matematiksel fikirlerin mühendislik uygulamaları ile buluştuğu bir süreçtir. İlk çalışmalar, özellikle telekomünikasyon ve veri iletimi alanlarında ortaya çıkan problemlerden ilham almıştır. Richard W. Hamming, 1950'lerde hata düzeltme kodları üzerine yaptığı çalışmalarıyla bu alanda önemli bir adım atmıştır. Hamming kodları, verilerde meydana gelebilecek hataları tespit edip düzeltebilen ilk sistematik yaklaşımlardan biri olarak kabul edilir. Hamming'in çalışmaları, kodlama teorisinin mühendislik uygulamalarında ne kadar önemli olduğunu göstermiştir. Bu çalışmalar, özellikle dijital iletişim sistemlerinde, veri saklama cihazlarında ve hatta modern bilgisayar ağlarında kullanılmaktadır. Hata düzeltme kodları, verilerin güvenilir bir şekilde iletilmesini sağlamak için kullanılır ve bu kodlar, verilerin bozulmadan veya kaybolmadan hedefe ulaşmasını garanti eder.

Kodlama teorisi, modern teknolojinin pek çok alanında kritik bir rol oynamaktadır. Örneğin, uydu haberleşme sistemleri, internet üzerinden veri iletimi, mobil telefon ağları ve veri saklama teknolojileri, kodlama teorisinin pratik uygulamaları arasında yer almaktadır. Bu teknolojiler, kodlama teorisinin geliştirdiği matematiksel yapılar sayesinde, verilerin güvenilir bir şekilde iletilmesini ve saklanmasını sağlamaktadır.

Kodlama teorisinin bir diğer önemli uygulama alanı da veri sıkıştırma teknolojileridir. Veri sıkıştırma, bir dosyanın boyutunu azaltarak, daha az yer kaplamasını ve daha hızlı iletilmesini sağlar. Bu alanda yapılan çalışmalar, özellikle multimedya içeriklerinin (ses, video, görüntü) iletiminde büyük önem taşır.

Kodlama teorisi ve kombinatorik yapıların kesiştiği bir diğer önemli alan, k-Narayana sayıları gibi özel sayı dizileridir. k-Narayana sayıları, belirli kombinatorik yapıları sayma problemleri ile ilgili bir sayı dizisi olarak ortaya çıkmıştır. Bu tür yapılar, kodlama teorisinde kullanılan matematiksel modellerin bir parçası olabilir. k-Narayana sayıları, kodlama teorisi ile ilgili çeşitli problemlerde, özellikle kombinatorik yapıların analizi ve optimizasyonunda kullanılabilir.

Kodlama teorisi ve k-Narayana sayıları arasındaki ilişki, teorik matematik ile uygulamalı mühendislik problemleri arasında köprü kuran bir alan olarak dikkat çekmektedir. Bu tür matematiksel yapılar, kodlama teorisinin sınırlarını genişleterek, yeni kodlama tekniklerinin geliştirilmesine olanak tanır.

k- Narayana Kodlama Yöntemi

Bu kısımda, k-Narayana dizisi ile kodlama teorisine alternatif bir yöntem tanımlanacaktır. Bu yöntemde, şifrelemek istediğimiz mesaj, $3m \times 3m$ mertebeli bir $\mathbf{C}$ matrisi satırlarına sırayla yazılacaktır. Bu yazım işleminde her iki kelime arasına virgül konulacak ve matriste boşluk kalan elemanlar yerine "?" yazılacaktır. Şifreleme işlemi için öncelikli olarak $\mathbf{C}$ matrisi 3×3 mertebeli alt blok matrislere ayrılır. Herhangi bir r tamsayı değeri için matrisin her elemanı Tablo 3'te verilen değerlere dönüştürülür. Bu C_{ij} blok matrisler $1 \le i, j \le m^2$ olmak üzere soldan sağa doğru $\mathbf{C}$ matrisine yerleştirilir.

Örneğin mesajdaki eleman sayısı 9 a kadar olan bir uygulamada alt blok matris bir olacak, eleman sayısı 10-36 arası ise blok matrisler dört tane olacaktır. Q_k^n kodlama matrisi n, k keyfi değer olmak üzere k-Narayana üreteç matrisinin n. kuvveti olarak belirlenecektir. E_{ij} ileti alt blok matrisleri, C_{ij} blok alt matrislerle Q_k^n matrisinin çarpımı sonucu oluşacaktır.

$$
\begin{aligned}
E_{ij} &= C_{ij} \times Q_k^n \\
&= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} N_{k,n+1} & N_{k,n-1} & N_{k,n} \\ N_{k,n} & N_{k,n-2} & N_{k,n-1} \\ N_{k,n-1} & N_{k,n-3} & N_{k,n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

$detC_{ij}$ değerleri ile keyfi, r, k ve n sayıları birinci sütuna yazılmak üzere ve E_{ij} matrisleri ile $\mathbf{E}$ ileti matrisi oluşturulur.

$$
\mathbf{E} = \begin{pmatrix} detC_{ij} & E_{ij} & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ r & . & . & . & . & . & . \\ k & . & . & . & . & . & . \\ n & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}
$$

Blok matrislerinin determinantları $\mathbf{E}$ ileti matrisi ile birlikte gönderilir. Mesajın hatasız olduğu tespit edilirse E_{ij} ait blok matrisleri oluşturulur ve Q_k^{-n}ile çarpılarak matrisi C_{ij} alt blok matrisleri çözümlenir ve $\mathbf{C}$ mesaj matrisi oluşturulur.

$$
\begin{aligned}
C_{ij} &= E_{ij} \times Q_k^{-n} \\
&= \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} N_{k,-n+1} & N_{k,-n-1} & N_{k,-n} \\ N_{k,-n} & N_{k,-n-2} & N_{k,-n-1} \\ N_{k,-n-1} & N_{k,-n-3} & N_{k,-n-2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

A	B	C	D	E
$1 + N_{\mathrm{r}}$	$2 + N_{\mathrm{r}+1}$	$3 + N_{\mathrm{r}+2}$	$4 + N_{\mathrm{r}+3}$	$5 + N_{\mathrm{r}+4}$
F	G	H	I	J
$6 + N_{\mathrm{r}+5}$	$7 + N_{\mathrm{r}+6}$	$8 + N_{\mathrm{r}+7}$	$9 + N_{\mathrm{r}+8}$	$10 + N_{\mathrm{r}+9}$
K	L	M	N	O
$11 + N_{\mathrm{r}+10}$	$12 + N_{\mathrm{r}+11}$	$13 + N_{\mathrm{r}+12}$	$14 + N_{\mathrm{r}+13}$	$15 + N_{\mathrm{r}+14}$
P	Q	R	S	T
$16 + N_{\mathrm{r}+15}$	$17 + N_{\mathrm{r}+16}$	$18 + N_{\mathrm{r}+17}$	$19 + N_{\mathrm{r}+18}$	$20 + N_{\mathrm{r}+19}$
U	V	W	X	Y
$21 + N_{\mathrm{r}+20}$	$22 + N_{\mathrm{r}+21}$	$23 + N_{\mathrm{r}+22}$	$24 + N_{\mathrm{r}+23}$	$25 + N_{\mathrm{r}+24}$
Z	0	9	?	,
$26 + N_{\mathrm{r}+25}$	$27 + N_{\mathrm{r}+26}$	$28 + N_{\mathrm{r}+27}$	$29 + N_{\mathrm{r}+28}$	$30 + N_{\mathrm{r}+29}$

Tablo 3: Narayana Dizisi ile Alfabe Tablosu

Kodlama Algoritması

Adım 1: $\mathbf{C}$ Matrisini C_{ij} blok matrisler ayırın, $C_{\mathrm{ij}} = \left(c_{ij}\right)_{3\times3}$ $(1 \le i, j \le m^2)$

Adım 2: "r" değerini seçin ve Tablo 3'ten mesaj matrisini oluşturun.

Adım 3: "k" ve "n" değerlerini seçin ve Q_k^n matrisini oluşturun.

Adım 4: $C_{ij} \times Q_k^n = E_{ij}$ hesaplayın ve $detC_{ij}, "r, k, n"$ değerlerini $\mathbf{E}$ matrisinin ilk sütununa yazın.

Adım 5: Algoritmayı sonlandırın.

Kod Çözme Algoritması

Adım 1: $detC_{ij}, "r, k, n"$ değerlerini ve $\boldsymbol{E_{ij}}$ matrislerini $\mathbf{E}$ matrisinden oluşturun.

Adım 2: $C_{ij} = E_{ij} \times Q_k^{-n}$ hesaplayın ve $\mathbf{C}$ mesaj matrisini oluşturun. Eğer $detC_{ij} = detE_{ij}$ ise hata yoktur. Aksi halde, hata düzeltme adımlarını uygulayın.

Adım 3: Alfabe tablosu yardımıyla metni oluşturun.

Adım 4: Algoritmayı sonlandırın.

Örnek " GEOMETRY" kelimesini mesaj metni olarak seçelim ve n=3, k=5 ve r=5 değeri için algoritmamızda ileti matrisini oluşturalım.

Kodlama

Mesajdaki karakter sayısı sekiz olduğundan m=1 olur. Yani tek bir $\boldsymbol{C_{11}}$ alt blok matris olacaktır. Karakterler alfabe tablosundan değerlere çevrilir.

G	$7 + N_{11}$	7+28	35
E	$5 + N_9$	5+13	18
O	$15 + N_{19}$	15+595	610
M	$13 + N_{17}$	13+277	290
T	$20 + N_{24}$	20+4023	4043
R	$18 + N_{22}$	18+1278	1296
Y	$25 + N_{29}$	25+27201	27226
?	$29 + N_{33}$	29+125491	125520

$$C_{11} = \begin{pmatrix} G & E & O \\ M & E & T \\ R & Y & ? \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & 18 & 610 \\ 290 & 18 & 4043 \\ 1296 & 27226 & 125520 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

$$Q_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad Q_3^5 = \begin{pmatrix} 270 & 28 & 87 \\ 87 & 9 & 28 \\ 28 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

olarak hesaplanır.

$$E_{11} = C_{11} \times Q_3^5 = \begin{pmatrix} 35 & 18 & 610 \\ 290 & 18 & 4043 \\ 1296 & 27226 & 125520 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 270 & 28 & 87 \\ 87 & 9 & 28 \\ 28 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 28096 & 2972 & 9039 \\ 193070 & 20411 & 62121 \\ 6233142 & 657882 & 2004760 \end{pmatrix}$$

$$detC_{11} = \begin{vmatrix} 35 & 18 & 610 \\ 290 & 18 & 4043 \\ 1296 & 27226 & 125520 \end{vmatrix} = 467612494$$

olarak bulunur.

n=3, k=5 ve r=5 değerlerini ve $detC_{11}$ değerini kullanarak

$$\mathbf{E}=\begin{pmatrix} detC_{11} & E_{11} & & \\ r & & & \\ k & & & \\ n & ? & ? & ? \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 467612494 & 28096 & 2972 & 9039 \\ 5 & 193070 & 20411 & 62121 \\ 3 & 6233142 & 657882 & 2004760 \\ 5 & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

şeklinde ileti matrisi olarak gönderilir.

Kod çözme

E matrisinden n=3, k=5 ve r=5 değerlerini ve $detC_{11}$ değeri ve E_{11} blok matrisi oluşturulur.

$$Q_3^{-5}=\begin{pmatrix} -3 & 9 & 1 \\ 1 & -6 & 9 \\ 9 & -26 & -6 \end{pmatrix}$$

$$C_{11}=E_{11}\times Q_3^{-5}=\begin{pmatrix} 28096 & 2972 & 9039 \\ 193070 & 20411 & 62121 \\ 6233142 & 657882 & 2004760 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 9 & 1 \\ 1 & -6 & 9 \\ 9 & -26 & -6 \end{pmatrix}$$

$$C_{11}=\begin{pmatrix} 35 & 18 & 610 \\ 290 & 18 & 4043 \\ 1296 & 27226 & 125520 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

$\boldsymbol{detC_{11}}=detE_{11}$ olduğundan dolayı mesajın hatasız geldiği anlaşılır ve hata düzeltme kullanılmaz. Alfabe tablosundan ileti oluşturulur.

$35=7+N_{11}$	=G
$18=5+N_9$	=E
$610=15+N_{19}$	=O
$290=13+N_{17}$	=M
$20+N_{24}$	=T
$1296=18+N_{22}$	=R
$27226=25+N_{29}$	=Y
$125520=29+N_{33}$	=?

$$C_{11}=\begin{pmatrix} G & E & O \\ M & E & T \\ R & Y & ? \end{pmatrix}$$

Sonuç olarak " GEOMETRY" elde edilir.

Örnek Kodlama

""THIS SENTENCE IS WRONG" cümlesini r=4,k=5 ve n=7 değerleri için algoritmada kullanalım.

Kodlama

Öncelikli olarak mesaj $\mathbf{C}$ matrisine yerleştirilir. Mesaj matrisi eleman sayısı 10-36 arası olduğundan $\mathbf{C}$ matrisi dört alt blok matrise ayrılır.

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix} T & H & I & S & , & \mathrm{S} \\ E & N & \mathrm{T} & E & N & \mathrm{C} \\ E & , & I & \mathrm{S} & , & W \\ R & O & \mathrm{N} & G & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

$$C_{11}=\begin{bmatrix} T & H & I \\ E & N & \mathrm{T} \\ E & , & \mathrm{I} \end{bmatrix}, C_{12}=\begin{bmatrix} S & , & \mathrm{S} \\ E & N & C \\ \mathrm{S} & , & W \end{bmatrix}, C_{21}=\begin{bmatrix} R & O & \mathrm{N} \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}, C_{22}=\begin{bmatrix} G & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

elde edilir. Alfabe tablosundan r=4 değeri için C_{11} matrisinde sonucu bulalım.

$\mathrm{T}=20+\mathrm{N}_{23}=2765,\ \mathrm{H}=8+\mathrm{N}_{11}=36,\ \mathrm{E}=5+\mathrm{N}_{8}=14, \mathrm{I}=9+\mathrm{N}_{12},$

$\mathrm{N}=14+\mathrm{N}_{17}=291$

değerleri bulunur. Değerler alt blok matrislerde yerlerine yazılır.

$$C_{11}=\begin{bmatrix} T & H & I \\ E & N & \mathrm{T} \\ E & , & \mathrm{I} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2765 & 36 & 50 \\ 14 & 420 & 2765 \\ 14 & 125521 & 50 \end{bmatrix}$$

$$Q_5=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } Q_5^7=\begin{pmatrix} 81265 & 3200 & 16126 \\ 16126 & 635 & 3200 \\ 3200 & 126 & 635 \end{pmatrix}$$

olur.

$$\begin{aligned} E_{11} &= C_{11}\times Q_5^7=\begin{pmatrix} 2765 & 36 & 50 \\ 14 & 420 & 2765 \\ 14 & 125521 & 50 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 81265 & 3200 & 16126 \\ 16126 & 635 & 3200 \\ 3200 & 126 & 635 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 225438261 & 8877160 & 44735340 \\ 16758630 & 659890 & 3325539 \\ 2025449356 & 79756935 & 401924714 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$detC_{11}=\begin{vmatrix} 2765 & 36 & 50 \\ 14 & 420 & 2765 \\ 14 & 125521 & 50 \end{vmatrix}=-959489283165$$

olarak bulunur. Benzer işlemler C_{12}, C_{21} ve C_{22} alt blok matrislerinde de uygulanır ve $\mathbf{E}$ matrisi oluşturulur.

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -959489283165 & 225438261 & 8877160 & 44735340 & e_2 i & e_2 i & e_2 i \\ detc_{12} & 16758630 & 0659890 & 3325539 & e_2 i & e_2 i & e_2 i \\ detc_{21} & 2025449356 & 79756935 & 401924714 & e_2 i & e_2 i & e_2 i \\ detc_{22} & e_3 i & e_3 i & e_3 i & e_4 i & e_4 i & e_4 i \\ r = 4 & e_3 i & e_3 i & e_3 i & e_4 i & e_4 i & e_4 i \\ k = 5 & e_3 i & e_3 i & e_3 i & e_4 i & e_4 i & e_4 i \\ n = 7 & ? & ? & ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

Kod Çözme

Öncelikli olarak **E** matrisinden r, k, n ,$detC_{ij}$ değerleri ve E_{ij} alt blok matrisleri ayrıştırılır.

$E_{11} = \begin{pmatrix} 225438261 & 8877160 & 44735340 \\ 16758630 & 659890 & 3325539 \\ 2025449356 & 79756935 & 401924714 \end{pmatrix}$ ve r=4,k=5 ve n=7 elde edilir.

$Q_5^{-7} = \begin{pmatrix} 25 & -124 & -10 \\ -10 & 75 & -124 \\ -124 & 610 & 75 \end{pmatrix}$ olarak hesaplanır.

$$C_{11} = E_{11} \times (Q_5^7)^{-1} = \begin{pmatrix} 225438261 & 8877160 & 44735340 \\ 16758630 & 659890 & 3325539 \\ 2025449356 & 79756935 & 401924714 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 & -124 & -10 \\ -10 & 75 & -124 \\ -124 & 610 & 75 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2765 & 36 & 50 \\ 14 & 420 & 2765 \\ 14 & 125521 & 50 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur ve $detC_{11} = detE_{11}$ olduğundan mesajın hatasız geldiği anlaşılır. Değerler alfabe tablosundan harflere çevrilir.

$\mathrm{T} = 20 + \mathrm{N}_{23} = 2765, \mathrm{H} = 8 + \mathrm{N}_{11} = 36, \mathrm{E} = 5 + \mathrm{N}_8 = 14$

$\mathrm{N} = 14 + \mathrm{N}_{17} = 291, \mathrm{I} = 9 + \mathrm{N}_{12} = 50$

Diğer blok matrisleri de benzer şekilde bulunarak mesaj matrisi C bulunur.

$$C_{11} = \begin{bmatrix} T & H & I \\ E & N & \mathrm{T} \\ E & , & \mathrm{I} \end{bmatrix}, C_{12} = \begin{bmatrix} S & , & \mathrm{S} \\ E & N & C \\ \mathrm{S} & , & W \end{bmatrix}, C_{21} = \begin{bmatrix} R & O & \mathrm{N} \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}, C_{22} = \begin{bmatrix} G & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} T & H & I & S & , & \mathrm{S} \\ E & N & \mathrm{T} & E & N & \mathrm{C} \\ E & , & I & \mathrm{S} & , & W \\ R & O & \mathrm{N} & G & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

olarak bulunur.

Kod Matrisi Öğeleri Arasındaki İlişkiler

Kod matrisi elemanları arasındaki ilişkileri $detC_{ij} = detE_{ij}$ kullanarak elde ederiz.

$$e_{11} = c_{11}N_{k,n+1} + c_{12}N_{k,n} + c_{13}N_{k,n-1} \geq 0,$$
$$e_{12} = c_{11}N_{k,n-1} + c_{12}N_{k,n-2} + c_{13}N_{k,n-3} \geq 0,$$
$$e_{13} = c_{11}N_{k,n} + c_{12}N_{k,n-1} + c_{13}N_{k,n-2} \geq 0,$$
$$e_{21} = c_{21}N_{k,n+1} + c_{22}N_{k,n} + c_{23}N_{k,n-1} \geq 0,$$
$$e_{22} = c_{21}N_{k,n-1} + c_{22N_{k,n-2}} + c_{23}N_{k,n-3} \geq 0,$$
$$e_{23} = c_{21}N_{k,n} + c_{22N_{k,n-1}} + c_{23}N_{k,n-2} \geq 0,$$
$$e_{31} = c_{31}N_{k,n+1} + c_{32}N_{k,n} + c_{33}N_{k,n-1} \geq 0,$$
$$e_{32} = c_{31}N_{k,n-1} + c_{32N_{k,n-2}} + c_{33}N_{k,n-3} \geq 0,$$
$$e_{33} = c_{31}N_{k,n} + c_{32N_{k,n-1}} + c_{33}N_{k,n-2} \geq 0,$$

$e_{11},\ e_{12}\ ve\ e_{13}$ eşitsizliklerini kullanarak:

$$\alpha_k^{n-1} \leq N_{k,n+1} \leq \alpha_k^{n}$$
$$\alpha_k^{n-2} \leq N_{k,n} \leq \alpha_k^{n-1}$$
$$\alpha_k^{n-3} \leq N_{k,n-1} \leq \alpha_k^{n-2}$$
$$\alpha_k^{n-4} \leq N_{k,n-2} \leq \alpha_k^{n-3}$$
$$\alpha_k^{n-5} \leq N_{k,n-3} \leq \alpha_k^{n-4}$$

$$\frac{\alpha_k^{n-1}}{\alpha_k^{n-3}} \leq \frac{N_{k,n+1}}{N_{k,n-1}} \leq \frac{\alpha_k^{n}}{\alpha_k^{n-2}}$$
$$\frac{\alpha_k^{n-2}}{\alpha_k^{n-4}} \leq \frac{N_{k,n}}{N_{k,n-2}} \leq \frac{\alpha_k^{n-1}}{\alpha_k^{n-3}}$$
$$\frac{\alpha_k^{n-3}}{\alpha_k^{n-5}} \leq \frac{N_{k,n-1}}{N_{k,n-3}} \leq \frac{\alpha_k^{n-2}}{\alpha_k^{n-4}}$$

elde edilir. Buradan

$$\min\left\{\frac{N_{k,n+1}}{N_{k,n-1}}, \frac{N_{k,n}}{N_{k,n-2}}, \frac{N_{k,n-1}}{N_{k,n-3}}\right\} \leq \frac{e_{11}}{e_{12}} \leq \max\left\{\frac{N_{k,n+1}}{N_{k,n-1}}, \frac{N_{k,n}}{N_{k,n-2}}, \frac{N_{k,n-1}}{N_{k,n-3}}\right\},$$

olarak bulunur benzer bir yolla;

$$\min\left\{\frac{N_{k,n+1}}{N_{k,n}}, \frac{N_{k,n}}{N_{k,n-1}}, \frac{N_{k,n-1}}{N_{k,n-2}}\right\} \leq \frac{e_{11}}{e_{13}} \leq \max\left\{\frac{N_{k,n+1}}{N_{k,n}}, \frac{N_{k,n}}{N_{k,n-1}}, \frac{N_{k,n-1}}{N_{k,n-2}}\right\},$$
$$\min\left\{\frac{N_{k,n}}{N_{k,n-1}}, \frac{N_{k,n-1}}{N_{k,n-2}}, \frac{N_{k,n-2}}{N_{k,n-3}}\right\} \leq \frac{e_{13}}{e_{12}} \leq \max\left\{\frac{N_{k,n}}{N_{k,n-1}}, \frac{N_{k,n-1}}{N_{k,n-2}}, \frac{N_{k,n-2}}{N_{k,n-3}}\right\}.$$

Bu eşitsizlikler, mesaj matrisinin elemanlarının birbirine bağlı olduğunu ve belirli koşullara uyduğunu gösterir. Özetle, mesaj matrisinin her elemanı bu bağlantılar aracılığıyla kodlanır.

$$\frac{e_{11}}{e_{12}} \approx \alpha_k^2, \frac{e_{13}}{e_{12}} \approx \alpha_k$$
$$\frac{e_{21}}{e_{22}} \approx \alpha_k^2, \frac{e_{23}}{e_{22}} \approx \alpha_k$$
$$\frac{e_{31}}{e_{32}} \approx \alpha_k^2, \frac{e_{33}}{e_{32}} \approx \alpha_k$$
$$\frac{e_{11}}{e_{21}} \approx \frac{e_{21}}{e_{22}}$$
$$\frac{e_{21}}{e_{22}} \approx \frac{e_{31}}{e_{32}}$$
$$\frac{e_{11}}{e_{12}} \approx \frac{e_{31}}{e_{32}}$$

Hata Tespiti ve Düzeltme

$detC_{ij} = detE_{ij}$ ise mesaj matrisinin iletişim kanalından hatasız geçtiği anlamına gelir. $detC_{ij} = detE_{ij}$ Denklemini kullanarak tek bir hatayı düzeltmek için aşağıdaki işlemler uygulanır.

$$\begin{vmatrix} a & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{vmatrix} = e_{13}e_{22}e_{31} + e_{12}e_{23}e_{31} + e_{13}e_{21}e_{32} - ae_{23}e_{32} - e_{12}e_{21}e_{33} + ae_{22}e_{33}$$
$$= detC$$

$$\begin{vmatrix} e_{11} & b & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{vmatrix} = -e_{13}e_{22}e_{31} + be_{23}e_{31} + e_{13}e_{21}e_{32} - e_{11}e_{23}e_{32} - be_{21}e_{33} + e_{11}e_{22}e_{33}$$
$$= detC$$

$$\begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & c \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{vmatrix} = -ce_{22}e_{31} + e_{12}e_{23}e_{31} + ce_{21}e_{32} - e_{11}e_{23}e_{32} - e_{12}e_{21}e_{33} + e_{11}e_{22}e_{33}$$
$$= detC$$

$$\begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ d & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{vmatrix} = -e_{13}e_{22}e_{31} + e_{12}e_{23}e_{31} + de_{13}e_{32} - e_{11}e_{23}e_{32} - de_{12}e_{33} + e_{11}e_{22}e_{33}$$
$$= detC$$

$$\begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{vmatrix} = e_{12}e_{23}e_{31} + e_{13}e_{21}e_{32} - e_{11}e_{23}e_{32} - e_{12}e_{21}e_{33} - e_{13}e_{31}e + e_{11}e_{33}e$$
$$= detC$$

$$\begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & f \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{vmatrix} = -e_{13}e_{22}e_{31} + e_{13}e_{21}e_{32} - e_{12}e_{21}e_{33} + e_{11}e_{22}e_{33} + e_{12}e_{31}f - e_{11}e_{32}f$$
$$= detC$$

$$\begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ g & e_{32} & e_{33} \end{vmatrix} = e_{13}e_{21}e_{32} - e_{11}e_{23}e_{32} - e_{12}e_{21}e_{33} + e_{11}e_{22}e_{33} - e_{13}e_{22}g + e_{12}e_{23}g$$
$$= detC$$

$$\begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & h & e_{33} \end{vmatrix} = -e_{13}e_{22}e_{31} + e_{12}e_{23}e_{31} - e_{12}e_{21}e_{33} + e_{11}e_{22}e_{33} + e_{13}e_{21}h - e_{11}e_{23}h$$
$$= detC$$

$$\begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & i \end{vmatrix} = -ie_{12}e_{21} + ie_{11}e_{22} - e_{13}e_{22}e_{31} + e_{12}e_{23}e_{31} + e_{13}e_{21}e_{32} - e_{11}e_{23}e_{32}$$
$$= detC$$

Benzer şekilde bulunur. $a, b, \dots\dots i$ için E_{ij} matrislerinde çift hatayla karşılaşacağımız durumlar olabilir. Örneğin E_{ij} alt blok matrisi için iki değişkenli durumu şu şekilde ele alabiliriz.

$$\begin{vmatrix} a & b & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{vmatrix} = -e_{13}e_{22}e_{31} + be_{23}e_{31} + e_{13}e_{21}e_{32} - ae_{23}e_{32} - be_{21}e_{33} + ae_{22}e_{33}$$
$$= detC_{ij}$$

Olası koşulları $\binom{9}{2} = 36$ olarak hesaplayabiliriz. Benzer şekilde "üçlü", "dörtlü", ..., "dokuz" hatalar bu koşullardır. Bunlara ilişkin toplam durum sayısı,

$$\binom{9}{1} + \binom{9}{2} + \cdots + \binom{9}{9} = 2^9 - 1$$

larak hesaplanabilir. Burada en fazla sekiz hataya kadar düzeltilebilir olduğu açıktır. Bu durumda düzeltme yeteneğinin $\frac{510}{511} = 0.998 \approx 99.8\%$ olduğu söylenebilir.

4. SONUÇ

Bu çalışmada, $\boldsymbol{k}$-Narayana dizilerinin özellikleri detaylı bir şekilde incelenmiş ve negatif indeksli $\boldsymbol{k}$-Narayana dizileri tanımlanmıştır. Ayrıca, kodlama teorisine yönelik bir yöntem ile bu dizilerin potansiyel uygulamaları gösterilmiştir. Elde edilen sonuçlar, $\boldsymbol{k}$-Narayana dizilerinin hem teorik hem de uygulamalı matematik alanlarında çeşitli kullanım alanlarına sahip olduğunu ortaya koymaktadır. İlerleyen çalışmalarda, $\boldsymbol{k}$-Narayana dizilerinin farklı matematiksel yapılar ve disiplinlerdeki rolü daha kapsamlı bir şekilde ele alınabilir ve yeni uygulama alanları keşfedilebilir.

KAYNAKLAR

Allouche, J.-P. ve Johnson, T. (1996). Narayana's Cows and Delayed Morphisms. *Journées d'Informatique Musicale*. Erişim adresi: https://hal.science/hal-02986050

Bensella, H. ve Behloul, D. (2023). k-Fibonacci numbers which are Narayana's cows numbers. *arXiv preprint arXiv:2302.09667.* Erişim adresi: http://arxiv.org/abs/2302.09667

Bhoi, K. ve Ray, P. K. (2022). Fermat Numbers In Narayana's Cows Sequence. *Integers: Electronic Journal of Combinatorial Number Theory*, 22.

Bravo, J. J., Das, P. ve Guzmán, S. (2020). *Repdigits in Narayana's Cows Sequence and their Consequences*. *Journal of Integer Sequences* (C. 23).

Brousseau, A. (1971). Linear recursion and Fibonacci sequences. *The Fibonacci Quarterly, 9*(3), 215–231.

Cerda-Morales, G. (2018). Identities involving Narayana numbers. *arXiv preprint arXiv:, 1805.02255*. Erişim adresi: http://arxiv.org/abs/1805.02255

Ddamulira, M., Emong, P. ve Mirumbe, G. I. (2023). Palindromic concatenations of two distinct repdigits in Narayana's cows sequence. *arXiv*, *2312*(1757v1). Erişim adresi: http://arxiv.org/abs/2312.17571

Dişkaya, O., Menken, H. ve Dis¸kayadis¸kaya, O. (2023). On the incomplete narayana numbers. *The Aligarh Bulletin of Mathematics*, *42*(2), 1-13. Erişim adresi: https://www.researchgate.net/publication/379431147

Everest, G., van der Poorten, A., Shparlinski, I. ve Ward, T. (2003). *Recurrence Sequences*. Mathematical Surveys and Monographs (C. 104). Providence, Rhode Island: American Mathematical Society. https://doi.org/10.1090/surv/104

Faisant, A. (2019). On the Padovan sequence. http://arxiv.org/abs/1905.07702 adresinden erişildi.

Flaut, C. ve Shpakivskyi, V. (2012). On Generalized Fibonacci Quaternions and Fibonacci-Narayana Quaternions. *arXiv preprint arXiv:, 1209.0584.* Erişim adresi: http://arxiv.org/abs/1209.0584

Goy, T. (2018). On identities with multinomial coefficients for fibonacci-narayana sequence. *Annales Mathematicae et Informaticae*, *49*, 75-84. doi:10.33039/ami.2018.09.001

Hossein, S., Petroudi, J., Das¸demirdas¸demir, A. ve Pirouz, M. (2024). On Jacobsthal-Narayana and Jacobsthal-Narayana-Lucas Sequences. *Konuralp Journal of Mathematics*, *12*(1), 55-61. Erişim adresi: https://dergipark.org.tr/tr/pub/konuralpjournalmath

Ismail, M., Rihane, S. E. ve Anwar, M. (2023). Narayana sequence and the Brocard–Ramanujan equation. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, *29*(3), 462-473. https://doi.org/10.7546/nntdm.2023.29.3.462-473

Karaaslan, N. ve Fazlıoğlu, M. N. (2021). Gauss Narayana-Lucas Sayıları Üzerine. *Aksaray University Journal of Science and Engineering*, *5*(2), 125-137. https://doi.org/10.29002/asujse.1020770

Kirthi, K. ve Kak, S. (2016). The Narayana Universal Code. *arXiv preprint arXiv:*, *1601*(07110.).

Kuloğlu, B. (2023). *Genelleştirilmiş Narayana Sayı Dizileri, Polinomları, Uygulamaları Ve Pascal Üçgeni*.Doktara Tezi,Erzincan Binali yıldırım Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,16-28

Kuloğlu, B., Özkan, E. ve Marin, M. (2023). On the period of Pell-Narayana sequence in some groups. *arXiv preprint Erişim adresi: http://arxiv.org/abs/2305.04786*

Lin, X. (2021). On the recurrence properties of Narayana's cows sequence. *Symmetry*, *13*(1), 1-12. https://doi.org/10.3390/sym13010149

Özkan, E., Kuloğlu, B. ve Peters, J. F. (2021). K-Narayana Sequence Self-Sımılarıty. *hal. archives-ouvertes. fr, 3242990.* Erişim adresi: https://hal.science/hal-03242990

Ramírez, J. L. ve Sirvent, F. (2015). A note on the k-Narayana sequence. *In Annales mathematicae et informaticae* , *45*, 91-105. Erişim adresi: http://ami.ektf.hu

Shannon, C. E. (1948). *A Mathematical Theory of Communication*. *The Bell System Technical*

Journal (C. 27).
Sivaraman, R. (2020). Knowing Narayana cows sequence. *Advances in Mathematics: Scientific Journal*, *9*(12), 10219-10224. https://doi.org/10.37418/amsj.9.12.14
Soykan, Y. (2020). *On Generalized Narayana Numbers*. *Journal homepage: www.ijaamm.com International Journal of Advances in Applied Mathematics and Mechanics* (C. 7). Erişim adresi: http://www.ijaamm.com
Soykan, Y. (2021). On the Recurrence Properties of Generalized Tribonacci Sequence. *Earthline Journal of Mathematical Sciences*, 253-269. https://doi.org/10.34198/ejms.6221.253269
Sloane, N. J. A. (2008),The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, OEIS Foundation Inc.
Sloane, N. J. A., & OEIS Foundation Inc. (n.d.). Sequence A000930: Narayana numbers. *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences.* https://oeis.org/A000930
Topaloğlu, N., Calp, M. H. ve Türk, B. (2016). Bilgi Güvenliği Kapsamında Yeni Bir Veri Şifreleme Algoritması Tasarımı ve Gerçekleştirilmesi. *Bilişim Teknolojileri Dergisi*, *9*(3). https://doi.org/10.17671/btd.36875
Tripathy, B. P. ve Patel, B. K. (2023). Common terms of generalized Pell and Narayana's cows sequences. *arXiv preprint arXiv:2307.03919*. Erişim adresi: http://arxiv.org/abs/2307.03919
Yüksel Soykan, Melih Göcen ve Sedat Çevikel. (2020). On Matrix Sequences of Narayana and Narayana-Lucas Numbers. *Karaelmas Science and Engineering Journal*, *83-90.2021*.

EKLER

Bu bölümde Python Yazılımındaki uygulama örneğinin kodları verilecektir. Yazılım, şifrelenmiş bir mesaj matrisi ve en fazla dokuz karakterlik bir mesajdan kaynaklanacak bir çözüm matrisi içerir.

```
\begin{verbatim}
from functools import lru_cache
import math
import numpy
from numpy.linalg import matrix_power
charlist = {"A": 1, "B": 2, "C": 3, "D": 4, "E": 5,
"F": 6, "G": 7, "H": 8, "I": 9, "J": 10,
"K": 11, "L": 12, "M": 13, "N": 14, "O": 15,
"P": 16, "Q": 17, "R": 18, "S": 19, "T": 20,
"U": 21, "V": 22, "W": 23, "X": 24, "Y": 25,
"Z": 26, "0": 27, "9": 28, "?": 29, ",": 30,
}
@lru_cache(None)
def narayana(n: int) -> int:
if n <= 0:
return 0
elif n <= 3:
return 1
return narayana(n-1) + narayana(n-3)
message_split = lambda message: message if len(message) == 3 else
message_split(message + " ")
split_to_chars = lambda char, charlist: char if char in charlist else "?"
encode = lambda char, charlist, r_constant: charlist[char] +
narayana((charlist[char] - 1) + r_constant)
k_constant = int(input("k Number (Used for encoding in key matrix): "))
n_constant = int(input("n Number (Power of key matrix): "))
```

```
r_constant = int(input("r Number (Used for encoding with Narayana Number
Series): "))

message = str(input("Message: ")).upper()
message_size = len(message)

final_matrix_dimension = math.ceil(message_size/9)

message_matrix_list = [[[] for _ in range(3)] for _ in
range(final_matrix_dimension**2)]

message_splits = []
for i in range(math.ceil(message_size/3)):
message_splits.append(message_split(message[3i : 3(i + 1)]))

Q_matrix = numpy.array([[k_constant, 0, 1], [1, 0, 0], [0, 1, 0]])
encode_Q_matrix = matrix_power(Q_matrix, n_constant)
decode_Q_matrix = matrix_power(encode_Q_matrix, -1)

message_index = 0
for line in range(final_matrix_dimension):
for row in range(3):
for group in range(final_matrix_dimension):
if message_index < len(message_splits):
message_matrix_list[group + line



final_matrix_dimension][row] = [encode(split_to_chars(char, charlist), charlist,
r_constant) for char in message_splits[message_index]]message_index +=
1continuemessage_matrix_list[group + linefinal_matrix_dimension][row] =
[encode(split_to_chars("?", charlist), charlist, r_constant) for _ in range(3)]
message_index += 1

M_matrix = [numpy.array(matrix) for matrix in message_matrix_list]
encoded = []
for matrix in M_matrix:
encoded.append(numpy.matmul(matrix, encode_Q_matrix))
```

```
decoded = []
for matrix in encoded:
decoded.append(numpy.around(numpy.matmul(matrix,
decode_Q_matrix)).astype(int))
print(matrix, decode_Q_matrix, decoded)
print(f"""Input Text: {message},
\n\n{n_constant} Powered Q Matrix: \n{encode_Q_matrix},
\n\n-1 Powered {n_constant} Powered Q Matrix: \n{decode_Q_matrix},
\n\nMessage Matrix: \n{M_matrix},
\n\nEncoded Message Matrix: \n{encoded},
\n\nDecoded Message Matrix: \n{decoded},
\n\nDecoded Output Text: {'decoded_message'}
""")
\end{verbatim}
\bibliography{reference.bib}
\bibliographystyle{unsrt}
\end{document}$
```

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyad, Ad	**:**	Kabasakal	Vedat

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet**
Lisans	Gazi Üniversitesi Matematik	2002
Yüksek Lisans	Hoca Ahmet Yesevi Uluslararası Türk-Kazak Üniversitesi- Eğitim Yönetimi ve Denetimi	2018

İş deneyimi (varsa)

Yıl	**Yer**	**Görev**
MEB	**Ankara**	**Öğretmen**

Yayınlar (varsa)

Şahin, E. Kabasakal, V.,Çelebi, Ö.,Taşdemir, L.(01/03/2018), The Effect Of Mathematızatıon Activitıes Performed In The Informal Learnıng Envıronments On The Opınıons Of Gıfted Students On Mathematıcs Dıscıplıne, *European Journal Of Social Sciences Studies,*05(012), -.

Şahin, E., Kabasakal, V.(25/09/2018), Stem Eğitim Yaklaşımında Dinamik Matematik Programlarının (Geogebra) Kullanımına Yönelik Öğrenci Görüşlerinin İncelenmesi, *Anemon Muş Alparslan Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi,*6(0), 55-62.

Şahin, E., Kabasakal, V. FEAD · Fen Eğitimi ve Araştırmaları Derneği Resmi Dergisi ISSN: 2148-2160; Cilt 9, Sayı 1, Haz. 2021 .... STEM Eğitiminde Geogebra Kullanımı: Atwood Makinesi Örneği ankara HBV