

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

PARÇALI SABİT ARGÜMENTLİ BİR UYUMLU KESİRLİ DİFERENSİYEL
DENKLEMİN ÇÖZÜMLERİ HAKKINDA

Huda Mahdi Ahmed AL OBAIDI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2024

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Doktora Tezi

PARÇALI SABİT ARGÜMENTLİ BİR UYUMLU KESİRLİ DİFERENSİYEL DENKLEMİN ÇÖZÜMLERİ HAKKINDA

Huda Mahdi Ahmed AL OBAIDI

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Hüseyin BEREKETOĞLU

Bu tez yedi bölümden oluşmaktadır.

- İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. Bu bölümde, kesirli analiz kavram alanında yapılan çalışmalardan bahsedilmiş ve uyumlu türevin tanımının tarihçesi incelenmiştir.
- İkinci bölümde, tezde kullanılan bazı önemli temel kavramlar tanım ve teoremlere yer verilmiştir ve yeni türevin geometrik anlamından bahsedilmiştir.
- Üçüncü bölümde ise, parçalı sabit argümentli bir uyumlu kesirli diferensiyel denklemin çözümlerin $a \neq 0$ ve $a = 0$ durumlarında varlığı ve tekliği ile ilgili teoremler ispatlanmıştır.
- Dördüncü bölümde, çözümlerin salınımlılık durumu hakkında bazı teoremler ispatlanmıştır. Ayrıca, bu sonuçlar ile ilgili olarak bazı örnekler sunulmuştur.
- Beşinci bölümde ise, çözümlerin asimptotik davranışları ile ilgili olarak bazı sonuçlar elde edilmiştir.
- Altıncı bölümde de, periyodik çözümlerle ilgili sonuçlar ispatlanmış ve bazı örnekler sunulmuştur. Son bölümde ise elde edilen sonuçlar tartışılmıştır.

Aralık 2024, 51 sayfa

Anahtar Kelimeler: Uyumlu kesirli diferensiyel denklem, parçalı sabit argüment, varlık ve teklik, salınımlılık, asimptotik kararlılık, periyodik çözüm.

ABSTRACT

PhD Thesis

ON THE SOLUTION OF A CONFORMABLE FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION WITH PIECEWISE CONSTANT ARGUMENTS

Huda Mahdi Ahmed AL OBAIDI

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Hüseyin BEREKETOĞLU

This thesis consists of seven chapters.

-The first chapter is devoted to the introduction. In this chapter, the works done in the field of fractional analysis are mentioned and the history of the definition of the conformable derivative is stated.

-In the second chapter, some important basic concepts and theorems about conformable derivative are given and the geometric meaning of the conformable derivative is explained.

-In the third chapter, the existence and uniqueness of the solutions of a piecewise constant differential equation are showed for the cases $a \neq 0$ and $a = 0$, separately.

-In the fourth chapter, some theorems about the oscillatory of solutions are proved. Also some examples are presented for the verification.

-In the fifth chapter, some results about the asymptotic behaviour of the solutions are obtained and two examples are given.

-In the sixth chapter, some results about periodic solutions are proved and also some illustrative examples are presented. In the last chapter, the obtained results are discussed.

December 2024, 51 pages

Key Words: Conformable fractional differential equation, piecewise constant argument, existence and uniqueness of the solutions, oscillation, asymptotic stability, periodic solution.

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca bilgi ve değerli yardım ve katkılarıyla karşılaştığım güçlüklerde esirgemeyen büyük bir sabır ve titizlikle beni yönlendiren ve çalışmanın her aşamasında bana yol gösteren değerli danışman hocam sayın Prof. Dr. Hüseyin BEREKETOĞLU'na (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Tez izleme kurulu üyeleri Sayın Pr. Dr. Marat AKHMET (Orta Doğu Teknik Üniversitesi Matematik Bölümü) ve Sayın Prof. Dr. Fatma KARAKOÇ'a (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) çalışmalarım boyunca vermiş olduğu destekten dolayı teşekkür ederim. Tezin yazım sürecinde yardımcı olan Sayın Doç. Dr. Gizem Seyhan ÖZTEPE (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) ve Sayın Dr. Öğr. Üyesi M. Emre KAVGACI'ya (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) teşekkür ederim. Çalışmalarım esnasında beni yalnız bırakmayan ve her zaman destek olan Eşim ve hayat arkadaşım Ayad YASEEN'a çok teşekkür ederim. Kalbimin büyüğü, çocuklarım'a teşekkür ederim. Hayatım boyunca her zaman benim için dua eden Anneme, Babama'a teşekkür ederim. Son olarak kardaşlarıma ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Huda Mahdi Ahmed AL OBAIDI
Ankara, Aralık 2024

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	9
3. VARLIK VE TEKLİK	20
3.1 $a \neq 0$ Durumu	20
3.2 $a = 0$ Durumu	25
4. ÇÖZÜMLERİN SALINIMLILIĞI	29
5. ASİMPOTOTİKSEL KARARLILIK	33
6. PERİYODİK ÇÖZÜMLER	36
7. TARTIŞMA VE SONUÇ	43
KAYNAKLAR	44
ÖZGEÇMİŞ	51

SİMGELER DİZİNİ

D_a^α	Kesirli Türev
$y^{(\alpha)}(x_0)$	Uyumlu Kesirli Türev
$\Gamma(x)$	Gamma Fonksiyonu
$\int$	İntegral
$\mathbb{R}$	Reel Uzay
$[\cdot]$	Tamdeğer Fonksiyonu



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1	(4.2) – (4.3) probleminin çözümünün grafiği	31
Şekil 4.2	(4.4) – (4.5) probleminin $x(t)$ çözümünün grafiği	32
Şekil 5.1	$a \neq 0$ durumu (5.2) – (5.3)'ün $x(t)$ çözümünün grafiği	34
Şekil 5.2	(5.4) – (5.5)'in çözümünün grafiği	35
Şekil 6.1	(6.10) – (6.11)'in çözümünün grafiği	40
Şekil 6.2	(6.15) – (6.16) probleminin $x(t)$ çözümünün grafiği	41
Şekil 6.3	(6.17) – (6.18)'in $x(t)$ çözümü: 2-periyotlu	42
Şekil 6.4	(6.19)'un $x(t)$ çözümü: 3-periyotlu	42



1. GİRİŞ

Parçalı sabit argümentli diferensiyel denklemler (kısaca PSADD), sürekli argümentlere sahip fonksiyonel diferensiyel denklemler teorisini, süreksiz argümentlere sahip denklemleri de kapsayacak şekilde genişletme çabasından ortaya çıkmıştır. Bu denklemlerin en önemli özelliği, diferensiyel ve fark denklemlerinin özelliklerini birleştiren hibrit dinamik sistemler olmasıdır. Bu yüzden, bu denklemler standart diferensiyel denklemlere kıyasla daha karmaşıktırlar ve analizleri genellikle daha zordur. Busenberg ve Cooke, 1982 yılında, nesiller arası dikey yolla bulaşan ve omurgasız taşıyıcılar (vektörler) aracılığıyla yayılan bazı hastalık modellerinin analizini yapmışlar ve bu çalışmada, ayrık ve sürekli dinamikleri birlikte ele almışlardır (Busenber ve Cooke 1982). PSADD ile ilgili çalışmalar ilk olarak Shah ve Wiener tarafından 1983 yılında yapılmıştır (Shah ve Wiener 1983). Genel olarak bir PSADD

$$x'(t) = f(t, x(t), x(\zeta(t)))$$

biçimindedir; burada $\zeta(t)$ ileri veya gecikme argümenti olup parçalı sürekli bir fonksiyondur. $[\cdot]$ en büyük tamsayı fonksiyonunu ifade etmek üzere,

$$\zeta(t) = [t], \zeta(t) = [t - 1], \zeta(t) = [t + 1], \dots, \zeta(t) = [t \pm K], K \in \mathbb{Z}$$

şeklinde olabilir. Cooke ve Wiener 1984 yılında yaptığı çalışmada

$$\begin{aligned} x'(t) &= bx(t) + b_0x([t]) + b_1x([t - 1]), \\ x(-1) &= c_{-1}, \quad x(0) = c_0 \end{aligned}$$

şeklinde lineer, sabit katsayılı, $[t]$ ve $[t - 1]$ şeklinde iki gecikmeye sahip olan bir PSADD ni ele almışlar ve bu denklemin $t > 0$ için çözümünün varlık ve tekliğini ispatlayarak çözümü $(-\infty, 0]$ aralığına genişletmişlerdir (Cooke ve Wiener 1984). 1987 de, Aftabizadeh vd.

$$x'(t) + a(t)x(t) + b(t)x([t - 1]) = 0$$

denkleminin çözümlerinin salınımlılık özelliğini incelemişlerdir (Aftabizadeh vd. 1987). Bu konuda yazılan en kapsamlı eserlerden biri 1993 yılında Wiener tarafın-

dan yazılmıştır (Wiener 1993). 2007 yılında, Akhmet

$$w' = A(t)w + f(t, w(t), w(B(t)))$$

şeklinde PSADD in genelleştirilmiş bir türünü tanıtarak, sınırlı ve periyodik çözümlerin varlığını yeni bir integral gösterim tekniği yardımıyla incelemiştir (Akhmet 2007). Akhmet vd., 2008 çalışmasında

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t) + \mu g(t, x(t), x(\omega(t)), \zeta)$$

sisteminin sıfır olmayan periyodik çözümlerini incelemiştir (Akhmet vd., 2008). 2009 da Pinto,

$$u'(s) = F(s)u(s) + g(s, u(s), u(\gamma))$$

genelleştirilmiş PSADD ve

$$u'(s) = F(s)u(s)$$

adi diferensiyel denklem sisteminin denkleğini incelemiştir (Pinto 2009). PSADD' in çözümlerinin kararlılık, salınımlılık ve periyodiklik gibi farklı özellikleri pek çok farklı çalışmada ele alınmıştır. Örneğin, Bereketoglu vd. 2010, 2013 ve 2014 yıllarında yaptıkları çalışmalarda impuls etkisi altındaki farklı türlerdeki PSADD'i ele alarak, bu denklemlerin çözümlerinin varlık ve tekliğini ispatlamış, salınımlı çözümler için yeterli koşulları elde etmiştir (Bereketoglu vd. 2010, 2013, 2014). Bazı ileri, gecikmeli ve karışık argümentlere sahip PSADD'nin çözümlerinin salınımlılığı ve periyodikliği için gerekli koşulların bulunması ve impulsif koşullar altında Green fonksiyonu elde edilmesi yine birçok çalışmanın konusu olmuştur (Partheniadis 1988, Huang 1990, Papaschinopoulos ve Schinas 1992, Papaschinopoulos ve Schinas 1994, Li ve Shen 2002, Chiu ve Pinto 2010, Muminov 2017, Chiu ve Li 2019, Muminov 2020, Chiu 2021). Son yıllarda ise, bu denklemlerin bazı modellere uygulandığı görülmektedir (Muroya 2008). S. Oztepe, 2021 yılındaki çalışmasında parçalı sabit argümentli Lasota-Wazewska modelinin denge noktasının asimptotik kararlı olduğunu incelemiştir (S. Oztepe 2021). PSADD'in impulsif koşullar altındaki durumları da yine birçok makaleye konu olmuştur (Karakoc vd. 2010, Gyori vd. 2011, Karakoc ve Bereketoglu 2018). Bu çalışmalarda, parçalı

sürekli sabit argümentli lineer ve lineer olmayan impulsif diferensiyel denklemlerin ve sistemlerin çözümlerinin davranışları incelenmiştir.

Kesirli analiz kavramı yaklaşık olarak 18. yüzyılın ilk çeyreğine kadar uzanır. Bu kavramın, ilk olarak Gottfried Wilhelm Leibniz'in L'Hospital'a sorduğu "Tam sayı basamaktan türevler kesirli basamağa genişletilebilir mi?" sorusu ile ortaya çıktığı bilinmektedir (Khalil vd. 2014). Bu sorunun ardından birçok matematikçi kesirli basamaktan türev için bir tanım oluşturmaya çalışmıştır. Çoğunlukla, kesirli türev tanımı için bir integral formülü kullanılmıştır. Bunlardan en popüler olanı Riemann-Liouville ve Caputo tanımlarıdır. Bu tanımlar aşağıdaki gibi verilebilir:

$\alpha \in [n-1, n)$ için f nin α . türevi

(i) Riemann-Liouville tanımı

$$D_a^\alpha (f) (s) = \frac{1}{\Gamma (n - \alpha)} \frac{d^n}{ds^n} \int_a^s \frac{f(t)}{(s-t)^{\alpha-n+1}} dt$$

(ii) Caputo tanımı

$$D_a^\alpha (f) (s) = \frac{1}{\Gamma (n - \alpha)} \int_a^s \frac{f^{(n)}(t)}{(s-t)^{\alpha-n+1}} dt$$

şeklinde. Ancak, bu kesirli türev tanımlarına göre iki fonksiyonun çarpımının, bölümünün ve bileşkesinin türevleri, klasik türev kurallarına uymamaktadır. Dolayısıyla, bu tanımlar diferensiyel denklemlere uygulandığı zaman bazı zorluklar ortaya çıkmaktadır. Bu zorlukların başında analitik çözümlerin bulunması yer almaktadır. Bununla birlikte elde edilen kesirli türevler karmaşık görünmekte ve çarpım kuralı ve zincir kuralı gibi klasik türevin sahip olduğu bazı temel özellikleri kaybetmektedir.

Aşağıda bu kesirli türevlerin bazı dezavantajları belirtilmektedir:

- (i) α 'nın doğal sayıdan farklı olduğu durumlarda, $D_a^\alpha(1) = 0$ durumu Riemann-Liouville türevi için sağlanmazken, Caputo türevi için sağlanır.
- (ii) Her iki kesirli türev de, iki fonksiyonun çarpımının türevi olarak bilinen

$$D_a^\alpha(uv) = uD_a^\alpha(v) + vD_a^\alpha(u)$$

formülünü sağlamaz.

(iii) Her iki kesirli türev de, iki fonksiyonun bölümünün türevi olarak bilinen

$$D_a^\alpha \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v D_a^\alpha(u) - u D_a^\alpha(v)}{v^2}$$

formülünü sağlamaz.

(iv) Her iki kesirli türev de

$$D_a^\alpha (g_1 \circ g_2)(t) = g_1^{(\alpha)}(g_2(t)) g_2^{(\alpha)}(t)$$

zincir kuralını sağlamaz

(v) Her iki kesirli türev genel olarak,

$$D_a^\alpha D_a^\beta f = D_a^{\alpha+\beta} f$$

özellikliğini sağlamaz.

(vi) Bütün kesirli türevlerde, özellikle Caputo tanımında, f fonksiyonunun türevlenebilir olduğu varsayılır (Khalil vd 2019).

Diğer taraftan, diferensiyel denklemler için kesirli türevlere olan ilgi

$$y^{(\frac{1}{2})} + y = x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{\Gamma(2.5)} x^{\frac{3}{2}}, \quad y(0) = 0$$

şeklinde bir başlangıç değer probleminin nasıl çözüleceği sorusuyla başlamıştır, burada $y^{(\frac{1}{2})}$, y 'nin $\frac{1}{2}$. basamaktan kesirli türevidir.

Son on yıl içerisinde, kesirli basamaktan diferensiyel denklemler, birçok mühendislik ve bilimsel disiplindeki uygulamaları nedeniyle önemli ölçüde ilgi toplamaya başlamıştır. Biyofizik, biyomühendislik, kuantum mekaniği, finans, kontrol teorisi, görüntü ve sinyal işleme gibi fizik ve mühendisliğin çeşitli alanlarında matematiksel modeller geliştirilmiştir (Abbas vd 2011). (Sabatier vd. 2007) ve (Hilfer vd. 2000) kitaplarında kesirli kalkülüsün çeşitli alanlardaki güncel kuramsal gelişmelerinin ve uygulamalarının oldukça ayrıntılı bir anlatımına ulaşılabilir. Söz konusu literatürde kullanılan yöntemler arasında ardışık yaklaşıklıklar tekniğinin yanı sıra Banach ve Schauder'in klasik sabit nokta yaklaşımları da yer almaktadır.

(Othman vd. 2013)'te fiber takviyeli termoelastik bir ortam üzerinde hidrostatik ilk gerilimin ve yer çekiminin etkisini kesirli türevli ısı transfer denklemi ile incelemiştir.

Kesirli basamaktan bir diferensiyel denkleminin çözümünün elde edilmesi kolay değildir. Bu nedenle yeni bir kesirli türev tanımının bazı hesaplamaları kolaylaştırabileceğini düşünen Khalil vd., 2014'te, klasik türev kurallarını da sağlayan, yeni bir kesirli türev tanımı olan ve "*uyumlu kesirli türev*" adı verilen türev tanımını ortaya koyarak, söz konusu zorlukların aşılabileceğini gösterdiler. Uyumlu türev tanımı, bir fonksiyonun adi türevinin klasik tanımındaki limit formuna benzer biçimde verilmiştir. Kesirli türevin bu yeni tanımından yararlanarak, "çarpımın türevi, bölümün türevi, ortalama değer teoremi ve Rolle teoremi" gibi kavramlar ispatlanmıştır. Bu çalışmadan bir yıl sonra Abdeljawad, 2015 yılında "zincir kuralı, üstel fonksiyonlar, Gronwall eşitsizliği, kısmi integrasyon, Taylor kuvvet serisi açılımı ve Laplace dönüşümünün uyumlu kesirli versiyonlarını göstermiştir (Abdeljawad 2015). Uyumlu kesirli türevin avantajlarından biri, zincir kuralı ve çarpım kuralı gibi klasik türevin bilinen özelliklerinin çoğunu sağlamalıdır (Kahouli vd. 2024). Ayrıca fizik, mühendislik ve ekonomi dahil olmak üzere çeşitli alanlarda uygulamaları vardır. Dolayısıyla, uyumlu türev tanımı birçok araştırmacının büyük ilgisini çekmiş ve buna bağlı olarak son yıllarda önemli çalışmalar yapılmıştır:

Batarfi vd., 2015'te uyumlu kesirli türev içeren

$$\begin{aligned} D^\alpha (D + \eta) u(s) &= g(s, u(s)), & s \in [0, 1] \\ u(0) &= 0, \quad u'(0) = 0, \quad u(1) = \beta u(\lambda) \end{aligned}$$

şeklindeki sınır değer problemini ele almışlardır, burada D^α uyumlu türevi ve D adi türevi göstermektedir. Bu problem için, ilk olarak lineer durum göz önüne alınarak Green fonksiyonu elde edilmiş ve daha sonra lineer olmayan durum incelenmiştir (Batarfi vd. 2015). 2015 yılında yapılan bir başka çalışmada, uyumlu kesirli türevli Sturm-Liouville problemlerinin özdeğerleri araştırılmıştır (Al-Rifae ve Abdeljawad 2015). Eslami, 2016'daki çalışmasında, uyumlu kesirli türev yardımı ile li-

neer olmayan Schrödinger denklemini bir adi diferensiyel denkleme dönüştürerek incelemiştir (Eslami 2016). Bayour vd. 2017’de uyumlu türevli lineer olmayan

$$\begin{aligned} D^\alpha y(s) &= h(s, y(s)), \quad s \in [a, b], \quad a > 0, \\ y(a) &= y_a, \end{aligned}$$

probleminin çözümünün varlık ve tekliğini Schauder’in sabit nokta teoremini kullanarak incelemiştir (Bayour vd. 2017), burada $D^\alpha y(s)$, $\alpha \in (0, 1)$, α . mertebeden bir fonksiyonun sıfırdan başlayan uyumlu kesirli türevini göstermektedir. Zhao ve Luo, 2017’deki çalışmalarında, uyumlu kesirli türev tanımını genelleştirmiş ve bu türevin fiziksel ve geometrik yorumlarını ele almıştır. Bu yeni genelleştirme ile uyumlu kesirli türevin fizik ve enerji alanlarındaki potansiyel uygulamalarına değinilmiştir (Zhao ve Luo 2017). SoK8uahi vd. 2017 yılındaki çalışmasında Lyapunov fonksiyonları kullanılarak uyumlu kesirli mertebeden lineer olmayan sistemlerin kararlılığı ve asimptotik kararlılığını incelemiştir (Souahi vd. 2017). (Wang vd. 2017) ve (Mahmudov vd. 2019) çalışmalarında, 2003 yılında Khusainov ve Shuklin tarafından lineer gecikmeli diferensiyel denklemlerin çözümünün bir temsili olarak kullanılmak amacıyla tanımlanan gecikmeli üstel matris fonksiyon kavramı, Mittag-Leffler fonksiyonlarını zenginleştirmek ve Caputo tipi kesirli zaman gecikmeli diferensiyel denklemlere uygulamak için kullanılmış ve bu kavram yardımıyla lineer kesirli gecikmeli diferensiyel denklemlerin çözümü verilmiştir. Ayrıca, kesirli basamaktan Hilfer tipi türeve sahip olan diferensiyel denklemlerin çözümlerinin varlık ve tekliği ve uyumlu kesirli türevin önemli bir uygulaması olan uyumlu kesirli türevlere sahip Hopfield nöral ağların üstel kararlılığı, uyumlu kesirli türev içeren BAM-tipinde nöral ağların üstel kararlılığı son yıllarda üretilen önemli çalışmalardır (Karakoc 2020, Kutahyalıoğlu ve Karakoc 2021, Kutahyalıoğlu ve Karakoc 2023). 2021 yılında, Othman, vd.

$$\frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = g(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

başlangıç değeri problemini çözmek için bir algoritma geliştirmeye odaklanmıştır. Bu denklem, tx düzleminde bir eğri olarak görülebilir, bu eğrinin her noktasında α . mertebeden oluşturan türevinin değeri t ve x cinsinden verilen, ancak belirli bir

(t_0, x_0) noktasından geçen belirli bir eğriyi ifade eder (Othman vd. 2021). Nazim, çalışmasında

$$\begin{aligned} D_0^\alpha u(s) &= Ku(s) + Lu(s-1), \quad s \geq 0, \tau \geq 0 \\ u(s) &= \phi(s), \quad -\tau \leq s \leq 0, \end{aligned}$$

şeklinde bir uyumlu kesirli gecikmeli denklemini ele alınmış ve bu denklemin çözümlerini oluşturmak için matris üstel fonksiyonu kullanılmıştır (Nazim 2021). Ayrıca çözümlerin varlığı ve tekliği ve Ulam-Hyers denklemlerinin kararlılığı da incelenmiştir. (Xiao ve Wang 2021) çalışmasında gecikmeli üstel matris fonksiyonu, uyumlu türev kavramı kullanılarak oluşturulmuş ve homojen ve homojen olmayan uyumlu kesirli diferensiyel denklemlerin çözümlerin ifadesini elde etmek için bu fonksiyon kullanılmıştır. (Al-Jamel vd. 2022) çalışmasında parametrelerin değişimi teorisinin uyumlu türev içeren sistemlere uygulanabileceği gösterilmiştir. Bununla birlikte, uyumlu türevin yeni bir kavram olması sebebiyle bazı özelliklerinin ve uygulamalarının bilim insanları tarafından araştırılmaya devam ettiği bilinmektedir.

Biyolojik sistemlerin modellenmesinde dikkate alınan yaklaşımlardan biri de parçalı sabit argümanlara sahip diferensiyel denklemlerdir. Bu türden denklemlerin, kimya, makine mühendisliği, fizik ve popülasyon dinamiği gibi geniş alanlarda uygulamaları vardır (Kartal 2015) ve (Gurcan 2014). Kaya, 2020 de yaptığı çalışmada, (Ozturk vd. 2012) çalışmasından yararlanarak

$$D^\alpha x(t) = rx(t)(1 - \beta x(t)) - \beta_0 x \left(\left[\frac{t}{h} \right] h \right) - \beta_1 x \left(\left[\frac{t-h}{h} \right] h \right)$$

şeklinde bir uyumlu kesirli PSADD in dinamik davranışını incelemiştir, burada $[t]$, t 'nin tamsayı kısmını, D^α uyumlu türevi ve h ayrıklaştırma parametresini göstermektedir (Kaya 2020). Bildiğimiz kadarıyla, parçalı sabit argümanlı uyumlu kesirli mertebeden diferensiyel denklemler için, çözümlerin varlığını ve salınımlılık, periyodiklik gibi bazı özelliklerini inceleyen çalışmalar bulunmamaktadır. 2023 yılında yaptığımız çalışmada birinci basamaktan sabit argümentli bir neutral diferensiyel denklemin çözümlerinin varlık ve tekliği, salınımlılığı ve sıfır çözümün asimptotiksel kararlılığı gösterilmiştir (Kavgaci vd. 2023). Bu çalışmada elde edilen

sonuçların uyumlu türevli parçalı sabit argümentli bir diferensiyel denklem için de geçerli olup olmadığının incelenmesi fikri bu tezin oluşmasındaki temel motivasyon kaynağıdır. Bu tez 7 bölümden oluşmaktadır:

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. Bu bölümde parçalı sabit argümentli diferensiyel denklemlerin tarihçesi üzerine durulmakta ve kesirli türev ile uyumlu türevden bahsedilerek konu ile ilgili çalışmalar incelenmektedir. 2. bölüm temel kavramları içermektedir. (Khalil vd 2014), (Abdeljawad 2015) çalışmalarında tanıtılan uyumlu türev ve bu türevin önemli tanımları ve temel özellikleri, fark denklemi ile ilgili bazı iyi bilinen sonuçlar verilmekte ve ayrıca salınımlı ve periodik çözümlerin temel tanımları ve teoremlerinden bahsedilmektedir. Üçüncü bölümden itibaren tezin orjinal kısmı ele alınmaktadır. Bu bölümde uyumlu kesirli türevli parçalı sabit argümentli

$$D_0^\alpha x(t) = ax(t) + a_0x([t]) + a_1x([t-1]), \quad t \geq 0 \quad (1.1)$$

denklemini

$$x(-1) = c_{-1} \quad , \quad x(0) = c_0 \quad (1.2)$$

başlangıç koşulları ile birlikte ele alınmış ve $a \neq 0$ ve $a = 0$ durumunda çözümlerin varlığı ve tekliği incelenmiştir. Dördüncü bölümde, bu denklemlerin çözümlerinin salınımlı olması için gerekli koşullar elde edilmiştir. Beşinci bölümde, çözümlerin asimptotik kararlılığı ile ilgili olarak bazı sonuçlar elde edilmiştir. 6. bölümde ise denklemin çözümlerinin periyodiklik özelliği incelenmiş ve her bölümün sonunda bazı sayısal örnekler sunulmuştur. Ayrıca, bazı nümerik örneklerin grafikleri çizilerek, teorik analizlerin doğruluğu gösterilmiştir. Son olarak elde edilen sonuçların bir özeti ve bu tezin önemi, tartışma ve sonuç bölümü olarak yedinci bölümde verilmektedir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm tez boyunca kullanılan temel tanım ve teoremleri içermektedir.

Tanım 2.1 (Khalil vd 2014) $u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun α . mertebeden uyumlu kesirli türevi

$$D_0^\alpha u(s) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{u(s + \epsilon s^{1-\alpha}) - u(s)}{\epsilon}, \quad s > 0,$$

şeklinde ifade edilir, burada $\alpha \in (0, 1]$ dir. $D_0^\alpha u(s)$ yerine kısaca $u^{(\alpha)}(s)$ kullanılabılır.

$u^{(\alpha)}(s)$, $0 < s < a$ ($a > 0$) aralığında varsa, bu durumda $s = 0$ 'daki türev

$$u^{(\alpha)}(0) = \lim_{s \rightarrow 0^+} u^{(\alpha)}(s)$$

biçiminde tanımlanır. Ek olarak, u 'nın $[0, \infty)$ aralığında α . mertebeden uyumlu kesirli türevi varsa, o zaman u 'ya $[0, \infty)$ aralığında α -diferensiyellenebilir fonksiyon denir.

Yukarıdaki tanımın bir sonucu olarak, aşağıdaki teorem ispatlanabilir:

Teorem 2.1 (Khalil vd 2014) $u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $s_0 > 0$ noktasında $\alpha \in (0, 1]$ α -türevlenebilir ise, o zaman u , s_0 'da süreklidir.

İspat. u , α türevlenebilir olsun. Bu durumda

$$u(s_0 + \epsilon s_0^{1-\alpha}) - u(s_0) = \frac{u(s_0 + \epsilon s_0^{1-\alpha}) - u(s_0)}{\epsilon} \cdot \epsilon$$

yazılabilir. Buradan, eşitliğin her iki tarafının $\epsilon \rightarrow 0$ için limiti alınırsa,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [u(s_0 + \epsilon s_0^{1-\alpha}) - u(s_0)] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{u(s_0 + \epsilon s_0^{1-\alpha}) - u(s_0)}{\epsilon} \cdot \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon$$

ve $h = \epsilon s_0^{1-\alpha}$ olarak seçilirse,

$$\lim_{h \rightarrow 0} u(s_0 + h) - u(s_0) = u^{(\alpha)}(s_0) \cdot 0$$

elde edilir. Böylece,

$$\lim_{h \rightarrow 0} u(s_0 + h) = u(s_0)$$

sonucu bulunur. Dolayısıyla u , s_0 'da süreklidir. $\square$

D_0^α 'nın aşağıdaki özellikleri sağladığı kolayca gösterilebilir:

Teorem 2.2 (Khalil vd 2014) $\alpha \in (0, 1]$ ve bir $s > 0$ noktasında u, v fonksiyonları α -türevlenebilir olsunlar. Bu durumda,

$$(1) D^\alpha (au + bv) = aD^\alpha (u) + bD^\alpha (v), \forall a, b \in \mathbb{R},$$

$$(2) D^\alpha (s^r) = r s^{r-\alpha}, \forall r \in \mathbb{R},$$

$$(3) \text{ Her sabit } u(s) = \lambda \text{ fonksiyonu için } D^\alpha (\lambda) = 0,$$

$$(4) D^\alpha (fg) = f D^\alpha (g) + g D^\alpha (f),$$

$$(5) D^\alpha \left(\frac{f_1}{f_2} \right) = \frac{f_2 D^\alpha (f_1) - f_1 D^\alpha (f_2)}{f_2^2},$$

$$(6) \psi \text{ türevlenebilir ise, o zaman } D^\alpha (\psi) (s) = s^{1-\alpha} \frac{d\psi}{ds} (s)$$

özellikleri sağlanır.

İspat. (1), (2) ve (3) özellikleri tanımdan kolayca elde edilebilir, (4) - (6) özelliklerini ispatlayalım. Şimdi, sabit $\xi > 0$ için

$$\begin{aligned} D^\alpha (fg)(\xi) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\xi + \varepsilon \xi^{1-\alpha}) g(\xi + \varepsilon \xi^{1-\alpha}) - f(\xi) g(\xi)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\xi + \varepsilon \xi^{1-\alpha}) g(\xi + \varepsilon \xi^{1-\alpha}) - f(\xi) g(\xi + \varepsilon \xi^{1-\alpha}) + f(\xi) g(\xi + \varepsilon \xi^{1-\alpha}) - f(\xi) g(\xi)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{f(\xi + \varepsilon \xi^{1-\alpha}) - f(\xi)}{\varepsilon} \cdot g(\xi + \varepsilon \xi^{1-\alpha}) \right) + f(\xi) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(\xi + \varepsilon \xi^{1-\alpha}) - g(\xi)}{\varepsilon} \\ &= D^\alpha (f) (\xi) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(\xi + \varepsilon \xi^{1-\alpha}) + f(\xi) D^\alpha (g) (\xi) \end{aligned}$$

elde edilir. g, ξ 'de sürekli olduğundan

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(\xi + \varepsilon \xi^{1-\alpha}) = g(\xi)$$

yazılabilir. Bu ise, (4) özelliğinin ispatını tamamlar. (5) özelliği de benzer şekilde ispatlanabilir.

(6)'yı ispatlamak için Tanım 2.1'de $h = \varepsilon s^{1-\alpha}$ alınırsa, ve buradan ε çekilirse, $\varepsilon = s^{\alpha-1} h$ elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned} D^\alpha (\psi)(s) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\psi(s + \varepsilon s^{1-\alpha}) - \psi(s)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(s + h) - \psi(s)}{h s^{\alpha-1}} \\ &= s^{1-\alpha} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(s + h) - \psi(s)}{h} \\ &= s^{1-\alpha} \frac{d\psi}{ds} (s) \end{aligned}$$

elde edilir ve (6) özelliği ispatlanır. $\square$

Bazı özel fonksiyonların uyumlu kesirli türevleri aşağıdaki gibi verilebilir:

$$(1) D^\alpha(s^r) = r s^{r-\alpha}, r \in \mathbb{R},$$

$$(2) D^\alpha(1) = 0,$$

$$(3) D^\alpha(e^{ks}) = k s^{1-\alpha} e^{ks}, k \in \mathbb{R},$$

$$(4) D^\alpha(\sin ks) = k s^{1-\alpha} \cos ks, k \in \mathbb{R},$$

$$(5) D^\alpha(\cos ms) = -m s^{1-\alpha} \sin ms, m \in \mathbb{R},$$

$$(6) D^\alpha\left(\frac{1}{\alpha} s^\alpha\right) = 1,$$

$$(7) D^\alpha\left(\sin \frac{1}{\alpha} s^\alpha\right) = \cos \frac{1}{\alpha} s^\alpha,$$

$$(8) D^\alpha\left(\cos \frac{1}{\alpha} s^\alpha\right) = -\sin \frac{1}{\alpha} s^\alpha,$$

$$(9) D^\alpha\left(e^{\frac{1}{\alpha} s^\alpha}\right) = e^{\frac{1}{\alpha} s^\alpha}.$$

Örnek 2.1 $f(t) = t^2$ fonksiyonunun $\alpha = \frac{1}{2}$ için uyumlu türevini hesaplayalım.

Birinci yol : Tanımdan

$$\begin{aligned} D_0^{1/2} t^2 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\left(t + \epsilon t^{\frac{1}{2}}\right)^2 - t^2}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{2\epsilon t^{\frac{3}{2}} + \epsilon^2 t}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(2t^{\frac{3}{2}} + \epsilon t\right) \\ &= 2t^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

İkinci yol : Teorem 2.2 nin (6) özelliği

$$\begin{aligned} D_0^{1/2} f(t) &= D_0^{1/2} t^2 \\ &= 2t^{\frac{1}{2}+1} \\ &= 2t^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Not edelim ki bir fonksiyon bir noktada türevlenemezken o noktada α . basamak-
tan uyumlu kesirli türeve sahip olabilir. Örneğin

$$f(t) = 3\sqrt[3]{t}$$

fonksiyonu için $\frac{df}{dt}(0)$ mevcut değilken,

$$f^{(1/3)}(0) = 1$$

dir.

$f(t)$ fonksiyonunun $a \leq t < \infty$ aralığında tanımlı olduğu zaman f 'nin $t \in [a, \infty)$ noktasındaki α .basamaktan uyumlu kesirli türevi aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

Tanım 2.2 (Abdeljawad 2015) $u : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\alpha \in (0, 1]$ için α .basamaktan uyumlu kesirli türevi

$$D_a^\alpha u(s) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{u(s + \epsilon(s-a)^{1-\alpha}) - u(s)}{\epsilon}, s > a,$$

olarak tanımlanır.

Not edelim ki u türevlenebilir ise, o zaman

$$(D_a^\alpha u)(s) = (s-a)^{1-\alpha} u'(s)$$

yazılabilir. Yüksek basamaktan uyumlu kesirli türevler için aşağıdaki tanım verilmektedir:

Tanım 2.3 (Khalil 2014) $\alpha \in (n, n+1]$ ve $f, t > 0$ için t noktasında n . basamaktan türevlenebilir olsun. Bu durumda f 'nin α .basamaktan uyumlu kesirli türevi

$$D_0^\alpha (f)(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f^{(\lceil \alpha \rceil - 1)}(t + \epsilon t^{\lceil \alpha \rceil - \alpha}) - f^{(\lceil \alpha \rceil - 1)}(t)}{\epsilon}$$

şeklinde tanımlanır, burada $\lceil \alpha \rceil$, α 'dan büyük veya ona eşit en küçük bir pozitif tam sayıdır.

Örnek 2.2 $u(t) = t^2$ fonksiyonunun, $t > 0$ için $\frac{3}{2}$. basamaktan uyumlu türevini bulalım.

$\alpha = \frac{3}{2} \in (1, 2] \Rightarrow \lceil \alpha \rceil = 2$ 'dir. Buna göre, Tanım 2.3 kullanılırsa,

$$\begin{aligned} D^{\frac{3}{2}}(u)(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{u'(t + \epsilon t^{2-\frac{3}{2}}) - u'(t)}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{u'(t + \epsilon t^{\frac{1}{2}}) - u'(t)}{\epsilon} \end{aligned}$$

yazılabilir. $u'(t) = 2t$ olduğundan,

$$\begin{aligned} D^{\frac{3}{2}}(u)(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{2(t + \epsilon t^{\frac{1}{2}}) - 2t}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{2\epsilon t^{\frac{1}{2}}}{\epsilon} \\ &= 2t^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir.

Uyarı 2.1 $\alpha \in (n, n + 1]$ ve $t > 0$ noktasında g fonksiyonu $(n + 1)$. basamaktan diferensiyellenebilir olsun. Bu durumda, Tanım 2.3'ten

$$D_0^\alpha g(t) = t^{[\alpha] - \alpha} g^{([\alpha])}(t)$$

dir.

Örneğin, $g(t) = t^2$ fonksiyonunun $t > 0$ için $\frac{3}{2}$. basamaktan uyumlu kesirli türevi

$$\begin{aligned} D^{3/2}(t^2) &= t^{2 - \frac{3}{2}} g^{(2)}(t) \\ &= t^{\frac{1}{2}} g''(t) \\ &= 2t^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

dir.

Teorem 2.3 (Khalil vd 2014) $a > 0$ olmak üzere $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

- (i) $[a, b]$ üzerinde sürekli,
- (ii) bir $\alpha \in (0, 1)$ için α -türevlenebilir,
- (iii) $h(a) = h(b)$

ise, bu durumda $h^{(\alpha)}(\rho) = 0$ olacak biçimde bir $\rho \in (a, b)$ vardır.

Bu teorem, literatürde uyumlu kesirli türevlenebilir fonksiyonlar için Rolle Teoremi olarak bilinir. Teoremin ispatı aşağıdaki gibidir:

İspat. $h, [a, b]$ üzerinde sürekli ve $h(a) = h(b)$ olduğundan, $\rho \in (a, b)$ noktasında bir lokal ekstremum vardır. Genelliği kaybetmeden, ρ 'nun bir lokal minimum noktası olduğunu varsayalım. O halde,

$$h^{(\alpha)}(\rho) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{h(\rho + \varepsilon \rho^{1-\alpha}) - h(\rho)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \frac{h(\rho + \varepsilon \rho^{1-\alpha}) - h(\rho)}{\varepsilon}$$

yazılabilir. Burada, birinci limit negatif olmayan, ikinci limit ise pozitif olmayan bir ifadedir. Dolayısıyla, $h^{(\alpha)}(\rho) = 0$ elde edilir. $\square$

Teorem 2.4 (Khalil vd 2014) $a > 0$ olmak üzere $\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sürekli ve $\alpha \in (0, 1)$ için α -türevlenebilir ise, bu durumda

$$\beta^{(\alpha)}(c) = \frac{\beta(b) - \beta(a)}{\frac{1}{\alpha}b^\alpha - \frac{1}{\alpha}a^\alpha}$$

eşitliğini sağlayan bir $c \in (a, b)$ sayısı vardır.

Bu teorem, literatürde uyumlu kesirli türevlenebilir fonksiyonların Ortalama Değer Teoremi olarak bilinir.

İspat.

$$h(x) = \beta(x) - \beta(a) - \frac{\beta(b) - \beta(a)}{\frac{1}{\alpha}b^\alpha - \frac{1}{\alpha}a^\alpha} \left(\frac{1}{\alpha}x^\alpha - \frac{1}{\alpha}a^\alpha \right)$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu h fonksiyonu Rolle teoreminin koşullarını sağlar. Dolayısıyla, $h^{(\alpha)}(c) = 0$ olacak şekilde bir $c \in (a, b)$ vardır.

$$D^\alpha\left(\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right) = 1$$

olduğundan istenen sonuç elde edilir. $\square$

β fonksiyonunun α - uyumlu kesirli integralinin tanımı aşağıdaki gibi verilebilir:

Tanım 2.4 (Abdeljawad 2015) $\alpha \in (0, 1]$ olmak üzere, $\beta : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun α -uyumlu kesirli integrali

$$I_a^\alpha(\beta)(t) = \int_a^t \frac{\beta(x)}{(x-a)^{1-\alpha}} dx$$

biçiminde tanımlıdır. Özel olarak $a = 0$ ise, o zaman $\beta : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\alpha \in (0, 1]$ uyumlu kesirli integrali

$$I_0^\alpha(\beta)(t) = \int_0^t \frac{\beta(x)}{x^{1-\alpha}} dx$$

dir.

Örneğin,

$$I_0^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\zeta} \cos \zeta\right) = \int_0^\zeta \cos x dx = \sin \zeta$$

ve

$$I_0^{\frac{1}{2}} \left(\cos 2\sqrt{\zeta} \right) = \sin 2\sqrt{\zeta}$$

dir.

Yukarıdaki tanım kullanılarak, aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 2.5 $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve $\alpha \in (0, 1]$ ise, bu durumda her $t > a$ için

$$D_a^\alpha I_a^\alpha (f) (t) = f(t)$$

dir.

İspat. f sürekli olduğundan, $I_a^\alpha (f) (t)$ diferensiyellenebilir. Böylece

$$\begin{aligned} D_a^\alpha (I_a^\alpha (f)) (t) &= (t-a)^{1-\alpha} \frac{d}{dt} I_a^\alpha (f) (t) \\ &= (t-a)^{1-\alpha} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{f(x)}{(x-a)^{1-\alpha}} dx \\ &= (t-a)^{1-\alpha} \frac{f(t)}{(t-a)^{1-\alpha}} \\ &= f(t) \end{aligned}$$

elde edilir. □

İntegral işareti altında bir fonksiyonun uyumlu kesirli türevi aşağıdaki gibi verilebilir:

Teorem 2.6 (Nazım vd. 2021) $t, s > 0$, $0 < \alpha \leq 1$ ve h fonksiyonu birinci bileşenine göre türevlenebilir olsun $\gamma(t)$ ve $\delta(t)$ fonksiyonları ile onların türevleri bir sonlu kapalı aralıkta sürekli ise, o zaman

$$D_0^\alpha \left(\int_{\gamma(t)}^{\delta(t)} h(t, s) ds \right) = \left(\int_{\gamma(t)}^{\delta(t)} D_0^\alpha h(t, s) ds \right) + h(t, \delta(t)) D_0^\alpha \delta(t) - h(t, \gamma(t)) D_0^\alpha \gamma(t)$$

dır.

Şimdi uyumlu kesirli türevin geometrik anlamından bahsedelim:

Tanım 2.5 $y = y(x)$ olmak üzere xy –düzleminde verilen bir $f(x, y) = c$, $x > 0$, eğrisi için

$$\frac{y^\alpha - y_0^\alpha}{x^\alpha - x_0^\alpha} = \frac{y_0^{\alpha-1}}{x_0^{\alpha-1}} y^{(\alpha)}(x_0)$$

şeklinde gösterilen denklem, (x_0, y_0) noktasından geçen bir eğri tanımlar. Bu eğri, $f(x, y) = c$ eğrisinin (x_0, y_0) noktasındaki kesirli kirişi adını alır.

Uyarı 2.2 Kesirli kiriş denklemi, $\alpha \rightarrow 1$ halinde

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = y'(x_0)$$

eşitliğine indirgenir. Bu ise $f(x, y) = c$ eğrisinin (x_0, y_0) noktasındaki teğet doğrusunun denklemidir. Buna göre, kesirli kirişlere, teğet doğrusundan sapan eğriler gözüyle bakılabilir.

Teorem 2.7 $f(x, y) = c$ denklemi ile verilen $y(x)$ fonksiyonunun $y^{(\alpha)}(x_0)$ uyumlu kesirli türevi, $f(x, y) = c$ eğrisinin (x_0, y_0) noktasındaki kesirli kirişine ilişkin teğet doğrusunun eğimine eşittir.

İspat. $y(x)$ 'in (x_0, y_0) noktasındaki kesirli kiriş denklemi

$$\frac{y^\alpha - y_0^\alpha}{x^\alpha - x_0^\alpha} = \frac{y_0^{\alpha-1}}{x_0^{\alpha-1}} y^{(\alpha)}(x_0)$$

olup iki tarafın x 'e göre türevi hesaplanırsa,

$$y'(x) = y^{(\alpha)}(x_0)$$

elde edilir.

Örnek 2.3

$$f(x, y) = y - x^2 = 0$$

fonksiyonunun $(2, 4)$ noktasında $\alpha = \frac{1}{2}$ kesirli kirişi

$$\frac{\sqrt{y} - 2}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} y^{(\frac{1}{2})}(2) = 4,$$

veya

$$\sqrt{y} - 2 = 4(\sqrt{x} - \sqrt{2})$$

dir. Bu kesirli kirişin teğetinin eğimi

$$y'(2) = 4\sqrt{2}$$

dir.

Bu ise

$$y = x^2$$

orijinal eğrisi için

$$y^{(\frac{1}{2})}(2) \text{ 'dir}$$

dir.

Şimdi, yukarıda verilen tanım ve teoremlerden yararlanarak bazı uyumlu kesirli basamaktan diferensiyel denklemlerin çözümlerini elde edelim.

Örnek 2.4 α . kesirli basamaktan

$$y^{(\alpha)} + y = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

diferensiyel denklemini ele alalım. Bu denklem için

$$y_h = e^{r\sqrt{x}}$$

şeklinde çözüm aranırsa,

o zaman karakteristik denklem

$$\alpha r + 1 = 0$$

olup, $r = -\frac{1}{\alpha}$ dır. Böylece, denklemin çözümü $y(x) = ce^{-\frac{1}{\alpha}x^\alpha}$ dır; burada c keyfi sabittir

Örnek 2.5 Giriş bölümünde bahsettiğimiz

$$y^{(\frac{1}{2})} + y = x^2 + 2x^{\frac{3}{2}}, \quad y(0) = 0$$

kesirli basamaktan başlangıç değer problemini ele alalım.

Öncelikle, $y^{(\frac{1}{2})} + y = 0$ homojen denklemi için y_h genel çözümünü elde edelim. Bu denklem için

$$y_h = e^{r\sqrt{x}}$$

şeklinde çözüm aranırsa,

$$\frac{r}{2}e^{r\sqrt{x}} + e^{r\sqrt{x}} = 0$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{1}{2}r + 1 = 0$$

karakteristik denklemi bulunur. Karakteristik kök $r = -2$ 'dir. Böylece, homojen denklemin genel çözümü k bir keyfi sabit olmak üzere $y_h = ke^{-2\sqrt{x}}$ dir.

Homojen olmayan denklemin bir özel çözümü $y_p(x) = x^2$ dir.

Böylece, verilen denklemin genel çözümü

$$y(x) = y_h + y_p = ke^{-2\sqrt{x}} + x^2$$

olarak yazılabilir. Son olarak, $y(0) = 0$ başlangıç koşulu uygulanırsa, $k = 0$ bulunur. O halde, verilen problemin çözümü $y = x^2$ dir.

Bu denklemin Riemann-Liouville türevi yardımıyla da çözülebildiğini belirtmek gerekir. Denklemden, $2x^{\frac{3}{2}}$ terimi yerine $\frac{2}{\Gamma(2.5)}x^{\frac{3}{2}}$ alınır, aynı çözüm elde edilir $\Gamma(2.5) = 1.33$ yaklaşık olarak 1'dir. Ancak görüldüğü üzere, uyumlu türev tanımı ile bu denklemin çözümünü elde etmek çok daha kolaydır.

Örnek 2.6 $\frac{1}{2}$. basamaktan

$$y^{(\frac{1}{2})} + \sqrt{x}y = xe^{-x}$$

diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Bu denklemin çözümü için denklemin her iki yanını $e^{I^{\frac{1}{2}}(\sqrt{x})} = e^x$ ile çarpılırsa,

$$e^x y^{(\frac{1}{2})} + \sqrt{x}e^x y = x$$

elde edilir. Bu ise,

$$(e^x y)^{(1/2)} = x$$

şeklinde yazılabilir. Buradan her iki yanın $\frac{1}{2}$ -uyumlu kesirli integrali alınır,

$$e^x y(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$$

bulunur. O halde, verilen denklemin çözümü

$$y(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}e^{-x} + ce^{-x}$$

dir, burada c bir keyfi sabittir.

Şimdi ikinci basamaktan lineer sabit katsayılı homojen

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0, \quad n = -1, 0, 1, \dots \quad (2.1)$$

fark denklemi için iyi bilinen bazı temel teoremleri verelim:

Teorem 2.8 (Elaydi 2015) (2.1) denkleminin bütün çözümlerinin sıfır etrafında salınımlı olması için gerek ve yeter koşul (2.1) denklemine ilişkin

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \quad (2.2)$$

karakteristik denkleminin pozitif reel köklere sahip olmamasıdır.

Açık olarak (2.2) karakteristik denkleminin λ_1 ve λ_2

$$\lambda_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

şeklinde olduklarından, aşağıdaki sonuçlar hemen elde edilir:

Teorem 2.9 (Elaydi 2015) Aşağıdaki koşullardan biri sağlanırsa, (2.1) denkleminin her çözümü sıfır etrafında salınımlıdır:

- (i) $p > 0$ ve $q = \frac{p^2}{4}$,
- (ii) $p > 0$ ve $0 < q < \frac{p^2}{4}$,
- (iii) $q > \frac{p^2}{4}$.

Teorem 2.10 (Elaydi 2015) (2.1) denkleminin tüm çözümlerinin sıfıra yakınsaması (sıfır çözümünün asimptotik kararlı olması) için gerek ve yeter koşul (2.2) karakteristik denkleminin λ_1 ve λ_2 köklerinin $\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$ olmasıdır.

Teorem 2.11 (Elaydi 2015) (Schur Cohn kriteri) (2.1) denkleminin sıfır çözümünün asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter koşul

$$|p| < 1 + q < 2 \quad (2.3)$$

olmasıdır.

3. VARLIK VE TEKLİK

Bu bölümde, (1.1) parçalı sabit argümentli uyumlu kesirli diferensiyel denklem ile (1.2) başlangıç koşullarından oluşan (1.1) – (1.2) başlangıç değer probleminin $t \geq 0$ için bir tek çözüme sahip olduğunu gösterilecektir. İlk olarak, (1.1) – (1.2)'nin çözüm tanımını verelim.

Tanım 3.1 Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $x(t)$ fonksiyonuna, $\{-1\} \cup [0, \infty)$ üzerinde (1.1) – (1.2) başlangıç değer probleminin bir çözümüdür denir:

- (i) $x(t)$, $[0, \infty)$ üzerinde süreklidir,
- (ii) $x(t)$, $[t] \in [0, \infty)$ olası noktaları hariç, $[0, \infty)$ aralığında α -uyumlu kesirli türevlenebilir olup $[t] \in [0, \infty)$ noktalarında tek yanlı türevlenebilirdir,
- (iii) $x(t)$, her bir $[n, n+1)$, $n = 0, 1, \dots$, için (1.1) denklemini sağlar,
- (iv) $x(t)$, (1.2) başlangıç koşullarını sağlar.

3.1 $a \neq 0$ Durumu

Bu kesimi kolay takip etmek için (1.1) – (1.2) başlangıç değer problemini tekrar yazalım:

$$D_0^\alpha x(t) = ax(t) + a_0x([t]) + a_1x([t-1]), \quad t \geq 0, \quad (3.1.1)$$

denklemini ve

$$x(-1) = c_{-1}, \quad x(0) = c_0, \quad (3.1.2)$$

başlangıç koşullarını ele alalım, burada D_0^α uyumlu kesirli türev olup a, a_0, a_1 reel sabitler ve $[.]$ tamdeğer fonksiyonudur.

Teorem 3.1 (3.1.1) – (3.1.2) başlangıç değer problemi, $\{-1\} \cup [0, \infty)$ üzerinde bir tek $x(t)$ çözümüne sahiptir.

İspat. (3.1.1) – (3.1.2) başlangıç değer probleminin $x(t)$ çözümünün varlık ve tekliliğini göstermek için adımlar yöntemini uygulayalım.

$0 \leq t < 1$ için (3.1.1) – (3.1.2) nin çözümü $x_0(t) \equiv x(t)$ ile gösterilsin. Bu durumda (3.1.1) denklemi

$$D_0^\alpha x(t) = ax(t) + a_0x(0) + a_1x(-1), \quad 0 \leq t < 1$$

denkleme indirgenir. (3.1.2) başlangıç koşullarından,

$$D_0^\alpha x(t) = ax(t) + a_0c_0 + a_1c_{-1}, \quad 0 \leq t < 1 \quad (3.1.3)$$

yazılabilir. (3.1.3) denkleme ilişkin

$$D_0^\alpha x(t) - ax(t) = 0$$

homojen denkleme için

$$x(t) = e^{\lambda t^\alpha}$$

şeklinde bir çözüm aranır,

$$\begin{aligned} D_0^\alpha e^{\lambda t^\alpha} - a e^{\lambda t^\alpha} &= 0 \\ t^{1-\alpha}(\lambda \alpha t^{\alpha-1} e^{\lambda t^\alpha}) - a e^{\lambda t^\alpha} &= 0 \\ (\lambda \alpha - a) e^{\lambda t^\alpha} &= 0 \\ \lambda \alpha - a &= 0 \end{aligned}$$

karakteristik denkleme elde edilir. Buradan,

$$\lambda = \frac{a}{\alpha}$$

olup homojen denklemin genel çözümü

$$x_h = c e^{\frac{a}{\alpha} t^\alpha}$$

şeklinde bulunur. Öte yandan, (3.1.3) denkleminin bir özel çözümü

$$x_p = -\frac{(a_0c_0 + a_1c_{-1})}{a}, \quad a \neq 0$$

dır. Böylece, (3.1.3) denkleminin genel çözümü

$$x(t) = x_h + x_p = c e^{\frac{a}{\alpha} t^\alpha} - \frac{(a_0c_0 + a_1c_{-1})}{a} \quad (3.1.4)$$

olarak elde edilir, burada c keyfi bir sabittir. (3.1.4)'e $x(0) = c_0$ koşulu uygulanırsa

$$c = c_0 + \frac{(a_0c_0 + a_1c_{-1})}{a}$$

bulunur. Bu sabit (3.1.4) 'te yerine konursa,

$$x_0(t) = \left(c_0 + \frac{(a_0c_0 + a_1c_{-1})}{a} \right) e^{\frac{a}{\alpha} t^\alpha} - \frac{(a_0c_0 + a_1c_{-1})}{a}$$

bulunur. Bu ifade düzenlenirse,

$$x(t) \equiv x_0(t) = \left(\frac{a_0 c_0 + a_1 c_{-1}}{a} \right) (-1 + e^{\frac{a}{\alpha} t^\alpha}) + c_0 e^{\frac{a}{\alpha} t^\alpha}, 0 \leq t < 1, \quad (3.1.5)$$

elde edilir.

$t \in [1, 2)$ için, (3.1.1) – (3.1.2) probleminin bir çözümü $x(t) \equiv x_1(t)$, olsun. O halde, (3.1.1) denklemi

$$D_1^\alpha x(t) = ax(t) + a_0 x(1) + a_1 x(0)$$

ya da

$$D_1^\alpha x(t) = ax(t) + a_0 c_1 + a_1 c_0 \quad (3.1.6)$$

denklemine indirgenir; burada $c_1 = x(1)$ 'dir. (3.1.6) denklemine ilişkin

$$D_1^\alpha x(t) - ax(t) = 0$$

homojen denklemin

$$x(t) = e^{\lambda(t-1)^\alpha}$$

şeklinde bir çözümü aranırsa,

$$x_h(t) = ce^{\frac{a(t-1)^\alpha}{\alpha}}$$

genel çözümüne varılır. (3.1.6) 'nın bir özel çözümü

$$x_p = -\frac{(a_0 c_1 + a_1 c_0)}{a}$$

olduğundan, (3.1.6) 'nın genel çözümü

$$x(t) = ce^{\frac{a(t-1)^\alpha}{\alpha}} - \frac{1}{a} (a_0 c_1 + a_1 c_0), 1 \leq t < 2, \quad (3.1.7)$$

olarak elde edilir, burada c bir keyfi sabittir.

$$x(1) = c_1$$

göz önüne alınırsa, (3.1.7)'den

$$c = c_1 + \frac{a_0 c_1 + a_1 c_0}{a}$$

bulunur, ve bu değer (3.1.7)'de yazılırsa,

$$x(t) \equiv x_1(t) = \left(\frac{a_0 c_1 + a_1 c_0}{a} \right) \left(-1 + e^{\frac{a(t-1)^\alpha}{\alpha}} \right) + c_1 e^{\frac{a(t-1)^\alpha}{\alpha}}, 1 \leq t < 2, \quad (3.1.8)$$

elde edilir. $x(t)$ çözümü $t = 1$ noktasında sürekli olduğundan,

$$\lim_{t \rightarrow 1^+} x_1(t) = \lim_{t \rightarrow 1^-} x_0(t)$$

olup, (3.1.8) ve (3.1.5) 'ten

$$c_1 = \left(\frac{a_0 c_0 + a_1 c_{-1}}{a} \right) (-1 + e^{\frac{a}{\alpha}}) + c_0 e^{\frac{a}{\alpha}}$$

ya da

$$c_1 = \left(\frac{a_0}{a} (-1 + e^{\frac{a}{\alpha}}) + e^{\frac{a}{\alpha}} \right) c_0 + \frac{a_1}{a} (-1 + e^{\frac{a}{\alpha}}) c_{-1}$$

elde edilir.

Benzer şekilde $n \leq t < n + 1$ için (3.1.1) – (3.1.2) başlangıç değer probleminin çözümüne

$$x(t) \equiv x_n(t)$$

dersek, (3.1.1) denklemi $[n, n + 1)$ üzerinde

$$D_n^\alpha x(t) = ax(t) + a_0 x(n) + a_1 x(n - 1)$$

ya da

$$D_n^\alpha x(t) = ax(t) + a_0 c_n + a_1 c_{n-1} \quad (3.1.9)$$

denkleme indirgenir; burada $c_n = x(n)$ ve $c_{n-1} = x(n - 1)$ 'dir.

Benzer yol izlenirse, (3.1.9)'un $x(n) = c_n$ koşulunu sağlayan çözümü

$$x(t) \equiv x_n(t) = \left(\frac{a_0 c_n + a_1 c_{n-1}}{a} \right) \left(-1 + e^{\frac{a(t-n)^\alpha}{\alpha}} \right) + c_n e^{\frac{a(t-n)^\alpha}{\alpha}}, n \leq t < n + 1, \quad (3.1.10)$$

olarak bulunur.

Benzer olarak, $t \in [n + 1, n + 2)$ aralığındaki, çözüm

$$x(t) \equiv x_{n+1}(t) = \left(\frac{a_0 c_{n+1} + a_1 c_n}{a} \right) \left(-1 + e^{\frac{a(t-n-1)^\alpha}{\alpha}} \right) + c_{n+1} e^{\frac{a(t-n-1)^\alpha}{\alpha}}, n+1 \leq t < n+2, \quad (3.1.11)$$

dir. Çözümün $t = n + 1$ noktasındaki sürekliliğinden,

$$\lim_{t \rightarrow (n+1)^+} x_{n+1}(t) = \lim_{t \rightarrow (n+1)^-} x_n(t),$$

olup (3.1.11) ve (3.1.10)'dan

$$c_{n+1} = \left(\frac{a_0 c_n + a_1 c_{n-1}}{a} \right) \left(-1 + e^{\frac{a}{\alpha}} \right) + c_n e^{\frac{a}{\alpha}}$$

ya da

$$c_{n+1} + \left(\frac{a_0}{a} - \left(1 + \frac{a_0}{a} \right) e^{\frac{a}{\alpha}} \right) c_n + \frac{a_1}{a} \left(1 - e^{\frac{a}{\alpha}} \right) c_{n-1} = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

bulunur. n yerine $n + 1$ alınırsa,

$$c_{n+2} + \left(\frac{a_0}{a} - \left(1 + \frac{a_0}{a} \right) e^{a/\alpha} \right) c_{n+1} + \frac{a_1}{a} \left(1 - e^{a/\alpha} \right) c_n = 0, \quad n = -1, 0, 1, \dots \quad (3.1.12)$$

ya da kısaca

$$c_{n+2} + p c_{n+1} + q c_n = 0, \quad n = -1, 0, 1, \dots \quad (3.1.13)$$

fark denklemi elde edilir; burada c_{-1} ve c_0

$$c_{-1} = x(-1) \text{ ve } c_0 = x(0) \quad (3.1.14)$$

şeklinde olup p ve q katsayıları

$$p = \frac{a_0}{a} - \left(1 + \frac{a_0}{a} \right) e^{\frac{a}{\alpha}} \text{ ve } q = \frac{a_1}{a} \left(1 - e^{\frac{a}{\alpha}} \right) \quad (3.1.15)$$

dir. (3.1.13) lineer sabit katsayılı homojen bir fark denklemdir. $a_1 \neq 0$ ise, o zaman (3.1.13) ikinci basamaktan bir fark denklemdir. Dolayısıyla, (3.1.13) – (3.1.14) başlangıç değer problemin bir tek c_n çözümü vardır.

$a_1 = 0$ ve $a_0 \neq \frac{ae^{\frac{a}{\alpha}}}{(1-e^{\frac{a}{\alpha}})}$ ise, (3.1.13) denklemi

$$c_{n+1} + p c_n = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

birinci basamaktan fark denklemine indirgenir. Bu denklem $c_0 = x(0)$ başlangıç koşulu altında

$$c_n = (-p)^n c_0, \quad n = 0, 1, \dots$$

şeklinde bir tek çözüme sahiptir.

$a_1 = 0$ ve $a_0 = \frac{ae^\alpha}{(1-e^\alpha)}$ ise, o zaman denklemin tek çözümü $c_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$ olur.

Böylece, (3.1.1) – (3.1.2) başlangıç değer probleminin (3.1.10) ile tanımlanan $x(t)$ çözümü $n \leq t < n + 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$ aralığında taktır.

Dolayısıyla, $a \neq 0$ halinde (1.1) – (1.2) başlangıç değer probleminin $\{-1\} \cup [0, \infty)$ üzerinde tanımlanan bir tek çözümü vardır. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

Uyarı 3.1.1 (1.1) – (1.2) başlangıç değer probleminin $a \neq 0$ iken (3.1.10) ile gösterilen çözümü $t \in \{-1\} \cup [0, \infty)$ için

$$x(t) = \left(-\frac{a_1}{a} + \frac{a_1}{a} e^{\frac{a(t-[t])^\alpha}{\alpha}}\right) c_{[t-1]} + \left(-\frac{a_0}{a} + \frac{a_0}{a} e^{a\frac{(t-[t])^\alpha}{\alpha}} + e^{a\frac{(t-[t])^\alpha}{\alpha}}\right) c_{[t]}, \quad (3.1.16)$$

biçiminde ifade edilebilir; burada $c_{[t]}$

$$c_{[t+2]} + pc_{[t+1]} + qc_{[t]} = 0, \quad c_{-1} = x(-1) \text{ ve } c_0 = x(0) \quad (3.1.17)$$

başlangıç değer probleminin tek çözümüdür.

3.2 $a = 0$ Durumu

Bu kesimde (1.1) – (1.2) başlangıç değer problemi $a = 0$ için incelenmiştir. $a = 0$ için

$$D_0^\alpha x(t) = a_0 x([t]) + a_1 x([t-1]), \quad t \geq 0, \quad (3.2.1)$$

denklemini

$$x(-1) = c_{-1}, \quad x(0) = c_0, \quad (3.2.2)$$

başlangıç koşullarından oluşan (3.2.1) – (3.2.2) başlangıç değer problemini ele alalım, burada D_0^α uyumlu kesirli türev olup a_0, a_1 reel sabitler ve $[.]$ tamdeğer fonksiyonudur.

Teorem 3.2 (3.2.1) – (3.2.2) başlangıç değer problemi, $\{-1\} \cup [0, \infty)$ üzerinde tanımlı bir tek $x(t)$ çözümüne sahiptir.

İspat. (3.2.1) – (3.2.2) çözümünün varlığını ve tekliğini göstermek için adımlar yöntemini uygulayalım. $x_0(t) \equiv x(t)$, $0 \leq t < 1$ aralığında (3.2.1) – (3.2.2)'nin bir çözümü olsun. (3.2.1) denklemi

$$D_0^\alpha x(t) = a_0 x(0) + a_1 x(-1)$$

denkleminde indirgenir. Bu denklem, $x(-1) = c_{-1}$ ve $x(0) = c_0$ başlangıç koşulları altında

$$D_0^\alpha x(t) = a_0 c_0 + a_1 c_{-1}$$

şeklinde yazılabilir. Her iki tarafın 0'dan t 'ye α -uyumlu integrali alınır,

$$I_0^\alpha (D_0^\alpha x(t)) = I_0^\alpha (a_0 c_0 + a_1 c_{-1})$$

$$\begin{aligned} x(t) - x(0) &= (a_0 c_0 + a_1 c_{-1}) I_0^\alpha(1) \\ &= (a_0 c_0 + a_1 c_{-1}) \int_0^t s^{\alpha-1} ds \\ &= (a_0 c_0 + a_1 c_{-1}) \frac{t^\alpha}{\alpha} \end{aligned}$$

ve buradan

$$x_0(t) \equiv x(t) = c_0 + (a_0 c_0 + a_1 c_{-1}) \frac{t^\alpha}{\alpha}, \quad 0 \leq t < 1,$$

elde edilir.

Şimdi, $t \in [1, 2)$ için, $x_1(t) \equiv x(t)$, (3.2.1) – (3.2.2)'nin bir çözümü olsun. (3.2.1) denklemi

$$\begin{aligned} D_1^\alpha x(t) &= a_0 x(1) + a_1 x(0) \\ &= a_0 c_1 + a_1 c_0 \end{aligned}$$

olarak yazılır; burada $c_1 = x(1)$ 'dir. Her iki tarafın 1'den t 'ye α -uyumlu integrali alınır,

$$I_1^\alpha (D_1^\alpha x(t)) = I_1^\alpha (a_0 c_1 + a_1 c_0)$$

$$\begin{aligned} x(t) - x(1) &= (a_0 c_1 + a_1 c_0) \int_1^t (s-1)^{\alpha-1} ds \\ &= (a_0 c_1 + a_1 c_0) \frac{(s-1)^\alpha}{\alpha} \\ &= (a_0 c_1 + a_1 c_0) \frac{(t-1)^\alpha}{\alpha} \end{aligned}$$

ya da

$$x_1(t) \equiv x(t) = c_1 + (a_0 c_1 + a_1 c_0) \frac{(t-1)^\alpha}{\alpha}$$

bulunur. $x(t)$ çözümünün $t = 1$ 'deki sürekliliğinden,

$$\lim_{t \rightarrow 1^+} x_1(t) = \lim_{t \rightarrow 1^-} x_0(t)$$

olup,

$$x(1) \equiv c_1 = c_0\left(1 + \frac{a_0}{\alpha}\right) + c_{-1}\frac{a_1}{\alpha}$$

elde edilir. Benzer şekilde, (3.2.1) – (3.2.2)’nin $n \leq t < n+1$ aralığı için bir çözümü $x_n(t) \equiv x(t)$ olsun. Böylece, (3.2.1) denklemi $[n, n+1)$ üzerinde

$$\begin{aligned} D_n^\alpha x(t) &= a_0 x(n) + a_1 x(n-1) \\ &= a_0 c_n + a_1 c_{n-1} \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

denkleme indirgenir; burada $c_n = x(n)$ ve $c_{n-1} = x(n-1)$ dir. (3.2.3) denkleminin her iki tarafının n ’den t ’ye kadar uyumlu integrali alınır,

$$x(t) - x(n) = (a_0 c_n + a_1 c_{n-1}) \frac{(t-n)^\alpha}{\alpha}$$

elde edilir. Buradan ve $x(n) = c_n$ ’den $n \leq t < n+1$ aralığı için

$$x_n(t) \equiv x(t) = \left(1 + a_0 \frac{(t-n)^\alpha}{\alpha}\right) c_n + a_1 \frac{(t-n)^\alpha}{\alpha} c_{n-1} \quad (3.2.4)$$

bulunur. Buna göre, $t \in [n+1, n+2)$ aralığındaki $x_{n+1}(t) \equiv x(t)$ çözümü,

$$x_{n+1}(t) \equiv x(t) = \left(1 + a_0 \frac{(t-n-1)^\alpha}{\alpha}\right) c_{n+1} + a_1 \frac{(t-n-1)^\alpha}{\alpha} c_n$$

dir. $x(t)$ ’nin $t = n+1$ ’deki sürekliliğinden,

$$\lim_{t \rightarrow (n+1)^+} x_{n+1}(t) = \lim_{t \rightarrow (n+1)^-} x_n(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

olmalıdır ve dolayısıyla

$$c_{n+1} = \left(1 + \frac{a_0}{\alpha}\right) c_n + a_1 \frac{1}{\alpha} c_{n-1}$$

veya, $n \rightarrow n+1$ alınır,

$$c_{n+2} - \left(1 + \frac{a_0}{\alpha}\right) c_{n+1} - \frac{a_1}{\alpha} c_n = 0, \quad n = -1, 0, 1, \dots \quad (3.2.5)$$

fark denklemi elde edilir. (3.2.5) denklemini

$$c_{n+2} + p c_{n+1} + q c_n = 0, \quad n = -1, 0, 1, \dots \quad (3.2.6)$$

şeklinde yazalım; burada, p ve q katsayıları

$$p = -1 - \frac{a_0}{\alpha}, \quad q = \frac{-a_1}{\alpha}$$

olup, c_{-1} ve c_0

$$c_{-1} = x(-1), c_0 = x(0) \quad (3.2.7)$$

dir.

$a_1 \neq 0$ ise, (3.2.6) ikinci basamaktan bir fark denklemi olup (3.2.6) – (3.2.7) başlangıç değer problemi bir tek çözüme sahiptir.

$a_1 = 0$ ve $a_0 \neq -\alpha$ ise, (3.2.6) denklemi

$$c_{n+1} = -pc_n, n = 0, 1, 2, \dots$$

şeklinde birinci basamaktan bir fark denklemi olup $c_0 = x(0)$ başlangıç koşulu altında $c_n = (-p)^n c_0, n = 1, 2, \dots$ şeklinde bir tek çözüme sahiptir.

$a_1 = 0$ ve $a_0 = -\alpha$ ise, o zaman denklemin tek çözümü $c_n = 0, n = 1, 2, \dots$ olur. Böylece, (3.2.1) – (3.2.2) başlangıç değer probleminin (3.2.4) ile tanımlanan $x(t)$ çözümü $n \leq t < n + 1, n = 0, 1, 2, \dots$, aralığında tektir. Sonuç olarak, (3.2.1) – (3.2.2) başlangıç değer probleminin $\{-1\} \cup [0, \infty)$ üzerinde tanımlanan bir tek çözümü vardır. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

Uyarı 3.2.1 (3.2.1)–(3.2.2) başlangıç değer probleminin (3.2.4) çözümü $t \in \{-1\} \cup [0, \infty)$ için

$$x(t) = (1 + a_0 \frac{(t - [t])^\alpha}{\alpha}) c_{[t]} + a_1 \frac{(t - [t])^\alpha}{\alpha} c_{[t-1]}, \quad (3.2.8)$$

şeklinde gösterilebilir; burada $c_{[t]}$,

$$c_{[t+2]} - \left(1 + \frac{a_0}{\alpha}\right) c_{[t+1]} - \frac{a_1}{\alpha} c_{[t]} = 0, c_{-1} = x(-1), c_0 = x(0) \quad (3.2.9)$$

başlangıç değer probleminin tek çözümüdür.

4. ÇÖZÜMLERİN SALINIMLILIĞI

Bu bölümde, (1.1) parçalı sabit argümente sahip uyumlu kesirli türevli diferensiyel denkleminin çözümlerinin salınımlılık durumları incelenecektir. Bunun için öncelikle, salınımlı çözüm tanımını verelim:

Tanım 4.1 $x(t)$, (1.1) denkleminin $[0, \infty)$ aralığı üzerinde tanımlı sıfır olmayan bir çözümü olsun. Yeterince büyük $N > 0$ için $n \geq N$ olduğu zaman

$$x(t_n)x(\tilde{t}_n) \leq 0$$

olacak şekilde (t_n) ve $(\tilde{t}_n)$ dizileri varsa, bu durumda $x(t)$ çözümüne *salınımlı çözüm* denir, burada $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{t}_n = \infty$ dur.

Teorem 4.1 $a \neq 0$ ve $a_1 \neq 0$ olsun. Aşağıdaki koşullardan biri sağlanıyorsa, o zaman (3.1.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır:

$$\begin{aligned} (i_1) \quad & a > 0, a_0 < \frac{ae^{\frac{a}{\alpha}}}{(1 - e^{\frac{a}{\alpha}})} \text{ ve } a_1 = \frac{a}{4(1 - e^{\frac{a}{\alpha}})} \left(\frac{a_0}{a} - \frac{a_0}{a} e^{\frac{a}{\alpha}} - e^{\frac{a}{\alpha}} \right)^2, \\ (i_2) \quad & a > 0, a_0 < \frac{ae^{\frac{a}{\alpha}}}{(1 - e^{\frac{a}{\alpha}})} \text{ ve } 0 > a_1 > \frac{a}{4(1 - e^{\frac{a}{\alpha}})} \left(\frac{a_0}{a} - \frac{a_0}{a} e^{\frac{a}{\alpha}} - e^{\frac{a}{\alpha}} \right)^2, \\ (i_3) \quad & a < 0 \text{ ve } a_1 < \frac{a}{4(1 - e^{\frac{a}{\alpha}})} \left(\frac{a_0}{a} - \frac{a_0}{a} e^{\frac{a}{\alpha}} - e^{\frac{a}{\alpha}} \right)^2. \end{aligned}$$

İspat. Teorem 2.8 den, (3.1.13) fark denkleminin bütün çözümlerinin salınımlı olması için gerek ve yeter koşul karşılık gelen karakteristik denklemin pozitif bir köke sahip olmamasıdır. O halde (3.1.13) fark denkleminin

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \tag{4.1}$$

karakteristik denklemini ele alalım, burada p ve q katsayıları (3.1.15) ile verilmektedirler. (i_1) göre $a > 0$ olduğundan, $e^{\frac{a}{\alpha}} > 1$ olup ikinci eşitsizlikten,

$$\frac{a_0}{a} (1 - e^{\frac{a}{\alpha}}) > e^{\frac{a}{\alpha}}$$

yazılabilir. Buradan

$$\frac{a_0}{a} > \left(1 + \frac{a_0}{a} \right) e^{\frac{a}{\alpha}}$$

olur. Bu ise $p > 0$ demektir.

Ayrıca, (i_1) 'deki eşitlik koşulundan

$$\frac{a_1}{a} (1 - e^{\frac{a}{\alpha}}) = \frac{1}{4} \left(\frac{a_0}{a} - \frac{a_0}{a} e^{\frac{a}{\alpha}} - e^{\frac{a}{\alpha}} \right)^2$$

yazılabilir. bu ise $q = \frac{1}{4}p^2$ demektir.

Açık olarak, (i_1) koşulu, Teorem (2.9)'daki (i) koşuluna karşılık gelmektedir. Bu nedenle (i_1) koşulu altında (3.1.13)'in her c_n çözümü salınımlıdır. $x(n) = c_n$ olduğundan, (3.1.1)'in her $x(t)$ çözümü (i_1) koşulu sağlandığı sürece salınımlı olur. Benzer şekilde, (i_2) ve (i_3) koşulları, sırasıyla Teorem (2.9)'un (ii) ve (iii) koşullarını gerçekleştirir. Dolayısıyla, bu kabuller de, (3.1.13) fark denkleminin ve keza (3.1.1) denkleminin her çözümünün salınımlı olmasını temin ederler. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1 $a = 0$ ve $a_1 \neq 0$ olsun. Aşağıdaki koşullardan biri sağlanıyorsa, o zaman (3.2.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır:

- (i) $\alpha + a_0 < 0$ ve $4\alpha a_1 + (\alpha + a_0)^2 = 0$,
- (ii) $\alpha + a_0 < 0$, $a_1 < 0$ ve $4\alpha a_1 + (\alpha + a_0)^2 > 0$,
- (iii) $4\alpha a_1 + (\alpha + a_0)^2 < 0$.

Şimdi, yukarıdaki teorem ve sonuç için aşağıdaki örnekler verilebilir.

Örnek 4.1 1/2.basamaktan parçalı sabit argümentli

$$D^{1/2}x(t) = \frac{1}{2}x(t) - x([t]) - \frac{1}{50}x([t-1]) \quad (4.2)$$

diferensiyel denklemini

$$x(-1) = 0, \quad x(0) = 1 \quad (4.3)$$

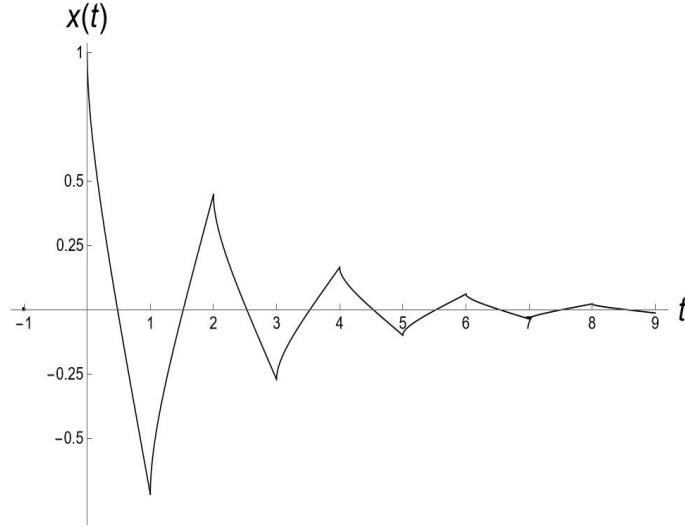
başlangıç koşulları ile birlikte ele alalım. Bu başlangıç değer problemi, $\alpha = \frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{2}$, $a_0 = -1$ ve $a_1 = -\frac{1}{50}$ olmak üzere (1.1)-(1.2)'nin özel bir durumudur. Burada Teorem 4.1'in (i_2) koşulu sağlanmaktadır. Böylece, Teorem 4.1 e göre, (4.2)'nin her çözümü salınımlıdır. Ayrıca $x(t)$ çözümünün grafiği aşağıdaki gibi çizilebilir.

Örnek 4.2 1/2.mertebeden

$$x^{(1/2)}(t) = -2x([t]) - \frac{9}{8}x([t-1]) \quad (4.4)$$

$$x(-1) = 0, \quad x(0) = 1 \quad (4.5)$$

başlangıç değer problemini ele alalım. Bu problem, $\alpha = \frac{1}{2}$, $a_0 = -2$ ve $a_1 = -\frac{9}{8}$ için (3.2.1) – (3.2.2) 'nin özel bir durumudur. Burada Sonuç 4.1'in (i) hipotezi gerçekleşir. Böylece, sonuç (4.1) 'e, göre (4.4)'ün her çözümü salınımlıdır.



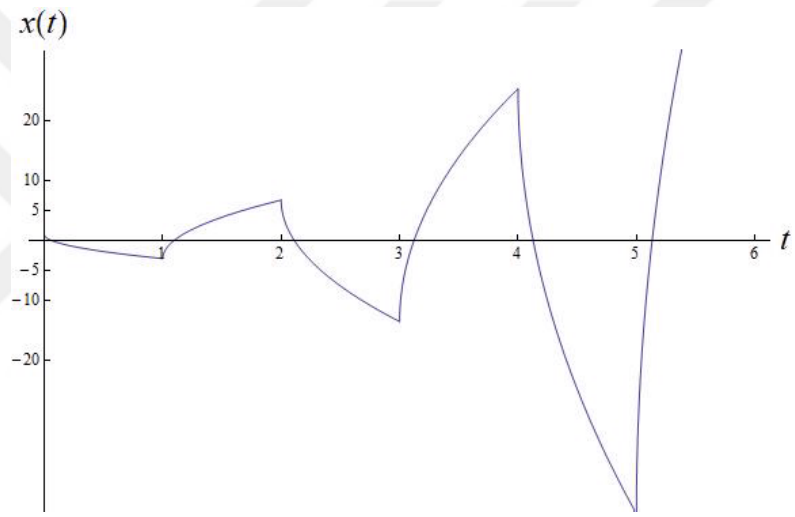
Şekil 4.1 (4.2) – (4.3) probleminin çözümünün grafiği

Ayrıca (4.4)-(4.5)'in çözümü

$$x(t) = \left(1 - 4(t - n)^{\frac{1}{2}}\right) c_n - \frac{9}{4}(t - n)^{\frac{1}{2}} c_{n-1}, \quad n \leq t < n + 1,$$

olarak elde edilir. Bu çözümün grafiği aşağıdaki gibidir:

Verilen nümerik örnekler ve çizilen grafikler, çözümlerin salınımlı olması için elde edilen koşulların doğruluğunu göstermiştir.



Şekil 4.2 (4.4) – (4.5) probleminin $x(t)$ çözümünün grafiği

5. ASİMPOTOTİKSEL KARARLILIK

Bu kesimde, (1.1) parçalı sabit argümente sahip uyumlu kesirli türevli diferensiyel denklemin sıfır çözümünün hangi şartlar altında asimptotik kararlı olacağı incelenenecektir.

Teorem 5.1 $a \neq 0$ ve $a_1 \neq 0$ olsun. (1.1) – (1.2) başlangıç değer probleminin $x(t)$ çözümünün, $t \rightarrow \infty$ halinde sıfıra gitmesi için gerek ve yeter koşul

$$|a_0 - (a_0 + a) e^{a/\alpha}| < |a| - a_1 |1 - e^{a/\alpha}| < 2|a| \quad (5.1)$$

dır.

İspat. Biliyoruz ki, (3.1.13) fark denkleminin sıfır çözümü asimptotik kararlı olduğu sürece (1.1) – (1.2)'nin (3.1.16) ile gösterilen $x(t)$ çözümü $t \rightarrow \infty$ halinde sıfıra gider. Açık olarak, (5.1) koşulu Teorem 2.11'deki (2.3) koşulunu gerektirmektedir. Gerçekten, (5.1)'in iki yanı $|a|$ ile bölünürse,

$$\left| \frac{a_0}{a} - \left(1 + \frac{a_0}{a}\right) e^{\frac{a}{\alpha}} \right| < 1 + \frac{a_1}{a} (1 - e^{\frac{a}{\alpha}}) < 2$$

olur ki bu, $|p| < 1 + q < 2$ demektir. O halde Teorem 2.11, (3.1.13) fark denkleminin uygulanabilir ve istenen sonuç elde edilir. $\square$

Sonuç 5.1 $a = 0$ ve $a_1 \neq 0$ olsun. bu durumda (3.2.1)-(3.2.2) başlangıç değer probleminin çözümünün $t \rightarrow \infty$ halinde sıfıra gitmesi için gerek ve yeter koşul

$$|a_0 + \alpha| < \alpha - a_1 < 2\alpha$$

dır.

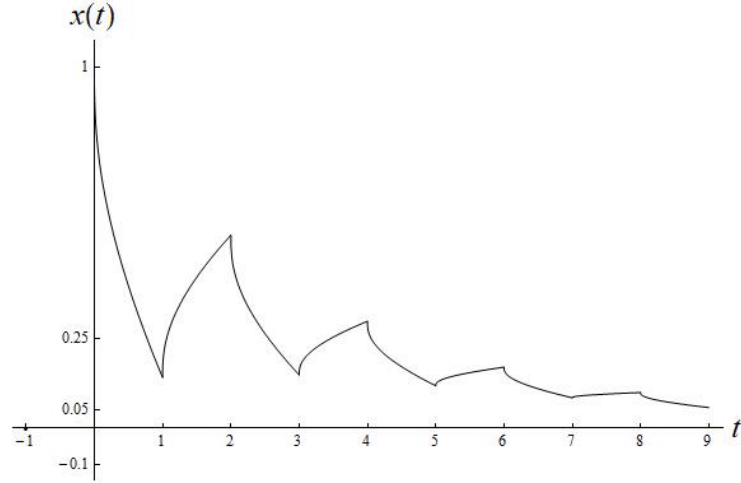
Örnek 5.1 1/3.basamaktan

$$D^{1/3}x(t) = \frac{1}{3}x(t) - \frac{1}{2}x([t]) + \frac{1}{10}x([t-1]) \quad (5.2)$$

denklemini

$$x(-1) = 0, \quad x(0) = 1 \quad (5.3)$$

başlangıç koşulları ile birlikte ele alalım. Bu problem, $\alpha = \frac{1}{3}$, $a = \frac{1}{3}$, $a_0 = -\frac{1}{2}$ ve $a_1 = \frac{1}{10}$ olmak üzere (1.1) – (1.2) nin özel bir durumudur. Teorem 5.1 in hipotezleri



Şekil 5.1 $a \neq 0$ durumu (5.2) – (5.3)’ün $x(t)$ çözümünün grafiği

sağlandığından, (5.2) – (5.3) probleminin $x(t)$ çözümü, $t \rightarrow \infty$ halinde sıfıra gider (Şekil 5.1).

Örnek 5.2

$$x^{(1/4)}(t) = -\frac{1}{5}x([t]) + \frac{1}{10}x([t-1]) \quad (5.4)$$

denklemini

$$x(-1) = -1, \quad x(0) = 1 \quad (5.5)$$

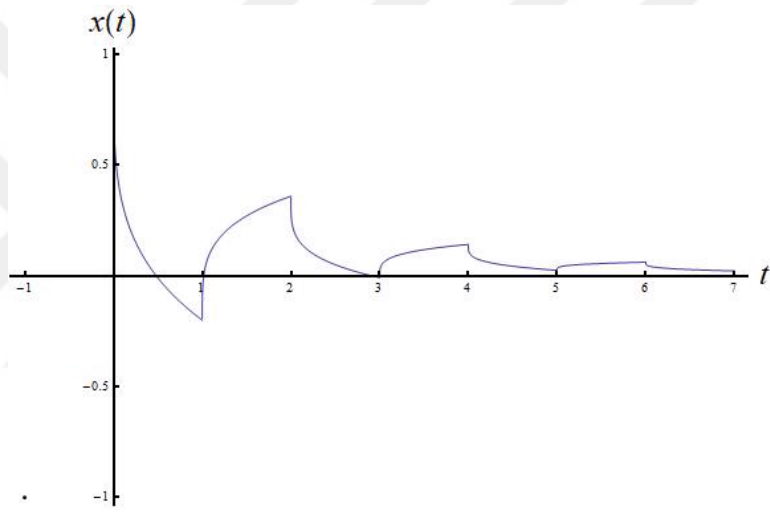
başlangıç koşulları ile birlikte ele alalım. Bu başlangıç değer problemi, $\alpha = \frac{1}{4}$, $a_0 = -\frac{1}{5}$ ve $a_1 = \frac{1}{10}$ ile (1.1) – (1.2) nin özel bir durumudur. Sonuç 5.1’in koşulları sağlandığından, (5.4) – (5.5)’ in çözümü $t \rightarrow \infty$ halinde sıfıra gider, (Şekil 5.2). Ayrıca (5.4) – (5.5) problemin çözümü

$$x(t) = (1 - \frac{4}{5}(t-n)^{\frac{1}{4}})c_n + \frac{2}{5}(t-n)^{\frac{1}{4}}c_{n-1}$$

dir; burada c_n ,

$$c_{n+2} - \frac{1}{5}c_{n+1} - \frac{2}{5}c_n = 0, \quad c_{-1} = -1, \quad c_0 = 1$$

başlangıç değer probleminin tek çözümüdür.



Şekil 5.2 (5.4) – (5.5)'in çözümünün grafiği

6. PERİYODİK ÇÖZÜMLER

Bu bölümde (1.1) – (1.2) başlangıç değer probleminin periyodik çözümlerinin varlığı üzerinde durulmaktadır.

Teorem 6.1 $a_1 \neq 0$ olsun (1.1) – (1.2) başlangıç değer probleminin aşıkak olmayan $x(t)$ çözümünün k periyotlu olması için gerek ve yeter koşul

$$x(k) = x(0) \text{ ve } x(k-1) = x(-1)$$

dır, burada k pozitif bir tam sayıdır.

İspat. $a \neq 0$ için (1.1) – (1.2)'in $x(t)$ çözümü, (3.1.10) 'dan

$$x_n(t) \equiv x(t) = \left(\frac{a_0 c_n + a_1 c_{n-1}}{a} \right) \left(-1 + e^{\frac{a(t-n)^\alpha}{\alpha}} \right) + c_n e^{\frac{a(t-n)^\alpha}{\alpha}}, n \leq t < n+1, \quad (6.1)$$

dir.

$$x(k) = x(0) \text{ ve } x(k-1) = x(-1)$$

doğru olsun; yani

$$c_k = c_0 \text{ ve } c_{k-1} = c_{-1}$$

olsun. Bu durumda

$$x_n(t-k) = x_{n+k}(t), t \in [n+k, n+k+1), n = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.2)$$

eşitliğinin sağlandığını göstermek gerekmektedir. Zira, (6.2), (1.1) – (1.2) 'nin $x(t)$ çözümünün k periyotlu periyodik çözüm olduğunu göstermektedir; yani $t \in \{-1\} \cup [0, \infty)$ için $x(t+k) = x(t)$ dir.

(6.1)'den , $n = 0$ ve $n = k$ için, sırasıyla,

$$x_0(t) = \left(\frac{a_0 c_0 + a_1 c_{-1}}{a} \right) \left(-1 + e^{\frac{at^\alpha}{\alpha}} \right) + c_0 e^{\frac{at^\alpha}{\alpha}}, 0 \leq t < 1,$$

ve

$$x_k(t) = \left(\frac{a_0 c_k + a_1 c_{k-1}}{a} \right) \left(-1 + e^{\frac{a(t-k)^\alpha}{\alpha}} \right) + c_k e^{\frac{a(t-k)^\alpha}{\alpha}}, k \leq t < k+1$$

elde edilir. $c_k = c_0$ ve $c_{k-1} = c_{-1}$ olduğundan,

$$x_0(t-k) = x_k(t), \quad k \leq t < k+1, \quad (6.3)$$

dır. (6.3) ve $x(t)$ çözümünün $[0, \infty)$ aralığındaki sürekliliğinden,

$$c_1 = c_{1+k}$$

olur.

Benzer şekilde, (6.1)'dan $n = 1$ ve $n = k+1$ için, sırasıyla,

$$x_1(t) = \left(\frac{a_0 c_1 + a_1 c_0}{a} \right) \left(-1 + e^{\frac{a(t-1)^\alpha}{\alpha}} \right) + c_1 e^{\frac{a(t-1)^\alpha}{\alpha}}, \quad 1 \leq t < 2,$$

ve

$$x_{1+k}(t) = \left(\frac{a_0 c_{1+k} + a_1 c_k}{a} \right) \left(-1 + e^{\frac{a(t-1-k)^\alpha}{\alpha}} \right) + c_{1+k} e^{\frac{a(t-1-k)^\alpha}{\alpha}}, \quad 1+k \leq t < 2+k$$

dir. Buradan

$$x_1(t-k) = x_{1+k}(t), \quad 1+k \leq t < 2+k,$$

olur. Bu şekilde devam edilirse,

$$x_n(t-k) = x_{n+k}(t), \quad n+k \leq t < n+k+1, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

elde edilir. Bu ise (6.2) eşitliğidir.

Şimdi, $x(t+k) = x(t)$, yani $x(t)$ çözümü k -periyotlu olsun. Bu durumda, $t = 0$ ve $t = -1$ için, sırasıyla,

$$x(k) = x(0) \text{ ve } x(k-1) = x(-1)$$

bulunur. Bunlar'da açık olarak

$$c_k = c_0 \text{ ve } c_{k-1} = c_{-1}$$

eşitliklerini ifade ederler.

Son olarak, $a = 0$ için (3.2.1) – (3.2.2) başlangıç değer problemini $x(t)$ çözümü (3.2.4)'den

$$x_n(t) \equiv x(t) = \left(1 + a_0 \frac{(t-n)^\alpha}{\alpha} \right) c_n + a_1 \frac{(t-n)^\alpha}{\alpha} c_{n-1} \quad (6.4)$$

dir; burada c_n , (3.2.6) – (3.2.7)’nin tek çözümüdür. Yukarıdaki yöntem izlenirse, (6.4) çözümünün k - periyotlu periyodik olması için gerek ve yeter koşulu

$$c_k = c_0 \text{ ve } c_{k-1} = c_{-1}$$

olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanır. .

□

Uyarı 6.1 $\alpha = 1$, $a_0 = 0$, $a_1 = -b$ ve a katsayısı yerine $-a$ alınır, (1.1) denklemini (Aftabizadeh 1987) çalışmasında verilen

$$y'(t) + ay(t) + by([t - 1]) = 0$$

denklemine indirgenir. Bu durumda, Teorem 6.1 ile (Aftabizadeh 1987)’deki Lemma 2 çıkarılır.

Uyarı 6.2 Teorem 6.1’den $c_0 \neq c_{-1}$ olduğu sürece (1.1) – (1.2) başlangıç değer problemi 1–periyotlu çözüme sahip olamaz $c_0 = c_{-1}$ ise, $a_1 \neq 0$ olmak üzere (1.1) – (1.2) probleminin 1-periyotlu bir tek periyodik çözüme sahip olması için gerek ve yeter koşul $a_0 + a_1 + a = 0$ ’dır.

Sonuç 6.1 $a \neq 0$ ve $a_1 \neq 0$ olsun.

(i)

$$a_0 = a_1 + a \left(\frac{1 + e^{a/\alpha}}{1 - e^{a/\alpha}} \right) \text{ veya } a_0 + a_1 + a = 0 \quad (6.5)$$

ise, o zaman (1.1) – (1.2) başlangıç değer problemin $x(t)$ çözümü, 2–periyotlu periyodik bir çözümdür.

(ii) $[a_0 - a_1 - (a_0 - a_1 + a)e^{a/\alpha}]^2 + [a - a_0 + (a + a_0)e^{a/\alpha}] [a - a_1 + a_1e^{a/\alpha}] = 0$ veya $a_0 + a_1 + a = 0$ ise, o zaman (1.1) – (1.2) başlangıç değer problemin $x(t)$

çözümü, 3–periyotlu bir periyodik çözümdür.

İspat. Burada, sadece (i)’in ispatı verilmektedir; (ii)’nin ispatı benzer şekilde yapılabilir. (3.1.16) ile verilen $x(t)$ çözümü, Teorem 6.1 gereğince,

$$c_2 = c_0, c_1 = c_{-1} \quad (6.6)$$

olduğu sürece 2–periyotlu periyodik bir çözüm olur. (3.1.17)’den $t = -1$ ve $t = 0$ ya da eşdeğer olacak (3.1.13)’ten $n = -1$ ve $n = 0$ için, sırasıyla,

$$c_1 = -pc_0 - qc_{-1} \quad (6.7)$$

ve

$$c_2 = (p^2 - q) c_0 + pq c_{-1} \quad (6.8)$$

yazılır; burada p ve q değerleri (3.1.15) ile verilmektedir. (6.7) ve (6.8), (6.6)'da yerlerine yazılırsa,

$$\begin{cases} (p^2 - q - 1) c_0 + pq c_{-1} = 0 \\ (-p) c_0 - (q + 1) c_{-1} = 0, \end{cases} \quad (6.9)$$

sistemi elde edilir. Aşık olmaya çözüm nedeniyle (6.9)'un katsayılar determinantı sıfır olmalıdır:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (p^2 - q - 1) & pq \\ -p & -(q + 1) \end{vmatrix} = 0.$$

Buradan (6.5)'teki eşitlikler elde edilir. Böylece (i)'nin ispat tamamlanmış olur.

□

Sonuç 6.2 $a = 0$ ve $a_1 \neq 0$ olsun.

(i) Eğer

$$a_0 - a_1 + 2\alpha = 0 \text{ veya } a_0 + a_1 = 0$$

ise, (3.2.1) – (3.2.2) başlangıç değer probleminin $x(t)$ çözümü, 2–periyotlu periyodik bir çözümdür.

(ii) Eğer

$$(a_0 - a_1 + \alpha)^2 + (a_0 + 2\alpha)(a_1 - \alpha) = 0 \text{ veya } a_0 + a_1 = 0$$

ise, o zaman (3.2.1) – (3.2.2) probleminin $x(t)$ çözümü, 3-periyotlu periyodik bir çözümdür.

İspat. Bu sonucun ispatı, Sonuç 6.1'in ispatına benzer olarak yapılabileceği için atlanmaktadır.

Örnek 6.1

$$D_0^{0.25} x(t) = x(t) + \frac{e^4}{1 - e^4} x([t]) - \frac{1}{1 - e^4} x([t - 1]), \quad 0 \leq t < \infty \quad (6.10)$$

denklemini ve

$$x(-1) = 1, \quad x(0) = 2 \quad (6.11)$$

başlangıç koşullarını ele alalım. Burada $\alpha = 0.25$, $a = 1$, $a_0 = \frac{e^4}{1 - e^4}$ ve $a_1 = -\frac{1}{1 - e^4}$ dır. Sonuç 6.1'in ilk koşulunun sağlandığı açıkça görülür. Dolayısıyla, (6.10) 'nun $x(t)$ çözümü 2–periyotlu periyodik bir çözümdür.

Gerçekten, (6.10)'nun $x(t)$ çözümü, (3.1.16)'dan

$$x(t) = \frac{1}{1 - e^4} \left[\left(-e^4 + e^{4(t-[t])^{0.25}} \right) c_{[t]} + \left(1 - e^{4(t-[t])^{0.25}} \right) c_{[t-1]} \right] \quad (6.12)$$

dir, burada $c_{[t]}$, (3.1.17)'den

$$c_{[t+2]} = c_{[t]} \quad (6.13)$$

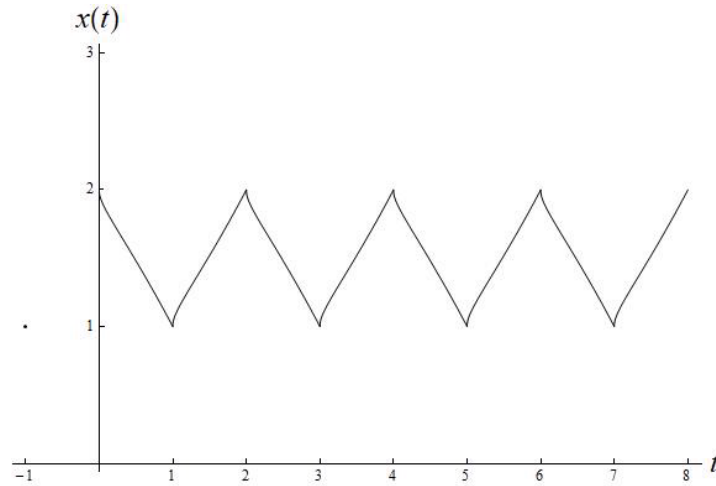
fark denklemini sağlar. (6.12)'den

$$x(t+2) = \frac{1}{1 - e^4} \left[\left(-e^4 + e^{4(t-[t])^{0.25}} \right) c_{[t+2]} + \left(1 - e^{4(t-[t])^{0.25}} \right) c_{[t+1]} \right] \quad (6.14)$$

çıkar. (6.13)'ten, $c_{[t+1]} = c_{[t-1]}$ yazılabilir. Dolayısıyla, (6.14) ile (6.12) eşittir, yani

$$x(t+2) = x(t)$$

dir. Bu da, $x(t)$ çözümünün 2–periyotlu periyodik olması demektir (Şekil 6.1).

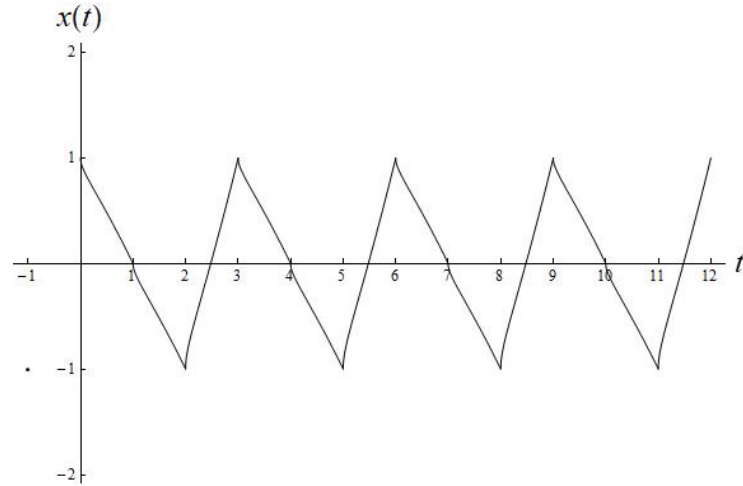


Şekil 6.1 (6.10) – (6.11)'in çözümünün grafiği

Örnek 6.2

$$D_0^{0.25} x(t) = x(t) + \frac{1 + e^4}{1 - e^4} x([t]) + \frac{1}{1 - e^4} x([t-1]) \quad (6.15)$$

$$x(-1) = -1, x(0) = 1. \quad (6.16)$$



Şekil 6.2 (6.15) – (6.16) probleminin $x(t)$ çözümünün grafiği

başlangıç değer problemini ele alalım, burada $\alpha = 0.25, a = 1, a_0 = \frac{1+e^4}{1-e^4}$ ve $a_1 = \frac{1}{1-e^4}$ 'dir. Sonuç 6.1'deki 2. koşul sağlandığından, (6.15) – (6.16) problemi 3–periyotlu bir periyodik çözüme sahiptir (Şekil 6.2).

Örnek 6.3

$$D_0^{0.8}x(t) = -0.8x([t]) + 0.8x([t-1]), \quad (6.17)$$

$$x(-1) = -1, x(0) = 2 \quad (6.18)$$

başlangıç değer problemi için Sonuç 6.2 (i) sağlanmaktadır. O halde $x(t)$ çözümü 2–periyotludur. Gerçekten (6.17) – (6.18)'in çözümü, (3.2.8)'den

$$x(t) = (1 - (t - [t])^{0.8}) c_{[t]} + (t - [t])^{0.8} c_{[t-1]}, \quad t \in \{-1\} \cup [0, \infty),$$

dir; burada $c_{[t]}$,

$$c_{[t+2]} - c_{[t]} = 0$$

fark denkleminin $c_{-1} = x(-1)$ ve $c_0 = x(0)$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümüdür.

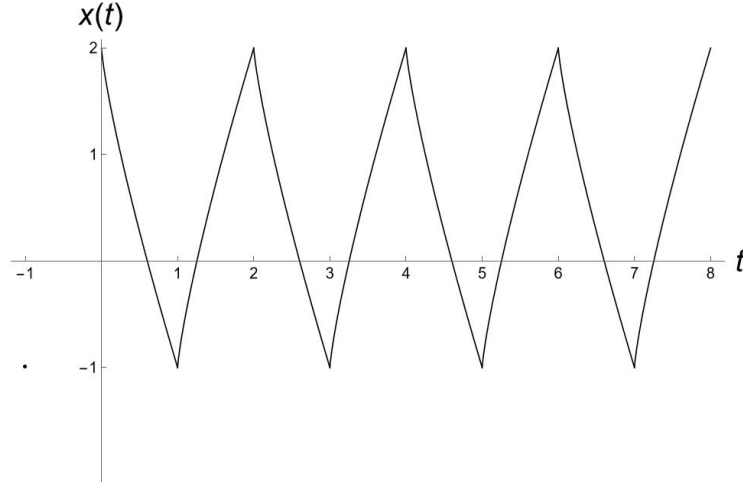
Bu çözüm için

$$x(t+2) = x(t)$$

olduğu görülebilir (Şekil 6.3).

Örnek 6.4

$$D_0^{0.8}x(t) = -1.6x([t]) - 0.8x([t-1]), \quad (6.19)$$

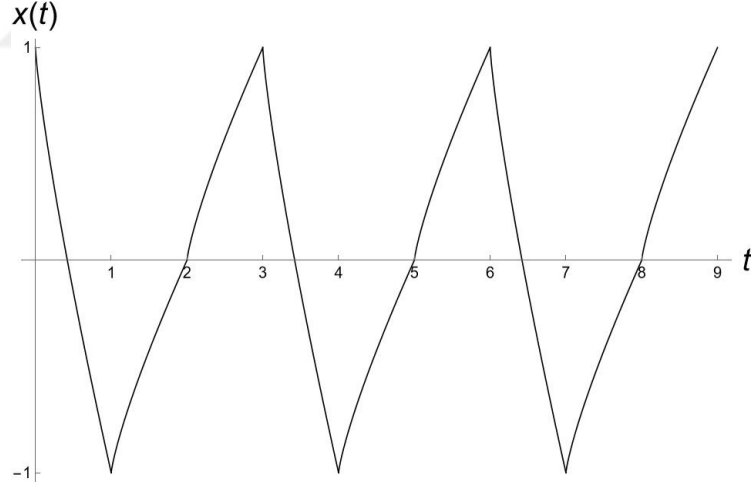


Şekil 6.3 (6.17) – (6.18)’in $x(t)$ çözümü: 2-periyotlu

denklemini ve

$$x(-1) = 0, \quad x(0) = 1 \quad (6.20)$$

başlangıç değer problemi için Sonuç 6.2 (ii) sağlanmaktadır. Dolayısıyla verilen problemin $x(t)$ çözümü, 3–periyotlu periyodik çözümdür (Şekil 6.4).



Şekil 6.4 (6.19)’un $x(t)$ çözümü: 3-periyotlu

7. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında uyumlu kesirli türev içeren parçalı sabit argümentli k_2 diferensiyel denklemlerin $a \neq 0$ ve $a = 0$ durumlarında çözümlerinin varlık ve tekliği araştırılmıştır. Çözümlerin varlık ve tekliği gösterilirken adımlar yöntemi izlenmiş ve sonucunda denklem bir fark denklemine indirgenmiştir. Daha sonra bu çözümlerin asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter koşullar elde edilmiştir. Ayrıca, çözümlerin hangi koşullar altında salınımlı olacağı ve periyodik çözümlerin varlığı araştırılmıştır. Bu sonuçların bulunmasında fark denklemlerinin özellikleri kullanılmış ve elde edilen fark denklemlerinin çözümlerinin uyumlu kesirli türev içeren parçalı sürekli sabit argümentli diferensiyel denklemlerin çözümleri ile ilişkili olmasından yararlanılmıştır. Çalışmada sunulan nümerik örnekler ve çizilen grafikler, teorik analizleri desteklemiş ve yöntemlerin uygulanabilirliğini göstermiştir.

Uyumlu kesirli türevlerin, diğer kesirli türevlere (Riemann, Caputo vb.) kıyasla birçok avantajı bulunmaktadır. Diğer kesirli türevlerde bahsedilemeyen birçok özellik uyumlu kesirli türevde verilebilir. Son yıllarda gelişen uyumlu kesirli türev içeren diferensiyel denklemler kavramına katkıda bulunan bu çalışma ileride yapılacak çalışmalara da bir kaynak niteliği taşımaktadır. Elde edilen sonuçlar, özellikle mühendislik, biyoloji ve finans gibi kesirli modellerin sıklıkla kullanıldığı disiplinlerde uygulama potansiyeli taşımaktadır. Bu çalışma, parçalı sabit argümentli diferensiyel denklemler üzerinde uyumlu kesirli türev kullanılarak gerçekleştirilen ilk sistematik analizlerden biri olup, ilgili alandaki eksikliği doldurmayı amaçlamaktadır. Bu çalışmada yer alan denklemlerin geliştirilerek yeni çalışmalara konu olabileceği beklenmektedir.

KAYNAKLAR

KAYNAKLAR

- Abdeljawad, T. 2015. On conformable fractional calculus. *J.Comput. Appl. Math* 279,57-66.
- Abbas, S., Banerjee, M. and Momani, S. 2011 Dynamical analysis of fractional-order modified logistic model, *Comput. Math. Appl.* 62 , pp 1098–1104.
- Al-Rifae, M., Abdeljawad, T. 2015. Fundamental results of conformable Sturm-Lioville eigenvalue problems Complexity , Article ID 3720471.
- Aftabizadeh, A.R., Wiener J. 1986, Oscillatory and periodic solutions of an equation alternately of retarded and advanced type, *Appl. Anal.*23,219231.
- Aftabizadeh, A.R., Wiener, J.Xu, J. 1987 .Oscillatory and periodic solutions of delay differential equations with piecewise constant argument *Proc.Amer Math Soc.*, 99, no. 4 :673-679. <https://doi.org/10.2307/2046474>
- Agarwal, R. P, El-Sayed, A. MA. and Salman, S. M. 2013 Fractional-order Chua's system: Discretization, bifurcation and chaos, *Adv. Differ. Equ.*, doi: 10.1186/1687-1847-320.
- Akmet, M. U. 2007. Integral manifolds of differential equations with piecewise constant argument of generalized type, *Nonlinear Anal.* 66(2), 367-383.
- Akhmet, M.U., Buyukadali, C., Ergence, T. 2008. Periodic solutions of the hybrid system with small parameter ,*Nonlinear Anal Hybrid Syst* 2 532-543.
- Akhmet, M.U., Buyukadali, C. 2008. On periodic solutions of differential equations with piecewise constant argument, *Comput. Math. Appl.*, 56, 2034-2042.
- Akhmet, M.U. 2011. The small parameter and differential equations with piecewise constant argument, *Nonlinear Hybrid Continuous /Discrete-Time Models, Cilt.8, Ss.49-69.*
- Akhmet, M.U. 2011. The reduction principle for systems with piecewise constant argument, *Nonlinear Hybrid Continuous/Discrete-Time Models, Cilt.8, Ss.33-48.*
- Batarfi, H. and Losada, J., et al. 2015. Three-point boundary value problems for conformable fractional differential equations. *j. Funct Spaces*, Article

ID 706383.

- Bayour, B., lorres, D. F. M. 2017. Existence of solution to a local fractional non-linear differential equation. *J. Comput. Appl. Math.* 312, 127-133.
- Bereketoglu, 2021. Diferensiyel Denklemler, Nobel akademik yayıncılık eğitimi danışmanlık tic.
- Bereketoglu, H.;Seyhan, G. 2010. Ogun, A., Advanced impulsive differential equations with piecewise constant arguments, *Math. Model. Anal.* 15, no.2, 175-187.
- Bereketoglu, H.; Oztepe, G.S. 2014. Asymptotic constancy for impulsive differential equations with piecewise constant argument, *Bull. Math. Soc. Sci. Math.*, 57 181-192.
- Bereketoglu, H., Seyhan, G., Karakoc, F. 2011. On a second order differential equation with piecewise constant mixed arguments, *Carpathian Journal of Mathematics*, 1-12.
- Bereketoglu, H., Oztepe, G. S. 2013. Convergence of the solution of an impulsive differential equations with piecewise constant arguments, *Miskolc Math. Notes*, Vol.14, no3, 801-815.
- Busenberg, S., and Cook, K. L. 1982. Models of vertically transmitted diseases with equential-continuous dynamics, *Nonlinear Phenomena in Mathematical. Sciences*, Academic Press, New York, 179-187.
- Chiu, K.S. 2021. Green's function for impulsive periodic solutions in alternately advanced and delayed differential systems and applications, *Communication . Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics.* 70 (1), 15-37. DOI: 10.31801/cfsuasmas.785502
- Chiu, K.S. and Pinto, M. 2010. Periodic solutions of differential equations with a general piecewise constant argument and applications, *Electron. J Qual.Theory Differ. Equ.*, no. 46, 1-19.
- Chiu, K. S. and Li, T. 2019. Oscillatory and periodic solutions of differential equations with piecewise constant generalized mixed arguments, *Math.Nachr*292 :2153-2164. <https://dio.org/10.1002/mana.20180053>.
- Cooke, K.L. and Wiener, J. 1987. Retarded differential equations with piecewi-

- se constant delays, *J. Math. Anal. Appl.*, 99, 276-732.
- Jun, D., Jun, Z.G., Yong, X., Hong Y. and Jue, W. 1987. Dynamic behavior analysis of fractional-order Hindmarsh–Rose neuronal model, *Cong. Neurodyn* 8 , pp. 167–175.
- Dai, L. and Singh, M.C. 1994. On oscillatory motion of spring-mass systems subjected to piecewise constant forces. *J. Sound Vib.* 173, 217-233.
- Elaydi, S. 2015. *An Introduction to Difference Equation*, New York:Springer.
- Eslami, M. 2016. Exact traveling wave solutions to the fractional coupled nonlinear Schrodinger equations. *Appl Math. Comput.* 285, 141–148.
- El-Raheem, Z.F. and Salman, S.M. 2014. On a discretization process of fractional order Logistic differential equation, *J.Egypt. Math. Soc.* 22 , pp. 407–412.
- Gurcan, F, Kartal , Ozturk, I. and Bozkurt, F. 2014. Stability and bifurcation analysis of a mathematical model for tumor-immune interaction with piecewise constant arguments of delay, *Chaos Solutions Fractals* 68 169-179.
- Gyori, I. 1991. On approximation of the solutions of delay differential equations by using piecewise constant arguments, *Int. J. Math. Math. Sci.*14, 111-126.
- Gyori, I., Karakoc, F. and Bereketoglu, H. 2011. Convergence of solutions of a linear impulsive differential equations system with many delays *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A: Mathematical Analysis* 18, 191-202.
- Hashemi, M.S. 2018. , Some new exact solutions of $(2+1)$ -dimensional nonlinear Heisenberg ferromagnetic spin chain with the conformable time fractional derivative, *Opt. Quant. Electron.* 107, pp. 50–79.
- Hashemi, M.S. 2018. Invariant subspaces admitted by fractional differential equations with conformable derivatives, *Chaos Soliton Fract.* 107 , pp. 161–169.
- Hammad, M. A. and Khalil, R. 2014. Abels formula and wronskain for conformable fractional differential equations, *Int. j. Differ. Equ.*13(3).

- Hilfer, R. 2000 Application of Fractional Calculus to Physics. Singapore, World Scientific.
- Iyiola, O. S. , Nwaeze, E. R. 2016. Some new results on the new conformable fractional calculus with application using dAlambert approach, Progr. Fract. Differ. Appl. 2(2), 115-122.
- Huang, Y.K., Oscillations and asymptotic stability of solutions of first order neutral differential equations with piecewise constant argument. J. Math. Anal. Appl. 149 (1990), 70-85.
- Kaabar M. 2020. Novel Methods for Solving the Conformable Wave Equation. J New Theory;31:56-85.
- Karakoc, F. 2020. Existence and uniqueness for fractional order functional differential equations with Hilfer derivative, Differential Equations&Applications 12,4. doi:10.7153/dea12-12.
- Karakoc, F. and Bereketoglu, H. 2018. Oscillation of a nonlinear impulsive differential equation system with piecewise constant argument, Advances in Difference Equations , 2018:99 .
- Karakoc, F., Bereketoglu, H. and Seyhan, G. 2010. Oscillatory and periodic solutions of impulsive differential equations with piecewise constant argument, Acta Applicandae Mathematicae 110 (1), 499.
- Kavgaci, M. E., Al Obaidi, H. and Bereketoglu, H. 2023. Some results on a first order neutral differential equation with piecewise constant mixed arguments, Periodica Mathematica Hungarica, 87, 1, 265-277.
- Kartal, S. and Gurcan, F. 2014. Stability and bifurcations analysis of a competition model with piecewise constant arguments, Math. Methods Appl. Sci. 38, 1855-1866.
- Kaya, G., Kartal, S. and Gurcan, F. 2020. Dynamical analysis of a discrete conformable fractional order bacteria population model in a microcosm, 123864.
- Khalil, R., Al Horani, M. ,Yousef, A. and Sababheb, M. 2014. A new definition of fractional derivative. J.Comput. Appl. Math. 264,65-70.
- Khalil, R., Al Horani, M and Abu Hammadb, M. 2019. Geometric meaning of conf-

- ormable derivative via fractional cords, *J. Math. Computer Sci.*, 19 , 241-245.
- Kilbas, A., Srivastava, H.M. and Trujillo, J.J. 2006. *Theory and applications of fractional differential equations*, Elsevier Amsterdam.
- Kutahyalioğlu, A. and Karakoç, F. 2021. Exponential stability of Hopfield neural networks with conformable fractional derivative, *Neurocomputing*, cilt.456, ss.263-267.
- Kutahyalioğlu, A. and Karakoç, F. 2023. Exponential stability of BAM-type neural networks with conformable derivative, *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan*, Volume 49, Number 1, 2023, Pages 78–94.
- Li, J. and Shen, J. 2002. Periodic boundary value problems of impulsive differential equations with piecewise constant argument, *Nat. Sci. Hunan Norm. Univ.* 25, 5-9.
- Liang, H. and Wang, G. 2009. Existence and uniqueness of periodic solutions for a delay differential equation with piecewise constant arguments, *Port.Math.*, 66 (1), 1-12.
- Mahmudova, N. I. and Aydin, M. 2021. Representation of solutions of nonhomogeneous conformable fractional delay differential equations, *Chaos, Solutions and Fractals* 150.
- Muroya, Y. 2008. New contractivity condition in a population model with piecewise constant arguments, *J. Math. Anal. Appl.*, 346 (1), 56-81.
- Muminov, M.I. On the method of finding periodic solutions of second-order neutral differential equations with piecewise constant arguments. *Adv Differ Equ* 2017, 336 (2017).
- Muminov, I. M. and Murid, H. M. A. "Existence conditions for periodic solutions of second-order neutral delay differential equations with piecewise constant arguments" *Open Mathematics*, vol. 18, no. 1, 2020, pp. 93-105.
- Nazim I. M., and Mustafa A. 2021, Representation of solutions of nonhomogeneous conformable fractional delay differential equations, *Chaos, Solutions and Fractals* 150

- Othman, M. I ., Said, S. M. and . Sarkar, N. 2013. Effect of hydrostatic initial stress on a fiber-reinforced thermoelastic medium with fractional derivative heat transfer,'Multidiscipline Modeling in Materials and Structures, Vol. 9, No. 3, pp. 410-426.
- Oztürk , I , Bozkurt F. Gurcan. 2012. Stability analysis of a mathematical model in microcosm with piecewise constant arguments, Math. Biosci. 240, 85-91.
- Papaschinopoulos G. and Schinas, J. Existence, stability and oscillation of the solutions of first order neutral delay differential equations with piecewise constant argument. Appl. Anal. 44 (1992), 99-111.
- Papaschinopoulos G. and Schinas, J. Some results concerning second and third order neutral delay differential equations with piecewise constant argument, Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 44 (1994), No. 3, 501–512.
- Partheniadis, E.C., Stability and oscillation of neutral delay differential equations with piecewise constant argument. Differential Integral Equations 1 (1988), no. 4, 459-472.
- Pinto, M. 2009. Asymptotic equivalence of nonlinear and quasilinear differential equations with piecewise constant arguments, Math. Comput. Modelling, 49 (9-10), 1750-1758.
- Sabatier, J. Agrawal, O. P, and Tenreiro J. A. 2007. Machado, Advances in Fractional Calculus. Theoretical Developments and Applications in physics and Engineering. Dordrecht: Springer.
- Shah, S. M. and Wiener, J. 1983. Advanced differential equations with piecewise constant argument deviations, Int. J. Math. Math Sci., 6 . 671-703.
- Souahi, A. and Makhlouf, A.B, et al. 2017. Stability analysis of conformable fractional-order nonlinear systems. Indag. Math. 28, 1265-1274 .
- Shen, J. H. 2000. Stavroulakis, I.P; Oscillatory and nonoscillatory delay equations with piecewise constant argument. J. Math. Anal. Appl. 248, 385-401.
- Song, L., Wei, J., Xiaoyan and. Zhou, L. X. 2016 Lyapunov stability analysis of fractional nonlinear systems, Appl. Math. Lett. 51, 13-19 .

- Unal, E. and Gokdogan A. 2017 , Solution of conformable fractional ordinary differential equations via differentioal transform method, Optik, 128, 264-273.
- Xiao G. and Wang JR. 2021. Representation of solutions of linear conformable delay differential equations. Appl Math Lett 17(107088):1-6.
- Zhao, D. and Luo, M. 2017. General conformable fractional derivative and its physical interpretation, Calcolo 54 903-917 ..

