



**ÇİZGELERİN OYUN KROMATİK SAYILARI**

**Yüksek Lisans Tezi**

**Dilara TÜRKAY**

**Eskişehir 2025**

# ÇİZGELERİN OYUN KROMATİK SAYILARI

Dilara TÜRKAY

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Yüksek Lisans Programı

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Emrah AKYAR

Eskişehir

Eskişehir Teknik Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Ocak 2025

## JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

DİLARA TÜRKAY'ın "ÇİZGELERİN OYUN KROMATİK SAYILARI" başlıklı tezi 10/01/2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek "Eskişehir Teknik Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği"nin ilgili maddeleri uyarınca, Matematik Anabilim dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

### Jüri Üyeleri

### Unvan Adı Soyadı

### İmza

Üye

: Prof. Dr. Emrah AKYAR

Üye

: Doç. Dr. İlknur Atasever GÜVENÇ

Üye

: Dr. Öğr. Üyesi Gonca İNCEOĞLU

Prof. Dr. Semra KURAMA  
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

10/01/2025

## DANIŞMAN ONAYI

DaniŐmanlıđını yurttuğum yuakse lisans oğrencisi Dilara TÖRKAY, “ÇİZGELERİN OYUN KROMATİK SAYILARI” başlıklı tez alıŐmasını tamamlamıŐtır. HazırlamıŐ olduğu tez tarafımca incelenmiş ve oğrencinin tez savunma sınavına alınması bilimsel ve etik aıdan uygun gőrulmuŐtur.

Tez DaniŐmanı  
Prof. Dr. Emrah AKYAR

## ÖZET

### ÇİZGELERİN OYUN KROMATİK SAYILARI

Dilara TÜRKAY

Matematik Anabilim Dalı

Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Ocak, 2025

Danışman: Prof. Dr. Emrah AKYAR

Bir  $G$  çizgesinin oyun kromatik sayısı, ilk olarak Bodlaender tarafından iki kişilik bir boyama oyunu yardımıyla tanımlanmıştır.  $G$  sonlu bir çizge ve  $X$  bir renkler kümesi olsun. Genellikle Alice ve Bob olarak adlandırılan iki oyuncu, ilk olarak Alice başlamak üzere sırayla  $X$  kümesinden seçtikleri renklerle, komşu köşe noktalar farklı renklerde olacak şekilde çizgenin köşe noktalarını boyarlar. Eğer çizgenin tüm köşe noktaları bu şekilde boyanabilirse oyunu Alice kazanır. Ancak, oyunun herhangi bir aşamasında  $X$  kümesinden seçilen renklerle boyanan noktalara komşu ve boyanmamış bir nokta kalırsa, oyunu Bob kazanır. Bir  $G$  çizgesinin oyun kromatik sayısı  $\chi_g(G)$ , oyuncular optimal stratejileri ile oynadıklarında Alice'in her zaman kazanabildiği bir stratejisinin olduğu  $X$  kümesindeki minimum renk sayısı olarak tanımlanır.

Bu çalışmada, çeşitli çizge ailelerinde ve belirli çizgelerin Kartezyen çarpımlarında oyun kromatik sayıları incelenmiş, mevcut araştırmalardan elde edilen sonuçlar derlenerek sunulmuştur.

**Anahtar Sözcükler:** Çizge, Oyun kromatik sayısı, Kromatik renk sayısı

## ABSTRACT

### GAME CHROMATIC NUMBER OF GRAPHS

Dilara TÜRKAY

Department of Mathematics

Eskisehir Technical University, Institute of Graduate Programs, January, 2025

Supervisor : Prof. Dr. Emrah AKYAR

The game chromatic number of a graph  $G$  was first defined by Bodlaender using a two-player coloring game. Let  $G$  be a finite graph and  $X$  a set of colors. Two players, commonly referred to as Alice and Bob, take turns coloring the vertices of the graph using colors from  $X$ , with Alice starting first. The goal is to ensure that adjacent vertices are colored differently. If all vertices of the graph can be colored in this way, Alice wins the game. However, if at any point an uncolored vertex remains that is adjacent to vertices already colored with all colors in  $X$ , Bob wins the game. The game chromatic number of a graph  $G$ , denoted by  $\chi_g(G)$ , is defined as the minimum number of colors in  $X$  such that Alice can always win with an optimal strategy.

In this study, the game chromatic numbers of various graph families and Cartesian products of specific graphs are investigated, and results obtained from existing research are compiled and presented.

**Keywords:** Graph, Game chromatic number, Chromatic number

## TEŐEKKÖR

Tez alıŐma konusunu belirlemede ve alıŐma sűrecinde bilgilerini, tecrűbelerini ve deęerli zamanını benimle paylaŐarak bana yardımcı olan deęerli danıŐman hocam Sayın Prof. Dr. Emrah AKYAR'a teŐekkűrű bir bor bilirim. Ayrıca bu sűrete bana daima destek olan Sevgili eŐim Furkan TÖRKAY'a teŐekkűr ederim.

Dilara TÖRKAY



## ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmanın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Eskişehir Teknik Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

Dilara TÜRKAY

## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
BAŞLIK SAYFASI . . . . .	I
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI . . . . .	II
DANIŞMAN ONAYI . . . . .	III
ÖZET . . . . .	IV
ABSTRACT . . . . .	V
TEŞEKKÜR . . . . .	VI
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ . . . . .	VII
İÇİNDEKİLER . . . . .	VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ . . . . .	XI
TABLolar DİZİNİ . . . . .	XII
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ . . . . .	XIII
1. GİRİŞ ve TEMEL KAVRAMLAR . . . . .	1
1.1. Giriş . . . . .	1
1.2. Temel Kavramlar . . . . .	2
2. ÖZEL ÇİZGE SINIFLARININ OYUN KROMATİK SAYILARI . . . . .	8
2.1. Tam Çizgeler . . . . .	8
2.2. Patika Çizgeler . . . . .	8
2.3. İki Kümeli Çizgeler . . . . .	9
2.4. Döngü Çizgeler . . . . .	14
2.5. Tekerlek Çizgeler . . . . .	16
2.6. Petersen Çizgeler . . . . .	19
2.7. Düzlemsel ve Dış Düzlemsel Çizgeler . . . . .	21
2.8. Ağaçlar . . . . .	22
2.9. Oyun Renk Sayısı . . . . .	28
3. KARTEZYEN ÇARPIM ÇİZGELERİN OYUN KROMATİK SAYILARI . . . . .	30

3.1. Çizgelerin Kartezyen Çarpımı . . . . .	30
3.2. Çeşitli Kartezyen Çarpım Çizgelerinin Oyun Kromatik Sayıları . . .	32
4. SIERPİNSKİ ÇİZGELER . . . . .	46
4.1. Sierpinski Çizgelerin Bazı Özellikleri . . . . .	46
4.2. Sierpinski Çizgelerin Oyun Renk Sayısı ve Oyun Kromatik Sayısı . .	48
KAYNAKÇA . . . . .	52
EK . . . . .	55
ÖZGEÇMİŞ . . . . .	59



## ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 1.1.	Maksimum derecesi 4 olan bir çizge örneği . . . . . 3
Şekil 1.2.	Bağlantılı ve bağlantısız çizgeler . . . . . 4
Şekil 1.3.	Kromatik sayısı 4 olan bir çizge . . . . . 4
Şekil 2.4.	$K_5$ tam çizge . . . . . 8
Şekil 2.5.	$P_4$ patika çizge . . . . . 9
Şekil 2.6.	İki kümeli bir çizge örneği . . . . . 10
Şekil 2.7.	$K_{2,4}$ İki kümeli tam çizge . . . . . 11
Şekil 2.8.	$K_{6,6}$ iki kümeli tam çizgesi ve onun bir $G$ alt çizgesi . . . . . 13
Şekil 2.9.	$K_{6,6}$ çizgesine yeni bir köşe noktasının eklenmesiyle elde edilen $G$ çizgesi . . . . . 14
Şekil 2.10.	$C_5$ ve $C_6$ döngü çizgeler için $\chi(C_5) = 3$ ve $\chi(C_6) = 2$ olur . . . . . 14
Şekil 2.11.	$W_7$ ve $W_8$ Tekerlek çizgeler . . . . . 16
Şekil 2.12.	$W_5$ ve $W_7$ tekerlek çizgeleri üzerinde 3-renk ile Alice'in kazanma stratejisi . . . . . 18
Şekil 2.13.	$W_9$ tekerlek çizgesi üzerinde 4-renk ile Bob'un kazanma stratejisi . . . . . 19
Şekil 2.14.	Petersen çizge . . . . . 19
Şekil 2.15.	Alice $v_1$ köşe noktasını boyadığında Bob'un ilk hamlesi için tüm mümkün durumlar . . . . . 20
Şekil 2.16.	$GP(6, 2)$ ve $GP(7, 3)$ genelleştirilmiş Petersen çizgeleri . . . . . 21
Şekil 2.17.	Düzlemsel çizge için bir örnek . . . . . 21
Şekil 2.18.	Dışdüzlemsel bir çizge örneği . . . . . 22
Şekil 2.19.	Bir orman çizge . . . . . 23
Şekil 2.20.	Kromatik ve oyun kromatik sayısı 2 olan bir ağaç . . . . . 23
Şekil 2.21.	Oyun kromatik sayısı 3 olan bir ağaç . . . . . 24
Şekil 2.22.	$H = cat(0, 2, 2, 0)$ tırtıl çizge . . . . . 26
Şekil 2.23.	Teorem 2.30'ün ispatında yer alan 1.Durum . . . . . 27
Şekil 2.24.	Teorem 2.30'ün ispatında yer alan 2.Durum . . . . . 27
Şekil 2.25.	Teorem 2.30'ün ispatında yer alan 3.Durum . . . . . 28
Şekil 3.26.	$P_4 \square P_3$ , $P_4$ ve $P_3$ çizgelerinin Kartezyen çarpımı . . . . . 31
Şekil 3.27.	$C_6 \square P_2$ , silindirik grid çizge . . . . . 31
Şekil 3.28.	$P_4 \square P_3$ , Kartezyen çarpım çizgenin $P_4$ ve $P_3$ -dalları . . . . . 32
Şekil 3.29.	Önerme 3.3 için verilen kanıtta kullanılan çizge . . . . . 34
Şekil 3.30.	Önerme 3.4 için verilen kanıtta kullanılan $G$ ve $G'$ çizgeleri . . . . . 35

<b>Şekil 3.31.</b>	Teorem 3.5 için verilen kanıtta kullanılan $P_3 \square P_n$ çizgesinin kısmen boyanmış $H$ alt çizgesi . . . . .	36
<b>Şekil 3.32.</b>	$n = 3, 4, 5$ için $K_2 \square C_n$ prizma çizgeleri . . . . .	36
<b>Şekil 3.33.</b>	$\chi_g(K_2 \square G) = \chi_g(G) + 1$ eşitliğinin geçerli olmadığı bir $G$ çizgesi .	38
<b>Şekil 3.34.</b>	$S_2 \square P_3$ Kartezyen çarpım çizgesi . . . . .	39
<b>Şekil 3.35.</b>	$S_2 \square P_5$ çizgesinde Bob'un kazanma stratejisi . . . . .	40
<b>Şekil 3.36.</b>	$C_4 \square C_5$ toroidal çizge . . . . .	41
<b>Şekil 3.37.</b>	$P_2 \times P_3$ ve $P_2 \times C_3$ direkt çarpım çizgeleri . . . . .	41
<b>Şekil 3.38.</b>	$P_2 \boxtimes P_3$ ve $P_2 \boxtimes C_3$ güçlü çarpım çizgeleri . . . . .	43
<b>Şekil 3.39.</b>	$C_4 \circ C_3$ nokta çarpım çizgesi . . . . .	44
<b>Şekil 3.40.</b>	$P_2[P_3]$ ve $P_2[C_3]$ sırasal çarpım çizgeleri . . . . .	45
<b>Şekil 4.41.</b>	Sırasıyla $S(0, 3)$ , $S(1, 3)$ , $S(2, 3)$ ve $S(3, 3)$ Sierpinski çizgeleri [16]	46
<b>Şekil 4.42.</b>	Sırasıyla $S(0, 4)$ , $S(1, 4)$ , $S(2, 4)$ ve $S(3, 4)$ Sierpinski çizgeleri [16]	47
<b>Şekil 4.43.</b>	$S(2, 3)$ Sierpinski çizgesi ve bu çizgenin $C_6$ alt çizgesi . . . . .	49
<b>Şekil 4.44.</b>	Verilen Maple prosedürü yardımıyla elde edilen $S(2, 5)$ Sierpinski çizgesi . . . . .	57
<b>Şekil 4.45.</b>	Verilen Maple prosedürü yardımıyla elde edilen $S(3, 5)$ Sierpinski çizgesi . . . . .	58

## TABLolar DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
<b>Tablo 4.1.</b> Alice'in bazı ikinci hamleleri için Bob'un verdiği cevaplar . . . .	50
<b>Tablo 4.2.</b> Alice'in bazı üçüncü hamleleri için Bob'un verdiği cevaplar . . . .	50
<b>Tablo 4.3.</b> Alice'in bazı üçüncü hamleleri için Bob'un verdiği cevaplar . . . .	51



## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$V$	:	Çizgenin köşe noktaları kümesi
$E$	:	Çizgenin kenarlar kümesi
$\deg(v)$	:	$v$ köşe noktasının derecesi
$\Delta(G)$	:	$G$ çizgesinin en büyük derecesi
$\delta(G)$	:	$G$ çizgesinin en küçük derecesi
$K_n$	:	$n$ köşe noktalı tam çizge
$P_n$	:	$n$ köşe noktalı patika çizge
$C_n$	:	$n$ köşe noktalı döngü çizge
$W_n$	:	$n$ köşe noktalı tekerlek çizge
$S_n$	:	$n$ köşe noktalı yıldız çizge
$K_{m,n}$	:	iki kümeli tam çizge
$Q_n$	:	$n$ köşe noktalı hiperküp çizge
$P$	:	Petersen çizge
$cat(k_1, k_2, \dots, k_n)$	:	$n$ köşe noktalı tırtıl çizge
$\chi(G)$	:	$G$ çizgesinin kromatik sayısı
$\chi_g(G)$	:	$G$ çizgesinin oyun kromatik sayısı
$col_g(G)$	:	$G$ çizgesinin oyun renk sayısı
$G \square H$	:	$G$ ile $H$ çizgelerinin Kartezyen çarpımı
$G \times H$	:	$G$ ile $H$ çizgelerinin direkt çarpımı
$G \boxtimes H$	:	$G$ ile $H$ çizgelerinin güçlü çarpımı
$G \circ H$	:	$G$ ile $H$ çizgelerinin nokta çarpımı
$S(n, k)$	:	Sierpinski çizge
$S_{a,b}$	:	Dereceler dizisi $(a + 1, b + 1, 1, 1, \dots, 1)$ olan çift yıldız çizge
$G[H]$	:	$G$ ve $H$ çizgelerinin sırasal çarpımı

# 1. GİRİŞ ve TEMEL KAVRAMLAR

## 1.1. Giriş

Bir  $G = (V, E)$  çizgesinin oyun kromatik sayısı (game chromatic number), ilk olarak Bodlaender tarafından tanımlanan iki kişilik bir boyama oyunu yardımıyla açıklanmıştır.  $G$  sonlu bir çizge ve  $X$  bir renkler kümesi olsun. Genellikle Alice ve Bob olarak adlandırılan iki oyuncu, ilk olarak Alice başlamak üzere sırayla  $X$  kümesinden seçtikleri renklerle, komşu köşe noktalar farklı renklerde olacak şekilde çizgenin köşe noktalarını boyarlar. Eğer çizgenin tüm köşe noktaları bu şekilde boyanabilirse oyunu Alice kazanır. Ancak, oyunun herhangi bir aşamasında  $X$  kümesindeki renklerle boyanan noktalara komşu, boyanmamış bir nokta kalırsa oyunu Bob kazanır.

Oyuncular optimal stratejilerle oynadıklarında oyunun kazananı elbette  $G$  çizgesinin yapısına ve  $X$  kümesindeki renk sayısına bağlıdır. Eğer  $|X| = |V|$  ise Alice'in her zaman oyunu kazanmasını sağlayacak bir stratejiye sahip olduğu açıktır. Diğer taraftan, eğer  $X$  kümesindeki renkler yetersizse, örneğin  $|X| < \chi(G)$ , burada  $\chi(G)$   $G$  çizgesinin kromatik sayısını göstermek üzere, Bob'un her zaman oyunu kazandıracak bir stratejisi vardır. Bir  $G$  çizgesinin oyun kromatik sayısı  $\chi_g(G)$ , Alice'in her zaman kazanabildiği bir stratejiye sahip olduğu  $X$  kümesindeki minimum renk sayısı olarak tanımlanır. Bu durumda, herhangi bir  $G$  çizgesinin oyun kromatik sayısı, alttan çizgenin kromatik sayısı  $\chi(G)$  ile üstten ise  $\Delta(G)$  çizgenin en büyük dereceye sahip köşe noktasının derecesi olmak üzere  $\Delta(G) + 1$  ile sınırlıdır.

Literatürde, çizgelerin oyun kromatik sayıları ile ilgili çok sayıda çalışma bulunmaktadır. Bu çalışmaların çoğu, özellikle ilk oyuncunun (genellikle Alice), çeşitli çizge aileleri ve çizgelerin Kartezyen çarpımları üzerinde kazanmak için ihtiyaç duyduğu minimum renk sayısını belirlemeye odaklanmıştır.

Bodlaender, sonlu çizgelerde boyama oyunlarını incelemek amacıyla bu kavramı tanıtmış ve farklı çizge sınıfları için sınırların belirlenmesine olanak sağlayan birçok çalışmaya öncülük etmiştir [7]. Örneğin, düzlemsel çizgelerin oyun kromatik sayılarının 8 ile 17 arasında olduğu, dış düzlemsel çizgelerin ise 6 ile 7 arasında yer aldığı gösterilmiştir [15, 17, 29]. Araştırmacılar ayrıca ağaçlar, yollar, döngüler ve tam çizgeler gibi belirli çizge türleri ile bu türlerin Kartezyen çarpımları üzerinde de kapsamlı çalışmalar yapmıştır.

Bartnicki ve diğerleri tarafından elde edilen önemli bir sonuç, belirli çizgelerin (örneğin, iki kümeli tam çizgeler) Kartezyen çarpımlarının oyun kromatik sayısının sınırsız olduğunu göstermiştir. Bu bulgu, çarpım çizgenin oyun kromatik sayısının çarpan çizgelerin oyun kromatik sayılarına bağlı olmadığını ortaya koyarak bu konuda

önemli içgörüler sunmaktadır [6, 20, 25]. Diğer çalışmalar, tırtıl ağaçlar ve ormanlar gibi özel ağaç yapıları üzerine odaklanarak, köşe noktalarının maksimum derecesi gibi özelliklerin oyun kromatik sayı üzerindeki etkilerini incelemiştir [12, 13]. Daha yakın zamanda yapılan araştırmalar ise, oyun kromatik sayısı gibi çizge invariantlarının, karmaşık çizge aileleri için oyun renk sayısı ile nasıl ilişkilendirildiğini ele almıştır [18, 23, 29].

Dört bölümden oluşan bu çalışmanın ilk bölümünde, çizgelerin oyun kromatik sayısına kısa bir giriş yapılmış ve sonraki bölümler için gerekli temel tanımlar, gösterimler ve çizge kuramının önemli sonuçlarına yer verilmiştir. Çalışmanın ikinci bölümünde, tam çizgeler, patika çizgeler, döngü çizgeler, tekerlek çizgeler, iki kümeli tam çizgeler, düzlemsel ve dış düzlemsel çizgeler, ağaçlar gibi temel çizge ailelerinin kromatik sayıları ve oyun kromatik sayıları incelenmiştir. Ayrıca, oyun renk sayısı tanımlanarak, oyun renk sayısı ile oyun kromatik sayısı arasındaki ilişkiler sunulmuştur. Üçüncü bölümde, belirli çizgelerin Kartezyen çarpımı ile elde edilen çizgelerin oyun kromatik sayıları ele alınmıştır. Son bölümde ise, Sierpinski çizgelerinin bazı özel durumları için oyun kromatik sayıları hesaplanmıştır. Ek olarak, Sierpinski çizgelerinin tanımlandığı bir Maple prosedürü de ekler bölümünde sunulmuştur.

## 1.2. Temel Kavramlar

Bu bölümde, sonraki bölümlerde ihtiyaç duyulacak temel kavramlar ve gösterimler tanıtılmaktadır. Çizge kuramına ilişkin daha detaylı bilgi edinmek isteyenler, [3, 26, 27] kaynaklarına başvurabilirler.

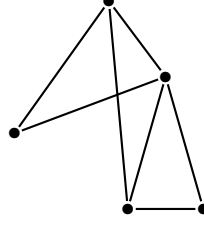
**Tanım 1.1.** *Bir  $G$  çizgesi, elemanları köşe noktası olarak adlandırılan, boş kümeden farklı, sonlu bir  $V$  kümesiyle, elemanları kenar olarak adlandırılan ve  $V$  kümesinin iki elemanlı alt kümelerinden oluşan bir  $E$  kümesi yardımıyla tanımlanır. Bu durumda  $G$  çizgesi  $G = (V, E)$  şeklinde ifade edilir.*

Çizgeler, köşe noktaları düzlemde birer nokta, kenarları ise bu noktalar arasına çizilen çizgilerden oluşan diyagramlar yardımıyla da temsil edilebilir.

**Tanım 1.2.** *Bir  $G$  çizgesinde,  $u$  ve  $v$  köşe noktaları arasında bir kenar varsa,  $u$  ve  $v$  köşe noktalarına komşu köşe noktaları denir. Bir  $u$  köşe noktasına komşu olan tüm köşe noktalarına kısaca  $u$  köşe noktasının komşuları denir. Benzer şekilde, iki kenar ortak bir köşe noktasını paylaşıyorsa bu kenarlara bitişik kenarlar denir.*

**Tanım 1.3.** *Bir  $G$  çizgesinde bir  $v$  köşe noktasının derecesi,  $v$  köşe noktasından çıkan kenar sayısına denir ve  $\deg(v)$  ile gösterilir. Diğer bir deyişle,  $v$  köşe noktasının derecesi,  $v$  köşe noktasının komşularının sayısıdır.*

Bir  $G$  çizgesinin maksimum derecesi, çizgedeki tüm köşe noktalarının dereceleri arasından en büyük olanıdır ve  $\Delta(G)$  ile gösterilir.



Şekil 1.1. Maksimum derecesi 4 olan bir çizge örneği

Örneğin, Şekil 1.1 ile maksimum derece  $\Delta(G) = 4$  olan bir çizge verilmiştir.

**Teorem 1.4** (El Sıkışma Teoremi).  $G = (V, E)$  bir basit çizge olsun. O zaman,

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E(G)|$$

eşitliği sağlanır.

**Tanım 1.5.** Bir  $G = (V, E)$  çizgesinde  $v_0, v_1, v_2, \dots, v_k \in V$  olmak üzere,  $v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{k-1}v_k$  şeklinde ardışık kenarların bitişik ya da özdeş olacak biçimdeki sonlu dizisine,  $v_0$  ve  $v_k$  köşe noktalarını birleştiren bir yolculuk denir.  $v_0$  ve  $v_k$  köşe noktalarını birleştiren yolculuk,

$$v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_{k-1} \rightarrow v_k$$

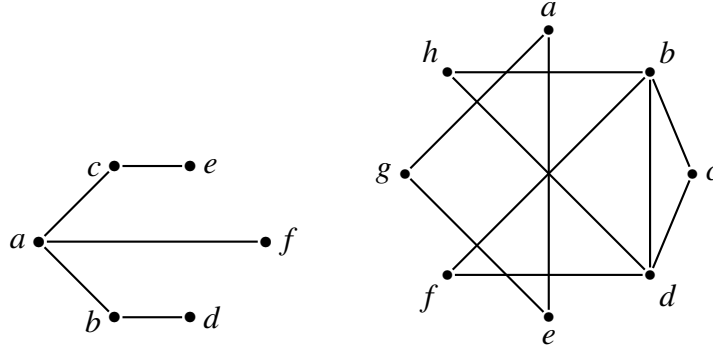
şeklinde de gösterilir. Bir yolculuktaki kenar sayısına ise o yolculuğun uzunluğu denir.

**Tanım 1.6.**  $G$  çizgesindeki bir yolculuğun tüm kenarları farklı ise, bu yolculuğa bir tur denir. Eğer turun tüm köşe noktaları da farklıysa, o zaman bu tura bir yol denir.

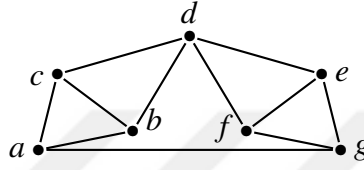
**Tanım 1.7.** Herhangi iki köşe noktası arasında bir yol bulunan çizgelere, bağlantılı ya da tek parça çizge denir.

Örneğin, Şekil 1.2 ile verilen soldaki çizge bağlantılı bir çizge iken sağdaki çizgede  $a$  ve  $b$  köşe noktalarını birleştiren bir yol bulunmadığından sağdaki çizge bağlantılı bir çizge değildir.

**Tanım 1.8.** Bir  $G$  çizgesinin tüm köşe noktaları, komşu köşe noktaları farklı renklerde olacak şekilde  $k$  farklı renk kullanılarak boyanabiliyorsa,  $G$  çizgesine  $k$ -renk boyanabilir denir. Eğer  $G$  çizgesi  $k$ -renk boyanabilir fakat  $(k - 1)$ -renk boyanabilir değilse,  $G$  çizgesinin kromatik sayısı  $k$ 'dır denir ve bu durum  $\chi(G) = k$  şeklinde gösterilir. Kısaca, kromatik sayı, çizgenin tüm köşe noktalarının, komşu iki köşe noktasının aynı renge sahip olmayacak şekilde en az renk kullanılarak boyanması için gereken renk sayısıdır.



Şekil 1.2. Bağlantılı ve bağlantısız çizgeler



Şekil 1.3. Kromatik sayısı 4 olan bir çizge

Tanım 1.8 yardımıyla aşağıdaki ifadeler söylenebilir:

- i.  $\chi(G) = 1$  olması için gerekli ve yeter koşul,  $G$  çizgesinin hiç kenarının olmamasıdır.
- ii.  $\chi(G) = 2$  olması için gerekli ve yeter koşul,  $G$  çizgesinin en az bir kenarı olan iki kümeli bir çizge olmasıdır.
- iii.  $\chi(G) \leq |V|$  olur.

**Teorem 1.9** ([3]). *Bir  $G$  çizgesinin tüm köşe noktalarının derecelerinin en büyüğü  $\Delta(G)$  ise,  $G$  çizgesi  $(\Delta(G) + 1)$ -renk ile boyanabilir.*

*Kanıt.* Kanıt, çizgenin köşe noktalarının sayısı  $n$  üzerinden tümevarım yöntemi ile yapılabilir. Eğer  $n = 1$  ise,  $\Delta(G) = 0$  olur ve teoremin doğruluğu açıktır. Kabul edelim ki, köşe noktalarının sayısı  $n$ 'den daha az olan çizgeler için teoremin ifadesi doğrudur. Bu durumda, köşe noktalarının sayısı  $n$  olan bir çizge verildiğinde, bu çizgenin herhangi bir köşe noktası seçilip, bu nokta ve bu noktanın bağlı olduğu kenarlar silinirse,  $n - 1$  köşe noktalı yeni bir çizge elde edilir. Elde edilen yeni çizgenin köşe noktalarının derecelerinin en büyüğü en fazla  $\Delta(G)$  olabilir. Varsayımdan dolayı, bu  $n - 1$  köşe noktalı çizge, komşu köşe noktaları farklı renklerde olacak şekilde  $(\Delta(G) + 1)$ -renk ile boyanabilir. Şimdi, başlangıçta silinen köşe noktası tekrar çizgeye eklenir ve komşularından farklı bir renkte boyanırsa (silinen köşe noktasının en fazla  $\Delta(G)$  komşusu vardır), başlangıçta verilen  $n$  köşe noktalı çizge de  $(\Delta(G) + 1)$ -renk ile boyanmış olur. O halde, tümevarım yöntemi gereği kanıt tamamlanmış olur.  $\square$

Aşağıdaki önemli sonuç, sadece  $n > 3$  için  $K_n$  tam çizge ve  $n$  tek sayı iken  $C_n$  döngü çizgenin kromatik sayısının Teorem 1.9 ile verilen  $\Delta + 1$  üst sınırına eşit olduğunu ifade etmektedir.

**Teorem 1.10** (Brooks, 1941). *Tam çizgeden ve köşe noktalarının sayısı tek olan bir döngü çizgeden farklı, bağlantılı bir  $G$  çizgesi için*

$$\chi(G) \leq \Delta(G)$$

*olur.*

Bir  $G$  çizgesinin oyun kromatik sayısı, ilk olarak birbirinden bağımsız olarak Brams ve Bodlaender tarafından tanımlanmıştır ([7, 14]). Bir  $G$  çizgesinin oyun kromatik sayısı, iki kişilik sonlu bir oyun yardımıyla tanımlanır.  $G$  basit bir çizge ve  $X$  renkler kümesi olsun. Alice ve Bob adlarında iki oyuncumuz olsun. Boyama işlemine ilk olarak Alice başlasın ve çizgenin boyanmamış köşe noktaları, komşu noktalar farklı renklerde olacak şekilde  $X$  kümesinden seçtikleri keyfi renklerle boyasınlar. Eğer çizgenin tüm köşe noktaları bu şekilde boyanabiliyorsa, oyunu Alice kazanır. Aksi halde, oyunun herhangi bir aşamasında bu şekilde boyanamayan bir köşe noktası kalıyorsa, oyunu Bob kazanır. Buradan,  $|X| \geq |V(G)|$  ise Alice her zaman oyunu kazanabilir. Ancak,  $\chi(G) < |V(G)|$  ise her zaman oyunu Bob kazanır.

**Tanım 1.11.** *Yukarıda anlatılan oyunda, Alice'in her zaman kazanabileceği bir stratejinin var olduğu  $X$  kümesinin en az sayıdaki eleman sayısına,  $G$  çizgesinin oyun kromatik sayısı (game chromatic number) denir ve bu sayı  $\chi_g(G)$  ile gösterilir.*

Tanım 1.8 yardımıyla, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\chi(G) \leq \chi_g(G) \leq \Delta(G) + 1 \quad (1.1)$$

Keyfi bir  $G$  çizgesinin oyun kromatik sayısını tam olarak hesaplamak oldukça zordur. Ne yazık ki, yalnızca sınırlı sayıda çizge sınıfının oyun kromatik sayısı tam olarak bilinmektedir. Ayrıca, bir çizgenin oyun kromatik sayısını hesaplamanın hesaplama karmaşıklığının PSPACE-tam olduğu kanıtlanmıştır [9]. Bu, kabaca ifade etmek gerekirse, bu tür hesaplamalar için kullanılan algoritmaların oldukça karmaşık ve zaman alıcı olduğu anlamına gelmektedir.

Aşağıdaki teorem ile  $\chi_g(G) - \chi(G)$  için genel bir üst sınır verilmektedir.

**Teorem 1.12** ([19]).  *$n \geq 2$  olmak üzere  $n$  köşe noktalı bir  $G$  çizgesi için,*

$$\chi_g(G) - \chi(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$$

*olur.  $n$  çift olduğunda ise eşitlik durumunun sağlandığı söylenebilir.*

Bir  $G = (V, E)$  çizgesinde, oyunun herhangi bir aşamasında çizgenin bazı köşe noktaları boyanmış olsun. Boyanmamış köşe noktaları  $U$  ile gösterilsin.  $L(v)$ ,  $v$  köşe noktasının (komşularından farklı renkte) boyanabileceği tüm renklerin kümesi olsun. Ayrıca, bir  $S \subseteq V$  için  $d_S(u, v)$ ,  $S$  kümesinin indirgediği alt çizgede  $u$  ve  $v$  köşe noktaları arasındaki uzaklığı gösterebilir.

Eğer bir  $v$  köşe noktası sadece  $i$ . renk ile boyanabiliyorsa ve komşularından birisinin de  $i$ . renk ile boyanması mümkünse,  $v$  köşe noktasına “renk- $i$  için kritik” denir. Yani:

- i.  $L(v) = \{i\}$ ,
- ii.  $v$  köşe noktasının  $i \in L(u)$  olacak şekilde bir  $u$  komşusu vardır.

Bu koşullar sağlanıyorsa,  $v$  köşe noktası “renk- $i$  için kritik” olur.

$A(v; i)$  ile  $v$  köşe noktasının  $i$ . renk ile boyanması mümkün olan tüm komşularının kümesi gösterilsin. Yani:

$$A(v; i) = \{u \mid uv \in E, i \in L(u)\}.$$

Eğer bir  $v$  köşe noktası renk- $i$  için kritikse ve sıra Bob'daysa, Bob bir  $u \in A(v; i)$  köşe noktasını  $i$ . renk ile boyar ve  $v$  köşe noktasının boyanabileceği bir renk kalmadığı için Bob oyunu kazanır. Eğer sıra Alice'de ise, Alice  $v$  köşe noktasını savunmak zorundadır (aksi halde Bob yukarıda anlatılan strateji ile oyunu kazanır). Alice'in  $v$  köşe noktasını savunması ve renk- $i$  için kritikliğini kaldırması için aşağıdaki stratejilerden birini uygulaması gerekir:

- $v$  köşe noktasını  $i$ . renk ile boyar.
- $A(v; i)$  kümesindeki tüm köşe noktalarıyla komşu olan ve  $i \in L(u)$  olacak şekilde bir  $u$  köşe noktasını  $i$ . renk ile boyar.
- Eğer  $|A(v; i)| = 1$  ve örneğin  $A(v; i) = \{u\}$  ise ve  $L(u) - \{i\} \neq \emptyset$  ise, Alice  $u$  köşe noktasını  $L(u) - \{i\}$  kümesinden bir renk ile boyar.

Açıkça görülebilir ki, Alice yukarıda belirtildiği şekilde  $v$  köşe noktasını savunduktan sonra,  $v$  artık renk- $i$  için kritik olmayacaktır. Ancak,  $v$ 'yi savunmanın başka bir yolu yoktur. Bu nedenle, Alice üç alternatiften birini seçmek zorundadır.

Bob'un stratejisinin arkasındaki temel fikir, aynı anda iki kritik köşe noktası oluşturarak Alice'in tek bir hamlede her iki noktayı birden savunmasını engellemektir; böylece Bob oyunu kazanır. Aşağıdaki önerme, iki kritik köşe noktasının bulunduğu ve Alice'in bu köşe noktalarının her ikisini aynı anda savunamayacağı bazı durumları listelemektedir.

**Önerme 1.13** ([21]). *Sıra Alice'de iken  $x$ , renk- $i$  için kritik ve  $y$ , renk- $j$  için kritik olsun:*

- *Eğer  $i \neq j$  ve  $d_U(x,y) \geq 4$  ise, Bob oyunu kazanır.*
- *Eğer  $i = j$  ve  $d_U(x,y) \geq 5$  veya  $d_U(x,y) = 1$  ise, Bob oyunu kazanır.*
- *Ayrıca,  $i = j$  ve  $d_U(x,y) = 3$  olduğunu ve  $(x, v_1, v_2, y)$ 'nin  $U$ 'da bir yol olduğunu varsayalım; burada  $i \in L(v_1) \cap L(v_2)$ . Eğer  $U$ 'da hem  $v_1$  hem de  $v_2$  ile komşu olan ve  $i \in L(z)$  koşulunu sağlayan bir  $z$  köşe noktası yoksa, Bob oyunu kazanır.*



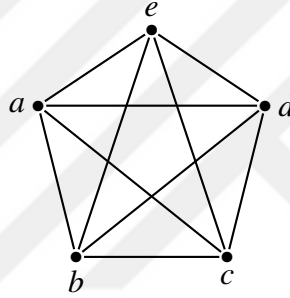
## 2. ÖZEL ÇİZGE SINIFLARININ OYUN KROMATİK SAYILARI

Bu bölümde, patika çizgeler, döngü çizgeler ve tekerlek çizgeler gibi temel çizge ailelerinin kromatik sayıları ve oyun kromatik sayıları ele alınmaktadır.

### 2.1. Tam Çizgeler

**Tanım 2.1.** Bir  $G$  çizgesinde, her köşe diğer tüm köşelerle bir kenar aracılığıyla bağlıysa bu çizgeye tam çizge denir.  $n$  tane köşe noktasına sahip bir tam çizge  $K_n$  ile gösterilir.

Örneğin, Şekil 2.4 ile 5 köşe noktalı bir tam çizge örneği verilmektedir.



Şekil 2.4.  $K_5$  tam çizge

$n$  köşe noktasına sahip bir tam çizgenin tanımı gereği, kromatik sayısı  $\chi(K_n) = n$ 'dir. Bunun nedeni, tüm köşe noktalarının birbirleriyle komşu olması ve her bir köşe noktasının farklı bir renkle boyanmasının gerekmesidir. Dolayısıyla, boyama işlemi için köşe noktası sayısı kadar renge ihtiyaç duyulur.

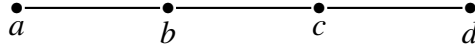
Benzer şekilde, tanım gereği  $n$  köşe noktasına sahip bir tam çizge için oyun kromatik sayısının da  $\chi_g(K_n) = n$  olduğunu söyleyebiliriz.

### 2.2. Patika Çizgeler

**Tanım 2.2.** Sadece iki köşe noktasının derecesi 1 olan ve eğer varsa, diğer tüm köşe noktalarının derecesi 2 olduğu bağlantılı çizgeye patika çizge denir ve  $P_n$  ile gösterilir. Açıktır ki,  $|V(P_n)| = n$  ve  $|E(P_n)| = n - 1$  olur.

Örneğin, Şekil 2.5 ile  $P_4$  patika çizgesi gösterilmektedir.

**Teorem 2.3.** Eğer  $G$  çizgesi en az iki köşeli bir patika çizge ise, kromatik sayısı 2 olur.



Şekil 2.5.  $P_4$  patika çizge

*Kanıt.*  $G$ , bir patika çizge olsun.  $G$  çizgesinin keyfi bir köşe noktası 1. renk ile boyansın. Bu noktaya çift birim uzaklıkta olan köşe noktaları 1. renk ile, tek birim uzaklıkta olan köşe noktaları ise 2. renk ile boyanır. Dolayısıyla,  $\chi(G) = 2$  olur.  $\square$

**Teorem 2.4.**  $\chi_g(P_1) = 1$ ,  $\chi_g(P_2) = \chi_g(P_3) = 2$  ve  $n \geq 4$  için  $\chi_g(P_n) = 3$  olur.

*Kanıt.*  $G = P_1$  olsun.  $G$  çizgesinde yer alan tek bir köşe noktasını birinci oyuncu, keyfi bir renk ile boyasın. Bu durumda,  $\chi_g(P_1) = 1$  olur.

$G = P_2$  olsun.  $G$  çizgesindeki iki komşu köşe noktasını birinci oyuncu birinci renk ile, ikinci oyuncu ise ikinci renk ile boyar. Böylece,  $\chi_g(P_2) = 2$  olur.

$G = P_3$  olsun. Birinci oyuncunun kazanması için, ilk hamlesinde ortadaki köşe noktasını boyaması gerekir. Ardından, ikinci oyuncu kalan iki noktadan birini ikinci renk ile boyarsa, birinci oyuncu ikinci hamlesinde kalan noktayı aynı renk ile boyar. Dolayısıyla,  $\chi_g(P_3) = 2$  olur.

$n \geq 4$  için,  $\chi_g(P_n) = 3$  olduğunu gösterelim.

Birinci oyuncu, ilk hamlesinde keyfi bir köşe noktasını boyasın. İkinci oyuncu buna karşılık, boyanan bu köşe noktasından 2 birim uzaklıktaki bir köşe noktasını ( $n \geq 4$  olduğundan böyle bir köşe noktası her zaman vardır) farklı bir renk ile boyarsa, boyanan bu iki köşe noktası arasındaki köşe noktaları için üçüncü bir renge ihtiyaç duyulur.

$G$  çizgesinin köşe noktalarının derecelerinin en büyüğü 2 olduğundan, oyun kromatik sayısı 3'ten fazla olamaz. Sonuç olarak,  $n \geq 4$  olduğunda,  $\chi_g(P_n) = 3$  olmalıdır.  $\square$

### 2.3. İki Kümeli Çizgeler

**Tanım 2.5.** Bir çizgenin tüm köşe noktaları, aynı kümenin herhangi iki köşe noktası arasında bir kenar olmayacak şekilde,  $A$  ve  $B$  gibi ayrık iki kümeye ayrılabilirse, bu çizgeye iki kümeli çizge denir ve  $G = (A, B, E)$  şeklinde gösterilir.

Örneğin, Şekil 2.6 ile iki kümeli bir çizge örneği verilmektedir.

Bir çizgenin iki kümeli çizge olup olmadığını belirlemek için, çizgenin köşe noktalarını yukarıdaki tanımda verildiği gibi  $A$  ve  $B$  kümelerine ayırmaya çalışmak yerine, aşağıdaki sonucu kullanmak çok daha kullanışlıdır.

**Önerme 2.6.** Bir  $G$  çizgesinin iki kümeli bir çizge olması için gerek ve yeter koşul,  $G$  çizgesinin uzunluğu tek sayı olan bir döngü içermemesidir.

*Kanıt.*  $G$  çizgesi  $G = (A, B, E)$  şeklinde iki kümeli bir çizge olsun. Tersine, kabul edelim ki,  $G$  çizgesinde uzunluğu tek sayı olan bir  $C$  döngüsü var olsun.  $C$  döngüsü genelliği bozmaksızın,  $v_1 \in A$  olmak üzere,

$$v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, \dots, v_{k-1}v_k, v_kv_1$$

şeklinde kenarlardan oluşsun.

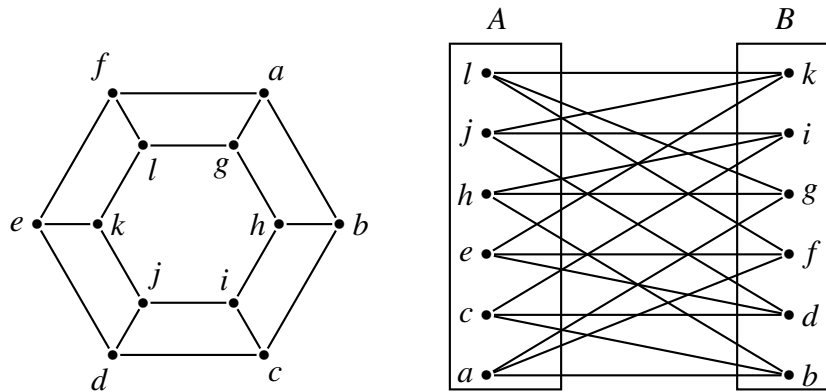
Bu durumda, iki kümeli çizge tanımından,  $i$  tek ise  $v_i \in A$ ,  $i$  çift ise  $v_i \in B$  olmalıdır.  $C$  döngüsünün uzunluğu tek olduğundan,  $k$  tek sayıdır ve dolayısıyla  $v_k \in A$  olur. Ancak,  $A$  kümesindeki  $v_1$  ile  $v_k$  köşe noktaları arasında bir kenarın bulunması, çizgenin iki kümeli çizge olmasıyla çelişir. O halde, iki kümeli  $G$  çizgesinde uzunluğu tek sayı olan bir döngü olamaz.

Tersine,  $G = (V, E)$  çizgesinde uzunluğu tek sayı olan bir döngü bulunmasın.  $G$  çizgesinin  $u, v \in V$  köşe noktaları arasındaki en kısa yolun uzunluğu  $d(u, v)$  ile gösterilsin ve

$$A = \{u\} \cup \{v \in V \mid d(u, v) \text{ çift sayı}\},$$

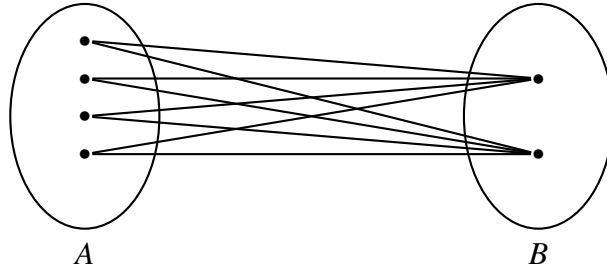
$B = V - A$  kümeleri tanımlansın.

$A$  kümesinin tanımından ve çizgede uzunluğu tek sayı olan bir döngü bulunmadığından, keyfi olarak  $u, v \in A$  için  $u$  ile  $v$  noktalarını birleştiren bir kenar yoktur. Benzer olarak,  $u', v' \in B$  için  $u'$  ile  $v'$  noktalarını birleştiren bir kenar da yoktur. O halde,  $G = (A, B, E)$  çizgesi iki kümeli bir çizge olur.  $\square$



**Şekil 2.6.** İki kümeli bir çizge örneği

**Tanım 2.7.** İki kümeli çizgeyi oluşturan  $A$  ve  $B$  kümelerindeki tüm köşe noktaları birbirleriyle komşu oluyor ise,  $G = (A, B, E)$  iki kümeli çizgesine iki kümeli tam çizge denir. Eğer  $A$  kümesindeki köşe noktalarının sayısı  $l$ ,  $B$  kümesindeki köşe noktalarının sayısı  $r$  ise, bu iki kümeli tam çizge  $K_{l,r}$  şeklinde gösterilir.



Şekil 2.7.  $K_{2,4}$  İki kümeli tam çizge

Şekil 2.7 ile  $K_{2,4}$  iki kümeli tam çizgesi verilmektedir.

**Teorem 2.8.**  $A, B \neq \emptyset$  olmak üzere,  $G = (A, B, E)$  iki kümeli çizgesinin kromatik sayısı 2 olur.

*Kanıt.* İki kümeli çizge tanımı gereği,  $A$  kümesi ve  $B$  kümesi kendi içinde komşu noktalara sahip olamaz. Dolayısıyla,  $A$  kümesindeki köşe noktalarının tamamı keyfi bir renk ile,  $B$  kümesindeki köşe noktalarının tamamı ise ikinci bir renk ile boyanır. O halde,  $G$  iki kümeli çizgesinin kromatik sayısı 2 olur.  $\square$

Aşağıdaki sonuç, Teorem 2.8 ile verilen koşulun aynı zamanda bir yeter koşul olduğunu ifade etmektedir.

**Önerme 2.9.** Bir  $G$  çizgesinin iki kümeli bir çizge olması için gerek ve yeter koşul,  $G$  çizgesinin kromatik sayısının 2 olmasıdır.

*Kanıt.* Teorem 2.8 yardımıyla, iki kümeli çizgelerin kromatik sayısının 2 olduğu sonucuna ulaşılır. Tersine,  $G$  çizgesinin kromatik sayısı 2 olsun. O halde, komşu köşeler farklı renkte olacak şekilde, iki renk ile bu çizgenin köşeleri boyanabilir. Bu durumda, çizgedeki her köşe noktası, aynı kümenin herhangi iki köşe noktası arasında kenar olmayacak şekilde iki ayrık kümeye ayrılabilir. Dolayısıyla,  $G$  çizgesi iki kümeli çizge olur.  $\square$

**Teorem 2.10.**  $G = (A, B, E)$ ,  $|A| = l$  ve  $|B| = r$  olmak üzere,  $G$  iki kümeli tam bir çizge olsun. Eğer  $l$  ya da  $r$  1'e eşit ise,  $G$  çizgesinin oyun kromatik sayısı 2 olur.

*Kanıt.*  $G$  iki kümeli tam bir çizge ve  $|A| = l = 1$ ,  $|B| = r \geq 1$  olsun.  $G$  çizgesinin oyun kromatik sayısının 2 olduğunu gösterelim. İki oyuncu ve iki rengin bulunduğu oyunda: Birinci oyuncu,  $A$  kümesinde bulunan tek köşe noktasını birinci renk ile boyasın. İkinci oyuncu,  $B$  kümesinde bulunan diğer tüm köşe noktalarını ikinci renk ile boyayabilir. Çünkü  $G$  iki kümeli tam bir çizge ve  $B$  kümesindeki köşe noktaları kendi aralarında komşu değildir. Dolayısıyla  $G$  çizgesinin oyun kromatik sayısı 2 olur.  $\square$

Yukarıdaki teoremden sözü edilen  $K_{1,r}$  iki kümeli tam çizge, yıldız çizge olarak da adlandırılmaktadır.

**Teorem 2.11.**  $G = (A, B, E)$ ,  $|A| = l$  ve  $|B| = r$  olmak üzere,  $G$  iki kümeli bir tam çizge olsun. Eğer  $l, r \geq 2$  ise,  $G$  çizgesinin oyun kromatik sayısı 3 olur.

*Kanıt.*  $G$  iki kümeli tam bir çizge ve  $l, r \geq 2$  olsun.  $G$  çizgesini iki renk ile boyamayı deneyelim. Birinci oyuncu,  $A$  kümesinde keyfi bir noktayı birinci renk ile boyasın. İkinci oyuncu,  $A$  kümesinde keyfi ikinci bir noktayı ikinci renk ile boyasın. Bu durumda, birinci oyuncu tekrar hamle yaptığı ve  $B$  kümesinde bir köşe noktasını boyamak istediğinde, birinci ve ikinci rengi kullanamaz. Çünkü, iki kümeli tam bir çizgenin  $A$  ve  $B$  kümesindeki tüm köşe noktaları birbirleriyle komşudur. Dolayısıyla, birinci oyuncunun üçüncü bir renge ihtiyacı vardır. O halde üç renk ile çizgeyi boyamayı deneyelim. Birinci oyuncu,  $A$  kümesinde keyfi bir noktayı birinci renk ile boyasın. İkinci oyuncu,  $A$  kümesinde keyfi ikinci bir noktayı ikinci renk ile boyasın. Birinci oyuncu, ikinci hamlesinde  $B$  kümesinde bir noktayı üçüncü renk ile boyasın. Buradan sonra oyuncular,  $B$  kümesindeki diğer tüm noktaları üçüncü renk ile ve  $A$  kümesindeki diğer tüm noktaları birinci veya ikinci renk ile boyar; böylece ikinci oyuncunun dördüncü bir renge ihtiyacı olacağı bir durum ortaya çıkmaz. Sonuç olarak,  $l, r \geq 2$  olduğunda,  $G$  iki kümeli tam çizgesinin oyun kromatik sayısı 3 olur.  $\square$

$l, r \geq 2$  için  $K_{l,r}$  iki kümeli tam çizgenin oyun kromatik sayısı 3 olduğu halde, bu çizgeden bazı özel kenarların atılmasıyla elde edilen çizgenin oyun kromatik sayısı çok büyük olabilir.

**Tanım 2.12.** Bir  $G$  çizgesinde, herhangi iki kenarı bitişik olmayan  $M$  kenarlar kümesine  $G$  çizgesinde bir eşleme denir. Eğer  $G$  çizgesinin her köşe noktası,  $M$  kümesindeki bir kenarın uç noktası ise, bu durumda  $M$  eşlemesine mükemmel eşleme denir.

Şimdi  $A = \{v_1, v_2, \dots, v_6\}$  ve  $B = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_6\}$  olmak üzere,  $K_{6,6}$  iki kümeli tam çizgesini ele alalım.

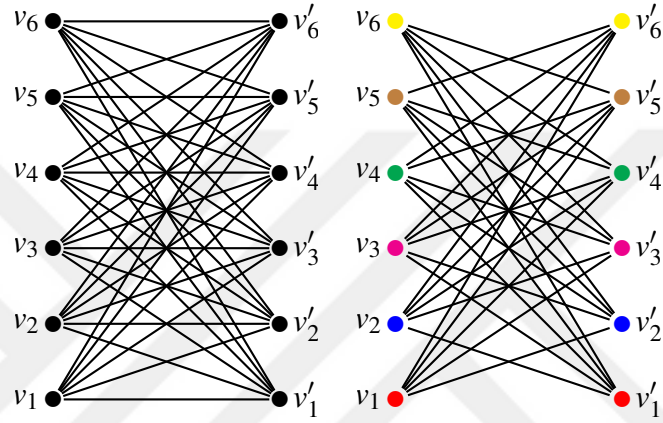
$$M = \{v_1v'_1, v_2v'_2, v_3v'_3, v_4v'_4, v_5v'_5, v_6v'_6\}$$

kümesi, bu iki kümeli çizge üzerinde bir mükemmel eşlemedir. Buna göre,  $G = (V(K_{6,6}), E(K_{6,6}) - M)$  şeklinde tanımlansın. Yani  $G$  çizgesi,  $K_{6,6}$  iki kümeli tam çizgesinden  $M$  mükemmel eşlemesinin çıkartılmasıyla elde edilen alt çizge olsun. Buna göre,  $G$  çizgesi için  $\chi_g(G) = 6$  olur.

Gerçekten de, birinci oyuncu (Alice) boyamaya hangi köşe noktasından hangi renkle başlarsa başlasın, örneğin genelliği bozmaksızın  $v_1$  köşe noktasını birinci renkle boyayarak başlasın. Bu durumda ikinci oyuncu (Bob) da  $v'_1$  köşe noktasını aynı renk ile

boyar. Bu durumda  $G$  çizgesinin hiçbir köşe noktası artık birinci renkle boyanamaz. Bu durumda Alice ikinci hamlesinde kalan noktalardan herhangi birisini ikinci renkle boyamalıdır. Yine genelliği bozmaksızın Alice'in  $v_2$  köşe noktasını ikinci renk ile boyadığını kabul edelim. Bob da buna karşılık olarak  $v'_2$  köşe noktasını ikinci renkle boyar. Böyle devam edilecek olursa çizgenin tüm köşe noktalarını boyamak için 6 farklı renk gereklidir (Bkz. Şekil 2.8).

Bu yöntem genelleştirilecek olursa,  $K_{n,n}$  ( $n \geq 3$ ) çizgesinden bir  $M$  mükemmel eşleme çıkarılarak elde edilen  $G$  alt çizgesinin oyun kromatik sayısı  $n$  olur.



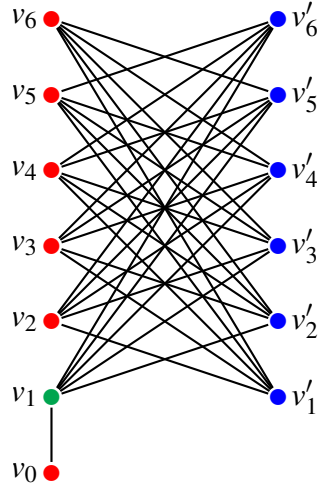
Şekil 2.8.  $K_{6,6}$  iki kümeli tam çizgesi ve onun bir  $G$  alt çizgesi

Yukarıdaki örnek bir çizge ile onun herhangi bir alt çizgesinin oyun kromatik sayısı arasında belirli bir ilişki olmadığını göstermektedir. Alt çizgenin oyun kromatik sayısı çizgenin oyun kromatik sayısından daha büyük ya da küçük olabileceği gibi aynı da olabilir.

Yukarıda  $K_{6,6}$  iki kümeli tam çizgesinden bir mükemmel eşlemenin çıkarılmasıyla elde edilen  $G$  çizgesi için  $\chi_g(G) = 6$  olduğu görüldü. Eğer bu  $G$  çizgesinin herhangi bir  $v$  köşe noktası silinirse kolayca görülebilir ki  $\chi_g(G - \{v\}) = 3$  olur. Genelleyecek olursak  $K_{n,n}$  iki kümeli tam çizgesinden bir mükemmel eşlemenin kenarları çıkarılarak elde edilen  $G$  çizgesi için  $\chi_g(G) = n$  iken, bu çizgeden bir  $v$  köşe noktası çıkarıldığında  $\chi_g(G - \{v\}) = 3$  olur. Yani bu çizgeden  $v$  köşe noktasının silinmesi çizgenin oyun kromatik sayısını azaltır.

Diğer taraftan  $G$  çizgesi Şekil 2.9 ile verildiği gibi ise  $\chi_g(G) = 3$  olur. Ancak bu çizgeden  $v_0$  köşe noktası çıkartılacak olursa,  $\chi_g(G - \{v_0\}) = 6$  olur. Yani bu sefer  $v$  köşe noktasının silinmesi oyun kromatik sayısını arttırdı.

Bu nedenle bir çizgeden bir köşe noktasının silinmesiyle elde edilen alt çizgelerin oyun kromatik sayılarının artıp azalması konusunda bir şey söylemek mümkün değildir. Aynı durum çizgeden bir kenarın silinmesiyle elde edilen alt çizgeler için de geçerlidir.



Şekil 2.9.  $K_{6,6}$  çizgesine yeni bir köşe noktasının eklenmesiyle elde edilen  $G$  çizgesi

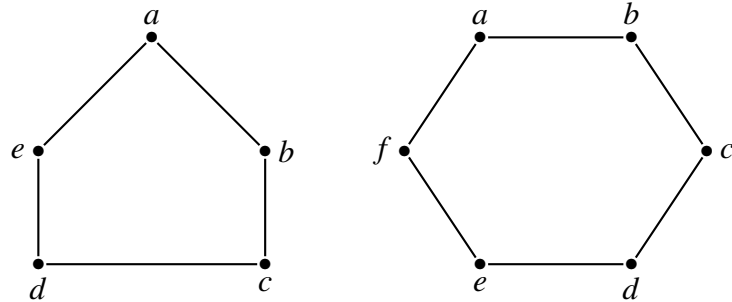
## 2.4. Döngü Çizgeleri

**Tanım 2.13.** Tüm köşe noktalarının derecesi 2 olan bağlantılı bir çizgeye döngü çizge denir.  $n$  köşe noktasına sahip bir döngü çizge  $C_n$  ile gösterilir.

Örneğin, Şekil 2.10 ile  $C_5$  ve  $C_6$  döngü çizgeleri verilmektedir. Tanımdan,  $|E(C_n)| = |V(C_n)| = n$  olduğu elde edilir.

Döngü çizgelerin kromatik sayıları iki farklı durum için incelenir:

- Birincisi,  $n \geq 3$  ve  $n$  çift olduğu durumdaki döngü çizgeleri.
- İkincisi,  $n \geq 3$  ve  $n$  tek olduğu durumdaki döngü çizgeleri.



Şekil 2.10.  $C_5$  ve  $C_6$  döngü çizgeleri için  $\chi(C_5) = 3$  ve  $\chi(C_6) = 2$  olur

**Önerme 2.14.** Bir  $G$  çizgesi, çift sayıda köşeye sahip bir döngü çizge ( $C_n$ ,  $n$  çift) ise  $G$  çizgesinin kromatik sayısı  $\chi(G) = 2$  olur.

*Kanıt.* Varsayalım ki  $G$  çift sayıda köşeye sahip bir döngü çizge ( $C_n$ ,  $n$  çift) olsun. Çizgenin köşe noktalarını  $v_1, v_2, \dots, v_n$  olarak adlandıralım ve bu köşeleri iki renkle boyayabileceğimizi gösterelim.

$G$  çizgesinin köşe noktalarını  $v_1$ 'den başlayarak sıralı bir şekilde saat yönünde numaralandıralım. İlk köşe noktası  $v_1$  birinci renk ile, ikinci köşe noktası  $v_2$  ise ikinci renk ile boyansın. Bu düzeni takip ederek:

- Tek numaralı köşeler ( $v_1, v_3, \dots$ ) birinci renk ile,
- Çift numaralı köşeler ( $v_2, v_4, \dots$ ) ikinci renk ile boyanır.

Bu boyama işlemi,  $G$  çizgesinde yan yana gelen tüm köşelerin farklı renkte olmasını sağlar. Ayrıca,  $G$  bir döngü çizge olduğundan,  $v_n$  köşesi  $v_1$  köşesi ile komşudur. Çünkü  $n$  çift olduğundan  $v_n$  çift numaralı bir köşedir ve  $v_n$  ikinci renk ile boyanmıştır. Dolayısıyla  $v_1$  (birinci renk) ile  $v_n$  (ikinci renk) arasında bir renk çatışması oluşmaz.

Bu durumda, çizgeyi iki renkle boyamak mümkündür ve üçüncü bir renge gerek yoktur. Sonuç olarak,  $G$  çizgesinin kromatik sayısı  $\chi(G) = 2$  olur.  $\square$

**Önerme 2.15.**  $G$  çizgesi tek sayıda köşeye sahip bir döngü çizge ( $C_n$ ,  $n$  tek) ise  $G$  çizgesinin kromatik sayısı  $\chi(G) = 3$  olur.

*Kanıt.* Varsayalım ki  $G$  çizgesi tek sayıda köşesi olan bir döngü çizge olsun. Çizgeyi boyamak için başlangıç köşesine  $v_1$ , bitiş köşesine ise  $n$  tek sayı olmak üzere  $v_n$  diyelim ve  $v_1$ 'den  $v_n$ 'ye kadar sıralı bir şekilde köşeleri boyayalım. Bu boyama işleminde üçüncü bir renge ihtiyaç olacağını gösterelim.

Döngü çizgenin  $v_1$  ile adlandırılan köşesinden başlayarak saat yönünde  $v_n$  ile adlandırılan köşeye kadar keyfi seçilen iki renk ile boyama yapalım.

$v_1$  köşesini birinci renk ile,  $v_2$  köşesini ikinci renk ile boyayarak ilerlediğimizde, tek numaralı köşeler birinci renk, çift numaralı köşeler ikinci renk ile boyanır. Bu durumda  $v_{n-1}$  köşesi  $n - 1$  çift olduğundan (çünkü  $n$ 'nin tek olduğunu varsaydık) ikinci renk ile boyanır.  $v_n$  ise tek olduğundan birinci renk ile boyanır. Ancak burada başlangıç köşesi  $v_1$  ve bitiş köşesi  $v_n$  komşu köşe noktalarıdır. Dolayısıyla bu iki köşe farklı renkler ile boyanmalıdır. Ancak her ikisi de birinci renkle boyandığından iki renk yeterli olmaz. Bu nedenle  $v_n$  köşesinin boyanması için üçüncü bir renge ihtiyaç vardır.

Sonuç olarak, tek sayıda köşeye sahip bir döngü çizgenin kromatik sayısı  $\chi(G) = 3$  olmalıdır.  $\square$

**Teorem 2.16.** Eğer  $G$  bir döngü çizge ise,  $G$  çizgesinin oyun kromatik sayısı  $\chi_g(G) = 3$  olur.

*Kanıt.* Önerme 2.14 ve Önerme 2.15 ile döngü çizgelerin kromatik sayısının 2 veya 3 olduğunu gösterdik. Döngü çizgenin tüm köşe noktalarının derecelerinin de 2 olduğunu biliyoruz. Buradan, (1.1) numaralı eşitsizlik yardımıyla döngü çizgesinin oyun kromatik sayısının 2 veya 3 olacağı söylenebilir. Burada,  $n$  tek olduğunda kromatik sayısının 3 olduğu belirtilmiştir ve bu eşitsizlikten ötürü  $n$  tek olduğunda oyun kromatik sayısının da 3 olması gerektiği sonucuna varılır.

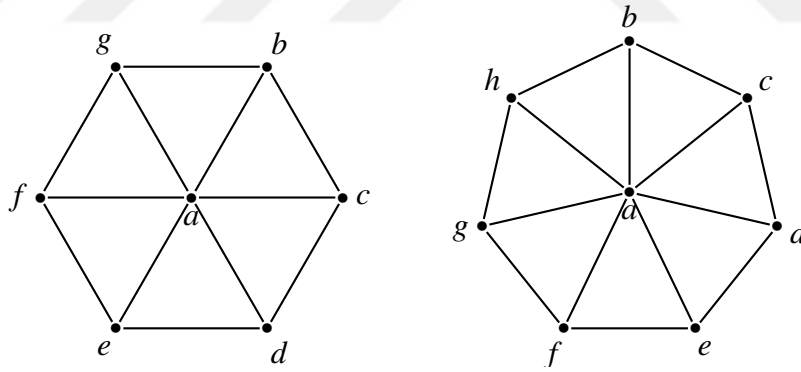
$n$  çift olduğunda ise; Birinci oyuncu keyfi bir noktayı birinci renk ile boyasın. İkinci oyuncu ise, birinci oyuncunun iki birim uzağında bir noktayı ikinci renk ile boyarsa, arada kalan noktayı birinci oyuncu üçüncü bir renk ile boyamak zorunda kalır. Dolayısıyla, oyun kromatik sayısı 3 olur.

Sonuç olarak, döngü çizgesinin oyun kromatik sayısı 3 olacaktır.  $\square$

## 2.5. Tekerlek Çizgeler

**Tanım 2.17.**  $C_{n-1}$  döngü çizgesindeki tüm köşe noktalarının, yeni bir köşe noktası (merkez nokta) ile birleştirilmesiyle elde edilen çizgeye tekerlek çizge denir ve  $W_n$  ile gösterilir. Bu çizgede,  $|E(W_n)| = 2(n-1)$  olur.

Şekil 2.11’te  $W_7$  ve  $W_8$  tekerlek çizgeleri gösterilmiştir.



Şekil 2.11.  $W_7$  ve  $W_8$  Tekerlek çizgeler

Tekerlek çizgelerin kromatik sayıları,  $n \geq 4$  durumunda iki farklı şekilde incelenir:

- $n$  çift olan tekerlek çizgeler.
- $n$  tek olan tekerlek çizgeler.

**Teorem 2.18.**  $G$  çizgesi, çift sayıda köşeye sahip bir tekerlek çizge ise  $G$  çizgesinin kromatik sayısı 4’tür. Yani,  $\chi(G) = 4$  olur.

*Kanıt.*  $G$  çizgesi, çift sayıda köşeye sahip olduğundan  $n-1$  tek sayıdır ve bu çizge,  $C_{n-1}$  döngü çizgesine bir merkez noktası eklenerek oluşturulmuştur.

Tek sayıda köşeye sahip bir döngü çizgenin 3 renk ile boyanabileceği bilinmektedir. Bu durumda, eklenen merkez noktasını boyamak için dördüncü bir renge ihtiyaç duyulur; çünkü merkez noktası, döngü çizgesindeki tüm köşe noktaları ile komşudur. Dolayısıyla, bu çizgenin kromatik sayısı 4 olur.  $\square$

**Teorem 2.19.**  *$G$  çizgesi, tek sayıda köşeye sahip bir tekerlek çizge ise  $G$  çizgesinin kromatik sayısı 3'tür. Yani,  $\chi(G) = 3$  olur.*

*Kanıt.*  $G$  çizgesi, tek sayıda köşeye sahip olduğundan  $n - 1$  çift sayıdır ve bu çizge,  $C_{n-1}$  döngü çizgesine bir merkez noktası eklenerek oluşturulmuştur.

Çift sayıda köşeye sahip bir döngü çizgenin 2 renk ile boyanabileceği bilinmektedir. Bu durumda, eklenen merkez noktasını boyamak için üçüncü bir renge ihtiyaç duyulur; çünkü merkez noktası, döngü çizgesindeki tüm köşe noktaları ile komşudur. Dolayısıyla, bu çizgenin kromatik sayısı 3 olur.  $\square$

**Önerme 2.20.**  *$n \geq 4$  için, tekerlek çizge  $W_n$ 'nin oyun kromatik sayısı  $\chi_g(W_n)$  şu şekilde belirlenir:*

$$\chi_g(W_n) = \begin{cases} 3, & n = 5 \text{ veya } n = 7, \\ 4, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

*Kanıt.* Birinci oyuncu, ilk hamlesinde tekerleğin merkezindeki köşe noktasını boyarsa, geriye kalan boyanmamış herhangi bir köşe noktasının (her biri farklı renkte bile olsa) en fazla 3 boyanmış komşusu olacağından, 4 renk ile birinci oyuncu her zaman kazanabilir. Bu nedenle, her  $n \geq 4$  için  $\chi_g(W_n) \leq 4$  olur.

$W_{2n}$  tekerlek çizgesinin jantında tek sayıda köşe noktası bulunur. Bu durumda,  $\chi(W_{2n}) = 4$  ve herhangi bir  $G$  çizgesi için  $\chi(G) \leq \chi_g(G)$  eşitsizliği sağlandığından,  $\chi_g(W_{2n}) = 4$  elde edilir.

Şimdi  $W_{2n+1}$  tekerlek çizgesini ele alalım. Bu durumda janttaki köşe noktalarının sayısı çifttir.  $\chi(W_{2n+1}) = 3$  olduğundan,  $\chi_g(W_{2n+1})$  değeri 3 veya 4 olabilir. Eğer birinci oyuncunun 3 renk ile kazanabileceği bir strateji varsa,  $\chi_g(W_{2n+1}) = 3$  olur.

Birinci oyuncunun oyuna başlaması için iki seçenek bulunmaktadır:

- Birinci oyuncu, jant üzerindeki bir köşe noktasını boyar. Bu durumda, ikinci oyuncu janttaki, birinci oyuncunun boyadığı köşe noktasından 2 birim uzaklıktaki köşe noktasını aynı renkle boyarsa, 4. renk gerekli olur ve ikinci oyuncu kazanır.
- Birinci oyuncu, tekerleğin merkezindeki köşe noktasını boyar. Bu durumda, ikinci oyuncu ilk hamlesinde jant üzerindeki bir köşe noktasını farklı bir renk ile boyamak zorundadır. Eğer birinci oyuncu 2. hamlesinde jant üzerindeki başka bir köşe noktasını boyarsa, ikinci oyuncu birinci oyuncunun bu hamlesinden 3 birim

uzaklıktaki bir köşe noktasını aynı renkle boyayabilir. Böylece 4. renk gerekli hale gelir ve ikinci oyuncu kazanır. Ancak, ikinci oyuncunun bu stratejiyi uygulayabilmesi için jant üzerinde en az 8 köşe noktası olmalıdır. Eğer janttaki köşe sayısı 6 veya 4 ise, birinci oyuncu 2. hamlesinde, ikinci oyuncunun 3 birim uzaklıkta bir köşe boyamasını engelleyecek şekilde bir köşe noktası seçerek oyunu 3 renk ile kazanabilir.

Sonuç olarak,

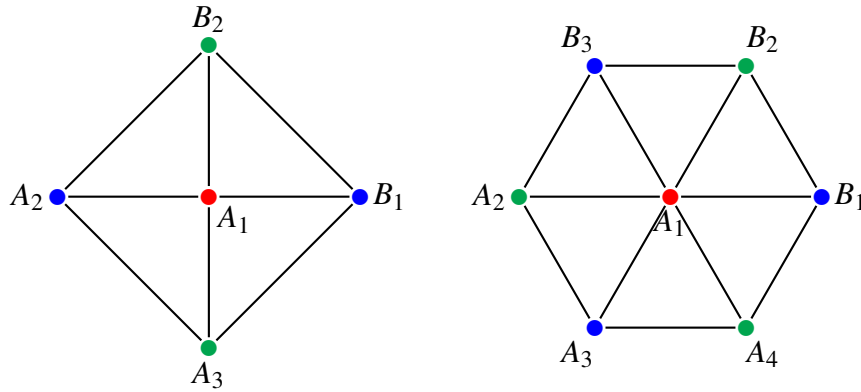
$$\chi_g(W_n) = \begin{cases} 3, & n = 5 \text{ veya } n = 7, \\ 4, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

elde edilir. □

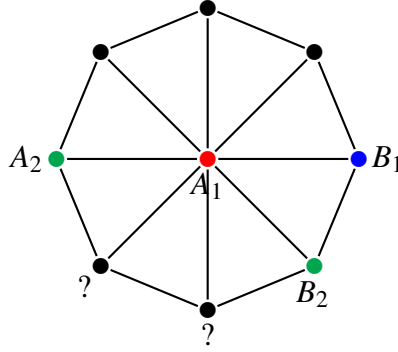
Örneğin,  $W_7$  çizgesi için birinci oyuncunun 3-renk ile kazanma stratejisi şöyle olabilir (Bkz. Şekil 2.12):

- Birinci oyuncu, ilk hamlesinde birinci renk ile merkezi boyasın.
- İkinci oyuncu, ilk hamlesinde ikinci renk ile jant üzerindeki bir köşe noktasını boyasın.
- Birinci oyuncu, diğer hamlelerinde Bob'un boyadığı köşe noktasının merkeze göre karşısındaki köşe noktasını ikinci oyuncunun kullanmadığı renk ile boyasın.

Ancak, birinci oyuncu bu strateji ile  $W_9$  çizgesinde 3-renk ile kazanamaz. İkinci oyuncu, ikinci hamlesinde, yukarıda anlatıldığı gibi, birinci oyuncunun boyadığı son köşe noktasından 3 birim uzaklıktaki noktayı aynı renk ile boyarsa, ikinci oyuncu kazanır (Bkz. Şekil 2.13).



Şekil 2.12.  $W_5$  ve  $W_7$  tekerlek çizgeleri üzerinde 3-renk ile Alice'in kazanma stratejisi



Şekil 2.13.  $W_9$  tekerlek çizgesi üzerinde 4-renk ile Bob'un kazanma stratejisi

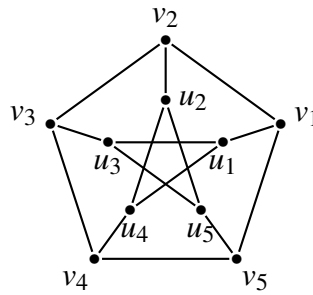
Yıldız çizgeler, tekerlek çizgelere benzer ancak sadece bir köşe noktasının derecesi birden büyük, diğer köşe noktalarının derecesi ise 1 olan çizgelerdir.

Yıldız çizgelerin kromatik sayısı ve oyun kromatik sayısı 2 olduğu açıktır.

## 2.6. Petersen Çizgeleri

Çizge kuramında ele alınan temel çizgelerden biri de Şekil 2.14 ile verilen Petersen çizgesidir.

$P$ , Petersen çizgesi  $C_5$  döngü çizgesini bulundurduğundan,  $\chi(P) \geq 3$  olmalıdır. Ayrıca, Petersen çizgesi tam bir çizge olmayıp, uzunluğu tek olan döngü bir çizgeden farklı bağlantılı bir çizge olduğundan, Teorem 1.10 (Brooks Teoremi) gereği,  $\chi(P) \leq \Delta(P) = 3$  olmalıdır. Böylece, Petersen çizgesinin kromatik sayısı  $\chi(P) = 3$  olur.



Şekil 2.14. Petersen çizge

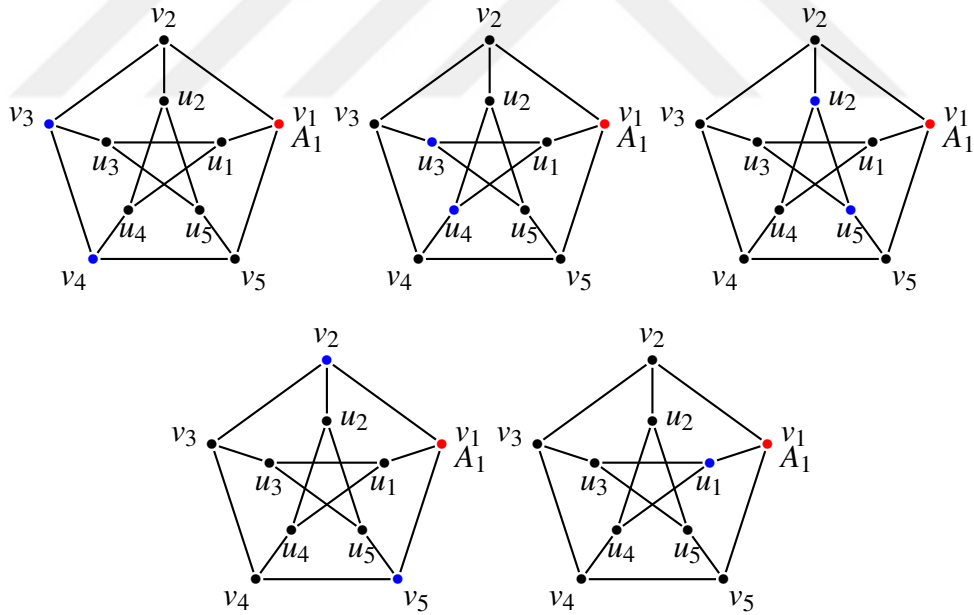
**Önerme 2.21.** [24]  $P$ , Petersen çizgesi için  $\chi_g(P) = 3$  olur.

*Kanıt.* Önce 3 renkten daha az renk ile oyunu her zaman Bob'un kazandığını gösterip, sonrasında 3-renk ile Alice için bir kazanma stratejisi verelim.

Alice, ilk hamlesinde hangi köşe noktasını boyarsa boyarsın, Bob, Alice'in boyadığı köşe noktasına 2 birim uzaklıktaki köşe noktasını boyarsa, boyanan bu iki köşe noktasına da komşu olan köşe noktası için üçüncü bir renk gerekeceğinden, 3 renkten daha az renk ile oyunu Bob kazanır. Örneğin, genelliği bozmaksızın, Alice ilk hamlesinde  $v_1$  köşe noktasını 1'inci renk ile boyarsa, Bob da ilk hamlesinde  $v_3$  köşe noktasını 2'inci renk ile boyadığında,  $v_2$  köşe noktası için 3'üncü renk gerekir.

Şimdi 3 renk ile Alice'in her zaman kazanabileceğini gösterelim. Alice, ilk hamlesinde Petersen çizgesinin dıştaki döngüsü üzerindeki bir köşe noktasını boyarsın. Genelliği bozmaksızın, Alice  $v_1$  köşe noktasını 1'inci renk ile boyarsın. Bu durumda simetrisi de dikkate alırsak, Bob, Alice'in bu hamlesine 5 farklı şekilde cevap verebilir. Bu 5 farklı durum Şekil 2.15 ile gösterilmiştir.

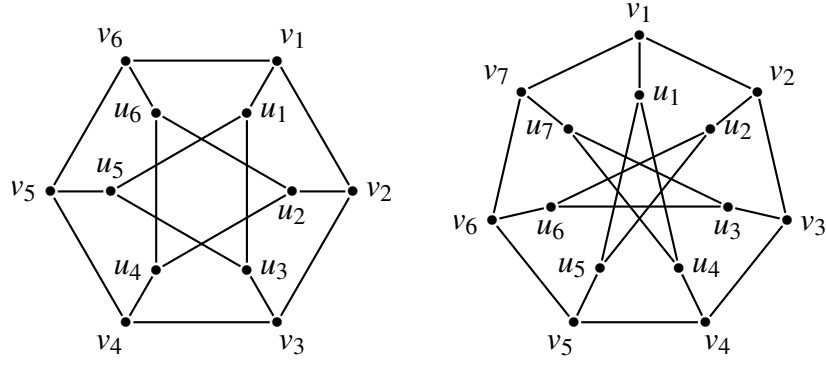
Bu durumların her biri, Alice'in ikinci hamlesini gösteren alt durumlara bölünebilir. Kanıt, Alice ve Bob'un tüm olası hamlelerini ve karşı hamlelerini tüketerek tamamlanır. Bunların hepsinde, Alice'in bir köşe noktasının üç farklı renkte komşuya sahip olmasını önleyebildiği ve dolayısıyla oyunu 3 renkle sınırlayabildiği gösterilebilir. Böylece  $\chi_g(P) = 3$  elde edilir.  $\square$



Şekil 2.15. Alice  $v_1$  köşe noktasını boyadığında Bob'un ilk hamlesi için tüm mümkün durumlar

$n > 2k$  için,  $GP(n, k)$  genelleştirilmiş Petersen çizgesi, köşe noktaları kümesi  $V = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \cup \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  olan ve kenarlar kümesi  $E = \{v_i v_{i+1}, u_i u_{i+k}, v_i u_i\}$  (indisler mod  $n$  dikkate alınarak) şeklinde tanımlanan bir çizgedir.

Bu tanıma göre,  $GP(5, 2)$  Petersen çizgesini verir.  $GP(6, 2)$  ve  $GP(7, 3)$  genelleştirilmiş Petersen çizgeleri ise Şekil 2.16 ile örnek olarak verilmiştir.

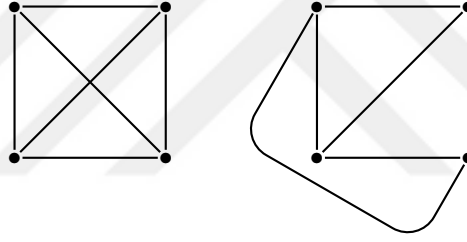


Şekil 2.16.  $GP(6,2)$  ve  $GP(7,3)$  genelleştirilmiş Petersen çizgeleri

$n \geq 6$  ve  $k \in \{1, 2, 3\}$  için,  $\chi_g(GP(n, k)) = 4$  olduğu kanıtlanmıştır [24].

## 2.7. Düzlemsel ve Dış Düzlemsel Çizgeler

Herhangi iki kenarı kesiştirilmeden düzleme çizilebilen çizgeye düzlemsel çizge denir.



Şekil 2.17. Düzlemsel çizge için bir örnek

Şekil 2.17 ile  $K_4$  tam çizgesinin düzlemsel bir çizge olduğu görülmektedir. Buna karşılık,  $K_5$  ve  $K_{3,3}$  çizgeleri düzlemsel çizge değildir.

Düzlemsel çizgelerin köşe boyaması ile ilgili en önemli sonuç, Dört Renk Teoremi olarak bilinen aşağıdaki sonuçtur.

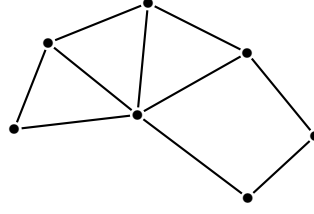
**Teorem 2.22** (Dört Renk Teoremi). *Her düzlemsel çizge 4-renk boyanabilir.*

**Tanım 2.23.** *Düzlemsel bir çizge, kenarları keşişmeyecek şekilde düzleme çizildiğinde, çizgenin tüm köşe noktaları dışarıda kalan sınırsız bölgeye komşu ise bu çizgeye dışdüzlemsel (outerplanar) çizge denir.*

Tanımdan hareketle, Şekil 2.17 ile verilen  $K_4$  tam çizgesinin dışdüzlemsel olmadığı hemen söylenebilir. Buna karşılık, Şekil 2.18 ile verilen çizge dışdüzlemsel bir çizgedir.

Diğer taraftan,  $G$  dışdüzlemsel basit çizge ise

$$\chi(G) \leq 3$$



**Şekil 2.18.** Dışdüzlemsel bir çizge örneği

olur. Gerçekten de,  $G$  dışdüzlemsel bir çizge ise  $G$  çizgesine,  $G$ 'nin tüm köşe noktaları ile komşu olacak şekilde yeni bir köşe noktası eklenerek elde edilecek  $G'$  çizgesi düzlemsel çizge olur. O zaman, Dört Renk Teoreminden  $G'$  çizgesi 4-renk ile boyanabilir. Eklenen köşe noktası, tüm komşularından (yani  $G$  çizgesinin tüm köşe noktalarından) farklı renkte boyanacağından, bu boyama  $G$  çizgesinin bir 3-renk boyamasını verir.

$\mathcal{P}$  ile tüm düzlemsel çizgelerin ailesi gösterilsin.  $\mathcal{P}$  çizge ailesinin oyun kromatik sayısı

$$\chi_g(\mathcal{P}) = \max \{ \chi_g(G) : G \in \mathcal{P} \}$$

şeklinde tanımlanır. Düzlemsel çizgeler ailesi  $\mathcal{P}$  için [28] çalışmasındaki alt sınır ve [30] çalışmasındaki üst sınır birleştirilecek olursa aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Teorem 2.24** ([28, 30]).  $\mathcal{P}$  düzlemsel çizgeler ailesi için

$$11 \leq \chi_g(\mathcal{P}) \leq 17$$

eşitsizliği geçerlidir.

**Teorem 2.25** ([15]). Eğer  $G$  dışdüzlemsel bir çizge ise

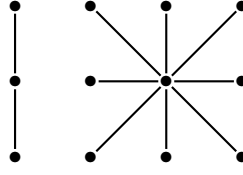
$$\chi_g(G) \leq 7$$

olur.

## 2.8. Ağaçlar

Ağaçlar, çizge kuramında oldukça önemli bir yer tutar ve birçok alanda geniş bir uygulama yelpazesine sahiptir. Döngü içermeyen ve bağlantılı yapıları sayesinde, veri yapılarında, bilgisayar bilimlerinde ve ağ tasarımlarında temel bir model olarak kullanılırlar.

**Tanım 2.26.** Döngü içermeyen ve bağlantılı çizgelere ağaç denir. Döngü içermeyen ancak bağlantılı olmayan çizgelere ise orman denir.

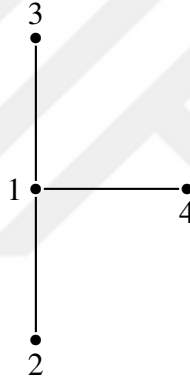


**Şekil 2.19.** Bir orman çizge

Şekil 2.19 ile bir orman örneği verilmiştir.

Ağaçlar, kenar sayısının dengede olduğu özel çizgelerdir. Ağaç çizgelerde derecesi 1 olan köşe noktalarına yaprak denir.

Şimdi temel ağaçların kromatik ve oyun kromatik sayılarını inceleyelim:



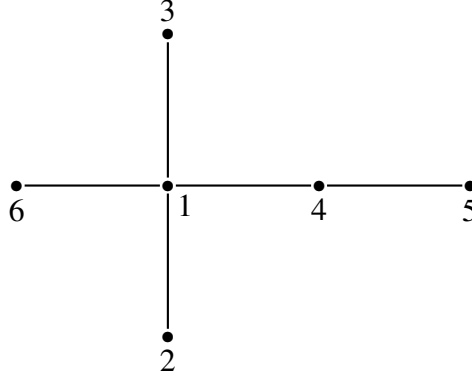
**Şekil 2.20.** Kromatik ve oyun kromatik sayısı 2 olan bir ağaç

Şekil 2.20 ile verilen ağaç çizge için  $\chi(G) = 2$  olur. Bunun nedeni, tüm köşe noktalarına komşu olan merkez noktanın keyfi bir renk ile, birbirleriyle komşu olmayan diğer köşe noktalarının ise farklı bir ikinci renk ile boyanabilmesidir. Dolayısıyla bu çizgenin kromatik sayısı 2'dir.

Oyun kromatik sayısının da  $\chi_g(G) = 2$  olduğunu gösterelim. İki oyuncunun bulunduğu ve iki rengin kullanıldığı bir boyama senaryosu üzerinden birinci oyuncunun en az renk kullanarak kazandığı durumu inceleyelim:

Birinci oyuncu, ilk hamlesinde merkez noktasını birinci renk ile boyar. Bu durumda geriye sadece ağacın yaprakları kalır. Yapraklar, birinci renk ile boyanamayacağı için ikinci oyuncu, yapraklardan birini ikinci renk ile boyar. Kalan tüm yapraklar da aynı ikinci renk ile boyanır. Böylece oyun kromatik sayısı  $\chi_g(G) = 2$  olur.

Şekil 2.21 ile verilen ağaç çizgesi için  $\chi(G) = 2$  olur. Şekil 2.21 ile verilen ağaç çizgesinde, 5 numaralı köşe noktasından başlanarak sırasıyla 1. ve 2. renklerle komşu



**Şekil 2.21.** Oyun kromatik sayısı 3 olan bir ağaç

noktalar boyanabilir. Örneğin, 1 numaralı köşe noktası ile komşu olan diğer iki nokta, 1 numaralı köşede kullanılan renkten farklı olan diğer renk ile boyanır. Dolayısıyla bu çizgenin kromatik sayısı  $\chi(G) = 2$  olur.

Şimdi Şekil 2.21 ağaç çizgesinin oyun kromatik sayısının  $\chi_g(G) = 3$  olduğunu gösterelim.

Varsayalım ki Şekil 2.21 ağaç çizgesinin oyun kromatik sayısı  $\chi_g(G) = 2$  olsun. Birinci oyuncu herhangi bir köşe noktasını boyadığında, ikinci oyuncu bu köşe noktasına 2 birim uzaklıkta olan bir köşeyi farklı bir renkle boyarsa, arada kalan köşe noktası için üçüncü bir renge ihtiyaç duyulacaktır. Bu durumda varsayımımız yanlışlanmış olur.

Şimdi 3 renk ile Şekil 2.21 ağaç çizgesini boyamayı inceleyelim. Birinci oyuncunun kazanma stratejisine göre, birinci oyuncu ilk hamlesinde merkez köşe noktası 1. renk ile boyar. Merkez köşe boyandıktan sonra, ikinci oyuncu üç farklı renge komşu olan boyanmamış bir köşe noktası yaratamaz. Dolayısıyla, birinci oyuncu 3 renk ile oyunu kazanır. Böylece  $\chi_g(G) = 3$  olduğu kanıtlanmış olur.

**Teorem 2.27.** *Eğer  $G$  çizgesi birden fazla köşe noktası içeren bir ağaç ise kromatik sayısı  $\chi(G) = 2$ 'dir.*

*Kanıt.* Önerme 2.6 yardımıyla, bir çizgenin iki kümeli olabilmesi için gerek ve yeter koşulun, çizgenin uzunluğu tek sayı olan bir döngü içermemesi gerektiğini biliyoruz. Tanımı gereği, ağaç çizgeleri döngü içermediğinden, aynı zamanda iki kümeli çizgelerdir.

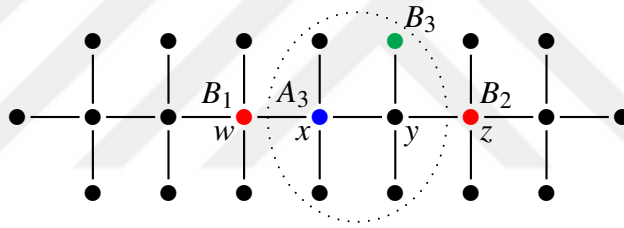
Önerme 2.9 aracılığıyla, bir çizgenin iki kümeli olabilmesi için gerek ve yeter koşulun, çizgenin kromatik sayısının  $\chi(G) = 2$  olması gerektiğini de biliyoruz. Bu iki sonucu birleştirerek, ağaç çizgelerin kromatik sayısının  $\chi(G) = 2$  olduğunu kanıtlamış oluruz.  $\square$

**Teorem 2.28** ([12]). *Eğer  $G$  bir ağaç ise  $\chi_g(G) \leq 4$  olur.*

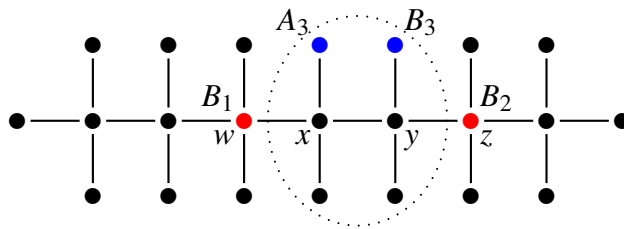
*Kanıt.* Eğer  $n = 1, 2, 3$  için  $T = P_n$  alınacak olursa  $\chi_g(T) \leq 3$  olduğu hemen söyleyebilir. Şimdi  $\chi_g(T) = 4$  olacak şekilde bir  $T$  ağacı örneği verelim.

Yeterince uzun bir yol çizge alıp, derecesi 2 olan her köşe noktasına ikişer yaprak ekleyelim. Bob ilk hamlesinde Alice'in boyadığı ilk noktadan yeterince uzak bir  $w$  köşe noktasını boyasın. Bob, sonraki hamlesinde  $w$  köşe noktasının solunda ya da sağında,  $w$  köşe noktasından 3 birim uzaklıktaki bir  $z$  köşe noktasını  $w$  köşe noktası ile aynı renkte boyasın (böyle bir  $z$  köşe noktası her zaman bulunabilir).  $w$  ve  $z$  köşe noktaları arasında kalan köşe noktalarını  $x$  ve  $y$  olarak adlandıralım. Bob'un bu hamlesinden sonra çizgede üçüncü renk mutlaka kullanılmalıdır ( $x$  ve  $y$  köşe noktaları farklı renklerde olacağından). Eğer Alice,

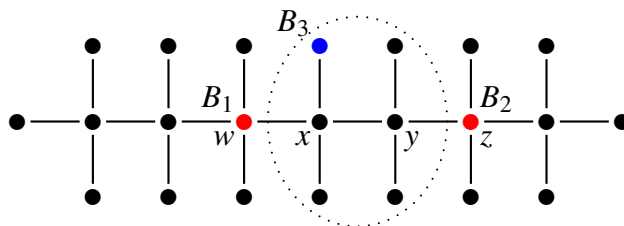
- i.  $x$  (ya da  $y$ ) köşe noktasını (ikinci renkle) boyarsa, Bob da  $y$  (ya da  $x$ ) köşe noktasının bir yaprağını üçüncü renkle boyar. Bu durumda  $y$  köşe noktası (ya da  $x$ ) için dördüncü renk gerekir.



- ii.  $x$  köşe noktasının bir yaprağını boyarsa, Bob  $y$  köşe noktasının bir yaprağını ikinci renkle boyar.



- iii. Alice yuvarlak içinde gösterilen köşe noktalarından herhangi birisini boyamazsa, Bob,  $x$  (ya da  $y$  nin) bir yaprağını ikinci renkle boyar.



Böylece 3 renk ile oyunu Bob kazandığından, bu şekilde verilen  $T$  ağacı için  $\chi_g(T) = 4$  olur.

[12] ile Alice'in her zaman en fazla dört renk ile kazanabileceği bir strateji verilmiştir.  $\square$

**Tanım 2.29.** *Bir çizgeden, derecesi 1 olan köşe noktaları (ve bağlı oldukları kenarlar) çıkarıldığında bir patika çizge elde ediliyorsa, bu çizgeye tırtıl çizge denir.*

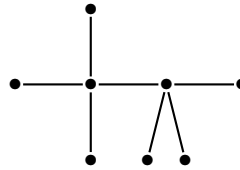
*Bu tanımda:*

- *Ortaya çıkan patika çizgeye omurga denir.*
- *Omurgaya bağlanan ve omurga üzerinde olmayan köşe noktalarına ise yaprak denir.*

*Omurga üzerindeki köşe noktaları kümesi  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_s\}$  olarak ifade edilebilir. Bu durumda, omurganın yaprakları  $H = \text{cat}(k_1, k_2, \dots, k_s)$  şeklinde gösterilir. Burada her bir  $i = 1, \dots, s$  için  $k_i$  sayıda yaprak,  $v_i$  omurga köşesine bağlanmıştır.*

Örneğin, Şekil 2.22 ile  $H = \text{cat}(0, 2, 2, 0)$  tırtıl çizgesi verilmektedir. Bu çizgede omurganın her bir köşe noktasına bağlanan yaprak sayıları sırasıyla şu şekildedir:

- İlk köşe noktası (omurga köşesi) 0 yaprağa sahiptir,
- İkinci köşe noktası 2 yaprağa sahiptir,
- Üçüncü köşe noktası 2 yaprağa sahiptir,
- Dördüncü köşe noktası (omurga köşesi) 0 yaprağa sahiptir.



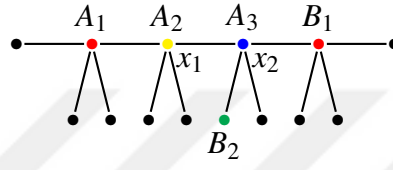
**Şekil 2.22.**  $H = \text{cat}(0, 2, 2, 0)$  tırtıl çizge

Tırtıl çizgeler aynı zamanda birer ağaç örneği olduklarından oyun kromatik sayıları en fazla 4 olabilir. Teorem 2.30 tırtıl çizgenin oyun kromatik sayısının 4 olduğu durumu göstermektedir.

**Teorem 2.30** ([10]).  *$G$ , 14 köşe noktalı en az dört köşe noktasının derecesi dört olan ve derecesi 1 olan iki köşe noktasına sahip bir tırtıl çizge olsun.  $G$  çizgesinin oyun kromatik sayısı 4 olur.*

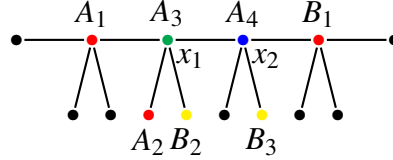
*Kanıt.* Burada 3 durum inceleyeceğiz:

1.Durum: Alice şekildeki tırtıl çizginin omurgası üzerinde keyfi bir köşe noktasını birinci renk ile boyasın. Bob, Alice'in boyadığı noktanın 3 birim uzağındaki noktayı birinci renk ile boyasın. Alice arada kalan  $x_1$  (veya  $x_2$ ) köşe noktasını ikinci renk ile boyamalıdır. Bob ise  $x_2$  (veya  $x_1$ ) köşe noktasının herhangi bir yaprağını üçüncü renk ile boyasın. Bu durumda Alice  $x_2$  (veya  $x_1$ ) köşe noktasını boyamak için dördüncü bir renge ihtiyaç duyar.



Şekil 2.23. Teorem 2.30'un ispatında yer alan 1.Durum

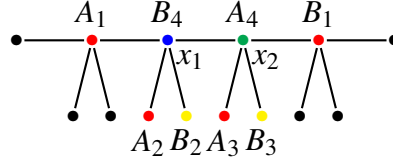
2.Durum: Alice ile Bob'un ilk hamleleri birinci durumdaki gibi aynı kalsın. Alice



Şekil 2.24. Teorem 2.30'un ispatında yer alan 2.Durum

ikinci hamlesinde  $x_1$  (veya  $x_2$ ) köşe noktasının yapraklarından birini birinci renk ile boyasın. Bob ise  $x_1$  (veya  $x_2$ ) köşe noktasının diğer yaprağını ikinci renk ile boyasın. Bu durumda Alice  $x_1$  (veya  $x_2$ ) köşe noktasını üçüncü renk ile boyar. Bob  $x_2$  (veya  $x_1$ ) köşe noktasının yapraklarından birini ikinci renk ile boyasın. Bu durumda Alice  $x_2$  (veya  $x_1$ ) köşe noktasının boyanması için dördüncü bir renge ihtiyaç duyar.

3.Durum: Alice ve Bob'un ilk iki hamleleri 2.durumdaki gibi olsun. Alice üçüncü hamlesinde  $x_2$  (veya  $x_1$ ) köşe noktasının yapraklarından birini birinci renk ile boyasın, Bob ise diğer yaprağı ikinci renk ile boyasın. Bu durumda  $x_1$  ve  $x_2$  köşe noktalarının boyanması için üçüncü ve dördüncü renklere ihtiyaç duyulur.  $\square$



Şekil 2.25. Teorem 2.30'ün ispatında yer alan 3.Durum

## 2.9. Oyun Renk Sayısı

Bir çizgenin oyun renk sayısı, Bölüm 1'de tanımlanan çizge boyama oyununa benzer bir şekilde tanımlanır. Ancak bu oyunda oyuncular, çizgenin köşe noktalarını boyamak yerine sırayla işaretlenmemiş noktaları işaretlerler.

Oyun şu şekilde oynanır: İlk olarak bir  $k$  pozitif tam sayısı seçilir ve sabitlenir. Oyuna, boyama oyununda olduğu gibi, Alice başlar; ardından oyuncular sırayla işaretlenmemiş köşe noktalarını işaretler.

Oyunun herhangi bir aşamasında, işaretlenmemiş bir köşe noktasının  $k$  adet işaretli komşusu bulunursa, Bob oyunu kazanır. Ancak eğer oyunun hiçbir aşamasında böyle bir durum gerçekleşmezse, Alice oyunu kazanır.

**Tanım 2.31.** Bir  $G$  çizgesinin oyun renk sayısı, yukarıda tanımlanan köşe işaretleme oyununda, Alice'in her zaman kazanabilmesi için gereken en küçük  $k$  pozitif tam sayısıdır. Bu sayı  $\text{col}_g(G)$  ile gösterilir.

Örneğin,  $P_3$  patika çizmeyi ele alalım. Alice,  $k$  değerini olabildiğince küçük tutmak istediğinden ilk hamlesini orta noktayı işaretleyerek yapar. Bu durumda, işaretlenmemiş herhangi bir noktanın yalnızca 1 işaretlenmiş komşusu olacağından, Bob  $k = 1$  ile oyunu kazanır. Ancak bu durumda Alice'in kazanabilmesi için  $k = 2$  olması gereklidir. Dolayısıyla  $\text{col}_g(P_3) = 2$  elde edilir.

Diğer taraftan,  $P_4$  patika çizmeyi ele alalım. Alice ilk hamlesini yaptıktan sonra, Bob işaretlemesini Alice'in işaretlediği noktanın 2 birim uzağındaki bir noktaya yaparsa, Bob  $k = 2$  ile oyunu kazanır. Bu durumda, Alice'in kazanabilmesi için  $k = 3$  olması gerekir. Dolayısıyla  $\text{col}_g(P_4) = 3$  elde edilir.

Benzer bir şekilde,  $n > 4$  durumunda da aynı strateji uygulanabilir. Bob, her zaman Alice'in işaretlediği noktaların 2 birim uzağındaki noktaları işaretleyerek oyunu kazanabilir. Bu nedenle,  $n \geq 4$  için  $\text{col}_g(P_n) = 3$  elde edilir.

Bir diğer çizge sınıfı olarak döngü çizgelerini ( $C_n$ ) ele alalım.  $n \geq 3$  için  $\text{col}_g(C_n) = 3$  olduğunu gösterelim. Gerçekten de, Alice ilk hamlesinde keyfi bir noktayı

işaretlediğinde, Bob bu noktadan 2 birim uzaklıkta bir başka noktayı işaretlerse  $k = 2$  ile oyunu kazanabilir. Bu nedenle, Alice'in oyunu kazanabilmesi için  $k = 3$  olmalıdır. Dolayısıyla  $n \geq 3$  için  $\text{col}_g(C_n) = 3$  elde edilir.

$n \geq 2$  için  $K_{n,n}$  iki kümeli tam çizgenin oyun renk sayısı  $\text{col}_g(K_{n,n}) = n + 1$  olur. Gerçekten de,  $K_{n,n}$  iki kümeli tam çizgesinin parçalanmış kümeleri  $A$  ve  $B$  olsun. Alice bu kümelerden birinden bir köşe noktasını işaretlediğinde, Bob diğer kümeden bir köşe noktasını işaretlesin. Bu strateji ile sona kalan işaretlenmemiş bir köşe noktasının  $n$  tane işaretlenmiş komşusu olacaktır. Bu durumda  $k = n$  için oyunu Bob kazanır. Dolayısıyla,  $\text{col}_g(K_{n,n}) = n + 1$  elde edilir.

Herhangi bir  $G$  çizgesi için aşağıdaki ilişki sağlanır:

$$\chi_g(G) \leq \text{col}_g(G). \quad (2.2)$$

**Önerme 2.32** ([29]).  $G = (V, E)$  çizgesi,  $E = E_1 \cup E_2$  olacak şekilde verilsin. Eğer  $G_1 = (V, E_1)$  ve  $G_2 = (V, E_2)$  ise aşağıdaki ilişki sağlanır:

$$\chi_g(G) \leq \text{col}_g(G) \leq \text{col}_g(G_1) + \Delta(G_2).$$

### 3. KARTEZYEN ÇARPIM ÇİZGELERİN OYUN KROMATİK SAYILARI

Bu bölümde, bazı özel çizgelerin Kartezyen çarpımları ile elde edilen çizgelerin oyun kromatik sayılarına ilişkin literatürde yer alan sonuçlara değinilmektedir.

#### 3.1. Çizgelerin Kartezyen Çarpımı

**Tanım 3.1.**  $G$  ve  $H$  gibi iki çizgenin Kartezyen çarpımı  $G \square H$  şeklinde gösterilir.  $G \square H$  Kartezyen çarpım çizgesinin köşe noktaları kümesi,

$$V(G \square H) = V(G) \times V(H) = \{(u, v) \mid u \in V(G), v \in V(H)\}$$

şeklinde tanımlanan sıralı ikililerden oluşur.  $G \square H$  Kartezyen çarpım çizgesinin kenarlar kümesi ise,

$$E(G \square H) = \{ \{(u_1, v_1), (u_2, v_2)\} \mid \{u_1, u_2\} \in E(G) \text{ ve } v_1 = v_2, \\ \text{veya } \{v_1, v_2\} \in E(H) \text{ ve } u_1 = u_2 \}$$

şeklinde tanımlanır.

Örneğin, köşe noktalarının kümesi sırasıyla  $V(P_4) = \{a, b, c, d\}$  ve  $V(P_3) = \{1, 2, 3\}$  olan  $P_4$  ve  $P_3$  çizgelerinin Kartezyen çarpımı olan  $P_4 \square P_3$  çizgesi için:

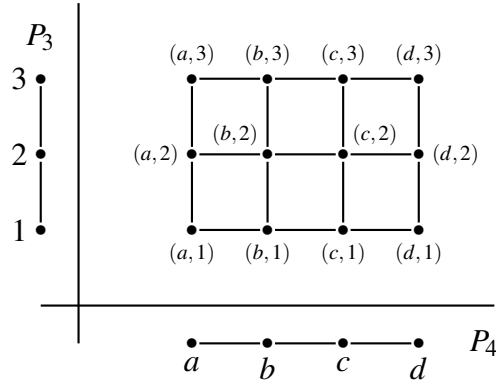
$$V(P_4 \square P_3) = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (c, 1), (c, 2), \\ (c, 3), (d, 1), (d, 2), (d, 3)\}$$

ve

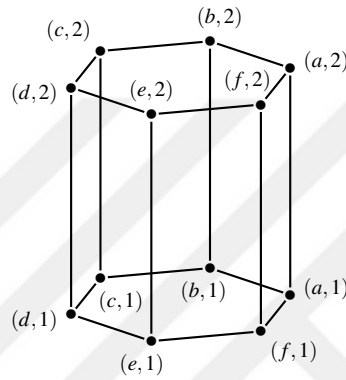
$$E(P_4 \square P_3) = \{ \{(a, 1), (a, 2)\}, \{(a, 1), (b, 1)\}, \{(a, 2), (a, 3)\}, \{(a, 2), (b, 2)\}, \\ \{(a, 3), (b, 3)\}, \{(b, 1), (b, 2)\}, \{(b, 2), (b, 3)\}, \{(b, 1), (c, 1)\}, \\ \{(b, 2), (c, 2)\}, \{(b, 3), (c, 3)\}, \{(c, 1), (c, 2)\}, \{(c, 2), (c, 3)\}, \\ \{(c, 1), (d, 1)\}, \{(c, 2), (d, 2)\}, \{(c, 3), (d, 3)\}, \{(d, 1), (d, 2)\}, \\ \{(d, 2), (d, 3)\} \}.$$

Bu Kartezyen çarpım çizge, Şekil 3.26 ile görselleştirilebilir.

$P_m$  ve  $P_n$  patika çizgelerinin Kartezyen çarpımı ile elde edilen çizgelere tam grid çizge ya da kısaca grid çizge adı verilir. Grid çizgeler, özellikle iletişim ağları ile ilgili uygulamalarda sıklıkla kullanılmaktadır.



Şekil 3.26.  $P_4 \square P_3$ ,  $P_4$  ve  $P_3$  çizgelerinin Kartezyen çarpımı



Şekil 3.27.  $C_6 \square P_2$ , silindirik grid çizge

Benzer şekilde,  $C_m$  ve  $P_n$  çizgelerinin Kartezyen çarpımı ile elde edilen çizgelere ise silindirik grid çizge adı verilir. Örneğin,  $C_6 \square P_2$  çizgesi, Şekil 3.27 ile görselleştirildiği gibi bir silindirik grid çizgesidir.

Bir kenar gibi düşünülebilecek olan  $P_2$  patika çizgesinin kendisi ile Kartezyen çarpımı  $C_4$  çizgesini verdiğinden, iki kenarın Kartezyen çarpımı bir kare olarak düşünülebilir. Bu nedenle Kartezyen çarpım için  $\square$  gösterimi kullanılmakta ve kimi zaman Kartezyen çarpım yerine “box” çarpım ifadesi de tercih edilmektedir. Ancak, bazı kaynaklarda Kartezyen çarpım için  $\times$  simgesi de kullanılabilir.

$G$  ve  $H$  çizgelerinin Kartezyen çarpım çizgesinin kenarlar kümesi,

$$E(G \square H) = (E(G) \times V(H)) \cup (V(G) \times E(H))$$

şeklinde de tanımlanabilir. Bu durumda,  $G \square H$  çizgesinin köşe noktalarının ve kenarlarının sayısı sırasıyla şu şekilde hesaplanabilir:

$$|V(G \square H)| = |V(G)| \cdot |V(H)|$$

ve

$$|E(G \square H)| = |E(G)| \cdot |V(H)| + |V(G)| \cdot |E(H)|.$$

Diğer taraftan,  $G$  ve  $H$  çizgeleri verildiğinde,  $v \in V(H)$  için  $G \times \{v\}$ ,  $G$  çizgesinin bir kopyası olarak düşünülecek olursa,

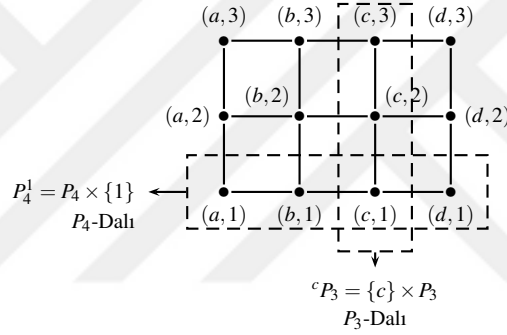
$$G \times V(H) = \bigcup_{v \in V(H)} (G \times \{v\}),$$

olmak üzere  $G \square H$  çizgesi,

$$G \square H = (G \times V(H)) \cup (V(G) \times H)$$

şeklinde de tanımlanabilir.

$G$  çizgesinin bir  $G \times \{v\}$  kopyasına  $G$ -dal (fiber) denir ve  $G^v$  ile gösterilir. Bu durumda  $G \times V(H)$  ifadesi, tüm  $G$ -dalların birleşimi olur. Benzer şekilde,  $(V(G) \times H)$  ifadesi de  ${}^u H = \{u\} \times H$  şeklindeki  $H$ -dalların birleşimi olur (bkz. Şekil 3.28).



Şekil 3.28.  $P_4 \square P_3$ , Kartezyen çarpım çizgenin  $P_4$  ve  $P_3$ -dalları

Aşağıdaki önemli sonuç, Kartezyen çarpım çizgesinin kromatik sayısı ile çarpanların kromatik sayıları arasındaki ilişkiyi ifade etmektedir. Ancak, benzer bir ilişki oyun kromatik sayısı için geçerli değildir.

**Teorem 3.2** ([22]). *Keyfi  $G$  ve  $H$  çizgeleri için*

$$\chi(G \square H) = \max \{ \chi(G), \chi(H) \}$$

olur.

### 3.2. Çeşitli Kartezyen Çarpım Çizgelerinin Oyun Kromatik Sayıları

Kartezyen çarpım olarak tanımlanan bir çizgenin oyun kromatik sayısını hesaplamak, genelde oldukça zor bir problemdir. Bu bölümde, kesin değerleri bilinen patika, döngü ve iki kümeli tam çizge gibi bazı temel Kartezyen çarpım çizgelerinin oyun kromatik sayıları verilmektedir.

$P_n$  ve  $P_m$  patika çizgelerinin Kartezyen çarpımı ile elde edilen çizgelere grid çizge adı verilir. Literatürde,  $n$  ve  $m$  sayılarının bazı özel değerleri için  $P_n \square P_m$  grid çizgelerinin oyun kromatik sayıları hesaplanmış olsa da,  $n$  ve  $m$  sayılarının keyfi değerleri için  $\chi_g(P_n \square P_m)$  değeri henüz tam olarak elde edilememiştir [6, 21, 30].

İlk olarak,  $K_2$  çizgesi ile  $P_n$  patika çizgesinin Kartezyen çarpımı olan  $K_2 \square P_n$  çizgesinin oyun kromatik sayısı aşağıda verilmektedir.

**Önerme 3.3** ([6]).  $n$  pozitif bir tam sayı olsun.

$$\chi_g(K_2 \square P_n) = \begin{cases} 2 & , \quad n = 1 \\ 3 & , \quad 2 \leq n \leq 3 \\ 4 & , \quad n \geq 4 \end{cases}$$

olur.

*Kanıt.*  $n = 1$  için  $K_2 \square P_1$ , yalnızca  $K_2$  çizgesine eşittir ve bu çizge iki renk ile boyanabilir. Bu durumda  $\chi_g(K_2 \square P_1) = 2$  olduğu açıktır.

$n = 2$  için  $K_2 \square P_2$ ,  $C_4$  (döngü çizgesi) olup oyun kromatik sayısı 3'tür.

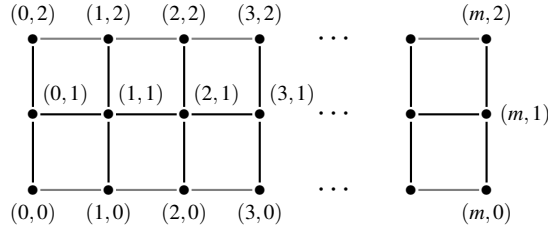
Benzer şekilde,  $n = 3$  için  $K_2 \square P_3$  çizgesinde birinci oyuncu hangi köşe noktasını boyarsa boyasın, ikinci oyuncu boyanan bu noktadan 2 birim uzaklıktaki köşe noktasını bir başka renk ile boyarsa arada kalan köşe noktası için üçüncü bir renk gerekir. Dolayısıyla  $\chi_g(K_2 \square P_3) = 3$  olur.

$n \geq 4$  durumunu ele alalım.  $P_n$  çizgesinin iki fiberinin köşe noktalarını Şekil 3.29 ile gösterildiği gibi  $v_1, v_2, \dots, v_n$  ve  $v'_1, v'_2, \dots, v'_n$  olarak adlandıralım. Şimdi, 3 renk ile boyamanın mümkün olmadığını göstereceğiz.

Simetriye göre, birinci oyuncunun ilk hamlesi yalnızca iki duruma indirgenebilir:

- Birinci oyuncu, derecesi 3 olan bir köşe noktasını boyarsa: Örneğin  $v_2$  köşe noktası birinci renk ile boyanırsa, ikinci oyuncu  $v'_3$  köşe noktasını ikinci renk ile boyar. Birinci oyuncunun bir sonraki hamlesinden sonra, ya  $v_3$  ya da  $v'_2$  boyanmamış kalır.
  - Eğer  $v_3$  boyanmamış kalırsa, ikinci oyuncu  $v_4$  köşe noktasını üçüncü renk ile boyar. Bu durumda  $v_3$ , mevcut üç renkten biriyle boyanamaz.
  - Eğer  $v'_2$  boyanmamış kalırsa, ikinci oyuncu  $v'_1$  köşe noktasını üçüncü renk ile boyar. Bu durumda  $v_2$  artık mevcut üç renkten biriyle boyanamaz.
- Birinci oyuncu, derecesi 2 olan bir köşe noktasını boyarsa: Örneğin genelliği bozmaksızın  $v_1$  köşe noktasını birinci renk ile boyarsa, ikinci oyuncu da  $v'_3$  köşe noktasını birinci renk ile boyar.





Şekil 3.30. Önerme 3.4 için verilen kanıtta kullanılan  $G$  ve  $G'$  çizgeleri

**Teorem 3.5** ([21]). *Her  $n$  pozitif tam sayısı için*

$$\chi_g(P_3 \square P_n) = \begin{cases} 2 & , n = 1 \text{ ise} \\ 3 & , n = 2 \text{ ise} \\ 4 & , n \geq 3 \text{ ise} \end{cases}$$

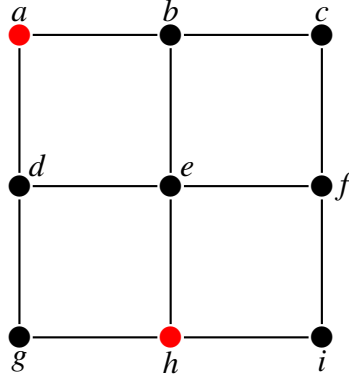
*olur.*

*Kanıt.*  $n = 1$  durumu açıktır. Önerme 3.3 ile  $n = 2$  durumunun da geçerli olduğu elde edilir. Önerme 3.4 yardımıyla  $\chi_g(P_3 \square P_n) \leq 4$  eşitsizliği geçerlidir. Eğer  $\chi_g(P_3 \square P_n) \geq 4$  eşitsizliğinin de doğru olduğu kanıtlanırsa eşitlik durumu elde edilir ve kanıt tamamlanmış olur.

Oyun  $G = P_3 \square P_n$  çizgesinde 3 renk ile oynansın. Alice'in ilk hamlesi için iki durum söz konusudur:

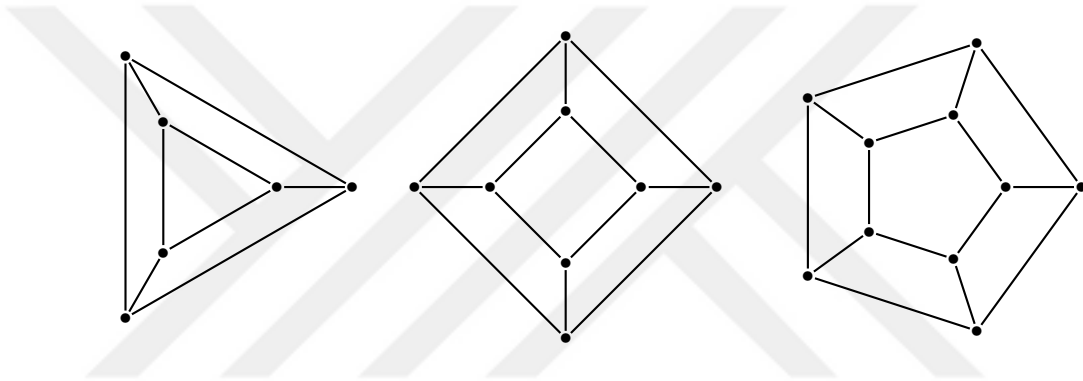
- Alice ilk hamlesinde içeride kalan köşe noktalardan birini boyar: Eğer Alice  $(i, j)$  köşe noktasını boyadıysa Bob da ilk hamlesinde  $(i + 1, j - 1)$  köşe noktasını farklı renkte boyasın. Bu durumda  $(i, j - 1)$  ve  $(i + 1, j)$  köşe noktaları kritik noktalar olur ve Önerme 1.13 gereği Bob oyunu kazanır.
- Alice ilk hamlesinde sınırdaki köşe noktalarından birini boyar: Alice'in ilk hamlesinde sınırdaki bir köşe noktasını boyadığını varsayalım. Ardından, Bob ilk hamlesini yaptıktan sonra Şekil 3.31 ile gösterildiği gibi bir  $H$  alt çizgesi elde edebilir. (Köşe noktaları  $a$  ve  $h$  aynı renkle, örneğin 1. renk ile boyanmıştır.) Bu durumda,  $b, e, d, g$  ve  $i$  köşe noktalarının 1. renk ile boyanamayacağına dikkat edelim. Eğer Alice bu köşe noktalarından birini boyarsa, bu nokta 2. renk veya 3. renk ile boyanmak zorunda kalacaktır. Bu da bir köşe noktasının renk- $i$  için kritik olmasını ve sıranın Bob'a geçmesini sağlar. Dolayısıyla Bob oyunu kazanır.

Alice'in köşe  $c$  veya  $f$ 'i renk 1 ile boyadığını varsayalım. Bu durumda, Bob  $e$  köşe noktasını 2. renk ile boyar, yani  $d$  köşe noktası renk 3 için kritik hale gelir ve  $\{b, f\}$  kümesindeki köşe noktalarından biri renk 3 için kritik olur. Önerme 1.13 yardımıyla, onu Bob'un kazandığı elde edilir.



Şekil 3.31. Teorem 3.5 için verilen kanıtta kullanılan  $P_3 \square P_n$  çizgesinin kısmen boyanmış  $H$  alt çizgesi

□



Şekil 3.32.  $n = 3, 4, 5$  için  $K_2 \square C_n$  prizma çizgeleri

Aşağıda, prizma çizge olarak da adlandırılan  $K_2 \square C_n$  çizgesinin oyun kromatik sayısı verilmektedir.  $n$  tamsayısının bazı değerlerine karşılık gelen prizma çizgeleri Şekil 3.32 ile gösterilmektedir.

**Önerme 3.6** ([6]). *Eğer  $n \geq 3$  ise*

$$\chi_g(K_2 \square C_n) = 4$$

*olur.*

*Kanıt.*  $C_n$  döngü çizgesinin bir fiberindeki köşe noktalarını  $v_1, v_2, \dots, v_n$  ve ikinci fiberin karşılık gelen köşe noktalarını  $v'_1, v'_2, \dots, v'_n$  olarak adlandıralım. Şimdi, üç renk ile boyama yapmaya çalışalım. Simetriye göre, birinci oyuncunun ilk hamlesi için yalnızca bir olasılık vardır; bu, örneğin  $v_2$  köşe noktasını birinci renk ile boyaması olsun.

$n \geq 5$  durumunda, ikinci oyuncu  $v'_3$  köşe noktasını ikinci renk ile boyayarak yanıt verir. Bu durumda birinci oyuncu, hem  $v_3$  hem de  $v'_2$  köşe noktaları üzerindeki tehditleri aynı anda savunamaz ve bu nedenle ikinci oyuncu, bir sonraki hamlesinde dördüncü rengin kullanılmasını zorlar.  $n = 4$  durumunda bu strateji işe yaramaz, çünkü birinci oyuncu

ikinci hamlesinde  $v_1$  köşe noktasını üçüncü renk ile boyayabilir. Ancak  $K_2 \square C_4 = Q_3 = K_{4,4} - M$  ( $M$  bir mükemmel eşleme) olduğundan,  $\chi_g(K_2 \square C_4) = 4$  olduğu yine aynı şekilde doğrulanabilir.

$n = 3$  durumunda, ikinci oyuncu  $v'_3$  köşe noktasını birinci renk ile boyayarak yanıt verir. Bu, birinci oyuncunun yeni bir renk kullanmasını zorlar ve ikinci oyuncu kolayca oyunu kazanır. (1.1) eşitsizliği ile verilen üst sınır ile, kanıt tamamlanmış olur.  $\square$

**Önerme 3.7** ([6]).  $n$  pozitif bir tam sayı olsun.  $O$  zaman

$$\chi_g(K_2 \square K_n) = n + 1$$

olur.

*Kanıt.*  $n = 1$  ve  $n = 2$  durumlarında sonuç açıktır. Şimdi,  $n \geq 3$  için Bob'un  $n$  renk kullanarak oyunu kazanabileceği bir stratejiyi açıklayalım. İlk  $n - 2$  hamlesinde Bob aşağıdaki kuralları uygular:

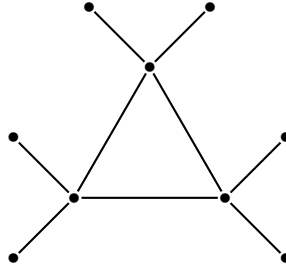
- (1) Her zaman  $K_n$  çizgesinin karşı fiberindeki bir köşe noktasını, Alice'in bir önceki hamlesinde kullandığı renkle aynı renge boyar.
- (2) Mümkünse, karşı  $K_n$  fiberindeki tek komşusu daha önce boyanmış olan bir köşe noktasını boyar.

Bu stratejinin birinci koşuluna göre, Alice her hamlede yeni bir renk kullanmak zorunda kalır. Bu nedenle,  $n - 2$  hamlenin ardından tam olarak  $n - 2$  renk kullanılmış olur. İkinci koşul, her iki oyuncunun  $n - 2$  hamlesinden sonra tüm dört boyanmamış köşe noktasının indirgediği bağlantılı bir alt çizge oluşturmasını garanti eder (bu alt çizge ya bir patika  $P_4$  ya da bir döngü  $C_4$  olacaktır).

Ayrıca, Alice oyunun bu aşamasında yalnızca iki son renk ile başlayabilir. Hem  $P_4$  hem de  $C_4$  durumlarında, Bob son rengi kullanarak uygun bir köşe noktasını boyar ve oyunu kazanır. (1.1) eşitsizliği yardımıyla kanıt tamamlanmış olur.  $\square$

Yukarıdaki sonuçlara göre, keyfi bir  $G$  çizgesi için  $\chi_g(K_2 \square G) = \chi_g(G) + 1$  olduğu düşünülebilir. Ancak, ne yazık ki bu eşitlik her zaman doğru değildir. Gerçekten de, bir üçgenin üç köşesine ikişer yaprak eklenerek elde edilen ve Şekil 3.33 ile gösterilen  $G$  çizgesi için  $\chi_g(G) = 4$  olur.

Alice, simetri gereği  $G$  çizgesinin derecesi 1 veya 4 olan herhangi bir köşe noktasından oyuna başlayabilir. Bu durumda, Bob her zaman Alice'i dördüncü rengi kullanmaya zorlayabilir. Oyun,  $\chi_g(K_2 \square G)$  Kartezyen çarpım çizgesinde de oynandığında, yine oyun kromatik sayısı 4 olur.



**Şekil 3.33.**  $\chi_g(K_2 \square G) = \chi_g(G) + 1$  eşitliğinin geçerli olmadığı bir  $G$  çizgesi

[6] çalışmasında verilen aşağıdaki sonuç, iki kümeli tam çizgelerin Kartezyen çarpımlarının oyun kromatik sayısının, çarpan çizgelerin oyun kromatik sayılarının bir fonksiyonu ile sınırlandırılmayacağını ifade etmektedir. Böylece daha genel olarak,  $\chi_g(G \square H)$  çizgesinin oyun kromatik sayısı,  $\chi_g(G)$  ve  $\chi_g(H)$  oyun kromatik sayılarının bir fonksiyonu ile üstten sınırlı değildir.

**Teorem 3.8** ([6]). *Keyfi bir  $n$  doğal sayısı için*

$$\chi_g(K_{k,k} \square K_{m,m}) > n$$

*olacak şekilde  $k$  ve  $m$  doğal sayıları bulunabilir.*

Sia, yukarıda Bartnicki tarafından verilen sonuçlara ek olarak  $S_m \square P_m$ ,  $S_m \square C_n$ ,  $P_2 \square W_n$  ve  $P_2 \square K_{m,n}$  Kartezyen çarpım çizgelerinin kromatik sayılarını da hesaplamıştır [25]. Burada  $S_n$ ,  $n + 1$  köşe noktalı yıldız çizmeyi göstermektedir. Sia, bu hesaplamalar için Önerme 2.32 yardımıyla elde edilen aşağıdaki sonucu kullanmıştır:

**Sonuç 3.9** ([25]). *Herhangi bir  $G \square H$  Kartezyen çarpım çizgesi için*

$$\chi_g(G \square H) \leq \text{col}_g(G \square H) \leq \text{col}_g \left( \bigcup_{v \in V(H)} G_v \right) + \Delta(H)$$

*olur. Burada  $G_v$ ,  $G \square H$  içindeki bir  $G$ -fiberi göstermektedir.*

Sia  $S_m \square P_n$ ,  $S_m \square C_n$ ,  $P_2 \square W_n$  ve  $P_2 \square K_{m,n}$  Kartezyen çarpım çizgelerinin oyun kromatik sayılarını tam olarak hesaplamıştır [25]. Bu, Bartnicki ve arkadaşlarının Kartezyen çarpım çizgelerinin oyun kromatik sayısı üzerine elde ettiği önceki sonuçları genişletmektedir. İlk olarak,  $S_m$  yıldız çizge ile  $P_1$  ve  $P_2$  patika çizgelerin Kartezyen çarpımı için elde edilen sonucu verelim.

**Önerme 3.10** ([25]).  *$m$  ve  $n$  pozitif tam sayılar ve  $m \geq 2$  olsun. O zaman:*

$$\chi_g(S_m \square P_1) = 2,$$

$$\chi_g(S_m \square P_2) = 3,$$

ve  $n \geq 3$  için

$$\chi_g(S_m \square C_n) = \chi_g(S_m \square P_n) = 4$$

olur.

*Kanıt.*  $S_m \square P_1$  ve  $S_m \square P_2$  Kartezyen çizgeleri için kanıt açıktır.

Şimdi  $n \geq 3$  için  $G = S_m$  ve  $H = P_n$  veya  $H = C_n$  diyelim. Buradan Sonuç 3.9 yardımıyla

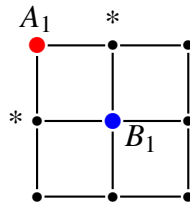
$$\chi_g(S_m \square P_n) \leq 4 \quad \text{ve} \quad \chi_g(S_m \square C_n) \leq 4$$

olarak üst sınırlar elde edilir.

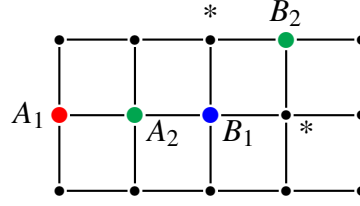
O halde,  $n \geq 3$  için Bob'un üç veya daha az renkle oyunu kazanabileceği gösterilirse,  $\chi_g(S_m \square C_n) = \chi_g(S_m \square P_n) = 4$  olduğu kanıtlanmış olur.

Eğer Bob, ilk hamlesinden sonra Şekil 3.34 ile gösterilen formda bir alt çizge oluşmasını sağlayabilirse, ikinci hamlesinde oyunu kazanır. Çünkü Alice, \* ile işaretli her iki köşe noktasına yönelik tehditleri aynı anda engelleyemez. Bu durum  $n \geq 3$  iken  $S_m \square C_n$  çizgeleri için de geçerlidir.

$S_m \square P_n$  formundaki çizgeler için, Bob ilk hamlesinden sonra bu konfigürasyonu yalnızca şu durumlarda oluşturamaz: Alice, ilk hamlesini (örneğin 1. renk)  $S_m$ -fiberlerinden birinin merkez köşe noktasında yaparsa (Bkz. Şekil 3.35) ya da  $n = 3$  olduğunda Alice, orta  $S_m$ -fiberinin merkez olmayan bir köşe noktasında oynarsa.  $n \geq 4$  olduğunu ve dolayısıyla birinci durumun geçerli olduğunu varsayalım. Bob, bu durumda Alice'in hamlesinden 2 birim uzaklıkta olan  $S_m$ -fiberinin merkez köşe noktasını 2. renk ile boyayarak yanıt vermelidir. Bu, Alice'i, boyanmış iki köşe noktasına da komşu olan tek köşe noktasını 3. renk ile boyamaya zorlar. Bu, Alice'in bu köşe noktasına yönelik tehdidi engellemesinin tek yoludur. Bob, ardından Şekil 3.35'de gösterildiği gibi 3. renk ile oynar. Alice, \* ile işaretlenmiş her iki köşe noktasına yönelik tehditleri aynı anda engelleyemez ve Bob oyunu kazanır.  $\square$



Şekil 3.34.  $S_2 \square P_3$  Kartezyen çarpım çizgesi



Şekil 3.35.  $S_2 \square P_5$  çizgesinde Bob'un kazanma stratejisi

**Önerme 3.11** ([25]). *Herhangi bir  $n \geq 9$  için*

$$\chi_g(W_n \square P_2) = 5$$

*olur.*

Aşağıdaki sonuç, Sia'nın sonucunun bir iyileşmesidir.

**Teorem 3.12** ([2]). *Her  $n \geq 3$  için*

$$\chi_g(W_n \square P_2) = 5$$

*olur.*

Yukarıda verildiği gibi Bartnicki ve arkadaşları [6],  $\chi_g(P_2 \square P_n)$ ,  $\chi_g(P_2 \square C_n)$  ve  $\chi_g(P_2 \square K_n)$  ile ilgili sonuçlarına dayanarak,  $\chi_g(P_2 \square G) = \chi_g(G) + 1$  genellemesinin yanlış olacağını belirtip, eğer  $G$ , bir üçgenin her bir köşe noktasına iki yaprak eklenerek elde edilen bir çizge ise,  $\chi_g(G) = \chi_g(P_2 \square G) = 4$  olduğunu örnek olarak vermiştir.

Bağımsız bir öneme sahip olmasının yanı sıra, aşağıdaki teorem aynı zamanda  $\chi_g(P_2 \square G) > \chi_g(G) + 1$  eşitsizliğini sağlayan çizgelerin de var olduğunu göstermektedir (çünkü  $m, n \geq 2$  için  $\chi_g(K_{m,n}) = 3$ ).

**Önerme 3.13** ([25]).  *$m, n \geq 5$  olmak üzere,*

$$\chi_g(P_2 \square K_{m,n}) = 5$$

*olur.*

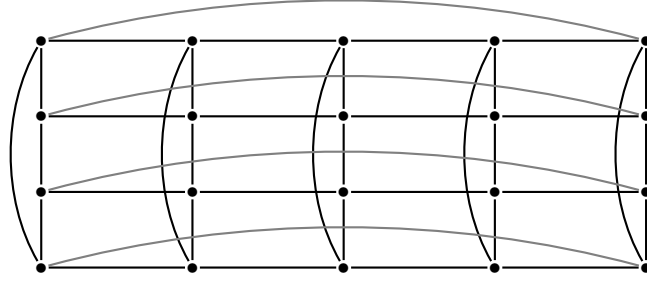
$C_n$  ve  $C_m$  döngü çizgelerin Kartezyen çarpımı ile elde edilen  $C_n \square C_m$  çizgesine toroidal grid çizge adı verilir. Örneğin Şekil 3.36 ile  $C_4 \square C_5$  toroidal çizgesi verilmektedir.

Aşağıda toroidal grid çizgeleri için elde edilen bazı sonuçlar verilmektedir.

**Önerme 3.14** ([21]).  *$n \geq 7$  için*

$$\chi_g(C_6 \square C_n) = 5$$

*olur.*



Şekil 3.36.  $C_4 \square C_5$  toroidal çizge

Raspaud ve Wu yukarıdaki sonucu genelleyerek  $m \geq 3$  ve  $n \geq 7$  için

$$\chi_g(C_{2m} \square C_n) = 5$$

olduğunu da kanıtlamıştır [21].

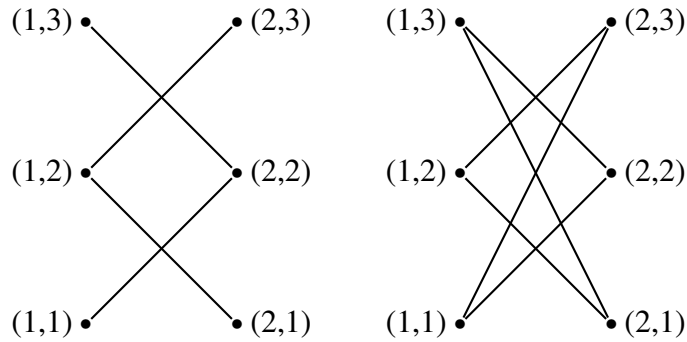
Çizgelerin Kartezyen çarpımı dışında direkt çarpım, güçlü çarpım, nokta çarpım ve sırasal çarpım gibi çok sayıda başka çarpımlar da tanımlıdır. Bu tür çarpımlar için de oyun kromatik sayısı, çeşitli araştırmacılar tarafından çalışılmıştır.

Örneğin,  $G$  ve  $H$  çizgelerinin direkt çarpımı (direct product) ya da tensör çarpımı, köşe noktaları kümesi  $V(G) \times V(H)$  ve kenarlar kümesi

$$E = \{(a, x), (b, y) \mid \{a, b\} \in E(G) \text{ ve } \{x, y\} \in E(H)\}$$

şeklinde tanımlı bir çizgedir ve  $G \times H$  ile gösterilir.

Örneğin, Şekil 3.37 ile  $P_2 \times P_3$  ve  $P_2 \times C_3$  direkt çarpım çizgeleri gösterilmektedir.



Şekil 3.37.  $P_2 \times P_3$  ve  $P_2 \times C_3$  direkt çarpım çizgeleri

Alagammai ve Vijayalakshmi, aşağıda sıralanan çok sayıda çizgenin direkt çarpımlarının oyun kromatik sayılarını hesaplamıştır [5].

**Teorem 3.15** ([5]).  $m$  ve  $n$  pozitif tamsayıları için

$$\chi_g(K_{1,n} \times K_{1,m}) = \begin{cases} 2 & , \quad n \text{ veya } m \text{ çift veya } n = m = 1 \\ 3 & , \quad n \text{ ve } m \text{ tek ve } n, m \neq 1 \end{cases}$$

olur.

**Teorem 3.16** ([5]).  $a, b, m$  ve  $n$  pozitif tamsayıları için  $m \geq 1, n \geq 2, a \geq 2$  ve  $b \geq 2$  olmak üzere,

$$\chi_g(K_{m,n} \times K_{a,b}) = 3$$

olur.

**Teorem 3.17** ([5]).  $m$  ve  $n$  pozitif tamsayıları için

$$\chi_g(P_n \times K_{1,m}) = \begin{cases} 2 & , \quad n = 2, 3, \quad m \geq 3 \\ 3 & , \quad n > 3, \quad m \geq 3 \end{cases}$$

olur.

**Teorem 3.18** ([5]).  $n \geq 3$  pozitif tam sayısı için

i.  $\chi_g(P_2 \times W_n) = 4$

ii.  $\chi_g(P_2 \times C_n) = 3$

olur.

Çizgeler üzerinde bir başka çarpım da güçlü çarpım (strong product) işlemidir.  $G$  ve  $H$  çizgelerinin güçlü çarpımı olan  $G \boxtimes H$  çizgesi, köşe noktaları kümesi

$$V(G \boxtimes H) = V(G) \times V(H)$$

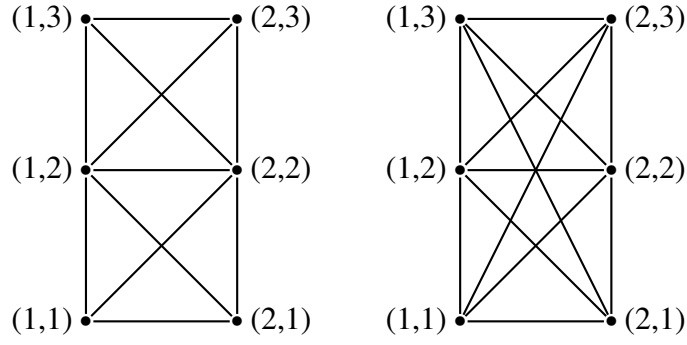
ve kenarlar kümesi de

$$E(G \boxtimes H) = \{ \{(u, u'), (v, v')\} \mid (u = v \text{ ve } \{u', v'\} \in E(H)) \text{ veya} \\ (u' = v' \text{ ve } \{u, v\} \in E(G)) \text{ veya} \\ (\{u, v\} \in E(G) \text{ ve } \{u', v'\} \in E(H)) \}$$

şeklinde tanımlanan bir çizgedir.

Örneğin, Şekil 3.38 ile  $P_2 \boxtimes P_3$  ve  $P_2 \boxtimes C_3$  güçlü çarpım çizgeleri gösterilmektedir.

Enomoto ve diğerleri, çeşitli çizgelerin güçlü çarpımlarının oyun kromatik sayıları ile ilgili önemli sonuçlar elde etmiştir [11].



Şekil 3.38.  $P_2 \boxtimes P_3$  ve  $P_2 \boxtimes C_3$  güçlü çarpım çizgeleri

**Teorem 3.19** ([11]). *Keyfi  $t \geq 2$  çift tamsayısı için*

$$\chi_g(G \boxtimes K_t) > t \chi_g(G)$$

*eşitsizliğini sağlayan sonsuz sayıda  $G$  çizgesi vardır.*

$t$  tamsayısının tek olması durumunda bu iddianın geçerli olup olmadığı ise kanıtlanamamıştır.

**Önerme 3.20** ([11]). *Keyfi  $n, t \geq 1$  için*

$$\chi_g(K_n \boxtimes K_t) = nt$$

*olur.*

**Önerme 3.21** ([11]). *Keyfi  $n \geq 1$  ve  $t \geq 1$  için*

$$\chi_g(K_{1,n} \boxtimes K_t) = 2t$$

*olur.*

**Önerme 3.22** ([11]). *Keyfi  $n \geq 2$ ,  $t \geq 1$  ve  $m$  tamsayısı için*

$$\chi_g(K_{m,n} \boxtimes K_t) = 2t + 1$$

*olur.*

Dereceler dizisi  $(a + 1, b + 1, 1, 1, \dots, 1)$  olan çift yıldız çizgesi  $S_{a,b}$  ile gösterilecek olursa,  $\chi_g(S_{a,b}) = \chi_g(S_{a,b} \boxtimes K_1) = 3$  olduğu da kanıtlanmış ve bu sonuç genelleştirilerek aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

**Teorem 3.23** ([11]). *Her  $t \geq 2$  için*

$$\chi_g(S_{a,b} \boxtimes K_t) = \begin{cases} 2t + 1 & , a = b = 1 \\ \lfloor \frac{5t}{2} \rfloor + 1 & , a, b \geq 2 \\ \lfloor \frac{5t}{2} \rfloor & , (a = 1, b \geq 2) \text{ veya } (a \geq 2, b = 1) \end{cases}$$

*olur.*

Son olarak,  $m$  ve  $n$  tamsayılarının bazı özel değerleri için  $P_n$  ve  $P_m$  patika çizgelerinin güçlü çarpımlarının oyun kromatik sayıları da elde edilmiştir.

**Teorem 3.24** ([11]).

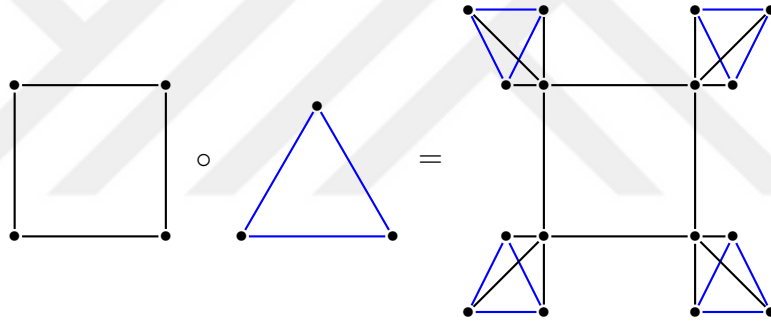
i.  $\chi_g(P_3 \boxtimes P_2) = 4$  ve  $4 \leq m \leq 6$  için  $\chi_g(P_m \boxtimes P_2) = 5$  olur.

ii.  $\chi_g(P_3 \boxtimes P_3) = 5$  olur.

iii. Yeterince büyük  $m$  ve  $n$  tamsayıları için  $\chi_g(P_m \boxtimes P_n) \geq 6$  olur.

Çizgelerin bir başka çarpımı da nokta çarpımı (corona product) olarak adlandırılan çarpımdır. Eğer  $G$  ve  $H$  çizgeleri sırasıyla  $n_1$  ve  $n_2$  köşe noktalı çizgeler ise,  $G$  ve  $H$  çizgelerinin nokta çarpımı olan  $G \circ H$  çizgesi,  $G$  çizgesinin bir kopyası ile  $H$  çizgesinin  $n_1$  tane kopyası alınıp,  $G$  çizgesinin  $i$ . köşe noktası ile  $H$  çizgesinin  $i$ . kopyasının tüm köşe noktaları arasına bir kenar çizilmesiyle elde edilir.

Örneğin, Şekil 3.39 ile  $C_4 \circ C_3$  nokta çarpım çizgesinin elde edilişi gösterilmektedir.



Şekil 3.39.  $C_4 \circ C_3$  nokta çarpım çizgesi

Çizgelerin nokta çarpımının oyun kromatik sayıları ile ilgili literatürde çok fazla çalışma bulunmasa da, [8] ve diğerleri  $P_m \circ C_m$  nokta çarpım çizgesinin oyun kromatik sayısını belirlemiştir.

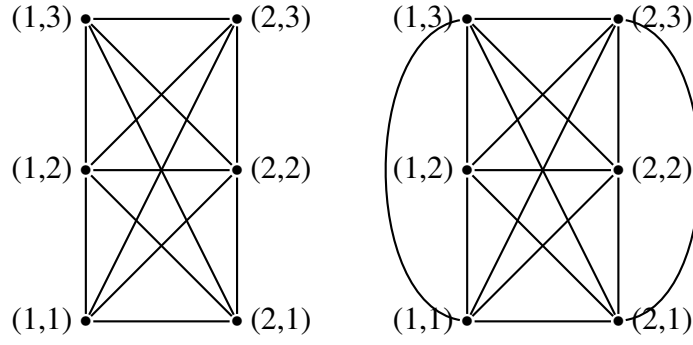
**Teorem 3.25** ([8]). Her  $n \geq 2$  ve  $m \geq 3$  için

$$\chi_g(C_m \circ P_m) = 4$$

olur.

Çizgelerin bir başka çarpımı da sırasal çarpım (lexicographic product) olarak adlandırılan çarpımdır.  $G$  ve  $H$  çizgelerinin sırasal çarpımı, köşe noktaları kümesi  $V(G) \times V(H)$  ve kenarlar kümesi

$$E = \{ \{ (a, x), (b, y) \} \mid \{ a, b \} \in E(G) \text{ veya } (a = b \text{ ve } \{ x, y \} \in E(H)) \}$$



Şekil 3.40.  $P_2[P_3]$  ve  $P_2[C_3]$  sırasal çarpım çizgeleri

şeklinde tanımlanan bir çizgedir ve  $G[H]$  şeklinde gösterilir.

Örneğin,  $P_2[P_3]$  ve  $P_2[C_3]$  sırasal çarpım çizgeleri Şekil 3.40 ile gösterilmiştir.

[4] çalışmasında  $\chi_g(P_2[P_n])$ ,  $\chi_g(P_2[K_{1,n}])$  ve  $\chi_g(P_2[W_n])$  oyun kromatik sayıları elde edilmiştir.

**Teorem 3.26** ([4]). *Keyfi  $n$  pozitif tamsayısı için*

$$\chi_g(P_2[P_n]) = \begin{cases} 4 & , n = 2 \\ 5 & , n = 3 \\ 6 & , n = 4, 5, 6 \\ 7 & , n \geq 7 \end{cases}$$

olur.

**Teorem 3.27** ([4]). *Keyfi  $n$  pozitif tamsayısı için*

$$\chi_g(P_2[K_{1,n}]) = \begin{cases} 4 & , n = 1 \\ 5 & , n \geq 2 \end{cases}$$

olur.

**Teorem 3.28** ([4]). *Keyfi  $n \geq 9$  tamsayısı için*

$$\chi_g(P_2[W_n]) = 9$$

olur.

## 4. SIERPİNSKİ ÇİZGELER

Bu bölümde, Sierpinski çizgelerinin genel özellikleri, oyun renk sayıları ve oyun kromatik sayılarıyla ilgili elde edilmiş sonuçlar verilmektedir.

### 4.1. Sierpinski Çizgelerin Bazı Özellikleri

**Tanım 4.1.** Sierpinski çizgeler,  $n, k \geq 1$  olmak üzere  $S(n, k)$  şeklinde gösterilmekte olup, köşe noktaları kümesi

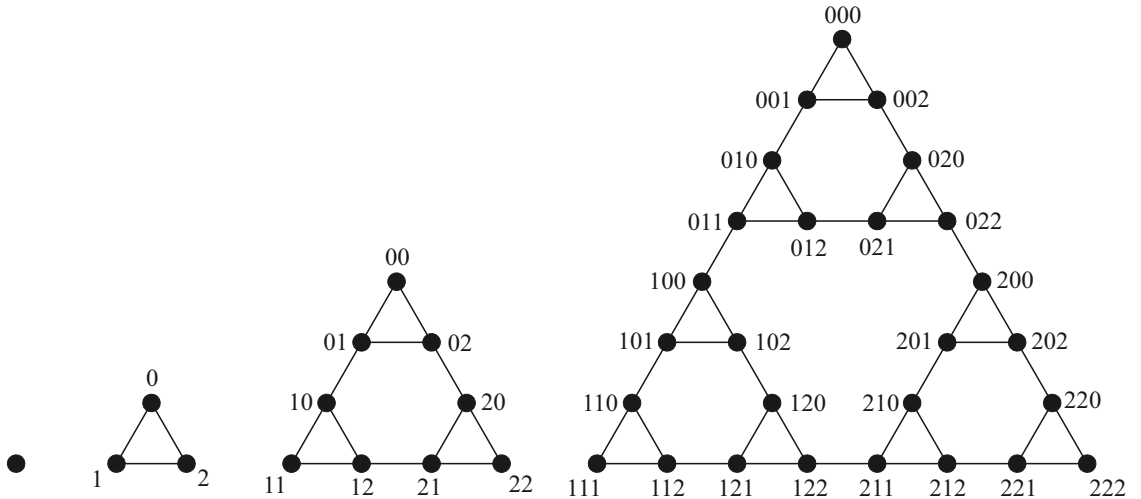
$$V(S(n, k)) = \{0, 1, \dots, k-1\}^n$$

şeklinde tanımlanır.

Sierpinski çizgesinde,  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  ve  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  gibi iki farklı köşe noktasının komşu olabilmesi için aşağıdaki koşulları sağlayan bir  $h \in \{1, 2, \dots, n\}$  sayısı olmalıdır:

- i)  $u_t = v_t$  olacak şekilde  $t = 1, 2, \dots, h-1$  olmalıdır.
- ii)  $u_h \neq v_h$  olmalıdır.
- iii)  $u_t = v_h$  ve  $v_t = u_h$  olacak şekilde  $t = h+1, \dots, n$  olmalıdır.

Şekil 4.41 ve Şekil 4.42 ile  $k = 0, 1, 2, 3$  için  $S(3, k)$  ve  $S(4, k)$  Sierpinski çizgeleri verilmektedir.



Şekil 4.41. Sırasıyla  $S(0, 3)$ ,  $S(1, 3)$ ,  $S(2, 3)$  ve  $S(3, 3)$  Sierpinski çizgeleri [16]

$S(n, k)$  Sierpinski çizgesinde, Tanım 4.1 gereğince köşe noktalarının sayısı

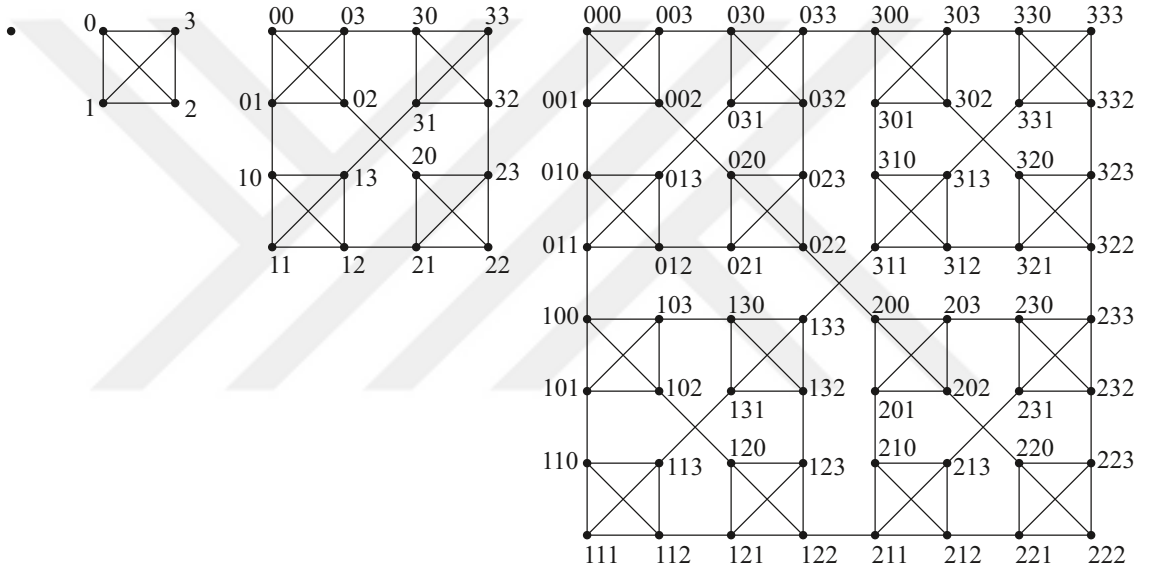
$$|V(S(n, k))| = |\{0, 1, \dots, k-1\}^n| = k^n \quad (4.3)$$

şeklinde elde edilir.

Köşe noktaları kümesinde  $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$  olmak üzere,  $ii\dots i$  şeklindeki köşe noktalarına ekstrem (uç) köşe noktaları, diğer köşe noktalarına ise inner (iç) köşe noktaları denir. Ekstrem köşe noktalarının sayısı  $k$  olup, bu köşe noktalarının her birinin derecesi  $k-1$ 'dir.

İnner köşe noktalarının sayısı  $k^n - k$  olup, bu köşe noktalarının her birinin derecesi  $k$ 'dir. Buradan, El Sıkışma Teoremine göre,  $S(n, k)$  Sierpinski çizgesinin kenar sayısı aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$|E(S(n, k))| = \frac{1}{2} (k(k-1) + (k^n - k)k) = \frac{k}{2} (k^n - 1) \quad (4.4)$$



Şekil 4.42. Sırasıyla  $S(0, 4)$ ,  $S(1, 4)$ ,  $S(2, 4)$  ve  $S(3, 4)$  Sierpinski çizgeleri [16]

Ek olarak, Sierpinski çizgesinin tanımından her  $k$  doğal sayısı için  $S(1, k) \cong K_k$  ve  $S(k, 2) \cong P_{2^k}$  olduğu açıktır.

$S(n, k)$  Sierpinski çizgesinin kenarlar kümesi, başlangıçta boş küme ile başlanarak aşağıdaki şekilde iteratif olarak elde edilebilir:

$$\begin{aligned} E(S(0, k)) &= \emptyset, \\ E(S(n+1, k)) &= \{\{ir, is\} \mid i \in \{0, 1, \dots, k-1\}, \{r, s\} \in E(S(n, k))\} \\ &\quad \cup \{\{ij^n, ji^n\} \mid i, j \in \{0, 1, \dots, k-1\}, i \neq j\} \end{aligned}$$

Kenarların yukarıdaki şekilde tanımlanması, Sierpinski çizgelerinin algoritmik olarak oluşturulmasını kolaylaştırır. Çalışmanın ekler bölümünde,  $S(n, k)$  Sierpinski çizgesini oluşturan bir Maple prosedürü verilmektedir.

Sierpinski çizgeleri ile ilgili daha fazla bilgi için [16] referansından yararlanılabilir.

## 4.2. Sierpinski Çizgelerin Oyun Renk Sayısı ve Oyun Kromatik Sayısı

Bu bölümde,  $n \geq 1$  ve  $k \geq 2$  iken  $S(n, k)$  Sierpinski çizgelerinin oyun renk sayısı ve özel olarak  $k = 3$  için  $S(n, k)$  Sierpinski çizgelerinin oyun kromatik sayısı verilmektedir.

Diğer taraftan,  $k \geq 4$  iken  $S(n, k)$  Sierpinski çizgesinin oyun kromatik sayısı halen bilinmemektedir.

**Teorem 4.2** ([1]).  $n \geq 1$  ve  $k \geq 2$  olmak üzere,

$$\text{col}_g(S(n, k)) = \begin{cases} k & , \quad n = 1 \text{ ise} \\ k + 1 & , \quad n \geq 2 \text{ ise} \end{cases}$$

olur.

*Kanıt.* Eğer  $n = 1$  ise,  $S(1, k) \cong K_k$  ve  $\text{col}_g(K_k) = k$  olduğundan kanıt açıktır. Burada  $K_k$ ,  $k$  köşe noktalı tam çizgeyi göstermektedir.

Eğer  $n \geq 2$  ise,  $S(n, k)$  Sierpinski çizgesinin verilen tanımından dolayı  $k$  tane derecesi  $k - 1$  olan ve  $k(k^{n-1} - 1)$  tane de derecesi  $k$  olan köşe noktası vardır. Alice nasıl bir seçim yaparsa yapsın, Bob en fazla  $k$  hamle yaparak (her bir hamlesinde derecesi  $k - 1$  olan noktaları seçerek) en son seçilen noktanın derecesinin  $k$  olmasını sağlar. Bu nedenle,  $n \geq 2$  iken  $\text{col}_g(S(n, k)) = k + 1$  elde edilir.

Özel olarak, her  $n$  pozitif tamsayısı için  $k = 1$  olduğunda,  $S(n, k)$  Sierpinski çizgesi tek köşe noktasından oluşacağından,  $\text{col}_g(S(n, k)) = 1$  olduğu açıktır.  $\square$

Aşağıdaki teorem, pozitif  $n$  tamsayısı için  $S(n, 3)$  Sierpinski çizgelerinin oyun kromatik sayısının değerini vermektedir.

**Teorem 4.3** ([1]).  $n \geq 1$  olmak üzere,

$$\chi_g(S(n, 3)) = \begin{cases} 3 & , \quad n = 1 \text{ ise} \\ 4 & , \quad n \geq 2 \text{ ise} \end{cases}$$

olur.

*Kanıt.* Eğer  $n = 1$  ise,  $S(1, 3) \cong K_3$  olduğundan  $\chi_g(K_3) = 3$  elde edilir. Diğer taraftan,  $n \geq 2$  iken (2.2) eşitsizliğinden ve Teorem 4.2 yardımıyla

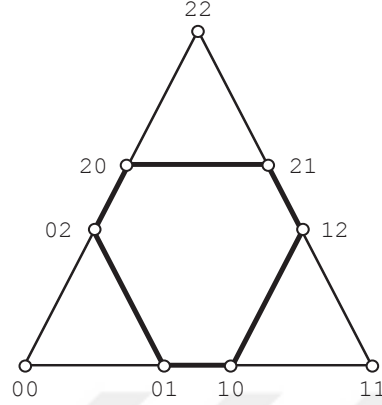
$$\chi_g(S(n, 3)) \leq 4 \tag{4.5}$$

olur.

Şimdi de  $n = 2$  iken  $S(n, 3)$  Sierpinski çizgesinin oyun kromatik sayısının 4 olduğunu gösterelim. Eğer Bob'a 3 renk ile bir kazanma stratejisi verilirse,  $S(2, 3)$

Sierpinski çizgesinin oyun kromatik sayısının alttan 4 ile sınırlı olduğu elde edilir. Böylece (4.5) eşitsizliği yardımıyla istenen sonuç elde edilmiş olur.

Alice'in ilk hamlesi için iki durum söz konusudur:



Şekil 4.43.  $S(2,3)$  Sierpinski çizgesi ve bu çizgenin  $C_6$  alt çizgesi

**1. Durum:** Alice, ilk hamlesinde  $C_6$  alt çizgesi üzerinde (bkz. Şekil 4.43) herhangi bir köşe noktasını 1. renk ile boyasın. Burada  $C_6$  çizgesi ile uzunluğu 6 birim olan döngü çizge ifade edilmektedir. Genelliği bozmaksızın Alice'in ilk hamlesinde 01 köşe noktasını boyadığını kabul edelim. Bu durumda Bob, Alice'in boyadığı köşe noktasından 2 birim uzaklıkta ve  $C_6$  alt çizgesi üzerindeki bir köşe noktasını 2. renk ile boyar. Yine genelliği bozmaksızın Bob'un 12 köşe noktasını 2. renk ile boyadığını kabul edelim. Bu durumda 10 noktasının komşu iki noktası iki farklı renk ile boyandığından, 10 noktası bir kritik nokta olur. Artık Alice ikinci hamlesinde ya bu kritik 10 noktasını ya da onun boyanmamış komşusu olan 11 noktasını boyamak zorundadır. Alice bu köşe noktalarından hangisini boyarsa boyasın, Bob, ikinci hamlesinde ilk boyadığı köşe noktasından iki birim uzaklıkta ve  $C_6$  alt çizgesi üzerindeki bir noktayı, örneğin 20 köşe noktasını 3. renk ile boyar. Bu durumda 02 ve 21 köşe noktalarının komşu iki noktası iki farklı renk ile boyandığından, bu köşe noktaları kritik noktalar olur. Alice, aynı anda bu iki kritik noktayı savunamayacağı için Bob, 3 renk ile oyunu kazanır ve böylece

$$4 \leq \chi_g(S(2,3))$$

elde edilir.

**2. Durum:** Alice, ilk hamlesinde  $C_6$  alt çizgesi üzerinde olmayan bir noktayı 1. renk ile boyasın. Yine genelliği bozmaksızın Alice'in 22 köşe noktasını boyadığını kabul edelim. Bu durumda Bob ilk hamlesinde geriye kalan ve derecesi 2 olan noktalardan birini 2. renk ile boyar. Genelliği bozmaksızın Bob'un da 00 noktasını 2. renk ile

**Tablo 4.1.** Alice'in bazı ikinci hamleleri için Bob'un verdiği cevaplar

Alice'in ikinci hamlesi	Bob'un Alice'in hamlesine cevabı	Oluşan durum
21 noktasını 2. renkle boyar	02 noktasını 3. renkle boyar	20 için 4. renk gerekir
21 noktasını 3. renkle boyar	10 noktasını 1. renkle boyar	12 ve 01 kritik noktalar
20 noktasını 2. renkle boyar	12 noktasını 3. renkle boyar	21 için 4. renk gerekir
20 noktasını 3. renkle boyar	12 noktasını 2. renkle boyar	21 için 4. renk gerekir
02 noktasını 1. renkle boyar	10 noktasını 3. renkle boyar	01 için 4. renk gerekir
02 noktasını 3. renkle boyar	10 noktasını 1. renkle boyar	01 için 4. renk gerekir
01 noktasını 1. renkle boyar	20 noktasını 3. renkle boyar	02 için 4. renk gerekir
01 noktasını 3. renkle boyar	12 noktasını 2. renkle boyar	10 ve 21 kritik noktalar
10 noktasını 1. renkle boyar	02 noktasını 3. renkle boyar	01 için 4. renk gerekir
10 noktasını 3. renkle boyar	02 noktasını 1. renkle boyar	01 için 4. renk gerekir
11 noktasını 1. renkle boyar	10 noktasını 3. renkle boyar	01 ve 12 kritik noktalar
11 noktasını 2. renkle boyar	12 noktasını 3. renkle boyar	21 ve 10 kritik noktalar
11 noktasını 3. renkle boyar	12 noktasını 2. renkle boyar	21 ve 10 kritik noktalar
12 noktasını 2. renkle boyar	20 noktasını 3. renkle boyar	21 için 4. renk gerekir
12 noktasını 3. renkle boyar	20 noktasını 2. renkle boyar	21 için 4. renk gerekir

**Tablo 4.2.** Alice'in bazı üçüncü hamleleri için Bob'un verdiği cevaplar

Alice'in üçüncü hamlesi	Bob'un Alice'in hamlesine cevabı	Oluşan durum
02 noktasını 3. renkle boyar	21 noktasını 2. renkle boyar	20 için 4. renk gerekir
20 noktasını 2. renkle boyar	12 noktasını 3. renkle boyar	21 için 4. renk gerekir
21 noktasını 3. renkle boyar	11 noktasını 1. renkle boyar	12 için 4. renk gerekir

boyadığını kabul edelim. Buna göre Alice'in Tablo 4.1'de verilen ikinci hamleleri için Bob'un verdiği cevaplar sıralanmıştır. Bob'un verdiği cevaba göre ya Alice'in aynı anda savunamayacağı iki kritik nokta oluşmakta ya da 4. rengin gerekeceği noktalar ortaya çıkmaktadır.

Eğer Alice ikinci hamlesinde 10 köşe noktasını 2. renk ile boyarsa, Bob 01 noktasını 1. renk ile boyar. Bu durumda 02 köşe noktası kritik nokta olur. Bu noktayı savunmak için Alice'in 3. hamlesi için üç durum söz konusudur. Bu durumlar ve Bob'un bunlara cevapları Tablo 4.2'de verilmiştir. Tüm durumlarda 4. rengin gerektiği bir köşe noktası ortaya çıkmaktadır.

Eğer Alice ikinci hamlesinde 12 köşe noktasını 1. renkle boyarsa, Bob, 21 noktasını 2. renk ile boyar. Bu durumda 20 köşe noktası kritik nokta olur. Bu

**Tablo 4.3.** Alice'in bazı üçüncü hamleleri için Bob'un verdiği cevaplar

Alice'in üçüncü hamlesi	Bob'un Alice'in hamlesine cevabı	Oluşan durum
20 noktasını 3. renkle boyar	01 noktasını 1. renkle boyar	02 için 4. renk gerekir
02 noktasını 1. renkle boyar	10 noktasını 3. renkle boyar	01 için 4. renk gerekir
01 noktasını 3. renkle boyar	11 noktasını 2. renkle boyar	10 için 4. renk gerekir

noktayı savunmak için Alice'in 3. hamlesi için yine üç durum söz konusudur. Bu durumlar ve Bob'un bunlara cevapları Tablo 4.3'de verilmiştir. Bob'un bu cevaplarına göre 4. rengin gerektiği bir nokta ortaya çıkmaktadır.

Böylece Alice boyamaya  $C_6$  alt çizgesi üzerinde olmayan bir noktadan başladığında her zaman Bob kazanır. Buradan

$$4 \leq \chi_g(S(n,3))$$

elde edilir. O halde (4.5) eşitsizliğinden  $\chi_g(S(n,3)) = 4$  olur ve ispat tamamlanır.

□

## KAYNAKÇA

- [1] U. Akcan, E. Akyar, and H. Akyar. Game chromatic number and game coloring number of sierpinski graphs. *Anadolu University Journal of Science and Technology-B Theoretical Sciences*, 4(2):91–98, 2016.
- [2] U. Akcan, E. Akyar, and H. Akyar. Game chromatic number of  $W_n \square P_2$ . *Journal of Science and Arts*, 34(1):5–12, 2016.
- [3] E. Akyar. *Çizge Kuramına Giriş*. Seçkin Yayıncılık, Ankara, 2021.
- [4] R. Alagammai and V. Vijayalakshmi. Game chromatic number of lexicographic product graphs. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, 12(2):216–220, 2015.
- [5] Alagammai R and V Vijayalakshmi. Game chromatic number of direct product of some families of graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 53:355–362, 2016.
- [6] T. Bartnicki, B. Brešar, J. Grytczuk, M. Kovše, Z. Miechowicz, and I. Peterin. Game chromatic number of Cartesian product graphs. *Electron. J. Combin.*, 15(1):1–13, 2008.
- [7] H. L. Bodlaender. On the complexity of some coloring games. *Internat. J. Found. Comput. Sci.*, 2(2):133–147, 1991.
- [8] S. A. U. H. Bokhary, T. Iqbal, and U. Ali. Game chromatic number of Cartesian and corona product graphs. *Journal of Algebra Combinatorics Discrete Structures and Applications*, 5(3):129–136, 2018.
- [9] E. Costa, V. Lage Pessoa, R. Sampaio, and R. Soares. PSPACE-completeness of two graph coloring games. *Theoretical Computer Science*, 824-825:36–45, 2020.
- [10] C. Dunn, V. Larsen, K. Lindke, T. Retter, and D. Toci. The game chromatic number of trees and forests. *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science*, 17(2):31–48, 2015.
- [11] H. Enomoto, J. Fujisawa, and N. Matsumoto. Game chromatic number of strong product graphs. *Discrete Mathematics*, 346(1):113162, 2023.

- [12] U. Faigle, U. Kern, H. Kierstead, and W. T. Trotter. On the game chromatic number of some classes of graphs. *Ars Combin.*, 35:143–150, 1993.
- [13] A. Furtado, S. Dantas, C. de Figueiredo, and S. Gravier. On caterpillars of game chromatic number 4. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 346:461–472, 2019.
- [14] Martin Gardner. Mathematical games. *Scientific American*, 23:, 1981.
- [15] D.J. Guan and Xuding Zhu. Game chromatic number of outerplanar graphs. *Journal of Graph Theory*, 30(1):67–70, 1999.
- [16] A. M. Hinz, S. Klavzar, U. Milutinovic, and C. Petr. *The Tower of Hanoi - Myths and Maths*. Birkhäuser Basel, 2013.
- [17] H. A. Kierstead and W. T. Trotter. Planar graph coloring with an uncooperative partner. *Journal of Graph Theory*, 18(6):569–584, 1994.
- [18] H. A. Kierstead and Daqing Yang. Orderings on graphs and game coloring number. *Order*, 20(3):255–264, 2003.
- [19] N. Matsumoto. The difference between game chromatic number and chromatic number of graphs. *Information Processing Letters*, 151:105835, 2019.
- [20] I. Peterin. Game chromatic number of Cartesian product graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 29:353–357, 2007.
- [21] A. Raspaud and J. Wu. Game chromatic number of toroidal grids. *Inform. Process. Lett.*, 109(21-22):1183–1186, 2009.
- [22] G. Sabidussi. Graphs with given group and given graph-theoretical properties. *Canad. J. Math.*, 9:515–525, 1957.
- [23] Y. Sekiguchi. The game coloring number of planar graphs with a given girth. *Discrete Math.*, 330:11–16, 2014.
- [24] R. Shaheen, Z. Kanaya, and K. Alshehada. Game chromatic number of some regular graphs. *Open Journal of Discrete Mathematics*, 9:159–164, 2019.
- [25] C. Sia. The game chromatic number of some families of Cartesian product graphs. *AKCE Int. J. Graphs Comb.*, 6(2):315–327, 2009.
- [26] W. D. Wallis. *A beginner's guide to graph theory*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, second edition, 2007.

- [27] R. J. Wilson. *Introduction to graph theory*. Pearson, 2010. Fifth edition.
- [28] J. Wu and X. Zhu. Lower bounds for the game colouring number of partial  $k$ -trees and planar graphs. *Discrete Math.*, 308(12):2637–2642, 2008.
- [29] X. Zhu. The game coloring number of planar graphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, 75(2):245–258, 1999.
- [30] X. Zhu. Refined activation strategy for the marking game. *J. Combin. Theory Ser. B*, 98(1):1–18, 2008.



## EK: Sierpinski Çizgeleri İçin Bir Maple Prosedürü

```
with(StringTools);
with(GraphTheory);
GetEdges := proc(n::integer, k::integer)::set;
    local E, M, m, e, u, v, uu, vv, i, j, istr, jstr;
    if 0 < n then
        E := GetEdges(n - 1, k);
        M := {};
        for m to nops(E) do
            e := E[m];
            u := e[1];
            v := e[2];
            for i from 0 to k - 1 do
                istr := convert(i, string);
                uu := cat(istr, u);
                vv := cat(istr, v);
                M := {op(M), {uu, vv}};
            end do;
        end do;
        E := {op(M)};
        for i from 0 to k - 1 do
            for j from 0 to k - 1 do
                if i <> j then
                    istr := convert(i, string);
                    jstr := convert(j, string);
                    u := cat(istr, Repeat(jstr, n - 1));
                    v := cat(jstr, Repeat(istr, n - 1));
                    E := {op(E), {u, v}};
                end if;
            end do;
        end do;
    else
        E := {};
    end if;
    return E;
end proc;
```

```
end proc;
```

```
SierpinskiGraph := proc(n::integer, k::integer)::Graph;
```

```
  local V, E;
```

```
  V := Generate(n, Iota(convert(0, string) .. convert(k - 1, string)));
```

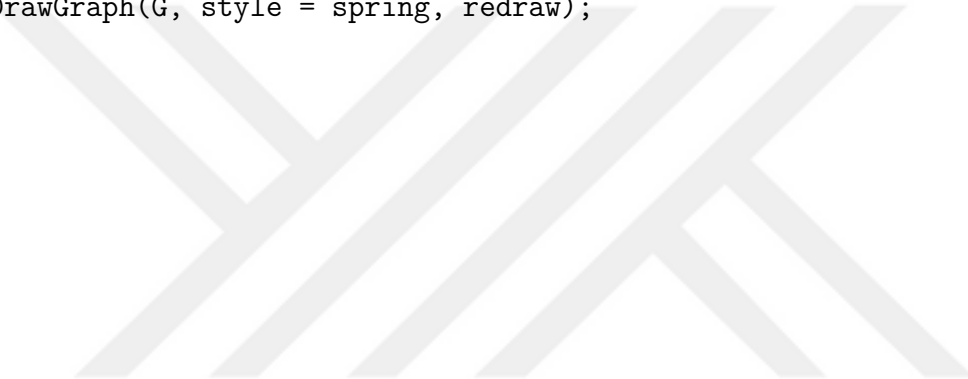
```
  E := GetEdges(n, k);
```

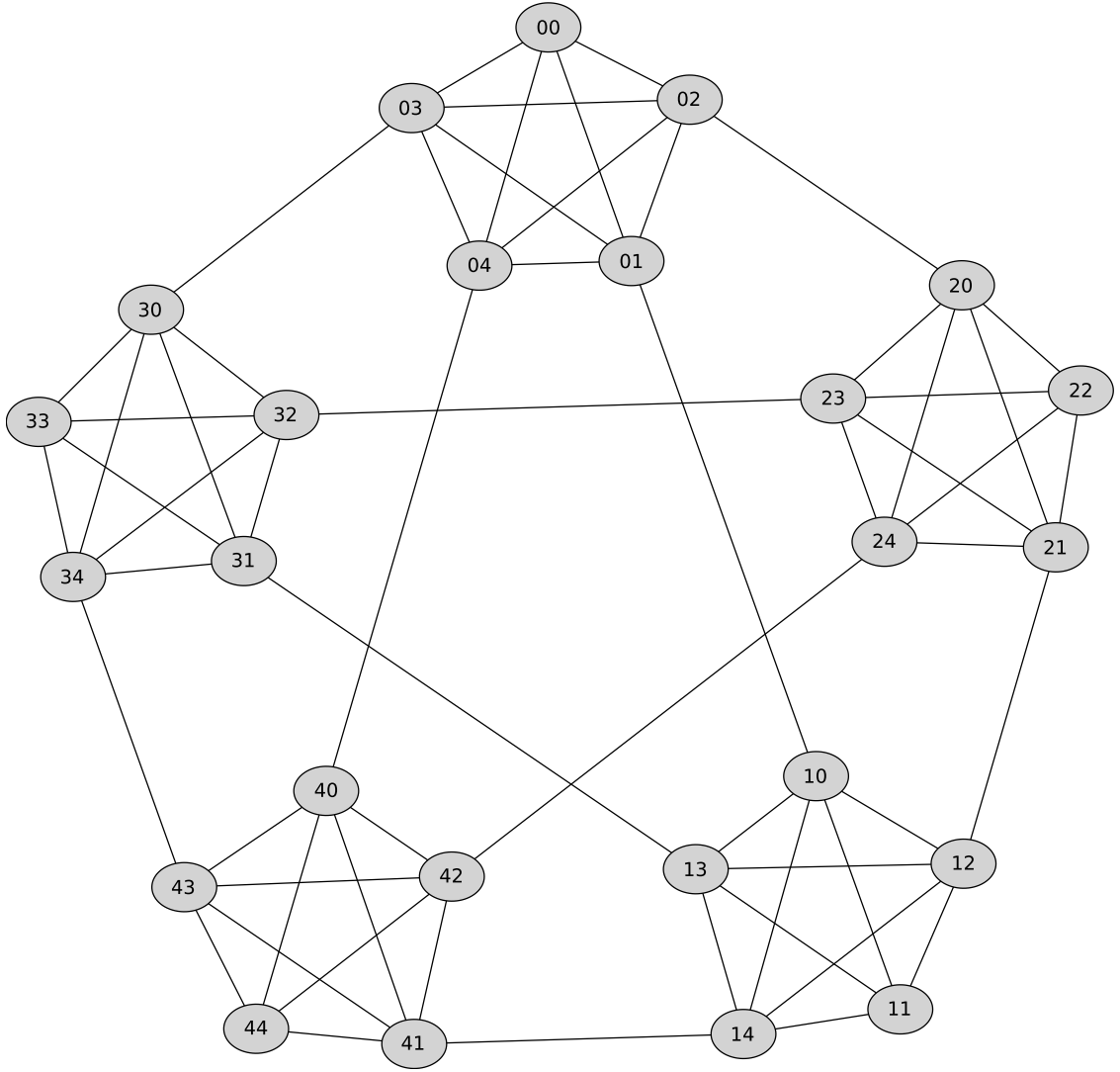
```
  return Graph(V, E);
```

```
end proc;
```

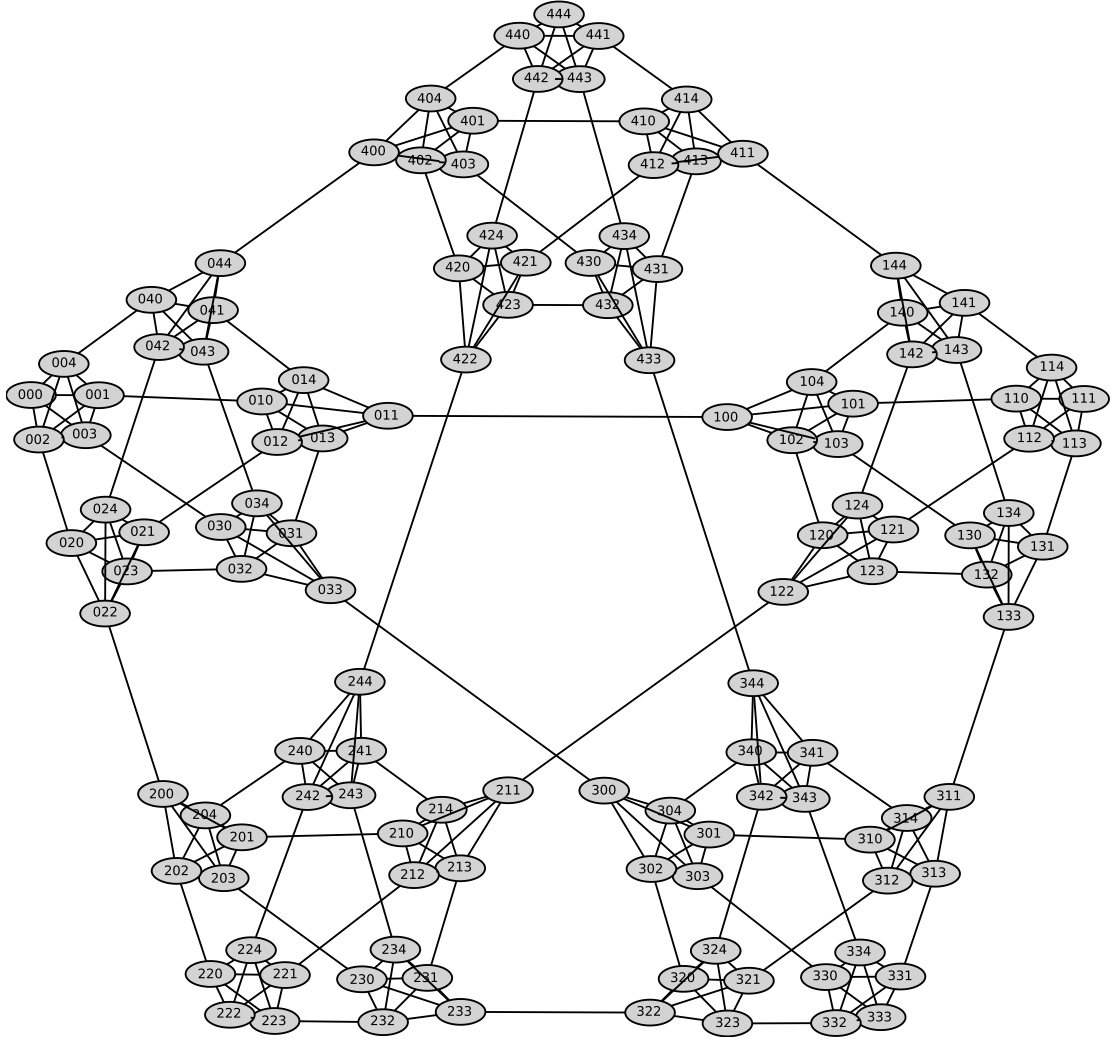
```
G := SierpinskiGraph(2, 5);
```

```
DrawGraph(G, style = spring, redraw);
```





Şekil 4.44. Verilen Maple prosedürü yardımıyla elde edilen  $S(2,5)$  Sierpinski çizgesi



Şekil 4.45. Verilen Maple prosedürü yardımıyla elde edilen  $S(3,5)$  Sierpinski çizgesi

## ÖZGEÇMİŞ

ORCID ID : 0009-0006-0639-8912  
Adı-Soyadı : Dilara TÜRKAY  
Yabancı Dil : İngilizce

### Eğitim ve Mesleki Geçmişi:

- Eskişehir Teknik Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü (2016-2020).
- Eskişehir Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı, Tezli Yüksek Lisans (2021-2025)

