

752679

T.C.
Niğde Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

SOBOLEV UZAYLARI

Murat TOPTAŞ

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

Haziran 2004

752679

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne;

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK ANABİLİM DALI' nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Mammad İ. MUSTAFAYEV, Niğde Üniversitesi

M. İ. My

Üye : Yrd. Doç. Dr. Hasan Köse, Selçuk Üniversitesi

H. Köse

Üye : Yrd. Doç. Dr. İsmet ALTINTAŞ, Niğde Üniversitesi

İ. Altıntaş

ONAY:

Bu tez 24.11/2004 tarihinde, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca belirlenmiş olan yukarıdaki jüri üyeleri tarafından uygun görülmüş ve Enstitü yönetim Kurulu' nun kararıyla kabul edilmiştir.

24.11/2004

Aydın Topçu

Doç. Dr. Aydın TOPÇU

Enstitü Müdürü

ÖZET

SOBOLEV UZAYLARI

TOPTAŞ, Murat

Niğde Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

Haziran 2004, 44 sayfa

Bu çalışmada önce Sobolev uzayları ile ilgili temel kavram ve bilgiler verildi. Sobolev uzaylarının genel tanımı, çeşitleri ve diğer uzaylarla olan bağlantıları incelendi. Özellikle Sobolev uzaylarına bağlı olan genelleştirilmiş türev anlamı verildi. Sobolev uzaylarının bir uygulaması olarak eliptik tipli, örneğin, Laplace denklemlerinin varlık ve teklik teoremi Riesz teoreminin uygulanmasıyla ispatlandı. Son olarak, Adi türevli diferansiyel denklemlerin Sobolev uzaylarındaki zayıf (genelleşmiş) çözümleri araştırıldı.

SUMMARY

SOBOLEV SPACES

TOPTAŞ,Murat

**Niğde University
Graduate School of Naturel Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

June 2004, 44 pages

In this study, firstly, main concepts and properties which will be used while forming Sobolev spaces were given.

Main structures, assortments of Sobolev spaces and their relationships with other spaces were examined.

Than existence and uniqueness theorems of elliptic and Laplace equations which is application of Sobolev spaces, here examined with Riesz lemmas.

Finally, generalized solutions in Sobolev spaces of common derivative differential equations here reserthead.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmada bana her türlü kolaylığı sağlayan, özveri ile desteğini esirgemeyen Niğde Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi öğretim üyesi, danışmanım ve değerli hocam Prof.Dr. Mammad MUSTAFAYEV'e, Matematik Bölümü Başkanı, değerli hocam Yrd.Doç.Dr. İsmet ALTINTAŞ'a ve bütün Matematik Bölümü öğretim üyelerine ve elemanlarına; Maddi, manevi her zaman yanımda olan, hayat kaynağım aileme ve tüm arkadaşlarıma teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	iii
ABSTRACT.....	iv
TEŞEKKÜR.....	v
İÇİNDEKİLER DİZİNİ.....	vi
BÖLÜM I. GİRİŞ.....	1
BÖLÜM II. TEMEL KAVRAMLAR.....	2
2.1. Lineer Uzaylar.....	2
2.2. Normlu Uzaylar.....	3
2.3. Skaler Çarpımlı Uzaylar.....	5
2.3.1. Öklid Uzayı.....	5
2.3.2. Üniter Uzay.....	5
2.4. Banach Uzayları.....	6
2.4.1. Fundamental Diziler.....	6
2.4.2. Banach Uzayları.....	6
2.4.3. $C(\overline{G})$ Banach Uzayları.....	7
2.4.4. $C^k(\overline{G})$, $k \geq 1$ Banach Uzayları.....	8
2.5. Hilbert Uzayları.....	8
2.6. Normlu ve Skaler Çarpımlı Uzayların Tamlaştırılması.....	9
2.6.1. Normlu Uzayların Tamlaştırılması.....	9
2.6.2. Skaler Çarpımlı Uzayların Tamlaştırılması.....	11
2.6.3. $L_p(G)$, $p \geq 1$ Lebesgue Uzayı.....	12
2.7. Normlu Uzayların ve Banach Uzaylarının İzomorfizmi, İzometrisi ve Yatırılması.....	13
2.8. Hahn-Banach Teoremi ve Sonuçları.....	14

BÖLÜM III. SOBOLEV UZAYLARI.....	16
3.1. Sobolev Uzayının Genel Tanımı.....	16
3.2. $H^1(a,b)$ Sobolev Uzayı ve $H^1(a,b)$ Uzayında Genelleştirilmiş Türev.....	16
3.3 Genelleştirilmiş Türevin Başka Bir Tanımı.....	18
3.4. $H^1(a,b)$ Uzayının $C_{[a,b]}$ Uzayına Yatırılma Teoremi.....	20
3.5. $H^1(G)$ ve $H^0_1(G)$ Sobolev Uzayları ve Friedrichs Teoremi.....	21
 BÖLÜM IV. ELİPTİK TİP DENKLEMLERİN GENELLEŞTİRİLMİŞ ÇÖZÜMÜNÜN VARLIK VE TEKLİK TEOREMİ.....	 26
4.1. Riesz Teoreminin Bir Sonucu.....	26
4.2. Laplace Denkleminin Genelleşmiş Çözümünün Varlık ve Teklik Teoremi.....	27
 BÖLÜM V. ADI TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN GENELLEŞTİRİLMİŞ ÇÖZÜMÜ ÜZERİNE.....	 30
5.1. Klâsik Çözüm Kavramının Genelleştirilmesi ve Sobolev Uzayları.....	30
 SONUÇ.....	 38
 KAYNAKLAR.....	 39

BÖLÜM I

GİRİŞ

Sobolev uzayları ilk defa Akademik B. F. Sobolev tarafından genelde matematiksel fizik problemlerinin çözülmesini kolaylaştırmak için ortaya çıkarılmıştır. Burada esasen genelleşmiş türev anlayışı ile kısmî türevli diferansiyel denklemlerin genelleşmiş çözüm anlamları verilmiştir.

Sobolev uzayları ve onun bir çok uygulamaları literatürde geniş bir biçimde incelenmiştir. Bu tezde Sobolev uzaylarının tanımı, esas özellikleri (yatırılma teoremini), Sobolev uzayı ile sıkı bağlı olan genelleştirilmiş türev anlamını vb. özelliklerini inceledik. Uygulaması olarak eliptik tip denklemlerin,örneğin, Laplace denkleminin varlık ve teklik teoremini verdik.

Tez, sonuç bölümü hariç V bölümden oluşmaktadır.

Tezin II. bölümünde diğer bölümlerde kullanılacak fonksiyonel analizin temel kavramlarından bahsedildi. III. bölümde Sobolev uzayları tanıtıldı ve bazı özellikler verildi. IV. bölümde Sobolev uzaylarının bazı uygulamalarından bahsedildi. V. bölümde ise zayıf çözüm kavramı tanıtıldı.

BÖLÜM II

TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Lineer Uzaylar.

2.1.1. Tanım. $x, y, z, \dots$ elemanlarının E kümesinde iki cebirsel işlem, toplama ve skalerle çarpma işlemleri verilirse, yani,

- i. $\forall x, y \in E, x + y \in E$
- ii. $\forall x \in E, \forall \lambda \text{ skaleri için } \lambda x \in E$

olursa ve bu işlemler aşağıdaki özellikleri sağlarsa

- i. $x + y = y + x$
- ii. $(x + y) + z = x + (y + z)$
- iii. $\exists 0 \in E, \forall x \in E \text{ için } x + 0 = x$
- iv. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$
- v. $1.x = x, 0.x = 0$
- vi. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
- vii. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$

bu halde E kümesine lineer uzay denir. Burada kullanılan skaler sayılar λ, μ reel olduğunda, reel lineer uzay, kompleks olduğunda ise kompleks lineer uzay olarak adlandırılır.

$(-1).x = -x$ ile gösterilen $-x$ elemanına, x elemanının tersi denir. E lineer uzayında $x, y \in E$ olmak üzere $x - y$ farkı;

$$x - y = x + (-y)$$

şeklinde tanımlanır.

2.1.2. Örnek. Doğru, düzlem ve üç boyutlu uzayda tüm vektörlerin kümesi, vektörlerin paralelkenar kuralı ile toplanmasına ve skaler sayı ile çarpma işlemine göre lineer uzay oluşturur.

2.1.3. Örnek. $C_{[a,b]}$ uzayı $[a,b]$ aralığında tanımlanmış tüm sürekli fonksiyonların lineer uzayıdır. $x(t)$ ve $y(t)$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında sürekli olduğunda $x(t)+y(t)$ ve $\lambda x(t)$ de sürekli olur.

2.1.4. Örnek. $C_{[a,b]}^k$ uzayı $[a,b]$ aralığında tanımlanmış k mertebeye kadar (k -nıncı mertebe dahil) sürekli diferansiyellenebilen fonksiyonların lineer uzayıdır. $x(t), y(t) \in C_{[a,b]}^k$ olduğunda $x(t)+y(t) \in C_{[a,b]}^k$ ve $\lambda x(t) \in C_{[a,b]}^k$ olur.

2.2. Normlu Uzaylar.

2.2.1. Tanım. E herhangi bir lineer uzay olsun. bu uzayda her bir x elemanına karşılık negatif olmayan ve bu elemanın normu olarak adlandırılan $\|x\| > 0$ sayısı karşılık tutulursa ve bu norm her bir $x, y \in E$ ve her bir λ sayısı için aşağıdaki özellikleri sağlarsa E lineer uzayına normlu uzay denir.

- i. $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- ii. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- iii. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Normun iii özelliğine üçgen eşitsizliği denir ve bu eşitsizlikten ters üçgen eşitsizliği elde edilir

$$\| \|x\| - \|y\| \| \leq \|x - y\|$$

Norm yardımıyla, normlu uzaylarda keyfî iki eleman arasında uzaklığı yani metriği tanımlayabiliriz

$$\rho(x, y) = \|x - y\|$$

Herhangi bir X uzayında

- i. $\rho(x, y) \geq 0, \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- ii. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
- iii. $\forall x, y, z \text{ için } \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

aksiyomlarını sağlayan $\rho(x, y)$ fonksiyonunu tanımlamak mümkünse X uzayına metrik uzay denir. Buradan rahatlıkla görülebilir ki, her normlu uzay, aynı zamanda metrik uzaydır. Yani metrik uzay, normlu uzayın genelleşmesidir.

Şimdi normlu uzaylarda çok önemi bulunan aşağıdaki kümeleri tanımlayalım.

$$S_r(x_0) = \{x \in E : \|x - x_0\| < r\}$$

kümesine x_0 noktasında, yarıçapı r olan açık yuvar,

$$\overline{S}_r(x_0) = \{x \in E : \|x - x_0\| \leq r\}$$

kümesine kapalı yuvar,

$$\sigma_r(x_0) = \{x \in E : \|x - x_0\| = r\}$$

kümesine ise küre denir. $S_r(x_0)$ kümesine x_0 noktasının komşuluğu denir.

2.2.2. Örnek. $C_{[a,b]}$, $[a,b]$ aralığında tanımlanmış sürekli fonksiyonların lineer uzayıdır. Bu uzayda norm

$$\|x\| = \max_{[a,b]} |x(t)|$$

formülü ile tanımlanır.

2.2.3. Örnek. $C_{[a,b]}^k$ uzayında norm

$$\|x\| = \sum_{i=0}^k \max_{[a,b]} |x^{(i)}(t)|$$

formülü ile tanımlanır.

2.2.4. Örnek. $[a,b]$ aralığında tanımlanmış sürekli fonksiyonların lineer uzayında normu aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

Bu normlu uzayı $\tilde{L}_{p[a,b]}$, $p \geq 1$ ile gösteririz. Burada integral, Riemann integralidir.

Herhangi bir E lineer uzayında iki farklı $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ normları, $\exists \alpha, \beta > 0$ sayıları ve $\forall x \in E$ için

$$\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1$$

eşitsizliği sağlanırsa $\|\cdot\|_1$ normu, $\|\cdot\|_2$ normuna eşdeğerdir denir ve $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ ile gösterilir.

Buradan ispatlanır ki, her sonlu boyutlu lineer uzayda verilmiş tüm normlar eşdeğerdir.

2.3. Skaler Çarpımlı Uzaylar.

2.3.1. Öklid Uzayı.

2.3.1.1. Tanım. E herhangi bir reel lineer uzay olsun. Eğer bu uzayın her bir $x, y \in E$ çiftine karşı bu elemanların skaler çarpımı (x, y) reel sayısı karşılık tutulursa ve bu skaler çarpım aşağıdaki aksiyomları sağlarsa, o zaman E uzayına Öklid uzayı denir.

- i. $(x, x) \geq 0, (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- ii. $(x, y) = (y, x)$
- iii. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y), \forall \lambda$ için
- iv. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$

Öklid uzayında norm

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} \quad (1)$$

formülü ile tanımlanır. Böylece her bir Öklid uzayı, aynı zamanda normlu uzaydır. Bu uzayda üçgen eşitsizliğini, aşağıdaki Cauchy – Schwartz eşitsizliği yardımı ile bulunur.

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$$

2.3.2. Üniter Uzay.

2.3.2.1. Tanım. U herhangi bir kompleks lineer uzay olsun. Eğer bu uzayın her bir $x, y \in U$ çiftine karşı bu elemanların skaler çarpımı (x, y) kompleks sayısı karşılık tutulursa ve bu skaler çarpım aşağıdaki aksiyomları sağlarsa, o zaman U uzayına Üniter uzay denir:

- i. $(x, x) \geq 0, (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- ii. $(x, y) = \overline{(y, x)}$
- iii. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$
- iv. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$

Üniter uzayda norm;

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

formülü ile tanımlanır. Böylece her bir Üniter uzay, aynı zamanda normlu uzaydır. Bu uzayda üçgen eşitsizliği aşağıdaki Cauchy – Schwartz eşitsizliği yardımı ile bulunur.

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$$

2.3.2.2. Örnek. $[a,b]$ aralığında tanımlı kompleks değerli sürekli fonksiyonların uzayında skaler çarpım

$$(x, y) = \int_a^b x(t) \bar{y}(t) dt$$

şeklindeir. Bu uzayı $\tilde{L}_{2[a,b]}$ ile gösteririz. Buradaki integral, Riemann integralidir.

2.4. Banach Uzayları.

2.4.1. Fundamental Diziler.

2.4.1.1. Tanım. X normlu uzay, $\{x_n\} \subset X$ herhangi bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists N$ vardır ki, $\forall n > N$, $\forall p = 1, 2, \dots$ sayıları için

$$\|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon$$

sağlanırsa $\{x_n\}$ dizisine fundamental dizi veya Cauchy dizisi denir. Fundamental dizinin özellikleri aşağıdaki gibidir

- i. Her bir fundamental dizi sınırlıdır.
- ii. $\{x_n\}$ dizisi fundamental ise $\forall \lambda$ için $\{\lambda x_n\}$ dizisi de fundamentaldir.
- iii. $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ dizileri fundamental ise $\{x_n + y_n\}$ dizisi de fundamentaldir.
- iv. $\{x_n\}$ dizisi fundamental ise ve bunun bir alt $\{x_{n_k}\}$ dizisi x elemanına

yakınsak ise $\{x_n\}$ dizisi de x elemanına yakınsaktır.

- v. Her bir yakınsak dizi fundamentaldir. Ancak tersi her zaman doğru değildir.

2.4.2. Banach Uzayları.

2.4.2.1. Tanım. Normlu uzayda her fundamental dizi yakınsak olursa bu normlu uzaya tam normlu uzay denir. Tam normlu uzaya Banach uzayı denir.

2.4.2.2. Örnek. E reel sayılar kümesi Banach uzayıdır. Burada her fundamental dizi yakınsaktır. Çünkü burada Cauchy kriteri sağlanır. Yani her bir reel sayı dizisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart bu dizinin Cauchy dizisi olmasıdır.

2.4.2.3. Örnek. E^m Öklid uzayı Banach uzayıdır. Çünkü bu uzayda dizilerin yakınsaklığı için Cauchy kriteri sağlanır.

2.4.2.4. Örnek. $C_{[a,b]}$ uzayı Banach uzayıdır. Çünkü bu uzaydan alınmış $\{x_n\} \subset C_{[a,b]}$ fonksiyonel dizisinin düzgün yakınsak olması için Cauchy kriterini sağlaması gerek ve yeterlidir. Yani, $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists N$ vardır ki $\forall n > N$, $\forall p = 1, 2, \dots$ sayıları için $\|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon \Rightarrow \forall t \in [a, b]$ ve $|x_n(t) - x_0(t)| < \varepsilon$ şartlarının sağlanmasıdır. Daha açık olarak, $[a, b]$ aralığında sürekli $x_n(t)$ fonksiyonları düzgün olarak $x(t)$ fonksiyonuna yakınsak olduğunda, $x(t)$ fonksiyonu da $[a, b]$ aralığında sürekli olur.

2.4.3. $C(\overline{G})$ Banach Uzayları.

2.4.3.1. Tanım. E^m Öklid uzayında sınırlı, bağlantılı $G \subset E^m$ kümesini ele alalım. Bağlantılı kümenin keyfi iki noktasını sürekli $\mathcal{L}$ eğrisi ile birleştirebiliriz. Yani $\mathcal{L} \subset G$ dir. Başka deyişle $[0, 1]$ aralığında tanımlı $\exists x(t)$ fonksiyonu vardır ki, $\forall t \in [0, 1]$ için $x(0) = x_0$, $x(1) = x_1$, $x(t) \in G$. Açık küme, keyfi noktasının bir komşuluğu ile bu kümeye dahildir. Böylece G kümesi sınırlı bölgedir. G kümesinin kapanışını $\overline{G}$ ile gösterelim. $\overline{G}$ de tanımlanmış m -değişkenli tüm sürekli $u(x)$, $x = (x_1, \dots, x_m) \in \overline{G}$ fonksiyonlarının lineer uzayını $C(\overline{G})$ ile gösterelim. Bu uzayda norm

$$\|u\|_{C(\overline{G})} = \max_{x \in \overline{G}} |u(x)|$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzay, normlu uzaydır.

$C(\overline{G})$ normlu uzayı Banach uzayıdır. Çünkü $\{x_n\}$ sürekli fonksiyonlarının $\overline{G}$ de sürekli olmaları için Cauchy kriteri sağlanır.

2.4.3.2 Örnek. $\overline{G}$ kümesinin küpleştirilebilen olduğunu varsayalım. Yani $\int_{\overline{G}} dx < +\infty$ olsun.

O zaman $C(\overline{G})$ lineer uzayında normu

$$\|u\|_p = \left(\int_{\overline{G}} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

formülü ile tanımlayalım. Buradaki integral, Riemann integralidir. Bu norm, norm özelliklerini sağlar. Buradaki $C(\overline{G})$ ve $\tilde{L}_p(\overline{G})$ uzayları uygun olarak $C_{[a,b]}$ ve $\tilde{L}_{p[a,b]}$, $p \geq 1$ uzaylarının çok değişkenli fonksiyonlar halinde genelleştirilmesidir. $\tilde{L}_{p[a,b]}$, $\tilde{L}_p(\overline{G})$ uzayları, tam uzay değildir.

2.4.4. $C^k(\overline{G})$, $k \geq 1$ Banach Uzayları.

2.4.4.1. Tanım. $x = (x_1, \dots, x_m) \in E^m$ olsun. Aşağıdaki tanımlamaları yapalım.

$\alpha_s \geq 0$ olan doğal sayılar için $s = 1, 2, \dots, m$ olsun.

$$\alpha_s = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$$

vektörüne multiindis denir ve bu multiindisin uzunluğu

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m$$

ile gösterilir.

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad D_i^{\alpha_i} = \frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial x_i^{\alpha_i}}$$

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdot D_2^{\alpha_2} \dots D_m^{\alpha_m} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}$$

G , E^m de sınırlı bölge, $\overline{G}$ ise G nin kapanışı olsun. $u(x)$, $\overline{G}$ de tanımlanmış skaler değerli, m -değişkenli, k kez diferansiyellenebilen fonksiyondur.

$u(x)$ fonksiyonlarının lineer uzayında normu

$$\|u\|_{C^k(G)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\overline{G})} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \max_{x \in \overline{G}} |D^\alpha u|$$

şeklinde yazarız. $C^k(\overline{G})$, $k \geq 1$ uzayı Banach uzayıdır. Dikkat edilmelidir ki: bu uzaylar $C_{[a,b]}^k$ uzayının diferansiyellenen çok değerli fonksiyonlara genelleştirilmesidir.

2.5. Hilbert Uzayları.

2.5.1. Tanım. Skaler çarpımlı uzay, skaler çarpımın doğurduğu norma göre tam olursa bu uzaya Hilbert uzayı denir.

2.5.2. Örnek. En basit Hilbert uzayı, E^m Öklid uzayıdır.

2.5.3. Teorem. (Hilbert Uzaylarında Lineer Fonksiyonellerin Genel Şekli Hakkında Riesz Teoremi). H kompleks veya reel Hilbert uzayı olsun. H uzayında tanımlanmış her bir keyfi f lineer sınırlı fonksiyoneline uygun öyle tek $y \in H$ elemanı vardır ki, tüm $x \in H$ için

$$\langle x, f \rangle = (x, y)$$

eşitliği sağlanır ve bununla birlikte

$$\|f\| = \|y\|$$

olur.

2.5.4. Sonuç. Riesz teoremi ile H ve H^* uzayları arasında karşılıklı bir-değerli eşitlik verebiliriz ki, bu eşitlik de norm sağlanır, yani izometriya verebiliriz. H Hilbert uzayı reel olduğunda bu eşitlik lineer olur. H kompleks olduğunda ise aşağıdaki anlamda yarı lineer olur.

$$f_1 \leftrightarrow y_1 \text{ ve } f_2 \leftrightarrow y_2 \text{ ise } \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 \leftrightarrow \bar{\beta}_1 y_1 + \bar{\beta}_2 y_2$$

Bu karşılıklı bir-değerli eşitliğe esasen $H^* = H$ olduğunu kabul ederiz. Bu anlamda H Hilbert uzayı kendi-kendisine eşleniktir.

2.6. Normlu ve Skaler Çarpımlı Uzayların Tamlaştırılması.

2.6.1. Normlu Uzayların Tamlaştırılması.

2.6.1.1. Teorem. Her bir normlu E uzayını bir $\hat{E}$ Banach uzayının her yerde yoğun lineer manifoldu olarak ele alabiliriz.

İspat. E normlu uzayında fundamental olan $\{x_n\}$ ve $\{x'_n\}$ diziler kümesini ele alalım. Ayrıca $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$ olsun. Şimdi bu fundamental diziler kümesinde eşlik bağıntısına göre sınıflandırma yapalım. Yani, $\{x_n\}$ fundamental dizisine eşdeğer olan tüm fundamental dizilerin sınıfını $\hat{x}$, $\{y_n\}$ fundamental dizisine eşdeğer olan tüm fundamental dizilerin sınıfını $\hat{y}$, ile gösterelim. Sonuçta fundamental dizilerin sınıfını elde etmiş oluruz. Bu sınıfların kümesini $\hat{E}$ ile gösterelim. $\{x_n\}$ dizisine $\hat{x}$ sınıfının temsilcisi denir.

Şimdi $\hat{E}$ de cebirsel yapı oluşturalım. $\forall \hat{x}, \hat{y} \in \hat{E}$ alalım ve $\{x_n\} \in \hat{x}$, $\hat{x}$ sınıfının temsilcisi, $\{y_n\} \in \hat{y}$, $\hat{y}$ sınıfının temsilcisi olsun. O zaman $\hat{x} + \hat{y}$ toplamı olarak, $\{x_n + y_n\}$ fundamental dizisinin dahil olduğu sınıfı alacağız. $\lambda \hat{x}$ olarak $\{\lambda x_n\}$ fundamental dizisinin dahil olduğu sınıfı alacağız. Dikkat edilmelidir ki, sınıfların bu toplamı ve skalerle çarpımı tanımları sınıflardan alınan temsilcilere bağlı değildir.

Böylece $\hat{E}$ sınıflar kümesinin lineer uzay olduğunu gösterdik. Şimdi $\hat{E}$ uzayında elemanın normunu tanımlayalım. $\forall \hat{x} \in \hat{E}$ ve $\{x_n\} \in \hat{x}$, $\hat{x}$ sınıfının temsilcisi olsun. bu durumda normu

$$\|\hat{x}\|_{\hat{E}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_E$$

formülü ile tanımlayalım. Bu eşitliğin doğruluğu ters üçgen eşitsizliği yardımıyla bulunur.

Sonuçta normlu $\hat{E}$ uzayını almış oluruz. Eğer, $\hat{E}$ normlu uzayının aşağıdaki şartları sağladığını gösterirsek teorem ispatlanmış olacaktır.

- i. E normlu uzayı, $\hat{E}$ normlu uzayında bir lineer manifolddur.
- ii. E lineer manifoldu, $\hat{E}$ normlu uzayında her yerde yoğundur.
- iii. $\hat{E}$ Banach uzayıdır.

İspat i. E uzayından $\forall x \in E$ alalım. Bu x elemanından stasionar dizi yapalım. Stasionar dizi yakınsak ve fundamentaldir. Stasionar dizinin dahil olduğu sınıfı X ile gösterelim. O zaman $x+y$ toplamı $\{x+y\}$ stasionar dizisinin dahil olduğu sınıftır. λx ise $\{\lambda x\}$ stasionar dizisinin dahil olduğu sınıftır. Böylece $\hat{E}$ uzayında stasionar dizilerin dahil oldukları sınıflar kümesi bir lineer manifold oluşturur. E normlu uzayını bu lineer manifoldla karşıturalım. Bu durumda x elemanın normu

$$\|x\|_{\hat{E}} = \|x\|_E$$

olur.

İspat ii. $\forall \hat{x} \in \hat{E}$ olsun ve $\{x_n\} \in \hat{x}$ temsilcisini alalım. $\{x_n\}$ dizisi E uzayında fundamental dizi olsun. n sabit, $n > N$ olsun ve x_n den stasionar dizi yapalım. Bu durumda $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \hat{x}_n$ olur. Dikkat edelim ki,

$$\|x_n - \hat{x}\|_{\hat{E}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\|_E$$

olur. m ye göre limit alırsak

$$\|x_n - \hat{x}\|_{\hat{E}} \leq \varepsilon$$

bulunur. Böylece E lineer manifoldu, $\hat{E}$ uzayında her yerde yoğundur.

İspat iii. $\hat{x}_n \in \hat{E}$ ve E, $\hat{E}$ de her yerde yoğun olduğundan $\varepsilon = 1/n$ alırsak $\exists x_n \in E$ bulunabilir ki,

$$\|\hat{x}_n - x_n\|_{\hat{E}} < 1/n \quad (1)$$

olur. Bu şekilde seçtiğimiz $\{x_n\}$ dizisinin fundamental olduğunu gösterelim

$$\|x_n - x_m\|_{\hat{E}} \leq \|x_n - \hat{x}_n\|_{\hat{E}} + \|\hat{x}_n - \hat{x}_m\|_{\hat{E}} + \|\hat{x}_m - x_m\|_{\hat{E}} \leq \frac{1}{n} + \|\hat{x}_n - \hat{x}_m\|_{\hat{E}} + \frac{1}{m} \rightarrow 0, \quad (n, m \rightarrow \infty)$$

böylece $\{x_n\}$ dizisi fundamentaldir. Bu nedenle $\exists \hat{x}$ sınıfı vardır ki $\{x_n\} \in \hat{x}$ olur. Şimdi $\{x_n\}$ dizisinin, $\hat{x}$ ya yakınsak olduğunu gösterelim

$$\|\hat{x}_n - \hat{x}\|_{\hat{E}} \leq \|\hat{x}_n - x_n\|_{\hat{E}} + \|x_n - \hat{x}\|_{\hat{E}} \leq \frac{1}{n} + \|x_n - \hat{x}\|_{\hat{E}} \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty)$$

Burada

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - \hat{x}\| = 0$$

olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{x}_n - \hat{x}\| = 0$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanır.

2.6.2. Skaler Çarpımlı Uzayların Tamlaştırılması.

2.6.2.1. Tanım. E skaler çarpımlı bir uzay olsun. Skaler çarpımlı uzay,

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

normu ile normlu bir uzaydır. Normlu uzayların tamlaştırılmasını bir önceki teoremden elde edilmişti.

Normlu uzay tamlaştırdıktan sonra elde edilen $\hat{E}$ uzayına, E nin tamlaştırılması denir. Böylece skaler çarpımlı uzayı, skaler çarpımın doğurduğu norma göre tamlaştırdıktan sonra bir $\hat{E}$ Banach uzayı elde ederiz. Bu Banach uzayında skaler çarpımı tanımlayalım. $\forall \hat{x}, \hat{y} \in E, \forall \{x_n\} \in \hat{x}, \{y_n\} \in \hat{y}$ temsilcileri için

$$(\hat{x}, \hat{y})_{\hat{E}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n)_E$$

olur. Buradan

$$(\hat{x}, \hat{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, x_n)_E = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_E^2 = \|\hat{x}\|^2 \Rightarrow \|\hat{x}\| = \sqrt{(\hat{x}, \hat{x})_E}$$

elde edilir. Böylece $\hat{E}$ Banach uzayındaki norm ile burada tanımlanmış skaler çarpımın doğurduğu norm çakışmış olur. Elde edilen normlu uzay, Hilbert uzayıdır.

2.6.3. $L_p(G)$, $p \geq 1$ Lebesgue Uzayı.

$L_p(G)$, $p \geq 1$ Lebesgue Uzayı, $\tilde{L}_p(\bar{G})$ uzayının burada verilmiş norma göre tamlaştırılması sonucu elde edilen uzaydır. Burada $\bar{G}$, E^m Öklid uzayının kapalı, sınırlı bölgesidir. $\tilde{L}_p(\bar{G})$ uzayının elemanları $u(x)$, $v(x)$, ..., $w(x)$, kapalı $\bar{G}$ bölgesinde sürekli fonksiyonlar olup, bu uzayda norm

$$\|u\| = \left(\int_{\bar{G}} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad p \geq 1 \quad (1)$$

formülü ile tanımlanır.

$\tilde{L}_p(\bar{G})$ uzayında sürekli $\{u_n(x)\}$ uzaylarının fundamental olması

$$\|u_n(x) - u_m(x)\|_{\tilde{L}_p(\bar{G})}^p = \int_{\bar{G}} |u_n(x) - u_m(x)|^p dx \rightarrow 0$$

demektir. Bu şartı sağlayan $\{u_n(x)\}$ sürekli fonksiyonlar dizisi, G bölgesinde p mertebeden ortalama fundamentaldir denir. Burada $\{u_n(x)\}$ ve $\{u_n^*(x)\}$ dizileri için

$$\|u_n(x) - u_n^*(x)\|_{\tilde{L}_p(\bar{G})}^p = \int_{\bar{G}} |u_n(x) - u_n^*(x)|^p dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty \text{ iken})$$

şartı sağlanırsa, bu diziler, G bölgesinde p mertebeden ortalama eşdeğerdir denir ve

$$\{u_n(x)\} \sim \{u_n^*(x)\}$$

ile gösterilir.

$\tilde{L}_p(\bar{G})$ uzayını (1) normuna göre tamlaştırılmasıyla elde edilen Banach uzayı $L_p(G)$ ile gösterilir ve Lebesgue uzayı denir. Böylece $L_p(G)$, $p \geq 0$ uzayının elemanları $\hat{u}(x)$, $\hat{v}(x)$, şeklinde sınıflardır. Tamlaştırma teorisine göre, $\tilde{L}_p(\bar{G})$, $L_p(G)$ uzayında her yerde yoğundur. Dikkat edilmelidir ki, tüm $L_p(G)$, $p \geq 1$ uzayları ayrılabilir uzaylardır. Çünkü

rasyonel katsayılı tüm polinomlar kümesi $\tilde{L}_p(\overline{G})$ uzayında her yerde yoğun sayılabilir alt kümedir ve $\tilde{L}_p(\overline{G})$ ise $L_p(G)$ uzayında her yerde yoğun olduğundan rasyonel katsayılı tüm polinomlar kümesi $L_p(G)$ uzayında ayrılabilir küme oluşturur.

Burada $L_p(G)$ Lebesgue uzaylarının en önemlisi olan $L_2(G)$ uzayını ele alalım. Bu uzay, $\tilde{L}_2(\overline{G})$ skaler çarpımlı uzayının tamlaştırılmasından elde edilen uzaydır. $u(x), v(x) \in L_2(G)$ olsun ve $\{u_n(x)\} \in u(x)$ ve $\{v_n(x)\} \in v(x)$ olsun. Tanıma göre

$$(u, v)_{L_2(G)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n, v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_G u_n(x) \overline{v_n(x)} dx$$

olur. Bu eşitliğin sağındaki integral m-katlı Riemann integralidir. Bu formüle göre

$$(u, v) = \int_G u(x) \overline{v(x)} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_G u_n(x) \overline{v_n(x)} dx \quad (2)$$

elde edilir. Eşitliğin sağındaki Riemann, solundaki Lebesgue integralidir. Özel durumda, $u(x)=1$ alırsak, yani $\{u\}$, stasioner dizisini içinde bulunduran sınıfı alırsak, o zaman (2) den $L_2(G)$ uzayının her bir elemanının Lebesgue integrali aşağıdaki gibi tanımlanır

$$\int_G u(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_G u_n(x) dx \quad (3)$$

2.7. Normlu Uzayların ve Banach Uzaylarının İzomorfizmi, İzometrisi ve Gömülme.

2.7.1. Tanım. X ve $\hat{X}$ normlu uzaylar olsun. Eğer tüm X uzayında tanımlı, değerleri tüm $\hat{X}$ uzayında olan öyle bir $J(X) = \hat{X}$ bire-bir lineer dönüşümü varsa X ve $\hat{X}$ lineer uzaylarının izomorfizmini doğurur ve $\exists \alpha, \beta > 0, \forall x \in X$ için

$$\alpha \|x\|_X \leq \|J(x)\|_{\hat{X}} \leq \beta \|x\|_X$$

olursa o zaman X ve $\hat{X}$ normlu uzayları izomorf normlu uzaylar olur. Özel halde $\forall x \in X$ için

$$\|x\|_X = \|J(x)\|_{\hat{X}}$$

eşitliği sağlanırsa o zaman X ve $\hat{X}$ uzayları izometriktir denir.

2.7.2. Örnek. Her bir m-boyutlu normlu uzay, E^m Öklid uzayına izomorftur. Buradan, her bir m-boyutlu normlu uzay birbirine izomorftur sonucunu elde ederiz.

2.7.3. Tanım. X ve $\hat{X}$ normlu uzaylar ve tüm X uzayında tanımlanmış, değerleri $\hat{X}$ uzayında olan $J:X \rightarrow \hat{X}$ dönüşümü verilsin. Eğer $\exists \beta > 0$ sayısı varsa ki, $\forall x \in X$ için

$$\|J(x)\|_{\hat{X}} \leq \beta \|x\|_X$$

eşitsizliği sağlanırsa X normlu uzayı $\hat{X}$ uzayına gömülme denir. Özel olarak $\forall x \in X$ için

$$\|J(x)\|_{\hat{X}} = \|x\|_X$$

eşitliği sağlanırsa X normlu uzayı, $\hat{X}$ normlu uzayına izometrik gömülmüştür denir.

2.7.4. Örnek. Her bir normlu E uzayı, tamlaştırılması olan $\hat{E}$ uzayına izometriktir ve her yerde yoğun olarak yatırılmıştır.

2.8. Hahn-Banach Teoremi ve Sonuçları.

2.8.1. Tanım. X herhangi bir reel normlu uzay olsun. R reel sayılar kümesi olmak üzere, her bir $f:X \rightarrow R$ operatörüne fonksiyonel denir.

2.8.2. Tanım. Bir f fonksiyonelinin tanım kümesi $D(f)$ lineer manifold oluştursa ve $\forall \alpha, \beta \in R$ sayıları için

$$\langle \alpha x + \beta y, f \rangle = \alpha \langle x, f \rangle + \beta \langle y, f \rangle$$

eşitliği sağlanırsa bu fonksiyonele lineer fonksiyonel denir ve $x \in X$ deki değeri $\langle x, f \rangle$ ile gösterilir.

2.8.3. Teorem. (Hahn-Banach Teoremi). X reel normlu uzay, f bu uzayda tanımlanmış lineer fonksiyonel olsun. Eğer $D(f) \in X$ ise o zaman tüm X uzayında tanımlanmış öyle bir $\tilde{f}$ lineer fonksiyoneli vardır ki, $\|\tilde{f}\| = \|f\|$ ve $\forall x \in D(f)$ için $\langle x, \tilde{f} \rangle = \langle x, f \rangle$ eşitliği doğrudur. Yani herhangi bir lineer manifoldda tanımlanmış lineer sınırlı fonksiyonel tüm uzaya genişletilebilir.

2.8.4. Sonuç. (Hahn-Banach Teoreminin Sonuçları). i. X normlu uzay ve $x \in X$ ve $x \neq 0$ herhangi bir eleman olsun. O zaman tüm X uzayında tanımlanmış öyle lineer sınırlı fonksiyonel vardır ki

$$\langle x, f \rangle = \|x\|, \quad \|f\| = 1$$

olur.

ii. X herhangi bir normlu lineer uzay, L bu uzaydan alınmış keyfi lineer manifold olsun.

$x_0 \notin L$ ve x_0 elemanından L lineer manifolduna kadar ki mesafe

$$d = \inf_{u \in L} \|x_0 - u\| > 0$$

olsun. O zaman tüm X uzayında tanımlanmış öyle lineer sınırlı f fonksiyoneli vardır ki

i. $\langle x, f \rangle = 0, \forall x \in L$

ii. $\langle x_0, f \rangle = 1$

iii. $\|f\| = \frac{1}{d}$

iii. X herhangi bir Banach uzayı olsun. Bu uzaydaki L lineer manifoldunun X uzayında her yerde yoğun olmaması için gerek ve yeter şart tüm X uzayında tanımlanmış öyle lineer sınırlı f fonksiyonelinin olmasıdır ki, $\forall x \in L$ için $\langle x, f \rangle = 0$ olsun.

iv. X herhangi bir normlu uzay, $x_1, x_2, \dots, x_n$ bu uzayda lineer bağımsız elemanlar sistemi olsun. O zaman tüm X uzayında tanımlanmış, lineer sınırlı, öyle $f_1, f_2, \dots, f_n$ fonksiyoneller sistemi bulabiliriz ki; $\langle x_i, f_j \rangle = \delta_{ij}$ olur.

BÖLÜM III

SOBOLEV UZAYLARI

3.1. Sobolev Uzayının Genel Tanımı.

3.1.1. Tanım. R^m uzayında kapalı, sınırlı $\overline{G}$ bölgesinde k kez sürekli diferansiyellenebilen $u: \overline{G} \rightarrow R^k$, $u(x)$ fonksiyonlarının lineer uzayını ele alalım. Bu lineer uzayın normunu

$$\|u\| = \left\{ \int_{\overline{G}} |u(x)|^p dx + \sum_{1 \leq |a| \leq k} \int_{\overline{G}} |D^a u(x)|^p dx \right\}^{1/p} \quad (1)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu formüldeki integraller, Riemann integralidir. (1) formülü ile elde edilen normlu uzay $\tilde{W}_p^k(\overline{G})$ ile gösterilir. $\tilde{W}_p^k(\overline{G})$ normlu uzayının (1) normuna göre tamlaştırılmasıyla elde edilen Banach uzayına, Sobolev uzayı denir ve $W_p^k(G)$ ile gösterilir.

$p=2$ durumu ile uygulamalarda sık karşılaşılır. Eğer $W_p^k(G)$ uzayında $p=2$ halini göz önüne alırsak, elde edilen $W_2^k(G)$ uzayını $H^k(G)$ ile gösteririz. $H^k(G)$ Sobolev uzayı, Hilbert uzayıdır. $H^k(G)$ Hilbert uzayı, $\tilde{W}_2^k(G)$ Sobolev uzayının

$$(u, v) = \int_G u(x) v(x) dx + \sum_{1 \leq |a| \leq k} \int_G D^a u(x) D^a v(x) dx$$

skaler çarpımının doğurduğu norma göre tamlaştırılmasından elde edilir.

3.2. $H^1(a,b)$ Sobolev Uzayı ve $H^1(a,b)$ Sobolev Uzayında Genelleştirilmiş Türev.

3.2.1. Tanım. $[a,b]$ aralığında tanımlanmış sürekli diferansiyellenen $u(x)$ fonksiyonlarının lineer uzayını ele alalım. Bu uzayda skaler çarpım

$$(u, v) = \int_a^b u(x) v(x) dx + \int_a^b u'(x) v'(x) dx \quad (1)$$

ve bu skaler çarpımın doğurduğu norm

$$\|u\| = \left(\int_a^b u^2(x) dx + \int_a^b u'^2(x) dx \right)^{1/2} \quad (2)$$

şeklindedir. Elde edilen normlu uzayı $\tilde{H}^k[a, b]$ ile gösterelim.

$$\tilde{H}^k[a, b] = \tilde{W}_2^k[a, b]$$

$\tilde{H}^k[a, b]$ uzayının (2) normuna göre tamlaştırılması sonucu oluşan uzay, $H^k(a, b)$ Sobolev uzayıdır.

$\tilde{H}^k[a, b]$ uzayındaki fundamental dizileri tanımlayalım. $\{u_n(x)\} \subset \tilde{H}^k[a, b]$ fonksiyonlar dizisini ele alalım. $\{u_n(x)\}$ dizisinin fundamental olması $n, m \rightarrow \infty$ için

$$\|u_n - u_m\|_{\tilde{H}^k[a, b]}^2 = \int_a^b |u_n(x) - u_m(x)|^2 dx + \int_a^b |u'_n(x) - u'_m(x)|^2 dx \rightarrow 0 \quad (3)$$

olması demektir. $H^k(a, b)$ uzayının elemanları, tamlaştırma yöntemine esasen $\tilde{H}^k[a, b]$ uzayında ortalama fundamental olan $\{u_n(x)\} \subset \tilde{H}^k[a, b]$ dizilerinin sınıflarından oluşmuştur.

$\{u_n(x)\} \subset \tilde{H}^k[a, b]$ dizisinin bu uzayda ortalama fundamental olmasından ve $n, m \rightarrow \infty$ şartıyla

$$\begin{aligned} \int_a^b |u_n(x) - u_m(x)|^2 dx &\rightarrow c \\ \int_a^b |u'_n(x) - u'_m(x)|^2 dx &\rightarrow c \end{aligned}$$

elde edilir. $\{u_n(x)\}$ ve $\{\hat{u}_n(x)\}$ dizilerinin $\tilde{H}^k[a, b]$ uzayındaki metriğe göre eşdeğer olmaları şartından, $n \rightarrow \infty$ için

$$\begin{aligned} \int_a^b |u_n(x) - \hat{u}_n(x)|^2 dx &\rightarrow 0 \\ \int_a^b |u'_n(x) - \hat{u}'_n(x)|^2 dx &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

olur. Buradan $\{u_n(x)\}$ ve $\{\hat{u}_n(x)\}$ dizileri $\tilde{L}_2[a, b]$ uzayında fundamental dizilerdir ve bunlar uygun olarak $L_2(a, b)$ Lebesgue uzayında $u(x), w(x) \in L_2(a, b)$ elemanlarını belirlemiş olurlar. Buna göre $n \rightarrow \infty$ için

$$u_n(x) \rightarrow u(x), u'_n(x) \rightarrow w(x)$$

olur. Böyle tanımlanan $w(x) \in L_2(a, b)$ elemanına Sobolev anlamında genelleştirilmiş türev denir ve

$$w(x) = u'(x)$$

şeklinde gösterilir. Genelleştirilmiş $u'(x)$ türevi lokal olarak değil global olarak tanımlanmıştır.

$u(x), v(x) \in H^k(a, b)$ ve bunların temsilcileri olan $\{u_n(x)\}, \{v_n(x)\}$, $\tilde{H}^k[a, b]$ uzayında fundamental diziler olsun.

$$(u_n, v_n) = \int_a^b u_n(x) v_n(x) dx + \int_a^b u_n'(x) v_n'(x) dx \quad (4)$$

$$\|u_n\| = \left(\int_a^b |u_n(x)|^2 dx + \int_a^b |u_n'(x)|^2 dx \right)^{1/2} \quad (5)$$

Bu integraller, Riemann integralleridir. (3) ve (4) eşitliklerinden $n \rightarrow \infty$ için limit alırsak (1) ve (2) eşitliklerini elde ederiz. Bu durumda $u'(x)$ ve $v'(x)$ genelleştirilmiş türev olur, ayrıca (1) ve (2) eşitliklerindeki integraller, Lebesgue integralidir.

3.2.2. Not. Genelleştirilmiş türevler ve (3) ve (4) eşitlikleri yardımı ile n sayısını istediğimiz kadar büyüterek, sonucu en küçük hata ile hesaplayabiliriz.

3.3. Genelleştirilmiş Türevin Başka Bir Tanımı.

3.3.1. Tanım. $C^0[a, b]$ ve $C^k[a, b]$ uzaylarını ele alalım. $\forall v(x) \in C^0[a, b]$ ve $u(x) \in C^k[a, b]$ alırsak aşağıdaki eşitlik doğrudur.

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = - \int_a^b u'(x) v(x) dx \quad (1)$$

$u(x)$ in türevi $u'(x)$, (1) eşitliği ile tam olarak tanımlanmış olur. Gerçektende $[a, b]$ aralığında sürekli bir $w(x)$ fonksiyonu ve $\forall v(x) \in C^0[a, b]$ için

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = - \int_a^b w(x) v(x) dx \quad (2)$$

olursa $w(x) = u'(x)$ elde edilir. (1) ve (2) yi taraf tarafa çıkarırsak $\forall v(x) \in C^0[a, b]$ için

$$\int_a^b [u'(x) - w(x)] v(x) dx = 0$$

elde edilir. $\overset{0}{C}^k[a,b]$, $\widetilde{L}_p[a,b]$ uzayında her yerde yoğun olduğu için $u'(x) \equiv w(x)$ bulunur.

Buradan görüyoruz ki (2) eşitliği genelleştirilmiş türevi tanımlamak için esas formül olabilir.

3.3.2. Lemma. $u \in H^k(a,b)$ ve $v \in \overset{0}{C}^k[a,b]$ için (1) doğrudur.

İspat : $\{u_n(x)\} \in u(x)$ in temsilcisi olsun . O zaman

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = - \int_a^b u'_n(x) v(x) dx$$

Her iki taraftan $n \rightarrow \infty$ iken limit alırsak ve skaler çarpımın sürekli olmasından (1) elde edilir.

3.3.3. Lemma. $u(x) \in H^k(a,b)$ ve $w(x) \in L_2(a,b)$ olduğunda $\forall v(x) \in \overset{0}{C}^k[a,b]$ için aşağıdaki eşitlik sağlanırsa o zaman $w(x)$, $u(x)$ in genelleştirilmiş türevi olur.

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = - \int_a^b w(x) v(x) dx$$

İspat : Lemma'yı ispatlamak için $\{u_n(x)\} \in u(x)$ ve $\{w_n(x)\} \in w(x)$ temsilcilerini alalım. O zaman

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b u(x) v'(x) dx + \int_a^b w(x) v(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_a^b u_n(x) v'(x) dx + \int_a^b w_n(x) v(x) dx \right] \\ &= \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} [w_n(x) - u'_n(x)] v(x) dx = \int_a^b [w(x) - u'(x)] v(x) dx \end{aligned}$$

bulunur. $\forall v(x) \in \overset{0}{C}^k[a,b]$ için

$$\begin{aligned} \int_a^b [u'(x) - w(x)] v(x) dx &\equiv 0 \\ \Rightarrow u'(x) &= w(x), \quad \forall x \in [a,b] \text{ için} \end{aligned}$$

3.4. $H^1(a,b)$ Uzayının $C_{[a,b]}$ Uzayına Gömülme Teoremi.

3.4.1. Teorem. $H^k(a,b)$ uzayı, $C_{[a,b]}$ uzayına Gömülmüştür. Yani $H^k(a,b)$ uzayının fonksiyonları mutlak süreklidir.

İspat. $u(x) \in C_{[a,b]}$ fonksiyonunu alalım. Ortalama değer teoreminden, $u(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli olduğundan öyle bir $\xi \in [a,b]$ noktası vardır ki

$$u(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b u(s) ds$$

olur. Buna göre

$$u(x) = \int_{\xi}^x u'(s) ds + \frac{1}{b-a} \int_a^b u(s) ds$$

elde edilir. Buradan

$$|u(x)| \leq \int_a^b |u'(s)| ds + \frac{1}{b-a} \int_a^b |u(s)| ds$$

Her iki tarafın karesini alırsak

$$\begin{aligned} |u(x)|^2 &\leq \left(\int_a^b |u'(s)| ds + \frac{1}{b-a} \int_a^b |u(s)| ds \right)^2 \\ &\leq 2 \left[\left(\int_a^b |u'(s)| ds \right)^2 + \frac{1}{(b-a)^2} \left(\int_a^b |u(s)| ds \right)^2 \right] \\ &\leq 2 \left[(b-a) \int_a^b |u'(s)|^2 ds + \frac{1}{b-a} \int_a^b |u(s)|^2 ds \right] \\ &\leq 2.K \left(\int_a^b |u'(s)|^2 ds + \int_a^b |u(s)|^2 ds \right) \end{aligned}$$

$K = \max \left((b-a), \frac{1}{b-a} \right)$ olarak seçersek, $\forall x \in [a,b]$ için

$$|u(x)| \leq \sqrt{2K} \left(\int_a^b |u(s)|^2 ds + \int_a^b |u'(s)|^2 ds \right)^{1/2}$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan

$$\|u\|_{C[a,b]} \leq \beta \|u\|_{H^1[a,b]}, \quad \beta = \sqrt{2K} \quad (1)$$

elde edilir.

Eğer $\{u_n(x)\} \subset \tilde{H}^k[a, b]$ fundamental dizisini alırsak, (1) formülüne esasen

$$\|u_n - u_m\|_{C[a,b]} \leq \beta \|u_n - u_m\|_{\tilde{H}^k[a,b]}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan görülür ki, $\tilde{H}^k[a, b]$ uzayında $\{u_n(x)\}$ fundamental dizisi $C_{[a,b]}$ uzayında da fundamental olur. $C_{[a,b]}$ uzayındaki fundamental dizi, $C_{[a,b]}$ uzayında bir $u(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır. Unutulmamalıdır ki, düzgün yakınsaklıktan, ortalama yakınsaklıkta elde edilir. Yani, $u(x) \in \hat{L}_2[a, b]$ ise buradan, $u(x) \in L_2(a, b)$ olur. Böylelikle, $\{u_n(x)\} \in u(x) \in H^k(a, b)$ ise $u(x) \in C_{[a,b]}$ elde edilir.

Yukarıdaki fundamental dizi için (1) formülünü yazalım:

$$\|u_n\|_{C[a,b]} \leq \beta \|u_n\|_{\tilde{H}^k[a,b]}$$

olur. $n \rightarrow \infty$ için limit alırsak

$$\|u\|_{C[a,b]} \leq \beta \|u\|_{H^k(a,b)}$$

bulunur. Teorem ispatlanır.

3.4.2. Teorem. $H^k(a, b)$ uzayının fonksiyonları mutlak sürekli fonksiyonlardır.

3.5. $H^k(G)$ ve $\overset{0}{H}^k(G)$ Sobolev Uzayları ve Friedrichs Teoremi.

3.5.1. Tanım. R^3 uzayında k bağlantılı, regüler, sınırlı $G \subset R^3$ bölgesini ele alalım ve $\bar{G} = G + \partial G$ olsun. $\bar{G}$ bölgesinde tanımlanmış sürekli diferansiyellenen $u(x, y, z)$ fonksiyonlarının lineer uzayını ele alalım. Bu uzayda skaler çarpımı;

$$(u, v) = \iiint_G u v \, dx dy dz + \iiint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (1)$$

ve bu skaler çarpımın doğurduğu normu

$$\|u\| = \left(\iiint_G |u|^2 \, dx dy dz + \iiint_G \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right) dx dy dz \right)^{1/2} \quad (2)$$

şeklinde tanımlayalım. Elde edilen skaler çarpımlı uzayı $\tilde{H}^k(\bar{G})$ ile gösterelim. Bu uzayın (2) normuna göre tamlaştırılması sonucu oluşan uzayı $H^1(G)$ ile gösteririz. $\{u_n(x, y, z)\}$ dizisi $\tilde{H}^k(\bar{G})$ uzayında keyfi fundamental dizi olsun. $\tilde{H}^k(\bar{G})$ uzayındaki normun ifadesinden

$$\{u_n\}, \left\{\frac{\partial u_n}{\partial x}\right\}, \left\{\frac{\partial u_n}{\partial y}\right\}, \left\{\frac{\partial u_n}{\partial z}\right\}$$

dizilerinin $L_2^k(\bar{G})$ uzayında fundamental oldukları görülür. Böylece bu fundamental diziler $L_2(G)$ uzayında uygun

$$u(x,y,z), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$$

elemanlarını tanımlar. Buradaki $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ elemanları, $u(x,y,z)$ fonksiyonunun

genelleşmiş kısmi türevleridir. $H^k(G)$ uzayında skaler çarpım ve norm $\tilde{H}^k(\bar{G})$ uzayındaki formüllerle tanımlanır. Ama $H^k(G)$ uzayındaki formüllerde integraller, Lebesgue integralidir.

3.5.2. Tanım. $\bar{G}$ bölgesinde sürekli $u(x,y,z)$ fonksiyonları için $u|_{\partial G} = 0$ olduğunu varsayalım. Bu lineer uzayda, skaler çarpımı

$$(u, v) = \iiint_{\bar{G}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (1)$$

ve bu skaler çarpımın doğurduğu normu

$$\|u\| = \left\{ \iiint_{\bar{G}} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right) dx dy dz \right\}^{1/2} \quad (2)$$

formülleri ile tanımlarız. Elde edilen normlu uzay (2) normuna göre tamlştırıldığında elde edilen Sobolev uzayı $\overset{0}{H}^k(G)$ ile gösterilir.

3.5.3. Lemma. $u \in H^k(G)$ ve $v \in \overset{0}{H}^k(G)$ olduğunda aşağıdaki eşitlikler doğrudur;

$$\left(u, \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{L_2(G)} = - \left(\frac{\partial u}{\partial x}, v \right)_{L_2(G)}$$

$$\left(u, \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{L_2(G)} = - \left(\frac{\partial u}{\partial y}, v \right)_{L_2(G)}$$

$$\left(u, \frac{\partial v}{\partial z} \right)_{L_2(G)} = - \left(\frac{\partial u}{\partial z}, v \right)_{L_2(G)}$$

İspat. Bu formüllerden birincisini ispatlamak yeterlidir. Birinci formülde $u \in C^k(G)$ ve $v \in \overset{0}{C}^k(\overline{G})$ alırsak, o zaman birinci formülün sağlandığı açıktır.

$$\int_{\overline{G}} u(x, y, z) \frac{\partial v}{\partial x} dx dy dz = - \int_{\overline{G}} v(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial x} dx dy dz$$

$\{u_n\} \in \tilde{H}^k(\overline{G})$ ve $\{u_n\}$ dizisi $\tilde{H}^k(\overline{G})$ uzayında fundamental olsun. Ayrıca $\{u_n\}$ dizisinin limiti $u \in H^1(G)$ elemanı olsun. $v \in \overset{0}{C}^k(\overline{G})$ için

$$\left(u_n, \frac{\partial v}{\partial x} \right) = - \left(\frac{\partial u_n}{\partial x}, v \right)$$

eşitsizliğinin her yanından $n \rightarrow \infty$ için limit alırsak

$$\left(u, \frac{\partial v}{\partial x} \right) = - \left(\frac{\partial u}{\partial x}, v \right)$$

elde edilir. Bu eşitlik keyfi $v \in \overset{0}{C}^k(\overline{G})$ için sağlanır.

Gerçekten de, $L_2(G)$ uzayında $n \rightarrow \infty$ için $u_n \rightarrow u$ olmasından

$$|(u_n - v) - (u, v)| = |(u_n - u, v)| \leq \|u_n - u\| \|v\| \rightarrow 0$$

bulunur. Yani, skaler çarpım $L_2(G)$ uzayında süreklidir.

Şimdi $\tilde{H}^k(\overline{G})$ uzayından fundamental $\{u_n\}$ dizisini alalım.

$$\left(u, \frac{\partial v_n}{\partial x} \right) = - \left(\frac{\partial u}{\partial x}, v_n \right)$$

eşitliğinin her yanından $n \rightarrow \infty$ şartıyla limit alırsak

$$\left(u, \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{L_2(G)} = - \left(\frac{\partial u}{\partial x}, v \right)_{L_2(G)}$$

eşitliğini buluruz.

3.5.4. Sonuç. $\tilde{H}^k(G)$ uzayı tam olarak $H^k(G)$ uzayına yerleşir.

İspat. $u=1 \in H^k(G)$ fakat $1 \notin \tilde{H}^k(G)$ olsun. Aksi halde, birinci eşitlikten, $\forall u \in H^k(G)$ ve $v=1 \in \tilde{H}^k(G)$ olması halinde

$$\left(u, \frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\left(\frac{\partial u}{\partial x}, v\right)$$

eşitliğine esasen

$$(u, 0) = -\left(\frac{\partial u}{\partial x}, 1\right)$$

elde edilir, yani, $\forall u \in H^k(G)$ için

$$\iiint_G \frac{\partial u}{\partial x} dx dy dz = 0$$

ve $u \equiv x$ alırsak

$$\iiint_G dx dy dz = 0$$

olur. Bu çelişki sonucu ispatlar.

3.5.5. Teorem. (Friedrichs Teoremi). Her bir $u \in \overset{0}{H}^k(G)$ için $\exists c > 0$ sayısı vardır ki

$$\|u\|_{L_2(G)} \leq c \|u\|_{\overset{0}{H}^1(G)} \quad (1)$$

Eşitsizliği doğrudur.

İspat. $\overset{0}{H}^k(G)$ uzayının tanımından, bu uzaydan alınan elemanlar aynı zamanda $L_2(G)$ uzayına da dahildir.

$$Q_a = \{x, y, z : |x| \leq a, |y| \leq a, |z| \leq a\}$$

küpünü oluşturalım. Bu küp $\overline{G}$ bölgesini içine alan küpü kapsar. $\overline{G}$ bölgesinde tanımlanmış her sürekli diferansiyellenen $u(x, y, z)$ fonksiyonlarını $Q_a/\overline{G}$ bölgesine teğet uzatalım. O zaman:

$$u(x, y, z) = \int_{-a}^x \frac{\partial u(\xi, y, z)}{\partial \xi} d\xi$$

olur. Bu eşitliğin her yanından mutlak değer alırsak:

$$|u(x, y, z)| \leq \int_{-a}^a \left| \frac{\partial u(\xi, y, z)}{\partial \xi} \right| d\xi$$

Burada Cauchy-Schwarz eşitsizliğine esasen

$$\begin{aligned} |u(x, y, z)|^2 &\leq \left(\int_{-a}^a \left| \frac{\partial u(\xi, y, z)}{\partial \xi} \right| d\xi \right)^2 \\ &\leq 2a \int_{-a}^a \left| \frac{\partial u(\xi, y, z)}{\partial \xi} \right| d\xi \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizliği Q_a üzerinden integrallersek

$$\|u\|_{L_2(Q_a)}^2 \leq 4a^2 \left\| \frac{\partial u}{\partial \xi} \right\|_{L_2(Q_a)}^2$$

Q_a yerine G yazarsak ve $\bar{G}$ bölgesinin dışında $u = 0$ olduğundan

$$\|u\|_{L_2(G)}^2 \leq 4a^2 \left\| \frac{\partial u}{\partial \xi} \right\|_{L_2(G)}^2 \leq 4a^2 \|u\|_{H^k(G)}^0$$

elde edilir. Teorem ispatlanır.

Friedrichs teoreminden aşağıdaki sonuçlar çıkarılabilir

3.5.6. Sonuç. $H^k(G)$ uzayı $L_2(G)$ uzayına gömülmüştür. İspatı, Friedrichs eşitsizliğinden ve Banach uzaylarının gömülmesi teoreminden elde edilir.

3.5.7. Sonuç. $H^k(G)$ uzayında

$$\|u\|_{H^k(G)}^0 = \left(\int_G \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right) dw \right)^{1/2}$$

normu ile

$$\|u\|_{L_2(G)} + \|u\|_{H^k(G)}^0 = \left(\iiint_G |u|^2 dx dy dz \right)^{1/2} + \|u\|_{H^k(G)}^0$$

normları eşdeğerdir. Gerçekten Friedrichs eşitsizliğinden

$$\|u\|_{H^k(G)}^0 \leq \|u\|_{L_2(G)} + \|u\|_{H^k(G)}^0 \leq (c+1) \|u\|_{H^k(G)}^0$$

elde edilir.

BÖLÜM IV

ELİPTİK TİP DENKLEMLERİN GENELLEŞTİRİLMİŞ ÇÖZÜMÜNÜN VARLIK VE TEKLİK TEOREMİ

4.1. Riesz Teoreminin Bir Sonucu.

Riesz teoremi kısmi türevli diferansiyel denklemlerin sınır değer problemlerinin çözümünde çok önemlidir ve etkin bir şekilde uygulanır

$\hat{H}$, H Hilbert uzayları verilsin. Eğer $x \in \hat{H}$ olmasından $x \in H$ elde edilirse ve $\exists k > 0$ sabiti varsa ki, $\forall x \in \hat{H}$ için

$$\|x\|_H \leq k \|x\|_{\hat{H}} \quad (1)$$

olursa o zaman $\hat{H}$ Hilbert uzayı, H Hilbert uzayına gömülmüştür denir.

Riesz teoreminden aşağıdaki sonuç elde edilir.

4.1.1. Teorem. Eğer $\hat{H}$ Hilbert uzayı, H Hilbert uzayına gömülmüşse, o zaman her bir $y \in H$ için öyle tek bir $x \in \hat{H}$ bulunur ki, her bir $z \in \hat{H}$ elemanı için

$$(x, z)_{\hat{H}} = (y, z)_H$$

eşitliği sağlanır.

Bu eşitlik öyle bir $A \in L(H, \hat{H})$ operatörü tanımlar ki, $x = Ay$ ve $\|A\| \leq k$ olur.

İspat. Her bir farklı $y \in H$ aldığımızda $(y, z)_H$ ifadesi tüm mümkün $z \in \hat{H}$ için H uzayında lineer sınırlı fonksiyonel tanımlar. Bu fonksiyonelin lineerliği skaler çarpımın lineer olmasından elde edilir. Bu fonksiyonelin sınırlı olması ise aşağıdaki eşitsizlikten bulunur.

$$|(y, z)_H| \leq \|y\|_H \|z\|_H \leq \|y\|_H k \|z\|_{\hat{H}}$$

Böylece $y \in H$ aldığımızda $(y, z)_H$ ifadesi $\hat{H}$ Hilbert uzayında bir lineer sınırlı fonksiyonel tanımlar. O zaman Riesz teoremine göre öyle bir tek $x \in \hat{H}$ elemanı vardır ki

$$(x, z)_{\hat{H}} = (y, z)_H$$

elde edilir. Bu eşitlik, tüm H uzayında bir $x = Ay$ operatörünün tanımlandığını gösterir.

Bu operatör yani A operatörü lineerdir. A operatörünün lineer olduğu kolaylıkla gösterilir. A operatörünün sınırlı olduğunu gösterelim. Aşağıdaki eşitsizlikte

$$|(y, z)_H| = |(x, z)_H| = |(Ay, z)_H| \leq \|y\|_H k \|z\|_H$$

özel halde $Ay=z$ alırsak

$$\|Ay\|_H^2 \leq k \|Ay\|_H k \|y\|_H$$

veya

$$\|Ay\|_H \leq k \|y\|_H$$

elde ederiz. Yani $\|A\| \leq k$. Böylece A operatörü sınırlıdır. Böylece teorem ispatlanmış olur.

4.2. Laplace Denkleminin Genelleşmiş Çözümünün Varlık ve Teklik Teoremi.

Bu ispatladığımız teoremin bir uygulaması olarak Poisson denklemi için Dirichlet probleminin genelleşmiş çözümünün var ve tek olduğunu ispatlayalım.

Kapalı sınırlı bir bağlantılı $\overline{G} \subset R^3$ bölgesinin sınırı S kümesinin yeteri kadar regüler olduğunu varsayalım. Aşağıdaki sınır değer problemini ele alalım.

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z), \quad (x, y, z) \in G \quad (1)$$

$$u|_S = 0 \quad (2)$$

$f(x, y, z)$ fonksiyonunun $\overline{G}$ bölgesinde (x, y, z) değişkenlerine göre sürekli olduğunu varsayalım.

Eğer $u(x, y, z)$ fonksiyonu G bölgesinde sürekli ve (1) denkleminin sol tarafındaki türevleri G bölgesinde var ve G bölgesinde sürekli ise (1) denklemini sağlar. S sınırı üzerinde (2) sınır şartını sağlarsa, o zaman $u(x, y, z)$ fonksiyonuna (1)-(2) sınır değer probleminin klasik çözümü denir.

$u(x, y, z)$ fonksiyonunun (1)-(2) probleminin klasik çözümü olduğunu var sayalım. $v(x, y, z)$ fonksiyonunun ise G bölgesinde sürekli olduğunu, S sınırında sıfıra eşit olduğunu ve G bölgesinde ise sürekli diferansiyellenen olduğunu var sayalım. O zaman her bir $v(x, y, z)$ fonksiyonu için aşağıdaki integral eşitliği doğrudur

$$\iiint_{\bar{G}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dx dy dz = - \iiint_{\bar{G}} f v dx dy dz \quad (3)$$

Bu eşitliği ispatlamak için Ostrogradskii-Gauss formülünü kullanalım

$$\iiint_{\bar{G}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \oint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS$$

Bu formülde $P = v \frac{\partial u}{\partial x}$, $Q = v \frac{\partial u}{\partial y}$, $R = v \frac{\partial u}{\partial z}$ alırsak:

$$\begin{aligned} \iiint_{\bar{G}} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(v \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right) dx dy dz &= \oint_S v \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) dS \\ &= \oint_S v \frac{\partial u}{\partial n} dS \end{aligned}$$

Burada $v|_S = 0$ olduğunda

$$\oint_S v \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0$$

olur ve

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = v \Delta u + (\text{grad} v, \text{grad} u)$$

ve $\Delta u = f$ olduğundan (3) eşitliği elde edilir.

(3) eşitliğinden $f \in L_2(\bar{G})$ alsak ve $u, v \in H^0_k(G)$ için integraller, Lebesgue integrali olur. Böylece bu hal içinde (4) eşitliği doğrudur.

Eğer (4) eşitliği her bir $v \in H^0_k(G)$ fonksiyonu için sağlanırsa o zaman $u \in H^0_k(G)$ fonksiyonuna (1)-(2) probleminin genelleşmiş çözümü denir.

Her bir $f \in L_2(\bar{G})$ için (1)-(2) probleminin genelleşmiş çözümü var ve tek olduğunu ispatlayalım.

Unutulmamalıdır ki, $H^0_k(G)$ Hilbert uzayı, $L_2(\bar{G})$ Hilbert uzayına gömülmüştür.

Gerçekten de $H^0_k(G)$ uzayının tanımına esasen her bir $v \in H^0_k(G)$ fonksiyonu $L_2(\bar{G})$

uzayına da dahildir. Friedrichs teoremine göre her bir $v \in H^0_k(G)$ için:

$$\|v\|_{L_2(\bar{G})}^2 = \int_{\bar{G}} \int \int v^2 dx dy dz \leq k^2 \int_{\bar{G}} \int \int \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right) dx dy dz = k^2 \|v\|_{H^k(G)}^0$$

Böylece Riesz teoremine göre her bir $f \in L_2(\bar{G})$ fonksiyonu için öyle tek bir $u \in H^k(G)$ fonksiyonu vardır ki $\forall v \in H^k(G)$ için:

$$(u, v)_{H^k(G)}^0 = -(f, v)_{L_2(\bar{G})}$$

eşitliği sağlanır. Bu ise açık şekilde yazıldığında (4) integral eşitliği ile çakışır.



BÖLÜM V

ADİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN GENELLEŞTİRİLMİŞ ÇÖZÜMÜ ÜZERİNE

5.1. Klâsik Çözüm Kavramının Genelleştirilmesi ve Sobolev Uzayları.

Aşağıdaki adi türveli diferansiyel denklem için sınır değer problemini ele alalım;

$$Au \equiv -(k(x)u'(x))' + q(x)u(x) = f(x), \quad a < x < b \quad (1)$$

$$u(a) = u(b) = 0 \quad (2)$$

5.1.1. Tanım. $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli ve (a, b) açık aralığında ikinci türevi sürekli olmak koşuluyla, (a, b) de (1) denklemini $x = a$ ve $x = b$ noktalarında (2) sınır koşullarını sağlayan $u(x) \in C^2(a, b) \cap C[a, b]$ fonksiyonuna (1)-(2) probleminin klâsik çözümü denir.

5.1.2. Teorem. $k = k(x)$, $q = q(x)$ katsayıları ve $f = f(x)$ aşağıdaki koşulları sağlarsa

$$c_1 \geq k(x) \geq c_0 > 0, \quad c_2 \geq q(x) \geq 0 \quad (3)$$

$$k(x) \in C^k[a, b], \quad q(x) \in C[a, b], \quad f(x) \in C[a, b] \quad (4)$$

bu durumda (3)-(4) probleminin klasik çözümü vardır ve tektir.

Bu teoremdaki süreklilik koşulları pratikte her zaman sağlanamaz. Örneğin, $f(x)$ fonksiyonu malzemeye ısı kaynağından verilen ısı dağılımının yoğunluğunu ifade etsin. Bu yoğunluk her zaman düzgün olmayabilir ve bu da, $f = f(x)$ fonksiyonunun sürekli olmaması anlamına gelir. Bu durum, klasik çözüm kavramının birçok pratik problem için yetersiz kaldığını gösterir.

5.1.3. Örnek.

$$k(x) \equiv 1, q(x) \equiv 0, f(x) = \begin{cases} c_1, & 0 < x < x_0 < 1 \\ c_2, & x_0 < x < 1 \end{cases}, \quad c_1, c_2 \text{ sabit} \quad (5)$$

verilerine karşılık (1)-(2) probleminin çözümü

$$u(x) = \begin{cases} \alpha x - c_1 x^2 / 2, & 0 \leq x < x_0 < 1 \\ \beta(1-x) + c_2 x(1-x) - 2, & x_0 < x \leq 1 \end{cases}$$

fonksiyonudur $[u(x)$ fonksiyonunun $-u''(x) = f(x)$ denklemini sağladığı açıktır]. α, β parametrelerini $u(x)$ fonksiyonunun kendisinin ve birinci türevinin sürekli olması koşullarından tanımlayalım;

$$u(x_0^-) = u(x_0^+); u'(x_0^-) = u'(x_0^+)$$

Buradan;

$$u(x) = 0,5 \begin{cases} x [c_2 - c_1 x + x_0 (2 - x_0) (c_1 - c_2)], & 0 \leq x < x_0 \\ (1-x) [c_2 x + x_0^2 (c_1 - c_2)], & x_0 \leq x < 1 \end{cases} \quad (6)$$

çözümü elde edilir ve $u(x) \in C^k(a, b)$ olur. Fakat $u \notin C^2(a, b)$ 'dir. Bu durumda (1)-(2), (5) probleminin 5.1.1. tanımı anlamında çözümü yoktur.

Böylelikle bu gibi durumlarda elde edilecek çözümleri içerecek biçimde yeni bir çözüm kavramı geliştirmek gereksinimi ortaya çıkmaktadır.

İlk aşamada çözüm kavramını $u \in C^2(a, b)$ şartını kaldırarak genişletelim. Bunun için (1) denkleminin her tarafını $v \in C_0^\infty(a, b)$ fonksiyonuyla çarparak $[a, b]$ aralığında integralleyelim.

$$\int_a^b \{ - (k(x) u'(x))' + q(x) u(x) - f(x) \} v(x) dx = 0 \quad (7)$$

$u(x)$ fonksiyonunun (1) denklemini değil (5) denklemini sağlaması şartından yola çıkarsak bu $u \in C^2(a, b)$ koşulunu hafifletmek mümkündür. Gerçekten $k = k(x)$ katsayısının birinci türevi sınırlı fonksiyon ise $\|k'(x)\| \leq M$, (5)' in sol tarafındaki birinci terim,

$$\left| \int_a^b [k'(x) u'(x) v(x) + k(x) u''(x) v(x)] dx \right| \leq M_1 \left| \int_a^b u'(x) v(x) dx \right| + c_1 \left| \int_a^b u''(x) v(x) dx \right| \quad (8)$$

şeklinde değerlendirilir. Buradan $u(x)$ fonksiyonunun türevleri üzerine konulabilecek bazı koşullar belirlenebilir. (6) eşitsizliğinin sağ tarafındaki integrallerin anlamının olması için ;

$$\left| \int_a^b u'(x) v(x) dx \right|, \left| \int_a^b u''(x) v(x) dx \right|$$

integrallerinin sonlu olması gerekir. $L_2[0,1]$ ' de Cauchy eşitsizliğini kullanarak;

$$\left| \int_a^b u'(x) v(x) dx \right| \leq \left[\int_a^b (u'(x))^2 dx \right]^{1/2} \left[\int_a^b v^2(x) dx \right]^{1/2}$$

$$\left| \int_a^b u''(x) v(x) dx \right| \leq \left[\int_a^b (u''(x))^2 dx \right]^{1/2} \left[\int_a^b v^2(x) dx \right]^{1/2}$$

Bu eşitsizliklerin sağ tarafına dikkat edersek, $u(x)$ fonksiyonunun birinci ve ikinci dereceden genelleşmiş türevlerinin $L_2[0,1]$ uzayının elemanı olması talebinin, (6)'nın sol tarafındaki her iki terimin anlamı olmasını sağladığını görürüz. Böylelikle, $u(x)$ için yeni fonksiyonlar sınıfının verilmesi gereksinimi ortaya çıkıyor. Bu türden fonksiyonların oluşturduğu uzaylar Sobolev uzayları olarak adlandırılır.

5.1.4. Tanım. $u^{(m)}(x) \in L_2[a, b]$, $m = 0, 1, \dots, n$ ise bu durumda;

$$H^{(n)}[a, b] = \left\{ u(x) : \int_a^b \left[u^2(x) + (u'(x))^2 + \dots + (u^{(n)}(x))^2 \right] dx < +\infty \right\} \quad (9)$$

uzayına Sobolev uzayı denir. Bu tanımda kullanılan türev, genelleşmiş türev anlamındadır. Bu tanımdan ve Hilbert uzayı tanımından açıkça görüldüğü gibi $H^{(n)}[a, b]$ Hilbert uzayıdır ve burada norm;

$$\|u\|_n = \left\{ \int_a^b \left[u^2(x) + (u'(x))^2 + \dots + (u^{(n)}(x))^2 \right] dx \right\}^{1/2} \quad (10)$$

biçiminde, skaler çarpım ise;

$$(u, v) = \int_a^b \left[u(x) v(x) + u'(x) v'(x) + \dots + u^{(n)}(x) v^{(n)}(x) \right] dx$$

biçiminde tanımlanır. $H^n[a, b]$ Sobolev uzayının

$$u(a) = u'(a) = \dots = u^{(n-1)}(a) = u(b) = u'(b) = \dots = u^{(n-1)}(b) = 0$$

koşullarını sağlayacak biçimde tanımlanan alt uzayını ise $H_0^n[a, b]$ ile gösterelim.

(6) eşitsizliğine ve Sobolev uzayının tanımına dayanarak, (5) denkleminin sol tarafının anlamının olması için $u \in H^2[a, b]$ koşulunun yeterli olacağı sonucunu elde ederiz. Ayrıca

(2) koşullarını da göz önüne alırsak, $u(x) \in H^k[a, b]$ olması gerekir. Böylelikle klâsik çözüm kavramını 5.1.3 örnek' deki gibi durumları da içerecek şekilde genişletebiliriz;

5.1.5. Tanım.

$$(Au - f, v) \equiv \int_a^b [Au - f] v dx = 0, \quad \forall v \in C_0^\infty(a, b) \quad (11)$$

eşitliğini sağlayan $u \in H^2[a, b] \cap \overset{0}{H}^k[a, b]$ fonksiyonuna (1)-(2) probleminin hemen hemen her yerde çözümü denir.

Çözümün böyle adlandırılması aşağıdaki lemmada açıkça ortaya çıkmaktadır;

5.1.6. Lemma. (Du Bois-Reymond). (a, b) aralığında integrallenebilir $\psi(x)$ fonksiyonunun genelleşmiş fonksiyon anlamında sıfır olması için gerek ve yeter şart (a, b) ' de hemen hemen her yerde $\psi(x) = 0$ olmasıdır.

$u \in H^2[a, b] \cap \overset{0}{H}^k[a, b]$ ise, $\psi(x) = -(k(x)u'(x))' + q(x)u(x) - f(x)$ fonksiyonu (a, b) ' de integrallenebilir fonksiyondur. $Au = -(k(x)u'(x))' + q(x)u(x)$ eşit olduğundan (11) eşitliği $\psi(x)$ fonksiyonunun genelleşmiş fonksiyon gibi sıfır olması $[\psi(x)=0]$ anlamına gelir. Bu ise, yukarıdaki lemmaya göre $Au = f$ denkleminin (a, b) ' de hemen hemen her yerde sağlanması demektir.

5.1.3. örnekteki $u(x)$ çözümünün $H^2[a, b]$ uzayında olduğu kolayca bulunabilir ve dolayısıyla, bu fonksiyon 5.1.5. tanım anlamında (1)-(2) probleminin çözümüdür.

5.1.7. Tanım. $k(x)$ ve $q(x)$ katsayıları (3) koşullarını sağlıyorsa $k(x)$ ' in birinci türevi $[a, b]$ 'de sınırlı ise ve $f(x) \in L_2[a, b]$ ise, bu durumda (1)-(2) probleminin hemen hemen her yerde çözümü vardır ve bu çözüm tektir.

Klasik çözümün hemen hemen her yerde çözümle ilişkisini araştıralım. Bu karşılaştırmayı yapmak için Sobolev' in gömme teorisinden ve sonuçlarından yararlanmak zorundayız. Bu sonuçlardan biri de $H^2(a, b) \subset C^k[a, b]$ olmasıdır. Yani $H^2(a, b)$ ' den olan her fonksiyon, $[a, b]$ aralığında türeviyle birlikte süreklidir. Böylelikle, hemen hemen her yerde çözüm $C^2(a, b)$ sınıfından olmasa bile, birinci türevi süreklidir. Bunun da birinci anlamı şudur:

Hemen hemen her yerde çözüm, $u \in H^2(a, b) \cap \overset{0}{H}^k[a, b]$ (1) denklemini klâsik anlamda (yani tüm (a, b) aralığında) sağlamasa bile, (1) eşitliğinden ve Du Bois-Reymond lemmasından görüldüğü gibi, (1) denklemini (a, b) ' de hemen hemen her yerde sağlar. Bir

başka deyişle, $Au - f$ farkı, (a,b) ' nin sadece ölçümü sıfır olan bir altkümesinde sıfırdan farklı olabilir.

Hemen hemen her yerde çözümün $C^k[a,b]$ 'den olmasının ikinci anlamı ise bu çözüm için Dirichlet ve Neumann türü sınır koşullarının tıpkı klâsik çözüm durumundaki gibi sağlanmasıdır.

5.1.8. Teorem. $u \in C^2(a,b) \cap C[a,b]$ fonksiyonu (1)-(2) probleminin (klâsik) çözümü ise, bu fonksiyonun aynı zamanda hemen hemen her yerde çözümdür ve bunun terside geçerlidir; yani, $u \in H^2(a,b) \cap \overset{0}{H}^k[a,b]$ fonksiyonu problemin hemen hemen her yerde çözümü ise ve ayrıca $u \in C^2(a,b)$ is , bu durumda fonksiyon aynı zamanda klâsik çözümdür.

5.1.9. Örnek. Aşağıdaki adi türevli diferansiyel denklemi;

$$Au \equiv -(k(x) u'(x))' + q(x) u(x) = f(x), \quad a < x < b \quad (1)$$

$$u(a) = u(b) = 0 \quad (2)$$

aşağıdaki giriş verileriyle ele alalım

$$q(x) \equiv 0, \quad f(x) \equiv 1, \quad k(x) = \begin{cases} k_1 = \text{sabit} > 0, & 0 < x < x_0, \\ k_2 = \text{sabit} > 0, & x_0 < x < 1, \end{cases} \quad k_1 \neq k_2 \quad (3)$$

Bu verileri (1) denkleminde yazar ve $(0, x_0)$ aralığında $k_1 u''(x) = 1$ denkleminin her tarafını k_1 ' e, $(x_0, 1)$ aralığında ise $k_2 u''(x) = 1$ denkleminin her tarafını k_2 ' ye bölersek, sağ tarafı 5.1.3. örnekte verilen $(c_1 = 1/k_1, c_2 = 1/k_2)$ verilere karşılık gelen $-u''(x) = f(x)$ denklemini elde ederiz. Bu durumda (5.1.6.6) analitik çözümünden, (3) giriş verileriyle belirlenmiş problemin çözümünü elde ederiz;

$$u(x) = 0,5 \begin{cases} x \left[1/k_2 - x/k_1 + x_0(2 - x_0)(1/k_1 - 1/k_2) \right] & 0 \leq x < x_0 \\ (1-x) \left[x/k_2 + x_0^2(1/k_1 - 1/k_2) \right] & x_0 \leq x < 1 \end{cases} \quad (4)$$

Bu fonksiyon $H^2(0,1) \cap \overset{0}{H}^k(0,1)$ sınıfındandır. Ayrıca, $\forall x \in (0, x_0) \cup (x_0, 1)$ için $Au - f$ denklemini sağlar. Bundan dolayı,

$$\int_0^{x_0} (Au - f) v \, dx + \int_{x_0}^1 (Au - f) v \, dx = 0 \quad (5)$$

eşitliği sağlanır. Yine de (4) ile verilmiş $u(x)$ fonksiyonu problemin hemen hemen her yerde çözümü değildir, yani (5.1.5.11) denklemini sağlamaz. Bunu ispat edelim;

$$u'(x) = 0,5 \begin{cases} 1/k_2 - 2x/k_1 + x_0(2-x_0)(1-k_1-1/k_2), & x \in (0, x_0) \\ 1/k_2 - 2x/k_2 - x_0^2(1/k_1-1/k_2), & x \in [x_0, 1) \end{cases}$$

olduğundan, $u'(x) \in C[0,1]$ dir. $k = k(x)$ katsayısı $x = x_0$ noktasında sürekli olmadığından $k(x)u'(x)$ fonksiyonu da o noktada sürekli değildir. Bu durumda $k(x)u'(x)$ ' in türevini alarak (5.1.5.11) denkleminde yazamayız. Bu nedenle genelleşmiş türevden yararlanmak zorundayız. (5.1.5.11)' te $(Au - f)'$ nin genelleşmiş fonksiyon olduğunu varsayalım. Bu durumda bu fonksiyon $C_0^\infty(0,1)$ ' de olan $v = v(x)$ fonksiyonları üzerinden $(Au - f, v)$ fonksiyoneli gibi tanımlanır. Böylelikle;

$$(Au - f, v) = -((k(x)u'(x))', v) + (q(x)u(x) - f, v), \quad \forall v \in C_0^\infty(0,1) \quad (6)$$

olur. Genelleşmiş türevin tanımını kullanarak

$$(-(k(x)u'(x))', v) = (k(x)u'(x), v'), \quad \forall v \in C_0^\infty(0,1) \quad (7)$$

eşitliğini (6)' da yazarsak

$$(Au - f, v) = \int_0^1 [k(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x) - f(x)v(x)] dx, \quad \forall v \in C_0^\infty(0,1) \quad (8)$$

elde ederiz. (6) eşitliğinin sağ tarafındaki birinci terime ve (7)' nin sağ tarafına dikkat edersek, bunların $L_1(0,1)$ ' den olan elemanlar üzerinden tanımlanmış genelleşmiş fonksiyonlar olduğunu görürüz. Şimdi kısmî integralleme formülünü kullanarak (8) eşitliğinin sağ tarafını hesaplayalım:

$$\begin{aligned} (Au - f, v) &= \int_0^1 [ku'v' + quv - fv] dx = \int_0^{x_0} [ku'v' + quv - fv] dx + \int_{x_0}^1 [ku'v' + quv - fv] dx \\ &= \int_0^{x_0} [- (ku')' + quv - f] v dx + (ku'v)_{x_0}^{x_0} + \int_{x_0}^1 [- (ku')' + qu - f] v dx + (ku'v)_{x_0}^1 \end{aligned}$$

burada $v(0) = v(1) = 0$ olduğunu ve $u'(x)$ ile $v(x)$ 'in $x = x_0$ ' da sürekli olduğunu dikkate alır ve (5) eşitliğini kullanırsak aşağıdaki sonuca ulaşırız;

$$\begin{aligned} (Au - f, v) &= \int_0^{x_0} (Au - f) v dx + \int_{x_0}^1 (Au - f) v dx + (k(x)u'(x)v(x))_{x=x_0-0} - (k(x)u'(x)v(x))_{x=x_0+0} \\ &= (k_1 - k_2)u'(x_0)v(x_0) \neq 0, \quad k_1 \neq k_2 \end{aligned} \quad (9)$$

Böylelikle (5) eşitliğinin sağlanmasına rağmen $(Au - f, v) = 0$ eşitliği $(0,1)$ aralığının bütününde sağlanmıyor demektir ve bu nedenle (4) ile verilmiş $u(x)$ fonksiyonu hemen hemen her yerde çözüm değildir.

Bu örnek, bir çok durumda hemen hemen her yerde çözümün bile yetersiz kaldığını gösteriyor. O halde çözüm kavramının bir kez daha genişletilmesi gerekiyor. Bu genişletmenin ipuçları aslında (8) denkleminde verilmiştir; Bu eşitlik $(Au - f, v)$ genelleşmiş fonksiyonunun sadece (6) biçiminde değil, ikinci türevi kaldırarak, sırf birinci türevlerin bulunduğu (8) biçiminde de verebilme olanağının varolduğunu gösteriyor. Bu olanaktan yararlanarak çözüm tanımını, $u = u(x)$ fonksiyonunun (5.1.5.11) eşitliğini değil,

$$\int_a^b [k(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x)]dx = \int_a^b f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in C_0^\infty(a, b) \quad (10)$$

eşitliğini sağlayacağı şekilde genişletelim. Bu şekilde tanımlanacak çözümde $k(x)$ ve $q(x)$ katsayıları için;

$$k(x), q(x) \in L_2(a, b) \quad (11)$$

olması yeterlidir. Böylelikle (10) denkleminde yola çıkarsak, hem katsayılar hem de çözümün tanımlandığı fonksiyonlar sınıfı açısından çözüm kavramını aşağıdaki gibi genişletebiliriz;

5.1.10. Tanım.

$$\int_a^b [k(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x)]dx = \int_a^b f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in H^0_k(a, b) \quad (12)$$

eşitliğini sağlayan $u \in H^0_k(a, b)$ fonksiyonuna (1)-(2) sınır değer probleminin zayıf (veya genelleşmiş) çözümü denir. (12) eşitliğine bazen integral özdeşlik de denir.

Bu biçimde genişletilmiş çözüm kavramının sürekli olmayan katsayılarla verilmiş problemleri de içerdiğini kolayca görmek mümkündür. Öte yandan zayıf çözüm, hemen her yerde çözümün tanımlandığı sınıfa $(H^2(a, b) \cap H^0_k[a, b])$ kıyasla daha geniş bir fonksiyonlar sınıfında tanımlanmıştır.

5.1.11. Teorem. $k(x)$ ve $q(x)$ katsayıları (5.1.3.3) ve (11) şartlarını sağlıyorsa ve $f(x) \in L_2(a, b)$ ise bu durumda (1)-(2) sınır değer probleminin zayıf çözümü vardır ve çözüm tektir.

5.1.12. Teorem. $u \in H^2(a, b) \cap \overset{0}{H}^k[a, b]$ fonksiyonu (1)-(2) probleminin hemen her yerde çözümüyse, aynı zamanda zayıf çözümdür. $u \in \overset{0}{H}^k[a, b]$ fonksiyonu zayıf çözümse ve ayrıca $H^2(a, b)$ uzayının elemanıysa, aynı zamanda hemen her yerde çözümdür.

İspat. $u \in H^2(a, b) \cap \overset{0}{H}^k[a, b]$ hemen her yerde çözüm olsun. Öyleyse,

$$\int_a^b \{ -(k(x)u'(x))' + q(x)u(x) \} v(x) dx = \int_a^b f(x)v(x) dx, \quad \forall v(x) \in C_0^\infty(a, b) \quad (13)$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitliğin sol tarafındaki birinci terime kısmî integralleme formülü uygulanır ve $v(a) = v(b) = 0$ olduğunu dikkate alırsak, (12) integral eşitliğini elde ederiz. Bu ise $u(x)$ ' in zayıf çözüm olduğu anlamına gelir.

Teoremin ikinci kısmı da aynı yolla ispatlanır. Zayıf çözümün aynı zamanda $H^2(a, b)$ ' den olduğunu varsayarak (12) eşitliğinin sol tarafındaki birinci terime kısmî integralleme formülünü uygularsak, (13) eşitliğini elde ederiz. Bu ise teoremi ispatlar.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Sobolev uzayları, fonksiyonel analizin ve matematiksel fizik problemlerinin çözümünde çok geniş bir yer tutmaktadır. Bu tezde Sobolev uzaylarının tanımı ve bu uzaylara bağlı olan genelleştirilmiş türev anlamı incelenmiş ve Sobolev uzaylarının bazı yatırılma teoremleri verilmiştir. Eliptik tip denklemlerin genelleştirilmiş çözümünün bir varlık ve teklik teoremi ele alınmıştır.

Bu tezde ele alınan konular ile

1. Laplace denkleminin genelleştirilmiş çözümünün varlık ve teklik teoremi ile daha genel eliptik tip lineer kısmî türevli diferansiyel denklemlerin genelleştirilmiş çözümünün varlık ve tekliğini belirleyen genelleştirilmiş teoremler verilebilir
2. Friedrichs eşitsizliklerini kullanarak daha genel Sobolev uzayları için yatırılma teoremleri verilebilir.

KAYNAKLAR

- Dunford, N. And Schwartz, J.T., Linear Operators–I. General Theory, Interscience Public.
New York, 1957
- Hasanov, A.H., Varyasyonel Problemler ve Sonlu Elemanlar Yöntemi, Literatür Yayıncılık
İstanbul, 2001
- Kantorovich, L.V., And Akilov, G.P., Fonctional Analysis, Pergamon press, Oxford, 1982
- Kufner, A., John, O., Fucik, S., Function Spaces, Noordhoff Int. Pub., Leyden, 1977
- Musayev, B., Alp, M., Fonksiyonel Analiz, Balci Yayınları, Kütahya, 2000
- Şuhubi, S.Ş., Fonksiyonel Analiz, İTÜ Vakfı Yayınları, 2001
- Trenogin, B.A., Funksionalniy Analiz, Nauka Pub., Moskova, 1980
- Yosida, K., Functional Analysis, Springer-Verlag, New York, 1968