

153981

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

VARYASYONEL TÜREV YÖNTEMİ
İLE EULER-BERNOULLİ KİRİŞLERİNİN
ÇÖZÜMÜ

Arife ARSLAN
YÜKSEK LİSANS TEZİ
İNŞAAT ANABİLİM DALI
Konya – 2004

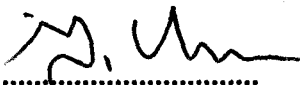
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

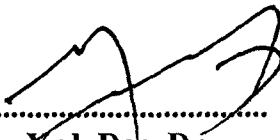
VARYASYONEL TÜREV YÖNTEMİ İLE
EULER-BERNOULLİ KİRİŞLERİNİN ÇÖZÜMÜ

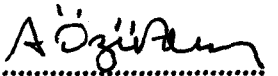
Arife ARSLAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İNŞAAT ANABİLİM DALI

Bu tez, 06.08.2004 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / ~~oyçokluğu~~
ile kabul edilmiştir.


.....
Prof. Dr.
M. Yaşar KALTAKCI


.....
Yrd. Doç. Dr.
Mehmet KAMANLI


.....
Öğr. Gör. Dr.
Atilla ÖZÜTOK
(Danışman)

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

VARYASYONEL TÜREV YÖNTEMİ İLE EULER-BERNOULLİ KİRİŞLERİNİN ÇÖZÜMÜ

Arife ARSLAN
Selçuk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

İnşaat Anabilim Dalı

Danışman : Öğr. Gör. Dr. Atilla ÖZÜTOK

2004,73

Jüri :

Karmaşık yapıların çözümlerinde sayısal yöntemler daha pratik bir anlam ifade eder. Bunun yanında son yıllarda bilgisayar alanındaki ilerlemeler sayısal çözüm yöntemlerinin gelişimini hızlandırmıştır. Bunlardan en yaygın olanları, sonlu farklar ve sonlu elemanlar yöntemidir.

Genel olarak sonlu farklar yönteminde yapı elemanı üzerinde seçilen noktalar için, çoğu kez yerdeğiştirme ve gerilmelere ait diferansiyel denklemler sayısal olarak çözülür. Elde edilen denklemlerde bilinmeyen fonksiyonların ve bunların türevlerinin yerine cebirsel ifadeler konulur. Bu ifadeler farklı noktalardaki fonksiyon değerlerini içerirler. Yapılan çalışmalara bakıldığında zaman bu yöntemin iki farklı formülasyonda kullanıldığı görülmektedir. Bunlar;

- ♦ Klasik Sonlu Farklar Yöntemi
- ♦ Varyasyona Dayalı Sonlu Farklar Enerji Yöntemidir.

Bu çalışmada, Gâteaux diferansiyel yöntemi ile elde edilmiş olan fonksiyonelin sonlu farklara dayalı varyasyonel türev yöntemi ile çözümü araştırılmıştır. Yöntemin uygulanabilirliğini göstermek amacıyla doğru eksenli çubuklar ele alınmıştır. Değişik mesnet tiplerine sahip, sabit ve değişken kesitli kirişler için Fortran programlama dilinde bir bilgisayar programı geliştirilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Gâteaux Diferansiyel Yöntemi, Varyasyonel Türev Yöntemi, Euler-Bernoulli Kirişleri

ABSTRACT

MS Thesis

THE SOLUTION OF EULER-BERNOULLI BEAMS BY VARIATIONAL DERIVATION METHOD

Arife ARSLAN

Selcuk University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Civil Engineering

Supervisor: Instructor Dr. Atilla ÖZÜTOK

2004, 73

Jury :

Numerical methods of complex structures carry more practical means in terms of analysis. In addition, in the recent years advances in computer applications accelerated the improvements in numerical methods. The popular ones are; The Finite Differences Method and The Finite Element Method.

In the last two decades the finite difference method and finite element method became the most popular techniques for computer solutions of complex structures. In general, the differential equations of displacements and stresses are being solved numerically in finite difference method. Instead of the derivatives of these equations, difference expressions of them at the nodes are used. The finite difference method has been comprehensively formulated in many studies. We can classify the finite difference method into two groups according to the literature;

- ♦ Conventional Finite Differences
- ♦ Finite Difference Energy Methods based on Variational Procedures

In this study, the solution of functional determined by Gâteaux differential method is studied by using variational derivation method that is based on finite differences. Euler-Bernoulli Beams are considered for the applicability of the method.. The software is developed using Fortran programming for constant and varying cross-sections beams that have various support conditions.

Key Words : Gâteaux Differential Method, Variational Derivation Method, Euler-Bernoulli Beams

TEŞEKKÜR

Gösterdiği çabalardan ve desteklerinden dolayı tez danışmanım Sayın Dr. Atilla ÖZÜTOK' a, yapmış olduğu değerli eserleriyle çalışmalarımıza ışık tutan Sayın Prof. Dr. A.Yalçın AKÖZ' e, tezimi okuyup eksiklerimi görmemde yardımcı olan bütün hocalarıma teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca yakın ilgilerini ve desteklerini eksik etmeyen değerli aileme sonsuz teşekkürler...



İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SEMBOL LİSTESİ	vi
ŞEKİL LİSTESİ	vii
TABLO LİSTESİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. LİTERATÜR ÖZETİ	7
3. MATERYAL VE METOT	13
3.1. Çubuklar İçin Potansiyel Enerji İfadesi	13
3.1.1. Şekil değiştirme enerjisi	13
3.1.2. Dış kuvvetlerin potansiyel enerjisi	15
3.1.3. Toplam potansiyel enerji	15
3.2. Enerji fonksiyonelinin Bulunması	16
3.2.1. Denge denklemleri ve kinematik bağıntıların elde edilmesi	17
3.2.1.1. Denge denklemlerinin elde edilmesi	17
3.2.1.2. Kinematik denklemlerin elde edilmesi	19
3.2.2. Doğru eksenli çubuklara ait denklemler ve fonksiyonelin bulunması	21
4. SAYISAL ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ	27
4.1. Sonlu Farklar Yöntemi	27
4.1.1. Klasik sonlu farklar yöntemi	32
4.1.1.1. Klasik sonlu farklar yöntemi ile iki ucu basit mesnetli kirişin çözümü	34
4.1.2. Varyasyona dayalı sonlu farklar enerji yöntemi	36
4.1.2.1. Varyasyona dayalı sonlu farklar enerji yöntemi ile iki ucu basit mesnetli kirişin çözümü	37
4.2. Varyasyonel Türev	38
4.2.1. Varyasyonel türev yöntemi ile çubuk sistemlerin çözümü	39

4.2.2. Varyasyonel türev yöntemi ile iki ucu basit mesnetli kirişin çözümü	41
4.2.3. Sonlu fark yöntemlerinin karşılaştırılması	42
4.2.4. Varyasyonel türev yöntemi ile değişken kesitli çubuk sistemlerin çözümü	43
4.3. Sonlu Elemanlar Yöntemi	45
4.3.1. Sonlu elemanlar yöntemi ile çubuk sistemlerin çözümü	46
4.3.2. Sonlu elemanlar yöntemi ile iki ucu basit mesnetli kirişin çözümü	49
5. SAYISAL UYGULAMALAR	52
5.1. İki ucu basit mesnetli giriş	52
5.2. İki ucu ankastre mesnetli giriş	53
5.3. Bir ucu ankastre mesnetli, diğer ucu serbest giriş	56
5.4. Bir ucu ankastre, diğer ucu basit mesnetli giriş	58
5.5. Değişken kesitli iki ucu basit mesnetli giriş	60
6. SONUÇLAR	62
KAYNAKLAR	63
EKLER	68
EK A. Fortran Bilgisayar Dilinde Varyasyonel Türev Yönteminin Programlanması	68

SEMBOL LİSTESİ

σ, ε	: Gerilme ve şekil değiştirme tansörleri
E	: Elastisite modülü
I	: Atalet momenti
$I(y)$	: Fonksiyonel
Q	: Operatör
$\langle, \rangle, [,]$	: İç çarpım
$[,]_\varepsilon, [,]_\sigma$	: Geometri ve dinamik sınır koşulları
$\hat{T}, \hat{M}, \hat{v}, \hat{v}'$	: Bilinen sınır koşulları
u, v, w	: Teğetsel ve normal yerdeğiştirmeler
T	: Kesme kuvveti
M	: Eğilme momenti
q	: Yayılı yük
U	: Şekil değiştirme enerjisi
W	: Dış kuvvetlerin potansiyel enerjisi
π	: Toplam potansiyel enerji
P	: Katsayı matrisi
y	: Bilinmeyen vektör
f	: Yük vektörü
$[k]$	: Sistem rijitlik matrisi
ϕ_i, ϕ_j	: Şekil fonksiyonları

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 3.1 Kiriş üzerinde iç kuvvetlerdeki değişim	18
Şekil 3.2 Eğilme etkisindeki kiriş eleman	21
Şekil 4.1 Sonlu farklar yöntemi için $y = f(z)$ grafiği	29
Şekil 4.2 Sınır koşulları a) Ankastre mesnet b) Basit mesnet	33
Şekil 4.3 İki ucu basit mesnetli kiriş için düğüm noktaları kod numaraları	35
Şekil 4.4 Düğüm noktalarındaki bilinmeyenlerin i düğüm noktasına bağlı olarak gösterilmesi	39
Şekil 4.5 Basit mesnetli kiriş	41
Şekil 4.6 Basit mesnetli kiriş için sonlu fark yöntemlerinin karşılaştırılması	43
Şekil 4.7 Değişken kesitli çubuk için koordinat sistemi	44
Şekil 4.8 Şekil fonksiyonlarının eksen takımı üzerinde gösterilmesi	46
Şekil 4.9 Basit mesnetli kiriş	49
Şekil 5.1 İki ucu basit mesnetli kiriş	52
Şekil 5.2 İki ucu basit mesnetli kirişte eleman sayısına bağlı olarak açıklık ortasındaki çökme değerlerinin karşılaştırılması	53
Şekil 5.3 İki ucu ankastre mesnetli kiriş	54
Şekil 5.4 İki ucu ankastre mesnetli kirişte eleman sayısına bağlı olarak ankastrelik momentlerinin karşılaştırılması	54
Şekil 5.5 İki ucu ankastre mesnetli kirişte elemansayısına bağlı olarak açıklık ortasındaki momentlerin karşılaştırılması	55
Şekil 5.6 İki ucu ankastre mesnetli kirişte eleman sayısına bağlı olarak açıklık ortasındaki çökme değerlerinin karşılaştırılması	56
Şekil 5.7 Bir ucu ankastre mesnetli, diğer ucu serbest kiriş	57
Şekil 5.8 Bir ucu ankastre mesnetli, diğer ucu serbest kirişte eleman sayısına bağlı olarak kiriş serbest ucundaki çökme değerlerinin karşılaştırılması	57
Şekil 5.9 Bir ucu ankastre diğer ucu basit mesnetli kiriş	58
Şekil 5.10 Bir ucu ankastre diğer ucu basit mesnetli kiriş için 'M' değerleri	59
Şekil 5.11 Bir ucu ankastre diğer ucu basit mesnetli kiriş için 'v' değerleri	59

Şekil 5.12 Değişken kesitli basit mesnetli giriş	60
Şekil A1. Programa ait 1.veri dosyasından alınan pencere	68
Şekil A2. Programa ait ikinci veri dosyasından alınan pencere	69
Şekil A3. Ana programdan alınan pencere	70
Şekil A4. Programın sonuç dosyasından alınan pencere	71



TABLO LİSTESİ

Tablo 4.1 Basit mesnetli kiriş için çökme değerlerine ait k değerleri	42
Tablo 5.1 Kirişlere ait parametreler	52
Tablo 5.2 Yirmi elemanlı basit mesnetli kiriş için α değerleri	61



GİRİŞ

Çubuklar iki boyutu üçüncü boyutu yanında küçük olan cisimlerdir. Bu küçüklük oranı yaklaşık 1/10 civarındadır. Bir çubuk elemanı tanımlanırken iki unsurdan bahsedilir. Bunlardan biri 'çubuk eksen' diğeri ise 'çubuk enkesiti'dir. Eksenine dik yüklenmiş çubuklar eğilmeye çalışırlar ve bu tip yapı elemanları 'kiriş' olarak adlandırılır. Kirişler mühendislik uygulamalarında en çok karşılaşılan yapı elemanlarıdır. Geometrik özelliklerine ve buna bağlı olarak uygulanan yükün etkilerine göre genel olarak iki ana başlık altında incelenirler. Bunlar Euler-Bernoulli kirişleri ve Timoshenko kirişleridir. Başlangıçta kiriş eksenine dik olan düzlem kesit alanının, şekil değişiminden sonra da eksene dik ve düzlem kalması varsayımına dayanan Euler-Bernoulli Kiriş Teorisinde sadece eğilme etkileri dikkate alınırken, Timoshenko Kiriş Teorisinde, kiriş kalınlığındaki artışa bağlı olarak eğilme etkisinin yanı sıra kayma etkileri de dikkate alınmaktadır. Literatür araştırması yapıldığı zaman, farklı çözüm yöntemlerinde ve değişik yükleme durumlarında her iki kiriş teorisine ait çok sayıda çalışma yapıldığı görülmektedir (Aköz, Omurtag ve Doğruoğlu (1991), Aköz ve Kadioğlu (1999), Antes (2003), Claeysen ve Sader (2003), Ergüven ve Gedikli (2003)). Bu çalışmalarda, karmaşık geometrik özellikler ve sınır koşullarının oluşturduğu güçlükler nedeniyle yapı elemanlarının analizinde yaklaşık (sayısal) çözüm yöntemleri uygulanmıştır.

Yapı analiz yöntemlerinin tamamı denge ve uygunluk ifadelerinin temel diferansiyel denklemlerini çözmeye dayanır. Analitik çözümler yükün yayılı olması, kesit özelliklerinin ve sınır koşullarının matematiksel ifadelerle tanımlı olması durumlarıyla sınırlıdır. Karmaşık yapıların çözümlerinde sayısal yöntemler daha pratik bir anlam ifade eder. Bununla birlikte son yıllarda bilgisayar alanındaki ilerlemeler sayısal çözüm yöntemlerinin gelişimini hızlandırmıştır. Bunlara örnek olarak;

- ◆ Rayleigh-Ritz Yöntemi
- ◆ Galerkin Yöntemi
- ◆ En Küçük Kareler Yöntemi

- ◆ Sınır Elemanlar Yöntemi
- ◆ Sonlu Farklar Yöntemi
- ◆ Sonlu Elemanlar Yöntemi

olarak sayılabilir. Bunlardan Ritz yöntemi ile sonlu elemanlar ve sonlu farklar yönteminde ilk adım, diferansiyel denkleme karşı gelen $I(y)$ fonksiyonelinin bulunmasıdır. Galerkin yöntemi ile en küçük kareler ve son zamanlarda yaygın olarak kullanılmaya başlanan sınır elemanları yöntemlerinde ise fonksiyonele gereksinim olmadan çözüm bulunabilmektedir.

Son yirmi yıl içerisinde karmaşık yapıların bilgisayar çözümleri için özellikle sonlu farklar ve sonlu elemanlar yöntemi oldukça popüler teknikler olmuştur. Genel olarak sonlu farklar yönteminde yapı elemanı üzerinde seçilen noktalar için, çoğu kez yerdeğiştirme ve gerilmelere ait diferansiyel denklemler sayısal olarak çözülür. Elde edilen denklemlerde bilinmeyen fonksiyonların ve bunların türevlerinin yerine cebirsel ifadeler konulur. Bu ifadeler farklı noktalardaki fonksiyon değerlerini içerirler. Düğüm noktalarına uygulanan denklemlerin sonlu fark katsayıları sınırlarda değiştirilmek zorundadır ve problemin sınır şartlarını sağlamalıdır. Bu durum sonlu elemanlara göre zorluklarından ve dezavantajlarından biridir. Southwell (1940,1946)' in öncülük etmesiyle bu yöntem birçok çalışmada başarılı bir şekilde uygulanmıştır. Forsyth ve Wasow (1960) sınırlarda ve bunlara komşu düğüm noktaları arasında enterpolasyon yaparak eğri sınırları ele almışlardır. Yapılan çalışmalara bakıldığı zaman bu yöntemin iki farklı formülasyonda kullanıldığı görülmektedir. Bunlar;

- ◆ Klasik Sonlu Farklar Yöntemi
- ◆ Varyasyona Dayalı Sonlu Farklar Enerji Yöntemidir.

Klasik sonlu farklar yönteminde çözüm, sonlu fark ifadelerinin bulunan alan denklemleri üzerine doğrudan uygulanmasıyla elde edilmektedir. Klasik sonlu farklara ait bir yaklaşım, Frey (1977) tarafından izoparametrik elemanlar için ortaya konulmuştur. Son zamanlarda bu yaklaşım Dow ve Hardaway (1992), Arad, Segev ve Ben-Dor (1995) tarafından katı cisim mekaniğinde sınırların modellenmesiyle

gerekli fiktif düğüm noktaları için elde edilmiştir. Klasik sonlu farklar yöntemi karmaşık geometrik şekillerin sınır koşullarının probleme yansıtılması sırasında bazı güçlükler çıkarmaktadır. Buna ilave olarak cebir problemleri bir dizi simetrik olmayan denklem takımlarının çözümünü gerektirir. Klasik sonlu farklar yönteminin bu dezavantajlarını ortadan kaldırmak için alternatif bir yöntem olarak varyasyona dayalı sonlu farklar yöntemi geliştirilmiştir. Formülasyon içerisinde virtüel iş ve minimum potansiyel enerji prensiplerinin uygulanmasından dolayı bu yöntem sonlu farklar enerji yöntemi olarak adlandırılmıştır. Varyasyonel yaklaşıma dayalı sonlu farklar yöntemi ilk kez Houbolt (1958) tarafından kiriş ve plakların statik analizi için kullanılmıştır. Daha sonra aynı yöntem kabukların eğilme ve titreşim analizi için Bushnell (1970) ve yine Bushnell ve Almroth (1970) tarafından nonlinear kabukların analizini yapabilmek için kullanılmıştır.

Birçok mühendislik alanında ve diğer bilim dallarında yaygın olarak kullanılan diğer çözüm yöntemlerinden biri ise sonlu elemanlar yöntemidir. Bu yöntem, sürekli olan sistemi problemin karakterine uygun sonlu elemanlara ayırarak elde edilen elemanlar üzerinde iç ve dış kuvvetlerin enerjisinin minimizasyonu ve bu elemanların birleştirilmesi tarzında bir uygulama getirir. Eleman boyutları küçültülerek sonuçlara daha hassas bir şekilde yaklaşmak mümkündür. Ancak, eleman boyutlarının küçültülmesiyle problemin hata oranı azaltılmakta çözüm süresi ise uzamaktadır. Sonlu elemanlar yönteminin avantajlarından biri, sınır şartlarının problemin çözüm sırasına göre en son adımda hesaplara dahil edilmesidir. Böylece, sınır şartlarını probleme uygularken baştan yoğun hesaplara girilmez. Yapılan çalışmalarda sonlu eleman formülasyonu içerisinde farklı eleman modelleri sunulmuştur. Bunlardaki değişiklik, sınır düğüm noktalarında gerekli denge koşullarının ve iç elemanlar için uygunluk şartlarının sağlanmasıyla farklı yerdeğiştirme, gerilme yada her ikisinin birden bilinmeyen olarak seçilmesiyle sağlanmıştır. Buna göre sonlu elemanlar yönteminde kullanılan modeller ;

- ◆ Deplasman Modeli (minimum potansiyel enerji prensibi)
- ◆ Kuvvet Modeli (minimum tamamlayıcı enerji prensibi)
- ◆ Hybrid Model, Mixed Model (Hellinger-Reissner prensibi, Hu-Washizu prensibi, Gâteaux diferansiyeli).

olarak sıralanabilir. Fonksiyonel ifadesi, minimum potansiyel enerji prensibinde deplasmanlara ait denklemlerden, minimum tamamlayıcı enerji prensibinde ise gerilmelere ait denklemlerden oluşmaktadır. Geleneksel sonlu elemanlar yönteminde değişken sayısı daha az olmakla birlikte yüksek mertebeden türevler formülasyon içerisine girmektedir. Diğer taraftan uygunluk şartlarını sağlamak için denge ve uygunluk denklemlerinin düşünüldüğü bütün alan denklemlerini içeren alternatif varyasyonel prensipler olarak mixed/hybrid tipi sonlu eleman modellerinin kullanılması mümkündür. Sonlu eleman modelleri arasındaki temel farklılık, formülasyon içerisinde uygulanan varyasyonel prensiplerin değişmesinden kaynaklanmaktadır. Değişik varyasyonel prensipler hakkında ayrıntılı bilgiler Mang ve ark.(1985) tarafından verilmiştir. Geleneksel sonlu elemanlar analizine ait bir yaklaşım Zienkiewicz ve Cheung (1970) tarafından bulunmuştur. Bu yaklaşımda, deplasmanlar esas değişkenler olarak seçilmiş ve düğüm noktalarına ait deplasman değerleri, tamamlayıcı enerji fonksiyonellerinin ekstremum değerlerinin bulunmasıyla elde edilmiştir. Karışık sonlu elemanlar yöntemi ise, ilk olarak Herrman (1967) tarafından iki boyutlu problemlerin analizi için geliştirilmiştir. Daha sonra yöntem, Reddy ve Oden (1975) tarafından yapı kirişlerinin bir boyutlu problemlerine uygulanmıştır. Sonlu elemanlar yöntemini üretmek için kullanılan yöntemler, yapılan çalışmalardan yola çıkılarak beş ana başlık altında sınıflandırılmıştır.

- ◆ Potansiyel enerji teoremleri
- ◆ Hu-Washizu ve Hellinger-Reissner teorileri
- ◆ Varyasyonel formülasyon
- ◆ Ağırlık formülasyonu
- ◆ Gâteaux türevi

Bir çok çalışmada eleman denklemlerinin elde edilmesinde potansiyel enerji teoremleri kullanılmıştır. Karışık sonlu eleman formülasyonunda kabul edilen varsayımlarda özellikle Hellinger-Reissner ve Hu-Washizu teorileri kullanılmıştır (Rhiu J.J. ve Lee S.W. 1987). Ayrıca değişim yöntemlerinin da sonlu eleman

formüllerinin üretilmesinde kullanıldığı görülmüştür (Bergman V.L. ve Mukherjee S., 1990).

Son yıllarda Aköz ve ark. tarafından Gâteaux diferansiyeli kullanılarak çeşitli problemler için başarılı bir şekilde fonksiyoneller üretilmiştir. Örnek olarak uzay çubuklar için (Aköz ve ark. 1991, Omurtag ve Aköz 1992a), izotropik – ortotropik silindirik kabuklar için (Omurtag ve Aköz 1992b, 1993a), rijit Reissner tipi silindirik kabuklar için (Omurtag ve Aköz 1993b), hiperbolik paraboloid kabuklar için (Omurtag ve Aköz 1994), elastik zemin üzerine oturan kirişler için (Aköz ve Kadioğlu 1996), yine elastik zemin üzerine oturan Kirchhoff tipi ortotropik plaklar için (Özçelikörs ve ark. 1997), izotropik Reissner tipi plaklar için (Aköz ve Eratlı 1992, 1997), elastik zemin üzerine oturan Kirchhoff plaklarının serbest titreşim analizi için (Omurtag, Özütok, Aköz ve Özçelikörs 1997) yapılan çalışmalarda sonlu eleman formülasyonu yardımıyla sayısal uygulamalar üzerinde fonksiyoneller elde edilmiştir.

Basit problemler için Hellinger-Reissner ve Hu-Washizu prensipleri ile de benzer fonksiyoneller elde edilebilmektedir. Fakat Gâteaux diferansiyeli yaklaşımının bazı önemli avantajları vardır (Özütok, 1999). Bunlardan bazıları aşağıdaki gibidir;

- Çubuk elemanlar yanında herhangi lineer veya non-lineer plak ve kabuk teorilerine uygulanabilir.
- Herhangi sürekli bir denklem bu formülasyonda kullanılabilir. Son zamanlarda bu yaklaşım viskoelastik kirişler için kullanılmıştır.
- Bir tek eleman kullanarak sürekli kirişler için doğru sonuç elde edilebilir.
- Kayma kilitlenmesi gözlenmemiştir.
- Çubukların, ince ve kalın plak ve kabukların iç kuvvet, moment, dönme ve yerdeğiştirmeleri hesaplanabilir.
- Verilen alan denklemlerinden, fonksiyonel ve sınır koşulları kolaylıkla elde edilebilir.
- Alan denklemleri ve sınır koşulları sağlam olarak fonksiyonele yansıtılır.
- Alan denklemlerinin uyumluluğu kontrol edilmiş olur.

Bu çalışmada Gâteaux diferansiyel yaklaşımı kullanılarak elde edilen fonksiyonelin sonlu farklar yöntemine dayalı varyasyonel türev yöntemi ile çözümü araştırılmıştır. Varyasyonel türev yönteminin uygulanabilirliğini göstermek için uygulama kolaylığı açısından doğru eksenli (Euler-Bernoulli) çubuklar ele alınmıştır. Euler-Bernoulli kirişlerine ait diferansiyel denklemlerden yola çıkılarak enerji fonksiyoneli, Gâteaux diferansiyel yöntemi ile elde edilmiştir. Dengede bulunan sistemler için, enerjinin minimum olması prensibine göre bilinmeyen olarak alınan çökme ve moment değerleri için, fonksiyonel ifadesinin varyasyonu alınarak temel enerji ifadeleri elde edilmiş ve örnek problemlerde varyasyonel türev ifadeleri bu denklemlere uygulanmıştır. Eleman sayısının artırılmasıyla elde edilen sonuçlar, kesin çözüm ve sonlu eleman çözümlerinden elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.



2. LİTERATÜR ÖZETİ

Karmaşık geometriye sahip yapıların yaklaşık çözümlerinin elde edilmesinde yaygın olarak kullanılan sonlu elemanlar yöntemini üretmek için kullanılan yöntemlerden daha önce bahsedilmiştir. Bunlardan Gâteaux diferansiyel yönteminin diğer iyi bilinen varyasyonel prensiplere (Hu-Washizu ve Hellinger-Reissner prensipleri) göre mevcut olan avantajları, yöntemi son yıllarda yapılan çalışmalarda tercih edilen bir yöntem haline getirmiştir.

Aköz ve ark. tarafından Gâteaux diferansiyeli kullanılarak çeşitli problemler için fonksiyoneller başarılı bir şekilde üretilmiştir. Bu çalışmalara kısaca değinilecek olursa;

Aköz (1985) yapmış olduğu çalışmada, fonksiyonel analiz yöntemini kullanarak düzlem çubuklar için iki yeni enerji fonksiyoneli bulmuştur. Bu fonksiyoneller belirli durumlar için klasik potansiyel enerji ve tamamlayıcı enerji ifadelerine dönüştürülebilmektedir. Yeni enerji fonksiyonellerinin, mühendislikte önemli olan bazı büyüklüklerin bulunmasında, özellikle sonlu elemanlar ve Ritz yöntemi gibi yaklaşık çözüm yöntemleri kullanıldığında klasik fonksiyonellere göre büyük bir avantaj sağladığı görülmüştür. Momentler, yerdeğiştirmelere göre çok daha iyi bir yaklaşımla hatta çoğu kez kesin değerleri ile bulunabilmektedir.

Aköz, Omurtag, Doğruoğlu (1991) tarafından yapılmış olan çalışmada, yeni bir fonksiyonele bağlı olan karışık sonlu eleman denklemleri Gâteaux Diferansiyel yöntemi ile elde edilmiştir. Bu formülasyon keyfi geometri ve değişken kesit alanına sahip üç boyutlu çubuk elemanlar için uygulanmıştır. Sınır koşulları eleman denklemleri içerisinde yer almaktadır. Bilinen değişken düğüm noktası değerleri Lagrange çarpım yöntemiyle işlemlere dahil edilmiştir. Kullanılmış olan bu yöntem, az eleman kullanılması durumunda bile yeterince doğru sonuçlar vermiştir.

Aköz ve Kadioğlu (1996) tarafından keyfi yükleme altındaki elastik zemin üzerine oturan değişken kesit alanına sahip dairesel giriş elemanlar için karışık sonlu elemanlar yöntemi kullanılmıştır. Burada elastik zemin olarak Winkler tipi zemin

düşünülmüştür. Ayrıca elastik zemin üzerine oturan doğru eksenli çubuklar için de sonlu eleman formülasyonu verilmiştir.

Aköz ve Kadioğlu (1999) tarafından Winkler zemini üzerine oturan viskoelastik Timoshenko kirişlerinin statik ve dinamik analizi için karışık sonlu eleman formülasyonu kullanılmıştır. Bu çalışmada, dönüştürülmüş Laplace-Carson uzayında sistematik bir yolla Gâteaux Diferansiyeline bağlı olarak iki yeni fonksiyonel üretilmiştir.

Omurtag, Özütok, Aköz ve Özçelikörs (1997) tarafından elastik zemin üzerine oturan Kirchhoff plaklarının serbest titreşim analizine ait bir yaklaşım Gâteaux diferansiyeline bağlı sonlu elemanlar yöntemiyle ele alınmıştır. Bu çalışmanın temel amacı iyi bilinen varyasyonel prensipler olan Hellinger-Reissner ve Hu-Washizu prensipleri yerine Gâteaux diferansiyelini kullanarak karışık sonlu eleman formülasyonu ile Kirchhoff plakları ve elastik zemin arasında oluşan etkileşimin elde edilmesinde sistematik bir yol vermektir. Zemin tipi, Pasternak zemini ve özel bir durum olarak eğer kayma etkileri ihmal edilecek olursa zemin Winkler zemin tipine dönüşmektedir. Plak kalınlığındaki üniform değişim formülasyon içerisine dahil edilmiştir. Dinamik analizde problem standart özdeğer problemine indirgenmektedir. Elde edilen sonuçlardan elemanın eğilme ve serbest titreşim analizi için doğru sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir.

Elastik zemin üzerine oturan kalın plaklar için karışık sonlu eleman formülasyonuna ait bir uygulama Eratlı ve Aköz (1997) tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada Winkler zeminine oturan Reissner plakları için Gâteaux Diferansiyel yöntemi ile yeni bir fonksiyonel elde edilmiştir. Bu fonksiyonelde yerdeğiştirmeler, iç kuvvetler ve sınır koşulları olmak üzere fonksiyonel içerisinde yer alan 8 adet bağımsız değişken bulunmaktadır. Değişik sınır koşulları çözümlenmiş ve Lagrange çarpım yöntemiyle global sistem içerisine dahil edilmiştir. Formülasyonun ilginç bir özelliği, kullanılan ağ sisteminde eleman sayısının tek ve çift olmasına bağlı olarak sayısal sonuçlar gerçek değerlere alttan ve üstten yaklaşmaktadır.

Eratlı ve Aköz (2002,a)'ün yapmış oldukları çalışmada, Pasternak zemini üzerine oturan Reissner plaklarının serbest titreşim analizi, Gâteaux Diferansiyeline bağlı olarak karışık sonlu elemanlar yöntemi ile yapılmıştır. Pasternak zemini üzerine oturan plaklar için yeni sınır koşulları oluşturulmuştur. Dinamik analizde, problem

standart özdeğer probleminin çözümüne indirgenmiş ve karışık sonlu eleman yöntemi kararlı bir kütle matris formülasyonuna dönüştürülmüştür. Geliştirilen elemanın performansı literatürden bilinen sayısal örneklerle karşılaştırılmıştır. Yazarların yapmış oldukları diğer çalışmalardan biri ise (2002,b) katlanmış plaklar için karışık sonlu eleman formülasyonu ile yapılmış olan çalışmadır. Elde edilen yeni fonksiyonel, iki farklı fonksiyonelin kombinasyonu şeklindedir. Her iki fonksiyonel de düzlem içi ve yanal yük taşıyan kalın plaklar için elde edilmiştir. Mühendislik problemlerinde bilinmeyenler olan kuvvetler ve momentler bu teknikle doğrudan elde edilmiştir.

Aköz, Omurtag (1992)'ın yapmış oldukları çalışmada, Gâteaux Diferansiyel yöntemi kullanılarak geometrik ve dinamik sınır koşullarıyla ince silindirik kabuklar ve uzay çubuklar için yeni fonksiyoneller elde edilmiştir. Bu fonksiyoneller, aynı zamanda klasik potansiyel enerji denklemlerine de dönüştürülebilmektedir. Bulunan fonksiyonellere karışık sonlu eleman formülasyonu içerisinde oldukça faydalı bir yaklaşım olan varyasyonel yöntem uygulanmıştır. Silindirik kabukların ve uzay çubuklarının eleman matrisleri, izoparametrik sonlu eleman formülasyonu kullanılarak değişken kesit alanları için geliştirilmiştir.

Aköz ve Özütok (2000) tarafından Gâteaux Diferansiyel yöntemi kullanılarak, keyfi geometriye sahip ince-kalın kabuklara ait yeni fonksiyonel, dinamik ve geometrik sınır koşulları ile birlikte elde edilmiştir. Bu çalışmada parabolik silindir kabuk ve dairesel silindirik kabuklar incelenmiştir. Bu kabukların sonlu elemanlar yöntemi ile çözülebilmesi için yerdeğiştirme, düzlem içi kuvvetler, düzlem içi kayma kuvvetleri, eğilme momentleri, burulma momentlerine ilave olarak enine kayma kuvvetleri ve dönme deformasyonlarının bilinmeyen olarak tanımlandığı kabuk elemanlar elde edilmiştir.

Daha sonra bu yöntem kullanılarak, çeşitli kabuk problemleri için fonksiyoneller üretilmiş ve karışık sonlu eleman formülasyonu ile çok sayıda çalışma yapılmıştır (Omurtag ve Aköz 1993a,b, 1994, 1995). Bunlar dışında karışık sonlu eleman formülasyonunda kabul edilen teorilerin kullanıldığı çeşitli çalışmalar yapılmıştır (Bathe 1982, Prathap ve Babu 1986a,b, Ergüven ve Gedikli 2003).

Son yıllarda bilgisayar kullanımındaki ilerleme, sonlu elemanlar yöntemi yanında sonlu farklar gibi diğer sayısal yöntemlerin gelişimini de hızlandırmıştır.

Literatüre bakıldığı zaman, değişik yapı elemanlarına ait gerilme ve yerdeğiştirmeler gibi bilinmeyenlerin bulunmasında, özellikle karmaşık problemlerin çözümünde sonlu farklar yönteminin yaygın bir şekilde kullanıldığı görölmektedir.

Yapılan çalışmalarda sonlu farklar yöntemi, klasik sonlu farklar ve varyasyona dayalı sonlu farklar enerji yöntemi olarak iki farklı şekilde kullanılmıştır. (Klaus-Jürgen Bathe 1982)

Klasik sonlu farklar yöntemini ait bir yaklaşım Al-Amery ve Roberts (1990) tarafından kompozit kirişlerin kısmi etkileşim analizi için ortaya konulmuştur. İki malzeme arasındaki farklılıkları dikkate alarak nonlinear malzeme ve kayma etkilerini içeren genel bir fomülasyon geliştirilmiştir. Dört temel denge ve uygunluk denklemlerinin sayısal çözümleri sonlu fark formunda yerdeğiştirme türevlerinin ifade edilmesiyle ve nonlinear cebirsel denklemlerin sırayla çözümlenmesiyle elde edilmiştir.

Arad, Segev ve Ben-Dor (1995), kısmi diferansiyel denklemlere ve sınır koşullarına dayalı denge problemlerinin çözümü için geliştirilmiş bir sonlu farklar yöntemini kullanmışlardır. İki boyutlu elastisite problemlerinin çözümü için bir bilgisayar programı yazılmış ve çözülen sayısal örneklerde geliştirilen bu yöntemin klasik sonlu farklara olan avantajları açık bir şekilde gösterilmiştir. Klasik sonlu farklara göre bu avantajlar, keyfi ağ sisteminin kullanılabilirliğı, problem içerisinde farklı noktalarda farklı mertebeden doğruluk mertebeleri için benzer yaklaşımların kullanılabilmesi, sınır koşullarına yaklaşımların geliştirilmiş olması, sınır koşullarının ele alınmasında gerekli olan dış ya da hayali düğüm noktalarının yok edilebilmesi olarak sıralanmıştır. Amaçlanan bu yöntemle aynı sayıda düğüm noktası kullanılarak daha doğru bir yaklaşık çözüme ulaşmak mümkün olabilmektedir.

Liszka ve Orkisz (1980), lineer denklemlerden kurulan şekil formu içerisinde komşu düğüm noktalarının sayısını arttırmayı amaçlamıştır. Aradıkları çözüm, türettikleri formun minimize edilmesiyle elde edilmiştir. Bu yolla beş bilinmeyenli beş denklem elde etmişlerdir.

Orduna-Bustamente (1993) tarafından kiriş denklemlerinin gereken özdeğer yaklaşımları sonlu fark fomülasyonu ile çeşitli adım aralıklarında hesaplanmıştır. Sonuçları geliştirmek için ise Richardson ekstrapolasyonu kullanılmış, üniform ve

üniform olmayan durumlar için doğal frekanslar, kesin çözümlerle ve sonlu eleman çözümleriyle karşılaştırılmış ve sağladığı görülmüştür.

Klasik sonlu farklar yöntemi değişik problemlere iyi bir yaklaşımla uygulanmasına rağmen, sınır koşullarının oluşturulmasında karşılaşılan güçlükler nedeniyle, kirişler dışında plak ve kabuklar gibi diğer yapı elemanlarında varyasyon prensiplerinin kullanıldığı sonlu farklar enerji yönteminin daha yaygın bir şekilde uygulandığı görülmektedir. Bu nedenle sonlu farklar enerji yöntemi, kirişlerden kabuklara kadar her tip yapı elemanı için klasik sonlu farklara göre daha elverişli bir çözüm yöntemidir.

Verma ve Dey (1991) tarafından varyasyonel sonlu farklar yöntemiyle eğrisel plana sahip köprü yapıların integral analizi hesaplanmıştır. Bu çalışmada kullanılan yöntem, sonlu farklar ile minimum potansiyel enerji prensiplerinin birleştirilmesi tarzında bir yöntemdir.

Barve ve Dey (1983), plak eğilme problemleri için izoparametrik sonlu farklar enerji yöntemini geliştirmişlerdir. İzoparametri kavramı, eğri sınırlara sahip karmaşık plak eğilme problemlerinin ele alınmasında yöntemi, daha etkili ve çok yönlü bir yöntem haline getirir. Bu yaklaşım, sonlu farklar enerji yönteminin dezavantajlarını ortadan kaldırmış ve değişik problemlere uygulanmasını mümkün kılmıştır. Bu formülasyonun doğruluğunu ve güvenilirliğini kontrol edebilmek için değişik şekillerde çeşitli izoparametrik plaklar çözülmüş ve sonuçlar mevcut analitik ve nümerik sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Plak problemlerinin çözümü için varyasyon hesabına dayanan sonlu farklar yönteminin kullanıldığı çalışmalardan bir diğeri ise Singh ve Dey (1990)' in Sector plaklarının serbest titreşimini elde etmek için yapmış oldukları çalışmadır. Aynı şekilde (1992) de periyodik normal ve kesme yükleri etkisi altındaki dikdörtgen plakların dinamik kararsız davranışlarını inceledikleri çalışma ile Aksu ve Felemban' ın (1992) köşe noktalarından mesnetli Mindlin Plakları'nın serbest titreşim karakteristiklerini inceledikleri çalışma da örnek olarak verilebilir.

Son yıllarda yapılan çalışmalardan biri Ergün ve Kumbasar'ın (2002) geliştirilmiş sonlu fark yöntemi ile plak problemlerinin analizini yaptıkları çalışmadır. Bu çalışmada, sonsuz bir plak alınarak belirli bir bölgesi için çökme

yüzeyi tanımlanmakta ve sonsuz plak çökme yüzeyini oluşturan yükler, plak diferansiyel denkleminde yararlanılarak bulunmaktadır.

Johnson (1970), ince kabukların statik lineer elastik deformasyonunu bulabilmek için varyasyona dayalı sonlu farklar yöntemini kullanmıştır.

Sonlu farklar yöntemi, yeterli bir sayısal çözüm yöntemi olarak iyi biliniyor olmasına rağmen daha önce plak problemlerinden sadece ince plaklar için kullanılmıştır. Ng ve Bencharif (1991) ise basit mesnetli ve ankastre, kalın dikdörtgen plaklar için sonlu farklar yöntemini kullanmışlardır. İlk olarak ankastre mesnetli, kare izotropik homojen kalın plakların davranışını göstermek için uygulanmıştır. Daha sonra benzer şekilde basit mesnetli kare plaklar için uygulanmıştır. Çözüm, sınırlı ağ boyutları kullanılarak özel bir plak dönme yönü ve sınır koşullarıyla kalın plaklar için elde edilmiştir. Çözümün hassasiyetini ve doğruluğunu arttırmak için daha hassas fonksiyonları sağlayan, ağ boyutlarını otomatik olarak oluşturan bir bilgisayar programından faydalanılmış ve iyi bir yaklaşım elde edilmiştir.

3. MATERYAL VE METOT

Karmaşık yapıların çözümlerinde sayısal yöntemlerin kullanımları, bilgisayar alanındaki gelişmelere bağlı olarak yaygınlaşmıştır. Yaygın olarak kullanılan sayısal yöntemlerle yapılan bu çalışmada, kesin sonuca en iyi yaklaşımı veren ve diğer yaklaşık yöntemlere göre bir takım avantajları olan Gâteaux diferansiyeli yönteminden faydalanılmıştır.

3.1. Çubuklar İçin Potansiyel Enerji İfadesi

3.1.1. Şekil değiştirme enerjisi

Daha önceden de bahsedildiği gibi Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre, şekil değiştirmeden önce düzlem ve eksene göre dik olan kesitler, şekil değiştirmeden sonra da düzlem ve çubuk eksenine dik kalmaya devam ederler. Bu yüzden hiçbir kayma gerilmesine rastlanmaz. Sadece eğilmeden meydana gelen normal gerilme mevcuttur. Bu normal gerilme,

$$\sigma = \frac{M}{I} y \quad (3.1)$$

olarak verilir. Burada M eğilme momenti, y kesit alanının merkezine olan mesafe, I ise kesitin atalet momentidir. Kirişe ait genel şekil değiştirme enerjisi formülü,

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \{\sigma\} \{\varepsilon\} dV \quad (3.2)$$

olmak üzere burada $\{\sigma\}$ bütün gerilme bileşenlerini ifade eden gerilme vektörü, $\{\varepsilon\}$ da yine bütün şekil değiştirme bileşenlerini kapsayan vektördür. Fakat Euler-Benoulli kirişlerinde söz konusu olan sadece normal (eksenel) gerilme bileşenidir. Bu yüzden enerji ifadesini,

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \sigma \cdot \varepsilon \cdot dV \quad (3.3)$$

şeklinde yazmak yeterlidir. Lineer elastik izotrop malzeme kabulünden dolayı yukarıdaki denklemde, ε şekil değiştirme ifadesi yerine, E elastisite modülüne bağlı ifadesi yazılacak olursa (3.3) denklemini,

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \sigma \left(\frac{\sigma}{E} \right) dV \quad (3.4)$$

şeklinde yazmak mümkündür. Bundan başka (3.1) denklemini (3.4) denkleminde yerine koyar, işlemlerde düzenleme yapılırsa,

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{M^2}{EI} \right) dz \quad (3.5)$$

formülü elde edilir. Burada EI eğilme rijitliği, M ise eğilme momentidir. v düşey yerdeğiştirme cinsinden moment ifadesi;

$$M = -EI \left(\frac{d^2 v}{dz^2} \right) \quad (3.6)$$

olmak üzere enerji denkleminde yerine konulduğu zaman,

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{d^2 v}{dz^2} \right)^2 dz \quad (3.7)$$

denklemini bulunur. Bu da enerji denkleminin yerdeğiştirme cinsinden ifadesidir.

3.1.2. Dış kuvvetlerin potansiyel enerjisi

Eğer kiriş elemanı y doğrultusunda sabit, düşey q yayılı yükü ile yüklü ise, dış kuvvetlerin yapmış oldukları iş,

$$W = - \int_0^L q \cdot v \cdot dz \quad (3.8)$$

formülü yardımıyla bulunur.

3.1.3. Toplam potansiyel enerji

Verilen bir kiriş eleman için toplam potansiyel enerji, iç kuvvetlerin yapmış oldukları iş ve dış kuvvetlerin yapmış oldukları işin toplamı şeklinde verilir. Buna göre daha önceden elde edilmiş olan şekil değiştirme enerjisi ve dış kuvvetlerin potansiyel enerjisi ifadelerini toplamak suretiyle kiriş elemanlara ait toplam potansiyel enerji denkleminin elde edilmesi mümkündür. Buradan toplam potansiyel enerji ifadesi,

$$\pi = U + W$$

$$\pi = \frac{1}{2} \int_0^L EI (v'')^2 dz - \int_0^L q v dz \quad (3.9)$$

olarak elde edilir.

3.2. Enerji Fonksiyonelinin Bulunması

Enerji yöntemleri, belirli bir fonksiyoneli ekstremum yapan çözümler aranması esasına dayanmaktadır. Fonksiyonellerin ekstremum özelliklerinin incelendiği matematik dalına ise varyasyon (değişim) yöntemleri adı verilir.

Varyasyon yöntemleri, mekanikte geniş bir uygulama alanına sahiptir. Fiziksel problemler, diferansiyel denklem ve sınır koşulları ile ifade edilebildiği gibi, bazı sınır koşullarını sağlayan fonksiyonlar arasında bir fonksiyoneli stasyoner yapan fonksiyonun bulunmasına da getirilebilir. Bu fonksiyonel enerji gibi bir fiziksel anlamı tanımlayabilen skaler bir büyüklüktür (Aköz, 1985).

Bir fonksiyonel,

$$I[y] = \int F(z, y, y') dz \quad (3.10)$$

gibi integral içinde, bilinmeyen fonksiyonla, bu fonksiyonun türevleri şeklinde tanımlanabilir.

Varyasyonel çözümde temel problem $I[y]$ fonksiyonellerini stasyoner yapan $y(z)$ fonksiyonunu bulmaktır. Burada z , serbest değişkeni, $y' = dy/dz$ bağımlı değişkene ait türevi ve I fonksiyonel ifadesini göstermektedir.

Görüldüğü gibi fonksiyonel, kaynağında fonksiyonlar, amacında ise reel sayılar olan bir operatördür.

Fiziksel bir olayın diferansiyel denklem ve sınır koşulları belli ise bunlara eşdeğer fonksiyonel hesaplanabilir. Aynı şekilde bir fonksiyonel belli ise bu fonksiyonelden bu olaya ait diferansiyel denklem ve sınır koşulları da hesaplanabilir.

Şekil değiştiren cisim mekaniği için, diferansiyel denklemler verildiğinde enerji fonksiyonelinin bulunuşu genel olarak Aköz (1985)' ün yapmış olduğu çalışmada açıklanmış, ayrıca düzlem ve uzay çubuklar için zamana bağlı ve statik hallerde kullanılacak fonksiyoneller elde edilmiştir. Bu yöntemle elde edilen enerji fonksiyonellerinin, özellikle mühendislikte önemli olan moment değerlerinin bulunması için yaklaşık çözüm yöntemleri kullanıldığında, klasik fonksiyonellere

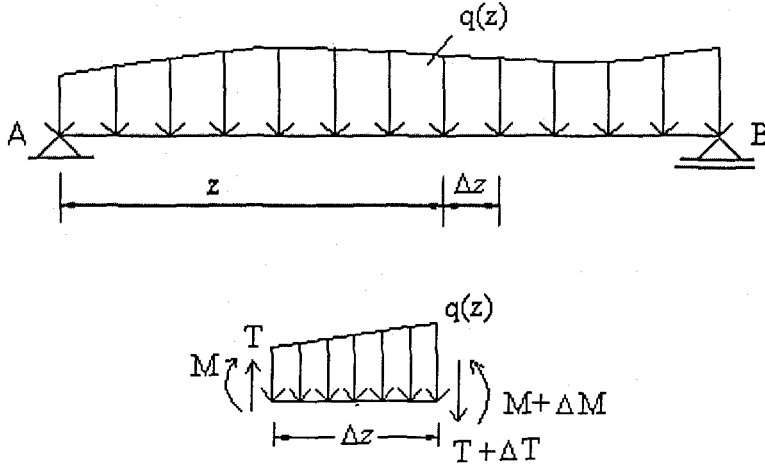
göre büyük bir avantaj sağladığı görülmüştür. Momentler, yerdeğiştirmelere göre çok daha büyük bir yaklaşımla, hatta çoğu zaman kesin değerleri ile bulunabilmiştir. Bu çalışmada, Aköz (1985) tarafından Gâteaux diferansiyeli kullanılarak çubuklar için elde edilen fonksiyonel kullanılmıştır. Fonksiyonelin elde edilmesinde Gâteaux diferansiyel yaklaşımıyla, verilen diferansiyel denklemlerin potansiyel olup olmadıkları incelenmiş ve çubuklara ait fonksiyonel geometrik ve dinamik sınır koşulları ile birlikte elde edilmiştir.

3.2.1. Denge denklemleri ve kinematik bağıntılarının elde edilmesi

Kirişlere ait denge denklemlerinin ve kinematik bağıntılarının elde edilebilmesi için birkaç yöntem bulunmakla birlikte, bu çalışmada amaç, varyasyona dayalı bir hesap yapmak olduğu için denge denklemleri bulunurken, yayılı yükle yüklenmiş kiriş elemanının bir kesitinden diğerine değişen kuvvetlerin ve momentlerin dengede olması koşuluna bağlı olarak diferansiyel denklemler elde edilmiştir. Kinematik bağıntısının elde edilmesi için ise, enerjinin varyasyonu alınmış, yani Euler-Lagrange denklemi çıkarılmıştır. Bu işlemin temeli, dengede olan sistemler için enerjinin minimum olması koşuluna dayanmaktadır.

3.2.1.1. Denge denklemlerinin elde edilmesi

Denge denklemleri, kirişe etkiyen dış yüklerin iç kuvvetler tarafından nasıl taşındığını tanımlarlar. Bunun için Şekil(3.1) de görüldüğü gibi, q yayılı yüküyle yüklü kiriş elemandan çıkarılan Δz uzunluğundaki küçük bir kiriş parçasının dengede olduğu düşünölmüştür.



Şekil 3.1 Kiriş üzerinde iç kuvvetlerdeki değişim

Şekil (3.1)' de görülen kiriş elemanın düşey dengesi yazılır;

$$T - (T + \Delta T) - q(z)\Delta z = 0 \quad (3.11)$$

gerekli işlemler yapılırsa;

$$\frac{dT}{dz} = -q(z) \quad (3.12)$$

denklemini elde edilir. Görüldüğü gibi, kesme kuvvetindeki değişim oranı, yükün ters işaretlisine eşittir. Kiriş üzerinde herhangi bir noktaya göre moment denge denklemi yazılırsa,

$$M + \Delta M + q(z)\Delta z \frac{\Delta z}{2} - M - T\Delta z = 0 \quad (3.13)$$

elde edilir. (3.13) denklemi düzenlenirse,

$$\Delta M = T\Delta z - q(z)\frac{\Delta z^2}{2} \quad (3.14)$$

elde edilir. Buradaki ikinci terim, merteye itibariyle birinci terimden küçük olduğu için ihmal edilebilir. Aynı şekilde her iki taraf Δz ' e bölünür, $\Delta z \rightarrow 0$ ' iken limiti alınırsa,

$$\frac{dM}{dz} = T \quad (3.15)$$

bulunur. Bu bağıntı ise, eğilme momentindeki değişim oranının kesme kuvvetine eşit olduğunu gösterir. (3.12) denkleminin ve (3.15) de yerine konulmasıyla;

$$\frac{d^2 M}{dz^2} = -q(z) \quad (3.16)$$

elde edilen diferansiyel denklem ise, yayılı yük ile moment arasındaki denge denklemini verir. Denge denklemlerinin elde edilmesi sırasında, şekil değiştirmemiş elemanın dengesi kullanılabilecek kadar, geometrik değişimin çok küçük olduğu kabul edilmiştir.

3.2.1.2. Kinematik denklemlerin elde edilmesi

q üniform yayılı yükü ile yüklenmiş bir kiriş elemanına ait potansiyel enerji ifadesi (3.9) denkleminde verilmişti. Fonksiyonun varyasyonu alınırsa,

$$\delta\pi = \int_0^L [EIv''(\delta v)'' - q(\delta v)] dz = 0 \quad (3.17)$$

bulunur. İlk terimin kısmi integrasyonu alındığı zaman,

$$\begin{aligned}
\int_0^L EI v'' (\delta v)'' dz &= EI v'' (\delta v)' \Big|_0^L - \int_0^L \left(\frac{d}{dz} (EI v'') \right) (\delta v)' dz \\
&= EI (\delta v)' \Big|_0^L - \left(\frac{d}{dz} (EI v'') \right) (\delta v) \Big|_0^L + \int_0^L \left(\frac{d^2}{dz^2} (EI v'') \right) (\delta v) dz
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadelerin (3.17) denkleminde yerlerine konulmasıyla enerji ifadesindeki değişim,

$$\delta \pi = \int_0^L \left[\left(\frac{d^2}{dz^2} (EI v'') \right) - q \right] (\delta v) dz + EI v'' (\delta v)' \Big|_0^L - \left(\frac{d}{dz} (EI v'') \right) (\delta v) \Big|_0^L = 0 \quad (3.18)$$

olarak bulunur. Son iki ifade,

$$EI v'' (\delta v)' \Big|_0^L - \left(\frac{d}{dz} (EI v'') \right) (\delta v) \Big|_0^L = 0 \quad (3.19)$$

olmak üzere sınır koşullarını verir. İlk terim ise,

$$\left[\left(\frac{d^2}{dz^2} (EI v'') \right) - q \right] = 0 \quad (3.20)$$

Euler-Lagrange denklemidir. Bu denklemdeki q yayılı yük ifadesi yerine denge denklemlerinden elde edilen (3.16) denklemi yazılacak olursa,

$$\frac{d^2}{dz^2} (EI v'') = - \frac{d^2 M}{dz^2} \quad (3.21)$$

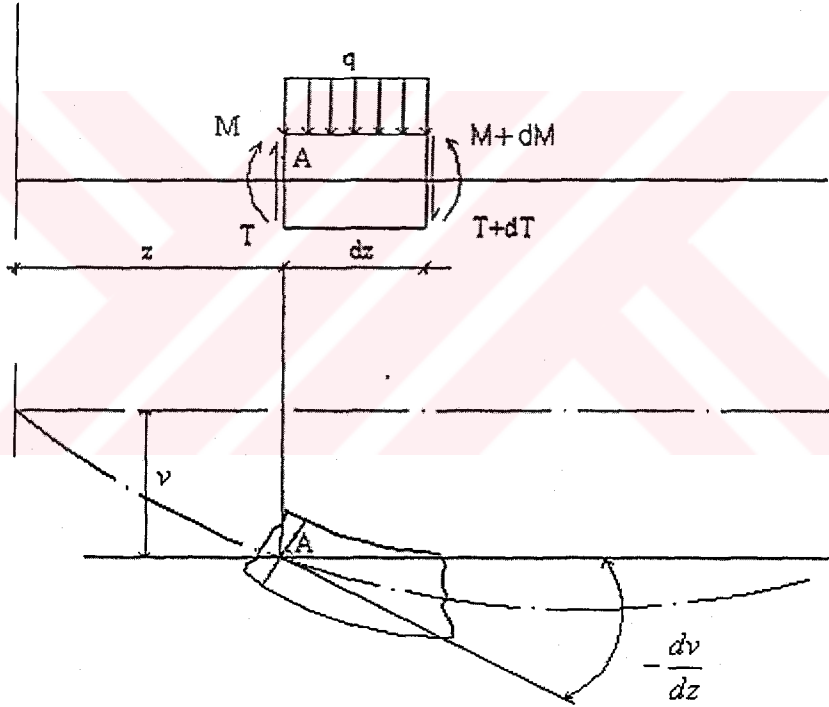
denklemi elde edilecektir. Son olarak türev ifadeleri birbirini götürürse,

$$- \frac{d^2 v}{dz^2} - \frac{M}{EI} = 0 \quad (3.22)$$

denklemleri bulunur ki, bu da kirişe ait kinematik denklemlerden başka bir şey değildir.

3.2.2. Doğru eksenli çubuklara ait denklemler ve fonksiyonelin bulunması

Bu aşamada, uygulama kolaylığı açısından, doğru eksenli çubuklar (Euler-Bernoulli Kirişleri) ele alınacaktır. Şekil (3.2)' de verildiği gibi bir eksen takımı seçilirse, eğilme etkisindeki kiriş eleman için iç kuvvetlerdeki değişim, çökme ve dönme değerleri z ' nin fonksiyonu olacaktır.



Şekil 3.2 Eğilme etkisindeki kiriş eleman

Şekil (3.2)' den de görüldüğü gibi, kesme etkilerini ihmal edip sadece eğilme momentinin tesiri altında şekil değiştirme yaptığı kabul edilen Euler-Bernoulli kirişleri için, şimdiye kadar elde edilmiş olan denge ve kinematik denklemler ve

bunlara ilaveten yazılan sınır koşulları, fonksiyonel elde edilirken kullanılan alan denklemlerini oluşturur (Aköz, 1985). Bu denklemler düzenli bir şekilde aşağıda verilmiştir.

$$-\frac{d^2 M}{dz^2} - q = 0 \quad \text{Denge Denklemi} \quad (3.23)$$

$$-\frac{d^2 v}{dz^2} - \frac{M}{EI} = 0 \quad \text{Kinematik Denklem} \quad (3.24)$$

$$\left. \begin{array}{l} -v_0 = -\hat{v}_0 \\ v'_0 = \hat{v}'_0 \end{array} \right\} \quad \text{Geometrik Sınır Koşulları} \quad (3.25)$$

$$\left. \begin{array}{l} -M_0 = -\hat{M}_0 \\ T_0 = \hat{T}_0 \end{array} \right\} \quad \text{Dinamik Sınır Koşulları} \quad (3.26)$$

Burada M ve T kesit tesirleri olan moment ve kesme kuvvetini, v elastik eğri fonksiyonunu, EI eğilme rijitliğini, şapkalı değerler ise çubuk uçlarında bilinen sınır koşullarını oluşturmaktadır. Çubuklar için sınır koşullarını da içerecek şekilde alan denklemleri operatör formda yazılabilir.

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P} \mathbf{y} - \mathbf{f} = 0 \quad (3.27)$$

olmak üzere, (3.23-24-25-26) denklemleri de kullanılarak $\mathbf{P}$, $\mathbf{y}$ ve $\mathbf{f}$ değerleri matris formunda,

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{d^2}{dz^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{d^2}{dz^2} & -\frac{1}{EI} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v \\ M \\ v_0 \\ v_0' \\ M_0 \\ T_0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} q \\ 0 \\ \hat{T}_0 \\ -\hat{M}_0 \\ \hat{v}_0' \\ \hat{v} \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

olarak ifade edilir. (3.23-3.26) denklemlerinde verilen alan denklemlerine ait fonksiyonelin elde edilmesi için amaca uygun Gâteaux diferansiyel yöntemi kullanılmıştır. Burada basitlik için temel kavram ve tanımlar verilecektir.

Q operatörüne ait fonksiyoneli bulmadan önce Q operatörünün potansiyel olup olmadığını araştırmak gerekir (Aköz, 1985). Bunu yapabilmek için Q sürekli bir operatörse,

$$\langle dQ(y; \bar{y}), y^* \rangle = \langle dQ(y; y^*), \bar{y} \rangle \quad (3.29)$$

koşulunun sağlanması gerekir. Burada $\bar{y}, y^*$ büyüklükleri y' nin içinde bulunduğu uzayın elemanlarıdır. $dQ(y; \bar{y})$ ve $dQ(y; y^*)$ ifadeleri ise Q operatörünün Gâteaux türevleri ve τ skaler bir büyüklük olup,

$$dQ(y; \bar{y}) = \frac{\partial Q(y + \tau \bar{y})}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} \quad (3.30)$$

işleminin sonucunda;

$$dQ(y, \bar{y}) = \begin{Bmatrix} -\bar{M}'' \\ -\bar{v}'' - \bar{M} / EI \\ \bar{T}_0 \\ -\bar{M}_0 \\ \bar{v}_0' \\ -\bar{v}_0 \end{Bmatrix} \quad dQ(y, y^*) = \begin{Bmatrix} -M^{*''} \\ -v^{*''} - M^* / EI \\ T_0^* \\ -M_0^* \\ v_0^{*'} \\ -v_0^* \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$

değerleri bulunur. Denklem (3.29) daki tırnak parantez, iç çarpımı göstermektedir. Bunların açık ifadeleri;

$$\begin{aligned} \langle dQ(y, \bar{y}), y^* \rangle = & -[\bar{M}'', v^*] - [\bar{v}'' + \bar{M} / EI, M^*] + [\bar{T}, v^*]_\sigma \\ & - [\bar{M}, v^{*'}]_\sigma + [\bar{v}', M^*]_\varepsilon - [\bar{v}, T^*]_\varepsilon \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \langle dQ(y, y^*), \bar{y} \rangle = & -[M^{*''}, \bar{v}] - [v^{*''} + M^* / EI, \bar{M}] + [T^*, \bar{v}]_\sigma \\ & - [M^*, \bar{v}']_\sigma + [v^{*'}, \bar{M}]_\varepsilon - [v^*, T]_\varepsilon \end{aligned} \quad (3.33)$$

olarak bulunur. Burada köşeli parantezler bölgede iç çarpımı gösterir. $f=f(z)$ ve $g=g(z)$ bölgede tanımlanan iki fonksiyon olmak üzere f ve g' nin değişik iç çarpımları ve sınır koşullarının gösterim şekilleri,

$$[f, g] = \int_0^l f \cdot g \cdot dz$$

$[f, g]_\sigma = f \cdot g$	Dinamik sınır koşulu noktasında geçerli	(3.34)
$[f, g]_\varepsilon = f \cdot g$	Geometrik sınır koşulu noktasında geçerli	
$[f, g]_0 = f \cdot g$	Her iki noktada geçerli	

olarak verilir. Bu tanımlardan sonra (3.29) denklemi' nin sağlandığını göstermek için ikinci dereceden olan türev ifadeleri iki kez kısmi integrasyonla indirgenir.

$$\begin{aligned} [\bar{v}'', M^*] &= [\bar{v}, M^{*''}] + [\bar{v}', M^*]_0 - [\bar{v}, T^*]_0 \\ [v^{*''}, \bar{M}] &= [v^*, \bar{M}''] + [v^{*'}, \bar{M}]_0 - [v^*, \bar{T}]_0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

Bu ifadeler sırasıyla (3.32) ve (3.33) de yerine konulursa eşitliğin sağlandığı görülür. Bu durumda Q operatörü potansiyeldir. Buna ait fonksiyonel ise;

$$I(y) = \int_0^l \langle Q(sy), y \rangle ds \quad (3.36)$$

şeklinde bulunur. Burada s skaler bir büyüklüktür. Q operatörüne ait ifade yukarıda yerine konulursa I(y) fonksiyoneli;

$$\begin{aligned} I(y) &= -\frac{1}{2} [M'', v] - [q, v] - \frac{1}{2} [v'', M] - \frac{1}{2} \left[\frac{M}{EI}, M \right] - [v, \hat{T}]_\sigma \\ &\quad - \frac{1}{2} [M, v']_\sigma + \frac{1}{2} [v', M]_\epsilon - [\hat{v}', M]_\epsilon - \frac{1}{2} [v, T]_\epsilon + [\hat{v}, T]_\epsilon + [\hat{M}, v']_\sigma \end{aligned} \quad (3.37)$$

olarak bulunur (Aköz 1985). Görüldüğü gibi, fonksiyonel ifadesinde ikinci mertebeden türev ifadeleri yer almaktadır. Dengede olan cisimler için enerjinin minimum olması prensibine bağlı olarak, ikinci mertebeden türev ifadeleri birer kez indirgenerek birinci türevinin sıfıra eşitlenmesi gerekir. Bu sebeple $[M'', v]$ ve $[v'', M]$ terimlerinin bir kez kısmi integrasyonu alınıp yerlerine konulursa;

$$\begin{aligned} I(y) &= [M', v'] - [q, v] - \frac{1}{2} \left[\frac{M}{EI}, M \right] - [\hat{v}', M]_\epsilon \\ &\quad - [v, \hat{T}]_\sigma - [(M - \hat{M}), v']_\sigma + [(\hat{v} - v), T] \end{aligned} \quad (3.38)$$

denklemleri elde edilir. Gâteaux diferansiyel yöntemi yardımıyla bulunan bu fonksiyonelde, görüldüğü gibi bilinmeyen olarak seçilen moment ve çökme değerleri aynı anda fonksiyonele yansıtılmış ve sınır şartlarının önceden bilinmesine gerek kalmadan işlemler sonucunda kolaylıkla elde edilebilmiştir. Sonlu elemanlar yöntemi ile daha önceden denenmiş ve iyi bir yaklaşım elde edilmiş olan bu yöntem, bu çalışmada sonlu fark ifadeleri uygulanacak ve kullanılan bu yöntem varyasyonel türev yöntemi olarak adlandırılacaktır. Bundan sonraki adımda, bilinmeyen moment ve çökme değerleri, değişik sınır koşullarına sahip kirişler için, Fortran ortamında hazırlanan bilgisayar programı ile çözümlenecek ve yaklaşık çözüm yöntemlerinden elde edilen sonuçların, gerçek çözüme yaklaşımı grafik olarak gösterilecektir. Şimdi de kullanılan yaklaşık çözüm yöntemlerinden kısaca bahsedilecektir.



4. SAYISAL ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

4.1. Sonlu Farklar Yöntemi

Sonlu farklar yöntemi, diferansiyel denklemleri, sonlu sürekli bir sisteme indirgemedir. Bu yöntem, 19. y.y.' da Boole ve ark. tarafından resmi olarak kullanılmaya başlanmıştır. Sözü edilen bu indirgeme, bilinmeyen fonksiyonların ve bunların türevlerinin yerine farklı noktalardaki fonksiyon değerlerini içeren cebirsel ifadelerin konulması işlemlerini kapsar. Sonlu farklar yöntemiyle yapılmış olan çalışmalara genel olarak bakıldığı zaman, büyük bir kısmında enerji ifadelerinin kullanıldığı varyasyon hesabının önemli rol oynadığı görülmüştür.

Sonlu farklar yönteminin temeli Taylor Serisi açılımına dayanmaktadır. Buna göre, $y=f(z)$ fonksiyonu $(R-z_0, R+z_0)$ aralığında tanımlı, sürekli ve türevleri de sürekli ise,

$$f(z) = f(z_0) + \frac{(z-z_0)}{1!} f'(z_0) + \frac{(z-z_0)^2}{2!} f''(z_0) + \dots + \frac{(z-z_0)^n}{n!} f^n(z_0) + \dots \quad (4.1)$$

açılımına, $y=f(z)$ fonksiyonunun $z = z_0$ civarında Taylor Serisi açılımı denir. z_0 noktasından h mesafesi kadar ilerideki ve gerideki noktalar için Taylor Serisi açılımı yazılmak istenirse;

$z=z_0+h$ için:

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + \frac{h}{1!} f'(z_0) + \frac{h^2}{2!} f''(z_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^n(z) + \dots \quad (4.2)$$

$z=z_0-h$ için:

$$f(z_0 - h) = f(z_0) - \frac{h}{1!} f'(z_0) + \frac{h^2}{2!} f''(z_0) - \dots + \frac{h^n}{n!} f^n(z) + \dots \quad (4.3)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlere bağılı olarak türev ifadesi, i noktasından ilerdeki noktaları kullanarak aşağıdaki şekilde hesaplanır;

$$f_{i+1} = f_i + \frac{h}{1!} f_i' + \frac{h^2}{2!} f_i'' + \frac{h^3}{3!} f_i''' + \dots$$

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - \frac{h}{2!} f_i'' - \frac{h^2}{3!} f_i''' \dots \quad (4.4)$$

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + O(h)$$

Buradaki h , problemin hassaslığına göre değişen küçük bir değer, $O(h)$ ise, sıfıra yaklaşık bir değerdir ve kesme hatasını verir. Ancak, işlemlerde $O(h)$ değeri küçük bir değer olduğu için dikkate alınmaz. Bu şekilde türev ifadesinin bulunduğu yöntemle ileri fark yöntemi adı verilir. Bunun dışında, Taylor Serisi açılımına bağılı olarak geri fark yöntemi ve merkezi fark yöntemleri de kullanılmaktadır.

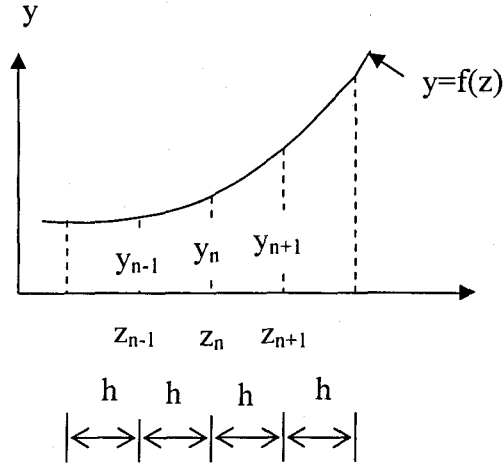
Sonlu fark ifadeleri, Taylor serisi açılımına bağılı olarak bulunabildiği gibi, bundan farklı olarak, türev ifadesini limit kavramına bağılı olarak da açıklamak mümkündür.

$$\left(\frac{dy}{dz} \right)_n = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{y(z_n + \Delta z) - y(z_n)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta z} \quad (4.5)$$

burada “ n ” eğri üzerindeki herhangi bir noktayı göstermektedir. Bağımsız değişkendeki artışı gösteren Δz , sonsuz küçük bir değer yerine $\Delta z = h$ alınırsa sonlu bir mesafe olarak tanımlanabilir. Buna göre türev;

$$\left(\frac{dy}{dz} \right)_n \approx \frac{\Delta y_n}{h} = \frac{y_{n+1} - y_n}{h} \quad (4.6)$$

olarak bulunur. $y=f(z)$ fonksiyonuna ait eğride, z değerlerine karşılık gelen y değerleri ve z koordinatları arasındaki h mesafeleri Şekil(4.1) de gösterilmiştir.



Şekil 4.1 Sonlu farklar yöntemi için $y = f(z)$ grafiği

Burada Δy_n , z_n noktasında y 'nin artışını vermektedir.

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n \approx h \left(\frac{dy}{dz} \right)_n \quad (4.7)$$

(4.7) bağıntısında, eğrinin “n” noktasındaki türevi, fonksiyonun “n” ve “n+1” noktalarındaki değerleri ile ifade edilmiştir. Yani ileri fark yönteminden faydalanılmıştır. İleri fark operatörü “ Δ ” ile gösterilir. Aynı şekilde “n” noktasındaki türev değeri;

$$\nabla y_n = y_n - y_{n-1} \quad (4.8)$$

olmak üzere “n” ve “n-1” noktasını kullanarak da hesaplanabilir. Burada ise aynı noktadaki türev ifadesi, geri fark yöntemi kullanılarak bulunmuştur. Geri fark operatörü “ ∇ ” ile gösterilir. Diğer bir yöntem olarak bilinen merkezi farklarda ise, ifadeler z_n ’e göre simetrik noktaları içerir. İleri ve geri farklara göre daha doğru bir yaklaşımdır, fakat bazı durumlarda (sınırlara yakın noktalarda geometrik koşullardan dolayı) tercih edilmez. Merkezi fark operatörü ise “ δ ” ile gösterilir. z_n ’e göre simetrik noktaları kullanarak türev;

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)_n \approx \frac{y(z_n + h) - y(z_n - h)}{2h} = \frac{1}{2h}(y_{n+1} - y_{n-1}) \quad (4.9)$$

olmak üzere birinci mertebeden merkezi farklar, gösterim olarak aşağıdaki gibidir;

$$\delta y = \frac{1}{2}(y_{n+1} - y_{n-1}) \approx h \left(\frac{dy}{dz}\right)_n \quad (4.10)$$

Benzer işlemler yüksek mertebeden türevler için de uygulanabilir. (4.7) denkleminde yola çıkarak;

$$\left(\frac{d^2 y}{dz^2}\right)_n \approx \frac{d}{dz} \left(\frac{dy}{dz}\right)_n \approx \frac{1}{h^2} \Delta(\Delta y_n) = \frac{1}{h^2} \Delta(y_{n+1} - y_n) \quad (4.11)$$

$$= \frac{1}{h^2} (\Delta y_{n+1} - \Delta y_n) = \frac{1}{h^2} (y_{n+2} - y_{n+1}) - \frac{1}{h^2} (y_{n+1} - y_n)$$

ileri farklar için ikinci mertebeden türev;

$$\Delta^2 y_n = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n \approx h^2 \left(\frac{d^2 y}{dz^2}\right)_n \quad (4.12)$$

olarak bulunur. Geri farklar için aynı işlemler yapılırsa ikinci türev;

$$\begin{aligned} \nabla^2 y_n &= \nabla(\nabla y_n) = \nabla(y_n - y_{n-1}) = \nabla y_n - \nabla y_{n-1} \\ &= (y_n - y_{n-1}) - (y_{n-1} - y_{n-2}) \\ \nabla^2 y_n &= y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2} \approx h^2 \left(\frac{d^2 y}{dz^2}\right)_n \end{aligned} \quad (4.13)$$

olarak bulunur. z_n noktasındaki merkezi farklar cinsinden ikinci mertebeden türev;

$$\begin{aligned}
\delta^2 y_n &= \delta(\delta y_n) = \frac{1}{2} \delta(y_{n+1} - y_{n-1}) = \frac{1}{2} (\delta y_{n+1} - \delta y_{n-1}) \\
&= \frac{1}{4} (y_{n+2} - y_n) - \frac{1}{4} (y_n - y_{n-2}) \\
&= \frac{1}{4} (y_{n+2} - 2y_n + y_{n-2})
\end{aligned} \tag{4.14}$$

olarak bulunur. Dikkat edilirse elde edilen bu formülasyonda ele aldığımız noktanın iki önceki ve sonraki noktaları için fonksiyon değerleri yer almaktadır. Daha fazla aralıkla uğraşmak istenmediği durumlarda merkezi farklar aşağıdaki gibi de gösterilebilir.

$$\delta^2 y_n = \Delta(\nabla y_n) \quad \text{yada} \quad \delta^2 y_n = \nabla(\Delta y_n) \tag{4.15}$$

olmak üzere türev ifadesi;

$$\begin{aligned}
\delta^2 y_n &= \Delta(\nabla y_n) = \Delta(y_n - y_{n-1}) = \Delta y_n - \Delta y_{n-1} \\
&= (y_{n+1} - y_n) - (y_n - y_{n-1}) \\
&= y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} \approx h^2 \left(\frac{d^2 y}{dz^2} \right)_n
\end{aligned} \tag{4.16}$$

olarak elde edilir. Yüksek mertebeden türevler içinde benzer işlemler yapılarak, farklı noktalarda fonksiyon değerlerini içeren sonlu fark ifadeleri elde edilebilir.

Sonlu farklar yöntemi kendi içerisinde ileri farklar, geri farklar ve merkezi farklar olmak üzere çeşitli yöntemlere ayrılmasının yanısıra, yapılan çalışmalarda ele alınan problemin özelliğine göre, bu yöntemlerin doğrudan ya da farklı yöntemlerle birleştirilmesiyle klasik sonlu farklar ve varyasyona dayalı sonlu farklar enerji yöntemi olarak değişik şekillerde ele alınmıştır.

4.1.1. Klasik sonlu farklar yöntemi

Klasik sonlu farklar yöntemi genel olarak alan değişkenleri için verilen diferansiyel bağıntılara sonlu farklara ait türev ifadelerinin doğrudan uygulanması esasına dayanır. Genellikle karmaşık geometrik özelliklere sahip problemlerde sınır koşullarından dolayı zorluklarla karşılaşılır. Buna ek olarak cebirsel ifadeler bazı durumlarda simetrik olmayan homojen denklem takımlarının oluşmasına yol açar. Bu güçlükleri ortadan kaldırmak için varyasyonel prensiplere dayalı sonlu farklar enerji yöntemi geliştirilmiştir (Singh ve Dey, 1990).

Klasik sonlu farklar yönteminde, elde edilen denge denklemleri üzerinde sonlu fark ifadelerinin direkt olarak uygulanmasıyla, bilinmeyen olarak seçilen moment ve çökme değerleri bulunmaktadır. Örnek olması açısından, yerdeğiştirme ve yayılı yük arasındaki diferansiyel bağıntılara bağlı olarak çıkarılan sonlu fark ifadeleri, iki elemanlı, iki ucu basit mesnetli kiriş eleman için uygulanmıştır.

Kirişlere ait verilen kinematik denklem (3.22) de verilmişti. Momente bağlı ifadesi;

$$M = -EI \frac{d^2 v}{dz^2} \quad (4.17)$$

olarak elde edilir. Denklemdaki moment değeri denge denkleminde yerine yazılırsa,

$$EI \frac{d^4 v}{dz^4} = q \quad (4.18)$$

çökme değerinin q yayılı yüküne bağlı ifadesi elde edilmiş olur. Denklemin sonlu farklarla ifadesi ise;

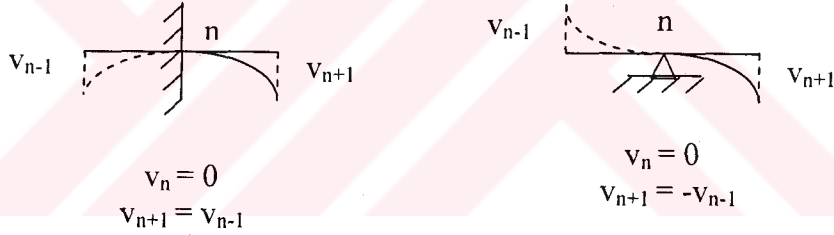
$$\frac{(v_{i-2} - 4v_{i-1} + 6v_i - 4v_{i+1} + v_{i+2}))}{h^4} = \frac{q}{EI}$$

$$v_{i-2} - 4v_{i-1} + 6v_i - 4v_{i+1} + v_{i+2} = \frac{q}{EI} h^4 \quad (4.19)$$

olarak bulunur. Bunun dışında, problemlerin çözümü sırasında sınır düğüm noktalarına ait birtakım özelliklerin bilinmesi gerekir.

Pratik problemlerin çoğunluğunda sınır koşulları, yerdeğiştirme, kuvvet ya da momentlerle ilgilidir. Bu durumlarda, sayısal çözüm yöntemlerinin uygulanması sırasında, sınır düğüm noktalarında geçerli bazı şartların bilinmesi gerekir.

Kiriş yerdeğiştirme problemlerinin çözümü için sınır koşullarını tayin etmede, diferansiyel denklemler gibi sınır koşullarının da sonlu fark formülasyonuna dönüştürülmesi gerekir. İki tip homojen sınır koşulu tarif edilir. Bunlar için, iç kuvvet ve yerdeğiştirmelerin bilinen değerleri $v = 0$, $dv/dz = 0$ (ankastre mesnet) ve $v = 0$, $d^2v/dz^2 = 0$ (basit mesnet) olmak üzere, (n) mesnetinde her iki mesnet tipi için sınır koşulları Şekil(4.2) de görüldüğü gibi oluşturulur.



(a) Ankastre mesnet

(b) Basit mesnet

Şekil 4.2 Sınır koşulları

(a) Ankastre mesnet :

Ankastre mesnet için (n) düğüm noktasındaki dönme değeri, çökme ifadesine bağlı olarak, merkezi sonlu farklar yöntemi kullanılarak yazılır ve sıfıra eşitlenirse bir önceki ve sonraki noktalar için Şekil(4.2.a) da verilen eşitlik elde edilmiş olur. Buna göre;

$$\theta_n = \left(\frac{dv}{dz} \right)_n = \frac{v_{n+1} - v_{n-1}}{2h} = 0 \quad (4.20)$$

$$v_{n+1} = v_{n-1} \quad (4.21)$$

(b) Basit mesnet :

Basit mesnet için aynı şekilde (n) düğüm noktasındaki moment değeri, çökme ifadesine bağlı olarak, merkezi sonlu farklar yöntemi kullanılarak yazılır. Buna göre;

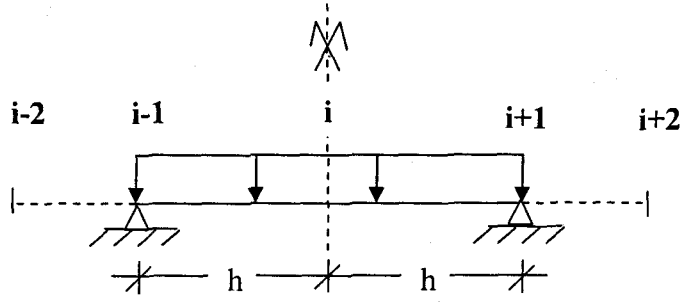
$$\left[\frac{M}{EI} \right]_n = \frac{v_{n-1} - 2v_n + v_{n+1}}{h^2} = 0 \quad (4.22)$$

olmak üzere (n) noktasındaki çökme değeri sıfıra eşitlenirse ($v_n = 0$), bir önceki ve sonraki noktalar için Şekil(4.2.b) de verilen eşitlik elde edilir.

$$v_{n+1} = -v_{n-1} \quad (4.23)$$

4.1.1.1. Klasik sonlu farklar yöntemi ile iki ucu basit mesnetli kirişin çözümü

İki elemanlı, iki ucu basit mesnetli kiriş eleman için açıklık ortasındaki çökme değerinin, klasik sonlu farklar yöntemi kullanılarak bulunuşu Şekil(4.3) de gösterilmiştir.



Şekil 4.3 İki ucu basit mesnetli kiriş için düğüm noktaları kod numaraları

Sonlu fark ifadelerine bağlı olarak elde edilmiş olan denklemde sınır koşulları yerine konulursa,

$$v_{i-2} - 4v_{i-1} + 6v_i - 4v_{i+1} + v_{i+2} = \frac{q}{EI} h^4$$

$$v_{i-1} = v_{i+1} = 0 \quad ; \quad v_{i-2} = v_{i+2} = -v_i$$

açıklık ortasındaki çökme değeri, gerçek çözümden elde edilen çökme değerine bağlı olarak aşağıdaki gibi bulunur.

$$v_{kesin} = \frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI}$$

$$v_i = \frac{1}{4} \frac{qh^4}{EI} = \frac{1}{64} \frac{qL^4}{EI} = 1,2 \cdot v_{kesin}$$

Eleman sayısının artırılması durumunda (4.19) denklemi, her bir düğüm noktası için elde edilir. Denklemler düzenlenerek, bilinmeyen çökme değerlerine ait oluşturulan katsayılar matrisinin çözülmesiyle de sonuca ulaşılır. Gerekirse, probleme ait diğer büyüklükler, yerdeğiştirmelere ait mevcut diferansiyel bağıntılar kullanılarak elde edilebilir.

4.1.2. Varyasyona dayalı sonlu farklar enerji yöntemi

Yapılan çalışmalarda, klasik sonlu farklar yönteminin sınırlamalarının üstesinden gelebilmek için, alternatif bir yöntem olarak varyasyona dayalı, virtüel iş yada minimum potansiyel enerji prensiplerinin kullanıldığı sonlu farklar enerji yöntemi geliştirilmiştir. Sonlu farklar enerji yöntemi, son zamanlarda farklı yapı problemlerine başarılı bir şekilde uygulanmıştır (Singh ve Dey, 1990). Bu yöntemte sonlu elemanlar gibi varyasyonel formülasyonların avantajlarından faydalanır. İlk kez Houbolt (1958) tarafından kiriş ve plakların statik analizi için kullanılmıştır. Daha sonra farklı tip yapı problemlerine Bushnell (1973), Bushnell ve Almroth (1970), plakların serbest titreşim analizi için Koerner ve Snell (1967) tarafından uygulanmıştır.

Kirişler için toplam potansiyel enerji ifadesi yerdeğiştirmelere bağlı olarak (3.9) da verilmiştir. İntegraller toplam formülü cinsinden ifade edilecek olursa enerji denklemi;

$$\pi = \frac{EI}{2} \sum_{i=0}^n v_i'^2 \Delta z - q \sum_{i=0}^n v_i \Delta z \quad (4.24)$$

olarak bulunur.

Kirişler için verilmiş olan enerji denklemi üzerinde sonlu fark formülasyonunu uygulamak için, denklemdeki türev ifadeleri yerine sonlu farklardaki ikinci mertebeden türevler için fonksiyonun düğüm noktalarında alması gereken değerler konulursa enerji denklemi;

$$\pi = \frac{EI}{2} \sum_{i=0}^n \left(\frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} \right)^2 \Delta z - q \sum_{i=0}^n v_i \Delta z \quad (4.25)$$

olarak bulunur. Eleman sayısına ve sınır koşullarına göre yazılacak olan enerji denkleminin, bilinmeyen çökme ifadesine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenmesiyle bulunacak olan ifade, belirlenen düğüm noktaları için çökme değerleriyle yayılı yük

arasındaki bağıntıyı verecektir. Bu bağıntıdan, istenen düğüm noktalarındaki çökme değerleri bulunduğundan sonra istenirse, moment ve çökme değerleri arasındaki diferansiyel bağıntıları kullanarak moment değerleri de bulunabilmektedir.

4.1.2.1. Varyasyona dayalı sonlu farklar enerji yöntemi ile iki ucu basit mesnetli kirişin çözümü

Şekil(4.3) de görülen iki elemanlı, iki ucu basit mesnetli kiriş için açıklık ortasındaki çökme değerinin, varyasyona dayalı sonlu farklar enerji yöntemi kullanılarak bulunuşu aşağıda gösterilmiştir.

Şekil (4.3) de verilen kiriş eleman için (4.25) denklemi uygulanırsa, i . düğüm noktası için çökme değeri aşağıdaki gibi bulunur;

$$v_{i-1} = v_{i+1} = 0$$

olmak üzere i . düğüm noktasındaki ikinci mertebeden türev ifadesi yerine, merkezi fark ifadeleri uygulanırsa;

$$v_i'' = \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} = -\frac{2v_i}{h^2}$$

elde edilir. (4.25) denkleminde yerine konulursa enerji ifadesi;

$$\pi = \frac{EI}{2} \left(-\frac{2v_i}{h^2} \right)^2 .h - q.v_i.h$$

olarak bulunur. Enerjinin minimum olması prensibine göre bulunan ifadenin türevi alınıp sıfıra eşitlenirse, açıklık ortasındaki çökme değeri, kesin değere bağlı olarak aşağıdaki gibi bulunur.

$$\frac{\partial \pi}{\partial v_i} = 4EI \frac{v_i}{h^3} - q.h, \quad \frac{\partial \pi}{\partial v_i} = 0$$

$$v_i = \frac{1}{4} \frac{qh^4}{EI} = \frac{1}{64} \frac{qL^4}{EI} = 1,2 v_{ke \sin}$$

4.2. Varyasyonel Türev

Varyasyonel hesaplarda, (3.23-3.26) denklemlerindeki gibi bir problemin diferansiyel denklem ve sınır koşulları belli ise, bunlara eşdeğer fonksiyoneller (3.38) denkleminde görüldüğü gibi hesaplanabilir. Genel olarak varyasyon hesabında amaç, fonksiyoneli extremum yapan fonksiyonu bulmaktır.

(3.38) denklemindeki çubuğa ait fonksiyonelde bilinmeyen v elastik eğrisi ve M eğilme momenti, yaklaşık çözüm yöntemleri ile bulunabilir.

$y(z)$ fonksiyonuna ait fonksiyonel;

$$I[y] = \int F(z, y, y') dz \quad (3.10)$$

olmak üzere, yaklaşık değerini hesaplamak için,

$$\sum_{i=1}^n F(z_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta z}) \Delta z \quad (4.26)$$

alınabilir. Bu çalışmada $I[y]$ fonksiyonelinin integrali yerine sonlu toplam ifadesi konulmasıyla kullanılacak olan yöntem, varyasyonel türev yöntemi olarak adlandırılacaktır.

Toplamda y_i 'li iki terim vardır. Bunlar i 'inci ve $i-1$ 'inci terimlerdir.

$$F(z_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta z}) \Delta z \quad \text{ve} \quad F(z_{i-1}, y_{i-1}, \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta z}) \Delta z \quad (4.27)$$

Bulunan ifadelerin (4.26)'daki toplam formülde yerine konulup varyasyonel türev yönteminde kullanılabilmesi için, extremum şartını sağlaması gerekir.

$$\frac{\partial I}{\partial y_i} = 0 \quad [i = 1, 2, \dots, (n-1)] \quad (4.28)$$

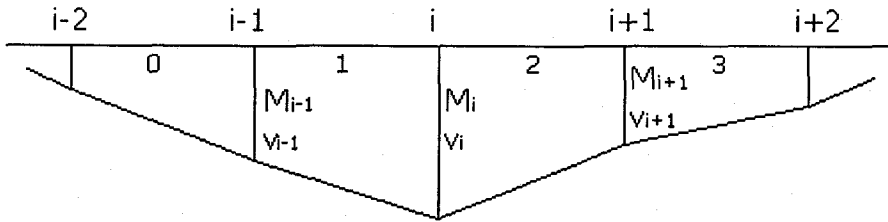
6.2.1 .Varyasyonel türev yöntemi ile çubuk sistemlerin çözümü

Varyasyonel türev yöntemi ile çubuk sistemlerin analizini yapabilmek için, (3.38) de elde edilmiş olan fonksiyonel kullanılmıştır. Değişkenler için sonlu farklarla elde edilen türev ifadeleri, moment ve çökme değerleri için uygulanırsa;

$$M'_I = \frac{M_{I+1} - M_I}{h} \quad (4.29)$$

$$v'_I = \frac{v_{I+1} - v_I}{h}$$

denklemleri bulunur. Bu denklemlerin nasıl elde edildiğini Şekil (4.4) üzerinden de açık bir şekilde görmek mümkündür.



Şekil 4.4 Düğüm noktalarındaki bilinmeyenlerin i düğüm noktasına bağlı olarak gösterilmesi

Dikkat edilirse, i düğüm noktasına ait fonksiyonel 1 ve 2 nolu elemanlar için yazılacak olan fonksiyonellerin toplamı şeklinde ifade edilecektir. Bunun için fonksiyonel;

$$I = I_1 + I_2$$

$$I_i = \left[\frac{M_i - M_{i-1}}{h}, \frac{v_i - v_{i-1}}{h} \right] - [q, v_{i-1}] - \frac{1}{2} \left[\frac{M_{i-1}}{EI}, M_{i-1} \right] + \left[\frac{M_{i+1} - M_i}{h}, \frac{v_{i+1} - v_i}{h} \right] - [q, v_i] - \frac{1}{2} \left[\frac{M_i}{EI}, M_i \right] \quad (4.30)$$

şeklinde elde edilir. Bilinmeyen değerlere göre türev alınıp sıfıra eşitlenirse;

$$\frac{\partial I}{\partial M_i} = 0 \rightarrow \frac{1}{h} \left[\frac{v_i - v_{i-1}}{h} \right] - \frac{1}{h} \left[\frac{v_{i+1} - v_i}{h} \right] - \frac{1}{EI} [M_i] = 0 \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial I}{\partial v_i} = 0 \rightarrow \frac{1}{h} \left[\frac{M_i - M_{i-1}}{h} \right] - \frac{1}{h} \left[\frac{M_{i+1} - M_i}{h} \right] - [q] = 0$$

denklemleri bulunur. En son ifadeler düzenlenirse,

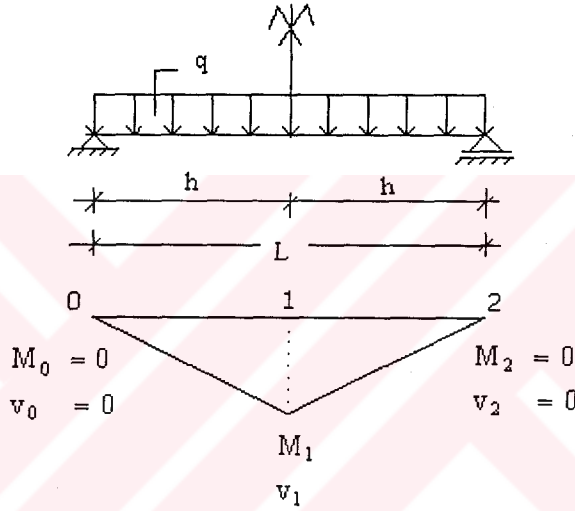
$$\frac{\partial I}{\partial M_i} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{h} v_{i-1} + \frac{2}{h} v_i - \frac{1}{h} v_{i+1} - \frac{h}{EI} M_i = 0 \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial I}{\partial v_i} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{h} M_{i-1} + \frac{2}{h} M_i - \frac{1}{h} M_{i+1} - qh = 0$$

genel enerji ifadeleri elde edilmiş olur.

4.2.2. Varyasyonel türev yöntemi ile iki ucu basit mesnetli kirişin çözümü

Yukarıda doğru eksenli çubuklar için geliştirilmiş olan varyasyonel türev yönteminin nasıl uygulandığını göstermek açısından, sadece iki elemana ayrılmış kiriş için kurulacak denklemler açık olarak verilmiştir. Eleman sayısının artırılmasıyla elde edilen sayısal sonuçlar ise, grafik üzerinde ve sonlu elemanlar yöntemi ile karşılaştırılmak suretiyle verilecektir. Üniform yayılı yük etkisindeki iki ucu basit mesnetli kiriş Şekil (4.5) de görüldüğü gibidir.



Şekil 4.5 Basit mesnetli kiriş

1 Nolu düğüm noktası için bilinmeyen değerler:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial M_1} = 0 &\Rightarrow \frac{2}{h}v_1 - \frac{h}{EI}M_1 = 0 \\ \frac{\partial I}{\partial v_1} = 0 &\Rightarrow \frac{2}{h}M_1 - qh = 0 \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} M_1 &= \frac{qh^2}{2} = \frac{qL^2}{8} \\ v_1 &= \frac{M_1 h^2}{2EI} = 1,2 \frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Sonuçlardan da görüldüğü gibi, kiriş ortasındaki bilinmeyen moment ve çökme değerleri için, moment değeri kesin değer olarak bulunurken, çökme değeri yaklaşık olarak elde edilmiştir.

4.2.3. Sonlu fark yöntemlerinin karşılaştırılması

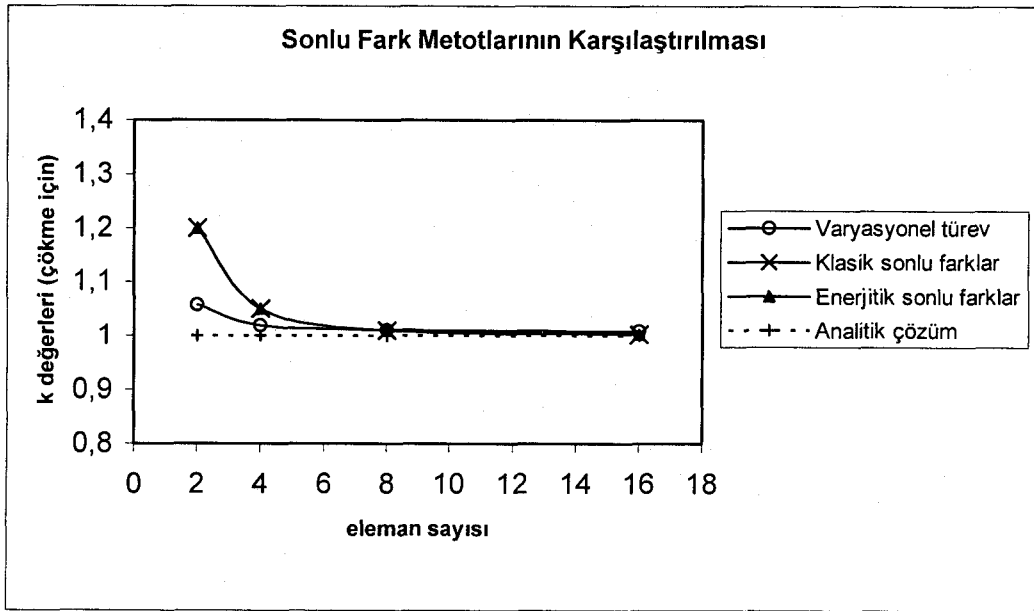
Varyasyonel türev yönteminin diğer sonlu fark yöntemlerine göre avantajlarını göstermek amacıyla, iki ucu basit mesnetli kiriş için eleman sayısını arttırmak suretiyle bulunan çökme değerlerinin, analitik çözümden elde edilen çökme değerlerine yaklaşımları Tablo(4.1) de verilmiştir.

$$v_{kesin} = \frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI} \quad , \quad v_i = k \frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI}$$

Tablo 4.1 İki ucu basit mesnetli kiriş için çökme değerlerine ait **k** değerleri

Eleman say.	k Değerleri			
	Klasik S.F.	Enerji S.F.	Varyasyonel Türev	Analitik Çözüm
2	1,2	1,2	1,058	1
4	1,05	1,05	1,02	1
8	1,01	1,01	1,011	1
16	1,003	1,003	1,009	1

Tablo (4.1)' de verilen değerlerin analitik çözümden elde edilen gerçek değerlere yaklaşımları Şekil (4.6)' da gösterildiği gibi olmaktadır.

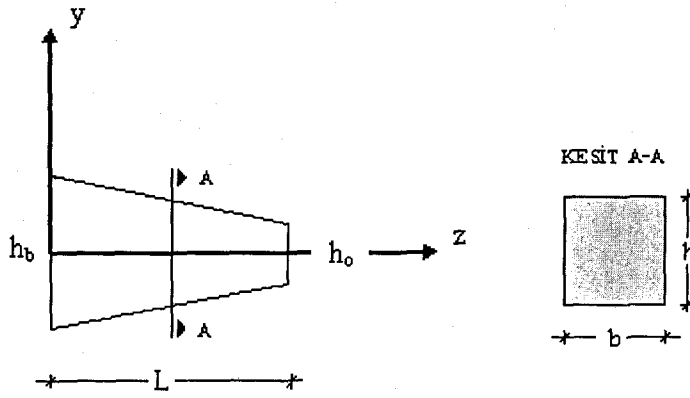


Şekil 4.6 Basit mesnetli kiriş için sonlu fark yöntemlerinin karşılaştırılması

Görüldüğü gibi az eleman sayıları için, klasik sonlu farklar ve sonlu farklar enerji yöntemlerinden elde edilen sonuçların, varyasyonel türev yönteminden elde edilen sonuçlara göre gerçek değere daha uzaktan yaklaştığı, fakat eleman sayısının artırılmasıyla değerlerin örtüştüğü gözlenmiştir.

4.2.4. Varyasyonel türev yöntemi ile değişken kesitli çubuk sistemlerin çözümü

Doğru eksenli, değişken kesitli çubuğun varyasyonel türev analizinde, düğüm noktalarına ait temel enerji ifadeleri, (3.38) fonksiyoneline, kesitteki değişime bağlı olarak değişen atalet momenti dikkate alınarak yeniden elde edilmelidir. Değişken kesitli kirişlere ait eksen takımı Şekil (4.7) de gösterildiği gibi seçilmiştir.



Şekil 4.7 Değişken kesitli çubuk için koordinat sistemi

Kiriş ortasındaki yüksekliğin h_b ' ye bağlı olarak ifadesi aşağıdaki gibi alınırsa;

$$h_o = mh_b \quad (4.33)$$

Başlangıç yüksekliğine bağlı olarak herhangi bir z değerinde yüksekliğin değişimi;

$$h_z = h_b + \left(\frac{mh_b - h_b}{L} \right) z = h_b \left[1 + (m-1) \frac{z}{L} \right] \quad (4.34)$$

$$n = m - 1$$

$$h_z = h_b \left[1 + n \frac{z}{L} \right] \quad (4.35)$$

olarak elde edilir. Atalet momenti ifadesinde yerine konulursa;

$$I_i = bh_b^3 \left[1 + n \frac{z}{L} \right]^3 \quad (4.36)$$

elde edilir. Bulunan atalet momenti ifadesinin sabit kesitli çubuklar için bulunan düğüm noktalarına ait varyasyonel türev ifadelerinde yerine konulmasıyla değişken kesitli çubuklar için varyasyonel türev formülasyonu elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial M_i} = 0 & \quad -\frac{1}{a^2} v_{i-1} + \frac{2}{a^2} v_i - \frac{1}{a^2} v_{i+1} - \frac{M_i}{EI_i} = 0 \\ \frac{\partial I}{\partial v_i} = 0 & \quad -\frac{1}{a^2} M_{i-1} + \frac{2}{a^2} M_i - \frac{1}{a^2} M_{i+1} - q = 0 \end{aligned} \quad (4.37)$$

4.3. Sonlu Elemanlar Yöntemi

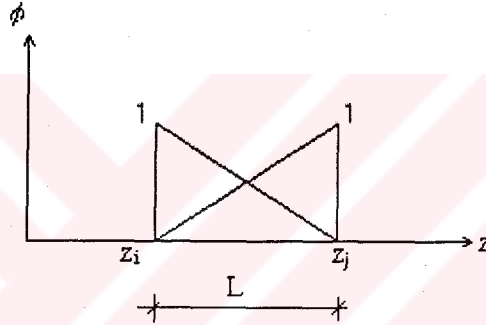
Sonlu elemanlar yöntemi, mühendislik uygulamalarında iki ve üç boyutlu karmaşık problemlerin kesin yöntemlerle çözümünde karşılaşılan zorlukları aşmak için kullanılan yaklaşık çözüm yöntemlerinden birisidir. Sonlu elemanlar yöntemi aşağıdaki sıraya göre uygulanır:

- İki veya üç boyutlu problem, sonlu sayıda elemanlara ayrılır ve elemanlar nod (düğüm noktası) denilen sınır noktaları ile birbirine bağlanırlar.
- Bölgenin elemanlara ayrılmasından sonra, büyüklükleri ifade etmek için sürekli fonksiyonlar seçilir. Bu fonksiyonlara şekil fonksiyonları adı verilir.
- Parametrelerin nodal değerlerine göre fonksiyonel ekstremum yapılır, bilinmeyen sayısı kadar doğrusal denklem bulunur.
- Eleman matrisi elde edildikten sonra sistem matrisi oluşturulur.
- Sınır koşulları dikkate alınarak denklem takımının çözümü yapılır.

Eleman sayısı artırılarak yaklaşık çözümün gerçek sonuca yaklaşması için şekil fonksiyonu süreklilik ve tamlık koşulunu sağlamalıdır.

4.3.1. Sonlu elemanlar yöntemi ile çubuk sistemlerin çözümü

Aynı şekilde çubukların sonlu eleman formülasyonunda da (3.38) denkleminde bulunmuş olan enerji fonksiyoneliinden faydalanılmıştır. Fonksiyonel içerisindeki değişkenler $M=M(z)$ ve $v=v(z)$ olmak üzere, her ikisinin de birinci türevleri mevcuttur. Bu sebeple her iki büyüklük için şekil fonksiyonu olarak, doğrusal fonksiyon seçilmesi yeterli olmaktadır. Bunun dışında q dış yük fonksiyonu, örneklerde sabit bir değer olmasına karşın, başlangıçta işlem kolaylığı açısından değişken olarak alınmıştır. Şekil fonksiyonlarının eksene takımı üzerinde aldığı değerler Şekil(4.8) de gösterildiği gibidir.



Şekil 4.8 Şekil fonksiyonlarının eksene takımı üzerinde gösterilmesi

Boyu L olan herhangi bir elemanın sol düğüm noktası z_i , sağ düğüm noktası z_j olmak üzere şekil fonksiyonları ve bunların türevleri;

$$\phi_1 = \frac{z_j - z}{z_j - z_i}$$

$$\phi_1' = -\frac{1}{z_j - z_i}$$

$$\phi_2 = \frac{z - z_i}{z_j - z_i}$$

$$\phi_2' = \frac{1}{z_j - z_i}$$

(4.38)

olarak elde edilir. Çubuklara ait diferansiyel denklemlerden elde edilen (3.38) fonksiyoneline yer alan (v_1, v_2) , (M_1, M_2) , (q_1, q_2) sıra ile yerdeğiştirme, moment ve dış yüklerin nodlarda aldığı değerler olmak üzere bu fonksiyonlar;

$$v = \phi_1 v_1 + \phi_2 v_2$$

$$v' = \phi_1' v_1 + \phi_2' v_2$$

$$M = \phi_1 M_1 + \phi_2 M_2$$

$$M' = \phi_1' M_1 + \phi_2' M_2 \quad (4.39)$$

$$q = \phi_1 q_1 + \phi_2 q_2$$

yaklaşık ifadeleri ile gösterilmiştir. Bu değerler fonksiyonelde yerine konursa;

$$\begin{aligned} I = & \int [(M_i v_i \phi_1'^2 + M_i v_j \phi_1' \phi_2' + M_j v_i \phi_1' \phi_2' + M_j v_j \phi_2'^2) - \\ & (q_i v_i \phi_1^2 + q_j v_i \phi_1 \phi_2 + q_i v_j \phi_1 \phi_2 + q_j v_j \phi_2^2) - \\ & \frac{1}{2EI} (M_i^2 \phi_1^2 + 2M_i M_j \phi_1 \phi_2 + M_j^2 \phi_2^2)] dz \end{aligned} \quad (4.40)$$

denklemini elde edilir. Buradaki şekil fonksiyonlarının çarpım değerleri gösterim olarak;

$$[k_1] = \int_0^L \phi_i \phi_j dz$$

$$i = 1, 2$$

$$(4.41)$$

$$[k_2] = \int_0^L \phi_i' \phi_j' dz$$

$$j = 1, 2$$

şeklinde yazılır. Bu alt matrislerin açık ifadeleri aşağıda verilmiştir.

$$[k_1] = \begin{bmatrix} \frac{L}{3} & \frac{L}{6} \\ \frac{L}{6} & \frac{L}{3} \end{bmatrix} \quad [k_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Fonksiyonelin, bilinmeyen değerler olan M ve v değerleri için ekstrem olma koşulu yazılırsa denklemler;

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial M_i} &= \frac{1}{L}v_i - \frac{1}{L}v_j - \frac{L}{3EI}M_i - \frac{L}{6EI}M_j = 0 \\ \frac{\partial I}{\partial M_j} &= -\frac{1}{L}v_i + \frac{1}{L}v_j - \frac{L}{6EI}M_i - \frac{L}{3EI}M_j = 0 \\ \frac{\partial I}{\partial v_i} &= \frac{1}{L}M_i - \frac{1}{L}M_j - \frac{L}{3}q_i - \frac{L}{6}q_j = 0 \\ \frac{\partial I}{\partial v_j} &= -\frac{1}{L}M_i + \frac{1}{L}M_j - \frac{L}{6}q_i - \frac{L}{3}q_j = 0 \end{aligned} \quad (4.43)$$

şeklinde elde edilir. Örneklerde, q yükü üniform yük olarak alındığı için $q_i=q_j$ olarak alınmıştır. Bulunan denklemlerde değişken katsayıları $[k_1]$ ve $[k_2]$ matrisleri cinsinden;

$$[k] = \begin{bmatrix} -[k_1] & [k_2] \\ [k_2]^T & [0] \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

olmak üzere, (4.43) denklemleri matris formunda;

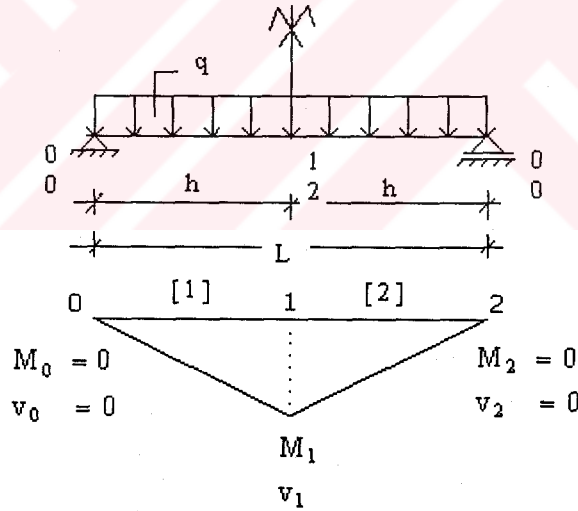
$$\begin{bmatrix} -\frac{L}{3EI} & -\frac{L}{6EI} & \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{L}{6EI} & \frac{L}{3EI} & -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_i \\ M_j \\ v_i \\ v_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{qL}{2} \\ \frac{qL}{2} \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

elde edilir. Katsayılardan oluşan matris, her eleman için düğüm noktalarına ait serbestlik derecelerine göre kod numarası verilecek olan rijitlik matrisidir. Her eleman için elde edilen rijitlik matrislerinin kod numaralarına göre toplanmasıyla sistem rijitlik matrislerine geçilecektir.

Her iki çözüm yöntemini ait formülasyonlar çıkarıldıktan sonra, bu çözüm yöntemlerinin örnek problemlere nasıl uygulandığını göstermek amacıyla iki elemanlı basit mesnetli kiriş örneği verilecektir.

4.3.2. Sonlu elemanlar yöntemi ile iki ucu basit mesnetli kirişin çözümü

Varyasyonel türev yöntemiyle çözülmüş olan iki elemanlı basit mesnetli kiriş örneği, karşılaştırma amacıyla sonlu elemanlar yöntemiyle de çözülmüştür. Eleman düğüm noktaları serbestlik dereceleri şekilde verildiği gibi yerleştirilmiştir.



Şekil 4.9 Basit mesnetli kiriş

Buna göre kiriş, iki ayrı eleman olarak düşünülüp her ikisi için de ayrı ayrı rijitlik matrisleri yazılmıştır.

$$h = \frac{L}{2} \quad \text{olmak üzere;}$$

1. Eleman için:

$$\begin{array}{cccc} & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \left[\begin{array}{cccc} -\frac{h}{3EI} & -\frac{h}{6EI} & \frac{1}{h} & -\frac{1}{h} \\ \frac{h}{6EI} & \frac{h}{3EI} & -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} \\ \frac{1}{h} & -\frac{1}{h} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} M_i \\ M_j \\ v_i \\ v_j \end{Bmatrix} & = & \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{qh}{2} \\ \frac{qh}{2} \end{Bmatrix} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{array} \end{array}$$

2. Eleman için:

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 0 & 2 & 0 \\ \left[\begin{array}{cccc} -\frac{h}{3EI} & -\frac{h}{6EI} & \frac{1}{h} & -\frac{1}{h} \\ \frac{h}{6EI} & \frac{h}{3EI} & -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} \\ \frac{1}{h} & -\frac{1}{h} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} M_i \\ M_j \\ v_i \\ v_j \end{Bmatrix} & = & \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{qh}{2} \\ \frac{qh}{2} \end{Bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{array} \end{array}$$

Kirişin tamamı için sistem rijitlik matrisi ise,

$$\begin{array}{cc} & 1 & 2 \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \left[\begin{array}{cc} -\frac{2h}{3EI} & \frac{2}{h} \\ \frac{2}{h} & 0 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} M_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} & = & \begin{Bmatrix} 0 \\ qh \end{Bmatrix} \end{array}$$

olarak bulunur. Bilinmeyen v_1 ve M_1 değerleri;

$$v_1 = 1,6 \frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI}$$

$$M_1 = \frac{qL^2}{8}$$

olarak elde edilir. Dikkat edilirse, sonlu elemanlar yönteminde da varyasyonel türev yönteminde olduğu gibi çökme değeri yaklaşık olarak bulunurken, moment ifadesi kesin değer olarak bulunmuştur.

Her iki çözüm yönteminin de gerçek çözüme nasıl yakınsadığını göstermek için, eleman sayısı arttırılarak sonuçlar sayısal olarak elde edilmiş ve grafik üzerinde gösterilmiştir.



5. SAYISAL UYGULAMALAR

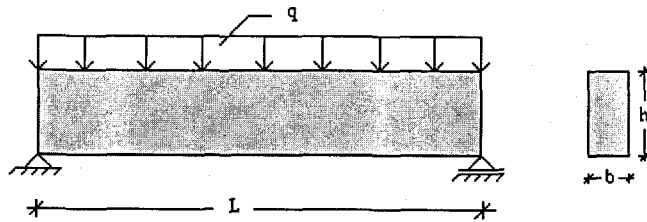
Değişik mesnet tiplerine sahip kirişlerin çözümü için kullanılacak, kirişlere ait kesit özellikleri ve geometrik özellikler Tablo (5.1)' de verilmiştir.

Tablo 5.1. Kirişlere ait parametreler

b (m)	h (m)	L (m)	q (kN/m)	E (kN/ m ²)
0,2	0,5	10	10	$2 \cdot 10^7$

5.1. İki ucu basit mesnetli kiriş

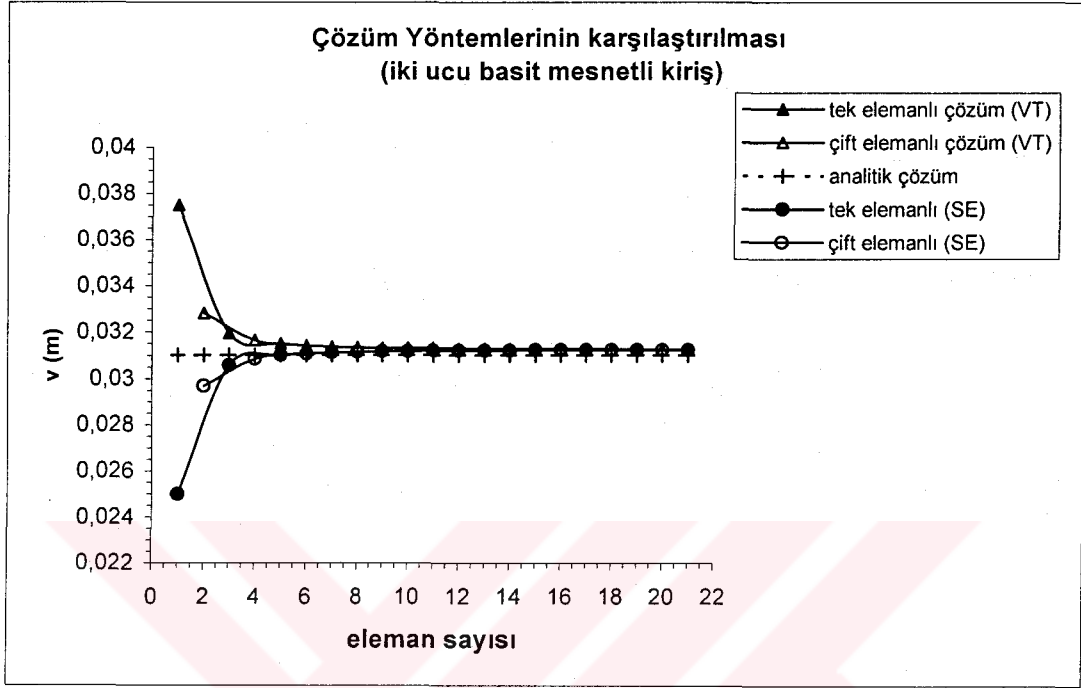
Şekil (5.1) de görülen iki ucu basit mesnetli, sabit kesit alanına sahip, düzgün yayılı yük etkisindeki kiriş eleman için çökme ve moment değerleri varyasyonel türev ve sonlu elemanlar yöntemleriyle bulunup, açıklık ortasındaki sonuçların analitik çözümden elde edilen sonuçlarla karşılaştırması yapılmıştır.



Şekil 5.1 İki ucu basit mesnetli kiriş

Eleman sayısı artırılarak varyasyonel türev ve sonlu elemanlar yönteminden elde edilen sonuçlarda, basit mesnetli kiriş için, açıklık ortasındaki çökme değerlerinin kesin çözüme yaklaşımı Şekil (5.2)' de verilmiştir. Moment değerleri

kesin değerlerle üst üste düştüğü için grafik olarak gösterilmesine gerek görülmemiştir.



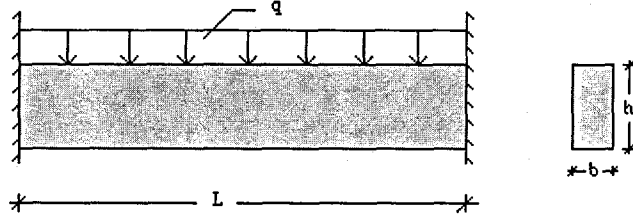
Şekil 5.2. İki ucu basit mesnetli kirişte eleman sayısına bağlı olarak açıklık ortasındaki çökme değerlerinin karşılaştırılması

Görüldüğü gibi eleman sayısının arttırılmasıyla her iki çözüm yönteminden elde edilen sonuçlarda, açıklık ortasındaki çökme değerleri için varyasyonel türev yöntemi ile bulunan sonuçlar gerçek çözüme üstten yaklaşırken, sonlu elemanlar yönteminden elde edilen sonuçlar alttan yaklaşmıştır.

5.2. İki ucu ankastre mesnetli kiriş

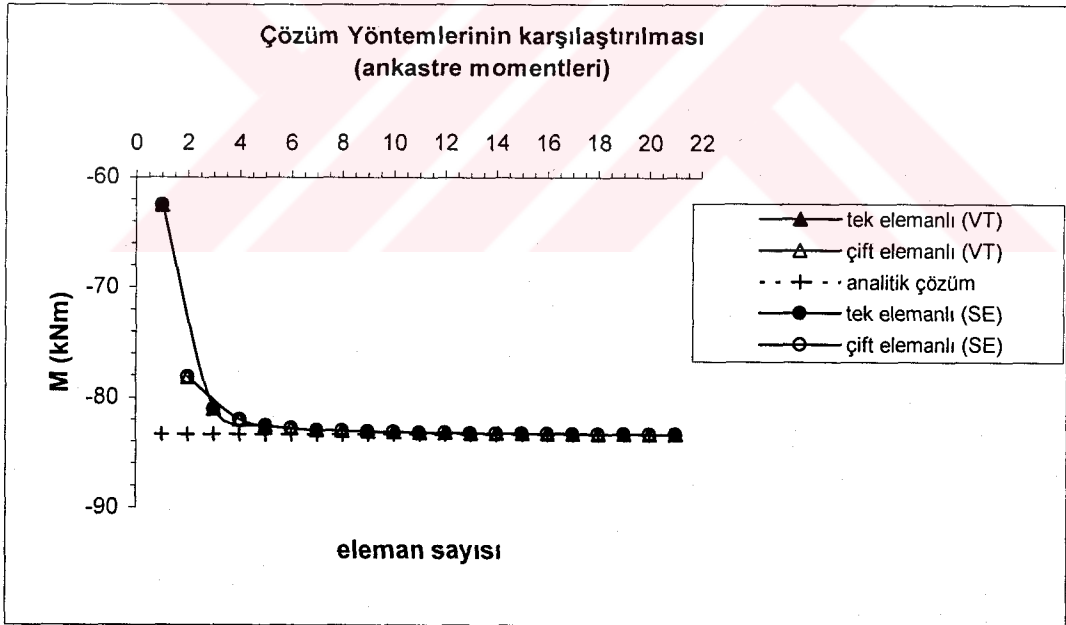
Şekil(5.3) de görülen iki ucu ankastre mesnetli, sabit kesit alanına sahip, düzgün yayılı yük etkisindeki kiriş için moment ve çökme değerleri bulunup,

ankastrelik momentleri ve açıklık ortasındaki moment ve çökme değerlerinin analitik çözümden elde edilen sonuçlarla karşılaştırması yapılmıştır.



Şekil 5.3. İki ucu ankastre mesnetli kiriş

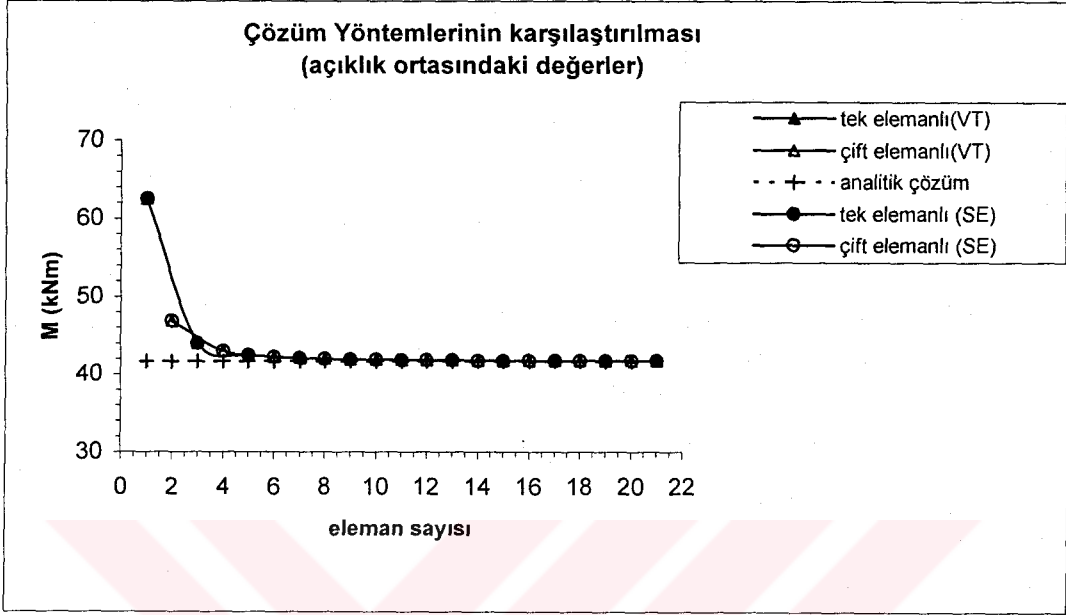
İki ucu ankastre mesnetli kiriş için ankastrelik momentlerinin kesin çözüme yaklaşımı Şekil (5.4)' de verilmiştir.



Şekil 5.4 İki ucu ankastre mesnetli kirişte eleman sayısına bağlı olarak ankastrelik momentlerinin karşılaştırılması

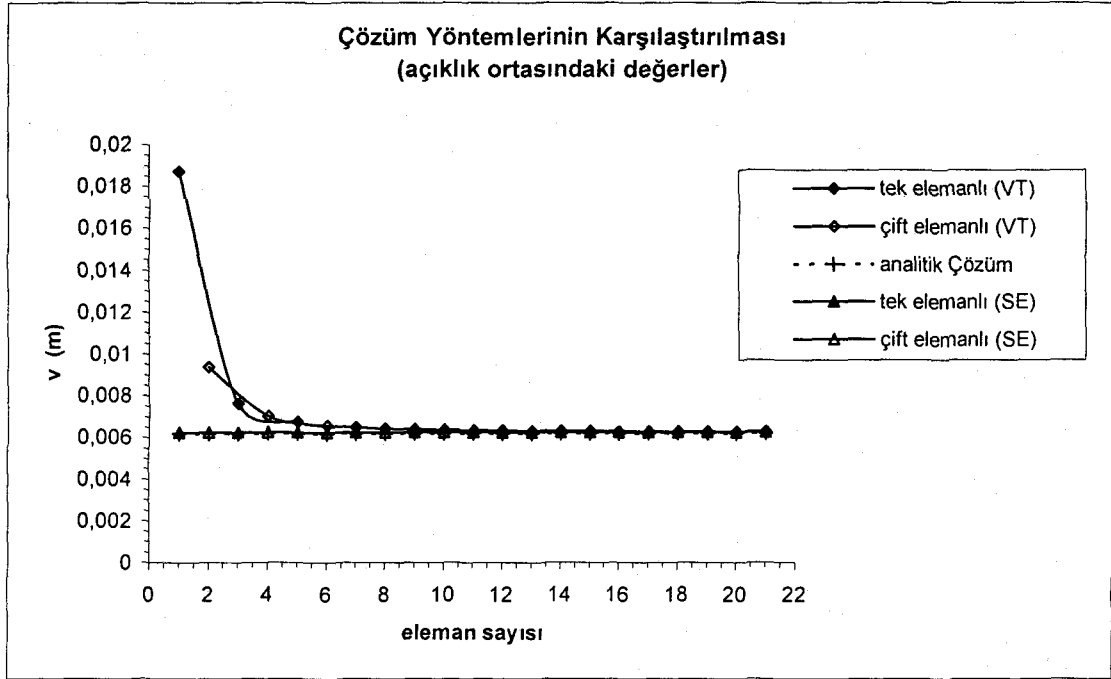
Varyasyonel türev ve sonlu eleman çözümlerinden elde edilen sonuçlarda, tek ve çift eleman sayıları için sonuçların üst üste düştüğü görülmektedir.

Açıklık ortasındaki moment ve çökme değerleri karşılaştırılacak olursa, sonuçlar Şekil (5.5-5.6) daki gibi olmaktadır.



Şekil 5.5. İki ucu ankastre mesnetli kirişte eleman sayısına bağlı olarak açıklık ortasındaki momentlerin karşılaştırılması

Aynı şekilde her iki çözüm yönteminden elde edilen sonuçların, tek ve çift eleman sayıları için üst üste düştüğü görülmüştür.

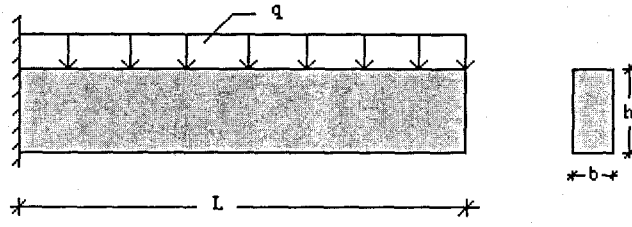


Şekil 5.6 İki ucu ankastre mesnetli kirişte eleman sayısına bağlı olarak açıklık ortasındaki çökme değerlerinin karşılaştırılması

Şekil(5.6) da da görüldüğü gibi, iki ucu ankastre mesnetli durum için, çökme değerlerinin sonlu eleman çözümleri kesin sonuç olarak bulunurken, varyasyonel türev çözümünde ise, çökme değerlerinin eleman sayısının artırılmasıyla gerçek çözüme hızlı bir şekilde yaklaştığı görülmektedir.

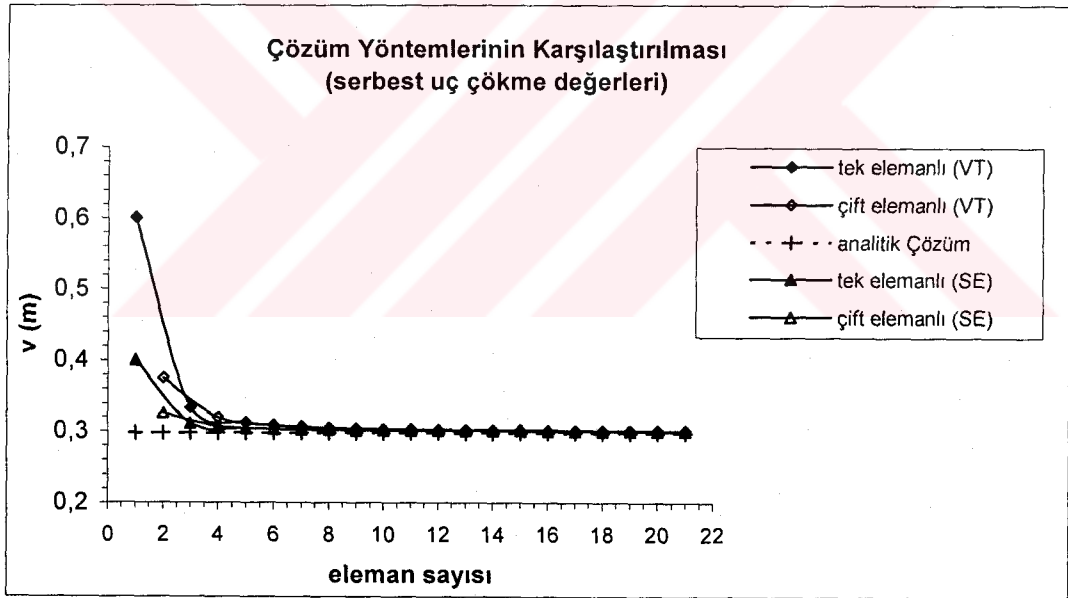
5.3. Bir ucu ankastre mesnetli, diğer ucu serbest kiriş

Şekil(5.7) de görülen bir ucu ankastre mesnetli, diğer ucu serbest, sabit kesit alanına sahip, düzgün yayılı yük etkisindeki kiriş için moment ve çökme değerleri çözüm yöntemleriyle bulunup, kiriş ucundaki çökme değerleri, analitik çözümden elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.



Şekil 5.7 Bir ucu ankastre mesnetli, diğer ucu serbest kiriş

Bir ucu ankastre mesnetli, diğer ucu serbest kiriş için eleman sayısının artırılmasıyla çözüm yöntemlerinden elde edilen sonuçların gerçek sonuçlara yaklaşımı Şekil (5.8)' de verilmiştir.



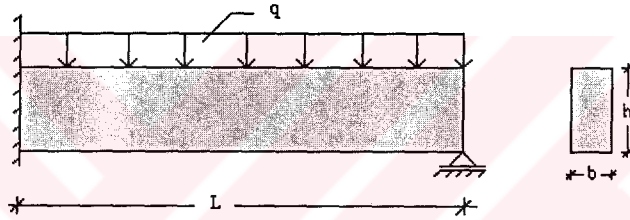
Şekil 5.8 Bir ucu ankastre mesnetli, diğer ucu serbest kirişte eleman sayısına bağlı olarak kiriş serbest ucundaki çökme değerlerinin karşılaştırılması

Bir ucu ankastre, diğer ucu serbest mesnet şartlarında ise, ankastrelik momentleri kesin değer olarak bulunurken; çökme değerlerinin gerçek sonuçlara yaklaşımı Şekil(5.8) de görüldüğü gibi olmaktadır. Az eleman için varyasyonel türev

yöntemi, kesin değere daha uzak sonuçlar verirken, eleman sayısının artırılmasıyla değerlerin kesin sonuca hızla yaklaştığı gözlenmiştir.

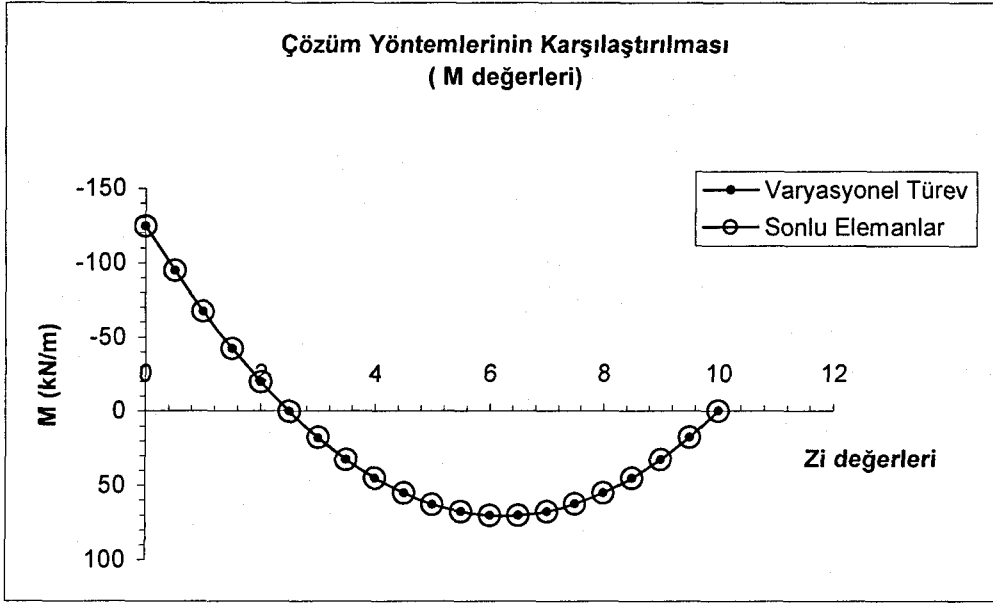
5.4. Bir ucu ankastre, diğer ucu basit mesnetli kiriş

Şekil(5.9) da görülen bir ucu ankastre, diğer ucu basit mesnetli, sabit kesit alanına sahip, düzgün yayılı yük etkisindeki, yirmi elemana bölünmüş kirişte moment ve çökme değerleri, varyasyonel türev ve sonlu eleman yöntemleriyle bulunup sonuçların karşılaştırılması yapılmıştır.



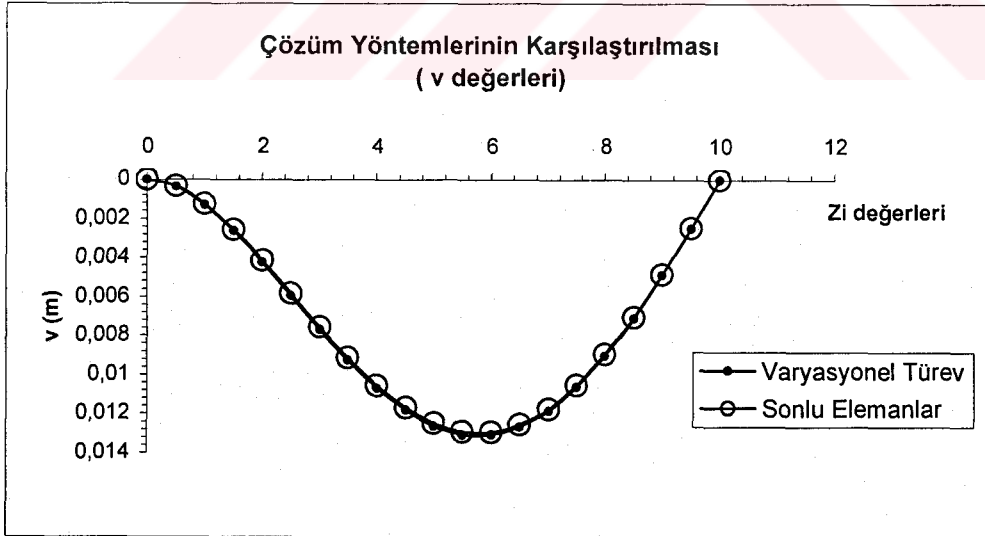
Şekil 5.9 Bir ucu ankastre, diğer ucu basit mesnetli kiriş

Bir ucu ankastre, diğer ucu basit mesnetli kirişte, her iki çözüm yönteminden elde edilen düğüm noktalarına ait moment ve çökme değerleri Şekil (5.10-5.11)' de verildiği gibi olmaktadır.



Şekil 5.10 Bir ucu ankastre, diğer ucu basit mesnetli kiriş için 'M' değerleri

Grafiklerden de görüldüğü gibi, varyasyonel türev ve sonlu eleman yöntemlerinden elde edilen 'M' ve 'v' değerleri üst üste düşmektedir.

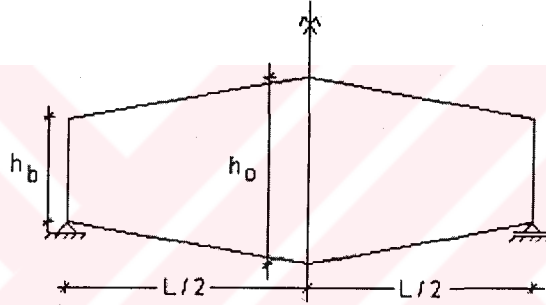


Şekil 5.11 Bir ucu ankastre, diğer ucu basit mesnetli kiriş için 'v' değerleri

5.5. Değişken kesitli iki ucu basit mesnetli kirişin çözümü

Şekil (5.12) görülen değişken kesitli çubuk için, varyasyonel türev analizinde çözüm, yirmi elemanlı simetrik olarak çözülmüştür. Kirişe ait özellikler Tablo (5.1)'de verildiği seçilmiştir. (4.33) denkleminde verilen m değerine bağlı olarak α değerleri hesaplanmış, farklı m oranları için sonlu eleman formülasyonu ile çözülen problemler varyasyonel türev çözümünden elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

$$\alpha = \frac{vEI_o}{qL^4} \quad (5.1)$$



Şekil 5.12 Değişken kesitli basit mesnetli kiriş

Değişken kesitli, basit mesnetli kirişte, yirmi elemanlı çözümünden elde edilen α değerleri Tablo (5.2)'de verilmiştir.

Tablo 5.2 Yirmi elemanlı basit mesnetli kiriş için α değerleri

m	α Değerleri	
	Sonlu Elemanlar Yöntemi(M.Gül, 2003)	Varyasyonel Türev
1	0,0130	0,01302
1,25	0,0157	0,015665
1,667	0,0197	0,019708
2,5	0,0269	0,026783

Tablo(5.2)' de de görüldüğü gibi, değişken kesitli kirişler için, farklı yükseklik oranlarında, her iki çözüm yönteminden elde edilen sonuçların iyi bir yaklaşım içerisinde olduğu gözlenmiştir.

6. SONUÇLAR

Bu çalışmada, sabit ve değişken kesitli, üniform dış yük etkisi altındaki Euler-Bernoulli kirişlerinin çözümleri, sonlu farklar yöntemine dayalı varyasyonel türev yöntemiyle çözülmüş ve sonlu eleman çözümleriyle karşılaştırması yapılmıştır.

İlk aşamada, doğru eksenli çubuklar için denge ve kinematik denklemler ile bunlara ek olarak yazılan sınır koşulları kullanılarak alan denklemleri oluşturulmuştur. Gâteaux diferansiyel yöntemi yardımıyla denklemlerin uyumluluğu kontrol edilmiş ve fonksiyonel, geometrik ve dinamik sınır koşullarıyla elde edilmiştir. Yaygın bir çözüm yöntemi olan sonlu elemanlar yöntemine başarılı bir şekilde uygulanmış olan Gâteaux diferansiyel yönteminin, varyasyonel türev yöntemine uygulanabilirliği araştırılmıştır.

Çubuk elemanlar için her iki çözüm yönteminden elde edilen formülasyonlar, örnek olması açısından iki elemanlı, iki ucu basit mesnetli kiriş için uygulanmış ve momentler kesin değerleri ile bulunurken, çökme değerleri iyi bir yaklaşımla elde edilmiştir. Eleman sayısının artırılmasıyla değişik mesnet koşullarına sahip, sabit ve değişken kesitli kirişler için sayısal uygulamalar, Fortran bilgisayar ortamında hazırlanan programlar yardımıyla çözülmüş ve her iki çözüm yönteminden elde edilen sonuçların gerçek sonuçlara yaklaşımları grafikler üzerinde gösterilmiştir.

Bu çalışma sonucunda, eğilme etkisindeki doğru eksenli çubuk elemanlar için varyasyonel türev yönteminin, yaygın olarak kullanılan ve iyi bilinen bir çözüm yöntemi olan sonlu elemanlar yöntemi kadar iyi bir sayısal çözüm yöntemi olduğu ortaya konulmuştur. Bundan sonra farklı tip yapı elemanları ve karmaşık problemlerin çözümü için de uygun bir yöntem olup olmadığı konusunda çalışmalara devam edilmesi düşünülmektedir.

7. KAYNAKLAR

- Aköz A.Y., 1985, Çubuklar için yeni enerji fonksiyonelleri ve uygulamaları, V. Ulusal Mekanik Kongresi, İTÜ
- Aköz A.Y., Omurtag M.H., Doğruoğlu A.N., 1991, The mixed finite element formulation for three-dimensional bars, *Solid and Structures*, 28, No.2, 225-234
- Aköz A.Y., Uzcan (Eratlı) N., 1992, A new functional for reissner plates and its applications, *Computers and Structures*, 44(5), 1139-44
- Aköz A.Y., Kadioğlu F., 1996, The mixed finite element solution of circular beam on elastic foundation, *Computers and Structures*, 60(4), 643-51
- Aköz A.Y., Omurtag M.H., Özütok A., 1997, Free vibration analysis of Kirchhoff plates resting on elastic foundation by mixed finite element formulation based on Gateaux differential, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40, 295-31
- Aköz A.Y., Kadioğlu F., 1999, The mixed finite element method for the quasi-static and dynamic analysis of viscoelastic Timoshenko beams, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44, 1909-1932
- Aköz A.Y., Özütok A., 2000, A functional for shells of arbitrary geometry and a mixed finite element method for parabolic and circular cylindrical shells, *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, 47, 1933-1981
- Aköz A.Y., Eratlı N., 2002a, Free vibration analysis of Reissner plates by mixed finite element, *Structural Engineering and Mechanics*, 13, No.3, 277-298
- Aköz A.Y., Eratlı N., 2002b, Mixed finite element formulation for folded plates, *Structural Engineering and Mechanics*, 13, No.2, 155-170
- Aksu G., Felemban M.B., 1992, Frequency analysis of corner point supported mindlin plates by a finite difference energy method, *Journal of Sound and Vibration*
- Al-Amery R.I.M., Roberts T.M., 1990, Nonlinear finite difference analysis of composite beams with partial interaction, *Computers and Structures*, 35, 81-87
- Antes H., 2003, Fundamental solution and integral equations for Timoshenko beams, *Computers and Structures*, 81, 383-396

- Arad M., Segev R., Ben-Dor G., 1995, Improved finite difference method for equilibrium problems based on differentiation of the partial differential equations and the boundary conditions, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38,1831-1853
- Barve V.D., Dey S.S., 1983, Isoparametric finite difference energy method for plate bending problems, *Computers and Structures*, 17, 459-465
- Bathe J.,1982, *Finite element procedures in engineering analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey
- Bergman V.L., ve Mukherjee S., 1990, A hybrid strain finite element for plates and shells, ;*International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 30,233-257
- Bushnell D., 1970, Analysis of buckling an vibration of ring-stiffened segmented Shells of revolution, *International Journal Solids Structures*, 6, 157-181
- Bushnell D., Almroth O., Brogan F., 1970, Finite Difference energy method for nonlinear shell analysis, *Computers and Structures*, 3, 361-388
- Bushnell D., 1973, Finite difference energy versus finite element models: two variational approaches in computer program, *Numerical Computer Methods in Structural Mechanics*
- Claeysen J.R., Sader R.A., 2003, A dynamical basis for computing the modes of Euler-Bernoulli and Timoshenko beams, *Journal of Sound and Vibration*, 259(4), 986-990
- Dow J.O, Hardaway J.L., 1992, Validation of finite difference boundary condition Models for solid mechanics applications, *AIAAJ*, 30, 1864-1869
- Eratlı N., Aköz A.Y., 1997, The mixed finite element formulation for the thick plates on elastic foundation, *Computers and Structures*, 65(4): 515-29
- Ergün A., Kumbasar N., 2002, İnce plaklar için geliştirilmiş sonlu fark yöntemi, Beşinci Uluslararası İnşaat Mühendisliğinde Gelişmeler Kongresi, İTÜ, Türkiye
- Ergüven M.E., Gedikli A., 2003, A mixed finite element formulation for Timoshenko Beam on Winkler foundation, *Computational Mechanics*, 31, 229-237
- Forsyth G.E., Wasow W.R.,1960, *Finite difference methods for partial differential equations*, Wiley, New York
- Frey W.H., 1977, Flexible finite-difference stencils from isoparametric finite elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 11, 1653-1665

- Houbolt J.C., 1958, A study of several aerothermoelastic problems of aircraft structures in High-Speed Flight, Leeman, Zurich
- Gül M., 2003, Takviyeli Plaklarda Dinamik Analiz, Yüksek lisans tezi, İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul
- İnan M., 1964, Düzlemde Elastisite Teorisi, İTÜ
- İnan M., 1966, Elastik Çubukların Genel Teorisi, İTÜ
- Johnson D.E., 1970, A difference-based variational method for shells, International Journal Solids Structures
- Jensen P.S., 1972, Finite difference technique for variable grids, Computers and Structures, 2, 17-29
- Kaltakçı M.Y., 1999, Mukavemet, Selçuk Üniversitesi, No.38, 2. Baskı
- Koerner D.R., Snell R.R., 1967, Vibration of cantilever right triangular plates, Journal of the Structural Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, 93, 561-566
- Liszka T., Orkisz J., 1980, The finite difference method for arbitrary irregular grids and its application in applied mechanics, Computers and Structures, 11, 83-95
- Ng S.F., Bencharif N., 1991, On the design and analysis of simply supported and clamped thick rectangular plates, Computers and Structures, 38, 589- 596
- Orduna F.- Bustamente, 1993, Accurate finite difference calculation of the natural Frequencies of Euler – Bernoulli beams using Richardson Extrapolation, Journal Sound and Vibration, 162, 361-367
- Omurtag M.H., Aköz A.Y., 1992a, The mixed element solution of the helical beams with variable cross section under arbitrary loading, Computers and Structures, 43(2), 325-31
- Omurtag M.H., Aköz A.Y., 1992b, Mixed finite element formulation of eccentrically stiffened cylindrical shells, Computers and Structures, 42(5), 751-68
- Omurtag M.H., Aköz A.Y., 1993a, A compatible cylindrical shell element for stiffened cylindrical shells in mixed finite element formulation, Computers and Structures, 49(2), 363-70
- Omurtag M.H., Aköz A.Y., 1993b, A new mixed finite element solution for thin cylindrical hollow shells, Bulletin of the Technical University of İstanbul 46(4), 497-519

- Omurtag M.H., Aköz A.Y., 1994, Hyperbolic paraboloid shell analysis via mixed finite element formulation, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 37, 3037-56
- Omurtag M.H., Aköz A. Y., 1995, Isoparametric mixed finite element formulation of orthotropic cylindrical shells, *Computers and Structures*, 55(5), 915-24
- Özçelikörs Y., Omurtag M.H., Demir H., 1997, Analysis of orthotropic plate-foundation interaction by mixed finite element formulation using Gateaux Differential, *Computers and Structures*, 62(1), 93-106
- Özütok A., 1999, Genel kabuklara ait fonksiyonel ve parabolik silindir kabuklar için karışık sonlu eleman formülasyonu, Doktora tezi, İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul
- Prathap G., Babu C.R., (1986a), Field-consistent strain interpolations for the quadratic shear flexible beam element, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 23, 1973-1984
- Prathap G., Babu C.R., (1986b), An isoparametric quadratic thick curved beam element, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 23, 1583-1600
- Rhiu J.J., Lee S.W., 1987, A new efficient mixed formulation for thin shell finite element models, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 24, 581-604
- Singh J.P., Dey S.S., 1990, Variational finite difference method for free vibration of sector plates, *Journal of Sound and Vibration*, 136, 91-104
- Singh J.P., Dey S.S., 1992, Parametric instability of rectangular plates by the energy based finite difference method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*
- Southwell R.V., 1940, *Relaxation methods in engineering science*, Oxford University Press
- Southwell R.V., 1946, *Relaxation methods in theoretical physics*, Oxford
- Tabarrok B. ve Sodhi D. S., 1994, Complementary energy formulation for thin elastik shells, *Bull. Tech. Univ., İstanbul*, 47, 187-211
- Ugural A.C., Fenster S.K., *Advanced Strength and Applied Elasticity*
- Verma A.K., Dey S.S., 1991, Integrated analysis of curved bridge superstructures by variational finite difference method, *Computer and Structures*, 38, No.56, 597-603

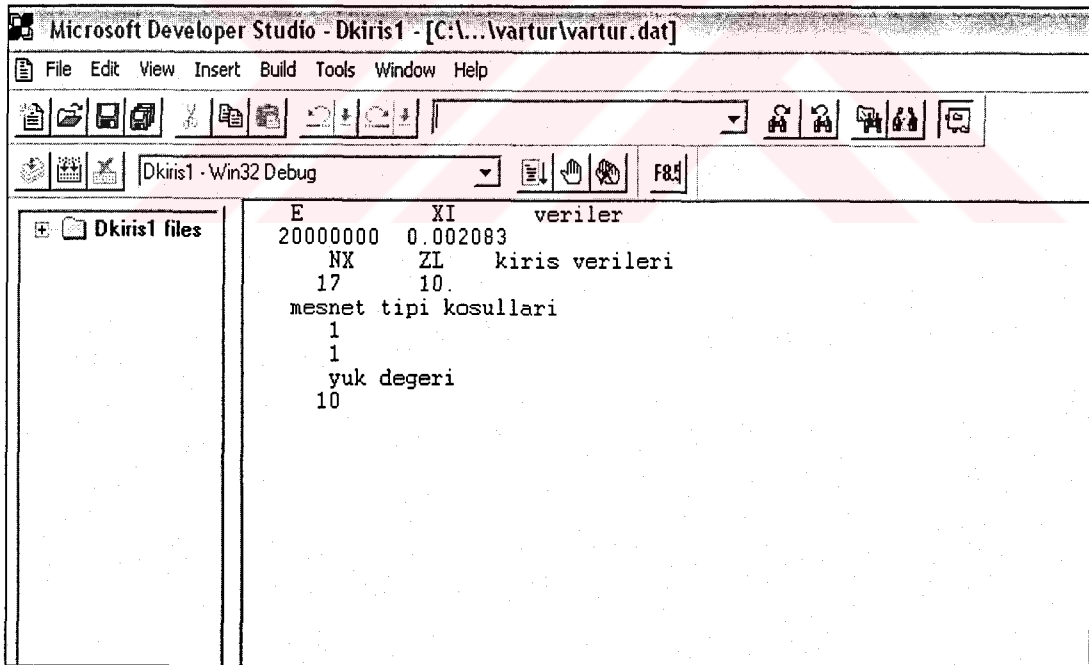
Zienkiewicz D.C., Cheung Y.K., 1970, The finite element method in structurel and continuum mechanics, McGraw-Hill, New York



EKLER

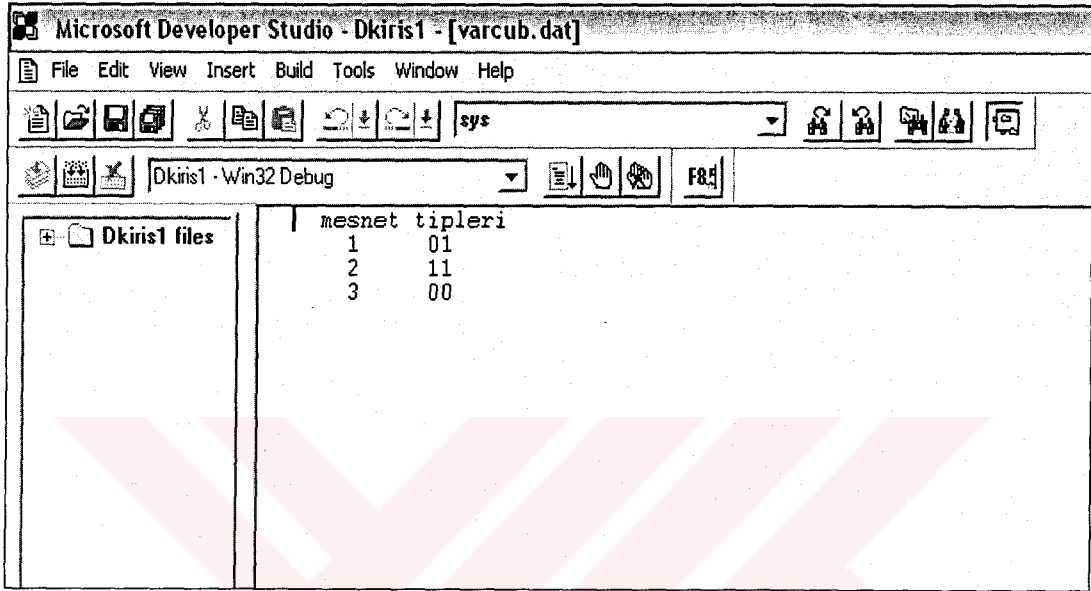
EK A. Fortran Bilgisayar Dilinde Varyasyonel Türev Yönteminin Programlanması

Sabit ve değişken kesitli kırıslara ait sonlu eleman ve varyasyonel türev yöntemlerinin uygulanmasıyla türetilen denklemlerden elde edilen verilere göre hazırlanan bilgisayar programı, Fortran ortamında yazılmıştır. Program temel olarak dört dosyadan oluşmaktadır. Bunlar, iki farklı veri dosyası olarak uzantıları *‘.Dat’* olan dosyalar, programın yazıldığı ve uzantısı *‘.For’* olan dosya ve son olarak uzantısı *‘.Son’* olan sonuç dosyadır. Ayrıca program altı alt programdan oluşmuştur. 1. veri dosyasından alınan pencere Şekil(A1) de gösterilmiştir.



Şekil A1. Programa ait 1.veri dosyasından alınan pencere

Yukarıdaki veri dosyasında, kullanılacak malzeme özelliklerine bağlı olarak elastisite modülü, atalet momenti gibi veriler, bunlar dışında eleman sayısı, çubuk uzunluğu, mesnet şartlarının seçimi ve yük değeri gibi, denklemlerde gerekli olan veriler alt programlarda tanımlanarak girilmiştir. Bunun dışında mesnet tipleri veri dosyasına Şekil (A2) de gösterildiği gibi girilmektedir.



Şekil A2. Programa ait ikinci veri dosyasından alınan pencere

Fortran 4' ortamında bilgisayar programının nasıl yapıldığını göstermesi açısından, programın başlangıç kısmından alınan küçük bir kısım Şekil(A3)' de gösterilmektedir.

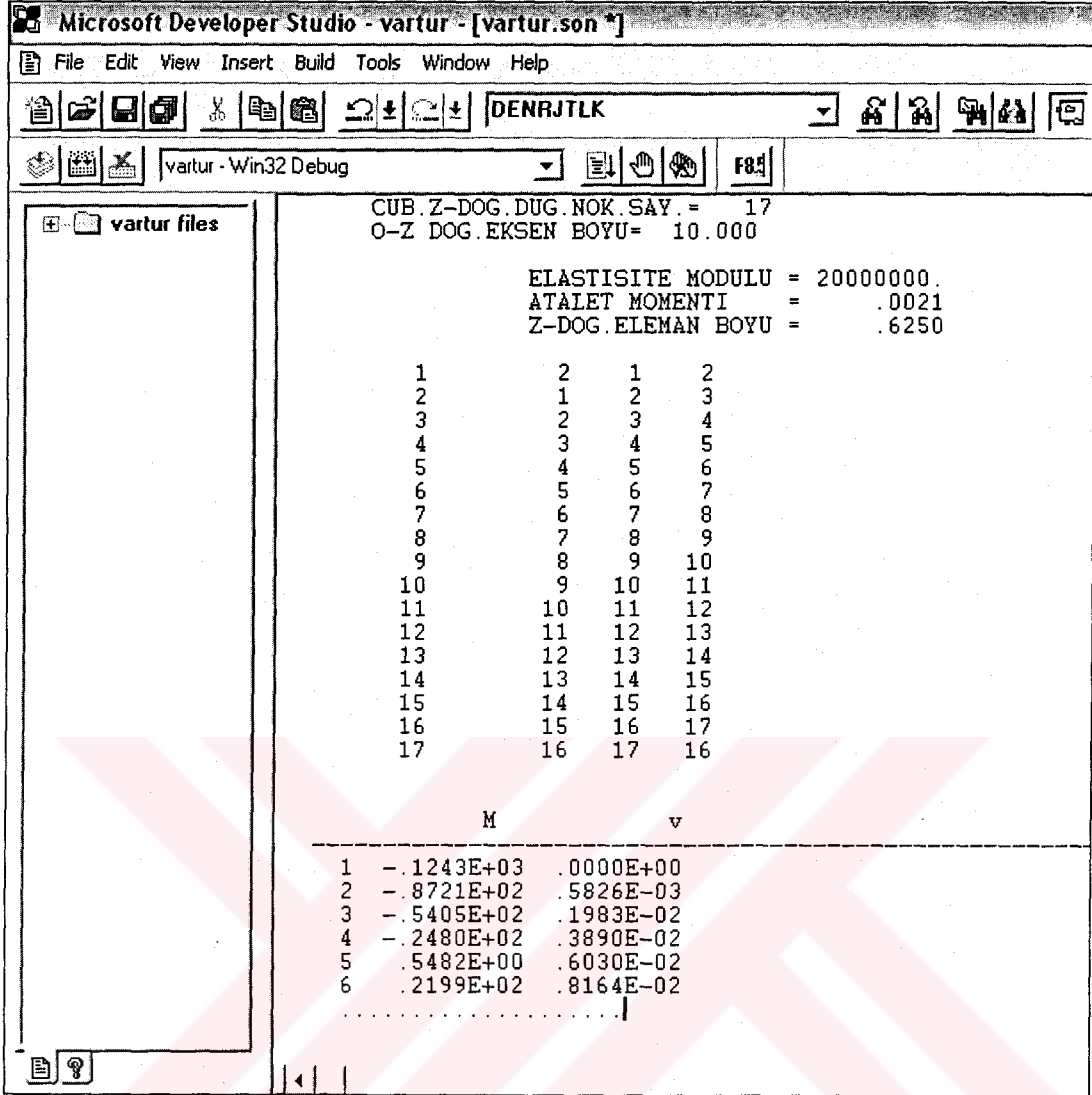
```

Microsoft Developer Studio - Dkirisdk - [C:\...\vartur\vartur.for *]
File Edit View Insert Build Tools Window Help
DENRJTLK
Dkirisdk - Win32 Debug
Dkirisdk files
C      EULER-BERNOULLI KIRISLER
C      varyasyonel türev yöntemi ile çözer
C
C      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
C      DIMENSION COR(100),NODE(100,3),JDEG(100,2),KCUBUK(10,2),MTK(2)
C      ,SE(2,6),S(400000),GM(500,500),YM(2),NCODE(6),JO(2)
C
C      OPEN (UNIT=6,FILE='vartur.son',ACCESS='SEQUENTIAL',STATUS='OLD')
C      OPEN (UNIT=5,FILE='vartur.dat',ACCESS='SEQUENTIAL',STATUS='OLD')
C      OPEN (UNIT=2,FILE='varcub.dat',ACCESS='SEQUENTIAL',STATUS='OLD')
C
C      mst: Bir düğüm noktasındaki bilinmeyen sayısı
C      mdug: maksimum düğüm noktası sayısı
C      mtk: mesnet tipi ve kosulu
C
C      TOL=0.000000000001
C      NULL=0
C      MST=2
C      MS=MST*NJT
C      NYUK=1
C      MTS=3
C      NJT=3
C
C      CALL varDGM(COR,E,XI,AA,NULL,JDEG,KCUBUK,MST,NODE,
C      ND,MTS,MTK,ME,NS,NX)
C      CALL varRJTLK(E,XI,AA,SE)
C      CALL varSYS(NODE,ME,ND,SE,MST,NJT,NCODE,JO,JDEG,GM,NS,YM,S,
C      NYUK,AA,NX)
C
C      CALL GAIND(S,NS,NYUK,TOL,*50)
C      CALL DENSON(S,NS,MST,JDEG,SC,NYUK,ND)
C
C      CLOSE (5,STATUS='KEEP')
C      CLOSE (2,STATUS='KEEP')
C      CLOSE (6,STATUS='KEEP')
50 STOP
END

```

Şekil A3. Ana programdan alınan pencere

Son olarak, sonuçların elde edildiği sonuç dosyasından çıkarılan bir kısım programın tanıtılması açısından Şekil(A4) de gösterilmiştir.



Şekil A4. Programın sonuç dosyasından alınan pencere

Şekil(A4) de görüldüğü gibi burada, yazdırılan verilerin (düğüm noktası sayısı, çubuk boyu, elastisite modülü v.b.) yanı sıra, düğüm noktaları kod numaraları, mesnet tipleri, bilinmeyen sayısı, eleman matrisi, global matris ve son olarak hesaplamak istediğimiz bilinmeyen değerleri yer almaktadır.

Alt programlar hakkında ayrıntılı bilgilere aşağıda yer verilmiştir.

1. Giriş alt programı

Bu alt programda, problemlerde kullanılacak olan girişlere ait verilerin girişi yapılmaktadır. Bunlar, elastisite modülü, atalet momenti gibi malzemeye ve kesite ait özellikler yanında, Giriş kaç elemana bölünecekse buna bağlı olarak düğüm noktası sayısı gibi probleme ait birtakım verilerden oluşmaktadır. Girilen verilere göre eleman sayısı ve bunlara ait kod numaraları oluşturulmaktadır.

2. Mesnet şartları ve değişken numaralarına ait alt program

Burada, farklı tiplerde mesnet durumları için sınır koşulları girilmiş, ayrıca çözmek istediğimiz problemin özelliğine bağlı olarak mesnet tipleri seçilmiştir. Mesnetler ve diğer düğüm noktaları için, belirlediğimiz değişkenler numaralandırılarak maksimum bilinmeyen sayısı tespit edilmiştir.

3. Eleman matrisi alt programı

Burada ise katsayı matrislerini oluşturulması sırasında ifadelerde yer alan eğilme rijitliği, şekil fonksiyonlarının integral değerlerinden gelen ifadeler tanımlanmıştır. Daha sonra ise, eleman matrisinin oluşturulması sırasında denklemlerden gelen ifadeler matris formunda düzenlenerek, şekil fonksiyonlarına bağlı olarak teşkil edilmiştir.

Kullanılan yöntemle ilgili olarak, işlemler sonucunda elde edilen denklemler için oluşturulan katsayı matrisleri, sonlu elemanlar yönteminde elemana ait katsayı matrisi olarak, varyasyonel türevde ise düğüm noktalarına ait katsayı matrisleri olarak elde edilmiştir.

4. Kodlama alt programı

İlk olarak oluşturulacak yük matrisi ve global matrisler sıfırlanarak başlanılmıştır. Daha sonra giriş dosyasına yük değeri girilmiştir. Düğüm noktaları kod numaraları teşkil edilirken, mesnetlerin yer aldığı ilk ve son düğüm noktaları mesnet koşullarına bağlı olarak değiştirilmiştir. Eleman matrisleri için, düğüm noktaları kod numaraları yerleştirildikten sonra, tüm sistem için uygun şekilde kod numaralarının toplanmasıyla global matrise aktarılmıştır.

5. Denklem takımını çözen alt program

Burada, daha önceden yapılmış olan programlarda kullanılmış olan, denklem takımını çözen program kullanılarak matris işlemi çözülmüştür.

6. Sonuç alt programı

Öncelikle sonuç matrisi sıfırlanmış ve gerekli düzenlemeler yapılarak bilinmeyen değişken değerleri sonuç dosyasına yazdırılmıştır.