

156047

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLARI EĞİTİMİ ANABİLİM DALI**

**8. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN SÖZEL PROBLEMLERİN ÇÖZÜMÜNDE  
DENKLEMLERDEN YARARLANABİLME BECERİLERİ**

**Temel KÖSA**

**Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde  
"Yüksek Lisans (Matematik Eğitimi)"  
Unvanı Verilmesi İçin Teslim Edilen Tezdir.**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 20.07.2004  
Tezin Savunma Tarihi : 17.08.2004**

**Tez Danışmanı : Doç. Dr. Adnan BAKİ  
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Ali Rıza AKDENİZ  
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Salih ÇEPNİ**

*Adnan BAKİ*  
*Ali Rıza AKDENİZ*  
*Salih ÇEPNİ*

**Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Yusuf AYVAZ**

*Yusuf AYVAZ*

**Trabzon 2004**

## ÖNSÖZ

8. sınıf öğrencilerinin sözel problemlerin çözümünde denklemlerden yararlanma becerilerini ortaya koymak amacıyla, araştırmacı öğretmen yöntemiyle yürütülen bu çalışma Trabzon İli Çarşıbaşı İlçesi'nde gerçekleştirilmiştir.

Lisans ve yüksek lisans dönemlerinde öğrencisi olmaktan gurur duyduğum, tez danışmanlığımı üstlenerek fikirleriyle ve tecrübeleriyle beni yönlendiren, bana yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Doç. Dr. Adnan BAKİ'ye saygı ve şükranlarımı sunarım.

Araştırmanın pilot çalışmasında yardımcı olan Tuncay KÖR'e teşekkür ederim. Çalışmalarım sırasında dualarını ve desteklerini hiç esirgemeyen başta annem olmak üzere tüm aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Araştırmamın tamamlanmasında yardımlarını esirgemeyen sevgili arkadaşım Ümit PEKDEMİR ve Arş. Gör. İlhan KARATAŞ'a teşekkürü bir borç bilirim.

Temel KÖSA  
Trabzon 2004

## İÇİNDEKİLER

|                                                     | <u>Sayfa No</u> |
|-----------------------------------------------------|-----------------|
| ÖNSÖZ.....                                          | II              |
| İÇİNDEKİLER.....                                    | III             |
| ÖZET .....                                          | V               |
| SUMMARY .....                                       | VI              |
| TABLolar DİZİNİ.....                                | VII             |
| 1. GENEL BİLGİLER.....                              | 1               |
| 1.1. Giriş .....                                    | 1               |
| 1.2. Problem Nedir?.....                            | 4               |
| 1.3. Problem Çözme ve Problem Çözme Aşamaları ..... | 5               |
| 1.4. Denklem Kurma ve Polya.....                    | 9               |
| 1.5. Problem Çözme Yöntemleri .....                 | 10              |
| 1.5.1. Grafik veya Şema Kullanma.....               | 10              |
| 1.5.2. Yazılı Olarak İfade Etme .....               | 10              |
| 1.5.3. Genelleme ve Yordama .....                   | 11              |
| 1.5.4. İspat .....                                  | 11              |
| 1.5.5. Sembollerle veya Formülle İfade Etme .....   | 11              |
| 1.6. Konu İle İlgili Yapılan Çalışmalar .....       | 12              |
| 1.7. Araştırmanın Problemi .....                    | 17              |
| 1.7.1. Alt Problemler .....                         | 18              |
| 1.8. Araştırmanın Amacı .....                       | 18              |
| 1.9. Araştırmanın Önemi .....                       | 19              |
| 1.10. Araştırmanın Sayıtlıları .....                | 19              |
| 1.11. Araştırmanın Sınırlılıkları .....             | 20              |
| 2. YAPILAN ÇALIŞMALAR.....                          | 21              |
| 2.1. Yöntem .....                                   | 21              |
| 2.1.1. Araştırmacı Öğretmen Yöntemi .....           | 23              |
| 2.1.2. Pilot Çalışma .....                          | 25              |
| 2.1.2.1. Pilot Çalışmanın Birinci Adımı .....       | 25              |

|          |                                                |     |
|----------|------------------------------------------------|-----|
| 2.1.2.2. | Pilot Çalışmanın İkinci Adımı.....             | 26  |
| 2.1.3.   | Tanı Testindeki Problemlerin Seçimi.....       | 27  |
| 2.2.     | Evren ve Örneklem.....                         | 30  |
| 2.3.     | Verilerin Toplanması.....                      | 30  |
| 2.3.1.   | Klinik Mülakat.....                            | 30  |
| 2.4.     | Verilerin Analizi.....                         | 31  |
| 3.       | BULGULAR .....                                 | 33  |
| 3.1.     | Alan Notları .....                             | 33  |
| 3.2.     | Problemlerden Elde Edilen Bulgular .....       | 39  |
| 3.2.1.   | Sınıf Problemi.....                            | 39  |
| 3.2.2.   | Sayı Problemi .....                            | 50  |
| 3.2.3.   | Yaş Problemi .....                             | 57  |
| 3.2.4.   | İşçi Problemi.....                             | 64  |
| 3.2.5.   | Merdiven Problemi.....                         | 75  |
| 3.2.6.   | Futbol Problemi.....                           | 83  |
| 3.2.7.   | Hız Problemi.....                              | 89  |
| 3.2.8.   | Kesir Problemi.....                            | 96  |
| 4.       | TARTIŞMA.....                                  | 103 |
| 5.       | SONUÇLAR.....                                  | 107 |
| 5.1.     | Alan Notlarından Elde Edilen Sonuçlar .....    | 107 |
| 5.2.     | Klinik Mülakatlardan Elde Edilen Sonuçlar..... | 108 |
| 6.       | ÖNERİLER .....                                 | 110 |
| 7.       | KAYNAKLAR.....                                 | 112 |
| 8.       | EKLER .....                                    | 117 |
|          | ÖZGEÇMİŞ                                       |     |

## ÖZET

Bu çalışmanın amacı, 8. sınıf öğrencilerinin sözel problemleri çözme sürecinde denklemlerden yararlanma becerilerini ortaya koymaktır. Araştırmacı öğretmen yöntemiyle yürütülen bu çalışmada veri toplama araçları olarak tanı testi, klinik mülakat ve alan notları kullanıldı. Araştırma süresince öğrencilerin denklem kurma, denklem çözme ve problem çözmeye karşı tutumları alan notları başlığı altında yazıldı. Öğrencilerin seviyelerine uygun birinci dereceden bir bilinmeyenli ve birinci dereceden iki bilinmeyenli denklemler yardımıyla çözülebilecek 8 sözel problemten oluşan bir tanı testi hazırlanarak 18 öğrenciye uygulandı. Tanı testi kullanılarak 6 öğrenciyle klinik mülakatlar yapıldı. Klinik mülakatlar süresince yapılan konuşmalar teybe kaydedilerek sonradan yazılı hale dönüştürüldü. Yapılan konuşmalar ve öğrencilerin tanı testindeki çözümleri nitel olarak analiz edilerek öğrencilerin problem çözme sürecinde denklemlerden yararlanma becerileri ortaya konulmaya çalışıldı.

Yapılan çalışmanın sonucunda öğrencilerin sözel ifadeleri cebirsel ifadelere dönüştürmede genel olarak başarısız oldukları tespit edilmiştir. Sözel ifadeleri cebirsel ifadelere dönüştürmede güçlük çeken öğrencilerin probleme ait denklemi çözmede de genel olarak başarısız oldukları görülmüştür. Sözel ifadeleri cebirsel ifadelere dönüştürmede güçlük çekmeyen öğrenciler kurdukları denklemleri genel olarak doğru çözmüşlerdir. Ayrıca öğrencilere bir bilinmeyenli bir denklemi çözmek, iki bilinmeyenli bir denklemi çözmekten daha kolay gelmiştir. Öğrenciler genelde bilinmeyenin eşitliğinin her iki tarafında yer aldığı ve parantez gerektiren problemlerin denklemlerini kurmada güçlük çekmişler ve bu denklemlerin çözümünde cebirsel ve işaret hataları yapmışlardır. Ayrıca iki bilinmeyen yardımıyla çözülebilen problemlere ait denklemleri kurmada öğrenciler genelde başarılı olmuştur.

Öğrencilerin iyi bir problem çözücü olarak yetiştirilebilmesi için öğretmenler sınıfta çeşitli türden denklem kurmayı gerektiren sözel problemler sorarak problem çözme etkinliklerine daha geniş yer vermeli ve müfredata günlük hayatta karşılaşılabilecek ilginç ve düşündürücü problemler konulmalıdır.

**Anahtar Kelimeler:** Denklem Kurma, Problem Çözme, Klinik Mülakat, Tanı Koyucu Test

## **SUMMARY**

### **8<sup>th</sup> Grade Students' Abilities of Using Equations in Word Problems Solving**

The purpose of this study is to determine the 8<sup>th</sup> grade students' abilities in using equations during problem solving process. This study was based on the action research approach. The data was collected through diagnostic test, clinical interview and classroom notes. During the study, students' attitudes towards equation setting, equation solving and problem solving were observed and written as classroom notes. The diagnostic test that includes 8 word problems and can be solved by means of first degree equation with one unknown or two unknowns was prepared and administered to 18 students. These 8 word problems were used throughout the clinical interviews. Six students were interviewed through diagnostic test. During the clinical interviews, conversations were recorded by a tape-recorder and they were transcribed into written form. Conversations and students' solutions during diagnostic test were analysed quantitatively and by this way, students' abilities using equations during problem solving process was tried to be found out.

At the end of the study, it was concluded that in general, students were unsuccessful at transforming word problems into algebraic expressions. Those students, who were unsuccessful at this transformation, were generally unsuccessful at solving the equation of the problem as well. On the other hand, those students, who were successful at this transformation, were generally successful in solving the equation of the problem as well. Furthermore, it was easier for the students to solve the equations with one unknown than to solve the equation with two unknowns. Generally, it was more difficult for the students to set equations in problems where unknown were in both side of the equation and in problems, and which require parenthesis. They made algebraic and sign mistakes in solving these kinds of equations. In general, students were successful at setting equations with two unknowns.

In order to prepare students as good problem solvers, teachers should spend more time on problem solving activities asking many word problems in classroom which require using different equation settings. Interesting and thought-provoking daily life problems should also be placed into curriculum.

**Key Words:** Equation Setting, Problem Solving, Clinical Interview, Diagnostic Test

## TABLÖLAR DİZİNİ

|                                                                                                             | <u>Sayfa No</u> |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|
| Tablo 1. Problem çözme süreci ve davranışlar .....                                                          | 9               |
| Tablo 2. Tanı testinde yer alan sorular.....                                                                | 29              |
| Tablo 3. Tanı testindeki sınıf problemine öğrencilerin verdikleri cevapların<br>frekans ve yüzdesi .....    | 49              |
| Tablo 4. Tanı testindeki sayı problemine öğrencilerin verdikleri cevapların<br>frekans ve yüzdesi .....     | 57              |
| Tablo 5. Tanı testindeki yaş problemine öğrencilerin verdikleri cevapların<br>frekans ve yüzdesi .....      | 64              |
| Tablo 6. Tanı testindeki işçi problemine öğrencilerin verdikleri cevapların<br>frekans ve yüzdesi .....     | 74              |
| Tablo 7. Tanı testindeki merdiven problemine öğrencilerin verdikleri cevapların<br>frekans ve yüzdesi ..... | 83              |
| Tablo 8. Tanı Testindeki Futbol Problemine Öğrencilerin Verdikleri Cevapların<br>Frekans ve Yüzdesi.....    | 89              |
| Tablo 9. Tanı testindeki hız problemine öğrencilerin verdikleri cevapların<br>frekans ve yüzdesi .....      | 95              |
| Tablo 10. Tanı testindeki kesir problemine öğrencilerin verdikleri cevapların<br>frekans ve yüzdesi .....   | 101             |
| Tablo 11. Öğrencilerin tanı testindeki problemlere verdikleri cevapların<br>genel değerlendirmesi.....      | 101             |

## 1. GENEL BİLGİLER

### 1.1. Giriş

Yaşamın temel gereksinimlerinden olan matematik, insanlık tarihiyle başlamış ve geçen süre içerisinde büyük gelişmeler göstermiştir. Kökeninde evreni nicel özellikleriyle kavrama yeteneğine dayanan matematiksel düşünme, başlangıçta günlük yaşam ihtiyaçlarına yönelik basit sayma ve ölçme işlemlerinde kendini göstermiştir. Medeniyetler geliştikçe insanlar için matematik giderek daha fazla önem kazanmaya başlamış ve günlük yaşam ihtiyaçlarında kullanılmasından öte bilimin temel taşı olmuştur. İnsanlık tarihi boyunca matematik, medeniyetlerin gelişmesinde önemli bir rol oynamakla kalmamış, aynı zamanda medeniyetlerin vazgeçilmez unsurlarından birisi olmuştur.

Gittikçe karmaşıklaşan toplum yapısı ve teknolojik gelişmeler, siyasi, sosyal ve ekonomik krizler bireye gittikçe artan problemleri durumlarla karşılaştırmaktadır. Dolayısıyla problem çözme sadece matematiğin bir kolu olarak gelişmemiştir. Yapılan bir çok araştırmada problem çözme sürecine ilişkin bir çok kavram ortaya konulmuştur. Bu kavramlar değişik öğrenme yaklaşımlarından geleneksel Gestalt'çı yaklaşımlara ve son olarak ta bilgisayar simülasyonu ve matematiksel modellere ilişkin yaklaşımlara dek çeşitli özellikler içermektedir [1].

Matematik bu işlevlerinin yanı sıra, insanlara soyut bilgileri somut durumlara uygulama, genelleme yapma, olaylar arasında sebep sonuç ilişkisi kurma, açık fikirli olma, sonuca ulaşmak için aceleci olmama, gerekli bilgileri sezgi yoluyla hissedebilme, kısaca matematiksel düşünme becerilerini kazandırmaktadır [2].

Matematik eğitiminin başlıca amacı kişiyi; aritmetik, cebir ve geometrinin temel bilgileriyle donatmanın yanı sıra, düşünmeye yöneltmek; akıl yürütmelerinde ulaştığı sonuçlarda tutarlı olma duyarlılığına ulaştırmaktır [3].

Matematiksel bilgi ile matematiksel düşünme birbiriyle sıkı ilişkili olmasına rağmen aslında birbirinden farklı kavramlardır. Bilgi, düşünmek için gerekli ancak yeterli değildir. Okullarımızda eğitim-öğretim faaliyetlerindeki genel eğilim bilgiyi ön planda tutmakta ve öğrencilerde düşünme alışkanlığını geliştirmekten uzak bırakmaktadır. Bu tutumu

düzeltilmenin ön koşulu, matematiksel düşünme süreci etkinliklerine; dolayısıyla bu sürecin işlediği problem çözme çalışmalarına ağırlık vermektir.

Problem genel anlamda sonucu bilinmeyen bir durum veya cevabı düşünülerek, tartışılarak bulunacak bir sorun veya olaydır. Matematik derslerinde öğrencilere sorulan problemler öğrencilerin düşüncelerini, akıl yürütmelerini ve dört işlemi kullanmalarını gerektirmektedir. Matematik problemlerini çözebilmek için daha önce öğrenilmiş bilgilere, matematiksel kurallara, analiz ve sentez gibi zihinsel etkinliklere ihtiyaç vardır. Problem çözmenin temeli mantıklı düşünmek, verilenler arasında ilişki kurmak ve çıkarımlar yapmaktır [4].

Problem çözme; genel olarak bilimsel bir konuda apaçık tasarlanan fakat hemen ulaşılamayan bir hedefe varmak için bilinçli olarak araştırma yapmaktır. Matematikte problem çözme ise; matematiğin yapısı gereği, sorunun zihinsel süreçlerle gerekli bilgileri kullanarak ve işlemleri yaparak ortadan kaldırılmasıdır [5]. Matematik derslerinde pek çok öğrenci problem çözme çabalarında birkaç kere denemeden sonra başarılı olamayınca cesaretlerini ve kendilerine olan güvenlerini kaybetmektedirler [6]. Bu tutumla öğrenciler matematikten uzaklaşarak matematik dersini sevimsiz olarak nitelendirmektedirler.

Öğrenciler matematik derslerini zor bir ders olarak değerlendirmekte ve özellikle matematik problemlerini çözmede zorlanmaktadırlar. Öğrencilerin ve genelde matematik ile ilgilenenlerin çoğunun kendilerine has problem çözme teknikleri vardır. Öğrencilerin çoğu, ham yetenek ile problem çözmeyi birleştirip konu öğrenmeyi esas almaktadırlar. Genelde problem çözme; konunun pekiştirilmesi, daha iyi anlaşılması için bir araçtır.

Her problem belli aşamalardan geçildikten sonra çözülür. Yine çoğu problemin birden çok çözümü olduğu ve her bir çözümde ayrı bir teknik uygulanabileceği unutulmamalıdır. Esas olan bir problemi çözmeye başlarken “Acaba bu problem için en uygun teknik hangisidir?” diye o soruya özel bir teknik ayarlayarak kendimizi sınırlamak yerine, her türlü tekniğe açık bir yaklaşımla işe başlamaktır. Sonuçta asıl olan problemin matematik kuralları çerçevesi içerisinde, mantıklı ve doğru çözülmesidir. Buna ulaşmakta ancak çok problem çözerek büyük bir birikimle olur. Bu birikim bize problem çözme metotları ve çözüme götürücü yollar açar.

Problem çözmede en çok tercih edilen yollardan biriside denklem kurmadır. Denklem bilinmeyen veya bilinmeyenleri ve eşitliği içinde barındıran matematiksel ifadelerdir.

İlköğretimin birinci kademesinde yer alan sınıflarda (özellikle 4. ve 5. sınıflarda) problem çözme; problem metninde verilen sayılarla cebirsel işlem yapma olarak

algılanmaktadır. Bu düzeydeki öğrencilere problem çözme etkinliklerinde tersten gitme, kutu kullanma, kat alma gibi stratejileri kullanmaları kazandırılmaya çalışılırken, yedinci sınıftan itibaren öğrencilere problem çözme becerisinin kazandırılması ve geliştirilmesinde, denklem kurma yardımıyla problem çözme yeteneği kazandırılması hedeflenmiştir. İlköğretim 7. sınıfta basit sayı problemlerini harfli ifadeye dönüştürmeyle başlayan bu süreç 8. sınıfta birinci dereceden bir ve iki bilinmeyenli denklemler kurma, kurulan denklemleri çözme hedefleriyle ilerlemektedir.

Gagne ve Skinner gibi araştırmacılar problem çözme sürecinde en önemli değişken olarak bireyin geçmişini inceleme eğiliminde görülürlerken, diğer araştırmacılar, örneğin; Kohler ve Maier gibi, problemlerin çözümünde en önemli unsurun bireyin karşı karşıya kaldığı durumu algılama biçimi olduğunu savunmuşlardır [7].

Anderson öncelikle bilişsel işlemler üzerinde odaklaşarak, problem çözme sürecini bilişsel işlemleri sırayla bir hedefe yönleltmek olarak tanımlamıştır [8].

Charles ve Lester genel olarak problem çözme sürecini etkileyen faktörleri (1) Deneyim faktörü, (2) ilgi, motivasyon, baskı, endişe gibi duyuşsal faktörler, (3) okuma becerisi, mantıksal beceri, işlemsel beceri olarak üç başlıkta açıklamıştır [9].

Gilbert, Charles ve De Corte problem çözme sürecini etkileyen dil bilgisi ve dil faktörlerini vurgulamışlardır. Araştırmacılar problemin anlamı, söz dizimi, kelime ve cümlelerin uzunluğu problem çözme sürecini etkileyip etkilemediğini araştırmışlardır. Özellikle problem çözmede anlam, kelimeler, söz dizimi önemli olduğu ortaya çıkmıştır [9, 10, 11].

Problem çözme, yalnızca birey bazı düzeylerde tepki vermesi gerektiğini algıladığı zaman başlayabilir. Ayrıca bireyin bir hedefinin olması gerekir ki, böylece elde etmek istediği hedefe ulaşma yollarını bulmak için çaba sarf etsin [12]. Diğer bir deyişle problem çözme bir hedefe ulaşırken araya giren zorlukların çözümünü bulma sürecidir. Wickelgren, her problem için, bir hedef, veriler ve işlemler belirlenebileceğini belirtmektedir. Veriler, hedefe ulaşmak için kullanılacak gerçekler, sözcükler, kavramlar ve işlemlerdir. İşlemler, hedefe ulaşabilmek için verileri ustalıkla kullanma yollarıdır. Hedef ise problemin çözümüdür [13].

Problem çözme sürecini etkileyen bilişsel faktörler üzerine çalışan araştırmacılar, kısa süreli ve uzun süreli hafızanın önemine ve iyi problem çözümlerinin, zayıf problem çözümlerine göre daha önceden çözdükleri problemlerin yapısı ile ilgili bilgiyi hatırlamada nasıl iyi olduklarını araştırmışlardır. Bu araştırmada problemin yapısıyla ilgili bilgiler şematik bilgi olarak tanımlanmaktadır [14].

Matematikte denklem kurma, problemlerin çözümünde düşüncelerimizi matematiksel ortamda ifade etmemize ve doğruluğunu hızlı biçimde kanıtlamamıza imkan sağlar. Cebirde sayıları temsil etmek için kullandığımız harfler, matematiksel örüntüler problemleri kolay ve hızlı çözmemize yardımcı olur.

Problem çözmede cebiri uygulamak için, verilen sayısal bilgileri harf ya da sembollere dönüştürmek gerekir. Cebirsel yaklaşımla problemler çözülürken önce, verilen bilgiler sembolik harflerle ifade edilir. Sonra çözümü bulunur. Böyle örneklerde, harfler yerine seçilecek değişkenlerin hangi niceleyicileri nasıl temsil ettiğini kolayca hatırlamak için kullanılan değişkenleri anlamlı seçmek yararlı olacaktır [15].

Bu bilgiler ışığında problem çözmede denklem kurma önemli stratejilerden bir tanesidir. Öğrencilerinin, problemlerin çözümünde denklem kurabilme becerileri ne derece kullandıklarını ortaya koymak gerekir. Bu amaçla 8. sınıf öğrencilerinin sözel problemleri çözerken denklemlerden yararlanma becerileri bu çalışmada incelenmiştir.

## 1.2. Problem Nedir?

Problem genel anlamda sonucu bilinmeyen bir durum veya cevabı düşünülerek, tartışılarak bulunacak bir sorundur. T.D.K. Türkçe Sözlükte problemin tanımı “*Teoremler veya kurallar yardımıyla çözülmesi istenen soru; mesele, sorun*” biçiminde yer almaktadır [16].

Eğitim bilimcilerin özünde aynı anlamı karşılayan farklı problem tanımları vardır. John Dewey, problemi insan zihnini karıştıran, ona meydan okuyan ve mevcut kabulleri, görüşleri, inançları belirsizleştiren her şey olarak tanımlanmaktadır [17]. Aksu problemi, giderilmek istenen güçlük yada yanıtı aranan bir soru olarak açıklamıştır [18]. Adair ise problemi bireyi engelleyen ve onun önüne atılmış bir durum olarak açıklamakta; problemlerde çözümün bütün elemanlarının problemin kendi içinde bulunduğunu söyleyerek problemi bir tür çözüm yada çözümün problem biçiminde gizlenmiş şekli olarak tanımlamaktadır [19].

Problem kavramıyla ilgili verilen bir tanım da şöyledir: Problem zor yada sonucu belirsiz bir sorudur. Çözümü bir araştırma veya tartışma gerektirir. Kişi çözümü bulma konusunda hazırlıksız fakat isteklidir [20].

Baki ve Bell ise problemi; matematikçi bir olay, durum veya nesne ile karşılaştığında onu mevcut bilgileri ile, bilimin ilkeleri ile açıklayamıyorsa, önceden kestiremiyorsa, bu olayı, durumu veya nesneyi bir matematiksel problem olarak tanımlamıştır [21].

Bu tanımlardan problemin üç temel özelliği söylenebilir. Bunlar; (1) Problemin karşılaşan kişi için bir güçlük olduğu, (2) kişinin onu çözmeye ihtiyaç duyduğu ve (3) kişinin bu problemle daha önce karşılaşmamış olduğu, çözümle ilgili bir hazırlığının bulunmadığıdır. Bu özellikle problem kavramıyla ilgili bazı sınırlamalar getirmektedir. Bunlar, bir kez karşılaşıp çözüldükten sonra aynı durumun problem olmadığı, bazı kişiler için problem olan bir durumun bazılarına göre problem olamayabileceği, çözümün aniden ortaya çıkmadığı ve bir çaba gerektirdiğidir.

Yukarıda problem için yapılan tanımlardan problemi bireyin karşılaştığı güçlük olarak tanımlayıp, bir durumun problem olabilmesi için bireyin bu durumla daha önce karşılaşmamış olması veya bu durumdan habersiz olması gerektiği şeklinde birleştirebiliriz.

Problem genel anlamda sonucu bilinmeyen bir durum veya cevabı düşünülerek, tartışılarak bulunacak bir sorundur. Matematik derslerinde öğrencilere sorulan problemler öğrencilerin düşünmelerini, akıl yürütmelerini ve dört işlemi kullanmalarını gerektirmektedir. Matematik problemlerini çözebilmek için daha önce öğrenilmiş bilgilere, matematiksel kurallara, transferlere, analiz ve sentez gibi zihinsel etkinliklere ihtiyaç vardır. Problem çözmenin temeli mantıklı düşünmek, verilenler arasında ilişki kurmak, çıkarımlar yapmaktır.

### 1.3. Problem Çözme ve Problem Çözme Aşamaları

Problem çözme; genel olarak bilimsel bir konuda apaçık tasarlanan fakat hemen ulaşılamayan bir hedefe varmak için bilinçli olarak araştırma yapmaktır. Matematikte problem çözme ise, matematiğin yapısı gereği sorunun zihinsel süreçlerle (akıl yürütme) gerekli bilgileri kullanarak ve işlemleri yaparak ortadan kaldırılmasıdır [5]. Matematik dersinde pek çok öğrenci problem çözme çabalarında birkaç kere denemeden sonra başarılı olamayınca cesaretlerini ve kendilerine olan güvenlerini kaybetmektedirler [6]. Bu tutumla öğrenciler matematikten uzaklaşarak matematik dersini sevimsiz olarak nitelendirmektedirler.

Her problem belli aşamalar geçtikten, probleme özgü örüntüleri gerçekleştirdikten sonra çözülür. Yine çoğu problemin birden çok çözümü olduğu ve her bir çözümde ayrı bir yöntem kullanılabileceği unutulmamalıdır. Önemli olan problemin çözümüne başlarken o soruya özel bir teknik ayarlayarak kendimizi sınırlamak yerine, her türlü tekniğe açık bir yaklaşımla işe başlamaktır. Sonuçta asıl olan problemin çözülmesidir. Buna ulaşmakta ancak çok problem çözerek büyük bir birikimle olur. Bu birikim bize problem çözme yöntemleri kazandırır ve çözüme götürücü yeni yollar açar.

Çocukların çoğu problem çözerken bilgileri örgütlemeye, sistemleştirmeye ve kullanmada güçlük çekebilirler. Özellikle, problem çözülürken işlemlerin yapılması aşamasında hatalı yaklaşımlar sergileyebilirler. Bu noktada sınıflarda öğretmenlere önemli görevler düşmektedir. Öğretmenin, çocukları problemleri çözerken, gözlerken, onları sesli düşündürürken yada çocuklar tarafından çözülen problemleri kontrol ederken, çocukların yaptıkları hata çeşitlerini görme şansı artmaktadır. Çünkü, çocukların problemin çözümü aşamasında yaptığı hataların analizine göre doğru bakış açısı kazandırıcı düzeltme yollarına gidebilir.

Sınıfta problem çözmenin değerlendirilmesi oldukça karmaşıktır ve kolay bir iş değildir. Probleme basitçe cevap bulmak iyi problem çözme becerilerinin kanıtı sayılamaz. Bazı öğrenciler yanlış bir mantık kullanarak doğru cevabi bulabilirler, diğer taraftan bazı öğrenciler mükemmel stratejiler kullanırlar ama basit hatalar yaptıklarından sonuca ulaşamazlar. Problem çözmenin hedefleri sürecin tüm aşamalarında düşünmeyi gerektirir. Bu da problem çözmenin sadece sonuca ulaşma becerisi olarak bilinmemesi için iyi gösterge kabul edilebilir.

Öğretim sürecinde öğrenciler problemleri çeşitli biçimlerde çözerler. Bazen kendi kendilerine, bazen arkadaşları ile bazen de öğretmenlerinden yardım almak yoluyla problemleri çözerler. Öğrencilerde genelde görülen ortak hedef ise problemlere doğru yanıtlar vermek için cevaplamaktır. Bu amaç doğrultusunda öğretmenlerinden en çok bekledikleri ise problemlere verdikleri cevabın doğru olup olmadığını kontrol etmeleridir. Öğretmenler bu süreç içinde öğrencilerin problemleri ne derece doğru yaptıklarını çeşitli yollarla kontrol ederler. Bu değerlendirmede ise öğretmenlerin en çok kullandıkları araçlar sınavlardır. Ancak problem çözme sürecinde cevabın doğru yada yanlış olmasını tespit etmek kadar, öğrencilerin nerede, nasıl ve ne türde hatalar yaptıklarını belirlemek de önemlidir. Bunun için öğretmenlerin en çok kullanabilecekleri değerlendirme yollarından biri de gözlem ve sınıfta soru sorma tekniğinden yararlanmaktır. Öğrencileri süreç içinde

gözlemlemek öğretmen için sınıfta uygulaması kolay, bir teknik olmamakla birlikte geliştirilen bazı ölçütler çerçevesinde bu gözlemi yapmak oldukça yararlı ve öğretmen işini kolaylaştırıcıdır.

İlköğretimin temel amacı; bireyleri hayata ve üst öğrenime hazırlamaktır. Her iki amacın gerçekleşmesi için gerekli zihinsel beceriler; etkili akıl yürütme, eleştirci düşünme ve problem çözmedir. Bu becerileri geliştirilmesinde ilköğretim programında bulunan tüm dersler etkilidir ancak yukarıdaki beceriler söz konusu olduğunda matematik dersi hepsinden daha fazla yer tutar.

İlköğretim Matematik Programı (2000)'da problem çözme sürecinde uyulması gereken davranışlar aşağıdaki gibi belirtilmiştir:

1. Problemin verilenlerini ve istenenlerini söyleme ve yazma
2. Problemi özet olarak yazma
3. Probleme uygun şekil ve şema yapma
4. Problemin çözümünde başvurulacak işlemi veya işlemleri sebepleri ile birlikte söyleme veya yazma
5. Problemin sonucunu tahmin edip söyleme ve yazma
6. Problemi çözüp sonucunu söyleme ve yazma
7. Problemin çözümünde varsa değişik çözüm yollarını söyleme veya yazma
8. Problemin çözümünün doğru yapılıp yapılmadığını sebebiyle birlikte yanlış yapılmış ise yanlışıyla birlikte söyleme veya yazma
9. Öğrenilen bilgileri kullanabilecek şekilde bir problem söyleme ve yazma [22].

Yukarıda yer alan davranışlar, Polya'nın problem çözme basamaklarının uygun adımlarına göre Tablo 1'de sunulmuştur.

Problem çözme sırasında beynimizde tam olarak hangi işlemlerin gerçekleştiği, bu sürecin hangi aşamalardan oluştuğu kesin olarak bilinmemekle birlikte matematik öğretiminde etkili olan kuramcılarının bu konuda çeşitli görüşleri bulunmaktadır.

Cheung, Choo ve Fong problem çözme sürecini beş adımda tanımlamıştır.

1. problemi anlama
2. problemi ifade eden matematiksel denklemi oluşturma
3. denklemi uygulama
4. sonucu kontrol etme
5. problemi değerlendirme şeklinde ifade etmişler [23].

Mayer problem çözme adımlarını üç aşamada tanımlamıştır;

1. problem cümlesini anlamlı gösterimlerle göstererek problemi anlama
2. başarılı sonuçlara götürebilecek stratejinin seçiminde bir plan hazırlanması
3. Gerekli işlemsel adımları doğru bir şekilde yaparak bu planı uygulaması [24].

Kulm ve Lester&Kroll problem çözme yedi aşamada toplamışlardır.

1. Problemde verilen soruyu anlama ve formülüle etme
2. Problemdeki değişkenleri ve durumları anlama
3. Problemi çözmede gerekli olan verileri seçme
4. Takip edilecek alt amaçları oluşturma ve çözüm stratejileri seçme
5. Çözüm stratejisini uygulama ve alt amaçlara ulaşma
6. Problemin istenilen formatta cevabını bulma
7. Cevabın mantıklılığını değerlendirme [25, 26].

Dewey'e göre problem çözme aşamaları:

- a) Problemin fark edilmesi.
- b) Problemin tanımlanması.
- c) Önceki deneyin, bilgi, çözüm ve düşüncelerden yararlanarak denencelerin ve önermelerin kurulması.
- d) Denencelerin ve olası çözümlerin sınanması.
- e) Sonuçların değerlendirilmesi ve karara varılması şeklindedir [21].

Pólya'ya göre problem çözme aşamaları:

- a) Problemin anlaşılması.
- b) Çözümle ilgili planın yapılması.
- c) Planın uygulanması.
- d) Çözümün doğruluğunun kontrol edilmesi, geriye bakış şeklinde dört ana başlık altında toplanmıştır [27].

Yukarıdaki örneklerden de anlaşıldığı gibi bugüne kadar problem çözme sürecinde izlenmesi gereken adımların belirlenmesi amacıyla yapılan çok sayıdaki çalışma sonucunda ortaya konulan problem çözme basamakları birbirine yakın olmakta ancak problem çözmede aşama sayıları değişik olabilmektedir. Bahsedilen problem çözme aşamalarından en özet ve en kabul göreni Polya'nınkidir. Milli Eğitim Bakanlığı tarafından 2000 yılında çıkartılmış olan İlköğretim Matematik Programı'nda problem çözmede hedeflenen davranışlar Polya'nın problem çözme aşamalarına uygun bir şekilde aşağıdaki

tabloda gösterilmiştir. Gerçekleştirilmesi hedeflenen davranışlar, problem çözme sürecindeki aşamalara uygun bir şekilde yerleştirilmeye çalışılmıştır.

Tablo 1. Problem çözme süreci ve davranışlar

| AŞAMALAR                                                                                | DAVRANIŞLAR                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Problemin Anlaşılması                                                                   | <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Problemin verilenlerini ve istenenlerini söyleme ve yazma</li> <li>2. Problemi özet olarak yazma</li> <li>3. Probleme uygun şekli ve şemayı çizme</li> </ol>                                                                                            |
| Problemin Çözümünde Başvurulacak Matematiksel Yol (Çözüm için plan yapma, ilişki kurma) | <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Problemin çözümünde başvurulacak işlemi yada işlemleri sebepleri ile birlikte söyleme veya yazma</li> <li>2. Problemin sonucunu tahmin edip söyleme veya yazma</li> </ol>                                                                               |
| İşlemlerin Yapılması                                                                    | Problemi çözüp sonucunu söyleme veya yazma                                                                                                                                                                                                                                                        |
| Sonucun kontrolü                                                                        | <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Problemin çözümünün doğru yapılıp yapılmadığının sebeplerini ve yanlış yapılmış ise yanlışını belirterek söyleme veya yazma</li> <li>2. Sonucu tahmin edilenle karşılaştırarak sonucun doğru olup olmadığını nedenleriyle söyleme veya yazma</li> </ol> |

#### 1.4. Denklem Kurma ve Polya

Bugüne kadar ortaya sürülen problem çözme aşamalarının en sade ve geçerli olanı Polya'nın problem çözme basamaklarıdır. Polya problem çözme adımlarını 4 başlık altında incelemiştir. Bunlar; (1) problemi anlama, (2) çözüm için plan yapma, (3) hazırlanan planın uygulanması, (4) değerlendirme olarak literatürde bulunmaktadır.

Sözel problemlerin çözümünde problem metnine ait denklemi yazmak Polya'nın problem çözme basamaklarının ikincisine girmektedir. Bu aşamada birey problemin yapısını belirlemeye çalışır, verilenlerle istenenleri belirler. Bunları çözüm yollarını

geliştirmede kullanır. Uygulayacağı formül ve algoritmaları tespit eder. Yardımcı tablo ve grafikler tasarlar [21]. Öğrenci geçirdiği bütün bu süreçten sonra probleme ait denklemi yazmaya ve kurduğu denklemi çözmeye çalışır.

Polya, problem çözmeye ile ilişkilendirilmiş ideal matematikleştirme sürecini, “öğrenci denklem kurarak bir problemin çözümünde gerçek durumu matematiksel terimlere dönüştürür. Bunu yaparken matematiksel kavramları gerçeklikle ilişkilendirir.” Şeklinde tanımlamaktadır [28]. Polya’nın matematikleştirme sürecinde de bahsettiği üzere öğrenci problemi çözerken kurduğu denklem gerçek durumu matematiksel duruma resmetmek olarak görülebilir.

Denklem; bilinenler ile bilinmeyenlerden oluşmuş bir sistemdir. Bilinenler yardımıyla bilinmeyenlerin bulunmasına da “denklem çözmeye” denilmektedir. Polya, denklem kurmayı çeviri yapmaya benzetmektedir. Onun için denklem kurma; sözcüklerle tanımlanmış bir koşulu matematiksel sembollerle ifade etmek anlamına gelir. Asıl dilden matematiksel formüllerin diline bir çeviri yapılmaktadır [29].

### **1.5. Problem Çözme Yöntemleri**

Problem çözmeye bir süreçtir, belli aşamalardan geçilerek yapılır. Bir problemin birden çok çözümü olabilir. Bu o problemde uygulayacağınız çözüm yöntemlerine bağlı olarak değişir. Bu bölümde çeşitli problem çözmeye yöntemleri ortaya konulacaktır.

#### **1.5.1. Grafik veya Şema Kullanma**

Bazı problemlerin çözümünde grafik, şema yada tablo kullanılmaktadır. Bu tür problemlerde verilen ifadeler arasındaki ilişkiler tablolaştırılarak, grafik haline getirilerek veya uygun şemalar kullanılarak çözüme gidilmeye çalışılır. Problemde bazen bunlardan birkaçını kullanmak gerekebilir.

#### **1.5.2. Yazılı Olarak İfade Etme**

Karşılaşılan probleme ait düşüncelerin sözel bir metin halinde ifade edilmesi için kullanılan yöntemdir. Bu çözüm yöntemi genelde fen bilimleri alanının dışında kalan

alanlarla ilgili bir yöntemdir. Bloom taksonomisine göre değerlendirme düzeyinde olan soruların çözümünde de bu yöntem kullanılır.

### 1.5.3. Genelleme ve Yordama

Bu yöntemle öğrenci karşılaştığı duruma uygun tahminde bulunarak cevabı bulmaya çalışır. Özel durumlardan genele doğru bir genelleme yapan öğrenci cevabı deneme yanılma stratejileriyle bulmaya çalışır.

### 1.5.4. İspat

Bu yöntemle daha çok araştırılan hipotez, teorem yada önermelerin doğruluğu test edilir. Elde edilen sonucun doğruluğunu göstermek için daha önceden bilinen yada doğruluğu ispatlanmış ifadeleri kullanılabilir.

### 1.5.5. Sembollerle veya Formülle İfade Etme

İlköğretim birinci kademedeki öğrencilerde problem çözmede, genelde bilinmeyen için üçgen, kare gibi semboller kullanılırken, 7. sınıftan itibaren bilinmeyen için  $x$ ,  $y$  kullanarak denklem kurmayı öğrenmektedir. Bu aşamalardan geçen öğrenci problem çözmede bu yöntemi kullanmış olmaktadır.

Bu çalışmada yukarıda belirtilen problem çözme yöntemlerinden sonuncusu yani *sembollerle ve formülle ifade etme* yöntemi incelenmiştir. 8. sınıf seviyesinde ki 18 öğrenciyle yürütülen çalışmada öğrencilerin problem çözerlerken denklem kurma ve çözme becerileri incelenmiştir. Çalışma içinde 6 öğrenciyle yapılan klinik mülakatlarda öğrencilere problemleri çözerken hangi sembolü kullandıkları, problem metnini nasıl formülize ettiği yönünde sorular sorulmuştur.

Cebir, doğasındaki gücünü birçok şeyi tek bir ifade ile gösterebilme özelliğinden alır. Problem çözmede cebiri uygulamak için verilen sayısal bilgileri harf yada sembollere dönüştürmek gerekir. Cebirsel yaklaşımla problemler çözülürken önce verilen bilgiler sembolik harflerle ifade edilir. Sonra çözümü bulunur. Böyle örneklerde, harfler yerine seçtiğimiz değişkenlerin, hangi niceleyicileri nasıl temsil ettiğini kolayca hatırlamamız için

kullanılacak değişkenleri anlamlı seçmek yararlı olur [27]. Problem çözümündeki algoritmaları ve çözüm için gereken denklemi yazmak bu zorluğun ilk basamağıdır.

İlköğretim birinci kademedен (özellikle 4 ve 5. sınıflardan) itibaren problem çözme, problem metnindeki verilen sayılılarla dört işlem(cebirsel işlemler) yaparak sonucu bulma olarak algılanmaktadır. Müfredatta ilk olarak ilköğretim 7. sınıfta yer alan “sayı ifadelerini yazma” bölümü denklem kurma ve kurulan denklemi çözmeye atılan ilk adımdır. Somut operasyon döneminden çıkıp soyut operasyon döneminin ilk yıllarında olan öğrencilerde denklem kurmak için kullanılan parametreye (harfe) yüklenen anlam algılanamamaktadır. Sayısal ifadeleri yazmada; tüm değerler nicel olarak verildiğinde bir sorun çıkmazken, denklem kurmak için gereken parametreler işin içine girince akıllarda soru işareti kalmaktadır. Örneğin; “15 sayısının 8 fazlası”nı öğrenci çok kolay bir şekilde idrak edip  $15+8=23$  diye yazarken “bir sayının 8 fazlası” denildiğinde bunu (sayıya  $x$  denilirse)  $x+15$  diye yazması ve bunu idrak etmesi daha güç olmaktadır. Bu davranış alıştırma ve tekrar örnekleriyle kavratılabilmektedir. Bir çok öğrenciye denklem kurmaya tezat olarak soruyu çözmek için soru metninde verilen sayılarla dört işlem yapmak daha zevkli ve kolay gelmektedir. Öğrencilerin daha önce bir çok kez karşılaştıkları problemlerde çözüme gitmek için, soru metninde yer alan ifadeleri sondan başa doğru okuyarak gitmek ve soru metnindeki cebirsel ifadelerin tersini yapmak, onlarda soru için bir denklem oluşturup çözüme gitmekten daha anlamlı ve kolay gelmektedir.

### 1.6. Konu İle İlgili Yapılan Çalışmalar

Matematik öğretimi, öğrenimi ve problem çözme birçok araştırmada, program geliştirme çalışmalarında, kitapların düzenlenmesinde, makale ve konferans raporlarında odak noktası olmuştur. Bu konuda yurt dışında bir çok araştırma yapılmıştır. Yurt içinde yapılan çalışmalarda da problem çözme ve problem çözmenin doğası hakkında makaleler ve tezler bulunmaktadır. Problem çözmeye denklem kurmanın ve denklem çözmenin önemine daha önce değinilmemiştir.

Ulusal Eğitim Süreçlerini Değerlendirme (NAEP) projesi altında, Amerika’daki 7-11. sınıflardaki öğrencilerin matematiksel bilgi düzeylerini belirlemek üzere yapılan araştırmanın sonuçları, ortaokul öğrencilerinin temel cebir ve geometri kavramlarının bazılarına sahip olduklarını fakat bu bilgilerini, kavramlar arasındaki ilişkileri kavrayamadıkları için problem çözümlerinde kullanamadıklarını ortaya çıkarmıştır [30].

Ülkemizde de, öğrencilerin cebiri anlama düzeylerini belirlemek üzere yapılan araştırma sonuçlarında da, yukarıda bahsedilen araştırma sonuçlarına benzer veriler elde edilmiştir. Milli Eğitim Bakanlığı'na bağlı Eğitimi Araştırma ve Geliştirme Daire Başkanlığı (EARGED) tarafından, içinde matematik müfredatının da bulunduğu bir araştırma raporu hazırlanmıştır. Araştırma raporu sonuçları, öğrencilerden bazılarının cebirsel sözel ifadeler içeren problemleri, aritmetik işlemler kullanarak çözmelerine rağmen birinci dereceden denklemlerin çözümlerini bulamadıklarını ve cebirsel ifadeleri anlamakta belirli zorluklara sahip olduklarını ortaya çıkarmıştır [31].

Dede, Yalın ve Argün tarafından yapılan bir çalışmada öğrencilerin temel cebir, özellikle de denklem (eşitlik) kurma ve çözmedeki başarısı ve buna bağlı olarak karşılaştıkları güçlükler araştırılmıştır. Araştırma sonuçları, öğrencilerin cebir öğrenimiyle ilgili zorluklara sahip olduklarını ve bu zorlukları giderici çalışmaların yapılması gerektiğini göstermektedir [32].

Baki çalışmasında öğrencilerin cebirle ilgili işlem yanlışlarını değerlendirmiştir. Özel durum çalışması olan bu çalışmada Baki ortaöğretim öğrencilerinin cebirle ilgili işlem yanlışlarını tespit etmeye ve öğretmenlerin bu yanlışlar hakkındaki görüşlerini ortaya koymaya çalışmıştır. 20 öğretmen ve bu öğretmenlerin 8. ve 11. sınıf öğrencilerini kapsayan bu çalışmada öğrencilerin verilenler yardımıyla denklem oluşturma konusunda eksikliklerinin olduğu ve denklem çözümlerinde gerçekleşen yanlış yüzdelерinin oldukça düşündürücü olduğunu vurgulamıştır [33].

Dede, Yalın ve Argün tarafından yapılan çalışmanın sonuçları da, öğrencilerin cebirin temel kavramının nasıl ve ne şekilde kullanılabileceğini anlamadıklarını göstermektedir. Yine bu araştırmanın sonucuna göre, öğrencilerin veri tabloları, örüntüler ve bunlar arasındaki ilişkileri görmede ve anlamada oldukça zorlandıkları tespit edilmiştir [34].

Karataş 8. sınıf öğrencilerin problem çözme sürecinde kullandıkları bilgi türlerini ve bunları kullanma düzeylerini araştırmıştır. Karataş, çalışmada yöntem olarak örnek olay metodolojisini kullanmıştır. Problem çözme sürecinde kullanılan bilgi türlerini (anlam bilgisi, şematik bilgi, algoritmik bilgi ve stratejik bilgi) öğrencilerin ne düzeyde kullandıklarını ölçmeye çalışmıştır. Çalışmasında 5 öğrenciyle klinik mülakat yapan araştırmacı klinik mülakatın eğitim çalışmalarındaki yerinden de bahsetmiştir [29].

Sözel problemlerin kavranması süreciyle ilgili bir çok çalışma bulunmaktadır. Denklem formülüzasyonu ilk olarak Chaiklin tarafından incelenmiş ve diğerleri bu süreçte birer parça olmuştur. Bununla beraber bir probleme kavrama işinden denkleme dönüştürme işi

kolay değildir. Denklemlerin kurulumu aslında aritmetik yada cebirsel olarak problemin çözümündeki temel zorluktur [35]. Öğrencilerin problemleri okuduktan sonra zihinlerinde oluşan yapıyı ifade etme ve denkleme dökme işi onlar için zor olmaktadır.

Problem çözmenin ilk adımı problem metninin okunması oluşturur. Okunan problem metninin anlaşılabilmesi problem çözmede karşılaşılan zorlukların başında gelir. Aiken, problem çözme yeteneği ile okuduğunu anlama yeteneği arasındaki ilişkiyi incelemiş 0.40 ile 0.86 arasında korelasyonlar elde etmiştir. Aiken, bu araştırmasında okuma güçlüğü'nün giderilmesiyle problem çözme becerilerinde anlamlı değişiklikler olduğuna değinmiştir [36].

Kennedy ilköğretim öğrencilerinin problem çözmede beş temel güçlüğü'nün;

1. Problemi okuma,
2. Problemde yer alan işlemleri tanıma,
3. Problemin çözümünü hayalinde canlandırma,
4. Uygun işlemleri kararlaştırma,
5. Cevabı hesaplama olduğunu belirtmiş ve bu zorlukların giderilmesi için öğretmenin aşağıdaki tedbirleri almasını önermiştir.
  - 1- Her çocuğun ne tür eksiliğinin olduğunu bilmesi
  - 2- Çocuğun eksikliğini giderilmesi için uygun ortamın hazırlanması
  - 3- Bir defada sadece bir beceri üzerinde çalışılması
  - 4- Bir becerinin basit uygulamaları üzerinde çalışmaya başlayıp giderek karmaşık uygulamalara geçilmesi
  - 5- Kazandıkları becerileri uygulayabilmeleri için sık sık fırsatlar yaratılması gerekir [37].

Klaas, problem çözmede başarıya ulaşılması için aşağıdaki altı basamak halinde verilen işlemlerin başarılmaması gerektiğini belirtmiştir. Bunlar;

- 1- Problemin okunması,
- 2- Verilenlerin bulunması
- 3- İstenenlerin bulunması
- 4- Gerekliyse şema yada şekil çizilmesi
- 5- Matematik cümlelerinin yazılması
- 6- Cevabın bulunması olarak sıralamıştır [38].

Ballew, yetenekli öğrencilerin problem çözme stratejilerini araştırmıştır. Problem çözme, kabiliyeti yüksek 19 altıncı sınıf öğrencisine, yedinci ve sekizinci sınıf

düzeyinde çeşitli (bir işlemli, çok işlemli, fazla bilgi isteyen, yetersiz bilgi içeren) problemler yönelmiş ve öğrencilerin problemleri çözerken yaptıkları hatalar ve kullandıkları başarılı stratejiler analiz etmiştir. Öğrenciler, problemleri çözerken sesli düşündürülmüş ve ses bantları üzerinden hata analizleri yapmıştır. Hata analizinde, araştırmacının daha önce 250 altıncı sınıf öğrencisi üzerinde, hata kaynakları üstüne yaptığı bir araştırmadan elde ettiği sonuçlar (hesaplama %26, problemi yorumlama %19, okuma %29 ve tamamlama %26 ) hipotez olarak kullanılmış ve hatalar dört grupta toplanmıştır. Bunlar; (1) Hesaplama (Doğal sayılarda ve kesirlerde toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri), (2) Problemin yorumu (çözümlerde kullanılan doğru işlemler ve bunların sırası), (3) Okuma (problemi yardımsız doğru okuma) ve (4) Tamamlama (problemdeki işlemlerin kombinasyonu ve doğru çözüm) dür.

Bu araştırmanın sonucunda çözümlerde yer alan hataların bu gruplara dağılımı, hesaplama için %26, okuma ve problemi yorumlama için % 47 ve problemi tamamlama için % 26 şeklinde bulunmuştur. Ayrıca problemin zorluğu ile bazı değişkenler arasındaki korelasyonlar hesaplanmıştır. Problemin zorluğu ile problemde verilen sayıların tasnifi arasında ki korelasyon 0.88, problemin zorluğu ile hesaplanan sayıların tasnifi arasındaki korelasyon 0.71 çıkmış ve bu iki faktör, problem çözmede etkili bulunmuştur [39].

Tertemiz, ilkokulda aritmetik problemlerini çözmede etkili görülen faktörleri araştırmıştır. İlkokulun ikinci devre sınıflarında, problem çözmede, problemi kavrama, doğal sayılar (doğal sayı kavramı, sayılar arası ilişkiler ve diğer temel kavramlar), dört işlem becerisi ve zihinden işlem yapma becerisi olarak belirlenen dört temel faktör bakımından düşük, orta ve yüksek düzeyde başarı gösteren öğrenciler arasında fark olup olmadığının araştırıldığı çalışmada düşük başarı gösteren grupta etkili tek faktör dört işlem becerisi, orta grupta etkili üç faktör sırayla, problemi kavrama, dört işlem becerisi ve doğal sayılar, yüksek grupta etkili üç faktör problemi kavrama, doğal sayılar, dört işlem becerisi çıkmış, zihinden işlem yapma becerisi ise problem çözmede etkili bir değişken olarak gözlenmemiştir [40].

Dickson, Linde ve diğerlerinin belirttiğine göre; Newman problem çözmede yapılan hataların ilgili araştırmasında, 31 farklı sınıf 917 öğrenciye yazılı sınav uygulamış ve her sınıftan en düşük başarıyı gösteren 4 öğrenciyle görüşmüştür(12 yaşındaki 124 öğrenci). Newman görüşmede şu aşamaları uygulamıştır: 1) Lütfen bana soruyu oku, anlamadığın kelime varsa atla. 2) Soruda ne istendiğini söyle. 3) Sonucu nasıl bulabileceğini söyle. 4)

Cevabı bulmak için neler yapman gerekiyorsa yap. Yaparken neyi niçin yaptığını söyle. 5) Sorunun cevabını yaz.

Sonuçta; 124 düşük düzeydeki öğrenciye uygulanan sınavda 3002 hata yapmış ve bu öğrencilerin %70'i görüşme sırasında da (her türlü dikkate rağmen) aynı hataları tekrarlamışlardır. Ayrıca bu hataların %50'sinin uygulama aşamasından önce yapıldığı, özellikle de semboller okuma ve anlama hataları olduğu gözlenmiştir [41].

Altun çalışmasında, ilkokul 3., 4. ve 5. sınıf öğrencilerinin matematik problemlerini çözerken gösterdikleri davranışların neler olduğunu ve bu davranışları gösterme bakımından problem çözmede başarılı olanlar ile başarısız olanlar arasında ne gibi farklılıkların olduğunu belirlemeye çalışmıştır. Bu amaçla araştırma kapsamında biri kuramsal diğeri deneysel iki çalışma yapan Altun, kuramsal çalışmada, 3., 4. ve 5. sınıf öğrencilerinden problem çözmede başarılı ve başarısız olanların problem çözme sürecinde yer alan ve araştırma öncesinde belirlenmiş olan dokuz kritik davranıştan her birini ne düzeyde gösterdiklerini tespit etmiş; deneysel çalışmada ise, başarısız olan öğrencilerin problem çözmede gösteremedikleri kritik davranışlar üzerinde öğretim süreci uygulamış ve bu öğretimin problem çözme başarısı üzerinde ne ölçüde etkili olduğunu araştırmıştır [5].

Literatürde problem çözme üzerine bir çok araştırma bulunmaktadır. Yapılan çalışmalar; problem çözmede kullanılan bilgi türleri, problem çözme yeteneği ile okuduğunu anlama yeteneği arasındaki ilişki, problem çözmede cebirsel işlem yapma yeteneği, problem çözme stratejileri, ilkokul öğrencilerinin matematik problemlerini çözerken gösterdikleri davranışlar, problem çözmede etkili olan faktörler, problem çözmedeki izlenen adımlar, problem çözmede kullanılan cebirsel işlemler ve yapılan hatalar üzerinedir. Öğrencilerin problemleri matematik diline nasıl dökerek, sözel problemleri denklemler yardımıyla nasıl çözdüklerini ortaya koymak gerekmektedir. Matematikte estetik problem çözme, denklem yapılır. Denklem kurarak problem çözme becerisinin matematik ile ilgilenenlerde (ki bu çalışmada öğrencilerde) nasıl olduğunun araştırılması gerekmektedir. Bu amaçla öğrencilerin denklem kurarak problem çözme becerileri bu çalışmada incelenmiştir.

### 1.7. Araştırmanın Problemi

Matematik denince çoğumuzun aklına problem çözme gelir. Çoğu öğrenci problem çözme çalışmalarında birkaç denemede başarısız olunca problemi “zor” olarak nitelendirmekte ve problemi çözmeyi bırakmaktadır.

Literatürde temelde aynı ancak aşama sayısı bakımından farklı olan problem çözme süreçleri bulunmaktadır. Bunlardan en çok kullanılan problem çözme aşamaları, George Polya'nın önerdiği aşamalardır. Polya, ideal problem çözme sürecini dört ana başlık altında toplamıştır. Bunlar;

- a) problemi anlama,
- b) çözüm için plan hazırlama,
- c) problemi çözme,
- d) çözümü değerlendirme olarak sıralanmıştır [42].

Öğrencilerin bu aşamaları problemin çözümünde nasıl kullandıkları ve bu aşamaların her birini nasıl tamamladıkları devamlı olarak cevabı aranan sorular arasındadır. Ayrıca bu süreci etkileyen faktörlerin neler olduğu ayrıntılı olarak araştırılmaya çalışılmıştır [29].

Problem çözme, ülkelerin matematik eğitiminde odak noktası olmuştur. Eğitim sistemimizde matematik öğretiminin genel amaçları aşağıdaki gibi belirtilmiştir.

1. Öğrencilerde mantıksal düşünme yeteneğini geliştirme,
2. Günlük hayatta karşılaştığı problemlerin çözümünde mevcut koşulları doğru değerlendirme,
3. Mümkün olduğu hallerde bilgiyi nicelleşmiş verilerle ortaya koyma alışkanlığını kazandırma,
4. Öğrencilere soyutlama yapma alışkanlığı kazandırma, bu yolla zihinsel bağımsızlığı ve yaratıcılığı geliştirme,
5. Öğrencilere özelleştirme ve genelleştirme yapma alışkanlığı kazandırma, bu yolla sezgisel düşünceyi geliştirme,
6. Estetik değerleri geliştirme,
7. Bir problemin değişik yollarla çözülebileceğinden hareketle, farklı görüş ve düşüncelere zihnen açık olabilme ve onlara saygı duyma alışkanlığını kazandırmadır [22].

Hedeflenen bu davranışlardan hareketle Milli Eğitim Sistemimizde de problem çözmeye verilen önemi görebiliriz.

Problem çözümedeki en güzel stratejilerden biriside denklem kurmaktır. Genel olarak problem metninde bilinmeyene verilen harf veya sembol yardımıyla problem çözme diğer yöntemlere göre matematiksel olarak daha estetikdir. Öğrencilerin sözel problemlerin çözümünde denklem kurma becerilerini hangi düzeyde kullandıkları ortaya konulması gerekmektedir. Bu nedenle araştırmanın problemi “8. sınıf öğrencilerin sözel problemlerin çözümünde denklemlerden yararlanabilme becerileri” olarak belirlenmiştir. Araştırma probleminin ayrıntılarıyla incelenmesi için aşağıdaki alt problemler düşünülmüştür.

### 1.7.1. Alt Problemler

1. Bilinmeyenlerin bir tarafta toplanmış olduğu birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem (BDBBD) yardımıyla çözülebilecek sözel problemleri öğrenciler nasıl matematik diline çevirebilmekte ve çözebilmektedir?
2. Bilinmeyenlerin denklemin her iki tarafında da yer aldığı BDBBD yardımıyla çözülebilecek sözel problemleri öğrenciler matematik diline nasıl çevirebilmekte ve çözebilmektedir?
3. Öğrenciler birinci dereceden iki bilinmeyenli denklemler (BDİBD) yardımıyla çözülebilecek problemleri ne ölçüde çözebilmektedir?

### 1.8. Araştırmanın Amacı

Matematik günümüz dünyasının kapalı kapılarını açan bir anahtar olmuştur artık. Günlük basit aritmetik işlemlerden tutunda yüksek düzeyde teknolojik araçların yapımında rol oynayan bir bilim olan matematik insanların yüzyıllar boyunca çekimser baktığı bir bilimdir. Matematik deyince insanların aklına hep yüksek düzeyde kafada yapılan işlemler yada soyut bilgileri kullanarak bir sonuca gitme çabası gelmektedir.

Bu çalışmanın amacı 8. sınıf öğrencilerinin, sözel problemlerin çözümünde denklemlerden yararlanabilme becerilerini ortaya çıkartmaktır. Yani öğrencilerin problem çözme çalışmalarında denklemleri doğru kurup kuramadıkları, eğer denklem doğru kurulmuşsa çözümün doğru yapıp yapılamadığı incelenmesi düşünülmüştür. Araştırmacı bu düşünceler ışığı altında tanı koyucu bir değerlendirmeye problem çözümüne daha ayrıntılı bir şekilde bakmayı amaçlamıştır.

### 1.9. Araştırmanın Önemi

Günlük yaşantımızda bir çok alanda problemlerle karşı karşıya gelmekteyiz. Karşımıza çıkan bu problemlerin çözümü bazen kolay bazen de işin içinden çıkılmaz bir duruma dönüşebilmektedir. Basit alışveriş problemlerinden tutunda bilimsel alandaki sorunların çözümüne kadar her durumda problem çözmeden faydalanılmaktadır.

Öğrencilerin ve genelde matematik ile ilgilenenlerin çoğunun kendine has problem çözüm teknikleri vardır. Öğrencilerin çoğu, ham yetenek ile fazla problem çözmeyle birleştirip, konu öğrenmeyi esas almaktadır. Genelde problem çözme, konunun pekiştirilmesi, daha iyi anlaşılması için bir araçtır. Herkesin aynı oranda soru çözme şansı yoktur. Dolayısıyla, çözüm tekniğini bilerek işe başlamak daha faydalı olacaktır.

Her problem belli aşamalardan geçildikten sonra çözülür. Yine çoğu problemin birden çok çözümü olduğu ve her bir çözümde ayrı bir teknik uygulandığı unutulmamalıdır. Esas olan, bir problemi çözmeye başlarken “Acaba bu problem için en uygun teknik hangisidir?” diye soruya yaklaşmaktan geçer. Matematikle uğraşmaktan zevk alanlar problemleri çözerken genelde sayılarla cebirsel işlemler yapmak yerine probleme uygun bir denklem kurup denklemi çözmeyi tercih ederler. Bu onlara hem vakit kazandırır hem de kesin ve net çözüme ulaşmalarını sağlar.

Problem çözme matematik programının merkezindedir. Matematik öğretiminin amaçlarından birisi, öğrencilere problem çözme becerisi kazandırmaktır. Öğrencilerin sözel problemleri matematik diline nasıl çevirerek (denklem kurmayla) soruları çözdüklerini, sözel ifadeleri matematiksel ifadelere döküp dökemediklerini, denklem kurarken hangi zihinsel işlemleri yaptıklarını, hangi aşamalardan geçtiklerini, yapılan ortak hataların hangi yanlışlardan kaynaklandığını ortaya koymak gerekmektedir. Bu da araştırmanın önemini artırmaktadır.

### 1.10. Araştırmanın Sayıtları

1- Öğrencilerin, klinik mülakatlar sırasında kendilerine sorulan sorulara verdikleri cevaplarla gerçek duygu ve düşüncelerini yansıttıkları varsayılmıştır.

2- Tanı testinde yer alan sorular öğrencilerin problem metnine ait denklemi kurma ve çözmedeki becerilerini sergileme fırsatı sağlayacağı varsayılmıştır.

### 1.11. Araştırmanın Sınırlılıkları

Bu araştırma Trabzon ili Çarşıbaşı ilçesinde yer alan Şahinli İlköğretim Okulu'nda okumakta olan 18 sekizinci sınıf öğrencisiyle yürütölmüştür. Çalışmada veri toplamak için kullanılan tanı testindeki problemler; sayı, yaş, işçi-havuz, kesir, hız ve gerçek hayat problemleri olarak toplam 8 soru ile sınırlandırılmıştır.



## 2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Matematik denince birçoğunun aklına problem çözme gelir. Uzman bir şekilde problem çözmenin ilk aşamasını denklem kurma oluşturur. Bir problemi doğru çözmenin en önemli basamağı probleme uygun denklemi yazabilmektir. Denklemleri yazarken bilinmeyene yüklenen anlam ve kullanılan parametre (değişken) öğrenci için anlamlı olmalıdır ki öğrenci daha sonraki alıştırmalarda değişkeni en uygun şekilde kullanabilsin. Milli Eğitim sistemimizde matematik dersinin öğretiminde hedeflenen davranışlar arasında öğrencinin iyi bir problem çözücü olarak yetiştirilmesi yer almaktadır. Gelişen ve değişen dünyamızda günlük hayat problemleri sürekli değişmektedir. Günlük hayat problemlerine paralel olarak müfredat içinde yer alan konular doğrultusunda da problemler yenilenmektedir.

Her yıl üniversite sınavlarında matematik testi bölümünde ortalama 10-12 tane denklem kurma ve çözme problemi sorulmaktadır. Denklem kurma ve çözme konusunun temeli ilköğretim 7. sınıfta atılmasına rağmen, üniversite sınavlarındaki matematik bölümünde yer alan problem sorularının cevaplanma ortalaması genelde düşüktür. Ortaöğretimde yaşanan bu problemin kaynağını irdelemek ve problemi ortadan kaldırmak için konunun ilk öğretime girdiği dönemi incelemek için bu çalışma ele alınmıştır.

### 2.1. Yöntem

Bu çalışmada, araştırma projelerinin yürütülmesinde bir nitel yöntem olan araştırmacı öğretmen yöntemi kullanılmıştır. Nitel araştırmalar; gözlem, görüşme ve doküman analizi gibi nitel bilgi toplama yöntemlerinin kullanıldığı, algıların ve olayların doğal ortamda konmasına yönelik nitel bir sürecin izlendiği araştırma olarak tanımlanmaktadır [43]. Araştırmacı öğretmen yöntemi özel bir durumda ortaya çıkan bir problemi belirleyip o anda çözmek için geliştirilmiş yöntem olarak tanımlanmıştır.

Öğrencilerin sözel metin problemlerini denklem kurarak çözebilme becerisinin araştırıldığı bu çalışmada yöntem olarak araştırmacı öğretmen yöntemi kullanılmıştır. Araştırma probleminin doğasından yola çıkarak 8. sınıf öğrencilerinin sözel problemleri denklem kurma yeteneğiyle birleştirip, problemi çözme becerileri incelenmiştir. Araştırmacı öğretmen yöntemiyle; öğrencilerin bilinmeyen bir tarafta, her iki tarafta ve parantez içeren birinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklem yardımıyla çözülebilecek

sözel problemleri formülleştirme becerileri ve kurdukları denklemleri çözme becerileri incelenmiştir. Ayrıca öğrencilerin birinci dereceden iki bilinmeyenli denklemlerle çözülebilecek sözel problemlere ait denklemleri kurabilme ve kurdukları denklemleri çözebilme becerileri incelenmiştir. Araştırma süresince öğrencilerin problem çözmeye karşı tutumları alan notları olarak not edilmiştir. Çalışma süresi içerisinde araştırmacı, öğrencilerin sözel problemleri matematik diline çevirirken güçlük çektikleri noktalarda öğrencilerin düştükleri hataları sorgulamış ve onlara yön göstererek doğru denklemi kurmalarına yardımcı olmuştur.

Çalışmanın ilk aşamasında öğrencilerin sözel metin problemlerini denklem kurarak çözme becerilerinin irdelenmesinde 8 sorudan oluşan bir tanı testi hazırlanmıştır. Bu tanı testindeki sorular ilköğretim düzeyindeki çeşitli test kitapları karıştırılarak seçilmiştir. Tanı testinde yer alan problemlerin seçiminde sorular üç sınıf altında tasnif edilebilmektedir. Bunlar;

1. Problem çeşidi
2. Hangi tür denklem yardımıyla çözülebileceği
3. Bilinmeyen eşitlikteki durumlarıdır.

Tanı testindeki soruların hazırlanmasında kapsam geçerliliğine de dikkat edilmeye çalışılmıştır. Testte yer alan problemler 8. sınıf müfredatında yer alan sayı, yaş, işçi-havuz, hız, kesir ve işçi-havuz problemlerini kapsamaktadır.

Tanı testindeki sorular birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem (BDBBD) yardımıyla çözülebilecek ve birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi (BDİBDS) kurularak çözülebilecek sorular altında iki gruba ayrılmaktadır.

Testte yer alan sorulardan ilk dördü birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem yardımıyla çözülebilecek sorulardır. İkinci grupta yer alan dört soru ise birinci dereceden iki bilinmeyenli bir denklem sistemi yardımıyla çözülebilecek sorular olarak düşünülmüştür. Ayrıca birinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklem (BDBBD) yardımıyla çözülebilecek soruların seçiminde değişkenin eşitliğin bir tarafında yer aldığı, eşitliğin her iki tarafında yer aldığı, eşitliğin bir tarafında ancak parantezlerin içinde yer aldığı ve eşitliğin her iki tarafında yer aldığı durumlar bulunmaktadır. Soruların bu şekilde seçilmesinde öğrencilerin kurdukları denklemleri doğru bir şekilde çözüp çözemedikleri noktası düşünülmüştür. Tanı testinde yer alan sorulardan ikinci gruba oluşturan dört soru ise öğrencilerin yeteneklerine göre hem BDBBD yardımıyla hem de BDİBDS yardımıyla çözülebilecek sorular olarak seçilmiştir. Öğrencilerin BDİBDS

yardımıyla çözebileceği problemlerde değişkeler eşitliğin bir tarafında, eşitliğin her iki tarafında veya düz denklem formatına uymayan; birkaç cebirsel işlem sonrasında bilinen formata dönüşen sorulardan oluşmaktadır. Soruların bu şekilde seçilmesinden amaç öğrencilerin denklem çözmedeki cebirsel işlemleri nasıl yaptıklarını, hata yapıyorsa bu hataların denklem kurma aşamasında mı yoksa denklem çözümü sırasında cebir bilgisi eksikliğinden mi kaynaklandığını tespit etmek içindir.

Tanı testi sonrasında problemlerin çözümünde öğrencilerin çözümlerini açıklamalarını sağlamak amacıyla kinlik mülakat kullanılmıştır. Klinik mülakatlar öğrencilerin doğal okul ortamında oldukları bir günde yapılmıştır. Mülakatlarda öğrencinin kendini rahat hissedebilmesi için sessiz ve başka bir kimsenin olmadığı bir ortamda (okul-aile birliği odasında) yapılmıştır. Bu mülakatlar bir kayıt cihazıyla kaydedilerek daha sonra öğrenci kağıtlarıyla analiz edilmiştir. Ayrıca denklem kurarak problem çözmenin işlendiği derslerde alan notları başlığı altında sınıf içinde yaşanan durumlar not edilmiştir. Bunlar çalışmanın veri kaynağını oluşturmaktadır. Bu kaynaklardan elde edilen veriler nitel olarak analiz edilerek öğrencilerin problem çözme sürecinde denklem bilgilerini nasıl kullandıkları tespit edilmeye çalışılmıştır.

Çalışma süresince öğrencilerin problemlere, denklem çözme ve denklem kurmaya karşı tutumları not edilerek alan notları olarak çalışma içine alınmıştır. Ayrıca alan notları arasında sınıf içinde yapılan problem çözme uygulamalarında öğrencilerin yaptıkları özel çözümlere de yer verilmiştir.

### 2.1.1. Araştırmacı Öğretmen Yöntemi

Eğitim araştırmaların kullanılan yöntemlerden bir tanesi olan araştırmacı öğretmen yöntemi son yıllarda öğretimde meydana gelen sorunların tespit edilmesi ve problemi ortadan kaldıracak uygulamaların bulunmasında sıkça kullanılmaktadır. Öğretmenin bir araştırmacı kimlikle soruna yaklaşması ve doğal ortam içinde problemin meydana gelme sebeplerinin görülmesinde veya geliştirilen projelerin uygulanmasında araştırmacı öğretmen yöntemi son derece uygun bir yöntemdir.

Araştırmacı öğretmen yöntemiyle (aksiyon araştırması) ilgili literatürde bir çok tanım bulunmaktadır. Cohen ve Manion aksiyon araştırmasını eğitim-öğretim sürecinin özel bir anında ortaya çıkan problemin uygulamada çözülebilmesi için geliştirilen yöntemler olarak tanımlamışlardır [44]. Kemmis ve Mc Taggard tanımlarında aksiyon araştırması,

öğretmenlerin kendi uygulamalarını, meslektaşlarının uygulamalarını ve uygulamaların sonuçlandırıldığı durumları anlamalarını geliştirmek için öğretmenler tarafından yapılan katılımcı, kendini yansıtan araştırma şekli şeklinde söz etmiştir [45]. Elliott ise aksiyon araştırmasını; sosyal bir durumun uygulamanın niteliğini değiştirmeye dönük görüş açısıyla inceleme olarak ifade etmiştir [46]. Loftus'a göre aksiyon araştırması öğrenmenin bireysel şekli olup en basit tanımı itibarıyla *“yaparak öğrenme anlamına”* gelmektedir [47]. Çepni'ye göre öğretmeni araştırmacı araştırmacı kılan modelin en önemli özelliği çalışma bittiği zaman araştırmanın bitmemiş olmasıdır. Pratikteki uygulama geliştirilir, değiştirilir ve devamlı olarak gözden geçirilir. Bu yaklaşım öğretmenlerin ders verme sürecinde belirledikleri problemleri çözme temeline dayandığı için çok kullanışlıdır [48].

Aksiyon araştırması boyunca araştırmacı öğretmenler sırasıyla i) uygulamalarında ortaya çıkan problemi tespit ederler, ii) onu çözmek için birlikte çalışırlar, iii) problemin çözümüne yönelik strateji\stratejiler geliştirirler ve uygularlar, iv) onun başarılı olup olmadığını değerlendirirler, v) mevcut durumu olumlu bulmazlarsa başka strateji\stratejileri değiştirirler ve yenisini uygularlar. Bu süreç bu şekilde devam etmektedir. Bu adımlar araştırmacı öğretmen yöntemi yaklaşımının temelini oluşturmaktadırlar [49]. Araştırmacı öğretmen yöntemi daha çok uygulamaya yönelik bir yöntemdir. Öğretmenlerin yürüttüğü aksiyon araştırması sosyal bir boyuta sahiptir. Araştırma gerçek uygulama ortamında yürütüleceği için eğitim-öğretim sürecinde meydana gelen problemleri çözmeye uygundur ve dışarıdan bir desteğe çok fazla ihtiyaç duyulmamaktadır.

Bu yöntemle araştırmacı öğretmenler uygulamaları süresince karşılaştıkları problemleri çözerken pratik araştırma tekniklerini kullanmaktadırlar. Aksiyon araştırma yöntemi nitel bir çalışmadır. Fakat bu yöntem boyunca bazı eğitim uygulamalarının sorgulanması ve uygulamanın gelişmesi için nitel verilerin toplanması yeterli olurken, bazı durumlarda ise nicel yöntemlerin kullanılması faydalı olmaktadır. Bunun yanında, öğretmenlerin yürüttüğü araştırmada örneklem grubunun küçük seçilmesinden dolayı sonuçların genellenmesi değil, mevcut uygulamaların geliştirilmesi amaçlanmaktadır. Bu yaklaşımla araştırmacı öğretmen yöntemiyle yürütülen çalışmaların sonuçları başka bir öğretmen için ancak kendi sınıfında test edilebilecek bir hipotez olarak algılanmaktadır.

Yapılan çalışmada araştırmacı öğretmen yöntemiyle 8. sınıf öğrencilerinin sözel problemleri denklemler yardımıyla çözebilme becerileri incelenmiştir. Bu amaçla araştırmacı çalışma süresince sınıf içi etkinliklerde öğrencilerin problem çözmeye karşı tutumlarını ders sonlarında not etmiştir. Bu notlar çalışmada alan notları olarak yer

almaktadır. Araştırma süresi boyunca ders sırasında tutulan notlarda alan notlarını oluşturmaktadır.

### 2.1.2. Pilot Çalışma

Araştırma projelerinde pilot çalışmanın önemi yadsınamaz. Pilot çalışma araştırmanın geçerliliğini artırmada ve daha da önemlisi araştırma problemlerinde ölçülmesi istenen davranışların tespit edilmesinde büyük katkısı sağlamaktadır. Bu çalışmada tanı testindeki soruların pilot çalışması Yomra Özdil İlköğretim Okulu'ndaki 30 sekizinci sınıf öğrencisi üzerinde yapılmıştır. Pilot çalışmayı ders öğretmeni Tuncay KÖR yapmıştır. Pilot çalışmanın ilk aşamasında öğrencilere birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem yardımıyla çözülebilecek 6 sorudan oluşan bir test uygulanmıştır. Bunlar toplandıktan bir hafta sonra ikinci aşama olarak öğrencilere birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi yardımıyla çözülebilen, 6 sorudan oluşan ikinci bir tanı testi uygulanmıştır. Pilot çalışmada klinik mülakatlar testler uygulandıktan bir hafta sonra yapılmıştır.

Bu iki tanı testindeki sorulara öğrencilerin verdikleri cevaplar incelenerek asıl çalışmanın tanı testi soruları hazırlanmıştır.

Pilot çalışma sonrasında asıl çalışmada veri kaynağı olarak kullanılacak tanı testi hazırlanmıştır. Asıl tanı testinin oluşturulmasında pilot çalışmadaki tanı testi sorularından faydalanılmış ancak genel olarak yapılamayan veya herkesin yapabildiği problemler asıl tanı testinden çıkartılmıştır.

Pilot çalışmanın yapıldığı yerin seçilmesinde, asıl çalışmanın yapılacağı yere benzerlikleri (köy ilköğretim okulu olması, çalışma kapsamına giren öğrencilerden taşınmalı eğitime tabi olanların olması, seviye tespit sınavlarında birbirine yakın başarılar sergilemesi vb. ) ve araştırmaya güçlük çıkaracak öğelerin olmamasına dikkat edilmiştir.

Pilot çalışma iki aşamadan yapılmıştır. Bu aşamalarda izlenen yollar aşağıda açıklanmıştır.

#### 2.1.2.1. Pilot Çalışmanın Birinci Adımı

Pilot çalışmanın birinci basamağında Yomra Özdil İlköğretim Okulu'nda okuyan 30 tane 8. sınıf öğrencisine 6 sorudan oluşan bir tanı testi uygulandı. Bu sorular; öğrencilerin

bir bilinmeyenli denklemleri kurabilme yeteneğini ölçeceği düşünülen problemlerdi. Tanı testinde yer alan problemlerin çözümlerinde, denklemdeki parametre eşitliğin bir tarafında, her iki tarafında, bir tarafında parantez içinde, iki tarafında da parantez içinde, kesir durumunda pay ve paydada olarak ayrıntılı bir şekilde dağıtılmıştır. Pilot çalışmadaki birinci tanı testinden çıkartılan sorular; öğrencilerin çoğunun çözemediği, boş bıraktığı veya yanlış yaptığı sorular olarak belirlenmiştir. Hemen hemen bütün öğrencilerin cevapladığı sorularında çıkartılması düşünülmüştü ancak böyle bir durumla karşılaşılması.

Pilot çalışmanın birinci adımında öğrencilere sorulan sınıf problemine gelen ilginç çözümler ve yapılan cebirsel hatalardan dolayı esas çalışmaya alınması uygun görülmüştür.

Öğrenciler birinci tanı testinin uygulanması sırasında birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem yardımıyla problem çözme konusunu işlediklerinden bir çok öğrenci problemlerin çözümüne iki bilinmeyenli denklem kurarak yaklaşmıştır(Problem iki bilinmeyenli bir şekilde çözülemeyecek olsa bile). Pilot çalışmanın birinci adımında öğrencilere uygulanan tanı testi incelenmiş ve çıkartılacak olan sorular belirlenmiştir.

Pilot çalışmanın birinci tanı testinde sayı problemi olarak isimlendirilebilecek 2,3 ve 5. problemlerin öğrencilerin denklem kurma ve çözmede farklı alanlardaki becerilerini ölçeceği düşünülerek sorulmuştur. Ancak özellikle 5. sorunun hiç yapılamaması ve okunulan metnin yanlış anlaşılmasından dolayı problem testten çıkartılmıştır. Kesir ve ceviz problemlerinin de yapılan inceleme sonucu testten çıkartılması uygun bulunmuştur. Pilot çalışmanın birinci adımında öğrencilere uygulanan tanı testinde yer alan problemler ekte sunulmuştur.

#### **2.1.2.2. Pilot Çalışmanın İkinci Adımı**

Pilot çalışmanın ikinci basamağında aynı öğrencilere 6 sorudan oluşan iki bilinmeyenli denklem yardımıyla çözülebilecek problemler sorulmuştur. Pilot çalışmanın ikinci aşamasında öğrencilere uygulanan tanı testinde çoğu öğrenci denkleminin kurulması istenen yaş sorusunu doğru yanıtlamıştır. Yine de birkaç öğrenci sadece verilen sözel ifadenin denkleminin kurulması sorusunda parantez hataları yapmıştır. Bununla beraber öğrenciler kurdukları iki bilinmeyenli tek denkleme çözmeye çalışmış ve yanlış anlamalar sonucunda değişik sonuçlar sergilemişlerdir. Bundan dolayı yaş problemi asıl tanı testine alınmamıştır.

İki bilinmeyenli bir denklem yardımıyla çözülebilecek bir kesir probleminin denkleminin kurulumunu yeterli sayıda öğrenci yaparken bu işlemten sonra denklemin çözüm aşaması az sayıda öğrenci yapmıştır. Denklem kurulmasında bir eksiklik görülmeyen sorunun denklem çözme kısmında öğrenciler zorlanmışlardır. Bu açıdan bu problem asıl tanı testine konulmuştur.

İki bilinmeyen yardımıyla çözülebilecek bir yaş probleminin anlatımı öğrencilere açık gelmediğinden bu problemde testten çıkartılıp yerine birinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklem yardımıyla çözülebilecek bir problem konulmuştur. Pilot çalışmanın birinci aşamasında rastlanıldığı gibi öğrenciler iki bilinmeyen ile yapılacak bir problemin çözümünde bir bilinmeyen kullanarak yapmaya çalışmışlardır.

Öğrencilerin hız problemlerinin formülizasyonu ve denklem çözümü alanındaki becerisinin ölçülmesi için pilot çalışmanın ikinci aşamasında iki tane hız problemi sorulmuştur. Bu problemler derinlemesine incelendiğinde farklı davranışların ölçülmeye çalışıldığı görülebilir. Ancak bunlardan bir tanesi seviyeye ağır geldiği ve genel olarak boş bırakıldığı için asıl çalışmaya alınmamıştır.

Pilot çalışmanın ikinci aşamasında sorulan iki bilinmeyenli bir denklem (bir bilinmeyenli bir denklemle de çözülebilen) yardımıyla çözülebilecek futbol problemi öğrenci ilgisini çektiği ve pilot çalışma sırasında öğrenci kağıtlarında ilginç ve düşündürücü çözümler bulunduğu için asıl çalışmaya bu problem de alınmıştır. Pilot çalışmanın ikinci adımında kullanılan problemler ekte sunulmuştur.

Uygulanan tanı testleri sonrasında öğrencilerin problem çözümleri incelenerek okul içindeki bilgisayar sınıfında klinik mülakatlar yapılmıştır. Mülakatlar sırasında öğrencinin rahat olabileceği bir ortam hazırlanmaya dikkat edilmiştir. Yapılan mülakatlar sayesinde araştırmacı deneyim kazanmıştır.

### 2.1.3. Tanı Testindeki Problemlerin Seçimi

Tanı koyucu test hazırlamak zordur ve uzmanlık işidir. Sekizinci sınıf öğrencilerinin sözel metin problemlerini denklemler yardımıyla çözme becerilerinin incelendiği bu araştırmada tanı testinde yer alacak soruların seçiminde aşağıdaki kriterler göz önüne alınmıştır.

#### 1. Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemle Çözülebilecek Problemler.

- a. Bilinmeyen (x'in) eşitliğin bir tarafında yer aldığı problemler (sınıf ve işçi problemleri),

- b. Bilinmeyen (x'in) eşitliğin bir tarafında, parantezler içinde yer aldığı problem(sayı problemi),
  - c. Bilinmeyen (x'in) eşitliğin her iki tarafında da parantez içinde yer aldığı problemler(yaş, merdiven hız problemleri).
2. Birinci Dereceden İki Bilinmeyen Denklem Sistemi Yardımıyla Çözülebilecek Problemler.
- a. Yok etme metoduyla çözülebilecek problem(futbol problemi),
  - b. Yerine koyma metoduyla çözülebilecek problem(hız problemi),
  - c. Çeşitli cebirsel işlemler yapıldıktan sonra bilinen iki bilinmeyenli denklem sistemi formatına dönüşebilen problem(kesir problemi).

Yukarıda sınıflandırılmış sorular içinde yer alan işçi problemi pilot çalışmada bulunmamaktadır. Ancak öğrencileri defterlerinin incelenmesi doğrultusunda asıl çalışmanın yapılacağı okulda bölümün işlenmesi ve araştırmada kapsam geçerliliğinin sağlanması sebeplerinden asıl tanı testinde bu probleme yer verilmiştir.

Hemen hemen her soru birden çok çözüm yoluna sahiptir. Bu testte yer alan sorulardan bir kaç da hem BDBBD yardımıyla hem de BDİBD yardımıyla çözülebilecek sorulardır. Soruların seçiminde kapsam geçerliliğinin sağlanmamsa dikkat edilmeye çalışılmıştır. Testte yer alan sorular sayı, yaş, işçi-havuz, hız, kesir ve gerçek hayat problemleri olarak sınıflandırılabilir.

Tablo 2. Tanı testinde yer alan sorular

| Çalışmada Kullanılan Problemler |                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|---------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Sınıf Problemi                  | Bir sınıftaki erkek öğrenciler, kız öğrencilerin sayısının 3 katından 5 eksiktir. Sınıfın mevcudu 47 olduğuna göre bu sınıftaki kız öğrencilerin sayısını bulabilir misiniz?                                                                                            |
| Sayı Problemi                   | 3 fazlasının 2 katı ile 2 eksiğinin 3 katının toplamı 35 olan sayıyı bulabilir misiniz?                                                                                                                                                                                 |
| Yaş Problemi                    | “Bir baba 46, oğlu 8 yaşındadır. Kaç yıl sonra babanın yaşı oğlunun yaşının üç katı olur?” problemini nasıl çözersiniz?                                                                                                                                                 |
| İşçi Problemi                   | “Bir işi Kemal yalnız başına 6 günde, Yasin yalnız başına 8 günde yapabiliyor. İkisi beraber 3 gün çalıştıktan sonra Kemal işi bırakıyor. Kalan işi Yasin kaç günde bitirir?” probleminin denklemini yazıp çözebilir misiniz?                                           |
| Merdiven Problemi               | İrem bir merdivenin basamaklarını 3 er 3 er çıkıp 4 er 4 er inmiştir. İrem toplam 21 adım attığına göre merdivenin basamak sayısını nasıl bulursunuz?                                                                                                                   |
| Futbol Problemi                 | Bir futbol takımı kazandığı her maç için 3 puan, beraberlik için 1 puan kazanmaktadır. Oynadığı maçlardan bir kısmında galip gelmiş bir kısmında da berabere kalmıştır. 26 maç yapan bu takımın toplam 62 puanı olduğuna göre, kazandığı maç sayısını nasıl bulursunuz? |
| Hız Problemi                    | Bir otomobil A şehrinden B şehrine 7 saatte gidiyor. Bu otomobil saatteki ortalama hızını 30 km azaltırsa aynı yolu 9 saatte alacağına göre; iki şehir arasının kaç km olduğunu bulabilir misiniz?                                                                      |
| Kesir Problemi                  | Bir kesrin payına 2 paydasına 1 eklendiğinde kesrin değeri $\frac{4}{5}$ e denk oluyor. Payından 2, paydasından 3 çıkartılırsa kesrin değeri $\frac{2}{3}$ e denk oluyor. Bu kesri bulabilir misiniz?                                                                   |

## 2.2. Evren ve Örneklem

Bu çalışma Trabzon ili Çarşıbaşı ilçesi Şahinli İlköğretim Okulu'nda 8. sınıfta okuyan toplam 18 öğrenci ile yapılmıştır. Tanı testi uygulanan bu 18 öğrenciden 6 öğrenciyle klinik mülakat yapılmıştır. Bu öğrencilerin 3 tanesi kız, 3 tanesi erkektir. Öğrenci sayılarının cinsiyete göre eşit seçilmesinde bu grupların karşılaştırılması hedeflenmemiştir. Mülakat için seçilen öğrencilerin başarı düzeyleri orta düzeydedir. Mülakat yapılacak öğrencilerin seçiminde, tanı testindeki sorulardan mümkün olduğunca fazla soruya yanıt veren öğrencilerin seçilmesine özen gösterilmiştir. Ayrıca öğrenci seçimi sırasında öğrencilerin gönüllü olmasına ve düşüncelerini ve problem çözümünde yaptığı işlemleri rahat bir şekilde açıklayabilme yeteneğine sahip olmasına da dikkat edilmiştir. Öğrencilerle mülakata başlamadan önce çalışmanın mahiyeti hakkında bilgi verilmiş ve tanı testinin ve yapılacak olan klinik mülakatın ders notuna herhangi bir etkisi olmayacağı konusunda öğrenciler bilgilendirilmiştir. Bu tutum öğrencilerin daha rahat davranmasını sağlamıştır. Bu davranış araştırmadaki verilerin güvenilirlik düzeyini artırmaktadır.

## 2.3. Verilerin Toplanması

Bu çalışmada verileri, öğrencilerle yapılan klinik mülakat sonuçları, öğrencilerin problemlerin çözümünü yaptıkları çalışma kağıtları ve alan notları oluşturmaktadır. Araştırmacı öğretmen yöntemiyle yürütülen çalışmada öğrencilerin sınıf içi etkinlikleri sırasında problem çözümlerine verdikleri cevaplar, yaptıkları yorumlar ve konuşmalar dersin hemen sonunda kaydedilerek alan notlarını oluşturacak bölüm hazırlanmıştır. Konunun bitimine doğru 18 öğrenciye BDBBD ve BDİBD lerle çözülebilecek 8 sorudan oluşan bir tanı testi uygulanmıştır. Daha sonra bu öğrencilerden 6 tanesiyle klinik mülakatlar yapılmıştır. Yapılan mülakatlar kasete alınıp yazıya dönüştürülerek çalışmanın verileri toplanmıştır.

### 2.3.1. Klinik Mülakat

Matematik nicel verilerle ilgilenen bir bilim dalıdır. Bununla beraber matematik eğitimi alanında yapılan bir çok araştırmada nitel veriler kullanılmıştır. Son 10 yılda matematik

eğitiminde nitel araştırma metodolojisi, sadece kabul edilen bir yöntem değil ayrıca çok sık kullanılan yöntemdir. Bunlar arasında öğrencilerle görüşme, popüler bir veri toplama yöntemidir [50]. Öğrencilerin düşüncelerini derinlemesine incelemek amacıyla yapılan mülakatlar klinik mülakat olarak adlandırılır. Clement; klinik görüşme ile, bireylerin fikir ve anlamalardaki zihinsel süreçler hakkında veriler toplanabileceğini ve analiz edilebileceğini ve bireyin düşüncesindeki saklı bulunana yapı ve yöntemleri ortaya çıkarılabileceğini iddia etmiştir [51].

Karataş, klinik mülakatın uygulandığı ortamların sakin ve öğrencilerin rahat edebileceği ortamların olmasının, elde edilecek veriler açısından önemli olduğuna değinmiştir [29].

Confrey, öğrenciler arasında ve onların matematiksel kavramları arasındaki bireysel farklılıkları göz önüne alarak klinik görüşmelerin, matematik eğitiminde bu farklılıkları ortaya koyabilecek potansiyelinin olduğunu söylemektedir [52]. Ginsburg ise, bir klinik mülakatın üç amacını (keşfetme, tanımlama ve beceri) tanımlamada Piaget'in zihinsel gelişim teorisini referans göstermektedir. Bu amaçları, bireyin problem durumuna yaklaşımındaki zihinsel olayı keşfetme, buna dayanan bilişsel süreci tanımlama ve açıklama, bireyin bir görevi tamamlamadaki becerisini belirleme olarak tanımlamaktadır [53].

## 2.4. Verilerin Analizi

Bu araştırmada öğrencilerin problemleri denklemler vasıtasıyla çözme sürecinde yapılan konuşmalar ve öğrencilerin problem çözümünü yaptıkları çalışma kağıtları (tanı testi) veri kaynağı olarak kullanılmıştır. Ayrıca sınıf içi alan notları da çalışmanın verilerini oluşturmaktadır. Sınıf içi alan notları öğrencilerle yapılan mülakatların yorumlanmasında yardımcı olmuştur.

Veri analizi yapılırken, ilk olarak öğrencilerle yapılan klinik mülakatların kayıtları yazı haline dönüştürülmüştür. Daha sonra öğrencilerin yaptıkları işlemleri tarayarak yazı haline dönüştürülen konuşmalarla birleştirip yorum yapılmıştır. Karataş yaptığı çalışmada klinik mülakatı kullanırken *what if or not* yöntemini kullanmıştır. Bu yöntemle göre öğrenci problemi çözdükten sonra probleme farklı bir format vererek yeni oluşan probleme öğrencinin yaklaşımını değerlendirmiştir [29].

Araştırmacı mülakatlar sırasında öğrencilere “Neden böyle yaptın”, “Niçin bu şekilde yazdın?”, “Problem hakkında ne düşünüyorsun?”, “Burada ne söylemek istedin?” şeklinde sorular yöneltilerek öğrencilerin problemleri formüleştirirken izledikleri yolları ortaya koymaya çalışmıştır. Klinik mülakatın pilot çalışmasından edinilen bir deneyimle öğrencilerle yapılan asıl mülakat sırasında öğrencilere “Bu soru hangi problem tipine giriyor?” sorusu sıkça yöneltilmiştir. Pilot çalışmada ve sınıf içi gözlemlerde edinilen tecrübede, öğrencilerin problem çözme etkinliklerinde öncelikle problemin türünü ve hangi tür denklem kurarak çözeceklerini ifade ettiklerine rastlanmıştır. Öğrencilerin problemleri denklem haline dönüştürmeleri sırasında izledikleri stratejiler, sorulan sorulara verdikleri yanıtlar ve denklemleri çözme aşamaları sırasında yaptıkları cebirsel işlemler yorumlanarak öğrencilerin problem çözme becerileri ortaya konulmaya çalışılmıştır.



### 3. BULGULAR

Bulgular, Trabzon ili Çarşıbaşı ilçesi Şahinli İlköğretim Okulu'nda okuyan 18 öğrenciye tanı testi uygulanarak toplanmıştır. Öğrencilere, sınıf atmosferinde verilen tanı testi sorularını çözmeleri istenmiş ve daha sonra 6 öğrenciyle yaptıkları çözümler üstünde klinik mülakat yapılmıştır. Yapılan mülakatlar kasete kaydedilerek çözümlerle birlikte yorumlanmıştır.

Ders yılı içinde Harfli İfadeler ve Denklemler ünitesi işlenirken, sınıf içinde öğrencilerin problemlere ait denklemlerin kurulumu ve çözümüne ait yaşanan olaylar ve geçen konuşmalar aşağıda belirtilen alt problemlere cevap bulmak amacıyla alan notları olarak not edilmiştir.

- Öğrencilerin denklem kurarak problem çözme becerilerinin nasıldır?
- Öğrencilerin BDBBD yardımıyla çözebileceği sözel bir problemi matematik diline nasıl çeviriyorlar ve kurdukları denklemleri nasıl çözüyorlar?
- Bilinmeyenin eşitliklerdeki durumuna göre (sadece bir tarafta, her iki tarafta, parantezli durumda) farklı denklem gerektiren sözel problemleri öğrenciler matematik diline nasıl çeviriyorlar?
- Öğrenciler iki bilinmeyenli denklem yardımıyla çözülebilecek problemleri nasıl denklem haline dönüştürüyorlar ve denklemleri çözme becerileri nasıldır?

#### 3.1. Alan Notları

Öğrencilerin sözel problemleri çözerken denklemlerden nasıl yararlandıklarını ve öğrencilerdeki matematiksel düşüncenin işleyişini ortaya koymak için araştırma süresinde sınıf içi gözlemler yapılmıştır. Araştırmacı öğretmen yöntemiyle yürütölen çalışma süresince, sınıf içi etkinliklerde öğrencilerin tutumları, problemlere yaklaşımları ve verdikleri cevapları alan notları başlığı altında yer almıştır. Alan notları, ders içi etkinliklerden hemen sonra not edilip daha sonra derlenmiştir. Bu bölümde öğrencilerle işlenen derslerde problem çözme etkinlikleri sırasında tutulan alan notları sunulmuştur.

Öğrenciler birinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklemle çözülebilecek basit düzeydeki denklemleri rahat bir şekilde kurabilmekte ve kurdukları denklemleri çözmekte

genel olarak sorun yaşamamıştır. “Hangi sayının 5 fazlası 14 eder?” ve “2 katının 3 fazlası 35 olan sayı kaçtır?” şeklindeki problemlerin denklemlerini sınıfın büyük bir çoğunluğu kurmuştur. Ancak enderde de olsa öğrencilerde denklem çözme etkinlikleri sırasında toplam veya fark durumunda olan sayıları eşitliğin bir tarafından diğer tarafına geçirmede işaret değiştirmeyi unuttukları gözlenmiştir. İlköğretim 7. sınıfta harfli ifadelerle cebirsel işlemler yapmayı öğrenen öğrenciler önceki bilgileriyle bu tür basit denklemleri kurmakta zorlanmamışlardır. Bununla beraber öğrencilerin bir kısmında bu tür problemleri çözerken denklem kurma yerine “kafadan çözme” yi tercih ettikleri gözlenmiştir. İşlemleri zihinden yapan öğrenciler problemleri çözerken problemde verilen sözel ifadelerin terslerini yaparak istenen sayıyı buldukları gözlenmiştir. Öğrencilerde ki bu davranış, problemleri çözerken denklem kurma yöntemini kullanmama gibi bir isteği de doğurabilmektedir. Gökmen; bu problemleri kafadan yaptığını, bu soruları çözmek için  $x$  kullanmaya gerek olmadığı söylemiştir. Araştırmacının başka bir yöntem kullanarak problemi nasıl çözebilecekleri sorusuna Ersin; test sınavı olsa şıkları deneyerek bu soruyu çözebileceği yanıtını vermiştir.

“5 fazlasının 2 katı 58 eden sayı kaçtır?” şeklinde parantez gerektiren problemlerde öğrenciler ilk başlarda parantez açmalarda güçlük yaşamışlarsa da alıştırma-tekrar türünde örneklerle öğrenciler denklem kurarak problem çözmenin zevkli olduğunu söylemişlerdir.

Öğrencilere sorulan “5 fazlasının 3 katı ile 2 eksiğinin 2 katının toplamı 41 eden sayıyı bulabilir misiniz?” problemine ait denklemi öğrencilerin bir kısmı kuramamıştır. Problem metnindeki sayılarla aritmetik işlem yaparak sonucu bulma alışkanlığı gösteren öğrenciler hem denklem kurulumunda hem de kurulan denklemin çözümünde hatalar yapmışlardır.  $3(x+5) + 2(x-2) = 41$  şeklinde kurulan denkleminin çözüm kümesinin hesaplanmasında öğrencilerin bir kısmı parantezleri açtıktan sonra  $x$ 'li terimleri yan yana yazarken sanki eşitliğin diğer tarafına atmış gibi işaret değiştirildiği davranışı gözlenmiştir. Çözüm;

$$3(x+5) + 2(x-2) = 41$$

$$3x + 15 + 2x - 4 = 41$$

$$3x - 2x = 41 - 15 + 4 \text{ şeklinde yapılmıştır.}$$

Problemin denklemini doğru kuran öğrencilerin bir kaçında eşitliğin bir tarafında olan sayının ( $x$ 'li terim) aynı tarafta kalmak koşuluyla yerinin değiştirilmesinde işaretinin değişeceği gibi bir kanı oluşmuştur. Bu durum öğrenciye izah edilerek yanılının ortadan kaldırılması yoluna gidilmiştir. Denklemi kurma basamağında eksiği olmayan öğrencilerden birkaç tanesi işlem hatası veya cebirsel hatalar yapmışlardır.

Sınıf içinde sorulan “2 katı, 2 fazlası ve yarısının toplamı 28 olan sayıyı nasıl bulursunuz?” problemine ait denklemi öğrencilerden bir kısmı denklemi  $\frac{2x+2}{2} = 28$  şeklinde kurmuştur. Çözüm kümesini bulmalarının ardından buldukları cevabın çözümü sağlayıp sağlamadığı sorulduğunda öğrenciler cevabın yanlış olduğunu fark etmişlerdir. Sözel bir ifadenin ne anlatmak istediğini çözmek, denklem kurmanın temel ilkesidir.

Öğrencilerin problem çözmede en çok hata yaptıkları yerlerden biride problem metnine ait denkleminde parantez açarken sayıların işaretlerine dikkat etmedikleri yerlerdir. Sınıfta sorulan  $3(4x-3)-2(5x-6)=21$  denkleminin çözüm kümesinin bulunmasında öğrencilerden büyük bir bölümü çözümü aşağıdaki gibi yapmışlardır.

$$3(4x-3)-2(5x-6)=21$$

$$12x-9-10x-12=21$$

Eşitliğin sol tarafındaki parantezleri açarken ikinci parantezin açımında parantez önündeki “-2” sayısını dağıtırken öğrenciler ikinci terimde işareti unutarak parantezin içindeki “-6” sayısının işaretini aynen almışlardır. Bu şekilde yapılan işlem hatasıyla sonucu doğru bulamayan öğrenciler matematiğe ve problem çözmeye karşı ilgilerinin azatlığını ifade etmişlerdir.

“Bir dikdörtgenin uzun kenarı kısa kenarının 4 katından 5 fazladır. Bu dikdörtgenin çevresi 310 cm olduğuna göre uzun kenarı kaç cm dir?” problemini Orhan çözerken şema çizdikten sonra denklemi aşağıdaki gibi kurmuştur.

$$2.4x+5+2.x=310$$

Kurduğu denklemin çözümünü yapan Orhan; “Sonuç tam sayı çıkmadı. Demek ki yanlış yaptım.” diyerek sorunun çözümünü gözden geçirmiştir. Ancak çözümde hata bulamayan öğrenci tekrar başa dönerek problemi okumuştur. Tavırlarından artık bu problemle uğraşmak istemediğini belirten Orhan’a denklemi kurarken kullandığı kenarları tek tek yazarak çözmesi söylendiğinde doğru denklemi kurarak çözümü doğru yapmıştır. Orhan probleme ait ilk kurduğu denklemi yazarken parantez kullanmadığı için çözüm sonucunda bulduğu değer yanlış çıkmıştır.

Sınıf içi problem çözme etkinlikleri sırasında sorulan bir başka problem de şöyledir: “Bir annenin yaşı 40, iki çocuğunun yaşları toplamı 16 dır. Kaç yıl sonra annenin yaşı çocuklarının yaşları toplamına eşit olur?” problemine ait denklemi öğrenciler oluştururken bir çoğu  $x$  yıl sonra iki çocuğun yaşları toplamına  $16+x$  yazdığı için  $40=16$  çelişkisine düşmüşlerdir. Denklemin kurulumunda hata yaptıklarını düşünen öğrenciler denklemi

kurma sırasında iki çocuğun yaşlarının toplamının  $x$  yıl sonra  $2x$  olarak değişeceğini gördükten sonra problemi doğru bir şekilde çözmüşlerdir.

Kesir problemlerine örnek oluşturabilen “Bir kesrin değeri  $\frac{5}{7}$ ’dir. Bu kesrin payına 3 ekleyip paydasından 3 çıkartılırsak kesrin değeri 1 oluyor. Buna göre bu kesri bulabilir misiniz?” sorunun çözümünde bir çok öğrenci iki bilinmeyenli denklem kullanmıştır. Halbuki problemin çözümü bir bilinmeyenli bir denklemle daha rahat çözülebilmektedir. İki bilinmeyenli denklemle problemi çözmek isteyen öğrencilerin bir kısmı kesirli olarak ifade ettikleri eşitliklerin içler dışlar çarpımında hata yapmışlardır.

“Bir bisikletli A kentinden B kentine 35 km/saat hızla gidip B kentinden A kentine 30 km/saat hızla dönmektedir. Dönüşü gidişten 3 saat uzun sürdüğüne göre bisikletli A dan B ye kaç saatte gitmiştir?” problemine ait denklemi öğrenciler kurmakta zorlanmışlardır. Bu problemin denklemini bir bilinmeyenli olarak kurabilen öğrenciler genel olarak kurdukları denklemi de çözebilmişlerdir. İki bilinmeyenli denklem kurularak da çözülebilecek bu problemi belirtilen türde çözen öğrenciye rastlanmamıştır.

Bayram etkinlikler sırasında sorulan işçi probleminin çözümünün yapılmasının ardından denklemi oluştururken neden kesirli ifade kullanıldığı sormuş, bu şekilde yapılan çözümü anlamadığı ifade etmiştir. Öğrenciler işçi ve havuz problemlerini çözerken genelde ezber bir mantıkla hareket etmektedirler. Daha önce çözülmüş benzer sorulara bakarak çözümde denklemi  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x}$  şeklinde oluşturulan problemlerde öğrencilere  $\frac{1}{a}$  kesrinin neyi ifade ettiği sorulduğunda büyük bir çoğunluğu cevap verememişlerdir.

Sınıf içi etkinliklerde sorulan kümes sorusu üzerinde çalışan öğrencilerin büyük bir çoğunluğu problemi iki bilinmeyenli denklem kurarak çözmüştür. “Bir kümesteki tavşan ve ördeklerin baş sayıları toplamı 23 ve ayak sayıları toplamı 70 tir. Kümeste kaç tavşan vardır?” problemine 5 kişi doğru cevap vermiştir. Bu 5 kişiden sadece biri problemi bir bilinmeyenli bir denklem kurarak çözmüştür. Buradan öğrencilerin problem metninde iki bilinmeyen belirgin bir şekilde ortaya konulmuşken problemi çözmek için iki bilinmeyenli denklemi tercih ettikleri gözlenmiştir. Sınıftaki diğer öğrenciler genelde probleme ait denklemi nasıl kuracaklarını bilmediklerini söylemişlerdir. Bu problemin arkasından sorulan “36 kişilik bir sınıftaki öğrencilerin bir kısmı 12, diğerlerinin yaşı 10 dur. Bu sınıftaki öğrencilerin yaşları toplamı 392 olduğuna göre 12 yaşında kaç öğrenci vardır?” sorusuna cevap veren öğrenci sayısı ilk probleme oranla daha fazladır. Bu, öğrencilerde

aynı türden tekrar tarzında olan problemler çözdürmenin onların problem çözme becerilerini geliştirerek iyi birer problem çözücü olabileceklerini göstermektedir. Problem çözmede alıştırma ve tekrar tarzında örneklere bolca yer vermek öğrencilerin problem çözme becerilerini geliştirmektedir.

Sınıf içi görüşmeler sırasında Ümran'a probleme ait denklemi kurup kuramadığı sorusunun yöneltilmesinde öğrenci denklem kurmada yeterli olmadığını, denklemi kursa bile çözümü yapamadığını, denklemin neye eşitleneceğini anlamadığını ifade etmiştir.

Hidayet; başka bir zamanda sınıf içinde öğrenciyle görüşme sırasında problemleri yanlış anladığını, o yüzden problem çözmede sorun yaşadığını ifade etmiştir. Aynı öğrenci kurulan denklemi çözerken en çok işaret hataları yaptığını da dile getirmiştir.

Ümit; ders sırasında kesirli denklemleri kuramadığını ve kurulan denklemi çözmediğini ifade etmiştir. Aynı öğrenci problemde ne yapacağını bilmediği durumlarda denklemi kuramadığını söylemiştir.

Gülten; problemlerin denklemlerini kuramadığını veya kurmada zorlandığını ancak denklem çözerken bir problem yaşamadığını belirtmiştir. Bu yüzden denklem kullanarak problem çözmenin kendisine çok yardımcı olmadığını ifade etmiştir.

Bayram; denklem kurmada yetersiz olduğunu, özellikle iki bilinmeyenli problemlerin olduğu problemleri denklemlerleştirmede çok zorlandığını, yapamadığını ifade etmiştir.

Gökmen; dersteyken denklem kurarak soruyu çözenin zor olduğunu söyleyerek “yok x miş üç artı bilmem kaçmış” şeklinde düşüncelerini dile getirmiştir. Matematik dersini sevmediği bu sebeple problem çözmede de başarısız olduğunu söylemiştir. Metin; sınıf içinde olan sesten rahatsız olduğunu bu sebeple problemlerin denklemlerini kurmada güçlük çektiğini ancak denklemi çözenin zevkli olduğunu ifade etmiştir.

Çetin; sınıf içinde sorulan “Bir sayının 4 katının 3 eksiği ardışığının 2 eksiğine eşittir. Bu sayıyı nasıl bulursunuz?” şeklinde sorulan bir problemde “Bu sorunun denklemini yazamam. Çünkü ardışığı deyince denklemde ne yapmamız gerektiğini unuttum.” şeklinde düşüncesini ifade etmiştir. Gene denklem kurmanın ilham istediğini söylemiş, çözemediği sorunun başka bir zamanda karşısına çıktığında onu çözebileceğini düşündüğünü söylemiştir. Ersin; problemlerde denklem kurmanın zor olduğunu, soruları kendisi daha kolay yoldan çözerek cevap bulabileceğini ifade etmiştir.

Selma; kesirli denklem kurma problemleri anlamadığını bu problemlerin denklemlerini kuramadığını dile getirmiştir. Ayrıca problemlerde işaretlerde çok hata yaptığını,

dolayısıyla arkadaşlarıyla aynı doğru sonucu bulamayınca problem çözme şevkinin kaçtığını dile getirmiştir.

Sema problemlerde denklemi kuramazsa bile problemi çözebildiğini ifade etmiştir. Denklem çözenin denklem kurmaya oranla daha kolay olduğunu söyleyen Sema problemlerden kesri problemlerini sevmediği söylemiştir.

Sümeyye problemlerde denklem kurma konusunda kendini yeterli görmediğini belirtmiş, havuz ve hız problemlerine ait denklemleri kuramadığı ifade etmiştir. Kurulan denklemleri çözebildiğini söyleyen Sümeyye denklemleri çözerken “+” ve “-” işaretlerinde çok hata yaptığını söylemiştir.

İsmail; denklem kurma konusunda tam olarak yeterli görmediğini söylemiştir. Problemlere ait denklemleri genelde kurabildiğini ve kurduğu denklemi çözebildiğini ifade etmiştir. Probleme ait kurduğu denklemi çözemediğinde denklemi hatalı kurduğunun düşüncesine kapıldığını ifade etmiştir. Ayrıca problem çözmede denklem kurmanın daha kolay bir yöntem olduğunu söylemiştir.

Birgül; kolay soruları denklem kurarak çözenin zaman kaybı olduğunu söylemiştir. Basit türdeki sayı problemlerini çözerken Birgül, denklem kurma yerine problem cümlesindeki ifadeleri tersten giderek sorulan değeri daha kolay bulduğunu söylemiştir. Bazen denklemleri kuramadığını bazen de kurduğu denklemleri çözemediğini, işlem hatası yaptığını belirten Birgül bir bilinmeyenli denklemleri çözenin daha zevkli olduğunu ifade etmiştir.

Mehtap denklem kurmada kesir problemlerinde zorlandığını, kesirlerle işlem yapmanın daha zor olduğunu ve daha kolay işlem hataları yapabildiğini söylemiştir.

Ali denklem çözmede en önemli ögenin diğer cebirsel işlemler olduğunu söylemiş ve cebir alanında eksik bilgilerin denklem kurma ve çözme de zorluk çıkardıklarını ifade etmiştir. Denklemlerde çok fazla soru tipi olduğunu her biri için formülleri ezberlemenin zor olduğunu belirten Ali gene de problem çözmede denklem kurmanın çok kolaylık sağladığını ifade etmiştir.

Yukarıda yazan öğrenci düşünceleri dersler sırasında öğrencilerle çözülen farklı sorular sonrasında onların yaptıkları yorumlardır. Bu yorumlar ders içinde veya ders çıkışında not edilerek buraya aktarılmıştır. Ayrıca sınıf içi etkinliklerde çözülen problemlerden bir kaçına bu kısımda yer verilmiştir.

Çalışmada alan notları olarak yer verilen sınıf içi gözlemleri araştırmacıya klinik mülakat yapmada yardımcı olacak ipuçları vermiştir. Örneğin öğrenciler problemleri

çözerken ilk önce onların hangi tür problem olduğunu belirlemeleri ve çözümde ne tür bir denklem kullanacağını tespit etmeleri probleme ait denklemi yazıp çözmelerinde yardımcı olmaktadır. Bu yüzden araştırmacı mülakatlara problemlerin türünü sorarak başlamıştır. Yapılan sınıf içi gözlemlerde temel matematiksel becerileri (matematiksel bilgi, payda eşitleme, denklem çözme....) zayıf olan öğrencilerin problem çözmeye karşı isteklerinin de az olduğu görülmüştür. Ayrıca yapılan sınıf içi gözlemlerde öğrencilerin bilinmeyen eşitliğin her iki tarafında da yer aldığı parantez içeren denklemleri çözmede güçlük çektikleri, iki bilinmeyen olan problemlerin denklemlerini daha kolay kurdukları ancak kurdukları denklemleri çözmede bir bilinmeyenli denklemleri çözmeye nazaran daha başarısız oldukları sonucuna varılmıştır.

### 3.2. Problemlerden Elde Edilen Bulgular

Bu bölümde öğrencilerin tanı testinde problemlere vermiş oldukları cevaplar üzerine yapılan klinik mülakat verileri sunulmuştur.

#### 3.2.1. Sınıf Problemi

*Bir sınıftaki erkek öğrenciler, kız öğrencilerin sayısının 3 katından 5 eksiktir. Sınıfın mevcudu 47 olduğuna göre bu sınıftaki kız öğrencilerin sayısını bulabilir misiniz?*

**Ömer;**

Öğrenci birinci problemi sesli olarak okur. Bu sorunun çözümü hakkında ne düşündüğü, hangi problem tipine girdiği sorusuyla mülakata başlanır.

(1) **T:** Birinci soru hangi problem tipine giriyor?

(2) **Ö:** Sayı problemi.

(3) **T:** Daha önce bu tip sorulardan çözmüş müydün?

(4) **Ö:** Evet çözmüştüm.

(5) **T:** Genelde bu soruların çözümüne nasıl başlarsın?

(6) **Ö:** Erkek öğrenciler kızların katıysa kızlara  $x$  derim veya kız öğrenciler erkeklerin katıysa erkelere  $x$  derim. Diğerini öteki cinsinden yaparım. Veya sonuca göre yapıyorum.

Öğrenciye probleminden ne anladığı sorusu yöneltilmiş ve öğrenci problemi sözel olarak ifade etmiştir. Öğrenci problemin tipini ve çözeceği yöntemi sorunun okunmasından sonra

anlamıştır. Buda ona problemin çözümünü yaparken denklem kurmada kolaylık sağlamaktadır.

$$\begin{array}{l} \text{kız} \\ x + \end{array} \begin{array}{l} \text{erkek} \\ 3x-5 = 47 \end{array}$$

- (7) T: Bu problemin denklemini nasıl kurdun?  
 (8) Ö: Kızların sayısına  $x$  dedim. Erkekleri kızlara göre yazdım.  
 (9) T: Peki neden kızların sayısına  $x$  dedin?  
 (10) Ö: Çünkü erkeklerin sayısı kızların sayısının katı olarak verilmiş soruda.  
 (11) T: Peki daha sonra neden " $x$ " ile " $3x-5$ " ifadelerini topladın?  
 (12) Ö: Çünkü sınıfın mevcudunu bulmak için. Sınıf mevcuduna eşitledim.

Öğrencide problemin çözümünde hangi ifadeye  $x$  diyeceğini bilmesi öğrencide bu tip problemlerin denkleminin kurulmasında okuduğu anlamada ve sözel olarak verilen metni matematik diline çevirmede bir eksikliğin olmadığını göstergesidir. Öğrencinin, sınıftaki kız ve erkek öğrencilerin sayılarını toplayıp 47 ye eşitlemesi; bilinmeyen eşitliğin bir tarafında bulunan BDBBD yardımıyla çözülebilecek sözel problemlere ait denklemleri kurma yeteneğinin gelişmiş olduğunu göstermektedir.

- (13) T: Kurduğun bu denklemi nasıl çözersin?  
 (14) Ö: -5 i öteki tarafa atarım.  $4x=52$  olur,  $x$  te 13 olur.  
 (15) T: Peki Ömer, nedir bu 13 sayısı?

$$\begin{array}{l} x + 3x-5 = 47 \\ 4x = 52 \\ x = 13 \end{array}$$

- (16) Ö: Sınıftaki kızların sayısı.  
 (17) T: Problemin doğruluğunu nasıl kontrol edersin?  
 (18) Ö: Kızlar " $x$ " ti. Erkekler " $3x-5$ ".  $x$  yerine 13 yazarım.  $3x-5=3.13-5=39-5=34$  erkeklerin sayısı olur. Kızlarla erkekler toplam 47 ediyor demek ki doğru.  
 (19) T: Peki problemlerde bulduğun cevapları genelde kontrol eder misin?  
 (20) Ö: Her zaman yapmam. Denklemden emin olmadığımda veya işlemlerde hata yapabileceğimi düşündüğümde kontrol ederim.  
 (21) T: Bu soruyu başka bir yöntemle çözebilir misin?  
 (22) Ö: Şıklar verilse şıklardan çözerim.

Bilinmeyenlerin bir tarafta toplandığı ve parantezlerin kullanılmasına gerek olmayan birinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklemle çözülebilecek olan bu soruda öğrenci problem metninin denklemini kurmuş ve kurulan denklemi doğru bir şekilde çözmüştür. Yani okuduğunu anlama becerisinde bir eksiklik bulunmamaktadır.

**Ali;**

Öğrenci problemi sesli olarak okuduktan sonra problem ve problem çözümü hakkında sorular sorularak klinik mülakata başlanır.

(1) T: Bu soru nasıl bir soru Ali?

(2) A: Birinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklemle çözülebilecek bir soru.sayı problemi.

(3) T: Daha önce bu tip sorular çözdün mü?

(4) A: Evet çok çözdüm.

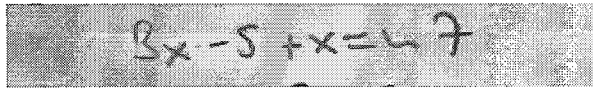
(5) T: Bu problemin çözümüne nasıl başlarsın?

(6) A: Kız öğrenci sayısına  $x$  derim. Erkek öğrenci sayısı kız öğrenci sayısının 3 katının 5 eksiği olacak. Yani  $3x-5$ .

Problemi anlama aşamasında öğrencinin probleminden ne anladığını kendi kelimeleriyle ifade etmesi istenmiştir. Öğrenci kız öğrenci sayısına  $x$  diyerek erkek öğrenci sayısını kız öğrenci sayısı ile bağlantılı bir şekilde söylemiştir. Öğrencinin kız öğrenci sayısına  $x$  demesi problemin denkleminin kurulmasında ona kolaylık sağlamıştır.

(7) T: Neden bunları topladın?

(8) A: Mevcuda eşitledim.  $x$  'i bulabilmek için.



$$3x - 5 + x = 47$$

(9) T: Denklemi doğru olarak kurduğunu kontrol eder misin?

(10) A: Genelde etmem. Ama sonucu tam sayı bulmazsam, işlemde hata yaptığımı düşünürsem geriye dönüp kontrol ederim. Çünkü işaretlerde hata yapma olasılığı yüksek.

(11) T: Denklemi yazdıktan sonra nasıl çözdün?

(12) A: Bilinenlerle bilinmeyenleri ayrı ayrı yazıyorum sonra da denklemi çözüyorum  $x$  i buluyorum.

(13) T: Peki bulduğun sonucu kontrol eder misin?

(14) A: Bunu 3 ile çarparım, 5 çıkartırım, sonra diğerini eklerim. Aynı çıkıyor mu diye bakarım.

$$\begin{aligned}
 3x - 5 + x &= 47 \\
 4x &= 47 + 5 \\
 4x &= 52 \\
 x &= \frac{13}{1}
 \end{aligned}$$

Sözel verilen problemi öğrenci denklem haline doğru bir şekilde dönüştürmüştür. Bilinmeyenlerin denklemin bir tarafında yer aldığı ve parantezlerin olmadığı bir sayı probleminin denklemini öğrenci kolay bir şekilde yazmış ve kurduğu denklemi çözmüştür. Bu, öğrencinin değişkenin, eşitliğin bir tarafında olduğu problem tiplerinin denklemini yazmada ve bu denklemleri çözmede başarılı olduğunu gösterir. Öğrenci bulduğu sonucun doğruluğunu kontrol etmede de yeterlidir.

#### Sema;

Öğrenci birinci problemi sesli olarak okuduktan sonra bu sorunun çözümü hakkında ne düşündüğü, hangi problem tipine girdiği, problemin nasıl çözülebileceği sorularıyla klinik mülakata başlanır.

- (1) T: *Problemde ne soruyor?*
- (2) S: *Sınıftaki kız öğrenci sayısını.*
- (3) T: *Soru hangi problem tipine giriyor?*
- (4) S: *Denklem kurma problemi*

Öğrenci problem tipini denklem kurma problemi olarak sınıflandırmıştır. Temelinde doğru olan bu sınıflama özelde sayı problemi olarak sınıflandırılmaktadır.

- (5) T: *Bu soruyu nasıl çözersin?*
- (6) S: *Bir bilinmeyenli denklemle çözebiliriz*
- (7) T: *Bu problemde hangi ifadeye değişken olarak x dedin?*
- (8) S: *Erkek öğrenci sayısına x derim.*

Öğrenci kağıttaki çözüm de kız öğrenci sayısına x demesine rağmen mülakat sırasında erkek öğrencilerin sayısını x cinsinden ifade etmede başarısız olmuştur (7. satır).

- (9) T: *Daha önce bu tip bir soru çözmüş müydün?*
- (10) S: *Evet*
- (11) T: *Peki bu problemin çözümüne nasıl başlarsın?*
- (12) S: *Kız öğrenci sayısına x dersek erkek öğrenci sayısı bunun 3 katının 5 eksiği oluyor.*

Öğrenci daha önce bilinmeyen olarak  $x$  dediği erkek öğrenci sayısını değiştirmiş ve kız öğrenci sayısına  $x$  diyerek erkek öğrenci sayısını kız öğrenci sayısı cinsinden ( yani  $x$  cinsinden) ifade edebilmiştir.

(13) T: Bu probleme ait denklemi yazarken neye dikkat edersin, neyi göz önünde bulunduruyorsun?

(14) S: Kız öğrenci sayısını bulabilmek için erkek öğrenci sayısının kız öğrenci sayısının kaç katı olduğuna dikkat etmek lazım. Kız öğrencilere  $x$  diyeceğiz.

$$3x + 4x - 5 = 47$$

Erkek öğrenci sayısını kız öğrenci sayısı cinsinden yazma konusunda öğrenci  $3x$  değerini yazmış daha sonra  $x$  i yazmış ve 5 çıkarmıştır. Denklemi kurulmasında öğrenci yapısal bir hata yapmıştır. Ancak bu hata problemin sonucunda rol oynamamıştır.

(15) T: Neyi soruyor problemde?

(16) S: Kız öğrencilerin sayısını.

(17) T: Peki sen bu sorunun çözümünde  $x$  i belirteceğin ifadeyi nasıl belirliyorsun?

(18) S: Kız öğrenci sayısına  $x$  demem lazım. Erkek öğrencilerde  $x$  in 3 katının 5 eksiği olur.

(19) T: Bunu ifade ettikten sonra problemin çözümünde ne yaparsın?

(20) S: Erkek öğrencilerle kız öğrencilerin toplamını 47 ye eşitlerim.

(21) T: Denklemi çözerken nasıl bir strateji uygularsın?

(22) S: Bilinenlerle bilinmeyenleri eşitliğin farklı taraflarında toplarım. Eşitliğin bir tarafından diğer tarafına sayılar “+” veya “-” olarak geçer. Ona göre çözüyorum.

(23) T: Denklemi çözdüğünde bulduğun  $x$  değeri hangi sayıdır?

(24) S: Kız öğrenciler.

$$\begin{aligned} 3x + 4x - 5 &= 47 \\ 4x + 3x - 5 &= 47 \\ 4x + 3x &= 47 + 5 \\ 7x &= 52 \\ x &= \frac{52}{7} \\ x &= 13 \end{aligned}$$

Öğrenci verilen problemdeki sözel ifadeyi matematik diline çevirirken diğer arkadaşlarını yaptığı gibi stratejisini sıraya göre yazmak olarak belirlemiş. Ancak denklemi yazarken kullandığı terimler bu sıralamada estetiği bozmaktadır. Toplama işleminin

değişme özeliğinden dolayı öğrencinin yapmış olduğu bu estetik hata sonucun bulunmasını değiştirmemektedir.

(25) T: Sorunun çözümünden sonra problemin doğru olup olmadığını nasıl kontrol edersin?

(26) S: İşte hocam sorun orda. Bulduğum sonucun doğru olup olmadığını kontrol edemem.

Bu şekilde bilinmeyenlerin bir tarafta olduğu basit tarzda bir bilinmeyenli denklem kurularak çözülebilecek bir sayı problemini matematik diline dönüştürmede çok büyük güçlük çekmeyen öğrenci denklem çözümünü de doğru bir şekilde yapmıştır. Ancak çözülen denklemin doğruluğunu sağlamada kendisini yeterli bulmayan öğrenci bulduğu sonucun doğru olup olmadığını kontrol edebilme davranışını kazanamamıştır.

**İsmail;**

Öğrenci birinci soruyu okuduktan sonra problem hakkında ne düşündüğü, çözüm için gerekli denklemini nasıl kurduğu hakkında öğrenciye sorular yöneltilerek klinik mülakata başlanır.

(1) T: Nasıl bir problem?

(2) İ: Sayı problemi.

(3) T: Daha önce bu problemlere benzer problemler çözdün mü?

(4) İ: Çözdüm.

(5) T: Nasıl çözülür bu problemler?

(6) İ: Verilenleri sırayla denklemde yazıyorum.

(7) T: Bu soruda bilinmeyeni hangi ifadeye vereceğini nasıl belirledin?

(8) İ: Denklemde bilinmeyene  $x$  dedim.

(9) T: Burada erkek öğrenci sayısı da kız öğrenci sayısı da bilinmiyor. Hangisine  $x$  deyeceğini nasıl belirliyorsun?

(10) İ: İkisine de  $x$  söyleyebiliriz.

(11) T: Bu problemde hangisine  $x$  demiştin?

(12) İ: İkisine de  $x$  derim.

Öğrenciye probleme ait denklemini nasıl kurduğu sorusu yöneltildiğinde sınav kağıdında yazdığı denklemden sanki habersizcesine kafasındaki denklem kurma yöntemini ifade etmeye çalışmıştır. Öğrenciden “Her ikisine de  $x$  derim” cevabının alınmasının sebebi öğrencinin bilinmeyene  $x$  deme düşüncesinden gelmektedir.

(13) T: İkisinin toplamını yani  $x$ ,  $x$  daha  $2x$  eder. Bu şekilde mi soruyu çözdün.

(14) İ: Hayır.

(15) T: Nasıl yazdın bu denklemi, bana bunu anlatır mısın?

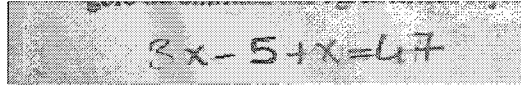
(16) İ: Burada 3 katının 5 eksiği demiş. Birine  $x$  dedim. Diğeri  $3x - 5$  oldu.

(17) T: Bu denklemdeki  $x$  neyi belirtiyor peki?

(18) İ: Kız öğrencilerin sayısını.

(19) T: Sonra ne yaptın?

(20) İ: Bunları toplayarak 47 ye eşitledim. denklemi çözdüm.



$$3x - 5 + x = 47$$

(21) T: Denklemi kurduktan sonra çözümünü nasıl yaptın? Nasıl bir strateji izledin?

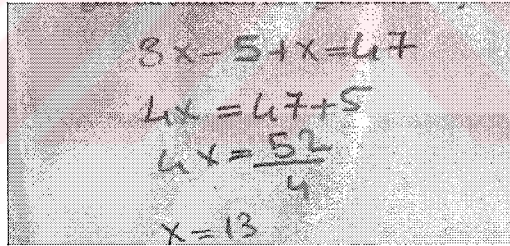
(22) İ: Bilinenleri bir tarafta bilinmeyenleri bir tarafa topladım.

(23) T: Söylediğin işlemleri yaparken neye dikkat ediyorsun?

(24) İ: Bir taraftan diğer tarafa artılar eksi olarak eksiler artı olarak geçer.

(25) T: Denklemi bu şekilde çözüyorsun yani?

(26) İ: Birde en sonunda  $x$  in önündeki sayıyı karşı tarafa bölü olarak atıyorum.



$$\begin{aligned} 3x - 5 + x &= 47 \\ 4x &= 47 + 5 \\ 4x &= 52 \\ x &= 13 \end{aligned}$$

(27) T: Çözdüğün problemde bulduğun sonucu kontrol eder misin peki?

(28) İ: Genelde etmem. Aklıma gelmez.

Öğrenci, bilinmeyenlerin eşitliğin bir tarafında yer aldığı denklem tipini çözmede başarılıdır. Kurulmuş bir denklemin çözülmesinde yapılması gereken işlemleri sırayla yapmış ve denklemi çözmüştür.

### Sümeyye;

Sümeyye birinci problemi sesli bir şekilde okuduktan sonra problem üzerinde bu problemin hangi problem tipine girdiği, denklemi kurmada neler düşünüldüğü, çözümün nasıl yapıldığı soruları yöneltilerek klinik mülakata başlanır.

(1) T: Ne tip bir problem bu?

(2) S: Yok etme metoduyla çözülecek bir problem.

(3) T: Hayır hayır. O iki bilinmeyenli denklemlerde çözme yöntemi. Problem çeşitleri vardı hani? Hangisinin sınıfına girebilir bu soru?

(4) S: Bir bilinmeyenli bir sayı problemi.

Öğrenci mülakata başlamanın verdiği heyecanla ilk soruya hatalı yanıt vermiştir. Kendisine rahat olması gerektiği, yapılan görüşmenin notla değerlendirilmeyeceği ve verdiği yanıtların gerçek düşünceleri olması gerektiği hatırlatılarak mülakata devam edildi.

(5) T: Peki daha önce bu tarz sorular çözmüş müydün?

(6) S: Evet çözmüştük.

(7) T: Problemin çözümüne başlarken denklemi nasıl kurdun?

(8) S: Önce katı dediği için parantez içine almayacağız.

(9) T: Neyi ne şekilde paranteze alıyorsun? Bilinmeyene hangi değeri verdin ve neyi bilinmeyene verdiğin harfle adlandırdın?

(10) S: Bilinmeyene x dedim. Kız öğrenci sayısı bilinmiyor ona x dedim.

(11) T: Erkek öğrenci sayısı da bilinmiyor. Neden erkek öğrenci sayısına x demedin?

(12) S: Ama soruda onu sormuyor, kız öğrenci sayısını soruyor.

Öğrenci bu tip birinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklem yardımıyla çözülebilecek problemde sorulan değere x deme davranışı oluşmuş. Bu davranış ona, bazen probleme ait denklemin kurulmasında bazen de kurulan denklemin çözümünde veya cevabın bulunmasında dezavantajlı bir durumun oluşmasına neden olabilir.

(13) T: Peki denklemi nasıl kurdun?

(14) S: 3 katının 5 eksiği dediği için  $3x - 5$  yazdım.

(15) T: Sonra?

(16) S: Bunları topladım.

(17) T: Neden topladın?

(18) S: Sınıftaki öğrencilerin sayısı 47 olduğundan topladım.



$$3x - 5 + x = 47$$

Öğrenci problemde verilen metni denkleme dönüştürmede başarılı olmuştur. Sayı ifadelerini rahat bir şekilde yazabilen öğrenci kurduğu denklemi ifade etmede biraz zorluk çekmiştir.

(19) T: Denklemi nasıl çözdün?

(20) S: Bilinmeyenleri bu tarafa (sol tarafı göstererek) toplarım öyle çözerim.

$$\begin{aligned}
 3x - 5 + x &= 67 \\
 3x + x &= 67 + 5 \\
 4x &= 72 \\
 x &= 18
 \end{aligned}$$

(21) T: Eşitliğin sağına soluna geçirirken sayılarda nasıl bir değişme oluyor? Bunlarda problem yaşıyor musun?

(22) S: Bazen yaşıyorum. Bu denklem kolay. Bazen denklemler karışık oluyor. O zaman hata yapıyorum.

Bilinmeyenlerin eşitliğin bir tarafında toplanmış olduğu birinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklem yardımıyla çözülebilecek bir probleme ait denklemi öğrenci kurmuş ve kurduğu denklemin çözümünü doğru yapmıştır. Öğrencide denklemleri çözerken bilinmeyenleri sol tarafta toplamak gibi bir kanı oluşmuş. Temelinde yanlış olmayan bu şartlanma denklem çözerken çeşitli işlem hatalarını da beraberinde getirebilmektedir.

Ümran,

Öğrenci birinci problemi sesli bir şekilde okuduktan sonra probleminden ne anladığı, nasıl çözüleceği gibi sorular yöneltilerek klinik mülakata başlanır.

- (1) T: Ne tür bir soru bu?
- (2) Ü: Sayı sorusu.
- (3) T: Daha önce bu tip sorular çözdün mü?
- (4) Ü: Evet arkadaşlarımla ve sınıfta çözdüm.
- (5) T: Ne anlıyorsun bu sorudan?
- (6) Ü: 3 katının 5 eksiği diye bilgi vermiş. Sınıftaki kızların sayısını soruyor?
- (7) T: Sorunun çözümüne nasıl başlarsın?
- (8) Ü: 3 katının 5 eksiği dediği için  $x$  in yanına önce 3 yazarız, 5 eksik dediği için de 5 çıkartırız. Yani  $3x - 5$  olur.
- (9) T: Parantez olacak mı?
- (10) Ü: Parantez olmayacak.
- (11) T: Neden olmayacak?
- (12) Ü: Önce katı dediği için paranteze gerek yok.

Öğrencide parantez kullanma kavramı gelişmiştir. Söylenen işlemleri sıraya göre yapması onun parantezi kullanıp kullanmayacağı konusunda fikir sahibi olmasına yardımcı olmaktadır.

(13) T: Kurduğun denklemde yazdığın  $3x - 5$  ve  $x$  nedir? Neyi ifade ediyor bunlar?

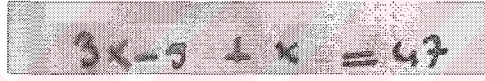
(14) Ü: Kız ve erkek öğrenci sayılarını.

(15) T: Hangisi kız öğrenci sayısı?

(16) Ü: Sorduğuna  $x$  diyeceğimiz için  $x$  kızların sayısını ifade ediyor. Erkeklerin sayısı da  $3x - 5$ .

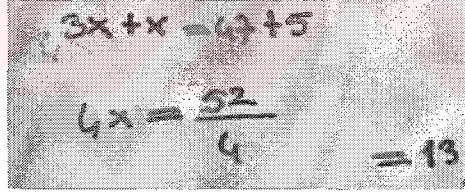
Öğrencinin problemi çözme stratejisi, problemde sorulan ifadeye  $x$  deme olarak oluşmuş. Problem çözmede öğrencinin problem çözme becerisinin gelişmesinde iyi bir yöntemdir. Ancak her problemi çözmek için bu yöntem iyi bir yöntem olmayabilir. Bu davranış öğrencide zamanla değişip gelişecektir.

(17) T: Nasıl çözdün bu denklemi?



$$3x - 5 + x = 47$$

(18) Ü:  $x$  li terimleri sol tarafa bıraktım. Sayıları sağ tarafa attım.  $-5$  karşıya  $+5$  olarak geçer,  $47 + 5$  olur. Bu tarafa  $3x + x$  kaldı. Bunlarda  $4x$  eder.  $52$  yi  $4$  e bölersek  $13$  çıkar. Yani  $x$   $13$  olmuş olur.



$$\begin{aligned} 3x + x &= 47 + 5 \\ 4x &= \frac{52}{4} \\ &= 13 \end{aligned}$$

(19) T: Nedir bulduğun değer?

(20) Ü:  $x$  tir.

(21) T: Yani neyi ifade ediyor?

(22) Ü: Kız öğrencilerin sayısını

(23) T: Bulduğun sonucun doğru olup olmadığını nasıl kontrol edersin?

(24) Ü: (Bir müddet düşünür) Doğruluğunu nasıl göstereceğimi bilmiyorum.

Aşağıdaki tabloda tanı testi uygulanan sınıfın tüm öğrencilerinin sınıf problemine verdikleri cevap türleri, yüzdeleri ve frekansları verilmiştir.

Tablo 3. Tanı testindeki sınıf problemine öğrencilerin verdikleri cevapların frekans ve yüzdesi

| Doğru Çözümler    | %     | f  | Eksik Çözümler    | %     | f |
|-------------------|-------|----|-------------------|-------|---|
| $3x - 5 + x = 47$ | 66.66 | 12 | $3x - 5 = 47$     | 16.66 | 3 |
| $x + 3x - 5 = 47$ | 5.55  | 1  | $3x - x - 5 = 47$ | 5.55  | 1 |
| $3x + x - 5 = 47$ | 5.55  | 1  |                   |       |   |

Mülakatlarda, öğrencilerin birinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklem yardımıyla çözülebilecek bir problemin denklemini kurmada genel olarak zorluk çekmedikleri görülmüştür. Bu problemin denklemi bilinmeyenin eşitliğin bir tarafında yer aldığı denklem türüne girmektedir. Öğrencilerin aynı cins bilinmeyenle cebirsel işlemler yapmasında bir eksiklik görülmemiştir. Öğrenciler çok kolay bir şekilde bilinmeyenleri toplayabilmiştir. Hata olarak yapılacağı düşünülen  $3x$  ve  $x$  terimlerinin toplanmasında mülakat yapılan öğrencilerin hiç birisi hata yapmamıştır. Öğrenciler genelde  $x$  ile katsayısı 1 olmayan başka bir  $x$ 'li terimi toplarken hata yapmaktadırlar. Öğrenciler kurdukları denklemleri çözmede bilinenlerin eşitliğin bir tarafında bilinmeyenlerin eşitliğin diğer tarafında toplama stratejisini kullanmışlardır. Yukarıdaki tablodan görüldüğü gibi öğrenciler bu probleme ait denklemi kurmada %66.66 oranında başarılıdırlar. Bununla beraber denklemi doğru kuran öğrencilerin hepsi denklemi çözmede aynı başarı oranına sahip değildir. Birkaç öğrenci denklem çözümü sırasında cebirsel hatalar yapmışlardır. bu hatalar -5 sayısını eşitliğin diğer tarafına geçirirken işaret değiştirmeme ve  $3x$  ile  $x$  terimlerinin toplamında yapılan hatalar olarak gösterilebilir. Sınıftaki öğrencilerden üç tanesi denklemi kurarken kız öğrenci sayılarına denklemde yer vermeyi unutmuştur. Yani denklemi  $3x - 5 = 47$  şeklinde kurmuşlardır. Bu şekilde yanlış kurdukları denklemleri öğrenciler doğru çözmüşlerdir. Mülakat yapılan öğrencilerden Sema, denklemi  $3x + x - 5 = 47$  şeklinde yazmıştır. Doğru yazım şekli  $3x - 5 + x = 47$  olacaktı. Çözümde sonuç değişmediği için öğrencinin çözümü doğru kabul edilmiştir. Diğer bir eksik çözüm ise denklemin  $3x - x - 5 = 47$  şeklinde kurulmasıdır. Öğrenci muhtemelen 5 çıkartacağına dikkat etmeye çalışırken  $x$  li terimi de çıkartmıştır.

Genel olarak öğrenciler bilinmeyen bir tarafta bulunacağı BDBBD yardımıyla çözülebilecek problemin sözel ifadesini matematik diline çevirmede başarılı olmuşlardır. Denklemi doğru kuran öğrencilerden büyük bir kısmı da denklemi doğru çözmüştür.

### 3.2.2. Sayı Problemi

3 fazlasının 2 katı ile 2 eksiğinin 3 katının toplamı 35 olan sayıyı bulabilir misiniz?

**Ömer;**

Ömer problemi sesli bir şekilde okuduktan sonra bu tip bir probleme ait denklemi nasıl yazacağı sorusuyla mülakata devam edildi.

(1) **T:** Bu probleme ait denklemi yazarken nasıl başlıyorsun, neye dikkat ediyorsun?

(2) **Ö:** Burada, ayrı ayrı durumlardan bahsetmiş. Bazen 3 fazlası, 2 katı diyor. 3 fazlasının 2 katı demiyor yani o zaman bu ifadelere dikkat ediyorum.

(3) **T:** Peki nasıl yazarsın denklemi?

(4) **Ö:** Sayıya  $x$  derim. 3 fazlasının iki katı dediği için parantez içinde  $x+3$  ü 2 ile çarparım; diğerinde de 2 eksiğinin 3 katı dediği için  $x-2$  yi 3 ile çarparım.

(5) **T:** Evet.

(6) **Ö:** Yazdığım ifadeleri toplayıp 35 e eşitledim.

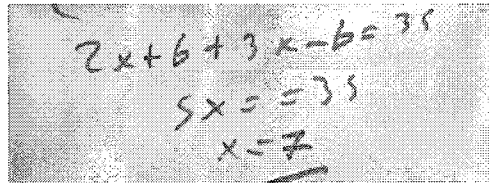


$$(x+3) \cdot 2 + (x-2) \cdot 3 = 35$$

(7) **T:** Denklemi nasıl çözersin?

(8) **Ö:** Önce parantezleri açarım sonra denklemi çözerim.

Öğrenci ikinci sorudaki olan tarzda verilen sayı ifadelerini matematik diline çevirmede oldukça başarılıdır. Buda geçmiş hayatında (bir yıl önceki sayı ifadelerini matematik diline aktarmada) bu ögenin öğrenilmesi kesin doğrularla sağlanmış ve bol örneklerle desteklenmiştir. Öğrenci parantezi nerde kullanacağını tam olarak ifade edemezse de sezgisel olarak parantezin kullanımında bir eksiklik bulunmaktadır.



$$\begin{aligned} 2x + 6 + 3x - 6 &= 35 \\ 5x &= 35 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

(9) **T:** Bu soruyu başka bir yolla çözebilir misin?

(10) **Ö:** --- (Cevap yok)

(11) **T:** Kurduğün denklemin doğru olduğundan emin misin?

(12) **Ö:** Denklemden çoğu zaman emin oluyorum da işlem arasında hata yapabiliyorum, yaptığımdan kuşkulaniyorum bazen.

(13) **T:** Sence denklem kurmakla denklem çözmek aynı anlama mı gelir?

(14) **Ö:** Tabi ki aynı anlama gelmez.

(15) **T:** Hangisi daha zor?

(16) **Ö:** O yönden, denklem kurmak daha zor.

İkinci problemdeki sayı problemi, bilinmeyenlerin eşitliğin bir tarafında yer aldığı ama bilinmeyenlerin (parametrelerin) parantezli ifadeler içinde de olduğu bir problem. Öğrenci bu tip bir problemi çok rahat bir şekilde denklemlleştirerek ve parantezleri açarak çözmüştür. Bu da problemde parantezin yer alması ve bilinmeyenlerin eşitliğin bir tarafında yer aldığı denklemi çözmede öğrenci için bir zorluk teşekkül etmediğini gösterir.

**Ali;**

Ali 2. soruyu sesli bir şekilde okuduktan sonra ne tür bir problem olduğu, bu tip bir probleme ait denklemi nasıl yazacağı sorularıyla mülakata devam edildi.

(1) **T:** Hangi problem tipine giriyor bu soru?

(2) **A:** Sayı problemi

(3) **T:** Daha önce böyle problemler çözdün mü?

(4) **A:** Çözdüm.

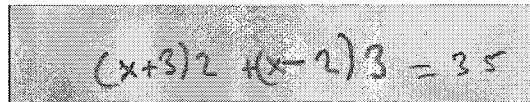
(5) **T:** Bu problemin çözümüne nasıl başlarsın?

(6) **A:** 3 fazlasının 2 katı dediği için, en başta toplama işlemi yapacağız. Bu yüzden paranteze almamız lazım. Aynen buradaki gibi diğerinde de önce çıkarma işlemi yapacağız sonra paranteze alıp çarpma işlemi yapacağız.

Yukarıda geçen diyalog sırasında öğrenci kendi çözümünü göstererek denklemi kurarken yapacağı işlemleri problemde verilen bilgilerin sırasına göre olması gerektiğini belirtmeye çalışmıştır. Yani denklem kurarken parantezi nasıl kullanacağını öğrenci farkındadır.

(7) **T:** Denklemi kurdun. Kurduğun denklemi nasıl çözersin?

(8) **A:** Önce parantezleri açarım. Sonra denklemi çözerim.



$$(x+3)2 + (x-2)3 = 35$$

Öğrenci bu soruda denklemi yazarken parantezleri nasıl ve ne zaman kullanacağını tam olarak ifade etmiştir. Bu da öğrencinin denklem kurmada parantezi kullanma becerisinin geliştiğini onun bu konuda alıştırma ve tekrar türünden bol örnek yaptığını göstermektedir.

(9) **T:** Denklemi çözdükten sonra sonucun doğru olduğunu kontrol eder misin?

(10) **A:** Bazen. Emin olmadığım sorularda bocalarsam veya zorsa kontrol ederim sonucu ama değilse geçerim.

$$\begin{aligned}
 2x+6+3x-6 &= 35 \\
 5x &= 35 \\
 x &= 7
 \end{aligned}$$

Bilinmeyenlerin eşitliğin bir tarafında ama parantezler içinde verilmiş olan birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi öğrencinin kurması ve çözmesinde bir sorun çıkmamıştır. Parantez içeren denklemlerin çözümünde sınıf içi gözlemlerde de not edilen önemli bir eksiklik parantezin önündeki “-” işaretinin parantezin tamamına dağıtılmamasıdır. Bu ilk başlarda dikkat toplamayla ilgili olmasıyla birlikte daha sonraları bir alışkanlık bir davranış şekline dönüşebilmektedir.

#### Sema;

Sema sayı problemini hızlı bir şekilde okuduktan sonra problemin hangi soru tipi sınıfına girdiği, probleminden ne anladığı sorularıyla mülakata devam edildi.

(1) T: Bu soru hangi problem tipine giriyor?

(2) S: Bir bilinmeyenli bir denklem kurularak çözebileceğimiz bir soru.

(3) T: Daha önce böyle problemler çözmüş müydün?

(4) S: Evet çözdüm. Sınıfta da çözdük.

(5) T: Bu problemin denklemini yazarken neyi göz önünde bulunduruyorsun?

(6) S: Neyle toplayacağımıza, hangi sayıların çarpım durumunda olup olmadığına dikkat ediyorum. Önce 3 fazlası demiş. Sayıya  $x$  dedim. 3 fazlası  $x+3$  tür. Önce fazla sonra kat dediği için  $x+3$  ü parantez içine aldım ve 2 ile çarptım. Ötekinde de önce eksik demiş.  $x-2$  yazdıktan sonra paranteze alarak 3 ile çarptım.

$$2(x+3) + 3(x-2) = 35$$

(7) T: Daha sonra ne yaptın? Denklemi nasıl çözdün?

(8) S: Parantezleri açarım sonra çözerim.

$$2x+6+3x-6=35$$

(9) T: Bulduğun cevabın doğruluğunu nasıl kontrol edersin?

(10) S: 3 toparım 2 ile çarparım. Gene 2 çıkartırım 3 ile çarparım. Bulduğum değerleri toparım. 35 oluyorsa doğru bulmuşumdur.

$$5x = 35 + 6 - 6$$

$$5x = 35$$

$$x = 7$$

Sorunun çözümünün devamında bilinenleri bir tarafa toplayan öğrenci sonucu doğru bir şekilde bulmuştur. Hemen üstte görülen öğrenci çözümünde  $5x = \frac{35}{5}$  ifadesi öğrencide denklem çözme sırasında uyulması gereken estetiklere uymayan bir ifadedir. Durumu bu şekilde algılayan öğrenci x değerini yazmada aynı hatayı yapmamıştır.

Bilinmeyen parantezler içinde ve eşitliğin bir tarafında olduğu birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemlerde Sema'nın parantezleri açması ve denklemini çözmesinde bir sorun görülmemiştir. Sayı problemlerinde bulduğu sonucu kontrol etmede bir güçlük yaşamayan öğrenci birinci soruda bu kontrolü yapmada başarısız olmuştur. Bunun sebebi olarak, öğrencinin bu tarzda karşılaştığı problemlerde önceki öğrenmelerinde cevabı kontrol etme davranışını kazanamaması gösterilebilir.

**İsmail;**

İsmail sayı problemini sesli bir şekilde okuduktan sonra İsmail'e soru tipi ve çözüm üzerindeki görüşleri hakkında sorular yöneltilerek mülakata devam edilir.

(1) T: Ne tür bir problem?

(2) İ: Sayı problemi.

(3) T: Hangi tür denklemle ifade edersin bu sayı problemini?

(4) İ: Bir bilinmeyenli denklemle çözebiliriz.

(5) T: Bu soruya ait denklemini yazarken nasıl davrandın, nelere dikkat ettin?

(6) İ: Soruda verilenleri sırayla dikkate alarak 3 fazlasının 2 katı dediği için önce x ile 3 ü topladım sonra paranteze alıp 2 ile çarptım.

$$2(x+3) + 3(x-2) = 35$$

(7) T: Neden paranteze aldın?

(8) İ: İki katı demiş bir de x+3. Paranteze alıp çarpacağız.

(9) T: Peki 3 katının 2 fazlası deseydi gene paranteze alacak mıydın?

(10) İ: Evet alacaktık. İkili ifade var.

Öğrenci problemde paranteze alacağı ifadeyi ikili ifade diye adlandırmaktadır. İkili ifade sonrası gelen her terimi paranteze almayı düşünmektedir. Bu öğrenmede öğrencinin bilgiyi kendisinin yapılandırıldığını araştırmacı fark etmiştir.

(11) T: Bundan sonra yaptığın işlem nedir?

(12) İ: Denklemleri yazdıktan sonra çözdüm.

(13) T: Nasıl çözdün?

(14) İ: Çarpmanın toplama üzerindeki dağılma özeliğini kullanarak düzgün hale getirdim denklemi.

$$2x + 6 + 3x - 6 = 35$$

(15) T: Sonra?

(16) İ: Bilinenleri bir tarafa bilinmeyenleri diğer tarafa toplayarak çözdüm gene.

$$\begin{aligned} 2x + 3x &= 35 - 6 + 6 \\ 5x &= \frac{35}{5} \\ x &= 7 \end{aligned}$$

(17) T: Cevabı kontrol ettik mi?

(18) İ: Edebilirim ama burada kontrol etmemiştim.

Öğrenci problemi çözdükten sonra cevabı kontrol etmemiş ancak cevabın doğru mu yoksa yanlış mı olduğunun sağlamasını nasıl yapabileceğini söylemiştir. Öğrenci parantezleri açtıktan sonra denklemi bilinen standart forma getirmiştir. Bundan sonra denklemi en sade hale getirmeden söylediği çözüm yöntemini uygulamıştır. Yani eşitliğin sol tarafında ki +6 ve -6 sayıların toplamını sıfır diye almamış, bu sayıları eşitliğin diğer tarafına işaretlerini değiştirerek geçirmiş ve çözüme bu şekilde devam etmiştir.

**Sümeyye;**

Sümeyye ikinci problemi( sayı problemini) sesli bir şekilde okuduktan sonra problemin türü ve problemi çözme yolu üzerine sorular yöneltilerek mülakata devam edilir.

(1) T: Ne problemi bu soru?

(2) S: Sayı problemi.

(3) T: Bu denklemi nasıl yazdın?

(4) S: Katı dediğine göre;  $(x+3)$  ifadesini parantez içine alıyoruz.

(5) T: Niye paranteze aldın?

(6) S: Önce katı diyince parantez içine almıyoruz. Fazlasından sonra katı diyince parantez içine alıyoruz.

Öğrenci sayı ifadelerini yazarken verilen işlemlerin sırasına göre parantez kullanma veya kullanmama alışkanlığını kendine ait bir yöntem keşfederek buluştur. Bu onda anlamlı öğrenme yaşantısı oluşturmuştur.

(23) T: Denklemi yazdın. Bundan sonra hangi işlemi yapmışsın?

$$2(x+3) + 3(x-2) = 35$$

(24) S: Önce parantezleri açtım sonra bilinenleri bir tarafa bilinmeyenleri bir tarafa topladım gene.

(25) T: Denklemi çözdün bir cevap buldun. Bu cevabın doğruluğunu kontrol eder misin?

(26) S: Ederim.

$$\begin{aligned} 2x+6 + 3x-6 &= 35 \\ 2x+3x &= 35-6+6 \\ 5x &= \frac{35}{5} \\ &= 7 // \end{aligned}$$

(27) T: Bu soruda bulduğun cevabın doğru olup olmadığını nasıl kontrol edersin?

(28) S: Sayıyı yerine koyarsak buluruz.

Öğrenci problemin çözümüne yardımcı olacak denklemin kurulumunu ve denklemin çözümünü doğru bir şekilde yapmayı başarmıştır. Denklemden bulunan çözümün doğruluğunun gösterimini de doğru bir şekilde ifade eden Sümeyye denklem çözümünde pratik yollar (sayıları toplayıp eşitliğin diğer tarafına o şekilde atmak gibi) kullanmada yeterli görülmemiştir.

**Ümran;**

Öğrenci problemi sesli bir şekilde okuduktan sonra problemin türü ve problemde ne anladığı soruları yöneltilerek mülakata devam edilir.

(1) T: Hangi soru tipine giriyor bu problem?

(2) Ü: Sayı problemi

(3) T: Daha önce bu tip sorular çözdün mü?

(4) Ü: Çözmüştüm.

(5) T: Bu probleme ait denklemi nasıl yazdın?

(6) Ü: 3 fazla demiş, bunu için  $x+3$  yazdım; sonra 2 katı demiş, bunu da parantezin soluna çarpı olarak yazdım.

(7) T: Neden parantez koydun?

(8) Ü: Önce fazla sonra kat dediği için parantez koyuluyor.

Öğrenci sözel ifadeyi harfli ifadeye çevirirken parantezi nerede kullanması gerektiğini doğru bir şekilde ifade etmiştir.

(9) T: Daha sonra ne yaptın?

(10) Ü: Gene bu sefer 2 eksik dediği için  $x-2$  yazdım sonra 3 katı dediği için parantezin dışına 3 yazdım ve 35 e eşitledim.

$$2(x+3) + 3(x-2) = 35$$

Problemlerin; alıştırma, tekrar gibi sınıfları vardır. Ümran bu şekilde sayı problemlerinden epey bir miktarda çözmüş olacak ki bu tip bir problemin anlaşılması ona güç gelmemekte ve denklemini kurarak çözmesi onu zorlamamaktadır.

(11) T: Kurduğun denklemini nasıl çözdün peki?

(12) Ü: Parantezleri dağıttım. Birinciye açarsak  $2x+6$  olur. İkinciye açarsak  $3x-6$  olur.

$$2x+6 + 3x-6 = 35$$

(13) T: Sonra ne yaptın?

(14) Ü: Bilinmeyenler bu tarafta bilinenleri diğer tarafa attım. -6 karşıya +6 olarak +6 da karşıya -6 olarak geçer.  $2x+3x$ ,  $5x$  e eşittir.  $35-6+6=35$  olur.  $5x=35$  olur.

$$\begin{aligned} 2x + 3x &= 35 - 6 + 6 \\ 5x &= \frac{35}{5} \\ &= 7 \end{aligned}$$

Bilinmeyenlerin eşitliğin bir tarafında toplandığı, birinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklem yardımıyla çözülebilecek problemin denklemini öğrenciler genel doğru bir şekilde yazmıştır. Mülakat yapılan öğrencilere denklemini nasıl çözdükleri sorusu yöneltildiğinde öğrenciler,  $x$ 'li ifadeleri bir tarafta toplayarak  $x$ 'li terimi yalnız bıraktıklarını, rakamları diğer tarafa atarak çözdükleri şeklinde yanıt vermişlerdir. Öğrencilerde genelde denklem çözümünde parantez açıldıktan sonra eşitliğin sol tarafında yer alan +6 ve -6 sayılarını eşitliğin sol tarafında toplamayıp (sonucun sıfır olduğu), genel

olarak eşitliğin diğer tarafına işaretleri değiştirerek atmaları ve aritmetik işlemleri bundan sonra yapmaları öğrencilerin denklemi çözmedeki izledikleri stratejinin doğru olduğunu ancak işlem kolaylığına kaçmadıklarını belirtmektedir.

Aşağıdaki tabloda tanı testi uygulanan sınıfın tüm öğrencilerinin sayı problemine verdikleri cevap türleri, yüzdeleri ve frekansları verilmiştir.

Tablo 4. Tanı testindeki sayı problemine öğrencilerin verdikleri cevapların frekans ve yüzdesi

| Doğru Çözümler       | %     | f | Eksik Çözümler     | %     | f |
|----------------------|-------|---|--------------------|-------|---|
| $2(x+3)+3(x-2)=35$   | 33.33 | 6 | $2(3+x)+3(2-x)=35$ | 11.11 | 2 |
| $(x+3).2+(x-2).3=35$ | 22.22 | 4 | $3(x+2)+2(x-3)=35$ | 5.55  | 1 |
|                      |       |   | $2(x+3)-2=35$      | 5.55  | 1 |
|                      |       |   | $2(x+3)+2(x+3)=35$ | 5.55  | 1 |
|                      |       |   | Boş cevap          | 16.66 | 3 |

Öğrencilerin yaptıkları eksik çözümlerde hatalar çeşitlilik göstermekte ve bunlar genel olarak problem metninin doğru anlaşılmasından kaynaklanmaktadır. Polya'nın problem çözme aşamalarından ilki olan problemi anlama basamağında hata yapan öğrenciler kurdukları eksik veya yanlış denklemleri çözmede başarısız olmuşlardır. Probleme ait denklemin kurulumunda iki öğrenci  $x$  bilinmeyen değerini kullanmada hata yapmıştır. Bu onların denklem kurmada plan hazırlama basamağında güçlük çektiklerini veya yanılgıya düştüklerini göstermektedir. Bu problemi sınıf genelinde 3 öğrenci boş bırakmıştır.

### 3.2.3. Yaş Problemi

*“Bir baba 46, oğlu 8 yaşındadır. Kaç yıl sonra babanın yaşı oğlunun yaşının üç katı olur?” problemini nasıl çözersiniz?*

**Ömer;**

Ömer'e 3 soruyu sesli bir şekilde okumasını söyledikten sonra hangi problem tipi olduğu sorusuyla mülakata devam edildi.

(Ömer soruyu sesli bir şekilde okur.)

(1) **T:** Hangi problem tipine giriyor bu soru Ömer?

(2) **Ö:** Yaş.

(3) **T:** Daha önce bu tip sorulardan çözmüş müydün?

(4) **Ö:** Evet.

(5) **T:** Bu problemin çözümüne nasıl başlarsın? Problemi çözerken nelere dikkat edersin?

(6) **Ö:** Önce şeye dikkat ederim: kaç yıl önce, kaç yıl sonra demiş ona dikkat ederim ve ona göre  $+x$  veya  $-x$  yazarım. Ondan sonra kaç çocuk olduğunu mesela 3 çocuğun yaşları toplamı 8 derse  $x$  yıl sonra yaşları toplamı  $3x$  artar. Ona dikkat ediyorum .

(7) **T:** Evet

(8) **Ö:** Daha sonra denklemi çözüyorum.

(9) **T:** Basitte olsa sorunun cevabını kontrol eder misin genelde? Yani bu sende bir alışkanlık haline dönüştü mü yoksa denklemi çözüp geçer misin?

(10) **Ö:** Daha çok denklemi çözüp geçerim.

$$\begin{aligned} 4b + x &= (8 + x)^2 \\ 4b - x &= 24 + 3x \\ \hline 22 &= 2x \\ x &= 11 \end{aligned}$$

Değişkenin eğitliğin her iki tarafında yer aldığı ve parantezli ifadenin bulunduğu bir yaş probleminde öğrencinin denklemi kurması ve kurduğu denklemi çözmesi çok zor olmamıştır. Basit düzeyde denklem kurma problem tipinin çok önemli olmadığı, anlatımın açık ve sade olduğu problemlerde öğrencinin denklem kurabilme becerisinin problem tipinden bağımsız olduğu sınıf içi gözlemlerinde de tespit edilmiştir. Okuduğunu anlama becerisi ve dikkat gerektiren bu problemin denkleminde öğrenci parantezi açtıktan sonra denklem çözme kurallarıyla denklemi başarılı bir şekilde çözmüştür.

**Ali;**

Ali yaş problemini sesli bir şekilde okuduktan sonra, sorunun hangi problem tipi olduğu sorusuyla mülakata devam edildi.

(1) **T:** Hangi problem tipine giriyor?

(2) **A:** Yaş problemi.

(3) **T:** Daha önce bu tip problemlerden çözdün mü?

(4) **A:** Evet. Çözdüm.

(5) **T:** Ne tür denklem kurarak çözersin peki bu soruyu.

(6) A: Bir bilinmeyenli bir denklemle.

(7) T: Probleme ait denklemi yazarken neye dikkat ediyorsun? Denklemi nasıl yazıyorsun?

(8) A: Soruda babanın 46, çocuğun 8 yaşında olduğunu vermiş. En başta onları yazdım. Kaç yıl sonra demiş. ne olduğunu bilmediğimiz için buna  $x$  dedim. Babanın yaşı oğlunun 3 katı olacak demiş. Oğlunun yaşını paranteze aldım ve 3 ile çarptım.

(9) T: Neden paranteze aldın?

(10) A: Çünkü oğlunu yaşı  $8+x$  olur. Bütün halinde.

$$46+x = (8+x)3$$

Öğrenci değişkenin iki tarafta da olduğu parantez gerektiren yaş probleminin denklemini yazmakta bir sorun çekmemiştir. Probleme ait denklemi yazarken, yazacağı denklemin hangi türden (Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklem) denklem olduğunu belirlemesi problemin çözümünde öğrenciye yardımcı olmuştur.

(11) T: Denklemi nasıl çözdün?

(12) A: Önce parantezi açtım. Sonra bilinenleri bir tarafa bilinmeyenleri diğer tarafa topladım  $x$ 'i buldum.

$$\begin{aligned} 46+x &= 24+3x \\ 22 &= 2x \\ x &= 11 \end{aligned}$$

Ali; bu tip bir denklemi kurmada ve kurduğu denklemi çözmeye zorlanmamıştır. Denklemi kurduktan sonra denklemi doğru bir şekilde çözmesinde işlemleri adım adım yapmasının ve her aşamada tek işlem yapmasının etkisi vardır. Genel olarak öğrencilerde yaş problemlerini denklemeleştirme ve çözme etkinliği zor olmayan bir etkinlik olarak bilinmektedir.

**Sema;**

Sema soruyu sesli bir şekilde okuduktan sonra bu sorunun hangi problem tipine girdiği sorusuyla mülakata devam edildi.

(1) T: Bu soru hangi problem tipine örnektir?

(2) S: Yaş problemi.

(3) T: Bu problemin çözümüne nasıl başlarsın?

(4) S: Birinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklem kurarım ve bu denklemi çözerim. Burada babanın ve oğlunun yaşlarını vermiş. Kaç yıl sonra diye sormuş. Sorduğu şeye  $x$  dersek sonra dediği için toplayacağım.

(5) T: Eşitliğin birinci tarafında neden ifadeyi paranteze aldın?

(6) S: Çünkü çocuğun sonraki yaşı  $8+x$  oluyor. O yüzden paranteze aldım.

$$\begin{array}{l} \text{Baba} \\ 46 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Çocuk} \\ 8 \end{array}$$

$$3(x+8)=46$$

(7) T: Kurduğun denklemde eksik olan bir şeyler var mı?

(8) S: ..... (Cevap yok)

(9) T: Geçen yıl içerisinde baba hiç yaşlanmayacak mı?

(10) S: Yaşlanır.

(47) T: Bunu denklemde de ifade etmemiz gerekmez mi?

(48) S: .....

(49) T: Denklemi nasıl çözdün ?

(50) S: Parantezi açtım öyle çözdüm. Sonucu bulamadım zaten.

$$\begin{array}{l} 3x+24=46 \\ 3x=46-24 \\ 3x=22 \end{array}$$

Öğrenci denklemin kurulumunda geçen süreyi baba içinde yazmamış ve denklemin tam bir sonucunu bulamamıştır. Yaş problemlerinde denklem kurarken öğrenci bir taraf için verilen bilgilere yoğunlaşmış ve diğer taraf için (babanın yaşı için) yazması gereken ifadeyi eksik yazmıştır. Denklemin çözümünde, öğrenciye tam sonuç bulamama, denklemi yanlış kurduğu yada denklemi yanlış çözdüğü hissi de vermemiştir. Bilinmeyenin eşitliğin bir tarafında parantez içinde olduğu denklemi öğrencinin çözmesinde bir sorun görülmemiştir.

**İsmail;**

İsmail soruyu sesli bir şekilde okuduktan sonra, ona problem çeşidi ve çözüm yolu hakkında sorular yöneltilerek mülakata devam edilmiştir.

(1) T: Hangi problem tipi?

(2) İ: Yaş problemi.

(3) T: Hangi denklem türünü kullandın çözmek için?

(4) İ: Bir bilinmeyenli denklem.

(5) T: Denklemi nasıl yazdın?

(6) İ: Babanın yaşına 46, oğlunun yaşına 8 dedim. Kaç yıl sonra dediğine göre yılı bilmediğim için ona  $+x$  dedim. Oğlunun yaşına da kaç yıl sonra babanın yaşı oğlunun yaşının 3 katı olur dediği için oğlunun yaşını  $8+x$  i parantez içine aldım 3 ile çarptım.

$$\frac{8}{46+x} = \frac{0}{3(8+x)}$$

(7) T: Bu şekilde denklemi kurdun. Ya çözüm?

(8) İ: Benzer şekilde dağıtmayı yaptım bilinenleri bir tarafa bilinmeyenleri diğer tarafa toplayarak denklemi çözdüm.

$$\begin{aligned} 46+x &= 24+3x \\ 2x &= 46-24 \\ 2x &= 22 \\ x &= 11 \end{aligned}$$

Öğrenci bu tarz verilen bir yaş probleminin denklemini yazmada ve yazdığı denklemi çözmede bir problem yaşamamıştır. Yukarıdaki öğrenci çözümünde de görüldüğü gibi öğrenci işlemlerden bir kısmını kağıt üstünde değil de zihinden yapmıştır. Denklem kurulumunda ve çözümünde öğrenci bir hata yapmamıştır.

### Sümeyye;

Sümeyye yaş sorusunu sesli bir şekilde okuduktan sonra problem ve problemin çözümü hakkında ne düşündüğü sorusu yöneltilerek mülakata başlanır.

(1) T: Hangi problem türünden bu soru?

(2) S: Yaş problemi.

(3) T: Daha öncelerde yaş problemleri çözmüş müydün?

(4) S: Evet çözmüştüm.

(5) T: Çözümü yaparken bir şema çizmişsin. Neler yaptın burada?

$$\begin{array}{r} 8 \\ 46 \\ | \\ 46+x \end{array} \quad \begin{array}{r} 0 \\ 8 \\ | \\ 8+x \end{array}$$

Öğrenci yaş problemini çözerken önce probleme uygun bir şema çizmiştir. Bu şema onun problemi anladığını göstermektedir.

(6) S: Baba ve oğlunun yaşını yazdım. Sonra dediği için babaya  $46+x$  oğluna  $8+x$ . Sonra bunları bir denklem haline getirdim.

$$46+x = 3(x+8)$$

(7) T: Oğlunun yaşını 3 ile çarparken neden paranteze aldı?

(8) S: Orada toplama yapılmış, sonra çarpma yaparsak paranteze almamız gerekli.

(9) T: Nasıl çözdün bu eşitliği?

(10) S: Önce parantezi açtım. Yani açarsak  $3x+24$  olur. Sonra  $x$  i sağ tarafa geçirdim,  $3x-x$  oldu. Sayıları sol tarafta topladım  $46-24$  oldu. Sonra denklemi çözdüm.

(11) T: Senin de ifade ettiğin gibi bu sorular yaş problemleri. Bu şekilde yaş problemlerini çözebiliyor musun?

(12) S: Genelde çözebiliyorum.

(13) T: Denklem kurmak mı zor denklemi çözmek mi?

(14) S: Denklem çözmek biraz daha kolay. Denklem kurmakta kolay ama bilersen kolay geliyor.

Öğrenci bilinmeyen her iki tarafta da yer aldığı, parantez gerektiren bir yaş problemine ait denklemi yazmış ve denklemin çözümünü yapmıştır. Bilinmeyen her iki tarafta yer alması ve parantezlerin olması öğrenci için denklemi kurmada bir güçlük oluşturmamıştır. Öğrenci için denklemi çözmek değil denklemi kurmak daha bir meseledir.

**Ümran,**

Öğrenci yaş sorusunu sesli bir şekilde okuduktan sonra problemin ne tür soru olduğu ve problem hakkında ne düşündüğü sorularıyla mülakata devam edilir.

(1) T: Hangi tür bir problem bu?

(2) Ü: Yaş Problemi

(3) T: Daha önce bu tür sorulardan çözmüş müydün?

(4) Ü: Birkaç tane çözdüm.

(5) T: Ne tür bir denklem kullanırsın bu sorunun çözümünde? Bir bilinmeyenli mi iki bilinmeyenli mi?

(6) Ü: Bir bilinmeyenli denklem kurarak çözülür.

Öğrenci problemi hangi tür denklem kurarak çözeceğini tespit etmede başarılı olmuştur. Problem çözmede hangi tür denklem kurularak çözüme geçmek problem çözmede kolaylık sağlamaktadır.

(7) T: Problemi çözmeden önce bir şema çizmişsin. Burada neler yaptın anlatır mısın?

(8) Ü: *Baba 46 yaşında, oğlu 8 yaşında. Onları altlarına yazdım. Kaç yıl sonra dediği için  $+x$  topladım ve oğlunu yaşını 3 ile çarptım.*

|                                                                               |                                                                             |
|-------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{array}{r} \text{Baba} \\ \hline 46 \\ \downarrow \\ 46+x \end{array}$ | $\begin{array}{r} \text{OĞLU} \\ \hline 8 \\ \downarrow \\ 8+x \end{array}$ |
|-------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|

$$46+x = 3(x+8)$$

(9) T: *Neye  $x$  dedin bu soruda?*

(10) Ü: *Kaç yıl sonraya*

(11) T: *Denklemini nasıl çözdün?*

(12) Ü: *Parantezi açtım sonra bilinenleri bir tarafa bilinmeyenleri diğer tarafa topladım.*

$$\begin{aligned} 46+x &= 3x+24 \\ 46-24 &= 3x-x \\ 22 &= 2x \\ &= 11 // \end{aligned}$$

(13) T: *Bulduğun değer nedir?*

(14) Ü:  *$x$  değeri.*

(15) T: *Diğer soruda da sonucu bu şekilde yazmıştın? Bu soruda nedir  $x$ ?*

(16) Ü: *Kaç yıl sonra diye soruyordu problemde. Bulduğum değer sorduğu yıl.*

Öğrenci problemin çözümüne, problemde sorulan ifadeyi  $x$  ile harflendirerek başlamıştır. Bu ona ilk aşamalarda problem çözümünde kolaylık sağlasa da ilerleyen aşamalarda değişik stratejiler izlememesi durumunda problem çözme etkinliklerinde güçlük yaşama durumunu ortaya çıkabilir. Her problem denklemlerle çözülürken soru cümlesinde işaret edilen ifade harflendirilerek çözülmeyebilir.

Aşağıdaki tabloda tanı testi uygulanan sınıfın tüm öğrencilerinin yaş problemine verdikleri cevap türleri, yüzdeleri ve frekansları verilmiştir.

Tablo 5. Tanı testindeki yaş problemine öğrencilerin verdikleri cevapların frekans ve yüzdesi

| Doğru Çözümler       | %     | f | Eksik Çözümler     | %     | f |
|----------------------|-------|---|--------------------|-------|---|
| $46 + x = (8 + x).3$ | 11.11 | 2 | $46 + x = 3.x + 8$ | 11.11 | 2 |
| $46 + x = 3.(8 + x)$ | 50    | 9 | Boş cevap          | 11.11 | 2 |
|                      |       |   | $3(x + 8) = 46$    | 5.55  | 1 |
|                      |       |   | $3x + 8 = 46$      | 5.55  | 1 |
|                      |       |   | $3x - 8 = 46$      | 5.55  | 1 |

Bilinmeyen eşitliğin her iki tarafında yer aldığı, parantez gerektiren, birinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklem yardımıyla çözülebilecek bir problemin denkleminin yazımında ve kurulan denklemin çözümünde mülakat yapılan öğrenciler genelde başarılı olmuşlardır. Sınıf genelinde öğrencilerin yaptıkları ortak hatalar parantez kullanımından kaynaklanmaktadır. Tabloda görülen eksik çözüm yapan öğrencilerden iki tanesi problem metnine ait denklemi yazarken parantez kullanmamasına karşılık çözümde 3 sayısını diğer terimlere dağıtarak çözümü yapmışlar ancak denklem çözümünde bilinmeyenlerin bir tarafa, bilinenlerin diğer tarafa atarken işaret hatası yaparak yanlış sonuç bulmuşlardır. Yapılan diğer eksik çözümlerdeki hatalar denklemin kurulumundaki eksikliklerden kaynaklanmaktadır. Bu probleme sınıf genelinden iki öğrenci de boş yanıt vermiştir.

### 3.2.4 İşçi Problemi

*“Bir işi Kemal yalnız başına 6 günde, Yasin yalnız başına 8 günde yapabiliyor. İkisi beraber 3 gün çalıştıktan sonra Kemal işi bırakıyor. Kalan işi Yasin kaç günde bitirir?” probleminin denklemini yazıp çözebilir misiniz?*

**Ömer;**

Ömer problemi sesli ve hızlı bir şekilde okuduktan sonra hangi problem tipine girdiği sorusuyla mülakata devam edildi.

(1) T: Hangi problem tipine giriyor bu soru?

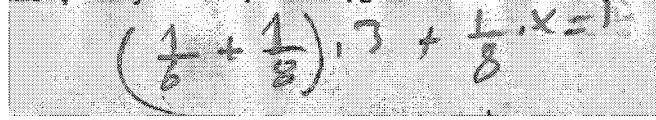
(2) Ö: İşçi problemi.

(3) T: Daha önce bu tip sorulardan çözmüş müydün?

(4) Ö: Evet çözdüm.

(5) T: Bu tip bir sorunun çözümüne nasıl başlıyorsun?

(6) Ö: Soruyu anlıyorum. İşte bir günde ne kadar yaptığını  $(\frac{1}{6} + \frac{1}{8})$ , 3 gün beraber çalışıyorlar sonra kalan işi kim yapıyorsa onu yazıyorum. Orda bazen şaşıyorum. Böyle ayrı isimler olmadı mı, mesela Kemal ile Kazım diyor. İşten Kemal çıkıyor ben Kazım'ı işten çıkartıyorum, bazen okumamda hata oluyor.



$$\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right) \cdot 3 + \frac{1}{8} \cdot x = 1$$

Ömer okuduğu problemi anladıktan sonra çözüme geçerek denklemi yazmış ve çözmeye başlamıştır. Yukarıda da kendisinin de belirttiği gibi öğrencilerde bir dikkat azalması, yanlış okuma gibi sebeplerden dolayı onları yanlış denklem kurarak yanlış sonuçlara götürebilmektedir. Ömer'in yukarıda kurduğu denklem yalın bir ifadenin matematiksel dile en sade haliyle çevrilmiş halidir. Temelde bütün problemlerin çözümü ortak olsa da öğrencide okuduğu problemi(işçi-havuz problemi) denklem haline dönüştürmeyi kavrama il başlarda zor olmaktadır.

(7) T: Peki burada yazığın  $\frac{1}{6}$  değeri nedir?

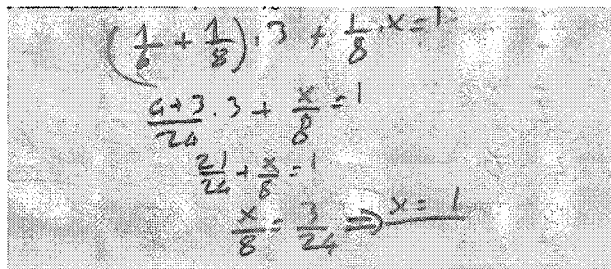
(8) Ö: Kemal'in bir günde yaptığı iş.

(9) T: Parantez içinde yazdığın  $\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right)$  değeri nedir?

(10) Ö: Kemal ile Yasin'in bir günde yaptığı iş.

(11) T: (Kurduğu denklemde eşitliğin sağında yazan "1" sayısını göstererek ) Buradaki bir nedir?

(12) Ö: İşin tamamı.



$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right) \cdot 3 + \frac{1}{8} \cdot x &= 1 \\ \frac{4+3}{24} \cdot 3 + \frac{x}{8} &= 1 \\ \frac{7}{8} + \frac{x}{8} &= 1 \\ \frac{x}{8} &= 1 - \frac{7}{8} \\ \frac{x}{8} &= \frac{1}{8} \Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

(13) T: Kurduğun denklemde ilk satırda paydaları eşitleyerek toplama işlemini yapıp daha düzgün bir ifade elde etmek istiyorsun herhalde.

(14) Ö: Evet

(15) T: Bu şekilde rasyonel sayılarla problem çözme işlem hatası yapmana veya işlemlerde zorlanmana sebep oluyor mu?

(16) Ö: Çok az. İşlem hatasını işaretlerde yapıyorum genel olarak.

Cebirsel işlemlerini kuvvetlendiren öğrenciler denklem çözmede diğerlerine oranlara çok daha az hata yapmaktadırlar. Bu da onların kendilerine güvenlerini ve matematik başarısını artırmada önemli bir faktör olmaktadır.

**Ali;**

Ali problemi sesli bir şekilde okuduktan sonra problem türü hakkındaki fikri sorularak klinik mülakata devam dirmiştir.

(1) T: Hangi problem tipine giriyor bu soru?

(2) A: İşçi – Havuz.

(3) T: Neden İşçi – Havuz dedin.

(4) A: Çünkü ikisinin çözümleri de benzer yapılıyor.

(5) T: Daha önce bu tip örnekler çözdün yani?

(6) A: Evet çözdüm.

(7) T: Problemin çözümüne nasıl başlarsın?

(8) A: Verilenleri yazarım.

(9) T: Problemden verilen bilgileri matematik diline dökerken zorlandığın bir nokta var mı?

(10) A: Bazen işlem hataları yapıyorum ama çok değil. Merdivenli kesir sorularını çözemiyorum ama bunla ilgili değil. Genelde denklemleri doğru kuruyorum. Sayının kesir olması çok etki yapmıyor.

(11) T: Nasıl bir çözüm düşünürsün bu soruda peki?

Öğrenci problemi içinden bir kez daha okuyarak sorulan soruya cevap verir.

(12) A: Kemal yalnız başına 6 günde, Yasin 8 günde yapıyormuş.  $\frac{1}{6} + \frac{1}{8}$  dedim. Ondan sonra 3 gün beraber çalışıyorlarmış. Onları parantez içine aldım. Parantezin içinde paydalarını eşitledikten sonra 3 ile çarptım.

$$\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right) \cdot 3 + \frac{1}{8} \cdot x = 1$$

(13) T: Peki bu parantezin içinde topladığın sonuç nedir, neyi ifade ediyor? (Parantezin içinde yazdığı kesirleri göstererek)

(14) A: Sonuç mu?

(15) T: Hayır. Bu toplamdan bulacağın kesir neyi ifade ediyor?

(16) A: İşi ortak yaptıkları süre.

Öğrenci parantezin içinde yaptığı toplama işleminde bulduğu kesrin neyi ifade ettiğinin farkında değildir. Yaptığı çözümlerde bu işi biraz ezber bir mantıkla çözüm yapmaktadır. Parantez içinde yazdığı ifade iki kişinin beraber bir günde işin kaçta kaçını bitirdikleridir.

(17) T: Peki devam et.

(18) A: İşte parantezin dışına 3 sayısını yazarım. Sonra Kemal işi bıraktığı için Yasin tek başına çalışacak. Kaç gün çalışacağını bilmediğimiz için ona  $x$  dedim bunları topladım ve 1 e eşitledim.

(19) T: Neden "1" e eşitledin?

(20) A: Çünkü işin tamamı bitiyor.

(21) T: Peki parantezin içinde paydayı eşitlerken  $\frac{1}{8}$  kesrini genişletme işleminde payı 3 ile çarpmayı unutmuşsun? Fark ettin mi?

(22) A: Öyle mi yapmışım.

$$\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right) \cdot 3 + \frac{1}{8} \cdot x = 1$$

$$\frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{3}{24} + \frac{1}{8} \cdot x = 1$$

(23) T: Çok sık yaptığın bir hata mıdır bu?

(24) A: Öğretmenim biz sınavlara hazırlanıyoruz. Bazı öğrenciler soruları çözmek için çok zaman harcıyorlar. Ben öyle yapmak istemiyorum. Soruları en az sürede çözmem lazım. Hızlı çözeyim derken bu tür hatalar yapıyorum ara sıra işte.

Öğrenci problemin çözümünde kesrin paydasını eşitlemede;  $\frac{3}{24}$  yazmak yerine  $\frac{1}{8}$

kesrinin payını 3 ile çarpmayı unutarak  $\frac{1}{24}$  yapmıştır. Yaptığı küçük bir hatayla soruyu yanlış çözen öğrenci problemin bu kısmında yaptığı hatayı daha sonra hata yapmayarak devam ettirmiş ve sonucu gerçek değerinden farklı bir sayı bulmuştur.

$$\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right) \cdot 3 + \frac{1}{8} \cdot x = 1$$

$$\frac{5}{8} - \frac{1}{8} = -\frac{x}{8}$$

$$\frac{4}{8} = -\frac{x}{8}$$

$$-2u = -6x$$

$$x = +9$$

(25) T: Bulduğun sonuç nedir Ali?

(26) A: Yasin'in kalan işi bitirme süresi.

Öğrenci verilen işçi probleminin denklemini doğru bir şekilde kurmuştur. İlerleyen aşamada cebirsel yaptığı hatadan dolayı çözümde sonucu yanlış bulmuştur. Bu öğrencilerde genelde yapılan bir hatadır. İşlem hatası olarak telaffuz edilen bu hata şekli öğrencilerde sayılarla işlem yapma azlığından yada dikkat eksikliğinden kaynaklanmaktadır.

**Sema;**

Sema problemi sesli bir şekilde okuduktan sonra hangi problem tipine girdiği sorusuyla mülakata devam edildi.

(1) T: Hangi problem tipine giriyor?

(2) S: İşçi Problemi

(3) T: Daha önce bu tarz sorular çözmüş müydün?

(4) S: Çözmüştüm.

(5) T: Bu problemin denklemini yazarken nasıl başlarsın?

(6) S: Beraber çalıştıkları günleri parantez içine alırım. 3 ü parantezin dışına yazarım. Kemal çıkıyor, Yasin yalnız başına çalışacağı için Yasini tekrar yazarım. Bunlar işi bitirdikleri için 1 e eşitlerim.

$$\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\right) \cdot 3 + \frac{1}{8} = 1$$

Öğrenci çözümünde de görüldüğü gibi kaba hatlarıyla öğrencinin çözüm için yapmaya çalıştığı işlem işçi problemlerini çözmek için kurulan denkleme benzemektedir. Öğrencinin yazdığı denklem de işlemlerin yapılma sırasında takip edilmeme bulunmaktadır. Bir denklemin çözümünün estetiği her işlem yapıldığında bir önceki denklem ifadesinin bütünüünün yazılması şeklindedir. Öğrencinin yapmaya çalıştığı, iki kişinin beraber

çalıştıkları süre içinde işin ne kadarını bitirdikleridir. Ama bunu tam olarak ifade edememiştir.

(7) Peki burada yazdığın  $\frac{1}{t}$  ifadesi ne?

(8) S: Beraber çalıştıklarında işi bitirecekleri süre.

(9) T: Peki bize bu mu sorulmuş?

(10) S: .....

Soru çözümünün sonunda öğrenci, Kemal ile Yasin'in beraber işi kaç günde bitirdikleri süreyi bulmaya çalışmıştır. Problemde sorulan ifadeden uzaklaşan öğrenci kendi kafasında düşündüğü problemi çözmeye başlamıştır. Buda öğrencinin bu tarz soruları daha önce çözdüğünü ama yaptığı çözümün daha çok aklına yatkın olduğunu, aklında kaldığını göstermektedir. Yani öğrenci bu tür problemlerin çözümlerini bir nevi ezbere yapmaktadır.

$$\frac{1}{2t} + \frac{3}{2t} = 1$$

$$\frac{4}{2t} = 1$$

$$4t = 6$$

Ayrıca denklemlerin yazılmasında değişkeni bazen yazan, bazen yazmayan öğrenci aynı zamanda rasyonel sayılarla işlem yapmakta da zorlanmaktadır. Bu da onun problemleri denklem kurarak çözmesini daha da zorlaştırmaktadır.

**İsmail;**

İsmail soruyu sesli bir şekilde okuduktan sonra problemin türü ve kurduğu denklem hakkında sorular yöneltilerek mülakata devam edilir.

(1) T: Hangi problem çeşidine giriyor bu problem İsmail?

(2) İ: İşçi ve havuz problemleri.

(3) T: Rasyonel sayılarla işlem yapmakta güçlük çekiyor musun?

(4) İ: Dikkat etmediğim zaman bazen yanlışlıklar yapabiliyorum.

(5) T: Denklemi nasıl kurdun?

(6) İ: Verilenleri sırasıyla kullandım.

$$\left( \frac{1}{6} + \frac{1}{8} \right) \cdot 3 + \frac{1}{8} \cdot x = 1$$

(7) T:  $\left( \frac{1}{6} + \frac{1}{8} \right)$  ifadesi gösterilerek Bu yazdığın ifade ne anlama geliyor?

(8) İ: Kemal ile Yasin'in beraber yaptığı işler.

Öğrenci problem metninde belirtilen işi bitirme sürelerini denklemde kullanırken parantez içinde yazdığı ifadenin ikisinin bir günde işin ne kadarını yaptıkları şeklinde yorumlayamamıştır.

(9) T: Parantez içinde yazdığın ifade Kemal ile Yasin'in hangi süre içinde yaptığı iştir?

(10) İ: 3 gün süre içinde yaptığı iş.

(11) T: Peki neden 3 ile çarptın? Parantez içinde yazdığın ikisinin kaç günde yaptığı iştir?

(12) İ: Bir günde.

(13) T: Bunu 3 ile çarptın üç günde yapılan işi buldun. Sonra Kemal'i işten çıkarttın, denklemi kurdun "1" e eşitledin. Neden "1" e eşitledin?

(14) İ: İşin hepsi bir bütün.

(15) T: Daha sonra yaptığın işlemlerle problemi çözdün. Peki sonucu kaç buldun?

(16) İ: 1

$$\frac{4}{24} + \frac{3}{24} + \frac{1}{8} \cdot x = 1$$

$$\frac{7}{24} + \frac{x}{8} = 1$$

$$\frac{7}{8} + \frac{x}{8} = \frac{8}{8}$$

$$7+x=8$$

$$x=8-7$$

$$x=1$$

(17) T: Bulduğun 1 sayısı nedir? Yani denklemi çözdüğünde bulduğun  $x=1$  nedir?

(18) İ: Yasin'in kaç günde yaptığı iş.

Öğrenci işçi ve havuz problemlerinde genel hatlarıyla denklemin nasıl kurulacağını kavramış işlemleri sırayla yapmıştır. Öğrenci yaptığı işlemleri anlatmada bir problem çekmektedir.

### Sümeyye;

Sümeyye problemi sesli bir şekilde okuduktan sonra problemin türü ve probleme ait denklemi nasıl kurduğu soruları yöneltilerek mülakata devam edildi.

(1) T: Hangi tür problem tipine giriyor bu soru?

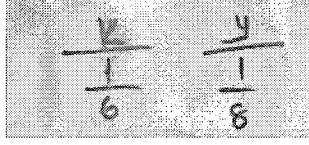
(2) S: İşçi problemi.

(3) T: Daha önce bu tür problem çözdün mü?

(4) S: Evet çözdüm.

(5) T: Bu problemin çözümüne nasıl başladın?

(6) S: Önce Kemal için  $\frac{1}{6}$  yazarız. Herkesin başına  $\frac{1}{6}$  diye yazarız. Yasin için  $\frac{1}{8}$  yazarız.



$$\frac{1}{6} \quad \frac{1}{8}$$

Öğrenci işçi probleminde işçilerin işi bitirme sürelerini kesri haline dönüştürerek yazmıştır. Bu şekilde verilecek olan problemlerde işi bitirdiği günü “ bir bölü .....” olarak yazacağını ifade etmiştir.

(7) S: Bunları parantez içine alırız. 3 gün çalıştıkları için parantezin dışına çarpı 3 yazarız.



$$\left( \frac{1}{6} + \frac{1}{8} \right) \cdot 3 = 1$$

(8) T: Peki parantezin içine yazdığın terimler neyi ifade ediyor?

(9) S: Beraber çalıştıkları süre.

(10) T: Parantezin içindeki terim kaç günlük beraber çalışmaları.

(11) S: 3 gün.

(12) T: Neden 3 ile çarptın?

(13) S: 3 ile çarpılınca 3 günlük çalışmaları oluyor zaten.

(14) T: Sonra ne yaptın?

(15) S: Sonra Kemal işi bırakmış. İş bıraktığı için Yasin tek çalışacak. Onun için  $\frac{1}{8}$  yazdım, çarpı x dedim.

(16) T: Neden bire eşitledin?

(17) S: Hepsini yapıyorlar işin.

Öğrenci işçi-havuz problemlerinde denklemin kurulmasında ki temel mantığı çözdüğünü ifade etmiştir.

(18) T: Peki Sümeyye şurada (öğrenci çözümü gösterilerek) 3 ile  $\frac{1}{8}$  arasında bir işaret koymamışsın?

(19) S: Orada yazmamış mıyım? Artı olacak.

(20) T: Denklemi nasıl çözdün?

(21) S:  $\frac{1}{6}$  nın altına 4,  $\frac{1}{8}$  in altına 3 yazdım ve paydaları eşitledim. Sonra toplama işlemini yaptım.  $\frac{7}{24}$  oldu. yanında çarpı 3 vardı. Sadeleştirdim.  $\frac{7}{8}$  oldu.  $\frac{x}{8}$  ile toplayıp 1 e eşitledim.

$$\left(\frac{4}{24} + \frac{3}{24}\right) \cdot 3 \cdot \frac{1}{8} x = 1$$

$$\frac{7}{24} \cdot 3 \cdot \frac{1}{8} x = 1$$

$$\frac{7}{8} x = 1$$

$$x = \frac{8}{7}$$

(22) T: En sonda yaptığın işlem nedir?

$$\frac{7}{8} + \frac{x}{8} = 1$$

$$8x = 7$$

$$x = \frac{7}{8}$$

(23) S: .....(cevap yok)

(24) T:  $8t=7$  yazmışsın. Bu yazdığın nedir?

(25) S: t, x demek yani. Çözümde hata yaptım galiba.  $7+x=8$  olması lazım.  $x=1$  çıkar.

Öğrenci denklem çözme aşamasında cebirsel olarak yaptığı yanlışın farkına varır ve işlemleri yeniden yaparak  $x=1$  değerini bulur. Rasyonel sayıların yer aldığı bir bilinmeyenli bir denklem gerektiren problemin denklemini doğru bir şekilde kuran öğrenci işçi-havuz problemlerinin denklemini kurma yolunu anladığını ifade etmiştir.

**Ümran;**

Öğrenci soruyu sesli bir şekilde okuduktan sonra problem çeşidi, çözüm yolu ve problem hakkında düşündükleri üzerine sorular yöneltilerek mülakata devam edilir.

(1) T: Ne tür bir problem bu?

(2) Ü: İşçi-havuz problemine örnek.

(3) T: Daha önce bu tür problemler çözmüş müydün?

(4) Ü: Evet çözmüştüm.

(5) T: Problemin çözümüne nasıl başladın?

(6) Ü: Kemal'e 6 günde bitirdiği için  $\frac{1}{6}$  yazdım. Yasin'e 8 günde bitirdiği için  $\frac{1}{8}$  yazdım.

(7) T: Kemal için yazdığın  $\frac{1}{6}$  sayısı neyi ifade ediyor?

(8) Ü: İş bitirme süresini.

Öğrenci işin yapıldığı süreyi rasyonel sayıya çevirdiğinde yazdığı sayının işin kaçta kaçını bitirdiğini ifade ettiğini kavrayamamıştır. Bu şekilde sürekli alıştırmalar ile öğrenci sorunun çözümünü kalıp gibi ezberlemiş ve çözümü yapmıştır. Ancak işçi problemlerinde öğrenci denklemleri kullanabilme becerisi kazanmıştır.

(9) T: *Sonra neler yaptın burada?*

(10) Ü: *Kemal ile Yasin 3 gün beraber çalıştıkları için  $\frac{1}{6}$  ile  $\frac{1}{8}$  i topladım ve 3 ile çarptım.*

(11) T: *3 ile çarptığında neyi bulmuş oldun?*

(12) Ü: *3 gün çalıştıklarını.*

(13) T: *Sonra?*

(14) Ü: *Kemal işten çıktığı için Yasin yalnız başına çalışacak. Onun için  $\frac{1}{8}$  yazdım.*

*Çarpı 3 dedim.*

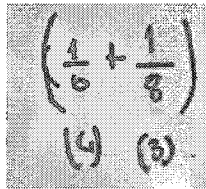
(15) T: *Neden 1 e eşitledin?*

(16) Ü: *Çünkü iş bir bütün.*

Öğrencide (ve genelde öğrencilerde) bir bütün kavramı 1 sayısı olarak kalmış. Aslında buradaki bir sayısı işin hepsinin yapılıp bittiğini ifade etmektedir. Öğrenci bunu bir bütün olarak algılamaktadır. Daha önce bu tarz örneklerden çözdüğü için problemin çözümünde yazılacak olan denklemde eşitlenecek değeri 1 olarak görmektedir.

(17) T: *Çözümü nasıl yaptın?*

(18) Ü: *Paydaları eşitledim.  $\frac{1}{6}$  nın altına 4,  $\frac{1}{8}$  in altına 3 yazarsak paydalar eşitlenir.*



$$\left( \frac{1}{6} + \frac{1}{8} \right)$$

(4) (3)

(19) Ü: *Toplamayı yaparsak  $\frac{7}{24}$  olur. Parantezin dışındaki 3 sayısıyla sadeleştirdim.*

*En sonda  $\frac{7}{8} + \frac{x}{8} = 1$  oldu. buradan  $x=1$  dir.*

$$\left(\frac{4}{24} + \frac{3}{24}\right) \cdot 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot x = 1$$

$$\frac{7}{8} \cdot 3 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = 1$$

$$\frac{7}{8} + \frac{x}{8} = 1$$

$$x = 1$$

Öğrenciler için problemin çözümü önemlidir. Çözüm her nasıl yapılsa yapılsın probleme ait doğru veya yanlış bir sonuç bulmak gerektiği düşünürler. Burada öğrenci problemin denklemini doğru bir şekilde kurmuş ve denklemini doğru bir şekilde çözmüştür. Ancak öğrencinin problemde çözüm basamaklarında kendisine sorulan sorulara tatmin edici cevaplar verememiştir. Bu durum öğrencilerin problem çözmede sonuç bulma isteklerinden kaynaklanmaktadır.

Aşağıdaki tabloda tanı testi uygulanan sınıfın tüm öğrencilerinin işçi problemine verdikleri cevap türleri, yüzdeleri ve frekansları verilmiştir.

Tablo 6. Tanı testindeki işçi problemine öğrencilerin verdikleri cevapların frekans ve yüzdesi

| Doğru Çözümler                                                             | %     | f | Eksik Çözümler                                                                 | %     | f |
|----------------------------------------------------------------------------|-------|---|--------------------------------------------------------------------------------|-------|---|
| $\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right) \cdot 3 + \frac{1}{8} \cdot x = 1$ | 44.44 | 8 | $\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right) \cdot 3 \cdot \frac{1}{8} \cdot x = 1$ | 22.22 | 4 |
|                                                                            |       |   | Boş cevap                                                                      | 16.66 | 3 |
|                                                                            |       |   | Aritmetik İşlem                                                                | 11.11 | 2 |
|                                                                            |       |   | $\frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{3} = \frac{1}{t}$                        | 5.55  | 1 |

Bilinmeyen eşitliğin bir tarafında yer aldığı birinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklemlerle çözülebilecek işçi probleminin denkleminin kurulumunda öğrenciler genelde başarılı olmuşlardır. Bazı öğrenciler eksik denklem kurmada cebirsel işaretlerin yazımını yapmadığı için ilerleyen basamaklarda hangi işlemi yapacaklarına karar verememişlerdir. Bu çözümler yanlış olarak değerlendirmeye alınmıştır. Denklemi doğru kuran öğrencilerin hepsi kurdukları denklemi çözmede başarılı olamamıştır. Probleme ait denklemin yazımında kullanılan rasyonel sayılar öğrencilerin işlem yapmalarında güçlük çekmelerine sebep olmuştur. Yaşanan güçlükler; rasyonel sayıların paydalarının genişletilmesinde, içler

dışlar çarpımında ve işlemlerde görülmüştür. Sınıf genelinde iki öğrenci problemi çözmek için aritmetik işlemler yapmaya çalışmış ve çözümü sonuca ulaştıramamışlardır. Bu davranış büyük olasılıkla onların önceki deneyimlerinden (ilköğretim 1. kademe) kalmaktadır. Burada önemli olan bir hususta öğrencilerin problemleri ne yöntemle olursa olsun çözüp doğru veya yanlış bir sonuca ulaşma dürtüsü beslediklerinin ortaya çıkmasıdır. Bu probleme sınıftan 3 öğrenci cevap vermemiştir.

### 3.2.5. Merdiven Problemi

*İrem bir merdivenin basamaklarını 3 er 3 er çıkıp 4 er 4 er inmiştir. İrem toplam 21 adım attığına göre merdivenin basamak sayısını nasıl bulursunuz?*

**Ömer;**

Ömer problemi sesli bir şekilde okuduktan sonra hangi problem tipine girdiği sorusuyla mülakata devam edildi.

(1) T: Soru hangi problem tipine giriyor Ömer?

(2) Ö: Sayı problemi.

(3) T: Soruyu okuduğunda sorunun hangi problem tipine girdiğini tespit edebiliyormusun?

(4) Ö: Evet..

(5) T: Peki tespit ettikten sonra hangi denklem çeşidini kullanarak daha kolay çözeceğine, yani bir bilinmeyenli mi yoksa iki bilinmeyenli mi denklemlerle çözüm yapacağına nasıl karar veriyorsun?

(6) Ö: Önce bir bilinmeyenliye çevirmeye çalışıyorum eğer çevrilmiyorsa iki bilinmeyenli denklem kurup çözüyorum.

(7) T: Bu sorunun çözümüne nasıl başlarsın? Yani x neye dedin?

(8) Ö: Attığı adım sayısına.

(9) T: Hangisine? Çıkarken mi attığı adım sayısı, inerken mi attığı adım sayısı?

(10) Ö: Ben burada çıkarken attığı adım sayısına x dedim. İnerken de  $(21-x)$  attığı adım sayısı oldu.  $x$  i 3 ile çarpım  $(21-x)$  4 ile çarpıp birbirine eşitledim.

$$3x = 4(21-x)$$

Eğitim sistemimizin bir parçası olan sınavlar öğrencileri en kısa yoldan ve en kolay şekilde sonuca götürmeyi öğretme eğilimindedir. Burada sorulan günlük hayat problemi

bir ve iki bilinmeyenli denklemlerle çözebilecek tarzdan bir problemdir. Öğrencinin problemi çözme yönteminde bir bilinmeyen kullandığı görülmektedir. Bu da öğrenci için sonuca gitmek için en kısa yolu tercih ettiğini göstermektedir.

(11) T: Neden böyle bir şey yaptın?

(12) Ö: Çıkarken 3'er 3'er  $x$  adım atarsa toplam  $3x$  basamak çıkar inerken de aynı mantıkla  $4 \cdot (21-x)$  basamak iner. O yüzden eşitledim.

$$\begin{aligned}
 3x &= 4(21-x) \\
 3x &= 84 - 4x \\
 7x &= 84 \\
 x &= 12
 \end{aligned}$$

$3x = 3 \cdot 12 = 36$

(13) T: 3'er 3'er çıkarken mi daha fazla adım atmıştır, 4'er 4'er inerken mi?

(14) Ö: 3'er 3'er çıkarken daha fazla adım atmıştır.

(15) T: Peki Ömer, çözdüğün bu soruda sonucun 3 ve 4'ün bir katı olacak bir sayı bulmam lazımdı diye sende bir düşünce doğuyor mu yoksa kurduğun ve çözdüğün denkleme güveniyor musun?

(16) Ö: Kendimi yeterli görüyorum.

Çıkarken attığı adım sayısı ile inerken attığı adım sayısının ilişkisini yazabilmesi öğrencinin sorunun metnini matematik diline çevirmesinde ve denklemini yazması için gerekli olan ilk adımdır. Çıkarken attığı adım sayısı ile inerken attığı adım sayılarını 3 ve 4 ile çarpıp birbirine eşitlemesi öğrencinin denklem kurma becerisinin gelişmiş olduğunu göstermektedir. Burada önemli nokta öğrencinin çözümü yaparken sorulan ifadeye değil de öğrencinin problemi denklem haline dönüştürürken ona en kolay gelen ifadeye  $x$  demesidir. Denklemin çözümünün problemin çözümü olmadığını aklında tutan öğrenci problemi doğru çözmüştür.

**Ali;**

Ali'ye soruyu (merdiven problemini) sesli bir şekilde okuması söylendikten sonra hangi problem tipine girdiği sorularak mülakata devam edildi.

(1) T: Ne tür bir problem bu?

(2) A: Sayı problemi diyebiliriz.

(3) T: Hangi denklem türüyle çözersin sen bunu?

(4) A: Bir bilinmeyenle

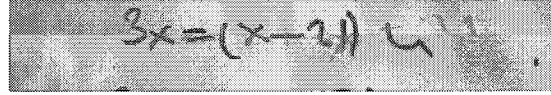
(5) T: Daha önce bu tip bir soru çözdün mü?

(6) A: Çözdüm ama bunun gibi çözmedim. Sınıfta sıralara 2 şer 3 er oturuyorlar. Hani sıra boş kalıyor, öğrenci ayakta kalıyor. Onun gibi soru çözmüştüm. Ona benziyor biraz.

Öğrencinin verdiği bu cevaptan problem çözerken en çok dikkat ettiği, bildiği soru kalıbına benzeyip benzemediğidir. Başka bir deyişle öğrenci ilk kez karşılaşıyor olsa bile karşılarındaki probleme, daha önce çözdüğü problemlere benzeyip benzemediğine bakmaktadır.

(7) T: Problemin çözümüne nasıl başladın? Burada kurduğun denklemi kurarken ne düşündün?

(8) A: Çıkarken attığı adım sayısına  $x$  dedim. İnerken attığı adım sayısına  $x - 21$  dedim.



$$3x = (x - 21) 42$$

Öğrenci denklemi kurarken  $x$  diye belirttiği ifadenin 21 den küçük olduğuna dikkat etmemiş ve denklemi yazarken ifadeyi  $x-21$  olarak yazmıştır. Öğrencinin bu şekilde yazmasında alışagelmiş denklemlerde genelde  $x$  e terim ekleme veya  $x$  ten terim çıkarma şeklinde olduğu içindir.

(9) T: Toplam kaç adım atmıştı?

(10) A: 21

(11) T: Çıkarken attığı adım sayısı 21 den fazlamı? Neden  $x$  ten 21 i çıkardın?

(12) A: ..... (Cevap yok)

(13) T: Çıkarken attığı adım sayısı mı fazladır, inerken attığı adım sayısı mı?

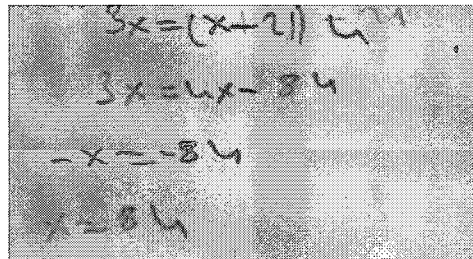
(14) A: 3 er 3 er çıkarken attığı adım sayısı.

(15) T: Problemi çözdün. Bulduğun  $x$  değeri nedir?

(16) A: Basamak sayısı.

(17) T: problemi çözerken  $x$  olarak belirttiğin değer neydi?

(18) A: Çıkarken attığı adım sayısı.



$$\begin{aligned} 3x &= (x + 21) 42 \\ 3x &= 4x - 84 \\ -x &= -84 \\ x &= 84 \end{aligned}$$

Öğrenci daha önce birebir karşılaşmadığı bir problemin çözümünde ve yaptığı işlemleri ifade etmede zorluk çekmektedir. Bu durum testteki sorunun öğrenci için gerçek anlamda bir problem olmasından kaynaklanmaktadır. Eğitim sisteminin de zorlasıyla sınavlara hazırlanan öğrencileri yönlendirme ve öğrencilerde oluşan temel anlayış, anlamlı bir şekilde öğrenme değil; pratik bir şekilde kısa çözüm ve net cevaba ulaşma eğilimi göstermektedir. Bu durum öğrencilerde yukarıda görülen örnekleri ortaya çıkarmaktadır.

#### **Sema;**

Sema'ya soruyu (merdiven sorusu) okumasını söyleyerek mülakata devam edildi. Sema aslında bu problemi çözmemiştir. Problemi çözmemesi sebebini öğrenme ve çözüm için fikri olup olmadığı öğrenmek için öğrenciyle problem üzerinde konuşarak mülakat devam edilmiştir.

(1) T: Sema bu problemi çözmemişsin. Bu sorudan hiç bir şey anlamadın mı?

(2) S: Anladığım bir şey var ama onu matematik diline dökemiyorum.

(3) T: Bu problem hangi soru tipine giriyor sence?

(4) S: .....(cevap yok) .

(5) T: Nasıl bir denklem kurarak çözebiliriz? Bir bilinmeyenli mi, iki bilinmeyenli mi?

(6) S: İkisinden de çözeriz.

(7) T: Denklemi nasıl yazarsın peki? Bir kez de burada düşün?

(8) S: Nasıl yazacağımı bilmiyorum. Hissedebiliyorum ama yazamıyorum.

(9) T: Ne hissediyorsun peki? Neyi anladın bu problemde?

(10) S: İrem bu merdivenleri 3 er 3 er çıkıyor 4 er 4 er iniyor. 3 er 3 er çıktığı basamak sayısını bulurum sonra 4 er 4 er çıktığı. Sonra çıktığı basamakları adım sayısına bölebiliriz.

(11) T: İrem 3 er 3 er çıkarken mi daha fazla adım atmıştır, 4 er 4 er inerken mi daha fazla adım atmıştır?

(12) S: Çıkarken daha fazla adım atmıştır.

Öğrenci bu tarz sorulan bir günlük hayat probleminde sözel metnin matematiksel olarak nasıl ifade edileceği becerisini gösterememiştir. Öğrencilerin genelde zorlandıkları problem tipi günlük hayat problemleridir. Bu da okuma oranının azlığından, müfredatta bu tür problemlerinin yer almamasından kaynaklanmaktadır.

#### **İsmail;**

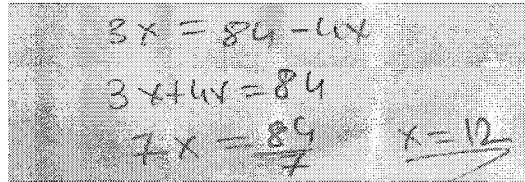
İsmail'e merdiven problemini nasıl çözdüğü, denklemini nasıl kurduğu, bu tür soruları çözmede başarılı olup olmadığı soruları yöneltilerek mülakata devam edilir.

- (1) T: Hangi problem tipine giriyor?
- (2) İ: Denklem sorusu.
- (3) T: Daha önce bu tip sorular çözmüş müydün?
- (4) İ: Evet çözmüştüm ama bu şekilde soruları çözmek daha zor oluyor bazen.
- (5) T: Nasıl yani?
- (6) İ: Yani bu şekildeki sorulardan daha önce daha az çözdüm. O yüzden bazen nasıl yapacağımı bilmiyorum.
- (7) T: Peki bu soru bir bilinmeyenli bir denklemle mi iki bilinmeyenli bir denklemle mi çözülür?
- (8) İ: İki bilinmeyenli denklemle çözebiliriz ama
- (9) T: Nasıl çözersin iki bilinmeyenle?
- (10) İ: Çıkarken  $x$  inerken  $y$  deriz. Bunların toplamı 21'dir.
- (11) T: Sonra?
- (12) İ:  $3x$  çıkarken  $4y$  inerken merdiven sayısı. Bunlardan çözebiliriz
- (13) T: İkinci denklemi nasıl kuruyor?
- (14) İ: İkincisi bir birine eşit. Yani  $3x=4y$  dir.
- (15) T: Bu problemi burada çözdüğün şekliyle nasıl çözdün? Anlatır mısın?
- (16) İ: Çıkarken ki adım sayısına  $x$  dedim inerken ki  $21-x$  olur. Çıkarken 3'er 3'er çıkmış inerken de 4'er 4'er inmiş. Bunları çarparak birbirine eşitledim denklemi çözdüm.



$$3x = 4(21-x)$$

- (17) T: Nasıl çözdün denklemi?
- (18) İ: Bilinenleri bir tarafa bilinmeyenleri diğer tarafa toplayarak çözdüm.



$$\begin{aligned} 3x &= 84 - 4x \\ 3x + 4x &= 84 \\ 7x &= 84 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

- (19) T: Bulduğun sonuç ne?
- (20) İ:  $x$  mi?
- (21) T: Evet bulduğun  $x$  değeri neyi ifade eder?
- (22) İ: Çıkarken attığı adım sayısı.

Öğrenci soruları çözerken daha önce sorunun benzeriyle karşılaşmış karşılaşmadığına bakmakta, eğer karşılaşmışsa problemi çözerken daha önceki problemlerde takip ettiği işlemleri aynı soru için uygulamamaktadır.

**Sümeyye;**

Öğrenci problemi sesli bir şekilde okuduktan sonra problemin türü ve probleme ait denklemi nasıl kurduğu soruları yöneltilerek mülakata devam edildi.

(1) T: Ne tür problem bu?

(2) S: Basamak problemi.

(3) T: Daha önce böyle problemler çözdün mü?

(4) S: Bunun gibi çözmedim. Sınıftaki sıralar problemine benziyor ama böyle problem çözmemiştim.

(5) T: Neler yaptın bu soruda?

(6) S: Basamakları 3'er 3'er çıkmış. Çıkarken attığı adım sayısına  $x$  dedim. 4'er 4'er inmiş. Bu  $21-x$  olur.

(7) S:  $3 \cdot x = 4 \cdot (x-21)$  yazdım. Bu denklemi çözdüm.

(8) T: Nasıl çözdün bu denklemi?

(9) S: Parantezi açtım.  $4x - 84$  oldu. Sonra bilinmeyenleri bir tarafta topladım. Bilinenleri diğer tarafta.

(10) T: Burada bilinenler ve bilinmeyenler hangileri?

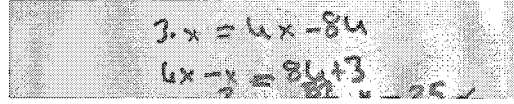
(11) S: Bilinenler 3 ve 84, bilinmeyenler  $4x$  ve  $x$ .  $4x$  ten  $x$  çıkartırsak  $3x$  kalır, onu yazdım. 84 ile 3 toplarsak 87 olur.  $3x = 87$  denkleminde  $x$  i buldum.

(12) T: 87 yi 3 e bölersek 29 mi çıkar?

(13) S: (düşündükten sonra) Yanlış bölmüşüm. Cevap 29 oluyor.

(14) T: Peki Sümeyye çözüme başlarken inerken attığı adım sayısına  $21-x$  demişsin; çözümde ise  $x-21$  olarak almışsın. Bu nedir?

(15) S: Yanlış aldım galiba.  $21 - x$  yazmam gerekiyordu.



$$3x = 4x - 84$$

$$4x - x = 84 + 3$$

(16) T: Yaptığın çözümde 3 ile x arasındaki işlem nedir?

(17) S: Çarpı işlemi

(18) T: Sonrasında bu işlemi toplama işlemi almışsın yanılmıyorsam.

(19) S: Orada da şaşırmışım.

Birinci dereceden iki bilinmeyenli bir denklem sistemi yardımıyla da çözülebilecek bu soruyu öğrenci birinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklem kurarak çözmüştür. Öğrenci inerken attığı adım sayısını 21-x olarak aldıktan sonra tekrar çözüm yapmış ve x değerini doğru olarak bulmuştur.

**Ümran;**

Öğrenci soruyu sesli bir şekilde okuduktan sonra problem hakkında ne düşünüyorsun sorusu yöneltilerek klinik mülakata devam edilir.

(1) T: Ne tür bir problem bu?

(2) Ü: Sayı problemi gibi.

(3) T: Daha önce tür problem çözdün mü?

(4) Ü: Çözmedim.

(5) T: Ne düşündün bu problemin çözümünde?

(6) Ü: Şimdi 3 er 3'er çıkmış, 4 er 4'er inmiş. Demek ki merdivenin basamakları hem 3 e hem de 4 e bölünebilen bir sayı. Test sınavı olsaydı şıklardan eleme yapabilirdim.

Öğrenci için önemli olan problemin çözülmesidir. Bunu hangi yolla olursa olsun yapması ve bir sonuç bulması onda görevini yapmış duygusu oluşturmaktadır.

(7) T: Nasıl kurdun peki denklemi?

(8) Ü: Çıkarkenki x dedim. İnerkenki  $x-21$  olur. 3 er 3'er çıktığından  $3x$  çıkarkenki merdiven, 4 er 4'er indiğinden de 4.  $(x-21)$  inerkenki merdiven sayısını verir.



$$3x = 4(x-21)$$

Öğrenci denklemi kurarken eşitliğin ikinci tarafında yazdığı  $4(x-21)$  ifadesinde, merdivenleri 4 er 4'er inerken attığı toplam adım sayısını yanlış ifade etmiştir. Çözümünde cevabı yanlış bulması beklenen öğrenci daha sonra dikkatsizlikten büyük bir işlem hatası yapmıştır.

(9) T: Neden birbirine eşitledin bunları?

(10) Ü: Aynı merdiveni iniyor ve çıkıyor.

(11) T: Denklemi nasıl çözdün peki?

(12) Ü: Parantezi açtım.

$$3 \cdot x = 4x - 84$$

(13) Ü: Daha sonra ne yaptın bilinenleri bir tarafa bilinmeyenleri diğer tarafa topladım  $x$  i buldum.

(14) T: Nasıl çözdün denklemi?

(15) Ü: Bilinenleri bir tarafa bilinmeyenleri diğer tarafa toplayarak cevabı buldum.

$$4x = 84 + 3$$

$$3x = \frac{87}{25} //$$

Öğrenciden yaptığı işlemleri açıklaması istendiğinde öğrenci birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri çözmede ezberlediği stratejiyi söylemiştir. Öğrencinin yaptığı işlemlerin matematiksel olarak problemle bir ilişkisi bulunmamaktadır. Öğrenci eşitliğin birinci tarafında yer alan 3 ve  $x$  ifadelerinin arasındaki işareti çarpı olarak değil artı olarak algılamış ve ondan sonra yaptığı işlemlerde çözümü buna göre yapmış ve cevap olarak net bir sonuç bulamamıştır.

(16) T: Bulduğun cevabı nasıl kontrol edersin?

(17) Ü: .....

Öğrenciler problemleri çözerken genelde daha önce o probleme benzer problem çözüp çözmediklerini düşünmektedir. Sözel ifadenin aynı, rakamların farklı olması bazı öğrenciler için gene bir problem oluşturabilmektedir. Bu şekilde günlük yaşam problemleri diye adlandırabileceğimiz problemlerin çözümünde öğrenciler genelde diğer problem tiplerine göre daha az başarılıdırlar. Müfredatta da çok az yer verilen, onun da öğretmen inisiyatifiyle işlenip işlenmediği bu problem türlerinde öğrenciler güçlük çekmekte ve onları zor olarak nitelendirmektedirler.

Aşağıdaki tabloda tanı testi uygulanan sınıfın tüm öğrencilerinin merdiven problemine verdikleri cevap türleri, yüzdeleri ve frekansları verilmiştir.

Tablo 7. Tanı testindeki merdiven problemine öğrencilerin verdikleri cevapların frekans ve yüzdesi

| Doğru Çözümler                   | %     | f | Eksik Çözümler              | %     | f |
|----------------------------------|-------|---|-----------------------------|-------|---|
| $3.x = 4.(21 - x)$               | 11.11 | 2 | Boş cevap                   | 27.77 | 5 |
| $(21 - x).4 = 3x$                | 5.55  | 1 | $3.x = 4(x - 21)$           | 27.77 | 5 |
| $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 21$ | 5.55  | 1 | Aritmetik işlem             | 16.66 | 3 |
|                                  |       |   | $3(x + 9) - 4(x + 16) = 21$ | 5.55  | 1 |

Tanı testinde yer alan merdiven probleminde öğrencilerin çoğu başarısız olmuştur. Probleme ait denklemi  $3.x = 4.(21 - x)$  şeklinde kuran 2 öğrenciden biri denklemin çözümünü yaptıktan sonra cevabı bulmak için bulduğu değeri 3 ile çarparak doğru sonucu bulmuştur. Diğer öğrenci denklemin çözümünü problemde sorulan ifadeyi bulmak olarak algılamış ve istenen sonucu bulamamıştır. Problemi çözmek için  $(21 - x).4 = 3x$  denklemini kuran öğrenci denklemin çözümünde hata yaparak sonucu bulamamıştır. Probleme ait denklemi  $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 21$  şeklinde kuran öğrenci denklemi de doğru bir şekilde çözerek doğru yanıtı bulmuştur. Bu çözümde öğrencinin kurduğu denklemdeki  $x$  değeri soruda istenen basamak sayısını göstermektedir.  $3.x = 4.(21 - x)$  denkleminde ise öğrenci açıklama metni olarak  $x$  değerini “çıkarken attığı adım sayısı” olarak çözümde ifade etmiştir. Çözümde  $3.x = 4(x - 21)$  denklemini kuran öğrenciler kurdukları denklemi genelde doğru çözmüşler ancak buldukları değeri problemin çözümü olarak algılamışlar ve cevabı kontrol yapmadıkları için cevabın yanlış olduğunun farkına varamamışlardır. Sınıftaki 3 öğrenci ise problemi çözmek için problem metnindeki sayılarla aritmetik işlemler yapmayı tercih etmişlerdir.  $3(x + 9) - 4(x + 16) = 21$  denklemini kuran öğrenci ise denklemin çözümünü sürdürmemiştir. Öğrencilerden 5 tanesi soruyu boş bırakmıştır.

### 3.2.6. Futbol Problemi

*Bir futbol takımı kazandığı her maç için 3 puan, beraberlik için 1 puan kazanmaktadır. Oynadığı maçlardan bir kısmında galip gelmiş bir kısmında da berabere kalmıştır. 26 maç*

yapan bu takımın toplam 62 puanı olduğuna göre, kazandığı maç sayısını nasıl bulursunuz?

**Ömer;**

Ömer problemi sesli bir şekilde okuduktan sonra hangi problem tipine girdiği sorusuyla mülakata devam edildi.

(1) T: Hangi problem tipine girer?

(2) Ö: Sayı

(3) T: Bunun denklemini nasıl yazarsın?

(4) Ö: (Soruyu tekrar bir okuduktan sonra yaptığı çözüme bakarak)  $3x$  kazandığı maç sayısı oluyor,  $x$  kazanmak için oynadığı maçlar oluyor.

$$3x + 1(26-x) = 62$$

(5) T:  $3x$  kazandığı maç sayısı,  $x$  de kazanmak için oynadığı maçlar mı oluyor? O ne demek oluyor?

(6) Ö: Yo yani şey demek istedim.  $x$  kazandığı maç sayısı,  $3x$  kazandığı maçlardan aldığı puanlar.  $26-x$  te berabere kaldığı maç sayısı bunu da 1 ile çarparsak kendi olur. Bu berabere kaldığı maçlardan aldığı puanlardır.

Problemde toplam maç sayısı ve alınan puan verilip kazandığı maç sayısı sorusu yöneltilmiş ve öğrenci bu problemi bir bilinmeyenli bir denklem vasıtasıyla kolay bir şekilde çözmüştür. Çözüm için yazdığı terimlerin ne anlama geldiği sorulduğunda ise öğrenci ilk başta yazdığını tam olarak ifade edememiş ancak söylediği ifade tekrar ettirildiğinde düzeltme yapmıştır. Bu öğrencinin kurduğu ve çözdüğü denklemi ifade edebilmesi becerisini kazandığını yani problemi kurma basamaklarında ve çözüm basamaklarında kendisinin bilinmeyenleri ifade etmesi, yaptığı işlemlerin doğruluğu öğrencide okuduğu anlama ve onu ifade etme yeteneğinin geliştiğini göstermektedir.

$$\begin{aligned} 3x + 1(26-x) &= 62 \\ 3x + 26 - x &= 62 \\ 2x &= 36 \\ x &= 18 \end{aligned}$$

(7) T: Bu problemi başka bir şekilde, başka bir denklem türü kullanarak çözebilir misin?

(8) Ö: (Biraz düşündükten sonra) Şöyle yapabilirim;  $x+y=26$  ondan sonra  $3x+y=62$  denklemlerini kurarım.

(9) T: Burada  $x$  neye dedin?

(10) Ö: Kazandığı maç sayısına

(11) T: Peki Ömer. Sen problemleri denklem haline dönüştürürken sorulan değere mi  $x$  diyorsun?

(12) Ö: Bazen. Mesela bazen sorduğuna  $x$  dersem denklemi yazması daha zor oluyor. Bende başka bir şeye  $x$  deyip sonra sorduğu ifadeyi sorunun başına  $x$  cinsinden yazıyorum unutmamak için. Ondan sonra soruyu çözüyorum.

Bu problem öğrencinin iki bilinmeyenli bir denklem sistemi kurarak çözmesi amacıyla sorulmuştu ancak öğrenci bu problemi bir bilinmeyenli bir denklem şeklinde de yazıp çözmüştür. İki bilinmeyenli denklem kullanarak nasıl çözeceğini de “Bu problemi başka bir şekilde çözebilir misin?” diye sorulduğunda denklemleri kurmuştur.

**Ali;**

Ali problem sorusunu bir kez sesli bir şekilde okuduktan sonra problem tipinin sorulmasıyla mülakata devam edildi.

(1) T: Hangi problem tipine giriyor bu soru?

(2) A: Futbol problemi.

Problemler sınıflanırken bu tür bir sınıflama yapılmamıştır. Bu problem sayı problemi veya gerçek hayat problemi olarak adlandırılan sınıfa girebilir.

(3) T: Hangi denklem türüyle çözdün bu problemi.

(4) A: İki bilinmeyenli denklem

(5) T: Neden iki bilinmeyenli denklemle çözdün bu soruyu?

(6) A: Çünkü iki bilinmeyen var soruda.

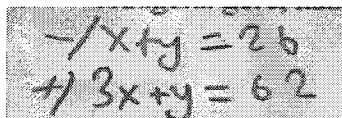
(7) T: Nedir onlar?

(8) A: Kazandığı maçlar ile berabere kaldığı maçlar.

Bu problem hem bir bilinmeyenli bir denklemle çözülebilecek hem de iki bilinmeyenli bir denklem sistemi yardımıyla çözülebilecek bir problemdir. Problemin tanı testinde sorulma amacı öğrencilerin hangi denklem türünü tercih ederek denklemi çözdüğünü tespit etmektir. Burada öğrenci iki bilinmeyenli bir denklem sistemi kurarak soruyu çözmüştür.

(9) T: Problemi çözen denklemi nasıl kuruyorsun?

(10) A: Kazandığı maç sayısına  $x$  dedim. Berabere kaldıklarına da  $y$ . Bunları yan yana topladım 26 ya eşitledim.



$$\begin{array}{r} -1x + y = 26 \\ +1 \quad 3x + y = 62 \end{array}$$

(11) T: Alttaki denklemi nasıl kurdun?

(12) A: Kazandıklarından 3puan berabere kaldıklarından 1 puan alıyor. Kazandıklarına  $3x$  berabere kaldıklarına  $y$  dedim. Toplam 62 puanı olduğu için 62 ye eşitledim.

(13) T: Denklemi nasıl çözdün?

(14) A: Yok ederek, burada  $y$  yi yok ederek  $x$  i buldum.

(15) T: Neden  $y$  yi yok ettin?

(16) A: Çünkü problemde kazandığı maçları sormuş. Bende kazandığı maçların sayısına  $x$  demiştim.  $x$  i bulmak için  $y$  yi yok ettim.

$$\begin{array}{r} -x - y = -26 \\ 3x + y = 62 \\ \hline 2x = 36 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x = \frac{36}{2} \\ x = 18 \end{array}$$

Bu tür gerçek hayat problemini iki bilinmeyenli bir denklem sistemi kurarak çözmek öğrenciler için daha kolay ve anlaşılır gelmektedir. Öğrencinin bu problemi çözerken iki bilinmeyenli denklem sistemini kurmayı tercih etmesinin sebebi de problemde iki değişkenin açık bir şekilde ifade edilmesinden kaynaklanmaktadır. Bu sebeple öğrenci bu problemi iki bilinmeyenli bir denklem sistemi kurarak çözmüştür.

**Sema;**

Öğrenciye soruyu okumasını söyleyerek mülakata devam edildi. Öğrenci merdiven probleminde olduğu gibi futbol problemini de boş bırakmıştır. Sorunun çözümü hakkında düşüncelerini öğrenmek için soruların sorulmasına devam edilmiştir.

Öğrenci soruyu sesli bir şekilde okur.

(1) T: Bu problemi kaç bilinmeyenli denklemle çözersin?

(2) S: Bir bilinmeyenli

(3) T: Denklemi nasıl kurarsın?

(4) S: .....

(5) T: Problemdeki değişken sayısı kaç tane?

(6) S: İki tane

(7) T: Nedir onlar?

(8) S: Kazandığı maç sayısı ve berabere kaldığı maç sayısı

(9) T: Soruyu çözmek için nasıl bir denklem yazarsın şimdi?

(10) S: İki bilinmeyenli.

(11) T: Çözüme nasıl başlarsın?

(12) S: .....

Öğrenci mülakat sırasında problemin çözümü için nasıl bir denklem kurması gerektiğini ifade etmiştir. Ancak denklem kurmak kolay bir iş değildir. Soruda verilen değerleri matematik diline ( denkleme ) dökmek için öğrencinin sorunun çözümü için nasıl bir strateji seçmesi gerektiğini belirlemesi gerekir. Bundan sonra öğrenci denklemi kurmak için sözel metni dönüştürmelidir. Kurulan denklemi çözmek ise denklem kurmaktan daha kolaydır. Öğrencinin denklemi kuramamasındaki temel sebep budur. Soruda ne tür bir denklem kuracağını bilmemesi.

**İsmail;**

İsmail soruyu sesli bir şekilde okuduktan sonra sorunun hangi problem tipine girdiği, denklemi nasıl kurduğu hakkında sorular yöneltilerek mülakata devam edilir.

(1) T: Hangi problem tipine girer bu problem İsmail?

(2) İ: Sayı problemi.

(3) T: Aslında sözel metin problemleri çoğunlukla karşımıza sayı problemi olarak gelmektedir. Günlük hayatta karşımıza çıkan problemlerde sayı problemi olabilir. Peki bu sorunun denklemini nasıl kurdun?

(4) İ: İki bilinmeyenli denklem sistemiyle kurdum.

(5) T:Evet.

(6) İ:  $x+y$  yani yaptığı maçların toplamı 26'ymış.



(7) T: Güzel. Peki x nedir?

(8) İ: Kazandığı

(9) T: y nedir?

(10) İ: Kaybettiği

(11) T: Maç kaybetmemiş ki?

(12) İ: Yani berabere kaldığı.

(13) T: Diğer denklemi nasıl kurdun?

(14) İ: Kazandığı maçlardan 3 puan alıyor,  $3x$  buna dedim. Beraberlik içinde 1 puan alıyormuş, 1y. Toplam 62 puan almış bunların toplamını 62 ye eşitledim.

$$3x + y = 62$$

(15) T: Nasıl çözdün bu denklemi peki?

(16) İ: Yok etme yöntemiyle çözdüm. Birinci denklemi “-” ile çarparsam denklemlerdeki y leri yok ederiz. Sonra x buluruz. Zaten kazandığı maç sayısını sormuş.

$$\begin{array}{r} -x - y = -26 \\ 3x + y = 62 \\ \hline 2x = 36 \\ x = 18 \end{array}$$

(17) T: Bu çözümden sonra kontrol yapar mısın?

(18) İ: Hayır. Çözdüğüm soruları kontrol etmek sıkıcı bir şey. Aklıma da gelmez zaten genelde.

(19) T: İsmail sana sadece denklemler verilse yani problemin metnini denkleme dönüştürmen istenmezse sadece kurulu denklemleri yada denklem sistemlerini çözmen istense bu denklem çözme sırasında bir problem yaşar mısın?

(20) İ: Hayır öğretmenim. Denklemi çözmek daha kolay. Belki yanlış çözebilirim işlem hatasından, ama kolay.

Öğrenci sosyal hayatla ilgili bu problemi ikinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklem yardımıyla kolayca çözmüştür. Değişkenleri belirledikten sonra bu değişkenleri formülize etmek İsmail için kolay olmuştur. Kurduğu denklem sistemini yok etme metodu ile çözerek sonucu doğru bulmuştur.

Sümeyye ve Ümran birinci dereceden iki bilinmeyenli bir denklemle kolay bir şekilde çözülebilecek bu problemi boş bırakmışlardır. Problem aslında birinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklem yardımıyla da çözülebilir. Ancak öğrenciler problem metninde fark ettikleri iki değişkenden dolayı çözümü bir bilinmeyenli bir denklem kurarak çözme yi düşünememiştir.

Aşağıdaki tabloda tanı testi uygulanan sınıfın tüm öğrencilerinin futbol problemine verdikleri cevap türleri, yüzdeleri ve frekansları verilmiştir.

Tablo 8. Tanı testindeki futbol problemine öğrencilerin verdikleri cevapların frekans ve yüzdesi

| Doğru Çözümler                | %     | f | Eksik Çözümler                  | %     | f |
|-------------------------------|-------|---|---------------------------------|-------|---|
| $x + y = 26$<br>$3x + y = 62$ | 38.88 | 7 | $x + 3y = 0$<br>$26x - 3y = 62$ | 11.11 | 2 |
| $3x + 1.(26 - x) = 62$        | 5.55  | 1 | $3x + 1x = 26$                  | 5.55  | 1 |
|                               |       |   | Boş cevap                       | 38.88 | 7 |

Birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi yardımıyla çözülmesi düşünülerek tanı testine konan bu problemi bir öğrenci bir bilinmeyenli bir denklem kurarak doğru bir şekilde çözmüştür. Öğrenci çözümde, bilinmeyenli eşitliğin her iki tarafında yer aldığı ve parantez ihtiva eden bir denklem kurarak cevabı bulmuştur. Problemi çözmek için iki bilinmeyenli denklem kuran öğrencilerin bir kısmı denklem sistemini çözerken hatalar yaparak doğru cevabı bulamamışlardır. Sınıftan iki öğrenci çözüm için iki bilinmeyenli denklem kurmaya çalışmışlar ancak denklemi kurma aşamasında hata yaptıkları için sonucu bulamamışlardır. Bu problemi 7 öğrenci boş bırakmıştır. Pilot çalışma esnasında bu problemi aritmetik işlemlerle, tahmin ile ve denklemler ile çözen öğrencilere rastlanmıştır. Mülakatın pilot çalışmasında bir öğrenci bu tür spor problemlerini deneme yanılma yoluyla kolay bir şekilde bulduğunu ifade etmiştir.

### 3.2.7. Hız Problemi

*Bir otomobil A şehrinden B şehrine 7 saatte gidiyor. Bu otomobil saatteki ortalama hızını 30 km azaltırsa aynı yolu 9 saatte alacağına göre; iki şehir arasının kaç km olduğunu bulabilir misiniz?*

**Ömer;**

Ömer problemi sesli bir şekilde okuduktan sonra hangi problem tipine girdiği sorusuyla mülakata devam edildi.

- (1) T: Bu soru hangi soru tipine giriyor?
- (2) Ö: Hız problemi
- (3) T: Daha önce hız problemleri çözdün mü?
- (4) Ö: Evet çözdüm.

(5) T: Soruyu okuduktan sonra çözüme başlarken ne düşünüyorsun neden faydalanıyorsun, denklemi nasıl yazıyorsun?

(6) Ö: Bir yol çiziyorum. Arabanın hızına  $x$  diyorum. Yol  $7x$  oluyor.

(7) T: Evet. Ondan sonra?



(8) Ö: Ondan sonra dönüşte hızını azaltmış. Hızından 30 u çıkıyorum. Sonra 9 ile çarpıyorum.

(9) T: Neden ifadeyi paranteze aldın peki?

(10) Ö: Paranteze almasam  $30 \cdot 9$  olacak. Hızı sadece 30 değil ondan paranteze aldım.

(11) T: Bu denklemi çözüp cevabını buluyorsun. İlköğretim 4 ve 5. sınıflarda bu tarz problemlerin çözüm yönteminde problem içinde verilen sayılarla cebirsel işlemler (toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerini) yaparak soruları çözüyor öğrenciler. Bunu sende yapmışsındır o düzeydeyken. Mesela; "9 saat 30 km farktan  $9 \cdot 30 = 270$  km eder. Bu da 7 saatle 9 saat gitmek arasındaki farka eşit oluyor. Yani  $9 - 7 = 2$  den

$270 : 2 = 135$  km iki şehir arasındaki yol" gibi çözümler yapıyor.

(12) Ö: Şimdi çözemem.

(13) T: Denklem kurarak soruyu çözme sana ne/neler kazandırdı?

(14) Ö: Daha hızlı ve kesin çözüyorum. Öteki şekilde çözmekten daha zevkli.

Öğrencinin soruyu çözerken bir yol şeması çizmesi onda önceden beri yapılan alışkanlıklarını ifade ediyor. Halbuki çizdiği şemayı hiç kullanmamıştır. Şema çizdikten sonra problemi değişken kullanarak matematiksel ifadelere dönüştürmüş ve bu matematiksel ifadeleri eşitleyerek problemi bütün olarak ifade eden denklemi oluşturmuştur.

$$\begin{aligned}
 7x &= (x - 30) \cdot 9 \\
 7x &= 9x - 270 \\
 -2x &= -270 \\
 x &= 135
 \end{aligned}$$

Kurduğu denklemdeki parantezi açarak bilinmeyenleri bir tarafta toplayıp değişkeni hesaplayan öğrencinin cebirsel işlemlerinin gelişmiş olduğunu ve şemalaştırarak problemi çözme becerisi kazandığını göstermektedir. Ancak dikkat eksikliğinden kaynaklanan bir etkenle öğrenci problemi tam olarak çözememiştir. Problemin son cümlesinde sorulan

aracın gidişteki hızı değil iki şehir arasının kaç km olduğudur. Öğrenci bu kısma dikkat edememiştir. Bu matematikle ilgilenenlerde genelde öğrencilerin çoğunda rastlanan bir hatadır.

**Ali;**

Ali soruyu sesli bir şekilde okuduktan sonra problem üzerinde klinik mülakata devam edildi.

(1) T: Nedir problem? Hangi tür problem bu?

(2) A: Hız problemi.

(3) T: Daha önce bu tür problem çözdün mü?

(4) A: Evet çözdüm.

Öğrenci hız problemlerini çözmede başarılıdır. Burada yer alan hız problemini bir bilinmeyenli bir denklem kurarak çözmüştür.

(5) T: Problemin çözümünde denklemi nasıl kuruyorsun?

(6) A: Yol eşittir hız çarpı zaman'dan denklemi kuruyorum.



Öğrencilerden bir çoğu hız problemlerini çözerken probleme ait bir şema çizmektedirler. Bu çizilen grafik onlara soruyu çözmede yardımcı olmadan ziyade, onlara problemi çözme yönünde bir şevk, bir yöntem kazandırmaktadır.

(7) T: Verilerli nasıl kullanıyorsun?

(8) A: İlk hızı  $x$  ise 7 saatte gidiyormuş.  $7x$  dedim ona.

(9) T:  $7x$  nedir?

(10) A: Aldığı yol.

(11) T: Denklem ikinci tarafında yazdığın ifade?

(12) A: Hızını 30 km azaltmış, o yüzden  $x-30$  dedim.

(13) T: Neden birbirine eşitledin peki?

(14) A: Yol sonuçta aynıdır.

$$\begin{aligned}
 7x &= (x-30)9 \\
 7x &= 9x - 270 \\
 -2x &= -270 \\
 -x &= -135
 \end{aligned}$$

Öğrenci bu tarz bir hız problemine ait denklemi doğru bir şekilde kurmuştur. Yukarıda da görüldüğü gibi öğrenci çözümünde ilk önce parantezi açmış daha sonra bilinmeyenleri bir tarafta toplayarak denklemi çözme yoluna gitmiştir. Denklemin çözümünde bazı işlemleri kalemle yapmayarak zihinden yapan öğrenci işlemin son aşamasında işaretlemeye hata yapmıştır.

Öğrenci soruya başlamadan önce çizdiği grafikte çizdiği yolda hareketlinin hızına  $x$  demişti. Denklem çözümünde  $x$  i bulup bırakan öğrenci sorunun çözümünü tam yapmamıştır. Soruda esas sorulan hareketlinin ilk hızı değil iki şehir arasındaki yoldur. Bir çok öğrenci yazılı sınavlarda bu şekilde hatalar yapmaktadır. Probleme ait denklemi kurarken, problemde sorulan ifadeden farklı bir ifadeye verilen  $x$  değeri denklemin çözümünün akabinde sorulan ifadeyi hesaplamayı unutturan bir öge olmaktadır.

#### Sema;

Sema problemi sesli bir şekilde okudu. Sema problem çözümünde bir sonuç bulamamıştır. Bununla beraber problemin çözümünde hatırladığı ortalama hız formülünü yazarak problemi çözmeye çalışmıştır. Öğrenciyle problem üzerinde konuşmaya sürdürülerek mülakata devam edilmiştir.

(1) T: Ne tür bir soru bu?

(2) S: Hız Problemi.

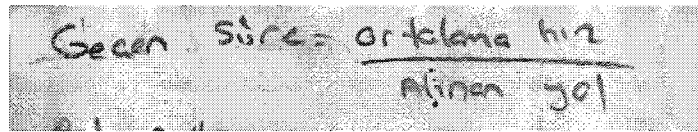
(3) T: Daha önce bu tip sorular çözmüş müydün?

(4) S: Evet.

(5) T: Hangi denklem türünden problemi çözmek daha kolaydır.

(6) S: İki bilinmeyen

Öğrencinin verdiği cevaplar; sınıf içi gözlemleriyle(alan notları) ve tanı testinde yaptığı çözümler düşünüldüğünde öğrencinin problem çözmeden kavradığı biraz ezber bir yöntem oluşudur. Çeşitli problem tipleriyle denklem türlerini kıyaslamış ve cevapları buna göre vermektedir. Aslında bu tür bir eşleme yapmak her ne kadar matematik için yanlış olsa da öğrencinin kendi bilgisini bu şekilde yapılandırmış olması da o kadar güzel bir durumdur. Öğrenci hız problemlerinde hatırlamaya çalıştığı formülü aşağıdaki gibi yazmıştır.



$$\text{Geçen süre} = \frac{\text{ortalama hız}}{\text{Alınan yol}}$$

(6) T: Probleme ait denklemi yazabilir misin?

(7) S: .....

(8) T: Denklem kurmak zor bir iş mi?

(9) S: Zor.

Öğrenci bu problem için denklem kurmanın zor olduğunu ifade etmiştir. Bu onun problem çözmede ilk basamak olan problemi anlama basamağında eksik kaldığını göstermektedir.

(10) T: Zor olduğu noktada, denklem kurmada zorlandığın nokta neresi?

(11) S: Ne yapmam gerektiğini bilmiyorum okuduğumda.

(12) T: Peki bu sorularda verilen sayılarla cebirsel işlem yapmak daha mı kolay geliyor sana?

(13) S: Bu soruda daha kolay.

30'u 3 ile carparsak = 210  
 30 km azalttığına göre  
 210 - 30 = 180 kalır.  
 3.30 = 270 = 270 - 210 = 60, olabilir

Öğrenci bu soruda denklem kurarak problemi çözmek yerine soru içinde verilen sayılarla cebirsel işlem yapmış ve sonucu “olabilir” diye yazmıştır. İlköğretimin ilk kademelerinden gelen bu davranışı değiştirmek oldukça güç olmaktadır. Öğrenci denklem kurarak çözemediği problemi boş bırakmamak için alternatif yöntem olarak sayılarla cebirsel işlem yapmayı uygun görmektedir.

**İsmail;**

İsmail’le hız problemi hakkında; sorunun tipi, çözüm yolu üzerinde konuşarak mülakata devam edilir.

(1) T: Ne tür bir soru bu İsmail?

(2) İ: Hız sorusu.

(3) T: Bu problemi hangi tür denklemi kullanarak denklemlleştirdin?

(4) İ: Bir bilinmeyenli

(5) T: Bu denklemi nasıl kurdun?

(6) İ: (Öğrenci soruyu bir kez daha okur)

(7) T: Çözümde 7x diye bir şey yazmışsın İsmail. Bu 7x nedir?

(8) İ: A şehrinden B şehrine gittiği saat.

$$7x = 9(x-30)$$

(9) T:  $x$  nedir peki?

(10) İ: Bilinmeyen.

(11) T: Neyi bilinmeyen olarak tespit ettin burada? Saate mi bilinmeyen dedin?

(12) İ: Yok. Saat belli.

(13) T: Hız problemlerini denkleştirirken neye dikkat ediyorsun?

(14) İ: Yol eşittir hız çarpı zaman. Bu önemli.

Öğrenci özünde ne yapacağını öğrendiği problemde uyguladığı yöntem aslında iki bilinmeyenli bir denklem çözme örneğidir.

(15) T: (Öğrenci çözümündeki  $7x$  terimi gösterilerek) Burada yazdığın şey ne?

(16) İ: Yol

(17) T: Peki  $x$  neye demiş oldun sen burada?

(18) İ:  $x$  hız olmuş oluyor.

(19) T: Denklemin ikinci tarafında ne yaptın?

(20) İ: Saatteki hızını 30 km azaltırsa aynı yolu 9 saatte alacağına göre  $x-30$  hızı olur.

9 saatte alacağına göre parantez içine alıp çarptım.

(21) T: Bu ikisini neden birbirine eşitledin?

(22) İ: Denklem olması için eşittir olması lazım. Zaten A şehrinden B şehrine gitmişti dönerken B den A ya geliyor. Gittiği yolu geri dönüyor. O yüzden eşitledim.

Öğrencinin verdiği cevap ilginç ve düşündürücüdür. Denklem olması için eşittir olması gerekiyor. Bazı öğrenciler sözel ifadeleri sayısal verilere dönüştürdükten sonra denklem kurmanın mantığını anlamadan problemleri çözmektedir. İsmail burada ifadeleri neden eşitlediğinin cevabını sonradan vermiştir.

(23) T: Sonuçta neyi bulmuş oldun?

(24) İ: Bilinmeyi yani  $x$  i

$$7x = 9x - 270$$

$$7x - 9x = -270$$

$$2x = 270$$

$$x = 135$$

(25) T: Soruda neyi sormuştun? Sen neyi buldun?

(26) İ: ..... (cevap yok)

Öğrencilerin bir çoğunda olduğu gibi İsmail de soruyu çözerken  $x$  diye adlandırdığı değişkeni hesaplamış ve sonucunu bulmuştur. Ancak soruda öğrencinin problemi çözmek için  $x$  diye ifade ettiği değer sorulmamaktadır.

Aşağıdaki tabloda tanı testi uygulanan sınıfın tüm öğrencilerinin hız problemine verdikleri cevap türleri, yüzdeleri ve frekansları verilmiştir.

Tablo 9. Tanı testindeki hız problemine öğrencilerin verdikleri cevapların frekans ve yüzdesi

| Doğru Çözümler    | %     | f | Eksik Çözümler     | %     | f |
|-------------------|-------|---|--------------------|-------|---|
| $7x = (x - 30).9$ | 11.11 | 2 | Boş cevap          | 33.33 | 6 |
| $7x = 9.(x - 30)$ | 5.55  | 1 | Aritmetik çözüm    | 22.22 | 4 |
|                   |       |   | Şema çizip bırakan | 22.22 | 4 |
|                   |       |   | $7x + 9x = 30$     | 5.55  | 1 |

Hız problemlerine örnek olarak sorulan bu problem birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemiyle de birinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklemle de çözülebilecek bir problemdir. Problemin tanı testinde yer alması ve pilot çalışma sırasında diğer hız problemlerinin elenmesi ve bu sorunun kalmasında ölçülecek davranış; problem cümlesinde sorulan ifadeyi öğrencilerin doğru bulup bulamayacağıdır. Sınıftaki öğrencilerden hiçbir tanesi problem metninde sorulan ifadenin cevabını bulamamışlardır. Problemden iki şehir arası uzaklığın kaç km olduğu sorulmuşken, problemi çözen öğrenciler hareketlinin A şehrinden B şehrine giderken ki hızını hesaplayıp bırakmışlardır. Denklemi çözenin problemde sorulan ifadeyi bulmak olmayacağı öğrenciler gözden kaçırmışlardır. Ama yine de öğrencilerden 3 tanesi probleme ait doğru çözüme götüren denklemi kurmada başarılı olmuştur. 4 öğrenci problemi okuduktan sonra bir yol şeması çizerek çözüme başka hiç bir şey yazmamışlardır. Öğrencilerin yaptıkları bu davranış onların geçmişte problem çözme stillerini ortaya çıkartıcı bir davranıştır. 4 öğrenci ise problemdeki sayılarla aritmetik işlemler yaparak ve açıklama cümleleri kullanarak problemi çözmeye çalışmıştır. Ancak yaptıkları işlemler gelişigüzel olduğundan sonuca gidememişlerdir. Bir öğrenci problemi bir bilinmeyenli bir denklem ile  $7x + 9x = 30$  şeklinde ifade etmiştir. Öğrenci denklemin çözüm kümesinin rasyonel olduğunu fark edince çözümü bu şekilde bırakmıştır. Bu problem iki bilinmeyenli denklemler

kullanılarak çözülsedydi öğrenciler sorulan ifadeyi bulmada hata yapma yüzdeleri daha az olabilirdi.

### 3.2.8. Kesir Problemi

*Bir kesrin payına 2 paydasına 1 eklendiğinde kesrin değeri  $\frac{4}{5}$  e denk oluyor. Payından*

*2, paydasından 3 çıkartılırsa kesrin değeri  $\frac{2}{3}$  e denk oluyor. Bu kesri bulabilir misiniz?*

**Ömer;**

Ömer problemi sesli bir şekilde okuduktan sonra hangi problem tipine girdiği sorusuyla mülakata devam edildi.

(1) T: Hangi problem tipine giriyor bu soru?

(2) Ö: Kesir problemi

(3) T: Daha önce bu problem tiplerinden çözdün mü?

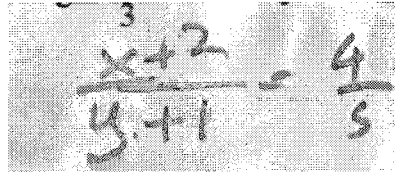
(4) Ö: Çözmüştüm.

(5) T: Neden bu soruyu iki bilinmeyenli denklem kurarak çözdün. Diğer soruların hepsini bir bilinmeyenli denklem kurarak çözmüştün.

(6) Ö: Çünkü burada iki farklı bilinmeyen var.

(7) T: Denklemi nasıl kurdun?

(8) Ö: Kesre  $\frac{x}{y}$  dedim. Payına 2 paydasına bir eklendiğinde  $\frac{4}{5}$  olmuş. Bunu yazdım.



(9) Ö: Payından 2 paydasında 3 çıkartıldığında da kesir  $\frac{2}{3}$  e eşit olmuş onu yazdım.



(10) T: Peki bu bilinmeyenlerden birini diğerinin cinsinden yazamaz mıydın?

(11) Ö: Yazardım ama gene önce iki bilinmeyenli şeklinde yazmam lazım. Oradan y yi x cinsinden yazabilirim mesela.

(12) T: Peki Ömer. Bu şekilde oluşturduğün iki bilinmeyenli denklem sistemini çözüp  $x$  ve  $y$ 'yi buldun sanırım.

(13) Ö: Evet.  $x$ 'i 6  $y$ 'yi 9 buldum. Sadeleşmemiş. Sadeleştirirsek sorulan kesir  $\frac{2}{3}$  olarak bulunur.

esrin değeri  $\frac{2}{3}$  e denk oluyor. Bu kesri bulabilir misiniz?

$$\frac{x+2}{y+1} = \frac{4}{5} \quad 5x+10=4y+4 \Rightarrow 5x-4y=-6$$

$$\frac{x-2}{y-3} = \frac{2}{3} \quad 3x-6=2y-6 \Rightarrow 3x-2y=0$$

$$30-4y=6 \quad y=9$$

$$\frac{x}{y} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\begin{array}{r} 5x-4y=-6 \\ -3x+2y=0 \\ \hline -2x=-6 \\ x=3 \end{array}$$

(14) T: Peki cevabı kontrol edelim. Sorudaki yönergeleri  $\frac{2}{3}$  kesri için uygula.

(15) Ö: (Pay ve paydadaki ekleme çıkarmaları yaptıktan sonra) Cevap  $\frac{2}{3}$  olmuyor.

Cevap  $\frac{6}{9}$ . Bu soruda sadeleştirme yapmamak lazım.

Problemi okuduktan sonra pay ve payda için farklı iki değişken kullanarak problemi çözen öğrenci, problem metninde verilen yönergeleri takip ederek soruyu çözdüğünü ifade etmiştir. İçler dışlar çarpımıyla elde edilen zor formatta sayılabilecek iki denklemin çözümünü yok etme yöntemiyle çözen öğrenci  $x$  ve  $y$  değerlerini bulduktan sonra sadeleştirme yaparak sonucun  $\frac{2}{3}$  olduğunu söylemiştir. Bulduğu sonuç için sağlama yapması söylenildiğinde ise sonuçta sadeleştirme yapmaması gerektiğini anlayan öğrenci problemi doğru bir şekilde çözmüştür.

Ali;

Öğrenci soruyu sesli bir şekilde okuyarak mülakata devam edilir.

(1) T: Hangi problem tipine giriyor bu soru?

(2) A: İki bilinmeyenli denklem sorusu

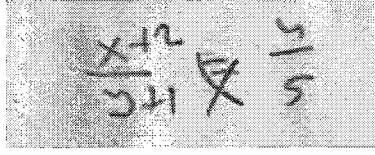
(3) T: Hangi problem tipi?

(4) A: Kesir problemi.

(5) T: Probleme ait denklemini nasıl kurdun?

(6) A: Problem iki bilinmeyenli. Kesre  $\frac{x}{y}$  dedim. En başta payı 1 paydasına 2 ekledim.

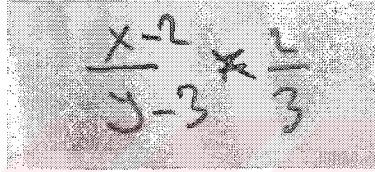
Bu kesir  $\frac{4}{5}$  e eşit oluyor.



$$\frac{x+2}{y+1} = \frac{4}{5}$$

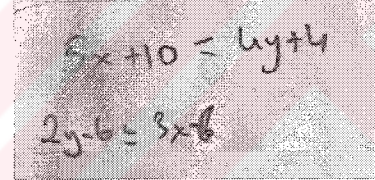
(7) T: Sonra ne yaptın?

(8) A: Sonrada yine kesrin payından 2 paydasından 3 çıkardığımda kesir  $\frac{2}{3}$  e eşit oluyor.



$$\frac{x-2}{y-3} = \frac{2}{3}$$

Yazdıktan sonra içler dışlar çarpımıyla denklemleri düz hale getirdim. Bilinmeyenleri bir tarafa topladım.

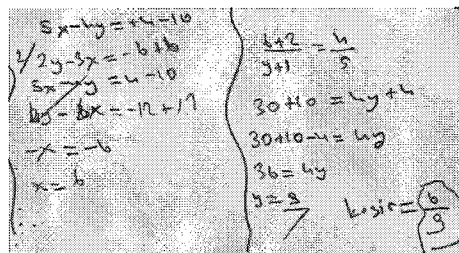


$$\begin{aligned} 5x+10 &= 4y+4 \\ 2y-6 &= 3x-6 \end{aligned}$$

Denklemlerdeki “y” leri yok etmek daha kolay. “y” leri yok ettikten sonra “x” i buldum. Sonra ilk denklemde x yerine değerini yazdım y yi buldum.

(9) T: Bu şekilde kesri ne buldun?

(10) A:  $\frac{6}{9}$



$$\begin{aligned} 5x-4y &= 4-10 \\ 2y-3x &= -6+6 \\ 5x-y &= 4-10 \\ 10-6x &= -12+12 \\ -x &= -6 \\ x &= 6 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \frac{4+2}{y+1} &= \frac{4}{5} \\ 30+10 &= 4y+4 \\ 30+10-4 &= 4y \\ 36 &= 4y \\ y &= 9 \end{aligned} \quad \text{Kesir} = \frac{6}{9}$$

(11) T: Bu kesri sadeleştirmen gerekir mi?

(12) A: Olmaz çünkü sadeleştirildiğinde payına 2 paydasına 1 eklediğimde  $\frac{4}{5}$  e eşit olması lazım.

(13) T: Kesrin sadeleşmiş hali nedir?

(14) A:  $\frac{2}{3}$

(15) T: Bu kesrin payına 2 paydasına 1 eklersen  $\frac{4}{5}$  olmaz mı?

(16) A: Olmaz.

(17) T: Bu durumda bu problemde sadeleştirme yapmamak gerekir.

(18) A: Evet. Sadeleştirdiğimizde sorudaki sayıları bulamayız.

Öğrenci bu problemde bulduğu kesir sonucu sadeleştirmemiştir. Sınavlara hazırlanan öğrencilerde bulduğu sonucu en net haline dönüştürme alışkanlığı oluşmuştur. Genelde bu düzeydeki öğrencilerde problem çözmede bir acele etme davranışı gözlenir. Bu durum onların problemleri çözmede hatalar yapmalarına sebep olmaktadır.

**Sema;**

Öğrenciye soruyu sesli okuması söylenerek mülakata devam edildi. Bu problem öğrencinin boş bırakılmış olduğu bir soruydu.

(1) T: Ne problemi bu soru Sema?

(2) S: Kesir problemi

(3) T: Daha önce bu tip bir soru çözmüş müydün?

(4) S: Tek başıma çözmedim. Yardım alarak çözmüştüm ama.

(5) T: Nasıl çözersin peki?

(6) S: Bu tür soruları tek başıma çözemiyorum.

Öğrenci bu tür bir kesir probleminin denklemini kurmada başarısız olduğunu dile getirmiştir. Bunun sebebi bu tür örneklerin çözümü sırasında öğrencinin sınıfta bulunmayışdır. Basit tarz da iki bilinmeyenli denklem sistemiyle çözülecek bu problemin denklemini yazmak problemi çözmekten daha kolaydır.

**İsmail;**

İsmail'le soru üzerinde mülakata devam edilir.

(1) T: Ne tür bir problem?

(2) İ: Kesir problemi

(3) T: Daha önce bu tip soru çözdün mü?

(4) İ: Çözdüm.

(5) T: Bu sorunun çözümünde hangi denklem türünü kullandın?

(6) İ: İki değişken olduğuna göre iki bilinmeyenli denklem kullandım.

(7) T: Güzel nedir o değişkenler?

(8) İ:  $x$  ile  $y$

(9) T: Yani neyi ifade ediyorlar?

(10) İ: Pay ve paydayı.

$$\frac{x+2}{y+1} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{x-2}{y-3} = \frac{2}{3}$$

(11) T: Pay ve paydaya  $x$  ve  $y$  diyerek sorudaki ifadeleri nasıl denklem haline getirdin?

(12) İ: Paya eklenir dediğinde paya topladım veya çıkartılır dediğinde çıkarttım. Payda içinde aynı şekilde. Sonra denklemi düzenledim içler dışlar çarpımından. Daha sonra yok etmeyle çözdüm.

$$\begin{aligned} 5x+10 &= 4y+4 \\ 5x-4y &= 10-4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x-6 &= 2y-6 \\ 3x-2y &= -6+6 \end{aligned}$$

Birinci Eşitliğin Düzenlenmiş Hali      İkinci eşitliğin Düzenlenmiş Hali

Yukarıda öğrenci Birinci Eşitliğin Düzenlenmiş Hali’de hata yapmıştır. Bilinenleri sağ tarafa toplama işleminde  $4 - 10$  yapması gerekirken  $10 - 4$  yazmıştır. Bunun sorunun çözümünü değiştirmesi beklenir. Ancak daha sonra düzenlenmiş olduğu denklemdeki çözümü yaparken bir işaret hatası daha yapmıştır. Problemin sonucu doğru bulunmuştur ancak ara basamaklarda İsmail hata yapmıştır. Denklem kurma ve çözmede ilköğretim öğrencilerinin en büyük sıkıntısı işaret hataları yapmaktır.

(13) T: Denklem kurarak problem çözme; sayılarla toplama, çıkarma, çarpma gibi aritmetik işlem yaparak problemi çözmeden daha mı kolay?

(14) İ: Denklem kurarak soruyu çözmek daha mantıklı ama öteki yol daha kolay.

Öğrenci sayılarla aritmetik işlem yaparak problem çözmeyi daha kolay görmektedir. Bazen sayılarla işlemler yaparak problemleri çözmek belki daha kolay olabilir ama içinden çıkılamayacak kadar karmaşık problemlerde, sayılarla oynayarak (cebirsal işlemler yaparak) problemi çözmek nerdeyse imkansız olabilir. Cebirsal işlemlerle soruyu çözmek düzeye uygun bir yöntem de değildir zaten.

Aşağıdaki tabloda tanı testi uygulanan sınıfın tüm öğrencilerinin kesir problemine verdikleri cevap türleri, yüzdeleri ve frekansları verilmiştir.

Tablo 10. Tanı testindeki kesir problemine öğrencilerin verdikleri cevapların frekans ve yüzdesi

| Doğru Çözümler                                                     | %     | f | Eksik Çözümler                  | %     | f |
|--------------------------------------------------------------------|-------|---|---------------------------------|-------|---|
| $\frac{x+2}{y+1} = \frac{4}{5}$<br>$\frac{x-2}{y-3} = \frac{2}{3}$ | 33.33 | 6 | $\frac{2+x}{1+y} = \frac{4}{5}$ | 16.66 | 3 |
|                                                                    |       |   | $\frac{x}{y} = \frac{4}{5}$     | 11.11 | 2 |
|                                                                    |       |   | Boş cevap                       | 38.88 | 7 |

Kesir problemi olarak sorulan son soruya ait denklemi 6 öğrenci doğru yazarken bu öğrencilerin hepsi kurdukları denklemleri çözmede başarılı olamamıştır. Öğrencilere iki bilinmeyenli denklem kurmak, kurdukları denklemi çözmekten daha kolay gelmiştir. Kurulan denklem kesirli ifade olduğu için öğrenciler doğru kurdukları denklemlerde içler dışlar çarpımı yaparken cebirsel hatalara çok düşmüşlerdir. Sınıftaki 7 öğrenci ise bu problemi cevapsız bırakmıştır.

Aşağıdaki tabloda sınıfın tüm sorulara verdikleri doğru cevap ve eksik cevapların yüzdeleri ve frekansları bir arada verilmiştir.

Tablo 11. Öğrencilerin tanı testindeki problemlere verdikleri cevapların genel değerlendirmesi

|                   | Doğru Cevap |    | Eksik Cevap |    |
|-------------------|-------------|----|-------------|----|
|                   | %           | f  | %           | f  |
| Sınıf Problemi    | 77.77       | 14 | 22.22       | 4  |
| Sayı Problemi     | 55.55       | 10 | 44.44       | 8  |
| Yaş Problemi      | 61.11       | 11 | 38.88       | 7  |
| İşçi Problemi     | 44.44       | 8  | 55.55       | 10 |
| Merdiven Problemi | 22.22       | 4  | 77.77       | 14 |
| Futbol Problemi   | 44.44       | 8  | 55.55       | 10 |
| Hız Problemi      | 16.66       | 3  | 83.33       | 15 |
| Kesir Problemi    | 33.33       | 6  | 66.66       | 12 |

Yukarıdaki tablo incelendiğinde uygulanan testte öğrencilerin en başarılı olduğu problemin sınıf problemi olduğu görülür. Sınıf problemi bilinmeyen bir tarafta olduğu BDBBD yardımıyla çözülebilecek bir problemidir. Benzer bir şekilde sayı ve işçi problemlerinin yapılma oranı da iyidir. Bu problemlerde bilinmeyen eşitliğin her iki tarafında da yer aldığı BDBBD ile çözülebilecek problemlerdir. İşçi problemi öğrencilerin yaklaşık olarak yarısının yaptığı bir problem olmuştur. Bu problemde öğrencilerin eksik cevaplarının büyük bir kısmı kesirlerle yapılan işlem hataları ve içler dışlar çarpımı oluşturmaktadır. BDBBD yardımıyla çözülebilecek merdiven probleminin çözüm oranının düşük olması Polya'nın problem çözme adımlarından problemi anlama basamağında öğrencilerin bu soru için eksik kaldığının bir göstergesidir. Bu problemde öğrencilerin çoğu nasıl denklem kurmaları gerektiğini bilmediklerini dile getirmişlerdir. Futbol problemi BDİBD yardımıyla kolay bir şekilde çözülebilecek bir problemdi. Öğrencilerin büyük bir kısmı denklemi yanlış kurmuş ve doğru cevabı bulamamışlardır. Testteki problemlerden en az yapılma oranına sahip olan hız probleminin tam ve doğru bir şekilde yapılamamasının sebepleri öğrencilerin problem sonundaki soru cümlecini dikkatli okumadıklarından kaynaklanmıştır. Öğrenciler kurdukları denklemi çözmenin cevabı bulmak olduğunu düşünmüşler ve problemde istenen cevabı doğru bir şekilde bulamamışlardır. BDİBD yardımıyla çözülebilecek olan kesir problemine ait denklemi kurmak, öğrencilere kurdukları denklemi çözmekten daha kolay gelmiştir. Kurulan denklemlerde içler dışlar çarpımı yaparak denklemleri standart forma ( $ax + by = c$ ) dönüştürürken bir çok öğrenci hata yapmıştır. İki öğrenci ise cevap olarak buldukları kesirleri sadeleştirmiş ve cevabın sadeleşmiş haldeki değeri olduğu hatasını yapmışlardır.

#### 4. TARTIŞMA

Doğa matematik üzerine inşa edilmiştir. Her insan bilerek veya farkında olmadan matematiği kullanır. Her insanın kullandığı matematiğin merkezinde, problem çözme yer alır. Problem çözme sadece matematikte karşımıza çıkmaz. Hayatın her evresinde insanlar problemlerle iç içe yaşarlar. Dolayısıyla günümüzde her alanda problem çözme yeteneği yüksek bireyler başarılı olmaktadır.

Günlük yaşantıda basit alışveriş problemlerinden yüksek düzeyde matematik bilgisi gerektiren problemlerle karşılaşabilmekteyiz. Matematik eğitiminin temel amaçlarından birisi kişiyi iyi bir problem çözücü olarak yetiştirmektir. Burada problem çözücünden kasıt; neden-sonuç ilişkilerini iyi kurabilen, sorunun kaynağını görebilen, çözüm için farklı yollar tasarlayan kısaca düşünen ve üreten beyinler anlaşılmalıdır.

Einstein'a bir problem vereceklerini ve o problemi çözmesi için de 1 saat süre tanıyacaklarını söylemişler. Bu süreyi nasıl değerlendireceği sorulan Einstein'ın cevabı, problem çözmeye en önemli basamağın hangisi olduğunu ortaya koyacak niteliktedir. Einstein 1 saatlik sürenin 45 dakikasını problemin çözümü hakkında düşüneceğini, 10 dakikasını ne yapacağını tasarlayacağını ve 5 dakikada da problemi çözeceğini söylemiştir. Anlatılan örnek olaydaki gibi bir problemi çözmek için problemde ne verilip neyin istendiğini, nasıl bir strateji uygulanabileceği ve yapılacak işlem adımlarını iyi hesaplamak gerekir.

Öğrenciler eğitim hayatları boyunca matematikle iç içe bulunmaktadır. Matematik deyince bir çok kişinin aklına problem çözme gelmektedir. Gerçekten de insanların matematik yaşantıları boyunca problem çözme matematikten hiç ayrılmaz. Uzman olarak problem çözmeye başlama yeri ise ilköğretim 7. sınıf olarak gösterilebilir. Çünkü öğrenciler bu sınıftaki matematik derslerinde; problemleri bilinmeyen kullanarak çözme becerisini kazanmaya başlarlar. Ancak problemleri denklemler kurarak çözme süreci onlar için kolay değildir.

Bu çalışmada öğrencilerin sözel problemleri matematik diline çevirme ve kurulan denklemleri çözme becerisi ele alındı. Araştırmacı öğretmen yönteminin kullanıldığı bu çalışma sekizinci sınıfta okuyan 18 öğrenciyle yürütüldü. Çalışma problemine uygun olarak araştırmacı öğretmen yöntemi seçilmiştir. Öğretmenin araştırmacı bir kimlikle

olaya yaklaştığı bu yöntem, eğitim-öğretim sürecinde ortaya çıkan spesifik bir problemi belirleyip çözmek için kullanılacak en uygun yöntem olduğundan bu çalışmaya uygundur.

Çalışma 8. sınıfta yer alan problemler konusunun işlenmesi sırasında gerçekleştirilmiştir. Araştırmanın pilot çalışması Yomra Özdil İlköğretim Okulu'nda yapıldı. Pilot çalışma iki bölümden oluşturuldu. Birinci bölümde bu okulda okuyan 8. sınıf öğrencilerinden, 6 sorudan oluşan birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem yardımıyla çözülebilecek problemleri çözmeleri istendi. Normal bir sınav atmosferinde gerçekleşen bu sınav öğrencilerin matematik öğretmenini nezaretinde gerçekleştirildi. Pilot çalışmanın ikinci bölümünde aynı öğrencilere yine 6 sorudan oluşan birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi yardımıyla çözülebilecek problemler soruldu. Klinik mülakatın pilot çalışması ise uygulamalardan birer hafta sonra gerçekleştirildi. Tanı testlerinde yer alan problemler, ilköğretim düzeyinde çeşitli kaynaklar taranarak ve birkaç öğretmenle tartışılarak belirlendi. Öğrencilerin bu testlerdeki sorulara verdikleri cevaplar incelenerek araştırmada ölçülmek istenen davranışları sergilemeyen problemler testten çıkartıldı. Öğrencilere çok zor ve çok kolay gelen sorular ve çözümü sayı olarak çok az yapılan sorularda testten çıkartılarak yeni bir tanı testi oluşturuldu. Yeni tanı testinin oluşturulmasında danışman dönütleri dikkate alındı. Bu testin oluşturulmasında soruların türleri, çözümde kullanılacak denklem çeşidi, denklemde yer alan parametrenin durumu ve anlatımın açık olması göz önüne alındı. Esas çalışmada veri toplama aracı olarak kullanılacak tanı testindeki sorular sınıf problemi, sayı problemi, yaş problemi, işçi problemi, merdiven problemi, futbol problemi, hız problemi ve kesir problemi olarak adlandırıldı.

Konunun işlenmesi toplam 11 hafta sürmüştür. İlk hafta öğrencilerin birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri çözebilme düzeyleri belirlenerek bu düzeyi artırıcı uygulamalar yapıldı. Öğrenciler denklem çözmeyi daha önce 7. sınıfta gördüklerinden dolayı bu bölümde çok zorluk çekilmedi. Daha sonraki 5 hafta boyunca birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemle çözülebilecek problemler konu başlıkları altında (sayı problemi, yaş problemi gibi) işlendi. Geriye kalan 5 haftalık sürenin ilk haftasında birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemleri ve çözüm yöntemlerine ilişkin çalışmalar yapıldı. Son 4 hafta içinde birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemiyle çözülebilecek problemlere örnek oluşturacak problem türleri çözüldü. Çalışma süresince sınıf içinde öğrencilerin denklem çözme ve denklem kurmaya karşı tutumları ve bu konu hakkında düşünceleri ders sonralarında not tutuldu. Bu notlara, araştırmada alan notları

başlığı altında yer verildi. Araştırmanın son haftasında oluşturulan tanı testi sınıfı bir sınav atmosferinde öğrencilere uygulandı. Uygulama sonrasında düşüncelerini rahat ve düzgün bir şekilde ifade edebilen öğrencilerden seçilen 6 kişiyle klinik mülakatlar yapıldı. Mülakat yapılan öğrencilerden 3 tanesi kız, 3 tanesi erkek olarak belirlendi. Bu seçimde erkek ve kızların başarı oranlarının kıyaslanması amaçlanmamıştır. Öğrenci seçimi belirtilen kriterleri sağlayanlar arasından yapılmıştır. Öğrencilerle yapılan klinik mülakatlar bir teyp ile kasete alındı. Ayrıca mülakatlar sırasında öğrencilerin tavır ve tutumları kameraya alındı. Öğrenci mülakatlarının tanı testinde yaptıkları çözümlerin yorumlanmasıyla bulgular elde edildi.

BDİBD yardımıyla kolay bir şekilde öğrencilerin çözebileceği problemlerde (ki problem BDBBD yardımıyla da çözülebiliyorsa) öğrenciler genelde problem çözümünde BDBBD kullanmayı tercih ettikleri görülmüştür. Bu şekilde olan problemlerde öğrenciler problemi denklem haline getirmek için seçtikleri değişkene verdikleri parametreyle denklemi çözmeyi problemi çözmek olarak algılamaktadırlar. Halbuki soru cümlesinde sorulan ifade diğer değişkeni bulmaları gerektiği şeklinde olabilmektedir.. Cevabı yanlış bulan öğrencilerde hayal kırıklığı yaratmakta ve matematiğe karşı önyargı oluşturmaktadır.

Tanı testinde yer alan hız probleminde iki şehir arasındaki yol sorulmaktadır. BDBBD yardımıyla problemi çözen öğrencilerin buldukları cevap hareketlinin hızı şeklindedir. Mülakat yapılan öğrencilerin hiç birisi bu soruya doğru cevap verememiştir. Problemi çözen öğrenciler hareketlinin hızına  $x$  diyerek problemi denklemlenştirmiş ve kurduğu denklemdeki  $x$ 'i bularak problemde sorulanın cevabını bulduğunu sanmaktadırlar.

Rasyonel sayılar kullanmayı gerektiren problemlerde öğrencilerin işlem yapma becerileri, tam sayıların yer aldığı problemlerdekine oranla daha zayıf kalmaktadır. Kesirli sayılarla işlem yapma becerisi ilköğretim 6. sınıfta kazandırılmaya çalışılırken bu seviyedeki öğrencilerin negatif sayılardan haberdar olmaması ve daha sonraki senelerde hem negatif hem de kesirli ifadeler içeren yeterli örnek çözülmemesi bu durumu doğurmaktadır.

Öğrencilerin problemleri çözme aşamalarında denklem kurarken parantez kullanma, denklemleri çözerken de işaret hataları yapma sıkça görülen hatalar arasında yer almaktadır. Bu duruma Baki de dikkat çekmiştir [32]. Örneğin; “*Beş fazlasının 4 katı ile 2 eksiğinin 3 katı arasındaki fark 33 olan sayı kaçtır?*” tarzındaki bir problemin denklemini  $4(x + 5) - 3(x - 2) = 33$  şeklinde kurabilen öğrencilerin bir çoğu parantezleri açarken işlem hatası yapmaktadır. Denklemdeki ikinci terimde parantezin dışında olan  $(-3)$  sayısını

paranteze dağıtırken, parantez içindeki (-2) sayısı ile işaretleriyle birlikte çarpmada çoğu öğrenci hata yapmıştır.

Öğrenciler genelde iki sayının farkını, sayılar yer değiştirdiğinde de aynı sonucu verdiği kanısına kapılmaktadır. Nicel olarak sayıların bilindiği durumda bu hatayı öğrenciler genelde yapmazken, sayılardan en az birisi için parametre kullanıldığı durumda yukarıda sözü edilen hataya düşmektedirler. Örneğin öğrenci  $x - 21$  ile  $21 - x$  ifadelerinin aynı durumu ifade ettiğini düşünmektedir.

Öğrencilerin bir çoğu problemi formülüze ederken problemde sorulan değeri  $x$  ile ifade etme eğilimdedir. Bu durum bazı problemlerde denklemi kurmada zorluk çıkarmaktadır. Sorulan ifadeye  $x$  denildiğinde denklemi kurmak güç olabilmektedir. Öğrenciler; sorulan ifadeye değil de başka bir ifadeye  $x$  dediklerinde; denklemi kurduktan sonra denklemin çözümünü problemin cevabının bulunması olarak düşünebilmektedirler.

Sözel bir problemi denklem kurarak çözme sırasında Polya'nın problem çözme basamaklarından birincisi olan problemi anlama basamağında güçlük çeken öğrenciler, problemi denklem kurarak çözmeden ziyade problem metninde verilen sayılarla aritmetik işlem yaparak veya deneyerek soruyu çözme çabası içerisine girmektedirler. Polya problem çözme etkinlikleri sırasında en önemli basamağın problemi anlama basamağı olduğuna dikkati çekmiştir [27].

Hong yaptığı araştırmada sözel problemlere ait denklemleri doğru bir şekilde kuran öğrencilerin problemleri çözmede başarılı olduğu sonucuna ulaşmıştır [54]. Hong çalışmasında ulaştığı sonuç çalışmamızda elde ettiğimiz bulguları destekler durumdadır.

Mayer problem çözmekteki güçlüklerin problemi anlama ve denklem oluşturma aşamalarından kaynaklandığını ifade etmiştir [55]. Genel olarak çalışmamızdan elde ettiğimiz bulgular bu görüşü desteklemektedir.

## 5. SONUÇLAR

Bu çalışmada 8. sınıf öğrencilerin problem çözme sürecinde denklemlerden yararlanabilme becerileri araştırılmıştır. Araştırmacı öğretmen yöntemiyle yürütülen çalışma sonunda sekizinci sınıfta okuyan 18 öğrenciye tanı testi uygulanmıştır. Tanı testi uygulanan öğrencilerin içinden seçilen 6 öğrenciyle klinik mülakatlar yapılmıştır. Araştırma kapsamında elde edilen bulgular üç bölümden oluşmaktadır. Bunlar; (1) alan notları, (2) tanı testi verileri ve (3) klinik mülakatlardır.

Tanı testinde öğrencilerin problemlere verdikleri cevaplar; klinik mülakatlarla yorumlanarak bulgular bölümünde sunulmuştur. Alan notları başlığı altında yer alan bulgular, öğrencilerin ders ortamında denklem çözme, denklem kurma ve problem çözmeye karşı tutumlarını içermektedir.

Bulgulardan elde edilen sonuçlar iki başlık altında toplanabilir.

### 5.1. Alan Notlarından Elde Edilen Sonuçlar

Ders içi gözlemlerden, öğrencilerin konuya ve matematiğe karşı tutumlarından elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibidir.

1.  $3(x + 5) - 2(x - 2) = 14$  şeklinde formülize edilebilen bir problemin çözümünde öğrencilerin çokça yaptıkları hata işaretlere dikkat etmeden işlem yapma olmaktadır. Çarpıcı başka bir sonuç ise; parantezleri açtıktan sonra bilinmeyenleri bir tarafa, bilinenleri diğer tarafa toplarken eşitliğin sol tarafında bulunan terimlerin işaretlerinin değiştirilmesidir. Öğrenci parantezi;  $3x + 15 + 2x - 4 = 14$  şeklinde açmış, daha sonra bilinenleri sağ tarafa bilinmeyenleri de sol tarafa  $3x - 2x = 14 - 15 + 4$  şeklinde toplamıştır. Yani  $2x$  teriminin 15 sayısından önceye alırken sanki eşitlikte taraf değiştiriyormuş gibi hareket etmiştir.
2. Sınıf içinde sorulan “2 katı, 2 fazlası ve yarısının toplamı 28 olan sayıyı nasıl bulursunuz?” problemine ait denklemin kurulumunda öğrencilerden bir çoğu denklemi  $\frac{2x+2}{2} = 28$  şeklinde kurmuşlardır. Öğrencilere yazdıkları denklemi okumaları söylendiğinde problem metnindeki gibi okumamışlardır.

3. Matematiğe karşı olumsuz tutumları olan öğrenciler beklenildiği gibi bu konuda yeterli başarıyı sergileyememiştir. Bir işi başarmak için öncelikle işin sevilmesi, sevdirmesi gerekmektedir.
4. Fiziki şartların olumsuzluğu; gürültü, konsantre bozulması, dikkatin dağılması, sınıf atmosferi gibi bazı etkenler konunun öğrenilmesine etki yapmaktadır.
5. Öğrenciler temel matematiksel kavramları bilmiyorlar veya unutuyorlar (ardışık olma gibi). Bu da onların problemleri denkleştirilmede beklenen başarıyı göstermelerini engellemektedir.
6. Öğrencilerin bir çoğuna denklem çözmek denklem kurmaktan zevkli ve kolay gelmektedir. Öğrenciler kendilerine verilen denklemleri çözmede probleme ait denklemi yazmadan daha başarılıdırlar. Problem denklemini yazamayan öğrenciler problemin denklemini çözmede başarılı olmuşlardır.
7. Öğrenciler bir bilinmeyenli denklemleri çözmede iki bilinmeyenli bir denklem sistemini çözmekten daha başarılı olmuşlardır.
8. Öğrencilerin bu konuda matematiğe karşı tutumları, konu içerisinde çok fazla problem türü olduğu ve her biri için formülleri ezberlemenin zor olduğu şeklindedir. Öğrenciler dersin işlenmesi sırasında ayrı başlıklar altında incelenen problemler için sanki her birinin ayrı ayrı formüllerle çözüldüğünü düşünmüşlerdir. Esasında problem çözmenin kökeninde formül diye bir şeyi bilmeye gerek yoktur.

## 5.2. Klinik Mülakatlardan Elde Edilen Sonuçlar

Öğrencilere uygulanan tanı testinden elde edilen bulgularla beraber altı öğrenciyle yapılan klinik mülakatlar neticesinde aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

1. Bilinmeyenlerin bir tarafta toplanmış olduğu birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem (BDBBD) yardımıyla çözülebilecek sözel problemleri öğrenciler matematik diline çevirirken zorlanmakta fakat denklem çözümünde daha başarılı olmuşlardır.
2. Parametrelerin denklemin iki tarafında da yer aldığı BDBBD yardımıyla çözülebilecek sözel problemlerin formülüze edilmesi, yukarıda belirtilen sonuçtan çok farklı bir sonuç ortaya çıkarmamıştır. Ancak denklem çözümünde öğrenciler probleme uygun denklemi yazarken paranteze alma ve parantez açma işlemlerinde hatalar yapmaktadır.

3. İlköğretim sekizinci sınıf matematik müfredatında yer alan problemler bölümünde (yaş, işçi-havuz, sayı, kesir, hız,...) öğrenciler genel olarak bu konularda fazla formül olduğu kanısına sahiptir. Esasında formül içermeyen bu tip soruların çözümü çeşitlilik gösterdiği için öğrencilerde bu durum, konunun formül yığınıymış gibi kavradıkları sonucuna varılmıştır.
4. Öğrencilerde cebirsel işlem yapma yeteneği tam olarak gelişmediğinden problem çözerken yaptıkları işlemlerde güçlükler çekmektedirler. Özellikle rasyonel sayılarla işlem yapılması gereken problemlerin çözümünde öğrenciler yeterli başarıyı gösterememiştir. Yapılan işlem hatalarının büyük bir kısmını dikkatsizlik, aceleci davranma ve işaret hataları oluşturmaktadır.
5. Öğrencilerin bir kısmında problemde sorulan ifadeye  $x$  diyerek problemi çözme davranışı oluşmuş. Bu davranış, bazen onların denklemi kurmalarında zorluk çekmelerine sebep olmaktadır. Sorulan ifadeye her zaman  $x$  diyerek problemi çözmeye çalışmak her zaman için iyi bir yöntem olmayabilmektedir..
6. Öğrencilerin bir çoğu problemi çözmek için denklemi kurduktan sonra çözümü bulmanın problemin cevabını bulma olduğunu sanmaktadır. Bazı sorularda problemi denklem haline getirmek için problem metninde sorulan ifadeye değil başka bir ifadeye  $x$  demek, denklemi oluşturmada bize daha kolaylık sağlamaktadır. Ancak kurulan denklemin çözümü problemde sorulan cevap değildir. Sorunun cevabını bulmak için sorulan ifadedeki  $x$  yerine bulunan değer yazılmalıdır. Bir çok öğrenci bu konuda hata yapmaktadır.
7. Tanı testinde yer alan işçi ve kesir problemleri öğrencilerin işlem yaparken zorluk çektikleri problemler olmuştur. Öğrenciler rasyonel sayı içeren problemlere ait denklemi kurmaktan ziyade kurdukları denklemi çözmede güçlük çekmiştir. Öğrenciler, orantı şeklinde olan iki bilinmeyenli bir denklemi kurmakta başarılı oldukları halde kurdukları denklemi çözmede denklem kurma kısmındaki kadar başarılı olamamışlardır. Bu hatalar genelde içler dışlar çarpımı yaparken parantez kullanma ve işaret hatası şeklinde olduğu görülmüştür.

## 6. ÖNERİLER

Bu çalışmada 8. sınıf öğrencilerin literatürde *word problems* olarak geçen, sözel problemleri çözerken denklemlerden yararlanma becerileri ortaya konulmuştur. Müfredatta ilk olarak 7. sınıfta yer verilen problemlerin denklemler kullanarak çözümünde görülen aksaklıkların giderilmesi için bu bölümde öğretmenlere ve program geliştiricilere bir takım önerilerde bulunmaktadır.

Öğrenciler karşlarına çıkan problemlerin denklemini kurmakta güçlük çekmekte veya kurdukları denklemleri çözerken işlem hatası yapmaktadırlar. Bunun örneklerine sadece ilköğretimde değil orta öğretim ve yüksek öğretimde de rastlanılmaktadır. Amacımız matematiğin bel kemiği olan bu konuda öğrencilerin yaptıkları yanlışlıkları gidererek, daha iyi bir öğrenme çevresi içinde bu konunun anlaşılması ve ülkemizin dünyada matematik alanında hak ettiği sırada olmasını görmektir. Bunu sağlamak için en büyük görev öğretmenlere düşmektedir.

Konunun müfredatta girdiği ilk seviye olan 7. sınıftaki öğrenciler için denklem çözme alıştırmalarının bir sıraya göre yapılmasında büyük fayda bulunmaktadır. İlk olarak bilinmeyenin eşitliğin bir tarafında yer aldığı daha sonra parantez içeren alıştırmalar ve bilinmeyenin eşitliğin her iki tarafında da yer alan denklem çözme alıştırmalarının yeterli miktarda yapılması öğrencilerin denklem çözme becerilerini geliştirecektir. Daha sonra paranteze negatif sayı dağıtılan ve rasyonel sayılar içeren örneklerin çözülmesi öğrencilerde denklem çözme konusunda kendilerine olan güveni artıracak ve konunun pekiştirilmesi için iyi bir strateji olacaktır. Denklem çözmeye sorun yaşamayan öğrenci için problem çözme, artık problem metnindeki bilgiyi denkleme dönüştürmekten ibaret kalacaktır. Dolayısıyla öğrencilerin ilk önce iyi bir denklem çözücü olarak yetiştirilmesinde büyük fayda bulunmaktadır.

Sözel problemlerin formülüzasyonunda ilk aşamada yukarıda belirtilen stratejinin takip edilmesi öğrenciler için kolay bir öğrenme ortamı sağlayacaktır. Problem çözme alıştırmalarında problemleri sınıflandırmak öğrencilerde düzenli bir öğrenme ortamı sağlayacak ve onların daha önceki tecrübelerinden de faydalanarak, problem çözmenin zevkli bir uğraş olduğunu sezinlemelerine yardımcı olacaktır. Ders esnasında aynı mantıkla çözülebilecek farklı sözel ifadelerle sahip alıştırmalara yer vermek, onların değişik soru tipleriyle tanışmalarını sağlayacak ve karşılaştıkları problemlere yabancı kalmamaları

fırsatını verecektir. Problem çözmeye alıştırmaya ve tekrar tarzında örneklerle bolca yer vermek öğrencilerin problem çözme becerilerini geliştirecektir.

Öğrencilere problem çözme becerisi aşama aşama kazandırılmalıdır. Başlangıçta öğrencilerin verilenler ve istenenlerin ne olduğunun farkına varmaları sağlanmalıdır. Verilenler ile istenenler (veya istenen) arasındaki ilişkiyi kavramaları ve sistematik bir düşünmeyle problemi çözme çalışmaları onların problem çözmeye başarılı olmalarına yardımcı olacaktır.

Öğrencilerde anlamlı öğrenme yaşantıları oluşturabilmek için kitaplarda günlük hayatta karşılaşılabilecek ilginç, düşündürücü ve dikkat çekebilecek tarzda örneklerle yer verilmesi denklemler yardımıyla problem çözme becerilerinin kazandırılmasına yardımcı olacaktır. Ayrıca çözüm için eksik bilgi veya fazla bilgi verilen problemlerle öğrencilerin bunları bulup ortaya çıkarmaları istenen alıştırmalar ders kitaplarına konulabilir.

Bu çalışmada ele alınan problemlerde her ne kadar kapsam bütünlüğünü sağlanmaya çalışılmışsa da daha sonraki araştırmalarda farklı problemler ele alınarak denklemler yardımıyla öğrencilerin problem çözme becerileri veya düzeyleri incelenebilir. Araştırmada sağlama üzerinde çalışılmadığı için Polya'nın değerlendirme basamağı ihmal edilmiştir. Bu anlamda bundan sonra yapılacak çalışmalarda öğrencilerin denklemlerden yararlanma becerilerini ortaya koymasına fırsat sağlaması bakımından çözümün doğru olup olmadığı üzerine diyalogların konulması önemlidir.

## 7. KAYNAKLAR

1. <http://www.sanalpsikolog.com/ProblemCozmeBecerisi.doc>, Problem Çözme, 2004
2. Göker, L., Matematik Tarihi ve Türk-İslam Matematikçilerinin Yeri, Milli Eğitim Basımevi, İstanbul, 1997.
3. Yıldırım, C., Matematiksel Düşünme, Remzi Kitabevi, İstanbul, 2000.
4. Ay, E., İlköğretim 5. Sınıf Öğrencilerinin Problem Çözme Becerilerinin Geliştirilmesi Nasıl Sağlanır?, Yüksek Lisans Tezi, Marmara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, 2001.
5. Altun, M., İlkokul 3.,4. ve 5. Sınıf Öğrencilerinin Problem Çözme Davranışları Üzerine Bir Çalışma, Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ankara, 1995.
6. Türer, C., Eğitimde Aksiyon Araştırmaları, Yayınlanmamış Makale, İstanbul, 1999.
7. Heppner, P. “ A Review of The Problem Solving Literature and It's Relationships to the Counseling Process” Journal of Counseling Psychology, 25, 366, 1978.
8. Anderson, J. R., Cognitive Psychology and Its Implications, San Francisco: Freeman, 1980.
9. Charles, R. ve Lester, F., Teaching Problem Solving: What, Why And How., Palo Alto, CA: Dale Semour Publications, 1982.
10. Gilbert, S.K.(1996, April). “Arithmetic Story Grammar: Using literary devices to analyze and categorize story problems”. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, New York, NY
11. De Corte, E., Verschaffel, L. ve De Win, L., “The Influence of Rewording Verbal Problems on Children's Problem Representations and Solutions”, 1984.

12. Taylan, S., "Heppner'in Problem Çözme Envanteri'nin Uyarlama, Geçerlik ve Güvenirlik Çalışmaları", Yayınlanmamış Master Tezi, A.Ü. Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ankara, 1990.
13. Wayne A. Wickelgren, How to Solve Problems, San Francisco: Freeman, 1974
14. Kroll, D.L. & Miller, T. Insight From Research on Mathematical Problem Solving in The Middle Grades. In D.T. Owens(ed), Research Ideas for The Classroom: Middle School Mathematics. (pp58-77). New York: Macmillan Publishing Company, 1993.
15. Mirasyedioğlu, Ş., Temel Matematik II, Gündüz Eğitim ve Yayıncılık, Ankara, 1999.
16. TDK, Türkçe Sözlük, İstanbul, 1998.
17. Baykul, Y., Tekişik, H.H., Sağlamer, E., Matematik Öğretim Rehberi, Rehber Yayınevi, Ankara, 1983.
18. Aksu, M., Matematik Öğretiminde Bilgisayar Kullanımı, Eğitim ve Bilim, 54(9), (1985) 13-14.
19. Adair, J., Karar Verme ve Problem Çözme.(Çev. Nurdan Kalaycı), Gazi Kitabevi, Ankara, 2000.
20. Van de Walle, John A., Elementary and Middle School Mathematics (4<sup>th</sup> .ed.). Longman: NY, 1994.
21. Baki, A., Bell, A., Orta Öğretim Matematik Öğretimi, Cilt I, 2. Baskı, YÖK, Ankara, 1997.
22. MEB İlköğretim Genel Müdürlüğü, İlköğretim Okulu Matematik Programı 6-7-8. Sınıf, İstanbul, 2000.
23. Cheung, K.C., Choo, M.L. ve Fong, L.W., Meaning Assessment Problem Solving Activities In The Classroom: Some Exemplars. Washington DC: Centre for Applied Research in Education, 1991.
24. Mayer, R., Mathematical Ability. In R. Sternberg(Ed), Human Abilities: An Information Processing Approach (pp.127-150), New York: Freeman, 1985.

25. Kulm, G., Assessing Higher Order Thinking In Mathematics: What We Need To Know And Be Able To Do. In G. Kul(Ed) Assessing Higher Order Thinking In Mathematics (pp.53-70). Washington, DC: American Association For The Advancement of Science, 1990
26. Lester, F.K. & Kroll, D.L., Assessing Student Growth In Mathematical Problem Solving. In G. Kulm(Ed.), Assessing Higher Order Thinking In Mathematics (Pp.53-70). Washington, DC: American Association For The Advancement Of Science, 1990.
27. Polya, G., Nasıl Çözmeli, Sistem Yayıncılık, İstanbul, 1997.
28. Polya, G., Mathematical Discovery, New York: Willey, 1962.
29. Karataş, İ., 8. Sınıf Öğrencilerin Problem Çözme Sürecinde Kullanılan Bilgi Türlerini Kullanma Düzeyleri, Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2002.
30. Brown, C.A., Carpenter, T.P., Kouba, V.L., Linquist, M.M., Silver, E.A. and Swafford, J. O. (1999). Secondary school results for the fourth NAEP mathematics Assessment: Algebra, Geometry, Mathematical Methods and Attitudes. Mathematics Teacher, 81, 337-347.
31. EARGED., (1996), İlköğretim (5+3) Matematik Programı Değerlendirme Raporu, Ankara
32. Dede, Y., Argün, Z., Cebir Öğrencilere Niçin Zor Gelmektedir?, Hacettepe Üniversitesi Eğitim fakültesi Dergisi, 24:180-185, 2003, Ankara
33. Baki, A., Cebirle İlgili İşlem Yanılgıların Değerlendirilmesi, III. Ulusal Fen Bilimleri Eğitimi Sempozyumu, Ekim 1999, KTÜ, Trabzon, 46-49.
34. Dede, Y., Yalın, H.İ. ve Argün, Z., İlköğretim 8. Sınıf Öğrencilerinin Değişken Kavramının Öğrenimindeki Hataları ve Kavram Yanılgıları, V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, Ankara, 2002.
35. Stacey, K., MacGregor, M., Learning the Algebraic Method of Solving Problems, Journal of Mathematical Behaviour, 18(2), 149-167, 2000.

36. Aiken, L.S., Jr., Language Factors in Learning Mathematics. Review of Educational Research, 42, 359-385, 1972.
37. Kennedy, L. M., Guiding Children to Mathematical Discovery, Wadsworth Publishing Company, U.S.A, 1980.
38. Baykul, Y., Matematik Öğretim Rehberi, Rehber Yayınevi, Ankara, 1983.
39. Ballew, H. and James, W., "Problem Solving Processes of Gifted Students", Proceedings of The Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Individual Contributions. State University of Utrecht. The Netherlands, 1985.
40. Tertemiz, N., İlkokulda Aritmetik Problemlerini Çözmede Etkili Görülen Bazı Faktörler, Yayınlanmamış Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi, Ankara, 1994.
41. Dickson, L. ve Diğerleri, Children Learning Mathematics, Alden Press Ltd, Great Britain, 1982.
42. Polya, G., How to solve it, Princeton University Press, Princeton, 1957.
43. Yıldırım, A., Nitel Araştırma Yöntemlerinin Temel Özellikleri ve Eğitim Araştırmalarındaki Yeri ve Önemi, Eğitim ve Bilim, 23(112), 7-17, 1999.
44. Cohen, L. and Manion, L., Research Methods in Education, Third Edition, Routledge, 1990.
45. Tabachnick, B. R., Zeichner, K. M. Idea and Action: Action Research and Development of Conceptual Change Teaching of Science, Science Education, 82,3(1999) 309-322.
46. Elliott, J., Action Research for Educational Change, Milton Keynes and Philadelphia, Open University Press, 1991.
47. Loftus, J. An Action Research Enquiry Into The Marketing Of An Established First School In Its Transition To Full Primary Status, Submitted In Partial Fulfillment Of Requirements, Submitted To The Kingston University For The Degree Of Phd, 1999.

48. Çepni, S., Araştırma ve Proje Çalışmalarına Giriş, Erol Ofset, Trabzon, 2001.
49. Fensham, P., Development and Dilemmas in Science Education, The Falmer Press, Philadelphia, 1988.
50. Zozkis, R. & Hazan, O., Interviews in Mathematics Education Research: Choosing The Questions, Journal of Mathematical Behaviour, 17(4), 1999, 429-439.
51. Clement, J.(1998), Analysis of Clinical Interviews: Foundations & Model Viability. In Research Design Seminar, [Online] Available: <http://134.88.73/ResearchDesign/Design.Html>.
52. Confrey, J., Clinical Interviewing: Its Potential to Reveal Insights in Mathematics Educations, Proceeding of The 4th International Conference for PME (400-408), Berkeley, CA: University of California Pres, 1980.
53. Gingburg, H.P., The Clinical Interview in Psychological Research On Mathematical Thinking: Aims, Rationales, Techniques, For The Learning of Mathematics, 1(3), 1981, 4-11.
54. Hong, E., Mental Models in Word Problem Solving: An Analysis of Korean Elementary Students. Paper Presented At The Annual Meeting of The American Educational Research Association, Atlanta, GA:, 1993.
55. Mayer, R.E., The Psychology of Mathematical Problem Solving. In F.K. Lester&Garofalo(Eds), Mathematical Problem Solving: Issues in Research(1-13). Philadelphia: Franklin Institute Press, 1982.

## **EKLER**

### **Ek 1. Pilot Çalışmanın Birinci Adımında Kullanılan Problemler**

#### Sınıf Problemi

Bir sınıftaki erkek öğrenciler, kız öğrencilerin sayısının 3 katından 5 eksiktir. Sınıfın mevcudu 47 olduğuna göre bu sınıftaki kız öğrencilerin sayısını bulabilir misiniz?

#### Sınıf Problemi

“İki sayıdan biri diğerinden 8 büyüktür. Büyük sayının 2 katı ile küçük sayının 4 katının toplamı 184 ettiğine göre büyük sayı kaçtır?” bu problemin çözümünü veren denklemi yazabilir misiniz? Yazdığınız denklemi nasıl çözersiniz?

#### Ardışık Problemi

Bir sayının 4 katının 3 eksiği ardışığının 3 katının 2 eksiğine eşittir. Bu sayıyı nasıl bulursunuz?

#### Kesir Problemi

Paydası payından 5 fazla olan bir kesrin, payından 2 çıkartılıp, paydasına 1 eklenirse  $\frac{2}{3}$  kesrine denk bir kesir elde ediliyor. Bu kesri bulabilir misiniz?

#### Sayı Problemi

İki katı, iki fazlası ve yarısının toplamı 44 olan sayıyı bulabilir misiniz?

#### Ceviz Problemi

Ali elindeki cevizleri kardeşleriyle eşit olarak paylaşırsa her birine 10 ceviz düşüyor. Eğer kardeşlerine 6 şar ceviz verseydi kendisine 30 ceviz kalacaktı. Bu problemdeki toplam ceviz sayısını nasıl bulursunuz?

## **Ek 2. Pilot Çalışmanın İkinci Adımında Kullanılan Problemler**

### Yaş Problemi

“İbrahim’in yaşı  $x$ , Yusuf’un yaşı  $y$  dir. İbrahim’in yaşının 4 eksiğinin 3 katı, Yusuf’un yaşının 3 fazlasının 5 katına eşittir.” Bu ifadenin denklemini yazabilir misiniz?

### Kesir Problemi

Bir kesrin payına 2, paydasına 1 eklendiğinde değeri  $\frac{4}{5}$  e denk oluyor. Payından 2, paydasından 3 çıkartılırsa kesrin değeri  $\frac{2}{3}$  e denk oluyor. Bu kesri bulabilir misiniz?

### Yaş Problemi

Ziya’nın 3 yıl sonraki yaşı Hasan’ın 3 yıl önceki yaşının 2 katına eşittir. İkisnin şimdiki yaşları toplamı 39 olduğuna göre Hasan’ın bugün ki yaşını hesaplayabilir misiniz?

### Hız Problemi

Bir otomobil A şehrinden B şehrine 7 saatte gidiyor. Bu otomobil saatteki hızını 30 km azaltırsa aynı yolu 9 saatte alacağına göre; iki şehir arasının kaç km olduğunu bulabilir misiniz?

### Hız Problemi

“Saatte ortalama 80 km hızla giden bir otobüs, kendisinden 120 km önde ve saatte ortalama 60 km hızla aynı yönde giden bir kamyonu kaç sat sonra yetişir?” probleminin çözümünü veren denklemi yazabilir misiniz?

### Futbol Problemi

Bir futbol takımı kazandığı her maç için 3 puan, beraberlik için 1 puan kazanmaktadır. Bu futbol takımı oynadığı 26 maçtan bir kısmında galip gelmiş bir kısmında da berabere kalmıştır. Takımın toplam 62 puanı olduğuna göre, kazandığı maç sayısını nasıl bulursunuz?

### Ek 3. Tanı Testi Öğrenci Cevap Kağıdı

Ömer B. Yılmazlar

#### TANI TESTİ

Prb 1) Bir sınıftaki erkek öğrenciler, kız öğrencilerin sayısının 3 katından 5 eksiktir. Sınıfın mevcudu 47 olduğuna göre bu sınıftaki kız öğrencilerin sayısını bulabilir misiniz?

$$\begin{array}{rcl} \text{Kız} & & \text{Erkek} \\ x & + & 3x + 5 = 47 \\ & & 4x = 42 \\ & & x = 10.5 \end{array}$$

Prb 2) 3 fazlasının 2 katı ile 2 eksiğinin 3 katının toplamı 35 olan sayıyı bulabilir misiniz?

$$\begin{array}{rcl} (x+3) \cdot 2 + (x-2) \cdot 3 = 35 \\ 2x + 6 + 3x - 6 = 35 \\ 5x = 35 \\ x = 7 \end{array}$$

Prb 3) "Bir baba 46, oğlu 8 yaşındadır. Kaç yıl sonra babanın yaşı, oğlunun yaşının 3 katı olur?" problemini nasıl çözersiniz?

$$\begin{array}{rcl} 46 + x = (8 + x) \cdot 3 \\ 46 + x = 24 + 3x \\ 22 = 2x \\ x = 11 \end{array}$$

Prb 4) Bir işi Kemal yalnız başına 6 günde Yasin yalnız başına 8 günde yapabiliyor. İkisi birlikte 3 gün çalıştıktan sonra Kemal işi bırakıyor. Kalan işi Yasin kaç günde bitirir? Problemini çözecek denklemi yazabilir misiniz?

$$\begin{array}{rcl} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right) \cdot 3 + \frac{1}{8} \cdot x = 1 \\ \frac{4+3}{24} \cdot 3 + \frac{x}{8} = 1 \\ \frac{21}{24} + \frac{x}{8} = 1 \\ \frac{x}{8} = \frac{3}{24} \Rightarrow x = 1 \end{array}$$

### Ek 3'ün Devamı

Prb 5) İrem bir merdivenin basamaklarını 3'er 3'er çıkıp 4'er 4'er inmiştir. Toplam 21<sup>adım</sup> attığına göre merdivenin basamak sayısını nasıl bulursunuz?

$$\begin{aligned} 3x &= 4(21-x) \\ 3x &= 84 - 4x \\ 7x &= 84 \\ x &= 12 \end{aligned} \quad 3x = 3 \cdot 12 = 36$$

Prb 6) Bir futbol takımı kazandığı her maç için 3 puan, beraberlik için 1 puan kazanmaktadır. Bu futbol takımı oynadığı maçlardan bir kısmında galip gelmiş bir kısmında da berabere kalmıştır. Bu takımın toplam 62 puanı olduğuna göre, kazandığı maç sayısını nasıl bulursunuz? Toplam 26 maç var

$$\begin{aligned} 3x + 1(26-x) &= 62 \\ 3x + 26 - x &= 62 \\ 2x &= 36 \\ x &= 18 \end{aligned}$$

Prb 7) Bir otomobil A şehrinden B şehrine 7 saatte gidiyor. Bu otomobil saatteki ortalama hızını 30 km azaltırsa aynı yolu 9 saatte alacağına göre; iki şehir arasının kaç km olduğunu bulabilir misiniz?


$$\begin{aligned} 7x &= (x-30) \cdot 9 \\ 7x &= 9x - 270 \\ -2x &= -270 \\ x &= 135 \end{aligned}$$

Prb 8) Bir kesrin payına 2 paydasına 1 eklendiğinde kesrin değeri  $\frac{4}{5}$  e denk oluyor. Payından 2, paydasından 3

çıkartılırsa kesrin değeri  $\frac{2}{3}$  e denk oluyor. Bu kesri bulabilir misiniz?

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{y+1} &= \frac{4}{5} & 5x+10 &= 4y+4 \Rightarrow 5x-4y = -6 \\ \frac{x-2}{y-3} &= \frac{2}{3} & 3x-6 &= 2y-6 \Rightarrow 3x-2y = 0 \\ 30-4y &= -6 & & \\ y &= 9 & & \\ \frac{x}{y} &= \frac{6}{9} = \frac{2}{3} & & \end{aligned}$$



### Ek 3'ün Devamı

Prb 5) İrem bir merdivenin basamaklarını 3'er 3'er çıkıp 4'er 4'er çıkarır. Toplam 21 attığına göre merdivenin basamak sayısını nasıl bulursunuz?

$$3x = (x-2) \cdot 4$$

$$3x = 4x - 8$$

$$-x = -8$$

$$x = 8$$

Prb 6) Bir futbol takımı kazandığı her maç için 3 puan, beraberlik için 1 puan kazanmaktadır. Bu futbol takımı oynadığı maçlardan bir kısmında galip gelmiş bir kısmında da berabere kalmıştır. Bu takımın toplam 62 puanı olduğuna göre, kazandığı maç sayısını nasıl bulursunuz? Not: Toplam 26 maç yapmıştır.

$$\begin{aligned} -x+y &= 26 \\ +3x+y &= 62 \end{aligned}$$

$$x = \frac{36}{2}$$

$$\begin{aligned} -x+y &= -26 \\ 3x+y &= 62 \end{aligned}$$

$$x = 18$$

$$2x = 36$$

Prb 7) Bir otomobil A şehrinden B şehrine 7 saatte gidiyor. Bu otomobil saatteki ortalama hızını 30 km azaltırsa aynı yolu 9 saatte alacağına göre; iki şehir arasındaki kaç km olduğunu bulabilir misiniz?

$$7x = (x-30)9$$

$$7x = 9x - 270$$

$$-2x = -270$$

$$x = 135$$

Prb 8) Bir kesrin payına 2 paydasına 1 eklendiğinde kesrin değeri  $\frac{4}{5}$  e denk oluyor. Payından 2, paydasından 3

çıkartılırsa kesrin değeri  $\frac{2}{3}$  e denk oluyor. Bu kesri bulabilir misiniz?

$$\frac{x+2}{y+1} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{x-2}{y-3} = \frac{2}{3}$$

$$5x+10 = 4y+4$$

$$2y-6 = 3x-6$$

$$\begin{aligned} 5x-4y &= -6 \\ 2y-3x &= -6 \\ 5x-4y &= -6 \\ 6x-5y &= -12 \\ -x &= -6 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

1 den x e 6 değerini

$$\frac{6+2}{y+1} = \frac{4}{5}$$

$$30+10 = 4y+4$$

$$30+10-4 = 4y$$

$$36 = 4y$$

$$y = 9$$

$$\text{kesir} = \frac{6}{9}$$

### Ek 3'ün Devamı

İsmail BAYRAKTAR / 8/A SINIFI  
TANI TESTİ 93

Prb 1) Bir sınıftaki erkek öğrenciler, kız öğrencilerin sayısının 3 katından 5 eksiktir. Sınıfın mevcudu 47 olduğuna göre bu sınıftaki kız öğrencilerin sayısını bulabilir misiniz?

$$3x - 5 + x = 47$$

$$4x = 47 + 5$$

$$4x = \frac{52}{4}$$

$$x = \frac{13}{1}$$

Prb 2) 3 fazlasının 2 katı ile 2 eksiğinin 3 katının toplamı 35 olan sayıyı bulabilir misiniz?

$$2(x+3) + 3(x-2) = 35$$

$$2x + 6 + 3x - 6 = 35$$

$$2x + 3x = 35 - 6 + 6$$

$$5x = \frac{35}{5}$$

$$x = 7$$

Prb 3) "Bir baba 46, oğlu 8 yaşındadır. Kaç yıl sonra babanın yaşı, oğlunun yaşının 3 katı olur?" problemini nasıl çözersiniz?

$$\frac{B}{46+x} = \frac{O}{3(8+x)}$$

$$46+x = 24+3x$$

$$2x = 46 - 24$$

$$2x = 22$$

$$x = 11$$

Prb 4) Bir işi Kemal yalnız başına 6 günde Yasin yalnız başına 8 günde yapabiliyor. İkisi birlikte 3 gün çalıştıktan sonra Kemal işi bırakıyor. Kalan işi Yasin kaç günde bitirir? Problemini çözecek denklemi yazabilir misiniz?

$$\left( \frac{1}{6} + \frac{1}{8} \right) \cdot 3 + \frac{1}{8} \cdot x = 1$$

$$\frac{4}{24} + \frac{3}{24} \cdot 3 + \frac{1}{8} \cdot x = 1$$

$$\frac{7}{24} + \frac{x}{8} = 1$$

$$\frac{7}{8} + \frac{x}{8} = \frac{8}{8}$$

$$7+x=8$$

$$x=8-7$$

$$x=1$$

### Ek 3'ün Devamı

Prb 5) İrem bir merdivenin basamaklarını 3'er 3'er çıkıp 4'er 4'er inmiştir. Toplam 21 attığına göre merdivenin basamak sayısını nasıl bulursunuz?

$$3x = 4(21 - x)$$

$$3x = 84 - 4x$$

$$3x + 4x = 84$$

$$7x = \frac{84}{7}$$

$$x = 12$$

$$\begin{array}{r} 84 \div 7 \\ 7 \overline{) 84} \\ \underline{74} \phantom{0} \\ 10 \phantom{0} \\ \underline{70} \phantom{0} \\ 30 \phantom{0} \\ \underline{28} \phantom{0} \\ 2 \phantom{0} \end{array}$$

Prb 6) Bir futbol takımı kazandığı her maç için 3 puan, beraberlik için 1 puan kazanmaktadır. Bu futbol takımı oynadığı maçlardan bir kısmında galip gelmiş bir kısmında da berabere kalmıştır. Bu takımın toplam 62 puanı olduğuna göre, kazandığı maç sayısını nasıl bulursunuz? *Not = Toplam 26 maç oynamıştır.*

$$x + y = 26$$

$$-x - y = -26$$

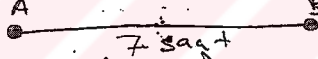
$$3x + y = 62$$

$$+ \quad 3x + y = 62$$

$$2x = \frac{36}{2}$$

$$x = 18$$

Prb 7) Bir otomobil A şehrinden B şehrine 7 saatte gidiyor. Bu otomobil saatteki ortalama hızını 30 km azaltırsa aynı yolu 9 saatte alacağına göre; iki şehir arasının kaç km olduğunu bulabilir misiniz?



$$7x = 9(x - 30)$$

$$7x = 9x - 270$$

$$7x - 9x = -270$$

$$-2x = \frac{-270}{-2}$$

$$x = 135$$

Prb 8) Bir kesrin payına 2 paydasına 1 eklendiğinde kesrin değeri  $\frac{4}{5}$  e denk oluyor. Payından 2, paydasından 3

çıkartılırsa kesrin değeri  $\frac{2}{3}$  e denk oluyor. Bu kesri bulabilir misiniz?

$$\frac{x+2}{y+1} = \frac{4}{5}$$

$$5x + 10 = 4y + 4$$

$$5x - 4y = 10 - 4$$

$$5x - 4y = 6$$

$$2 \quad 3x - 2y = 0$$

$$3 \cdot 6 - 2y = 0$$

$$18 - 2y = 0$$

$$2y = \frac{18}{2}$$

$$y = 9$$

$$5x - 4y = 6$$

$$-6x + 4y = 0$$

$$x = 6$$

$$k = \left\{ \frac{6}{9} \right\}$$

### Ek 3'ün Devamı

#### TANI TESTİ

Adı: İsmet  
Soyadı: Kalyoncu  
Sınıf: 8/A  
No: 137

Prb 1) Bir sınıftaki erkek öğrenciler, kız öğrencilerin sayısının 3 katından 5 eksiktir. Sınıfın mevcudu 47 olduğuna göre bu sınıftaki kız öğrencilerin sayısını bulabilir misiniz?

$$3x - 5 + x = 47$$

$$3x + x = 47 + 5$$

$$4x = 52$$

$$x = \frac{52}{4}$$

$$x = 13$$

Prb 2) 3 fazlasının 2 katı ile 2 eksiğinin 3 katının toplamı 35 olan sayıyı bulabilir misiniz?

$$(x+3) \cdot 2 + (x-2) \cdot 3 = 35$$

$$2x+6+3x-6 = 35$$

$$2x+3x = 35+6-6$$

$$5x = \frac{35}{5}$$

$$x = 7$$

Prb 3) "Bir baba 46, oğlu 8 yaşındadır. Kaç yıl sonra babanın yaşı, oğlunun yaşının 3 katı olur?" problemini nasıl çözersiniz?

$$\begin{array}{l} \text{Baba} \quad \text{oğlu} \\ 46+x = 3(8+x) \end{array}$$

$$46+x = 3(8+x)$$

$$46+x = 24+3x$$

$$46-24 = 3x-x$$

$$22 = 2x$$

$$x = 11$$

Prb 4) Bir işi Kemal yalnız başına 6 günde Yasin yalnız başına 8 günde yapabiliyor. İkisi birlikte 3 gün çalıştıktan sonra Kemal işi bırakıyor. Kalan işi Yasin kaç günde bitirir? Problemini çözecek denklemi yazabilir misiniz?

$$\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right) \cdot 3 + \frac{1}{8} \cdot x = 1$$

$$\left(\frac{8}{48} + \frac{6}{48}\right) \cdot 3 + \frac{1}{8} \cdot x = 1$$

$$\frac{14}{48} + 3 + \frac{1}{8} \cdot x = 1$$

$$\frac{131}{48} + \frac{1}{8} \cdot x = 1$$

$$131 + 6x = 48 + 1$$

$$175 = 48$$

$$x = 3$$

### Ek 3'ün Devamı

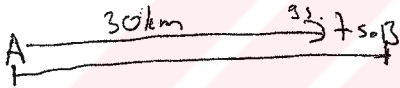
Prb 5) İrem bir merdivenin basamaklarını 3'er 3'er çıkıp 4'er 4'er inmiştir. Toplam 21 attığına göre merdivenin basamak sayısını nasıl bulursunuz?

$$\begin{aligned} 3(x+9) - 4(x+16) &= 21 \\ 3x+27-4x+64 &= 21 \\ 3x-4x &= 21-27-64 \\ -1x &= -56 \\ x &= 56 \end{aligned}$$

Prb 6) Bir futbol takımı kazandığı her maç için 3 puan, beraberlik için 1 puan kazanmaktadır. Bu futbol takımı oynadığı maçlardan bir kısmında galip gelmiş bir kısmında da berabere kalmıştır. Bu takımın toplam 62 puanı olduğuna göre, kazandığı maç sayısını nasıl bulursunuz? (Toplam 26 maç yaptı)

$$\begin{aligned} -3x+y &= 26 & x+y &= 26 \\ 3x+y &= 62 & y &= 26-x \\ -3x+3y &= -78 & y &= 10 \\ 3x+y &= 62 & & \\ \hline 2y &= 16 & & \\ y &= 8 & & \end{aligned}$$

Prb 7) Bir otomobil A şehrinden B şehrine 7 saatte gidiyor. Bu otomobil saatteki ortalama hızını 30 km azaltırsa aynı yolu 9 saatte alacağına göre, iki şehir arasının kaç km olduğunu bulabilir misiniz?



Prb 8) Bir kesrin payına 2 paydasına 1 eklendiğinde kesrin değeri  $\frac{4}{5}$  e denk oluyor. Payından 2, paydasından 3 çıkartılırsa kesrin değeri  $\frac{2}{3}$  e denk oluyor. Bu kesri bulabilir misiniz?

## ÖZGEÇMİŞ

1979 yılında Artvin'in Borçka ilçesinde doğdu. İlköğrenimine babasının görevi nedeniyle Kayseri'de başladı. 1989 yılında tayin sebebiyle ailesiyle Trabzon'a geldi. 1993'te orta, 1997 de lise öğrenimlerini Trabzon'da tamamladı. 1997 yılında KTÜ Fatih Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği bölümünü kazandı. 2001 de mezun olup aynı yıl Matematik Eğitimi'nde yüksek lisans programına başladı.

