

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**L^n LORENTZ UZAYINDA BİR HİPERYÜZEYİN YÜKSEK
MERTEBEDEN GAUSS EĞRİLİKLERİ**

Ayşe YAŞAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2011**

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

L^n LORENTZ UZAYINDA BİR HİPERYÜZEYİN YÜKSEK

MERTEBEDEN GAUSS EĞRİLİKLERİ

Ayşe YAŞAR

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. H. Hilmi Hacısalihoğlu

Bu tez dört bölümden oluşmuştur. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, temel tanım ve kavramlar kaynaklarıyla verilmiştir. Üçüncü bölümde, Öklid uzayında bir paralel hiperyüzeyin eğrilikleri arasındaki bağıntılar verilerek bu paralel hiperyüzeyin yüksek mertebeden Gauss eğrilikleri hesaplanmıştır. Son bölümde, Lorentz uzayında bir paralel hiperyüzeyin eğrilikleri arasındaki bağıntılar verilerek bu paralel hiperyüzeyin yüksek mertebeden Gauss eğrilikleri hesaplanmıştır.

2011, 62 sayfa

Anahtar Kelimeler: Lorentz uzayı, Gauss eğriliği, yüksek mertebeden Gauss eğriliği.

ABSTRACT

Master Thesis

HIGHER ORDER GAUSSIAN CURVATURES OF A HYPERSURFACE IN L^n LORENZ SPACE

Ayşe YAŞAR

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. H. Hilmi Hacısalihoğlu

This thesis consists of four chapters. The first chapter is the introduction. In the second chapter, some basic and fundamental definitions and theorems have been presented. The third chapter, relations between curvatures of a hypersurfaces in Euclidean space have been presented and higher order Gaussian curvatures of a hypersurface in Euclidean space have been calculated. In the last chapter, relations between curvatures of a hypersurfaces in Lorentzian space have been presented and higher order Gaussian curvatures of a hypersurface in Lorentzian space have been calculated.

2011, 62 pages

Key Words: Lorentzian space, Gaussian curvatures, higher order Gaussian curvatures of a hypersurfaces

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmalarım boyunca bana danışmanlık ederek beni yönlendiren ve bana her türlü olanağı sağlayan değerli hocam Prof.Dr.H.Hilmi HACISALİHOĞLU'(Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü) na teşekkürlerimi sunarım. Hiçbir zaman yardımlarını benden esirgemeyen değerli hocalarım Prof. Dr. Yusuf YAYLI (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü) ve Doç. Dr. Nejat Ekmekçi'(Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü) ye bana maddi ve manevi destek olan aileme çok teşekkür ederim.

Ayşe YAŞAR

Ankara, Ocak 2011

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	2
2.1 Diferensiyellenebilir Manifoldlar	2
2.2 Riemann Manifold ve Hiperyüzey.....	8
2.3 Yarı Riemann Manifoldlar	14
3. E^{n+1} ÖKLİD UZAYINDA BİR PARALEL HİPERYÜZEYİN EĞRİLİKLERİ	22
3.1 E^{n+1} Öklid Uzayında Bir Paralel Hiperyüzeyin Eğrilikleri Arasındaki Bağntılar.....	22
3.2 E^{n+1} Öklid Uzayında Bir Paralel Hiperyüzeyin Yüksek Mertebeden Gauss Eğrilikleri.....	26
4. E_1^{n+1} LORENTZ UZAYINDA BİR PARALEL HİPERYÜZEYİN EĞRİLİKLERİ.....	33
4.1 E_1^{n+1} Lorentz Uzayında Bir Paralel Hiperyüzeyin Eğrilikleri Arasındaki Bağntılar.....	33
4.2. E_1^{n+1} Lorentz Uzayında Bir Paralel Hiperyüzeyin Yüksek Mertebeden Gauss Eğrilikleri.....	47
KAYNAKLAR	61
ÖZGEÇMİŞ	62

1.GİRİŞ

$(n + 1)$ boyutlu Öklid uzayı, E^{n+1} de bir hiperyüzeyin yüksek mertebeden Gauss eğrilikleri bilinmektedir. Bu eğriliklerden birisi Gauss eğriliği birisi de ortalama eğriliktir. Bunlar hiperyüzeyin şekil operatörü ile ilgilidir. E^{n+1} de bir hiperyüzey olan M ve M ye paralel olan $\overline{M}$ nin yüksek mertebeden Gauss eğrilikleri ise tümevarım methodu ile hesaplanılmıştır. Bu hesaplama yapılırken M nin asli eğrilik fonksiyonları ve yüksek mertebeden Gauss eğrilikleri arasındaki ilişkiyi veren bağıntılar kullanılmıştır.

Bu tezde, benzer kavramlar ve ifadeler Lorentz uzayı için incelenecektir. Lorentz uzayında bir paralel hiperyüzeyin eğrilikleri arasındaki bağıntılar verilecek ve bu bağıntılar kullanılarak tümevarım methodu ile bir paralel hiperyüzeyin yüksek mertebeden Gauss eğrilikleri elde edilecektir.

2.TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Tanım 2.1.1

X bir cümle olsun. X in alt cümlelerinin bir koleksiyonu τ olmak üzere, bu τ koleksiyonu

i) $X, \emptyset \in \tau$

ii) $\forall A_1, A_2 \in \tau \implies A_1 \cap A_2 \in \tau$

iii) $A_i \in \tau, i \in I$ için, $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$

önergelerini sağlıyorsa, X üzerinde bir **topoloji** adını alır

(Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 2.1.2

Bir X cümlesi ve bu X cümlesinin üzerinde tanımlı bir τ topolojisinden oluşan (X, τ) ikilisine bir **topolojik uzay** denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.1.3

X, Y birer topolojik uzay olmak üzere, bir

$$f : X \rightarrow Y$$

dönüşümü sürekli, f^{-1} mevcut ve sürekli ise bu f fonksiyonuna X den Y ye bir **homeomorfizm** veya **topolojik dönüşüm** denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.1.4

Bir X topolojik uzayının P ve Q gibi farklı noktaları için, X de, sırası ile, P ve Q noktalarını içine alan A_P ve A_Q açık altcümleleri $A_P \cap A_Q = \emptyset$ olacak şekilde bulunabilirse X topolojik uzayına bir **Hausdorff uzay** denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.1.5

M bir topolojik uzay olmak üzere

i) M bir Hausdorff uzayıdır.

ii) M nin her bir açık alt cümlesi E^n e veya E^n in bir açık alt cümlesine homeomorf tur.

iii) M sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir.

özellikleri sağlanıyorsa M ye, **n-boyutlu topolojik manifold** veya **topolojik n-manifold** denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.1.6

n -boyutlu topolojik M manifoldunun bir $P \in M$ noktasının M deki bir V açık komşuluğu,

$$\varphi : U \rightarrow V$$

homeomorfizmi altında E^n in bir U açık alt cümlesine resmedilmesi durumunda (U, φ) ikilisine M nin P noktasındaki bir **koordinat komşuluğu** denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.1.7

E^n de bir $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ koordinat sistemi için,

$$\varphi : U \subset E^n \rightarrow V \subset M$$

ve $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in U$ olmak üzere

$$\varphi(u) = (u_1 \circ \varphi^{-1}(P), \dots, u_n \circ \varphi^{-1}(P)) = P \in V$$

şeklindedir. V de bir koordinat sistemi olan $\{u_1 \circ \varphi^{-1}(P), \dots, u_n \circ \varphi^{-1}(P)\}$ sistemi için,

$$\begin{array}{ccc} U \subset E^n & \xrightarrow{\varphi} & V \subset M \\ U_i \searrow & & \swarrow x_i \\ & R & \end{array}$$

$x_i = U_i \circ \varphi^{-1} : V \rightarrow R, 1 \leq i \leq n$, koordinat fonksiyonlarının $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ cümlesine V de bir **lokal koordinat sistemi** denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.1.8

n -boyutlu topolojik M manifoldunun bir açık örtüsü $\{U_\alpha\}$ ve U_α açık cümlelerinin α indislerinin cümlesi A olmak üzere, E^n de U_α ya bir φ_α homeomorfizmi altında

homeomorf olan açık cümle U_α ise ortaya çıkan $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ haritalarının

$$\{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$$

ailesine M nin bir **atlası** veya **koordinat komşuluğu sistemi** denir (Hacısalihoglu 2000).

Tanım 2.1.9

n -boyutlu topolojik M manifoldunun bir

$$S = \{(\varphi_\alpha, W_\alpha) | \alpha \in A\}$$

atlası için, $W_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere, $\forall \alpha, \beta \in A$ ya karşılık $\varphi_{\alpha\beta}$ ve $\varphi_{\beta\alpha}$ fonksiyonları C^k sınıfından diferensiyellenebilir ise S ye C^k sınıfından diferensiyellenebilirdir denir.

S atlası M üzerinde C^k sınıfından olduğu zaman S ye M üzerinde **C^k sınıfından diferensiyellenebilir yapı** denir (Hacısalihoglu 2000).

Tanım 2.1.10

n -boyutlu topolojik M manifoldu C^r sınıfından bir atlası sahip ise M ye **C^r sınıfından diferensiyellenebilir bir manifold** denir (Hacısalihoglu 2000).

Tanım 2.1.11

Boş olmayan bir A cümlesi ve K cismi üzerinde bir vektör uzayı V için,

i) $\forall P, Q, R \in A$ için $f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$

ii) $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $f(P, Q) = \alpha$ olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası vardır önermeleri doğrulayan bir

$$f : A \times A \rightarrow V$$

fonksiyonu var ise A ya V ile birleştirilmiş bir **afin uzay** denir (Hacısalihoglu 2000).

Tanım 2.1.12

V vektör uzayı ile birleşen bir afin uzayı A olmak üzere $P \in A$ ve $\vec{v} \in V$ için $(P, \vec{v})$ sıralı ikilisine A afin uzayının $P \in A$ noktasındaki **tanjant vektörü** denir.

A afin uzayının $P \in A$ noktasındaki tanjant vektörlerinin cümlesi $\mathbf{T}_A(P)$ ile gösterilir (Hacısalihoglu 2000) .

Tanım 2.1.13

$T_A(P)$ cümlesinde toplama işlemi

$$\begin{aligned}\oplus : T_A(P) \times T_A(P) &\rightarrow T_A(P) \\ ((P, \vec{v}), (P, \vec{u})) &\rightarrow ((P, \vec{v}) \oplus (P, \vec{u})) = (P, \vec{v} + \vec{u})\end{aligned}$$

veya

$$(\vec{v}_P, \vec{u}_P) \rightarrow \vec{v}_P \oplus \vec{u}_P = (\vec{v} + \vec{u})_P$$

eşitlikleri ile, skalar ile çarpma işlemi de

$$\begin{aligned}\odot : R \times T_A(P) &\rightarrow T_A(P) \\ (\partial, (P, \vec{v})) &\rightarrow \partial \odot (P, \vec{v}) = (P, \partial \vec{v})\end{aligned}$$

veya

$$(\partial, \vec{v}_P) \rightarrow \partial \odot \vec{v}_P = (\partial \vec{v})_P$$

eşitlikleri ile tanımlanır. Burada R ile A nın birleştirildiği V vektör uzayının cismi gösterilmektedir. Bu şekilde tanımlanan $\{T_A(P), \oplus, R, +, \cdot, \odot\}$ vektör uzayına, A afin uzayının $P \in A$ noktasındaki **tanjant uzayı** denir ve $T_A(P)$ ile gösterilir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.1.14

M bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere, M üzerinde tanımlı

$$\begin{aligned}\chi : M &\rightarrow \bigcup_{P \in M} T_M(P) \\ 1 - 1\end{aligned}$$

dönüştürme, M üzerinde bir **vektör alanı** denir ve M üzerindeki vektör alanlarının cümlesi de $\chi(M)$ ile gösterilir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.1.15

$f : E^n \rightarrow R$ diferensiyellenebilir, $\vec{V}_P \in T_{E^n}(P)$ ve $\vec{V}_P = \overrightarrow{PQ}$ olmak üzere

$$\vec{V}_P[f] = \frac{d}{dt}(f(P_1 + t(Q_1 - P_1), \dots, P_n + t(Q_n - P_n)))|_{t=0}$$

reel sayısına f nin $\overrightarrow{V_P}$ **ye göre türevi** veya f nin $\overrightarrow{V_P}$ **yönündeki türevi** denir ve $\overrightarrow{V_P}[f]$ ile gösterilir(Hacısalıhoğlu 2000).

Teorem 2.1.1

$\overrightarrow{v} = (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \dots, \overrightarrow{v}_n) \in R^n, P \in E^n$ ve $f : E^n \rightarrow R$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon olması durumunda

$$\overrightarrow{v_P}[f] = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{v}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_P$$

dır (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.1.16

R nin bir açık aralığı I ve $\alpha : I \rightarrow E^n$ bir eğri olmak üzere $\forall t \in I$ sayısı için α nın t ye karşılık gelen $\alpha(t)$ noktasındaki **hız vektörü** , E^n in bu noktadaki $\alpha'(t) \in T_{E^n}(\alpha(t))$ tanjant vektörüdür. Öyle ki

$$\alpha'(t) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt} \Big|_t, \dots, \frac{d\alpha_n}{dt} \Big|_t \right) \Big|_{\alpha(t)}$$

dır (Hacısalıhoğlu 2000).

Teorem 2.1.2

α, E^n de bir eğri ve f diferensiyellenebilir reel değerli bir fonksiyon olmak üzere

$$\alpha'(t)[f] = \frac{d(f(\alpha(t)))}{dt} \Big|_t = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha) \Big|_t$$

dır (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.1.17

$F : E^n \rightarrow E^m$ bir dönüşüm ve $\overrightarrow{V_P} \in T_{E^n}(P)$ ise

$$(F_*)_P(\overrightarrow{V_P}) \in T_{E^m}(F(P))$$

de E^m nin $t \rightarrow F(P + t\overleftarrow{V})$ eğrisinin $t = 0$ daki hız vektörü ile tanımlı

$$(F_*)_P : T_{E^n}(P) \rightarrow T_{E^m}(F(P))$$

fonksiyonuna, F nin $P \in E^n$ noktasındaki **türev dönüşümü** denir (Hacısalihoglu 2000).

Tanım 2.1.18

$X, Y \in \chi(E^n)$ vektör alanları olmak üzere $\forall P \in E^n$ için $X_P = (x_1, \dots, x_n)|_P \in T_{E^n}(P)$ dir. $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ vektör alanı için,

$$y_i : E^n \rightarrow R$$

koordinat fonksiyonları C^∞ sınıfından, yani $y_i \in C^\infty(E^n, R)$ ise Y nin X e göre **kovaryant türevi**

$$D_X Y = (X_P[y_1], \dots, X_P[y_n])$$

şeklinde tanımlanır ve bu kovaryant türev $\mathbf{D}_X \mathbf{Y}$ ile gösterilir (Hacısalihoglu 2000).

Tanım 2.1.19

$\alpha(I) \in E^n$ eğrisi, $\alpha : I \rightarrow E^n$ dönüşümü yardımıyla verilsin. $F : E^n \rightarrow E^m$ bir dönüşüm olmak üzere

$$\beta = F \circ \alpha : I \rightarrow E^m$$

bileşke fonksiyonu da E^m de bir eğri tanımlar. Bu eğriye F dönüşümü altında $\alpha(I)$ **eğrisinin resmi** denir (Hacısalihoglu 2000).

Teorem 2.1.3

$F : E^n \rightarrow E^m$ bir dönüşüm olmak üzere E^n deki $\alpha(I)$ eğrisinin F altındaki resmi $\beta(I)$ ise

$$\beta'(t) = (F_*(\alpha'))(t)$$

$t \in I$ dir (Hacısalihoglu 2000).

Teorem 2.1.4

$F = (f_1, f_2, \dots, f_m) : E^n \rightarrow E^m$ bir dönüşüm olmak üzere E^n in $P \in E^n$ noktasındaki bir tanjant vektörü $\vec{v}_P$ ise $F(P) \in E^m$ noktasındaki $F_*(\vec{v}_P)$ tanjant vektörü

$$F_*(\vec{v}_P) = \sum_{i=1}^m \vec{v}_P[f_i] \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{F(P)}$$

dır. Burada $\{x_1, \dots, x_m\}$ ile E^m de bir koordinat sistemi gösterilmiştir (Hacısalihoglu 2000).

Tanım 2.1.20

$F : E^n \rightarrow E^m$ dönüşümünün türev dönüşümü $P \in E^m$ için $(F_*)_P$ olmak üzere, sırasıyla, $T_{E^n}(P)$ ve $T_{E^m}(F(P))$ de

$$\begin{aligned}\phi &= \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_P, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_P \right\} \\ \varphi &= \left\{ \frac{\partial}{\partial y_1} \Big|_{F(P)}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_m} \Big|_{F(P)} \right\}\end{aligned}$$

standard bazları için $(F_*)_P$ nin karşılık geldiği matris $J(F, P)$ ile gösterilir ve $J(F, P)$ matrisine F nin P noktasındaki Jakobien matrisi ve bu matrise karşılık gelen lineer dönüşüme de F nin **Jakobien dönüşümü** denir.

Başka bir deyişle, seçilen koordinat sistemlerine göre F nin $P \in E^n$ noktasındaki Jakobien matrisi,

$$J(F, P) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \Big|_P & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \Big|_P \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \Big|_P & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \Big|_P \end{bmatrix}$$

dır (Hacısalihoglu 2000).

2.2 Riemann Manifoldlar ve Hiperyüzey

Tanım 2.2.1

Bir C^∞ manifold M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonlarının halkası $C^\infty(M, R)$ olmak üzere

$$\langle, \rangle : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, R)$$

şeklinde bir iç çarpım tanımlı ise M ye bir **Riemann manifold** denir. Burada, $\langle, \rangle$

işlemine M üzerinde bir iç çarpım, metrik tensör, Riemann metriği veya diferensiyellenebilir metrik denir.

M bir Riemann manifoldu olmak üzere $\chi(M)$ de tanımlı $\langle, \rangle$ iç çarpım fonksiyonu, M nin her bir tanjant uzayına bir iç çarpım indirger. $X, Y \in \chi(M)$ olmak üzere $P \in M$ için $X_P, Y_P \in T_M(P)$ dir. Diğer taraftan,

$$\langle X, Y \rangle \in C^\infty(M, R)$$

olduğu için,

$$\langle X, Y \rangle (P) \in R$$

dır. Böylece

$$\langle, \rangle (P) : T_M(P) \times T_M(P) \rightarrow R$$

fonksiyonu $\forall X_P, Y_P \in T_M(P)$

$$\langle X_P, Y_P \rangle = \langle X, Y \rangle (P)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada $T_M(P)$ nin elemanlarını $\chi(M)$ den indirgenmiş elemanlar olarak görmek mümkündür. Yani, $\forall X \in \chi(M)$ için $X_P \in T_M(P)$ dir. Buna göre $\langle, \rangle (P)$ veya değişik notasyonu ile $\langle, \rangle|_P, T_M(P)$ de bir iç çarpım fonksiyonu olur (Hacısalihoglu 2000).

Tanım 2.2.2

Bir C^∞ manifold M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} D : \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (X, Y) &\rightarrow D(X, Y) = D_X Y \end{aligned}$$

dönüşümü $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $\forall f, g \in C^\infty(M, R)$ için,

$$\textbf{i)} D_{fX} +_{gY} Z = fD_X Z + gD_Y Z$$

$$\textbf{ii)} D_X(fY) = fD_X Y + (Xf)Y$$

özelikleri sağlanıyorsa D ye M manifoldu üstünde bir **afin konneksiyon** ve D_X e de X e göre **kovaryant türev operatörü** denir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 2.2.3

M bir yarı-Riemann manifoldu ve D, M üstünde bir afin konneksiyonu olmak üzere

1) D, C^∞ sınıfındandır.

2) M nin bir A bölgesi üzerinde, C^∞ olan $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$D_X Y - D_Y X = [X, Y]$$

dir.

3) M nin bir A bölgesi üzerinde, C^∞ olan $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $\forall P \in A$ için

$$X_P \langle Y, Z \rangle = \langle D_X Y, Z \rangle |_P + \langle Y, D_X Z \rangle |_P$$

dir.

özelikleri sağlanıyorsa, D konneksiyonuna, M üstünde bir **Riemann konneksiyon** ve D_X e de X e göre **Riemann anlamında kovaryant türev operatörü** denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.2.4

E^n , n -boyutlu Öklid uzayında boş olmayan $(n - 1)$ boyutlu bir M cümlesine bir yüzey veya $(n - 1)$ yüzey denir. Öyle ki bu M cümlesi $\forall P \in M$ için

$$\Delta f|_P \neq 0, \forall P \in M$$

olmak üzere

$$M = \left\{ x \in U \subset E^n \mid f : U \xrightarrow{\text{dif.bilir}} R, f(x) = c, U \text{ bir açık alt cümle} \right\}$$

biçiminde tanımlanır.

E^n de bir $(n - 1)$ yüzey, $n > 3$ olması halinde **hiperyüzey** olarak adlandırılır. Manifoldlar olarak her bir M hiperyüzeyi bir $(n - 1)$ manifolddur (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.2.5

E^{n+1} in bir hiperyüzeyi M , M nin birim normal vektör alanı N ve E^{n+1} de Riemann konneksiyonu D olmak üzere, her $X \in \chi(M)$ için

$$S(X) = D_X N$$

şeklinde tanımlı, S dönüşümüne M üzerinde **şekil operatörü** denir (Hacısalıhoğlu 2000) .

Teorem 2.2.1

E^{n+1} in bir hiperyüzeyi M ve M nin şekil operatörü S olsun. Bu durumda,

i) $S : \chi(M) \rightarrow \chi(M)$

ii) S lineer

özellikleri sağlanır (Hacısalıhoğlu 2000) .

Teorem 2.2.2

E^{n+1} in bir hiperyüzeyi M nin şekil operatörü self adjointtir (Hacısalıhoğlu 2000) .

Teorem 2.2.3

E^{n+1} in bir hiperyüzeyi M nin şekil operatörü S ise $\chi(M)$ deki herhangi bir baza göre S nin matrisi simetriktir (Hacısalıhoğlu 2000) .

Tanım 2.2.6

E^{n+1} in bir M hiperyüzeyi üzerinde **q. temel form**, $1 \leq q \leq n+1$

$$\begin{aligned} I^q : \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow C^\infty(M, R) \\ (X, Y) &\rightarrow I^q(X, Y) = \langle S^{q-1}(X), Y \rangle \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı I^q fonksiyonudur (Hacısalıhoğlu 2000) .

Tanım 2.2.7

E^{n+1} de bir hiperyüzey M nin bir P noktasındaki şekil operatörü $S(P)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} K : M &\rightarrow R \\ P &\rightarrow K(P) = \det S(P) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona M nin Gauss eğrilik fonksiyonu ve $K(P)$ değerine de, M nin P noktasındaki **Gauss eğriliği** denir (Hacısalıhoğlu 2000) .

Tanım 2.2.8

E^{n+1} de bir hiperyüzey M nin bir P noktasındaki şekil operatörü $S(P)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} H : M &\rightarrow R \\ P &\rightarrow H(P) = iz(S(P)) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona M nin **ortalama eğrilik fonksiyonu** ve $H(P)$ değerine de M nin P noktasındaki **ortalama eğriliği** denir(Hacısalihoglu 2000).

Tanım 2.2.9

E^{n+1} de bir hiperyüzey olan M nin şekil operatörü S olmak üzere, M nin bir P noktasma karşılık gelen $S(P)$ nin karakteristik değerleri, M nin bu noktadaki asli eğrilikleri olarak adlandırılır. Asli eğriliklere karşılık gelen karakteristik (eigen) vektörlere de M nin P noktasındaki **asli eğrilik vektörleri** veya **asli eğrilik doğrultuları** denir(Hacısalihoglu 2000).

Teorem 2.2.4

X_P ve Y_P , E^{n+1} de bir hiperyüzey olan M nin P noktasındaki asli eğriliklere karşılık gelen asli doğrultuları ise X_P ve Y_P ortogonaldır (Hacısalihoglu 2000) .

Tanım 2.2.10

E^{n+1} de bir hiperyüzey olan M nin bir P noktasındaki tanjant vektörlerinin cümlesi $T_M(p)$ olmak üzere

$$S_p : T_M(p) \rightarrow T_M(p)$$

şekil operatörü verilsin. $P \in M$ deki S_p dönüşümüne karşılık gelen karakteristik vektörler $X_1, X_2, \dots, X_n$ ve bunlara da karşılık gelen karakteristik değerler $k_1, k_2, \dots, k_n$ olsun. O zaman S_p nin karakteristik polinomu

$$K_1^{(n)}(k_1, k_2, \dots, k_n) = \sum_{i=1}^n k_i$$

$$K_2^{(n)}(k_1, k_2, \dots, k_n) = \sum_{i < j}^n k_i k_j$$

$$K_3^{(n)}(k_1, k_2, \dots, k_n) = \sum_{i < j < t}^n k_i k_j k_t$$

.

.

.

$$K_n^{(n)}(k_1, k_2, \dots, k_n) = \prod_{i=1}^n k_i$$

olmak üzere

$$P_{S(p)}(k) = k^n + (-1) K_1^{(n)} k^{n-1} + \dots + (-1)^n K_n^{(n)}$$

dır. Burada $K_1^{(n)}, K_2^{(n)}, \dots, K_n^{(n)}$ fonksiyonlarına E^{n+1} de M hiperyüzeyin **yüksek mertebeden Gauss anlamında eğrilikleri** denir(Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.2.11

M, E^{n+1} de bir hiperyüzey ve N, M nin birim normal vektör alanı

$$N = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

olmak üzere, bir $r \in R$ sabit sayısı ve her $P \in M$ için

$$f(P) = ((p_1 + r\alpha_1(P)), \dots, (p_{n+1} + r\alpha_{n+1}(P)))$$

olacak şekilde bir

$$f : M \rightarrow \overline{M}$$

fonksiyonu bulunabilirse, $\overline{M}$ ye M nin **paralel hiperyüzeyi** denir(Hacısalıhoğlu 2000).

Teorem 2.2.5

$\overline{M}, E^{n+1}$ de M ye paralel bir hiperyüzey olmak üzere, $X \in \chi(M)$ ve $\overline{X} \in \chi(\overline{M})$ vektör alanları

$$X = \sum_{i=1}^{n+1} b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{n+1} \overline{b}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

dır. $\forall P \in M$ için

$$b_i(P) = \overline{b_i}(f(P)), \quad 1 \leq i \leq n,$$

verilsin. O zaman

$$\text{i) } f_*(X) = \overline{X} + r\overline{S(X)}$$

$$\text{ii) } \overline{S}(f_*(X)) = \overline{S(X)}$$

dır(f_* , f nin diferensiyelidir)(Hacısalıhoğlu 2000).

2.3 Yarı Riemann Manifolddlar

Tanım 2.3.1

V bir n -boyutlu indeksi 1 olan bir reel vektör uzayı olmak üzere,

$$\langle, \rangle : V \times V \longrightarrow R$$

dönüşümü, $\forall a, b \in R$ ve $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ için,

$$\text{i) } \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \text{ (simetrik özelliği)}$$

$$\text{ii) } \langle a\vec{u} + b\vec{v}, \vec{w} \rangle = a\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + b\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \text{ (bilineerlik özelliği)}$$

özeliklerine sahip ise bu dönüşüme V vektör uzayı üzerinde bir **simetrik bilinear form** denir(O'Neill 1983).

Tanım 2.3.2

V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form $\langle, \rangle$ olmak üzere,

i) $\forall \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0$ ise $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna **pozitif definit**,

ii) $\forall \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle < 0$ ise $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna **negatif definit**,

iii) $\forall \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq 0$ ise $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna **pozitif semi-definit**,

iv) $\forall \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \leq 0$ ise $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna **negatif semi- definit**,

v) $\forall \vec{w} \in V$ için $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$ iken $\vec{v} = 0 \in V$ olmak zorunda ise $\langle, \rangle$ simetrik bilinear

formuna **non-dejenere**, aksi taktirde **dejenere**dir,
denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.3.3

V vektör uzayı üzerinde non-dejenere simetrik bilineer formuna, V vektör uzayı üzerinde bir skalar çarpma denir. V vektör uzayı üzerinde bir skalar çarpma $\langle, \rangle$ ise $(V, \langle, \rangle)$ ikilisine **skalar çarpımlı vektör uzayı** denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.3.4

$\vec{v}, \vec{w} \in V$ için $\vec{v} \neq 0$ ve $\vec{w} \neq 0$ iken $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$ ise $\vec{v}$ ve $\vec{w}$ vektörleri **diktir** denir ve $\vec{v} \perp \vec{w}$ şeklinde gösterilir (O'Neill 1983).

Tanım 2.3.5

Bir V vektör uzayı üzerinde skalar çarpma $\langle, \rangle$ olmak üzere $\vec{v} \in V$ vektörünün **normu**,

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{|\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle|}$$

olarak tanımlanır. Normu bir olan vektöre **birim vektör** ve ortogonal birim vektörler cümlesine **ortonormal sistem** denir (O'Neill 1983).

Teorem 2.3.1

Bir V vektör uzayı için bir ortonormal baz $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ve $\varepsilon_i = \langle e_i, e_i \rangle$ olmak üzere $\forall \vec{v} \in V$ vektörü için,

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle \vec{v}, e_i \rangle e_i, \varepsilon_i = \pm 1$$

olacak şekilde tek türlü yazılabilir (O'Neill 1983).

Tanım 2.3.6

V bir vektör uzayı ve

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow R$$

bir simetrik bilineer form ise

$$\langle, \rangle|_W : W \times W \rightarrow R$$

negatif definit olacak şekildeki en büyük boyutlu W alt uzayının boyutuna $\langle, \rangle$ **simetrik bilineer formunun indeksi** denir ve v ile gösterilir (O'Neill 1983).

Tanım 2.3.7

M bir C^∞ manifold olmak üzere,

$$\begin{aligned} \langle, \rangle|_p : T_M(P) \times T_M(P) &\rightarrow R \\ (u, v) &\rightarrow \langle u, v \rangle|_p = \langle u_p, v_p \rangle \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı, sabit indeksli, simetrik, bilineer, non-dejenere, $(0, 2)$ tensör alanına M üzerinde bir metrik tensör denir. $\vec{v} = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle \vec{v}, e_i \rangle e_i$ eşitliğinde yer alan ε_i lerin negatif olanlarının sayısı **metrik tensörün indeksi** olarak adlandırılır(O'Neill 1983).

Tanım 2.3.8

M bir C^∞ manifold olmak üzere, M manifoldu $\langle, \rangle$ metrik tensörü ile donatılmışsa, M ye bir **yarı-Riemann manifoldu** denir(O'Neill,B.1983).

Tanım 2.3.9

Bir yarı-Riemann M manifoldu üzerinde tanımlanmış olan $\langle, \rangle$ metrik tensörün indeksine **yarı-Riemann manifoldun indeksi** denir.

Eğer indeks v ise $0 \leq v \leq \text{boy}M$ dir. Özel olarak, $v = 0$ ise $\forall P \in M$ için $\langle, \rangle|_p, T_M(P)$ üzerinde pozitif tanımlı iç çarpım olduğundan, M bir Riemann manifoldu olur.

$v = 1$ ve $n \geq 2$ olması durumunda ise, M ye bir **Lorentz manifold** denir(O'Neill 1983).

Tanım 2.3.10

E^{n+1} , $(n+1)$ – boyutlu standard reel vektör uzayı üzerinde $\forall P \in E^{n+1}$ de $X_P, Y_P \in T_{E^{n+1}}(P)$ ve $0 \leq v \leq n+1$ olmak üzere

$$\langle X_P, Y_P \rangle = \sum_{i=1}^{n+1-v} x_i y_i - \sum_{i=n+2-v}^{n+1} x_i y_i$$

ile verilen v indeksli metrik tensörle birlikte elde edilen uzaya **yarı Öklidyen uzay** denir ve E_v^{n+1} ile gösterilir(O'Neill 1983).

Tanım 2.3.11

E_v^{n+1} yarı-Öklidyen uzayı verilsin. Eğer $v = 1$ ve $n \geq 2$ ise E_v^{n+1} , yarı-Öklidyen uzayı **Minkowski $(n+1)$ –uzay** olarak adlandırılır(O'Neill 1983).

Tanım 2.3.12

$(V, \langle, \rangle)$ Lorentz uzayı ve $W \subset V$ için,

- i) $\langle, \rangle|_w : W \times W \rightarrow R$ pozitif definit ise W ya **uzay benzeri alt uzay**,
- ii) $\langle, \rangle|_w$ indeksi 1 olan non-dejenere ise W ya **zaman benzeri alt uzay**,
- iii) $\langle, \rangle|_w$ dejenere ise W ya **ışık benzeri alt uzay**,

denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.3.13

M bir C^∞ yarı-Riemann manifold ve $\langle, \rangle, M$ üzerinde tanımlanmış bir metrik tensör ise $\forall P \in M$ ve $\vec{v} \in T_M(P)$ için,

$$\langle, \rangle|_P : T_M(P) \times T_M(P) \rightarrow R$$

olmak üzere

- i) $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0$ veya $\vec{v} = 0$ ise $\vec{v}$ tanjant vektörüne **uzay benzeri**,
 - ii) $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle < 0$ ise $\vec{v}$ tanjant vektörüne **zaman benzeri**,
 - iii) $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$, $\vec{v} \neq 0$ ise $\vec{v}$ tanjant vektörüne **ışık(null) benzeri**,
- denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.3.14

V Lorentz uzayında bütün zaman benzeri vektörlerin cümlesi τ olmak üzere $U \in \tau$ için,

$$\{X \in \tau : \langle U, X \rangle < 0\}$$

cümlesine V nin U yu ihtiva eden **zaman-konisi** denir (O'Neill 1983).

Teorem 2.3.1

V Lorentz uzayında iki zaman benzeri vektör v, w olmak üzere

i)

v, w vektörleri aynı zaman konisinde ise

$$\langle v, w \rangle = -\|v\| \|w\| \cosh \varphi$$

olacak şekilde bir tek $\varphi \geq 0$ sayısı vardır.

ii)

v, w vektörleri aynı zaman konisinde değil ise,

$$|\langle v, w \rangle| = \|v\| \|w\| \cosh \varphi$$

dır (O'Neill 1983).

Teorem 2.3.2

V Lorentz uzayında iki uzay benzeri vektör v, w ise,

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \|v\| \|w\| \cos \varphi$$

olacak şekilde bir tek $0 \leq \varphi \leq \pi$ sayısı vardır (O'Neill 1983).

Tanım 2.3.15

E_1^3 de M bir Lorentz yüzeyi ise e_1 zaman benzeri bir vektör, yani

$$\langle e_1, e_1 \rangle = -1$$

ve e_2 uzay benzeri bir vektör yani

$$\langle e_2, e_2 \rangle = 1$$

olmak üzere, $T_M(P)$ uzayının bir ortonormal bazı $\{e_1, e_2\}$ ise t birim tanjant vektörü

$$t = \cosh \varphi e_1 + \sinh \varphi e_2$$

dır (O'Neill 1983).

Tanım 2.3.16

E_v^{n+1} üzerinde doğal koordinatlar sistemi $\{u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}\}$ ve $W = \sum W^i \partial_i$ ise E_v^{n+1} üzerinde

$$D_V W = \sum V(W^i) \partial_i$$

vektör alanına W nın V ye **göre kovaryant türevi** denir. Burada $\{\partial_i | 1 \leq i \leq n\}$ bazı, $\chi(E_v^n)$ vektör uzayının standart bazıdır (O'Neill 1983).

Tanım 2.3.17

M bir C^∞ manifold olmak üzere, M üzerindeki

$$D : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

konneksiyonu,

i) $D_V W$, V ye göre $F(M)$ lineerdir

ii) $D_V W$, W ya göre R lineerdir

iii) $D_V(fW) = (Vf)W + fD_V W$, $\forall f \in F(M)$

özelliklerini sağlayan bir dönüşümdür. Burada $f(M) = \left\{ f|f : M \xrightarrow{C^\infty} R \right\}$ cümlesidir (O'Neill 1983).

Tanım 2.3.18

Bir M yarı-Riemann manifold üzerinde $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

i) $[X, Y] = D_X Y - D_Y X$,

ii) $X[Y, Z] = \langle D_X Y, Z \rangle + \langle Y, D_X Z \rangle$

şartlarını sağlayan D konneksiyonuna **Levi-Civita konneksiyon** denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.3.19

E_v^{n+1} , yarı-Öklidyen uzayın n -boyutlu bir altmanifolduna E_v^{n+1} de bir **hiperyüzey** denir (O'Neill 1983)

Tanım 2.3.20

E_1^{n+1} de yarı-Öklidyen hiperyüzey M , E_1^{n+1} üzerinde Levi-Civita konneksiyonu D ve birim normal vektör alanı N olmak üzere,

$$\begin{aligned} S : \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ X &\rightarrow S(X) = D_X N \end{aligned}$$

lineer dönüşümüne **şekil operatörü** denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.3.21

E_1^3 , 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey $\overline{M}$ ve $\overline{M}$ nin şekil operatörü S olmak üzere, $P \in \overline{M}$ için,

$$K(P) = \varepsilon \det S_P$$

biçiminde tanımlanan $K(P)$ sayısına, $\overline{M}$ yüzeyinin P noktasındaki **Gauss eğriliği**, $K : \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna da $\overline{M}$ yüzeyinin **Gauss eğrilik fonksiyonu** denir. Burada $\varepsilon = \langle N, N \rangle = \pm 1$ dir. N , $\overline{M}$ yüzeyinin normal vektör alanıdır (O'Neill 1983).

Tanım 2.3.22

E_1^3 , 3-boyutlu Minkowski uzayında semi-Riemann manifold M nin bir ortonormal bazı $\{e_1, e_2\}$ olmak üzere,

$$H = \frac{1}{2} (\varepsilon_1 II \langle e_1, e_1 \rangle + \varepsilon_2 II \langle e_2, e_2 \rangle)$$

veya

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \varepsilon_i II \langle e_i, e_i \rangle$$

dır. Burada $\varepsilon_i = \langle e_i, e_i \rangle$ ve II , M nin **ikinci temel formudur** (O'Neill 1983).

Tanım 2.3.23

M , E_1^{n+1} de bir yarı-Öklidyen hiperyüzey ve M nin birim normal vektör alanı N olmak üzere,

$$\begin{aligned} f : M &\rightarrow \overline{M} \\ P &\rightarrow f(P) = P + rN_P \end{aligned}$$

olacak şekilde f fonksiyonu varsa $\overline{M}$ hiperyüzeyine, M nin bir **paralel hiperyüzeyi** denir (Görgülü ve Çöken 1995).

Teorem 2.3.3

M ve $\overline{M}$, E_1^{n+1} de yarı Öklidyen hiperyüzeyler olmak üzere $X \in \chi(M)$ ve $\overline{X} \in \chi(\overline{M})$ vektör alanları,

$$X = \sum_{i=1}^{n+1} b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

ve

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{n+1} \overline{b}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

dır. $\forall P \in M$ için

$$b_i(P) = \overline{b_i}(f(P)), \quad 1 \leq i \leq n,$$

olmak üzere,

$$\mathbf{1)} \quad f_*(X) = \overline{X} + r\overline{S(X)}$$

$$\mathbf{2)} \quad \overline{S}(f_*(X)) = \overline{S(X)}$$

dır (Görgülü ve Çöken 1995).

3. E^{n+1} ÖKLİD UZAYINDA BİR PARALEL HİPERYÜZEYİN EĞRİLİKLERİ

3.1 E^{n+1} Öklid Uzayında Bir Paralel Hiperyüzeyin Eğrilikleri Arasındaki Bağlıntılar

Teorem 3.1.1

$M \subset E^3$ yüzeyinin bir paralel yüzeyi $\overline{M}$ ve $P \in M$ noktasındaki M nin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla, K ve H olmak üzere $f(P) \in \overline{M}$ noktasındaki $\overline{M}$ nin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırası ile,

$$\overline{K} = \frac{K}{1 + rH + r^2K}$$

ve

$$\overline{H} = \frac{H + 2rK}{1 + rH + r^2K}$$

dır(Hacısalihoglu 2000) .

Teorem 3.1.2

E^{n+1} de M ye paralel hiperyüzey $\overline{M}$ olmak üzere, $P \in M$ noktasında M nin asli eğrilikleri $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ ise $f(P) \in \overline{M}$ noktasında $\overline{M}$ nin Gauss eğriliği

$$\overline{K} = \prod_{i=1}^n \frac{k_i}{1 + rk_i}$$

ve ortalama eğriliği

$$\overline{H} = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{1 + rk_i}$$

dır(Görgülü 1979) .

Teorem 3.1.3

$K_j^{(n)}$ yardımıyla $\overline{K}_j^{(n)}$ in hesaplanması

E^{n+1} de M ye paralel hiperyüzey $\overline{M}$ olmak üzere k_j , $1 \leq j \leq n$, M nin bir P noktasında yönlendirilmiş X_j lerin asli eğrilikleridir. $\overline{M}$ nin şekil operatörü $\overline{S}$ olmak

üzere $f : M \rightarrow \overline{M}$ paralel dönüşümü f_* dönüşümü ise

$$\begin{aligned}\overline{S}(f_*X_1) &= \frac{k_1}{1+rk_1}f_*(X_1) \\ \overline{S}(f_*X_2) &= \frac{k_2}{1+rk_2}f_*(X_2) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \overline{S}(f_*X_n) &= \frac{k_n}{1+rk_n}f_*(X_n)\end{aligned}$$

dır. Böylece

$$\overline{S}(f_*X_j) = \frac{k_j}{1+rk_j}f_*(X_j), \quad 1 \leq j \leq n,$$

olur. Burada

$$\overline{k_j} = \frac{k_j}{1+rk_j}$$

$\overline{M}$ nin asli eğriligidir.

M nin yüksek mertebeden Gauss eğriliklerinin

$$\begin{aligned}K_1^{(n)} &= \sum_{j=1}^n k_j \\ K_2^{(n)} &= \sum_{j_1 < j_2=1}^n k_{j_1}k_{j_2} \\ K_p^{(n)} &= \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_p=1}^n k_{j_1}k_{j_2}\dots k_{j_p} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ K_n^{(n)} &= \prod_{j=1}^n k_j\end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz. k_{j_r} , M üzerinde j . asli eğrilik fonksiyonunu gösterir, $1 \leq j_r \leq n$.

$K_1^{(n)}$ ve $K_n^{(n)}$, M nin , sırasıyla, ortalama eğrilik ve Gauss eğrilik fonksiyonlarıdır.

Benzer yolla $\overline{M}$ nin yüksek mertebeden Gauss eğrilikleri

$$\begin{aligned}
\overline{K}_1^{(n)} &= \sum_{j=1}^n \overline{k}_j \\
\overline{K}_2^{(n)} &= \sum_{j_1 < j_2=1}^n \overline{k}_{j_1} \overline{k}_{j_2} \\
\overline{K}_p^{(n)} &= \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_p=1}^n \overline{k}_{j_1} \overline{k}_{j_2} \dots \overline{k}_{j_p} \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&\vdots \\
\overline{K}_n^{(n)} &= \prod_{j=1}^n \overline{k}_j
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır (Hassan ve Hacısalihoğlu 1998).

Teorem 3.1.4

E^{n+1} de bir hiperyüzey M nin asli eğrilik fonksiyonları ve yüksek mertebeden Gauss

eğrilikleri arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir.

- a) $K_1^{(p)} + k_{p+1} = K_1^{(p+1)}$, $1 \leq p+1 \leq n$
- b) $K_p^{(p)} \cdot k_{p+1} = K_{p+1}^{(p+1)}$, $1 \leq p+1 \leq n$
- c) $K_r^{(p)} + k_{p+1} \cdot K_{r-1}^{(p)} = K_r^{(p+1)}$, $1 \leq p+1 \leq n$

(Hassan ve Hacısalihoğlu 1998)

İspat

a) Tanıma göre

$$\begin{aligned}
K_1^{(p)} &= k_1 + k_2 + \dots + k_p & 1 \leq p \leq n \\
K_1^{(p+1)} &= k_1 + k_2 + \dots + k_p + k_{p+1} \\
K_1^{(p+1)} &= K_1^{(p)} + k_{p+1}
\end{aligned}$$

dır.

b)

$$K_p^{(p)} = \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_p=1}^p k_{j_1} k_{j_2} \dots k_{j_p}, \quad 1 \leq p \leq n$$

eşitliğin her iki tarafı k_{p+1} ile çarpılarak,

$$\begin{aligned} K_p^{(p)} k_{p+1} &= \left(\sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_p}^p k_{j_1} k_{j_2} \dots k_{j_p} \right) k_{p+1} \\ &= \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_p}^p k_{j_1} k_{j_2} \dots k_{j_p} \cdot k_{p+1} \\ &= \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_{p+1}}^{p+1} k_{j_1} k_{j_2} \dots k_{j_p} k_{j_{p+1}} \\ &= K_{p+1}^{(p+1)} \end{aligned}$$

bulunur.

c)

Tanımdan faydalanarak

$$\begin{aligned} K_r^{(p+1)} &= \left(\sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_r=1}^{p+1} k_{j_1} k_{j_2} \dots k_{j_r} \right) \\ K_r^{(p+1)} &= \left(\sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_r=1}^p k_{j_1} k_{j_2} \dots k_{j_r} \right) \\ &\quad + \left(\sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_{r-1}=1}^p k_{j_1} k_{j_2} \dots k_{j_{r-1}} \right) k_{p+1} \\ &= K_r^{(p)} + K_{r-1}^{(p)} k_{p+1} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Bu teoremden $K_r^{(p)}$ ve $K_r^{(p+1)}$ aynı manifold üzerinde tanımlanamaz. Örneğin $K_r^{(p)}$ ve $K_r^{(p+1)}$, sırasıyla, p boyutlu ve $p+1$ boyutlu manifoldlar üzerinde tanımlanırlar. $(p+1)$ boyutlu uzay p boyutlu uzayı içerdiği için manifoldların her noktasında bu fonksiyonlardaki hesaplamalar kullanılabilir (Hassan ve Hacısalıhoğlu 1998).

3.2.Eⁿ⁺¹ de Bir Paralel Hiperyüzeyin Yüksek Mertebeden Gauss Eğriliği

Teorem 3.2.1

E^{n+1} de M ye paralel hiperyüzey $\overline{M}$ olmak üzere, her bir s doğal sayısı için, $1 \leq s \leq n$, $K_s^{(n)}$ ve $\overline{K}_s^{(n)}$, sırasıyla, M ve $\overline{M}$ nin Gauss eğriliklerini belirtir ve

$$\overline{K}_s^n = \frac{\sum_{i=s}^n \frac{i(i-1)\dots(i-s+1)}{s!} r^{i-s} K_i^{(n)}}{1 + \sum_{i=1}^n r^i K_i^{(n)}}$$

dır. (Hassan ve Hacısalıhoğlu 1998).

İspat:

İspatın tamamı tümevarım yöntemi ile iki adımda yapılır.

1. Adım

Aşağıdaki durumlar için teoremin doğru olduğunu göstermeliyiz.

i) $s = 1$ ve $n = 1, n = 2, n = 3$

ii) $s = 2$ ve $n = 2, n = 3, n = 4$

iii) $s = 3$ ve $n = 3, n = 4, n = 5$

i) $s = 1, n = 1$ için,

$$\begin{aligned} \overline{K}_1^{(1)} &= \sum_{j=1}^1 \overline{k}_j \\ &= \frac{k_1}{1 + r k_1} \\ &= \frac{K_1^{(1)}}{1 + r K_1^{(1)}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^1 i r^i K_i^{(1)}}{1 + \sum_{i=1}^1 r^i K_i^{(1)}} \end{aligned}$$

$s = 1, \quad n = 2$ için,

$$\begin{aligned}
\overline{K}_1^{(2)} &= \sum_{j=1}^2 \overline{k}_j \\
&= \overline{k}_1 + \overline{k}_2 \\
&= \overline{K}_1^{(1)} + \overline{k}_2 \\
&= \frac{\sum_{i=1}^2 i r^{i-1} K_i^{(2)}}{1 + \sum_{i=1}^2 r^i K_i^{(2)}}
\end{aligned}$$

ve $s = 1, \quad n = 3$ için

$$\begin{aligned}
\overline{K}_1^{(3)} &= \sum_{j=1}^3 \overline{k}_j \\
&= \overline{k}_1 + \overline{k}_2 + \overline{k}_3 \\
&= \overline{K}_1^{(2)} + \overline{k}_3 \\
&= \frac{\sum_{i=1}^3 i r^{i-1} K_i^{(3)}}{1 + \sum_{i=1}^3 r^i K_i^{(3)}}
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

ii) $s = 2, \quad n = 2$ için,

$$\begin{aligned}
\overline{K}_2^{(2)} &= \sum_{j_1 < j_2 = 1}^2 \overline{k}_{j_1} \overline{k}_{j_2} \\
&= \overline{k}_1 \cdot \overline{k}_2 \\
&= \frac{K_2^{(2)}}{1 + r K_1^{(2)} + r^2 K_2^{(2)}} \\
&= \frac{\sum_{i=2}^2 \frac{i(i-1)}{2!} r^{i-2} K_i^{(2)}}{1 + \sum_{i=1}^2 r^i K_i^{(2)}}
\end{aligned}$$

$s = 2, \quad n = 3$ için,

$$\begin{aligned}
\overline{K}_2^{(3)} &= \sum_{j_1 < j_2 = 1}^3 \overline{k}_{j_1} \overline{k}_{j_2} \\
&= \overline{k}_1 \overline{k}_2 + \overline{k}_1 \overline{k}_3 + \overline{k}_2 \overline{k}_3 \\
&= \overline{K}_2^{(2)} + \frac{k_3}{1 + rk_3} \overline{K}_1^{(2)} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^3 \frac{i(i-1)}{2!} r^{i-2} K_i^{(3)}}{1 + \sum_{i=1}^3 r^i K_i^{(3)}}
\end{aligned}$$

ve $s = 2, \quad n = 4$ için,

$$\begin{aligned}
\overline{K}_2^{(4)} &= \sum_{j_1 < j_2 = 1}^4 \overline{k}_{j_1} \overline{k}_{j_2} \\
&= \overline{k}_1 \overline{k}_2 + \overline{k}_1 \overline{k}_3 + \overline{k}_1 \overline{k}_4 + \overline{k}_2 \overline{k}_3 + \overline{k}_2 \overline{k}_4 + \overline{k}_3 \overline{k}_4 \\
&= \overline{K}_2^{(3)} + \frac{k_4}{1 + rk_4} \overline{K}_1^{(3)} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^4 \frac{i(i-1)}{2!} r^{i-2} K_i^{(4)}}{1 + \sum_{i=1}^4 r^i K_i^{(4)}}
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

iii)

$s = 3, \quad n = 3$ için,

$$\begin{aligned}
\overline{K}_3^{(3)} &= \sum_{j_1 < j_2 < j_3 = 1}^3 \overline{k}_{j_1} \overline{k}_{j_2} \overline{k}_{j_3} \\
&= \overline{k}_1 \overline{k}_2 \overline{k}_3 \\
&= \frac{K_3^{(3)}}{1 + rK_1^{(3)} + r^2 K_2^{(3)} + r^3 K_3^{(3)}} \\
&= \frac{\sum_{i=3}^3 \frac{i(i-1)(i-2)}{3!} r^{i-3} K_i^{(3)}}{1 + \sum_{i=1}^3 r^i K_i^{(3)}}
\end{aligned}$$

$s = 3, n = 4$ için,

$$\begin{aligned}
\overline{K}_3^{(4)} &= \sum_{j_1 < j_2 < j_3 = 1}^4 \overline{k}_{j_1} \overline{k}_{j_2} \overline{k}_{j_3} \\
&= \overline{k}_1 \overline{k}_2 \overline{k}_3 + \overline{k}_1 \overline{k}_3 \overline{k}_4 + \overline{k}_2 \overline{k}_3 \overline{k}_4 + \overline{k}_1 \overline{k}_2 \overline{k}_4 \\
&= \overline{K}_3^{(3)} + \frac{k_4}{1 + rk_4} \overline{K}_2^{(3)} \\
&= \frac{\sum_{i=3}^4 \frac{i(i-1)(i-2)}{3!} r^{i-3} K_i^{(4)}}{1 + \sum_{i=1}^4 r^i K_i^{(4)}}
\end{aligned}$$

ve $s = 3, n = 5$ için,

$$\begin{aligned}
\overline{K}_3^{(5)} &= \sum_{j_1 < j_2 < j_3 = 1}^5 \overline{k}_{j_1} \overline{k}_{j_2} \overline{k}_{j_3} \\
&= \overline{k}_1 \overline{k}_2 \overline{k}_3 + \overline{k}_1 \overline{k}_2 \overline{k}_4 + \overline{k}_1 \overline{k}_2 \overline{k}_5 + \overline{k}_1 \overline{k}_3 \overline{k}_4 + \overline{k}_1 \overline{k}_3 \overline{k}_5 \\
&\quad + \overline{k}_1 \overline{k}_4 \overline{k}_5 + \overline{k}_2 \overline{k}_4 \overline{k}_5 + \overline{k}_2 \overline{k}_3 \overline{k}_4 + \overline{k}_2 \overline{k}_3 \overline{k}_5 + \overline{k}_3 \overline{k}_4 \overline{k}_5 \\
&= \overline{K}_3^{(4)} + \frac{k_5}{1 + rk_5} \overline{K}_2^{(4)} \\
&= \frac{\sum_{i=3}^5 \frac{i(i-1)(i-2)}{3!} r^{i-3} K_i^{(5)}}{1 + \sum_{i=1}^5 r^i K_i^{(5)}}
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

2. Adım

Şimdi ise teoremin $s = q$ ve $n = p$ için doğru olduğunu kabul edip $s = q$ ve $n = p + 1$ için de doğru olduğunu gösterelim. Yani

$$\overline{K}_q^p = \frac{\sum_{i=q}^p \frac{i(i-1)\dots(i-q+1)}{q!} r^{i-q} K_i^{(p)}}{1 + \sum_{i=1}^p r^i K_i^{(p)}}$$

ve

$$\overline{K}_q^{(p+1)} = \frac{\sum_{i=q}^{p+1} \frac{i(i-1)\dots(i-q+1)}{q!} r^{i-q} K_i^{(p+1)}}{1 + \sum_{i=1}^{p+1} r^i K_i^{(p+1)}}$$

olduğunu gösterelim.

$$\overline{K}_q^{(p+1)} = \overline{K}_q^{(p)} + \frac{k_{p+1}}{1 + rk_{p+1}} \overline{K}_{q-1}^{(p)}$$

eşitliğinde $\overline{K}_{q-1}^{(p)}$ ve $\overline{K}_q^{(p)}$ değerleri yerlerine yazılarak,

$$\begin{aligned} \overline{K}_q^{(p+1)} &= \frac{\sum_{i=q}^p \frac{i(i-1)\dots(i-q+1)}{q!} r^{i-q} K_i^{(p)}}{1 + \sum_{i=1}^p r^i K_i^{(p)}} \\ &+ \frac{k_{p+1}}{1 + k_{p+1}} \frac{\sum_{i=q-1}^p \frac{i(i-1)\dots(i-q+2)}{(q-1)!} r^{i-q+1} K_i^{(p)}}{1 + \sum_{i=1}^p r^i K_i^{(p)}} \end{aligned}$$

elde edilir.

Payda eşitlenilerek

$$\begin{aligned} \overline{K}_q^{(p+1)} &= \frac{(1 + rk_{p+1}) \sum_{i=q}^p \frac{i(i-1)\dots(i-q+1)}{q!} r^{i-q} K_i^{(p)}}{(1 + rk_{p+1}) \left(1 + \sum_{i=1}^p r^i K_i^{(p)} \right)} \\ &+ \frac{k_{p+1} \sum_{i=q-1}^p \frac{i(i-1)\dots(i-q+2)}{(q-1)!} r^{i-q+1} K_i^{(p)}}{(1 + rk_{p+1}) \left(1 + \sum_{i=1}^p r^i K_i^{(p)} \right)} \end{aligned}$$

bulunur. Eşitlik düzenlenildiğinde

$$\begin{aligned}\overline{K}_q^{(p+1)} &= \frac{\sum_{i=q}^p \frac{i(i-1)\dots(i-q+1)}{q!} r^{i-q} K_i^{(p)} + rk_{p+1} \sum_{i=q}^p \frac{i(i-1)\dots(i-q+1)}{q!} r^{i-q} K_i^{(p)}}{1 + \sum_{i=1}^p r^i K_i^{(p)} + rk_{p+1} + rk_{p+1} \sum_{i=1}^p r^i K_i^{(p)}} \\ &\quad + \frac{k_{p+1} \sum_{i=q-1}^p \frac{i(i-1)\dots(i-q+2)}{(q-1)!} r^{i-q+1} K_i^{(p)}}{1 + \sum_{i=1}^p r^i K_i^{(p)} + rk_{p+1} + rk_{p+1} \sum_{i=1}^p r^i K_i^{(p)}}\end{aligned}$$

olur. Denklemin payında $K_r^{(p)} + k_{p+1}.K_{r-1}^{(p)} = K_r^{(p+1)}$ eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}\overline{K}_q^{(p+1)} &= \frac{\sum_{i=q}^p \frac{i(i-1)\dots(i-q+1)}{q!} r^{i-q} K_i^{(p)} + k_{p+1} \sum_{i=q-1}^p \frac{i(i-1)\dots(i-q+2)}{(q-1)!} r^{i-q+1} K_i^{(p)}}{1 + \sum_{i=1}^p r^i K_i^{(p)} + rk_{p+1} + rk_{p+1} \sum_{i=1}^p r^i K_i^{(p)}} \\ &\quad + \frac{rk_{p+1} \sum_{i=q}^p \frac{i(i-1)\dots(i-q+1)}{q!} r^{i-q} K_i^{(p)}}{1 + \sum_{i=1}^p r^i K_i^{(p)} + rk_{p+1} + rk_{p+1} \sum_{i=1}^p r^i K_i^{(p)}} \\ &= \frac{K_q^{(p+1)} + rk_{p+1} \sum_{i=q}^p \frac{i(i-1)\dots(i-q+1)}{q!} r^{i-q} K_i^{(p)}}{\sum_{i=q}^p \frac{i(i-1)\dots(i-q+1)}{q!} r^{i-q} K_i^{(p)}}\end{aligned}$$

bulunur. $K_p^{(p)}.k_{p+1} = K_{p+1}^{(p+1)}$ eşitliğini kullanarak

$$\begin{aligned}\overline{K}_q^{(p+1)} &= \frac{K_q^{(p+1)} + \sum_{i=q}^{p-1} \frac{(i+1)i(i-1)\dots(i-q+2)}{q!} r^{i-q+1} K_{i+1}^{(p+1)}}{1 + r \left(k_{p+1} + k_{p+1} \sum_{i=1}^p r^i K_i^{(p)} \right) + \sum_{i=1}^p r^i K_i^{(p)}} \\ &\quad + \frac{\frac{(p+1)p(p-1)\dots(p-q+2)}{q!} r^{p-q+1} K_{p+1}^{(p+1)}}{1 + r \left(k_{p+1} + k_{p+1} \sum_{i=1}^p r^i K_i^{(p)} \right) + \sum_{i=1}^p r^i K_i^{(p)}}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \overline{K}_q^{(p+1)} &= \frac{K_q^{(p+1)} + \sum_{i=q}^{p-1} \frac{(i+1)i(i-1)\dots(i-q+2)}{q!} r^{i-q+1} K_{i+1}^{(p+1)}}{1 + rK_1^{(p+1)} + \sum_{i=1}^{p-1} r^{i+1} K_{i+1}^{(p+1)} + r^{p+1} K_{q+1}^{(p+1)}} \\ &+ \frac{\frac{(p+1)p(p-1)\dots(p-q+2)}{q!} r^{p-q+1} K_{p+1}^{(p+1)}}{1 + rK_1^{(p+1)} + \sum_{i=1}^{p-1} r^{i+1} K_{i+1}^{(p+1)} + r^{p+1} K_{q+1}^{(p+1)}} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik

$$K_q^{(p+1)} = \frac{\sum_{i=q}^{p+1} \frac{i(i-1)\dots(i-q+1)}{q!} r^{i-q} K_i^{(p+1)}}{1 + \sum_{i=1}^{p+1} r^i K_i^{(p+1)}}$$

olduğunu gösterir. Bu durum için ispat tamamlanmış olur.

Son eşitlikte $q = s$ ve $n = p + 1$ yazılarak

$$\overline{K}_s^n = \frac{\sum_{i=s}^n \frac{i(i-1)\dots(i-s+1)}{s!} r^{i-s} K_i^{(n)}}{1 + \sum_{i=1}^n r^i K_j^{(n)}}$$

bulunur.

4.E₁ⁿ⁺¹de BİR PARALEL HİPERYÜZEYİN EĞRİLİKLERİ

4.1 E₁ⁿ⁺¹de Bir Paralel Hiperyüzeyin Eğrilikleri Arasındaki Bağıntılar

Teorem 4.1.1

$\overline{M}$, E_1^3 Minkowski uzayında M nin bir paralel yüzeyi olmak üzere, $P \in M$ noktasında M nin Gauss ve ortalama eğrilikleri , sırasıyla, K ve H , $f(P) \in \overline{M}$ noktasındaki Gauss ve ortalama eğrilikleri de, sırasıyla, $\overline{K}$ ve $\overline{H}$ olmak üzere,

i) N_P zaman benzeri ise

$$\begin{aligned}\overline{K} &= \frac{K}{1 + 2rH - r^2K} \\ \overline{H} &= \frac{H - rK}{1 + 2rH - r^2K}\end{aligned}$$

dır.

ii) N_P uzay benzeri ise

$$\begin{aligned}\overline{K} &= \frac{K}{1 + 2rH + r^2K} \\ \overline{H} &= \frac{H + rK}{1 + 2rH + r^2K}\end{aligned}$$

dır.

İspat

N_P zaman benzeri vektör ise $N_r|_{f(p)}$ de zaman benzeridir. $[N_P]^\perp = T_M(P)$ tanjant uzayı da uzay benzeri alt uzay olur. $P \in M$ noktasında M nin asli eğrilikleri k_1 ve k_2 ve bunlara karşılık gelen asli eğrilik doğrultuları da X_1 ve X_2 ise $\{X_1, X_2\}$ ortonormal bazına göre S nin matrisi

$$S = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

olup, $\varepsilon = \langle N, N \rangle = -1$ ve $S(X_1) = k_1 X_1$, $S(X_2) = k_2 X_2$ dir.

$$\begin{aligned} K &= \varepsilon \det S \\ &= -k_1 k_2 \end{aligned}$$

ve

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \varepsilon_i II(X_i, X_i)$$

olur. $T_M(P)$ tanjant uzayında X_i ler uzay benzeri, yani $\varepsilon_i = \langle X_i, X_i \rangle = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \varepsilon_i II(X_i, X_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \varepsilon_i \langle S(X_i), X_i \rangle \\ &= \frac{1}{2} \{ \varepsilon_1 \langle S(X_1), X_1 \rangle + \varepsilon_2 \langle S(X_2), X_2 \rangle \} \\ &= \frac{1}{2} \{ \langle S(X_1), X_1 \rangle + \langle S(X_2), X_2 \rangle \} \\ &= \frac{1}{2} \{ k_1 + k_2 \} \end{aligned}$$

dir. $\overline{M}$ nin $f(P)$ noktasındaki asli eğrilik doğrultuları da $f_*(X_1)$ ve $f_*(X_2)$ olur. Üstelik

$$\begin{aligned} \overline{S}(f_*(X_1)) &= \frac{k_1}{1+rk_1} f_*(X_1) \\ \overline{S}(f_*(X_2)) &= \frac{k_2}{1+rk_2} f_*(X_2) \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $\{f_*(X_1), f_*(X_2)\}$ bazına göre $\overline{S}$ nin matrisi

$$\overline{S} = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{1+rk_1} & 0 \\ 0 & \frac{k_2}{1+rk_2} \end{bmatrix}$$

dır. $\varepsilon = \langle \overline{N}, \overline{N} \rangle = -1$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\overline{K} &= \varepsilon \det \overline{S} \\
&= \frac{-k_1}{1 + rk_1} \frac{k_2}{1 + rk_2} \\
&= \frac{-k_1 k_2}{1 + rk_1 + rk_2 + r^2 k_1 k_2} \\
&= \frac{K}{2 \left(\frac{1}{2} + r \frac{1}{2} (k_1 + k_2) + \frac{1}{2} r^2 (k_1 k_2) \right)}
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda

$$\overline{K} = \frac{K}{1 + 2rH - r^2 K}$$

bulunur. X_i ler uzay benzeri olduğundan

$$\begin{aligned}
\langle f_*(X_i), f_*(X_i) \rangle|_{f(P)} &= \langle \overline{X_i} + r\overline{S(X_i)}, \overline{X_i} + r\overline{S(X_i)} \rangle|_{f(p)} \\
&= \langle X_i + rk_i X_i, X_i + rk_i X_i \rangle|_p \\
&= \langle X_i, X_i \rangle|_p + 2rk_i \langle X_i, X_i \rangle|_p + r^2 k_i^2 \langle X_i, X_i \rangle|_p \\
&= 1 + 2rk_i + r^2 \\
&= (1 + rk_i)^2
\end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla $\langle f_*(X_i), f_*(X_i) \rangle > 0$ olduğundan $f_*(X_i)$ ler de uzay benzeridir.

Burada $\{f_*(X_1), f_*(X_2)\}$ bazı ortogonaldır. Bu bazı ortonormalleştirirsek

$$\begin{aligned}
\|f_*(X_i)\| &= \sqrt{|\langle f_*(X_i), f_*(X_i) \rangle|} \\
&= \sqrt{(1 + rk_i)^2} \\
&= |1 + rk_i|
\end{aligned}$$

dır. Burada

$$\left\{ \frac{f_*(X_1)}{|1 + rk_1|}, \frac{f_*(X_2)}{|1 + rk_2|} \right\}$$

ortonormal bazı elde edilir. Buna göre

$$\begin{aligned}
\varepsilon_i &= \left\langle \frac{f_*(X_i)}{|1 + rk_i|}, \frac{f_*(X_i)}{|1 + rk_i|} \right\rangle \\
&= \frac{1}{(1 + rk_i)^2} \langle f_*(X_i), f_*(X_i) \rangle \\
&= \frac{1}{(1 + rk_i)^2} (1 + rk_i)^2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

bulunur. Bu baz kullanılarak, $\overline{H}$ ortalama eğriliği,

$$\begin{aligned}
\overline{H} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \varepsilon_i \overline{H} \left(\frac{f_*(X_i)}{|1 + rk_i|}, \frac{f_*(X_i)}{|1 + rk_i|} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \left\langle \overline{S} \left(\frac{f_*(X_i)}{|1 + rk_i|} \right), \frac{f_*(X_i)}{|1 + rk_i|} \right\rangle \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \frac{1}{(1 + rk_i)^2} \frac{k_i}{(1 + rk_i)} \langle f_*(X_i), f_*(X_i) \rangle \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \frac{k_i}{1 + rk_i}
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Buradan da

$$\begin{aligned}
\overline{H} &= \frac{1}{2} \left(\frac{k_1}{1 + rk_1} + \frac{k_2}{1 + rk_2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{k_1(1 + rk_2)}{1 + rk_1(1 + rk_2)} + \frac{k_2(1 + rk_1)}{1 + rk_2(1 + rk_1)} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{k_1 + k_2 + 2rk_1k_2}{1 + rk_1 + rk_2 + r^2k_1k_2} \right) \\
&= \frac{\frac{1}{2}((k_1 + k_2) + rk_1k_2)}{1 + 2rH - r^2K} \\
&= \frac{H - rK}{1 + 2rH - r^2K}
\end{aligned}$$

elde edilir.

ii)

N_P uzay benzeri vektör ise $N_r|_{f(p)}$ de uzay benzeridir. $[N_P]^\perp = T_M(P)$ tanjant uzayı da zaman benzeri alt uzay olur. $P \in M$ noktasında M nin asli eğrilikleri k_1 ve k_2

ve bunlara karşılık gelen asli eğrilik doğrultuları da X_1 ve X_2 olsun. Bu durumda $\{X_1, X_2\}$ ortonormal bazına göre S nin matrisi

$$S = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

olup, $\varepsilon = \langle N, N \rangle = 1$ ve $S(X_1) = k_1 X_1$, $S(X_2) = k_2 X_2$ dır.

$$\begin{aligned} K &= \varepsilon \det S \\ &= k_1 k_2 \end{aligned}$$

ve

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \varepsilon_i II(X_i, X_i)$$

olur. $T_M(P)$ tanjant uzayında X_i lerden biri zaman benzeridir. X_2 zaman benzeri olsun. $\varepsilon_1 = \langle X_1, X_1 \rangle = +1$ ve $\varepsilon_2 = \langle X_2, X_2 \rangle = -1$ olduğundan

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \varepsilon_i II(X_i, X_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \varepsilon_i \langle S(X_i), X_i \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \varepsilon_i k_i \langle X_i, X_i \rangle \\ &= \frac{1}{2} (\varepsilon_1 k_1 \langle X_1, X_1 \rangle + \varepsilon_2 k_2 \langle X_2, X_2 \rangle) \\ &= \frac{1}{2} (k_1 + k_2) \end{aligned}$$

dır. $\overline{M}$ nin $f(P)$ noktasındaki asli eğrilik doğrultuları da $f_*(X_1)$ ve $f_*(X_2)$ olur. Üstelik

$$\begin{aligned} \overline{S}(f_*(X_1)) &= \frac{k_1}{1 + rk_1} f_*(X_1) \\ \overline{S}(f_*(X_2)) &= \frac{k_2}{1 + rk_2} f_*(X_2) \end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla $\{f_*(X_1), f_*(X_2)\}$ bazına göre $\overline{S}$ nin matrisi

$$\overline{S} = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{1+rk_1} & 0 \\ 0 & \frac{k_2}{1+rk_2} \end{bmatrix}$$

olup, $\varepsilon = \langle \overline{N}, \overline{N} \rangle = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} \overline{K} &= \varepsilon \det \overline{S} \\ &= \frac{k_1}{1+rk_1} \frac{k_2}{1+rk_2} \\ &= \frac{k_1 k_2}{1+rk_1+rk_2+r^2 k_1 k_2} \\ &= \frac{K}{2\left(\frac{1}{2} + r\frac{1}{2}(k_1+k_2) + \frac{1}{2}r^2(k_1 k_2)\right)} \end{aligned}$$

olur. Bu durumda

$$\overline{K} = \frac{K}{1+2rH+r^2K}$$

bulunur. X_2 ler zaman benzeri olduğundan

$$\begin{aligned} \langle f_*(X_2), f_*(X_2) \rangle|_{f(P)} &= \left\langle \overline{X_2} + r\overline{S(X_2)}, \overline{X_2} + r\overline{S(X_2)} \right\rangle|_{f(p)} \\ &= \langle X_2 + rk_2 X_2, X_2 + rk_2 X_2 \rangle|_p \\ &= \langle X_2, X_2 \rangle|_p + 2rk_2 \langle X_2, X_2 \rangle|_p + r^2 k_2^2 \langle X_2, X_2 \rangle|_p \\ &= -1 - 2rk_2 - r^2 k_2^2 \\ &= -(1+rk_2)^2 \end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla $\langle f_*(X_i), f_*(X_i) \rangle < 0$ olduğundan $f_*(X_2)$ ler de zaman benzeridir.

Burada $\{f_*(X_1), f_*(X_2)\}$ bazı ortogonaldır. Bu bazı ortonormalleştirirsek

$$\begin{aligned} \|f_*(X_i)\| &= \sqrt{|\langle f_*(X_i), f_*(X_i) \rangle|} \\ &= \sqrt{(1+rk_i)^2} \\ &= |1+rk_i| \end{aligned}$$

dır. Burada

$$\left\{ \frac{f_*(X_1)}{|1 + rk_1|}, \frac{f_*(X_2)}{|1 + rk_2|} \right\}$$

ortonormal bazı elde edilir. Buna göre

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \left\langle \frac{f_*(X_1)}{|1 + rk_1|}, \frac{f_*(X_1)}{|1 + rk_1|} \right\rangle \\ &= \frac{1}{(1 + rk_1)^2} \langle f_*(X_1), f_*(X_1) \rangle \\ &= \frac{1}{(1 + rk_1)^2} (1 + rk_1)^2 \\ &= 1 \\ \varepsilon_2 &= \left\langle \frac{f_*(X_2)}{|1 + rk_2|}, \frac{f_*(X_2)}{|1 + rk_2|} \right\rangle \\ &= \frac{1}{(1 + rk_2)^2} \langle f_*(X_2), f_*(X_2) \rangle \\ &= \frac{1}{(1 + rk_2)^2} (1 + rk_2)^2 = -1 \end{aligned}$$

bulunur. Bu baz kullanılarak, $\overline{H}$ ortalama eğriliği hesaplanır.

$$\begin{aligned} \overline{H} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \varepsilon_i \overline{H} \left(\frac{f_*(X_i)}{|1 + rk_i|}, \frac{f_*(X_i)}{|1 + rk_i|} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \varepsilon_i \left\langle \overline{S} \left(\frac{f_*(X_i)}{|1 + rk_i|} \right), \frac{f_*(X_i)}{|1 + rk_i|} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \varepsilon_i \frac{1}{(1 + rk_i)^2} \frac{k_i}{(1 + rk_i)} \langle f_*(X_i), f_*(X_i) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \frac{k_i}{1 + rk_i} \end{aligned}$$

buradan da

$$\begin{aligned}
\overline{H} &= \frac{1}{2} \left(\frac{k_1}{1+rk_1} + \frac{k_2}{1+rk_2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{k_1(1+rk_2)}{1+rk_1(1+rk_2)} + \frac{k_2(1+rk_1)}{1+rk_2(1+rk_1)} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{k_1+k_2+2rk_1k_2}{1+rk_1+rk_2+r^2k_1k_2} \right) \\
&= \frac{\frac{1}{2}((k_1+k_2)+rk_1k_2)}{1+2rH+r^2K} \\
&= \frac{H+rK}{1+2rH+r^2K}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.1.2

$\overline{M}$, E_1^{n+1} Lorentz uzayında M ye paralel bir hiperyüzey olmak üzere $P \in M$ noktasında M nin asli eğrilikleri $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ ve $f(P) \in \overline{M}$ noktasında $\overline{M}$ nin Gauss ve ortalama eğrilikleri ise $\overline{K}$ ve $\overline{H}$,

$$\varepsilon = \langle \overline{N}, \overline{N} \rangle = \pm 1$$

olmak üzere,

$$\overline{K} = \varepsilon \prod_{i=1}^n \frac{k_i}{1+rk_i}$$

ve

$$\overline{H} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{1+rk_i}$$

dır.

İspat

$P \in M$ noktasında M nin asli eğrilikleri $k_1, k_2, \dots, k_n$ ve buna karşılık gelen asli eğrilik doğrultuları $X_1, X_2, \dots, X_n$ ise,

i)

N_p zaman benzeri vektör ise $Nr|_{f(P)}$ zaman benzeridir.

$[N_P]^\perp = T_M(p)$ tanjant uzayı uzay benzeri altuzay olur.

Ayrıca $X_1, \dots, X_n$ asli eğrilik doğrultuları olduğundan

$$S(X_1) = k_1 X_1$$

$$S(X_2) = k_2 X_2$$

.

.

.

$$S(X_n) = k_n X_n$$

dır ve $f_*(X_1), f_*(X_2), \dots, f_*(X_n)$ de $f(P) \in \overline{M}$ noktasındaki asli eğrilik doğrultularıdır. Buna göre

$$\overline{S}(f_*(X_1)) = \frac{k_1}{1 + rk_1} f^*(X_1)$$

.

.

.

$$\overline{S}(f^*(X_n)) = \frac{k_n}{1 + rk_n} f^*(X_n)$$

yazılabilir. $\{f^*(X_1), f^*(X_2), \dots, f^*(X_n)\}$ baz vektörlerine göre $\overline{S}$ nin matrisi

$$\begin{bmatrix} \frac{k_1}{1+rk_1} & . & . & . & 0 \\ 0 & \frac{k_2}{1+rk_2} & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & \frac{k_n}{1+rk_n} \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Burada $\varepsilon = \langle \overline{N}, \overline{N} \rangle = -1$ olduğundan

$$\begin{aligned} \overline{K} &= \varepsilon \det \overline{S} \\ &= \varepsilon \prod_{i=1}^n \frac{k_i}{1 + rk_i} \\ &= - \prod_{i=1}^n \frac{k_i}{1 + rk_i} \end{aligned}$$

elde edilir.

$\{f * (X_1), f * (X_2), \dots, f * (X_n)\}$ bazını ortonormalleştirirsek

$$\left\{ \frac{f * (X_1)}{|1 + rk_1|}, \dots, \frac{f * (X_n)}{|1 + rk_n|} \right\}$$

bazı elde edilir.

$$\varepsilon_i = \left\langle \frac{f * (X_i)}{|1 + rk_i|}, \frac{f * (X_i)}{|1 + rk_i|} \right\rangle = 1$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \overline{H} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i II \left(\frac{f * (X_i)}{|1 + rk_i|}, \frac{f * (X_i)}{|1 + rk_i|} \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\langle \overline{S} \left(\frac{f * (X_i)}{|1 + rk_i|} \right), \frac{f * (X_i)}{|1 + rk_i|} \right\rangle \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(1 + rk_i)^2} \langle \overline{S}(f * (X_i)), f * (X_i) \rangle \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(1 + rk_i)^2} \left\langle \frac{k_i}{1 + rk_i} f * (X_i), f * (X_i) \right\rangle \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(1 + rk_i)^2} \frac{k_i}{1 + rk_i} \langle f * (X_i), f * (X_i) \rangle \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{(1 + rk_i)} \end{aligned}$$

bulunur.

ii)

N_P uzay benzeri vektör ise $Nr|_{f(P)}$ uzayı uzay benzeridir. $[N_P]^\perp = T_M(P)$ tanjant uzayı zaman benzeri altuzay olur. $T_M(P)$ de X_i lerin biri zaman benzeridir. X_n

zaman benzeri olsun. Burada $\varepsilon = \langle \overline{N}, \overline{N} \rangle = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} \overline{K} &= \varepsilon \det \overline{S} \\ &= \varepsilon \prod_{i=1}^n \frac{k_i}{1 + rk_i} \\ &= + \prod_{i=1}^n \frac{k_i}{1 + rk_i} \end{aligned}$$

dir.

X_n zaman benzeri olduğundan $f * (X_n)$ zaman benzeridir. O halde

$$\varepsilon_i = \left\langle \frac{f * (X_i)}{|1 + rk_i|}, \frac{f * (X_i)}{|1 + rk_i|} \right\rangle = 1$$

ve

$$\varepsilon_n = \left\langle \frac{f * (X_n)}{|1 + rk_n|}, \frac{f * (X_n)}{|1 + rk_n|} \right\rangle = -1$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \overline{H} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \overline{II} \left(\frac{f * (X_i)}{|1 + rk_i|}, \frac{f * (X_i)}{|1 + rk_i|} \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \left\langle \overline{S} \left(\frac{f * (X_i)}{|1 + rk_i|} \right), \frac{f * (X_i)}{|1 + rk_i|} \right\rangle \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \frac{1}{(1 + rk_i)^2} \frac{k_i}{1 + rk_i} \langle (f * (X_i)), f * (X_i) \rangle \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i \frac{1}{(1 + rk_i)^2} \frac{k_i}{1 + rk_i} \langle (f * (X_i)), f * (X_i) \rangle \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_n \frac{1}{(1 + rk_n)^2} \frac{k_n}{1 + rk_n} \langle (f * (X_n)), f * (X_n) \rangle \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{(1 + rk_i)} \end{aligned}$$

bulunur.

Tanım 4.1.1

E_1^{n+1} de bir hiperyüzey M ve $P \in M$ noktasındaki tanjant vektörlerin cümlesi $T_M(P)$ olmak üzere

$$S_P : T_M(P) \longrightarrow T_M(P)$$

şekil operatörü verilsin. $P \in M$ deki S_P dönüşümüne karşılık gelen karakteristik değerler $k_1, k_2, \dots, k_n$ ve $\varepsilon_i = +1$, ise S_P nin karakteristik polinomu

$$\begin{aligned}
K_1^{(n)}(k_1, k_2, \dots, k_n) &= \varepsilon_1 k_1 + \sum_{i=2}^n \varepsilon_i k_i \\
K_2^{(n)}(k_1, k_2, \dots, k_n) &= \sum_{i=1 \langle j}^n \varepsilon_i k_i k_j + \sum_{i \neq 1 \langle j}^n \varepsilon_i k_i k_j \\
K_3^{(n)}(k_1, k_2, \dots, k_n) &= \sum_{i=1 \langle j \langle t}^n \varepsilon_i k_i k_j k_t + \sum_{i \neq 1 \langle j \langle t}^n \varepsilon_i k_i k_j k_t \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&\vdots \\
K_n^{(n)}(k_1, k_2, \dots, k_n) &= \varepsilon_1 \prod_{i=1}^n k_i
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$P_{S(P)}(k) = k^n + (-1) K_1^{(n)} k^{n-1} + \dots + (-1)^n K_n^{(n)}$$

dır. Burada $K_1, K_2, \dots, K_n$ fonksiyonlarına M hiperyüzeyinin **yüksek mertebeden Gauss anlamında eğrilikleri** denir.

Teorem 4.1.3

M, E_1^{n+1} de bir hiperyüzey olsun. M nin asli eğrilik fonksiyonları ve yüksek mertebeden Gauss eğrilikleri arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir.

- a) $K_1^{(p)} + k_{p+1} = K_1^{(p+1)}, 1 \leq p+1 \leq n$
- b) $K_p^{(p)} \cdot k_{p+1} = K_{p+1}^{(p+1)}, 1 \leq p+1 \leq n$
- c) $K_r^{(p)} + k_{p+1} \cdot K_{r-1}^{(p)} = K_r^{(p+1)}, 1 \leq p+1 \leq n$

İspat

a)

i)

Asli eğrilik doğrultuları olarak bilinen X_i ler uzay benzeri ise $\varepsilon_i = \langle X_i, X_{iA} \rangle = +1$

dır.Tanıma göre

$$\begin{aligned} K_1^{(p)} &= k_1 + k_2 + \dots + k_p & 1 \leq p \leq n \\ K_1^{(p+1)} &= k_1 + k_2 + \dots + k_p + k_{p+1} \\ K_1^{(p+1)} &= K_1^{(p)} + k_{p+1} \end{aligned}$$

elde edilir.

ii)

Asli eğrilik doğrultuları olarak bilinen X_i lerden biri zaman benzeridir. X_1 zaman benzeri olsun. $\varepsilon_1 = \langle X_1, X_1 \rangle = -1$ dir.Tanıma göre

$$\begin{aligned} K_1^{(p)} &= -k_1 + k_2 + \dots + k_p & 1 \leq p \leq n \\ K_1^{(p+1)} &= -k_1 + k_2 + \dots + k_p + k_{p+1} \\ K_1^{(p+1)} &= K_1^{(p)} + k_{p+1} \end{aligned}$$

elde edilir.

b)

i)

X_i zaman benzeri ise $\varepsilon_i = \langle X_i, X_i \rangle = +1$ dir.

$$\begin{aligned} K_p^{(p)} &= \sum_{j_1=1 < j_2 < \dots < j_p}^p k_{j_1} k_{j_2} \dots k_{j_{p-1}} + \sum_{j_2 < \dots < j_p}^p k_{j_2} k_{j_3} \dots k_{j_p} \quad , \quad 1 \leq p \leq n \\ &= \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_p}^p k_{j_1} k_{j_2} \dots k_{j_p} \end{aligned}$$

eşitliğinin her iki tarafı k_{p+1} ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
K_p^{(p)} k_{p+1} &= \left(\sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_p}^p k_{j_1} k_{j_2} \dots k_{j_p} \right) k_{p+1} \\
&= \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_p}^p k_{j_1} k_{j_2} \dots k_{j_p} k_{p+1} \\
&= \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_{p+1}}^{p+1} k_{j_1} k_{j_2} \dots k_{j_p} k_{j_{p+1}} \\
&= K_{p+1}^{(p+1)}
\end{aligned}$$

bulunur.

ii)

X_i lerden biri zaman benzeridir. X_1 zaman benzeri olsun. $\varepsilon_1 = \langle X_1, X_1 \rangle = -1$ dir.

$$K_p^{(p)} = - \sum_{j_1=1 < j_2 < \dots < j_p}^p k_{j_1} k_{j_2} \dots k_{j_{p-1}} + \sum_{j_2 < \dots < j_p}^p k_{j_2} k_{j_3} \dots k_{j_p} \quad , \quad 1 \leq p \leq n$$

eşitliğin her iki tarafı k_{p+1} ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned}
K_p^{(p)} k_{p+1} &= \left(- \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_p}^p k_{j_1} k_{j_2} \dots k_{j_{p-1}} + \sum_{j_2 < \dots < j_p}^p k_{j_2} k_{j_3} \dots k_{j_p} \right) k_{p+1} \\
&= \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_p}^p k_{j_1} k_{j_2} \dots k_{j_{p-1}} k_{j_{p+1}} + \sum_{j_2 < \dots < j_p}^p k_{j_2} k_{j_3} \dots k_{j_p} k_{j_{p+1}} \\
&= K_{p+1}^{(p+1)}
\end{aligned}$$

bulunur.

c)

i)

X_i uzay benzeri vektör ise $\varepsilon_i = \langle X_i, X_i \rangle = +1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
K_r^{(p+1)} &= \sum_{j_1=1 < j_2 < \dots < j_r}^p k_{j_1} k_{j_2} \dots k_{j_r} + \sum_{j_2 < \dots < j_r}^{p+1} k_{j_1} k_{j_2} \dots k_{j_r} \\
K_r^{(p+1)} &= \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_r}^p k_{j_1} k_{j_2} \dots k_{j_r} \\
&\quad + \left(\sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_{r-1}=1}^p k_{j_1} k_{j_2} \dots k_{j_{r-1}} \right) k_{p+1} \\
&= K_r^{(p)} + K_{r-1}^{(p)} k_{p+1}
\end{aligned}$$

dır.

ii)

X_1 zaman benzeri vektör olsun $\varepsilon_1 = \langle X_1, X_1 \rangle = -1$ dir ve

$$\begin{aligned}
K_r^{(p+1)} &= - \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_r}^p k_{j_1} k_{j_2} \dots k_{j_r} + \sum_{j_2 < \dots < j_r}^{p+1} k_{j_1} k_{j_2} \dots k_{j_r} \\
K_r^{(p+1)} &= - \sum_{j < j_2 < \dots < j_r}^p k_{j_1} k_{j_2} \dots k_{j_r} + \sum_{j_2 < \dots < j_r}^p k_{j_1} k_{j_2} \dots k_{j_r} \\
&\quad + \left(- \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_{r-1}}^p k_{j_1} k_{j_2} \dots k_{j_{r-1}} + \sum_{j_2 < \dots < j_{r-1}}^{p+1} k_{j_1} k_{j_2} \dots k_{j_{r-1}} \right) k_{p+1} \\
&= K_r^{(p)} + K_{r-1}^{(p)} k_{p+1}
\end{aligned}$$

elde edilir.

4.2 E_1^{n+1} de Bir Paralel Hiperyüzeyin Yüksek Mertebeden Gauss Eğriliği

Teorem 4.2.1

M ve $\overline{M}$, E_1^{n+1} de paralel iki hiperyüzey olsun. Her bir s doğal sayısı için ,

$1 \leq s \leq n$. $K_s^{(n)}$ ve $\overline{K}_s^{(n)}$, sırasıyla, M ve $\overline{M}$ nin Gauss eğriliklerini belirtir ve

$$\overline{K}_s^n = \frac{\sum_{i=s}^n \frac{i(i-1)\dots(i-s+1)}{s!} r^{i-s} K_i^{(n)}}{1 + \sum_{i=1}^n r^i K_i^{(n)}}$$

dır.

İspat

a)

X_i uzay benzeri vektör olsun. $\varepsilon_i = \langle X_i, X_i \rangle = +1$ olmak üzere ispatın tamamı tümevarım yöntemi ile iki adımda yapılır.

1. Adım

Aşağıdaki durumlar için teoremin doğru olduğu gösterelim.

i) $s = 1$ ve $n = 1, n = 2, n = 3$

ii) $s = 2$ ve $n = 2, n = 3, n = 4$

iii) $s = 3$ ve $n = 3, n = 4, n = 5$

i)

$s = 1, n = 1$ için,

$$\begin{aligned} \overline{K}_1^{(1)} &= \sum_{j=1}^1 \overline{k}_j \\ &= \frac{k_1}{1 + r k_1} \\ &= \frac{K_1^{(1)}}{1 + r K_1^{(1)}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^1 i r^i K_i^{(1)}}{1 + \sum_{i=1}^1 r^i K_i^{(1)}} \end{aligned}$$

$s = 1, \quad n = 2$ için,

$$\begin{aligned}
\overline{K}_1^{(2)} &= \sum_{j=1}^2 \overline{k}_j \\
&= \overline{k}_1 + \overline{k}_2 \\
&= \overline{K}_1^{(1)} + \overline{k}_2 \\
&= \frac{\sum_{i=1}^2 i r^{i-1} K_i^{(2)}}{1 + \sum_{i=1}^2 r^i K_i^{(2)}}
\end{aligned}$$

ve $s = 1, \quad n = 3$ için,

$$\begin{aligned}
\overline{K}_1^{(3)} &= \sum_{j=1}^3 \overline{k}_j \\
&= \overline{k}_1 + \overline{k}_2 + \overline{k}_3 \\
&= \overline{K}_1^{(2)} + \overline{k}_3 \\
&= \frac{\sum_{i=1}^3 i r^{i-1} K_i^{(3)}}{1 + \sum_{i=1}^3 r^i K_i^{(3)}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

ii) $s = 2, \quad n = 2$ için,

$$\begin{aligned}
\overline{K}_2^{(2)} &= \sum_{j_1 < j_2 = 1}^2 \overline{k}_{j_1} \overline{k}_{j_2} \\
&= \overline{k}_1 \cdot \overline{k}_2 \\
&= \frac{K_2^{(2)}}{1 + r K_1^{(2)} + r^2 K_2^{(2)}} \\
&= \frac{\sum_{i=2}^2 \frac{i(i-1)}{2!} r^{i-2} K_i^{(2)}}{1 + \sum_{i=1}^2 r^i K_i^{(2)}}
\end{aligned}$$

$s = 2, \quad n = 3$ için,

$$\begin{aligned}
\overline{K}_2^{(3)} &= \sum_{j_1 < j_2 = 1}^3 \overline{k}_{j_1} \overline{k}_{j_2} \\
&= \overline{k}_1 \overline{k}_2 + \overline{k}_1 \overline{k}_3 + \overline{k}_2 \overline{k}_3 \\
&= \overline{K}_2^{(2)} + \frac{k_3}{1 + rk_3} \overline{K}_1^{(2)} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^3 \frac{i(i-1)}{2!} r^{i-2} K_i^{(3)}}{1 + \sum_{i=1}^3 r^i K_i^{(3)}}
\end{aligned}$$

ve $s = 2, \quad n = 4$ için

$$\begin{aligned}
\overline{K}_2^{(4)} &= \sum_{j_1 < j_2 = 1}^4 \overline{k}_{j_1} \overline{k}_{j_2} \\
&= \overline{k}_1 \overline{k}_2 + \overline{k}_1 \overline{k}_3 + \overline{k}_1 \overline{k}_4 + \overline{k}_2 \overline{k}_3 + \overline{k}_2 \overline{k}_4 + \overline{k}_3 \overline{k}_4 \\
&= \overline{K}_2^{(3)} + \frac{k_4}{1 + rk_4} \overline{K}_1^{(3)} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^4 \frac{i(i-1)}{2!} r^{i-2} K_i^{(4)}}{1 + \sum_{i=1}^4 r^i K_i^{(4)}}
\end{aligned}$$

bulunur.

iii)

$s = 3, \quad n = 3$ için,

$$\begin{aligned}
\overline{K}_3^{(3)} &= \sum_{j_1 < j_2 < j_3 = 1}^3 \overline{k}_{j_1} \overline{k}_{j_2} \overline{k}_{j_3} \\
&= \overline{k}_1 \overline{k}_2 \overline{k}_3 \\
&= \frac{K_3^{(3)}}{1 + rK_1^{(3)} + r^2 K_2^{(3)} + r^3 K_3^{(3)}} \\
&= \frac{\sum_{i=3}^3 \frac{i(i-1)(i-2)}{3!} r^{i-3} K_i^{(3)}}{1 + \sum_{i=1}^3 r^i K_i^{(3)}}
\end{aligned}$$

$s = 3, n = 4$ için,

$$\begin{aligned}
\overline{K}_3^{(4)} &= \sum_{j_1 < j_2 < j_3 = 1}^4 \overline{k}_{j_1} \overline{k}_{j_2} \overline{k}_{j_3} \\
&= \overline{k}_1 \overline{k}_2 \overline{k}_3 + \overline{k}_1 \overline{k}_3 \overline{k}_4 + \overline{k}_2 \overline{k}_3 \overline{k}_4 + \overline{k}_1 \overline{k}_2 \overline{k}_4 \\
&= \overline{K}_3^{(3)} + \frac{k_4}{1 + rk_4} \overline{K}_2^{(3)} \\
&= \frac{\sum_{i=3}^4 \frac{i(i-1)(i-2)}{3!} r^{i-3} K_i^{(4)}}{1 + \sum_{i=1}^4 r^i K_i^{(4)}}
\end{aligned}$$

ve $s = 3, n = 5$ için

$$\begin{aligned}
\overline{K}_3^{(5)} &= \sum_{j_1 < j_2 < j_3 = 1}^5 \overline{k}_{j_1} \overline{k}_{j_2} \overline{k}_{j_3} \\
&= \overline{k}_1 \overline{k}_2 \overline{k}_3 + \overline{k}_1 \overline{k}_2 \overline{k}_4 + \overline{k}_1 \overline{k}_2 \overline{k}_5 + \overline{k}_1 \overline{k}_3 \overline{k}_4 + \overline{k}_1 \overline{k}_3 \overline{k}_5 \\
&\quad + \overline{k}_1 \overline{k}_4 \overline{k}_5 + \overline{k}_2 \overline{k}_4 \overline{k}_5 + \overline{k}_2 \overline{k}_3 \overline{k}_4 + \overline{k}_2 \overline{k}_3 \overline{k}_5 + \overline{k}_3 \overline{k}_4 \overline{k}_5 \\
&= \overline{K}_3^{(4)} + \frac{k_5}{1 + rk_5} \overline{K}_2^{(4)} \\
&= \frac{\sum_{i=3}^5 \frac{i(i-1)(i-2)}{3!} r^{i-3} K_i^{(5)}}{1 + \sum_{i=1}^5 r^i K_i^{(5)}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

2.Adım

Teoremin $s = q$ ve $n = p$ için doğru olduğu kabul edilip $s = q$ ve $n = p + 1$ için de doğru olduğu gösterilir. Yani

$$\overline{K}_q^p = \frac{\sum_{i=q}^p \frac{i(i-1)\dots(i-q+1)}{q!} r^{i-q} K_i^{(p)}}{1 + \sum_{i=1}^p r^i K_i^{(p)}}$$

ve

$$\overline{K}_q^{(p+1)} = \frac{\sum_{i=q}^{p+1} \frac{i(i-1)\dots(i-q+1)}{q!} r^{i-q} K_i^{(p+1)}}{1 + \sum_{i=1}^{p+1} r^i K_i^{(p+1)}}$$

olduğu gösterilir.

$$\overline{K}_q^{(p+1)} = \overline{K}_q^{(p)} + \frac{k_{p+1}}{1 + rk_{p+1}} \overline{K}_{q-1}^{(p)}$$

eşitliğinde $\overline{K}_{q-1}^{(p)}$ ve $\overline{K}_q^{(p)}$ değerlerinin yerine yazılması ile

$$\begin{aligned} \overline{K}_q^{(p+1)} &= \frac{\sum_{i=q}^p \frac{i(i-1)\dots(i-q+1)}{q!} r^{i-q} K_i^{(p)}}{1 + \sum_{i=1}^p r^i K_i^{(p)}} \\ &\quad + \frac{k_{p+1}}{1 + k_{p+1}} \frac{\sum_{i=q-1}^p \frac{i(i-1)\dots(i-q+2)}{(q-1)!} r^{i-q+1} K_i^{(p)}}{1 + \sum_{i=1}^p r^i K_i^{(p)}} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \overline{K}_q^{(p+1)} &= \frac{(1 + rk_{p+1}) \sum_{i=q}^p \frac{i(i-1)\dots(i-q+1)}{q!} r^{i-q} K_i^{(p)}}{(1 + rk_{p+1}) \left(1 + \sum_{i=1}^p r^i K_i^{(p)} \right)} \\ &\quad + \frac{k_{p+1} \sum_{i=q-1}^p \frac{i(i-1)\dots(i-q+2)}{(q-1)!} r^{i-q+1} K_i^{(p)}}{(1 + rk_{p+1}) \left(1 + \sum_{i=1}^p r^i K_i^{(p)} \right)} \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitlik düzenlenilir ise

$$\begin{aligned} \overline{K}_q^{(p+1)} &= \frac{\sum_{i=q}^p \frac{i(i-1)\dots(i-q+1)}{q!} r^{i-q} K_i^{(p)} + rk_{p+1} \sum_{i=q}^p \frac{i(i-1)\dots(i-q+1)}{q!} r^{i-q} K_i^{(p)}}{1 + \sum_{i=1}^p r^i K_i^{(p)} + rk_{p+1} + rk_{p+1} \sum_{i=1}^p r^i K_i^{(p)}} \\ &\quad + \frac{k_{p+1} \sum_{i=q-1}^p \frac{i(i-1)\dots(i-q+2)}{(q-1)!} r^{i-q+1} K_i^{(p)}}{1 + \sum_{i=1}^p r^i K_i^{(p)} + rk_{p+1} + rk_{p+1} \sum_{i=1}^p r^i K_i^{(p)}} \end{aligned}$$

olur. $K_r^{(p)} + k_{p+1}.K_{r-1}^{(p)} = K_r^{(p+1)}$ eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
\overline{K}_q^{(p+1)} &= \frac{\sum_{i=q}^p \frac{i(i-1)\dots(i-q+1)}{q!} r^{i-q} K_i^{(p)} + k_{p+1} \sum_{i=q-1}^p \frac{i(i-1)\dots(i-q+2)}{(q-1)!} r^{i-q+1} K_i^{(p)}}{1 + \sum_{i=1}^p r^i K_i^{(p)} + rk_{p+1} + rk_{p+1} \sum_{i=1}^p r^i K_i^{(p)}} \\
&\quad + \frac{rk_{p+1} \sum_{i=q}^p \frac{i(i-1)\dots(i-q+1)}{q!} r^{i-q} K_i^{(p)}}{1 + \sum_{i=1}^p r^i K_i^{(p)} + rk_{p+1} + rk_{p+1} \sum_{i=1}^p r^i K_i^{(p)}} \\
&= \frac{K_q^{(p+1)} + rk_{p+1} \sum_{i=q}^p \frac{i(i-1)\dots(i-q+1)}{q!} r^{i-q} K_i^{(p)}}{\sum_{i=q}^p \frac{i(i-1)\dots(i-q+1)}{q!} r^{i-q} K_i^{(p)}}
\end{aligned}$$

elde edilir. $K_p^{(p)}.k_{p+1} = K_{p+1}^{(p+1)}$ eşitliği yerine yazılarak düzenleme yapılır ise

$$\begin{aligned}
\overline{K}_q^{(p+1)} &= \frac{K_q^{(p+1)} + \sum_{i=q}^{p-1} \frac{(i+1)i(i-1)\dots(i-q+2)}{q!} r^{i-q+1} K_{i+1}^{(p+1)}}{1 + r \left(k_{p+1} + k_{p+1} \sum_{i=1}^p r^i K_i^{(p)} \right) + \sum_{i=1}^p r^i K_i^{(p)}} \\
&\quad + \frac{\frac{(p+1)p(p-1)\dots(p-q+2)}{q!} r^{p-q+1} K_{p+1}^{(p+1)}}{1 + r \left(k_{p+1} + k_{p+1} \sum_{i=1}^p r^i K_i^{(p)} \right) + \sum_{i=1}^p r^i K_i^{(p)}}
\end{aligned}$$

bulunur ve

$$\begin{aligned}
\overline{K}_q^{(p+1)} &= \frac{K_q^{(p+1)} + \sum_{i=q}^{p-1} \frac{(i+1)i(i-1)\dots(i-q+2)}{q!} r^{i-q+1} K_{i+1}^{(p+1)}}{1 + r K_1^{(p+1)} + \sum_{i=1}^{p-1} r^{i+1} K_{i+1}^{(p+1)} + r^{p+1} K_{q+1}^{(p+1)}} \\
&\quad + \frac{\frac{(p+1)p(p-1)\dots(p-q+2)}{q!} r^{p-q+1} K_{p+1}^{(p+1)}}{1 + r K_1^{(p+1)} + \sum_{i=1}^{p-1} r^{i+1} K_{i+1}^{(p+1)} + r^{p+1} K_{q+1}^{(p+1)}}
\end{aligned}$$

olur. Bu eşitlik ise

$$K_q^{(p+1)} = \frac{\sum_{i=q}^{p+1} \frac{i(i-1)\dots(i-q+1)}{q!} r^{i-q} K_i^{(p+1)}}{1 + \sum_{i=1}^{p+1} r^i K_i^{(p+1)}}$$

olduğunu gösterir. Bu durum için ispat tamamlanmış olur. Son eşitlikte $q = s$ ve $n = p + 1$ yazılarak

$$\overline{K_s}^n = \frac{\sum_{i=s}^n \frac{i(i-1)\dots(i-s+1)}{s!} r^{i-s} K_i^{(n)}}{1 + \sum_{i=1}^n r^i K_j^{(n)}}$$

elde edilir ve teorem ispatlanmış olur.

b)

X_i lerden biri zaman benzeridir. X_1 zaman benzeri olsun. $\varepsilon_1 = \langle X_1, X_1 \rangle = -1$ olmak üzere ispatın tamamı tümevarım yöntemi ile iki adımda yapılır.

1. Adım

Aşağıdaki durumlar için teoremin doğru olduğunu gösterelim.

i) $s = 1$ ve $n = 1, n = 2, n = 3$

ii) $s = 2$ ve $n = 2, n = 3, n = 4$

iii) $s = 3$ ve $n = 3, n = 4, n = 5$

i)

$s = 1, n = 1$ için

$$\begin{aligned} \overline{K_1}^{(1)} &= \sum_{j=1}^1 \overline{k_j} \\ &= \frac{-k_1}{1 - rk_1} \\ &= \frac{K_1^{(1)}}{1 + rK_1^{(1)}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^1 ir^i K_i^{(1)}}{1 + \sum_{i=1}^1 r^i K_i^{(1)}} \end{aligned}$$

$s = 1, \quad n = 2$ için

$$\begin{aligned}
\overline{K}_1^{(2)} &= \sum_{j=1}^2 \overline{k}_j \\
&= -\overline{k}_1 + \overline{k}_2 \\
&= \overline{K}_1^{(1)} + \overline{k}_2 \\
&= \frac{\sum_{i=1}^2 i r^{i-1} K_i^{(2)}}{1 + \sum_{i=1}^2 r^i K_i^{(2)}}
\end{aligned}$$

ve $s = 1, \quad n = 3$ için

$$\begin{aligned}
\overline{K}_1^{(3)} &= \sum_{j=1}^3 \overline{k}_j \\
&= -\overline{k}_1 + \overline{k}_2 + \overline{k}_3 \\
&= \overline{K}_1^{(2)} + \overline{k}_3 \\
&= \frac{\sum_{i=1}^3 i r^{i-1} K_i^{(3)}}{1 + \sum_{i=1}^3 r^i K_i^{(3)}}
\end{aligned}$$

dır.

ii) $s = 2, \quad n = 2$ için

$$\begin{aligned}
\overline{K}_2^{(2)} &= \sum_{j_1 < j_2 = 1}^2 \overline{k}_{j_1} \overline{k}_{j_2} \\
&= -\overline{k}_1 \cdot \overline{k}_2 \\
&= \frac{K_2^{(2)}}{1 + r K_1^{(2)} + r^2 K_2^{(2)}} \\
&= \frac{\sum_{i=2}^2 \frac{i(i-1)}{2!} r^{i-2} K_i^{(2)}}{1 + \sum_{i=1}^2 r^i K_i^{(2)}}
\end{aligned}$$

$s = 2, n = 3$ için

$$\begin{aligned}
\overline{K}_2^{(3)} &= \sum_{j_1 < j_2 = 1}^3 \overline{k}_{j_1} \overline{k}_{j_2} \\
&= -\overline{k}_1 \overline{k}_2 - \overline{k}_1 \overline{k}_3 + \overline{k}_2 \overline{k}_3 \\
&= \overline{K}_2^{(2)} + \frac{k_3}{1 + rk_3} \overline{K}_1^{(2)} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^3 \frac{i(i-1)}{2!} r^{i-2} K_i^{(3)}}{1 + \sum_{i=1}^3 r^i K_i^{(3)}}
\end{aligned}$$

ve $s = 2, n = 4$ için

$$\begin{aligned}
\overline{K}_2^{(4)} &= \sum_{j_1 < j_2 = 1}^4 \overline{k}_{j_1} \overline{k}_{j_2} \\
&= -\overline{k}_1 \overline{k}_2 - \overline{k}_1 \overline{k}_3 - \overline{k}_1 \overline{k}_4 + \overline{k}_2 \overline{k}_3 + \overline{k}_2 \overline{k}_4 + \overline{k}_3 \overline{k}_4 \\
&= \overline{K}_2^{(3)} + \frac{k_4}{1 + rk_4} \overline{K}_1^{(3)} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^4 \frac{i(i-1)}{2!} r^{i-2} K_i^{(4)}}{1 + \sum_{i=1}^4 r^i K_i^{(4)}}
\end{aligned}$$

dır.

iii)

$s = 3, n = 3$ için

$$\begin{aligned}
\overline{K}_3^{(3)} &= \sum_{j_1 < j_2 < j_3 = 1}^3 \overline{k}_{j_1} \overline{k}_{j_2} \overline{k}_{j_3} \\
&= -\overline{k}_1 \overline{k}_2 \overline{k}_3 \\
&= \frac{K_3^{(3)}}{1 + rK_1^{(3)} + r^2 K_2^{(3)} + r^3 K_3^{(3)}} \\
&= \frac{\sum_{i=3}^3 \frac{i(i-1)(i-2)}{3!} r^{i-3} K_i^{(3)}}{1 + \sum_{i=1}^3 r^i K_i^{(3)}}
\end{aligned}$$

$s = 3, n = 4$ için

$$\begin{aligned}
\overline{K}_3^{(4)} &= \sum_{j_1 < j_2 < j_3 = 1}^4 \overline{k}_{j_1} \overline{k}_{j_2} \overline{k}_{j_3} \\
&= -\overline{k}_1 \overline{k}_2 \overline{k}_3 - \overline{k}_1 \overline{k}_3 \overline{k}_4 + \overline{k}_2 \overline{k}_3 \overline{k}_4 - \overline{k}_1 \overline{k}_2 \overline{k}_4 \\
&= \overline{K}_3^{(3)} + \frac{k_4}{1 + rk_4} \overline{K}_2^{(3)} \\
&= \frac{\sum_{i=3}^4 \frac{i(i-1)(i-2)}{3!} r^{i-3} K_i^{(4)}}{1 + \sum_{i=1}^4 r^i K_i^{(4)}}
\end{aligned}$$

ve $s = 3, n = 5$ için

$$\begin{aligned}
\overline{K}_3^{(5)} &= \sum_{j_1 < j_2 < j_3 = 1}^5 \overline{k}_{j_1} \overline{k}_{j_2} \overline{k}_{j_3} \\
&= -\overline{k}_1 \overline{k}_2 \overline{k}_3 - \overline{k}_1 \overline{k}_2 \overline{k}_4 - \overline{k}_1 \overline{k}_2 \overline{k}_5 - \overline{k}_1 \overline{k}_3 \overline{k}_4 - \overline{k}_1 \overline{k}_3 \overline{k}_5 \\
&\quad - \overline{k}_1 \overline{k}_4 \overline{k}_5 + \overline{k}_2 \overline{k}_4 \overline{k}_5 + \overline{k}_2 \overline{k}_3 \overline{k}_4 + \overline{k}_2 \overline{k}_3 \overline{k}_5 + \overline{k}_3 \overline{k}_4 \overline{k}_5 \\
&= \overline{K}_3^{(4)} + \frac{k_5}{1 + rk_5} \overline{K}_2^{(4)} \\
&= \frac{\sum_{i=3}^5 \frac{i(i-1)(i-2)}{3!} r^{i-3} K_i^{(5)}}{1 + \sum_{i=1}^5 r^i K_i^{(5)}}
\end{aligned}$$

dır.

2.Adım

Teoremin $s = q$ ve $n = p$ için doğru olduğunu kabul edip $s = q$ ve $n = p + 1$ için de doğru olduğunu gösterelim. Yani

$$\overline{K}_q^p = \frac{\sum_{i=q}^p \frac{i(i-1)\dots(i-q+1)}{q!} r^{i-q} K_i^{(p)}}{1 + \sum_{i=1}^p r^i K_i^{(p)}}$$

ve

$$\overline{K}_q^{(p+1)} = \frac{\sum_{i=q}^{p+1} \frac{i(i-1)\dots(i-q+1)}{q!} r^{i-q} K_i^{(p+1)}}{1 + \sum_{i=1}^{p+1} r^i K_i^{(p+1)}}$$

olduğunu gösterelim.

$$\overline{K}_q^{(p+1)} = \overline{K}_q^{(p)} + \frac{k_{p+1}}{1 + rk_{p+1}} \overline{K}_{q-1}^{(p)}$$

eşitliğinde $\overline{K}_{q-1}^{(p)}$ ve $\overline{K}_q^{(p)}$ değerlerinin yerlerine yazılması ile

$$\begin{aligned} \overline{K}_q^{(p+1)} &= \frac{\sum_{i=q}^p \frac{i(i-1)\dots(i-q+1)}{q!} r^{i-q} K_i^{(p)}}{1 + \sum_{i=1}^p r^i K_i^{(p)}} \\ &\quad + \frac{k_{p+1}}{1 + k_{p+1}} \frac{\sum_{i=q-1}^p \frac{i(i-1)\dots(i-q+2)}{(q-1)!} r^{i-q+1} K_i^{(p)}}{1 + \sum_{i=1}^p r^i K_i^{(p)}} \end{aligned}$$

elde edilir.

Payda eşitlenerek

$$\begin{aligned} \overline{K}_q^{(p+1)} &= \frac{(1 + rk_{p+1}) \sum_{i=q}^p \frac{i(i-1)\dots(i-q+1)}{q!} r^{i-q} K_i^{(p)}}{(1 + rk_{p+1}) \left(1 + \sum_{i=1}^p r^i K_i^{(p)} \right)} \\ &\quad + \frac{k_{p+1} \sum_{i=q-1}^p \frac{i(i-1)\dots(i-q+2)}{(q-1)!} r^{i-q+1} K_i^{(p)}}{(1 + rk_{p+1}) \left(1 + \sum_{i=1}^p r^i K_i^{(p)} \right)} \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin düzenlenmesi ile

$$\begin{aligned} \overline{K}_q^{(p+1)} &= \frac{\sum_{i=q}^p \frac{i(i-1)\dots(i-q+1)}{q!} r^{i-q} K_i^{(p)} + rk_{p+1} \sum_{i=q}^p \frac{i(i-1)\dots(i-q+1)}{q!} r^{i-q} K_i^{(p)}}{1 + \sum_{i=1}^p r^i K_i^{(p)} + rk_{p+1} + rk_{p+1} \sum_{i=1}^p r^i K_i^{(p)}} \\ &\quad + \frac{k_{p+1} \sum_{i=q-1}^p \frac{i(i-1)\dots(i-q+2)}{(q-1)!} r^{i-q+1} K_i^{(p)}}{1 + \sum_{i=1}^p r^i K_i^{(p)} + rk_{p+1} + rk_{p+1} \sum_{i=1}^p r^i K_i^{(p)}} \end{aligned}$$

olur. $K_r^{(p)} + k_{p+1}.K_{r-1}^{(p)} = K_r^{(p+1)}$ eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
\overline{K}_q^{(p+1)} &= \frac{\sum_{i=q}^p \frac{i(i-1)\dots(i-q+1)}{q!} r^{i-q} K_i^{(p)} + k_{p+1} \sum_{i=q-1}^p \frac{i(i-1)\dots(i-q+2)}{(q-1)!} r^{i-q+1} K_i^{(p)}}{1 + \sum_{i=1}^p r^i K_i^{(p)} + rk_{p+1} + rk_{p+1} \sum_{i=1}^p r^i K_i^{(p)}} \\
&\quad + \frac{rk_{p+1} \sum_{i=q}^p \frac{i(i-1)\dots(i-q+1)}{q!} r^{i-q} K_i^{(p)}}{1 + \sum_{i=1}^p r^i K_i^{(p)} + rk_{p+1} + rk_{p+1} \sum_{i=1}^p r^i K_i^{(p)}} \\
&= \frac{K_q^{(p+1)} + rk_{p+1} \sum_{i=q}^p \frac{i(i-1)\dots(i-q+1)}{q!} r^{i-q} K_i^{(p)}}{\sum_{i=q}^p \frac{i(i-1)\dots(i-q+1)}{q!} r^{i-q} K_i^{(p)}}
\end{aligned}$$

elde edilir. $K_p^{(p)}.k_{p+1} = K_{p+1}^{(p+1)}$ eşitliği kullanılarak düzenleme yapılır ise

$$\begin{aligned}
\overline{K}_q^{(p+1)} &= \frac{K_q^{(p+1)} + \sum_{i=q}^{p-1} \frac{(i+1)i(i-1)\dots(i-q+2)}{q!} r^{i-q+1} K_{i+1}^{(p+1)}}{1 + r \left(k_{p+1} + k_{p+1} \sum_{i=1}^p r^i K_i^{(p)} \right) + \sum_{i=1}^p r^i K_i^{(p)}} \\
&\quad + \frac{\frac{(p+1)p(p-1)\dots(p-q+2)}{q!} r^{p-q+1} K_{p+1}^{(p+1)}}{1 + r \left(k_{p+1} + k_{p+1} \sum_{i=1}^p r^i K_i^{(p)} \right) + \sum_{i=1}^p r^i K_i^{(p)}}
\end{aligned}$$

bulunur. $K_1^{(p)} + k_{p+1} = K_1^{(p+1)}$ kullanırsak eşitlik

$$\begin{aligned}
\overline{K}_q^{(p+1)} &= \frac{K_q^{(p+1)} + \sum_{i=q}^{p-1} \frac{(i+1)i(i-1)\dots(i-q+2)}{q!} r^{i-q+1} K_{i+1}^{(p+1)}}{1 + r K_1^{(p+1)} + \sum_{i=1}^{p-1} r^{i+1} K_{i+1}^{(p+1)} + r^{p+1} K_{q+1}^{(p+1)}} \\
&\quad + \frac{\frac{(p+1)p(p-1)\dots(p-q+2)}{q!} r^{p-q+1} K_{p+1}^{(p+1)}}{1 + r K_1^{(p+1)} + \sum_{i=1}^{p-1} r^{i+1} K_{i+1}^{(p+1)} + r^{p+1} K_{q+1}^{(p+1)}}
\end{aligned}$$

olur. Bu eşitlik bize

$$K_q^{(p+1)} = \frac{\sum_{i=q}^{p+1} \frac{i(i-1)\dots(i-q+1)}{q!} r^{i-q} K_i^{(p+1)}}{1 + \sum_{i=1}^{p+1} r^i K_i^{(p+1)}}$$

olduğunu gösterir. Bu durum için ispat tamamlanmış olur. Son eşitlikte $q = s$ ve $n = p + 1$ yazarsak

$$\overline{K_s}^n = \frac{\sum_{i=s}^n \frac{i(i-1)\dots(i-s+1)}{s!} r^{i-s} K_i^{(n)}}{1 + \sum_{i=1}^n r^i K_j^{(n)}}$$

elde ederiz ve teorem ispatlanmış olur.

KAYNAKLAR

- Bootby, W.M.1975. An introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry. Academic Press, London.
- Görgülü, A. 1985 Relations Between the Higher Curvatures of the Parallel Hypersurfaces. Journal of Karadeniz University, Faculty of Sciences. Vol. VIII.
- Görgülü, A. Ekici C. and Akar M. 2003 Relations Between The Curvatures Of The Parallel Hypersurfaces in Minkowski Space Osmangazi University
- Hacısalıhoğlu, H.H.2000. Diferensiyel Geometri cilt 2 Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, s.20-23,307-318.
- Hacısalıhoğlu, H.H.2000. Diferensiyel Geometri cilt 1 Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, s.1-60,77-90.
- Hacısalıhoğlu, H.H. and Sağel M.K. 1988. On the Gaussian and Mean Curvatures of a Parallel Hypersurface I. Commun. Fac. Sci. Univ. Ankara, Ser. A1 37,No.1-2,9-1500.
- Hassan, S.A. 1998 Higher Order Gaussian Curvatures of Parallel Hypersurfaces.Kahire, Egypt.
- O'Neill, B. 1983 Semi-Riemannian Geometry. Academic Press. New York.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ayşe YAŞAR
Doğum Yeri : Çumra/KONYA
Doğum Tarihi : 26.09.1984
Medeni Hali : Bekar
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : Konya Atatürk Kız Lisesi 2002

Lisans : Gazi Üniversitesi Kırşehir Fen Edebiyat
Fakültesi Matematik Bölümü 2007

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik
Anabilim Dalı 2008-2011