

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**KLASİK ORTOGONAL MATRİS POLİNOMLARI VE BESSEL MATRİS
FONKSİYONLARI**

Bayram ÇEKİM

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2011**

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Bayram ÇEKİM tarafından hazırlanan " **KLASİK ORTOGONAL MATRİS POLİNOMLARI VE BESSEL MATRİS FONKSİYONLARI** " adlı tez çalışması 22/06/2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği / oy çokluğu** ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: *Prof.Dr. Abdullah ALTIN*

Jüri Üyeleri:

Başkan: *Prof.Dr. Abdullah ALTIN*
Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: *Prof.Dr. Hüseyin BEREKETOĞLU*
Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: *Doç.Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL*
Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: *Doç.Dr. Ogün DOĞRU*
Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: *Doç.Dr. Esra ERKUŞ DUMAN*
Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof.Dr. Özer KOLSARICI
Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

KLASİK ORTOGONAL MATRİS POLİNOMLARI VE BESSEL MATRİS FONKSİYONLARI

Bayram ÇEKİM

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. Abdullah ALTIN

Bu tez sekiz bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde özel fonksiyonlarda bilimsel gelişmeler özetlenmiştir.

İkinci bölümde, matris fonksiyonları ile ilgili gerekli ön bilgiler hatırlatıldıktan sonra Gamma, Beta ve Hipergeometrik matris fonksiyonları ilgili bazı özellikler verilmektedir.

Üçüncü bölümde, önce Chebyshev matris polinomlarının ikinci basamaktan bir matris diferensiyel denklemi sağladığı gösterilmekte, sonrada bu polinomların sağladığı matris doğurucu fonksiyon, üç terimli matris rekürans bağıntısı, Rodrigues formülü ve ortogonalite gibi bazı özellikler incelenmektedir.

Dördüncü bölüm, Gegenbauer matris polinomlarının tanıtımına ve sağladığı bazı özelliklerin elde edilmesine ayrılmıştır.

Beşinci bölümde, Jacobi matris polinomlarının bazı özelliklerinin incelenmesinin ardından Jacobi ve Chebyshev matris polinomları arasındaki bir ilişki verilmektedir.

Altıncı bölümde, A matrisinin özdeğerlerinin tamsayı olmaması durumunda Bessel matris diferensiyel denklemi için genel çözümün açık ifadesini elde etmemize izin veren Bessel matris fonksiyonlarının birinci türü tanıtılmaktadır. Ayrıca Bessel matris fonksiyonlarının ikinci türü de kullanılarak Bessel matris diferensiyel denkleminin genel çözümü verilmektedir.

Tezin yedinci ve sekizinci bölümleri orijinal bulguları içermektedir. Bu bölümlerde sırasıyla, Jacobi ve Gegenbauer matris polinomları aileleri için multilineer ve multilateral türden çeşitli matris doğurucu fonksiyonları bulunmuş ve bazı özellikleri elde edilmiştir.

Haziran 2011 , 108 sayfa

Anahtar Kelimeler: Matris, ortogonal polinomlar, matris polinomu, hipergeometrik matris fonksiyonu, matris diferensiyel denklemi, Bessel matris fonksiyonu.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

CLASSICAL ORTHOGONAL MATRIX POLYNOMIALS AND BESSEL MATRIX FUNCTIONS

Bayram ÇEKİM

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof.Dr. Abdullah ALTIN

This thesis consists of eight chapters.

In the first chapter, the scientific advances on special functions are summarized.

In the second chapter, after necessary preliminaries related to the matrix functions are recalled, some properties concerning Gamma, Beta and Hypergeometric matrix functions are given.

In the third chapter, firstly, it is shown that Chebyshev matrix polynomials satisfy a matrix differential equation of second order and then some properties such as matrix generating function, three term matrix recurrence relation, Rodrigues formula and orthogonality satisfied by these polynomials are investigated.

The fourth chapter is reserved for the introduction of Gegenbauer matrix polynomials and obtaining some of the features provided by these matrix polynomials.

In the fifth chapter, a relationship between Jacobi and Chebyshev matrix polynomials are given and then some properties of Jacobi matrix polynomials are analyzed.

In the sixth chapter, Bessel matrix functions of the first kind which permit to obtain an explicit expression of the general solution of Bessel matrix differential equation for the case where no eigenvalue of A is an integer are introduced. The general solution of Bessel matrix differential equation is given by also using Bessel matrix functions of the second kind.

The seventh and eighth chapters of this thesis include the original results. In these chapters, various multilinear and multilateral matrix generating functions are found and some properties are derived for families of the Jacobi and Gegenbauer matrix polynomials, respectively.

June 2011 , 108 pages

Key Words: Matrix, orthogonal polynomials, matrix polynomial, hypergeometric matrix function, matrix differential equation, Bessel matrix function.

TEŞEKKÜR

Bana bu konuda çalışma imkanı sağlayan ve çalışmalarım süresince yakın ilgi ve desteğini hiç esirgemeyen Danışman Hocam Sayın Prof.Dr. Abdullah ALTIN (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü)'a ve değerli Hocalarım Doç.Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL ile Doç.Dr. Esra ERKUŞ DUMAN'a en derin saygılarımı ve teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Doktora yaptığım süre boyunca verdiği burs ile beni destekleyen TÜBİTAK'a teşekkürlerimi ve ayrıca, maddi ve manevi olarak her zaman yanımda olan aileme ve eşime de saygı ve sevgilerimi sunarım.

Bayram ÇEKİM

Ankara, Haziran 2011

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
SİMGELER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. ÖN BİLGİLER VE TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1 Bazı Tanımlar	3
2.2 Matris İşlemlerinde Bazı Özellikler	4
2.3 Gamma ve Beta Fonksiyonları.....	10
2.4 Gamma ve Beta Matris Fonksiyonları ve Bazı Özellikleri.....	12
2.5 Hipergeometrik Seri ve Hipergeometrik Fonksiyonlar	14
2.6 Hipergeometrik Matris Fonksiyonları	14
3. CHEBYSHEV MATRİS POLİNOMLARI	22
3.1 Klasik Chebyshev Polinomları.....	22
3.2 Üstel Matris Fonksiyonlarının Bazı Özellikleri.....	23
3.3 Chebyshev Matris Polinomlarının Hipergeometrik Matris Fonksiyon Gösterimi.....	24
3.4 Chebyshev Matris Polinomları için Matris Diferensiyel Denklem.....	25
3.5 Chebyshev Matris Polinomları için Rodrigues Formülü	26
3.6 Chebyshev Matris Polinomlarının Ortogonalliği.....	27
3.7 Chebyshev Matris Polinomları için Üç Terimli Matris Rekürans Bağıntısı	30
4. GEGENBAUER MATRİS POLİNOMLARI.....	32
4.1 Klasik Gegenbauer Polinomları	32
4.2 Gegenbauer Matris Polinomlarının Hipergeometrik Matris Fonksiyon Gösterimleri	33
4.3 Gegenbauer Matris Polinomları için Matris Diferensiyel Denklem ve Rekürans Bağıntıları.....	37
4.4 Gegenbauer Matris Polinomlarının Ortogonalliği.....	39
5. JACOBI MATRİS POLİNOMLARI	43
5.1 Klasik Jacobi Polinomları	43

5.2 Jacobi Matris Polinomlarının Hipergeometrik Matris Fonksiyon	
Gösterimi.....	44
5.3 Jacobi Matris Polinomları için Matris Diferensiyel Denklem	45
5.4 Jacobi Matris Polinomları için Rodrigues Formülü	47
5.5 Jacobi Matris Polinomlarının Ortogonalliği	49
5.6 Jacobi Matris Polinomları için Rekürans Bağıntısı.....	55
6. BESSEL MATRİS FONKSİYONLARI	58
6.1 Matris Fonksiyonları ile İlgili Ön Bilgiler	59
6.2 Bessel Fonksiyonları	63
6.3 Bessel Matris Fonksiyonlarına Giriş	64
6.4 Bessel Matris Fonksiyonlarının Birinci Türü.....	68
6.5 Bessel Matris Fonksiyonlarının İkinci Türü	72
7. JACOBI MATRİS POLİNOMLARI İLE İLGİLİ YENİ BAZI	
ÖZELLİKLER	76
7.1 Jacobi Matris Polinomları için Matris Doğurucu Fonksiyonlar	76
7.2 Jacobi ve Gegenbauer Matris Polinomları Arasındaki Bir Bağıntı	82
7.3 Jacobi Matris Polinomları için Rekürans Bağıntıları	83
7.4 Jacobi Matris Polinomları için Multilineer ve Multilateral Matris	
Doğurucu Fonksiyonları.....	87
8. GEGENBAUER MATRİS POLİNOMLARI İLE İLGİLİ YENİ BAZI	
ÖZELLİKLER	93
8.1 Gegenbauer Matris Polinomlarının Hipergeometrik Matris Fonksiyon	
Gösterimleri	93
8.2 Gegenbauer Matris Polinomları için Matris Doğurucu Fonksiyonlar.....	97
8.3 Gegenbauer Matris Polinomları için Multilineer ve Multilateral Matris	
Doğurucu Fonksiyonları.....	100
KAYNAKLAR	105
ÖZGEÇMİŞ.....	108

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}^{r \times r}$	$(r \times r)$ boyutlu reel elemanlı karesel matrislerin uzayı
$\mathbb{C}^{r \times r}$	$(r \times r)$ boyutlu kompleks elemanlı karesel matrislerin uzayı
$\mathcal{P}_r(t)$	Katsayıları $\mathbb{C}^{r \times r}$ de olan tüm matris polinomlarının kümesi
$\sigma(A)$	A matrisinin tüm özdeğerlerinin kümesi
A^{-1}	$A \in \mathbb{C}^{r \times r}$ matrisinin tersi
A^T	$A \in \mathbb{C}^{r \times r}$ matrisinin transpozu
A^H	$A \in \mathbb{C}^{r \times r}$ matrisinin eşleniğinin transpozu
$(A)_n$	$A \in \mathbb{C}^{r \times r}$ matrisinin Pochhammer gösterimi
$ A $	$A \in \mathbb{C}^{r \times r}$ matrisinin determinantı
$\ A\ $	$A \in \mathbb{C}^{r \times r}$ matrisinin matris 2-normu
$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	$\frac{n}{2}$ sayısının tam değeri
I	Birim matris
$\mathbf{0}$	Tüm elemanları sıfır olan matris
$\Gamma(x)$	Gamma fonksiyonu
$\mathbf{B}(x, y)$	Beta fonksiyonu
${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x)$	Hipergeometrik fonksiyon
$\Gamma(A)$	Gamma matris fonksiyonu
$\mathcal{B}(A, B)$	Beta matris fonksiyonu
${}_2F_1(A, B; C; x)$	Hipergeometrik matris fonksiyonu
$T_n(x; A)$	Chebyshev matris polinomları
$C_n^A(x)$	Gegenbauer matris polinomları
$P_n^{(A, B)}(x)$	Jacobi matris polinomları
$L_n^{(A, \lambda)}(x)$	Laguerre matris polinomları
$J_A(x)$	Birinci tür Bessel matris fonksiyonu
$Y_A(x)$	İkinci tür Bessel matris fonksiyonu

1. GİRİŞ

Ortogonal polinomlar, 1900'li yıllardan itibaren Matematikçiler için önemli bir çalışma alanı haline gelmiştir. Bu polinomlar, Fizik, Astronomi ve İstatistik gibi bilim dallarında da önemli kullanım alanlarına sahiptir. Ortogonal polinomların gelişmesiyle birlikte, 1960'lı yıllardan itibaren biortogonal, katlı ve q -ortogonal polinomlar bilim adamları tarafından çalışılan bir araştırma alanı haline gelmiştir. 1990'lı yıllarda ise Matematikçiler tarafından Uygulamalı Matematik ve Lineer Cebir konularının harmanlanması sonucu ortogonal matris polinomlar kavramı ortaya çıkmıştır.

Klasik ortogonal polinom ailelerinin bir çok özelliklere sahip oldukları bilinmektedir. Bu ortogonal polinom ailelerinin sağladığı özelliklerden hangilerinin matris ortogonal polinomlara aktarılabileceği merak konusudur. Bu aktarımda matrislerle ilgili hangi tür koşulların konulması gerektiği ve bu koşullar dahilinde hangi özelliklerin sağlanacağı önemlidir.

Matris polinomlar, İstatistikte çok değişkenli olasılık analizinde (James 1975), gruplar teorisinde (James 1975), saçılma teorisinde (Geronimo 1980), diferensiyel denklemlerde (Jódar vd. 1994b, 1995), Fourier seri açılımlarında (Defez ve Jódar 1998), interpolasyonda (Sinap ve Van Assche 1994) ve tıbbi görüntülemede (Defez vd. 2000) kullanılmakta olup, sürekli olarak gelişen bir alandır.

Matris polinomların uygulamalarında kullanılan, $A(t)$, $B(t)$ ve $C(t)$ fonksiyonları matris değerli fonksiyonlar olmak üzere

$$A(t) X''(t) + B(t) X'(t) + C(t) X(t) = \mathbf{0} \quad (1.1)$$

tipindeki ikinci basamaktan diferensiyel denklemler, genellikle Fizik, Kimya ve Mekanikte karşımıza çıkmaktadır (Keller ve Wolfe 1965, Morse ve Feshbach 1953, Parter vd. 1973). Bessel matris fonksiyonları ve bazı özellikleri Herz ve Jódar tarafından verilmiştir (Herz 1955, Jódar vd. 1992, 1994a). Bu matris fonksiyonların açık halleri, Frobenius yöntemiyle bulunmuştur. Ayrıca argüment olarak alınan matrisin

özdeğerlerinin tamsayı olup olmaması durumunda Bessel matris diferensiyel denklemin genel çözümünün nasıl farklılık gösterdiği incelenmiştir (Jódar vd. 1994a).

Son yıllarda ise Laguerre matris polinomları (Jódar vd. 1994b), Hermite matris polinomları (Jódar ve Company 1992), Gegenbauer matris polinomları (Jódar vd. 1995), Jacobi matris polinomları (Defez vd. 2004) ve Chebyshev matris polinomların birinci (Defez ve Jódar 2002) ve ikinci türleri (Batahan 2006) tanımlanmıştır. Bu matris polinomların sağladığı matris diferensiyel denklemler, matris doğurucu fonksiyonlar, rekürans bağıntıları ve Rodrigues formülleri bulunmuştur. Ayrıca Laguerre ve Hermite matris polinomlarının arasındaki bir ilişkide verilmiştir (Jódar ve Defez 1998).

Klasik ortogonal polinomların sağladığı özelliklerin pek çoğunun belirli koşullar altında matris ortogonal polinomlar tarafından da sağlandığı gösterilmiştir. Bu tezde özellikle Jacobi, Chebyshev ve Gegenbauer matris polinomları ele alınmış ve bu polinom ailelerinin sağladığı çeşitli özellikler üzerinde durulmuştur. Ayrıca Bessel matris fonksiyonu tanımlandıktan sonra bu fonksiyonun özellikleri de incelenmiştir. Bu konular çalışılırken Gamma, Beta ve Hipergeometrik matris fonksiyon gibi özel fonksiyonlardan yararlanılmıştır. Tezde orjinal olarak, Jacobi ve Gegenbauer matris polinomlarının sağladığı bazı özellikler bulunmuştur. Ayrıca bu matris polinomlar için multilineer ve multilateral matris doğurucu fonksiyonlar elde edilmiştir.

2. ÖN BİLGİLER VE TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Bazı Tanımlar

Tanım 2.1 $a_n \neq 0$ olmak üzere $a_0, a_1, \dots, a_n$ ($n \in \mathbb{N}$) ler sabit sayılar ve x bir değişken olsun.

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

şeklinde tanımlanan p_n fonksiyonuna bir polinom (çok terimli) denir. Buradaki n doğal sayısına polinomun derecesi, $a_0, a_1, \dots, a_n$ sayılarına da polinomun katsayıları adı verilir. Eğer $a_n = 1$ ise $p_n(x)$ polinomuna monik polinom denir. x değişkeninin ve katsayıların reel ya da kompleks olmasına göre $p_n(x)$ polinomu, reel polinom ya da kompleks polinom olarak adlandırılır.

Tanım 2.2 $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $\omega(x)$, I da tanımlı pozitif bir fonksiyon olsun. $m, n \in \mathbb{N}$ ve $m \neq n$ olmak üzere

$$(\phi_m, \phi_n) = \int_I \phi_m(x) \phi_n(x) \omega(x) dx = 0$$

sağlanıyorsa $\{\phi_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ polinom ailesine I aralığında $\omega(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir denir.

Tanım 2.3 t reel yada kompleks bir değişken ve $0 \leq j \leq n$ için $A_j \in \mathbb{C}^{r \times r}$ olmak üzere n . dereceden matris polinomu

$$P_n(t) = A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \dots + A_1 t + A_0 ; A_n \neq 0$$

şeklinde tanımlanır.

Uyarı 2.1 Katsayıları $\mathbb{C}^{r \times r}$ de olan bütün matris polinomlarının kümesi $\mathcal{P}_r(t)$ ile gösterilir.

Tanım 2.4 $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\mathbb{C}^{r \times r}$ deki matrislerin bir dizisi ve $A_k \in \mathbb{C}^{r \times r}$ ($0 \leq k \leq n$) matrisleri için $P_n(t) = \sum_{k=0}^n A_k t^k$ bir matris polinomu olsun.

$$\mathcal{L} : \mathcal{P}_r(t) \rightarrow \mathbb{C}^{r \times r}$$

fonksiyoneli ise

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t^n I) &= \Omega_n \quad ; \quad n = 0, 1, \dots \\ \mathcal{L}(P_n(t)) &= \sum_{k=0}^n A_k \Omega_k \quad ; \quad n = 0, 1, \dots\end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ matris moment dizisi yardımıyla tanımlanan $\mathcal{L}$, matris moment fonksiyoneli olarak adlandırılır. Ω_n ise n -yinci basamaktan matris momentidir ($n = 0, 1, \dots$) (Jódar vd. 1995).

Tanım 2.5 $n \in \mathbb{N}$ için $P_n(t)$ bir matris polinomu olmak üzere

i. $P_n(t)$, singüler olmayan başkatsayılı n . dereceden bir matris polinomudur,

ii. $\forall n, s \in \mathbb{N}$ ve $n \neq s$ için $\mathcal{L}(P_n(t) P_s(t)) = \mathbf{0}$ dır,

iii. $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{L}(P_n^2(t))$ matrisinin tersi vardır

koşulları sağlansın. Bu takdirde $\{P_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine, $\mathcal{L}$ matris moment fonksiyoneline göre ortogonal matris polinom dizisi denir (Jódar vd. 1995).

2.2 Matris İşlemlerinde Bazı Özellikler

Tezin bu kısmında, matrislerle ilgili bilinen bazı temel lemmalar ve sonuçlar verilecektir (Taşcı 2005).

Tanım 2.6 I , birim matrisi göstermek üzere A, B matrisleri için

$$AB = BA = I$$

eşitliğini sağlayan B matrisine A matrisinin çarpma işlemine göre tersi (inversi) denir ve $B = A^{-1}$ ile gösterilir.

Lemma 2.1 *Bir matrisin tersi var ise, bu ters tektir.*

Tanım 2.7 *Tersi olan matrislere regüler (düzgün) matrisler denir. Regüler (düzgün) olmayan matrislere ise singüler (tekil) matrisler denir.*

Lemma 2.2 *A ve B regüler matrisler ise AB matrisi de regüler bir matris olup $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ dir.*

Sonuç 2.1 *Lemma 2.2 nin bir genellemesi olarak, k herhangi bir pozitif tamsayı ve $A_1, \dots, A_k$ lar regüler matrisler olmak üzere*

$$(A_1 \dots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \dots A_1^{-1}$$

dir.

Sonuç 2.2 *Herhangi bir regüler A matrisi için $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ dir.*

Tanım 2.8 *A matrisinin tranzpozu A^T ile gösterilmek üzere*

$$A^T = A^{-1}$$

eşitliği sağlanıyorsa, A matrisine ortogonal matris denir.

Lemma 2.3 *Herhangi bir A matrisi ve B regüler matrisi için $AB = BA$ koşulu sağlıyorsa, o zaman $AB^{-1} = B^{-1}A$ dır.*

Lemma 2.4 *Bir A matrisinin tersinin olması için gerek ve yeter koşul A matrisinin determinantının sıfırdan farklı, yani $\det A = |A| \neq 0$ olmasıdır.*

O halde, A matrisine, $\det A \neq 0$ ise *regüler (düzgün) matris*, $\det A = 0$ ise *singüler (tekil) matris* denir.

Lemma 2.5 *A ve B matrisleri için $|AB| = |A| |B|$ dir. Bu gösteriyorki, $|AB| = 0$ ise $|A|$ veya $|B|$ den en az biri sıfır olmalıdır.*

Tanım 2.9 *x sıfırdan farklı $(r \times 1)$ boyutlu bir vektör ve $\mathbf{0}$ sıfır matrisi olmak üzere*

$$Ax = \lambda x \quad \text{ya da} \quad (A - \lambda I)x = \mathbf{0}$$

eşitliğini sağlayan λ değerlerine, A matrisinin özdeğerleri denir. Başka bir deyişle, A matrisinin özdeğerleri, λ ya göre r -yinci dereceden bir denklem olan

$$|A - \lambda I| = 0$$

şeklindeki A matrisinin karakteristik denkleminin kökleridir.

Lemma 2.6 $(r \times r)$ boyutlu A matrisinin farklı özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ olmak üzere A matrisinin determinanti, $\det A = |A| = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_r$ ile verilir.

Herbir λ özdeğerine karşılık gelen x vektörlerine de A matrisinin özvektörleri denir. A matrisinin tüm özdeğerlerinin kümesi $\sigma(A)$ ile gösterilir ve $\sigma(A)$ ya A nın spektrumu da denir.

Tanım 2.10 $\forall z \in \sigma(P)$ için $\operatorname{Re}(z) > 0$ koşulunu sağlayan $P \in \mathbb{C}^{r \times r}$ matrisine pozitif kararlı matris denir (Jódar ve Cortés 1998a).

Tanım 2.11 $Q \in \mathbb{C}^{r \times r}$ matrisinin eşlenik transpozu Q^H ile gösterilmek üzere

$$Q^H Q = Q Q^H = I$$

eşitliğini sağlayan Q regüler matrisine üniter matris denir.

Tanım 2.12 Herhangi P ve Q matrisleri için, $R^{-1}PR = Q$ olacak şekilde regüler bir R matrisi varsa, P ve Q matrislerine benzer matrisler denir.

Regüler benzer matrislerin tersleri de benzerdir. Ayrıca benzer matrislerin determinantları ve özdeğerleri aynıdır.

Tanım 2.13 Köşegen bir matrise benzer olan P matrisine, köşegenleştirilebilir matris denir.

Bir P matrisinin köşegenleştirilebilir olması için r -tane lineer bağımsız özvektöre sahip olması gerek ve yeterlidir. Bu durumda, köşegen matrisin köşegen elemanları P matrisinin özdeğerleridir.

Tanım 2.14 Köşegenleştirilebilir P ve Q matrisleri için

$$S^{-1}PS = D \quad , \quad S^{-1}QS = E \quad ; \quad D, E \text{ köşegen matrisler}$$

olacak şekilde regüler bir S matrisi varsa, P ve Q matrislerine aynı anda köşegenleştirilebilir matrisler denir (Horn ve Johnson 1993).

Lemma 2.7 P ve Q köşegenleştirilebilir matrisler olsun. P ve Q matrislerinin aynı anda köşegenleştirilebilir olması için gerek ve yeter koşul bu matrislerin çarpma işlemine göre değişmeli olmasıdır (Horn ve Johnson 1993).

Tanım 2.15 $p \geq 1$ için $x = (x_1, \dots, x_r)$ vektörünün p -normu,
 $\|x\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_r|^p)^{\frac{1}{p}}$ şeklinde tanımlanır (Golub ve Van Loan 1983).

Tanım 2.16 x sıfırdan farklı $(r \times 1)$ boyutlu bir vektör olmak üzere, A matrisinin p -normu

$$\|A\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$$

ya da bir başka ifadeyle,

$$\|A\|_p = \max_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p$$

şeklinde tanımlıdır (Golub ve Van Loan 1983).

Lemma 2.8 I birim matris, 0 sıfır matrisi, $c \in \mathbb{R}$ ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere herhangi A, B matrislerinin p -normu için aşağıdaki özellikler sağlanır (Golub ve Van Loan 1983).

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \|A\|_p \geq 0 & \text{c)} \quad \|A\|_p = 0 \Leftrightarrow A = 0 \quad \text{e)} \quad \|A + B\|_p \leq \|A\|_p + \|B\|_p \\ \text{b)} & \|I\|_p = 1 & \text{d)} \quad \|cA\|_p = |c| \|A\|_p \quad \text{f)} \quad \|AB\|_p \leq \|A\|_p \|B\|_p \end{array}$$

Tez boyunca, vektörler için vektör 2-normu (Öklid normu), matrisler için matris 2-normu kullanılmıştır. A matrisinin matris 2-normu (spektral normu), $A^T A$ matrisinin en büyük özdeğerinin kareköküne eşit olup, $\|A\|$ ile gösterilir. Norm hesaplanırken, eğer A matrisi kompleks elemanlı ise A^T yerine A nın eşlenik transpozunu olan A^H alınmalıdır (Golub ve Van Loan 1983).

Lemma 2.9 (Schur Ayrışımı): $\mathbb{C}^{r \times r}$ deki herhangi bir A matrisi için, A matrisinin özdeğerlerini esas köşegeni üzerinde bulunduran köşegen bir D matrisi ve N tam üst üçgensel bir matris olmak üzere

$$Q^H A Q = D + N$$

olacak şekilde bir Q üniter matrisi vardır (Golub ve Van Loan 1983).

Tanım 2.17 $\mathbb{C}^{r \times r}$ deki herhangi bir A matrisi için

$$\alpha(A) = \max \{ \operatorname{Re}(z) : z \in \sigma(A) \} \text{ ve } \beta(A) = \min \{ \operatorname{Re}(z) : z \in \sigma(A) \}$$

dır.

Lemma 2.10 $\mathbb{C}^{r \times r}$ deki herhangi bir A matrisinin Schur ayrışımı $Q^H A Q = D + N$ olmak üzere

$$\|e^{At}\| \leq e^{\alpha(A)t} \sum_{j=0}^{r-1} \frac{\|Nt\|^j}{j!}, \quad t \geq 0$$

dır (Golub ve Van Loan 1983).

Lemma 2.11 Herhangi bir $A \in \mathbb{C}^{r \times r}$ matrisi için $t \geq 0$ olmak üzere

$$\|e^{At}\| \leq e^{\alpha(A)t} \sum_{j=0}^{r-1} \frac{(\|A\| \sqrt{rt})^j}{j!}$$

dir (Golub ve Van Loan 1989).

Tanım 2.18 α reel ya da kompleks bir sayı ve n pozitif bir tamsayı olmak üzere $(\alpha)_n$ ifadesi

$$(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n-1) \quad ; \quad (\alpha)_0 = 1$$

olarak tanımlanır ve Pochhammer sembolü olarak bilinir.

Tanım 2.19 Skaler Pochhammer ifadesine fonksiyonel matris hesabının uygulanmasıyla, $\mathbb{C}^{r \times r}$ deki herhangi bir A matrisi için

$$(A)_n = A(A+I)\dots(A+(n-1)I) \quad , \quad n \geq 1 \quad ; \quad (A)_0 = I \quad (2.1)$$

elde edilir ki, buna matrisler için Pochhammer gösterimi denir.

Uyarı 2.2 j pozitif bir tamsayı olmak üzere $n > j$ için $(-jI)_n = \mathbf{0}$ dır.

Lemma 2.12 Herhangi bir A matrisi için

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{A^n t^n}{n!} + \dots$$

ile tanımlanan üstel matris serisi her t için yakınsaktır.

Lemma 2.13 A, B, I ve $\mathbf{0}$ matrisleri için

i) $e^{\mathbf{0}} = I$,

ii) e^A üstel matrisi her zaman regüler olup $(e^A)^{-1} = e^{-A}$,

iii) $AB = BA$ ise $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$,

iv) $t \in \mathbb{R}$ için $Ie^t = e^{It}$

eşitlikleri geçerlidir.

Lemma 2.14 Eğer $f(z)$ ve $g(z)$, kompleks düzlemin Ω açık kümesinde tanımlı analitik fonksiyonlar iseler, o takdirde $\sigma(P) \subset \Omega$ olacak şekilde herhangi bir $P \in \mathbb{C}^{r \times r}$ matrisi için fonksiyonel matris hesabının özelliklerinden dolayı

$$f(P)g(P) = g(P)f(P)$$

dir. Eğer $\sigma(Q) \subset \Omega$ olacak şekilde herhangi bir $Q \in \mathbb{C}^{r \times r}$ matrisi için $PQ = QP$ ise bu durumda

$$f(P)g(Q) = g(Q)f(P)$$

dir (Dunford ve Schwartz 1957).

Lemma 2.15 Eğer $f, \sigma(P)$ yı içeren bir bölgede tanımlı bir fonksiyon ve $S, \mathbb{C}^{r \times r}$ de regüler bir matris ise

$$f(SPS^{-1}) = S f(P) S^{-1}$$

dir (Golub ve Van Loan 1989).

Lemma 2.16 $a, y \in \mathbb{C}$ ve $|y| < 1$ olmak üzere $(1-y)^a = \exp[a \ln(1-y)]$ dir. Ayrıca

$$(1-y)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} y^n \quad ; \quad |y| < 1 \quad , \quad a \in \mathbb{C}$$

olup, bu özelliğe $\mathbb{C}^{r \times r}$ deki herhangi bir A matrisi için fonksiyonel matris hesabının uygulanmasıyla

$$(1-y)^{-A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A)_n}{n!} y^n \quad , \quad |y| < 1 \quad (2.2)$$

elde edilir.

Tanım 2.20 $B(z_0, \rho)$, kompleks düzlemdeki z_0 merkezli ρ yarıçaplı açık disk ve E ise $\mathbb{C}^{r \times r}$ sınıfından matrislerin Banach uzayını göstermek üzere, $1 \leq i \leq 4$ için $f_i : B(z_0, \rho) \rightarrow E$ şeklinde tanımlanan f_i ler sınırlı ve sürekli fonksiyonlar olsun. U_1 ve U_2 ise

$$X'' = f_1(z) X' + f_2(z) X f_3(z) + X' f_4(z) \quad (2.3)$$

denkleminin herhangi iki çözümü olsun. $P, Q \in \mathbb{C}^{r \times r}$ olmak üzere, (2.3) denkleminin her U çözümü

$$U(z) = U_1(z) P + U_2(z) Q, \quad z \in B(z_0, \rho)$$

formunda tek bir şekilde ifade edilebiliyorsa, $\{U_1, U_2\}$ kümesine $B(z_0, \rho)$ da (2.3) denkleminin temel çözümler cümlesi denir (Jódar ve Cortés 2000).

Teorem 2.1 Eğer (2.3) denkleminin $B(z_0, \rho)$ daki $\{U_1, U_2\}$ çözüm çifti için

$$W(U_1, U_2, z_0) = \begin{bmatrix} U_1(z_0) & U_2(z_0) \\ U_1'(z_0) & U_2'(z_0) \end{bmatrix}$$

şeklindeki $W \in \mathbb{C}^{2r \times 2r}$ matrisi regüler (düzgün) ise $\{U_1, U_2\}$, $B(z_0, \rho)$ da (2.3) denkleminin temel çözümler cümlesidir (Jódar ve Cortés 2000).

Lemma 2.17 A, B ve T ler herhangi indisel fonksiyonlar olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A(k, n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n A(k, n-k) \quad (2.4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n B(k, n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} B(k, n+k) \quad (2.5)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} T(k, n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} T(k, n-2k) \quad (2.6)$$

eşitlikleri geçerlidir (Rainville 1973).

2.3 Gamma ve Beta Fonksiyonları

Gamma Fonksiyonu

$\Gamma(x)$ ile gösterilen Gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

genelleştirilmiş integrali yardımıyla tanımlanır. Bu fonksiyona *genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu* da denir. Bunun için

$$F(u) = \int_0^{\infty} e^{-ut} dt = \frac{1}{u} \quad (2.7)$$

integrali ile tanımlanan fonksiyonu ele alalım. $c > 0$ olmak üzere bu integral her $c \leq u \leq d$ sonlu aralığında $\frac{1}{u}$ ya düzgün yakınsaktır. (2.7) eşitliğinden u ya göre türevler alarak devam ettiğimizde, n -yinci türev için

$$(-1)^n F^{(n)}(u) = \int_0^{\infty} t^n e^{-ut} dt = \frac{n!}{u^{n+1}}$$

eşitliği elde edilir. Bu son eşitlikte $u = 1$ alınırsa

$$\int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt = n! = \int_0^{\infty} t^{(n+1)-1} e^{-t} dt = \Gamma(n+1)$$

olur. Burada n değerleri pozitif tamsayılar olarak alınmıştır. Halbuki n nin $n > -1$ olan herhangi bir reel sayı olması halinde de bu genelleştirilmiş integral yakınsaktır. O halde $x > -1$ olan herhangi bir reel sayı olmak üzere

$$x! = \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt = \Gamma(x+1)$$

ifadesinden görülmektedir ki -1 den büyük olan tüm reel sayıların faktöriyel değerlerini sonlu bir reel sayı olarak tanımlamak mümkündür. Bundan dolayı Gamma fonksiyonu *genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu* olarak da adlandırılır. $n \in \mathbb{N}$ için sağlanan

$$\Gamma(n+1) = n! = n(n-1)! = n\Gamma(n)$$

eşitliği, tüm $x > 0$ değerleri için

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

eşitliğine genişletilebilir. Bu özellik yardımıyla, Gamma fonksiyonu için argümentin herhangi iki tamsayı arasındaki değerlerine karşılık gelen sonuçların bilinmesi halinde diğer aralıklardaki fonksiyon değerleri kolayca hesaplanabilir.

Beta Fonksiyonu

$\mathbf{B}(x, y)$ ile gösterilen Beta fonksiyonu,

$$\mathbf{B}(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad ; \quad \operatorname{Re}(x) > 0, \operatorname{Re}(y) > 0$$

genelleştirilmiş integrali yardımıyla tanımlanan iki değişkenli bir fonksiyon olup

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(x, y) &= 2 \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2x-1} (\cos \theta)^{2y-1} d\theta \\ \mathbf{B}(x, y) &= \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du \\ \mathbf{B}(x, y) &= \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \end{aligned}$$

biçimlerinde de ifade edilebilir.

2.4 Gamma ve Beta Matris Fonksiyonları ve Bazı Özellikleri

$\Gamma^{-1}(z) = \frac{1}{\Gamma(z)}$ ile gösterilen Gamma fonksiyonunun tersi, z kompleks değişkeninin fonksiyonu olup tüm kompleks düzlemde analitik yani *tam fonksiyon*dur (Hille 1969). Bu nedenle $\mathbb{C}^{r \times r}$ deki herhangi bir P matrisinin ters Gamma fonksiyonu altındaki görüntüsüne karşılık gelen $\Gamma^{-1}(P)$ matrisi iyi tanımlı bir matristir. Eğer,

$$\forall n \geq 0 \text{ tamsayısı için } P + nI \text{ matrisleri regüler}$$

ise $\Gamma(P)$ matrisinin $\Gamma^{-1}(P)$ ile gösterilen tersi vardır. Bu nedenle

$$P(P+I) \dots (P+(n-1)I) \Gamma^{-1}(P+nI) = \Gamma^{-1}(P) \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

dir (Hille 1969). Gamma ve ters Gamma fonksiyonu analitik olduğundan fonksiyonel matris hesabının özelliklerinden dolayı

$$P(P+I) \dots (P+(n-1)I) = \Gamma(P+nI) \Gamma^{-1}(P) \quad , \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

olup,

$$(P)_n = \Gamma(P+nI) \Gamma^{-1}(P) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

şeklinde de yazılabilir.

Tanım 2.21 $P \in \mathbb{C}^{r \times r}$ pozitif kararlı herhangi bir matris olmak üzere Gamma matris fonksiyonu

$$\Gamma(P) = \int_0^\infty e^{-t} t^{P-I} dt \quad , \quad t^{P-I} = \exp[(P-I) \ln t]$$

ile verilir ve $\Gamma(P)$ matrisi iyi tanımlıdır (Jódar ve Cortés 1998b).

Tanım 2.22 $P, Q \in \mathbb{C}^{r \times r}$ pozitif kararlı matrisler olmak üzere, Beta matris fonksiyonu

$$\mathcal{B}(P, Q) = \int_0^1 t^{P-I} (1-t)^{Q-I} dt \quad (2.10)$$

şeklinde tanımlanır (Jódar ve Cortés 1998b).

Lemma 2.18 $P, Q \in \mathbb{C}^{r \times r}$ pozitif kararlı ve değişmeli matrisler olmak üzere

$$\mathcal{B}(P, Q) = \mathcal{B}(Q, P) \quad (2.11)$$

dir (Jódar ve Cortés 1998b).

Lemma 2.19 $P, Q, P+Q \in \mathbb{C}^{r \times r}$ pozitif kararlı ve değişmeli matrisleri için

$$\mathcal{B}(P, Q) = \Gamma(P) \Gamma(Q) \Gamma^{-1}(P+Q) \quad (2.12)$$

dur (Jódar ve Cortés 1998a).

Teorem 2.2 $P, Q \in \mathbb{C}^{r \times r}$ değişmeli matrisleri için

$\forall n \geq 0$ tamsayısı için $P+nI, Q+nI, P+Q+nI$ matrisleri regüler

olmak üzere,

$$\mathcal{B}(P, Q) = \Gamma(P) \Gamma(Q) \Gamma^{-1}(P+Q)$$

eşitliği geçerlidir (Jódar ve Cortés 1998a).

2.5 Hipergeometrik Seri ve Hipergeometrik Fonksiyonlar

α, β ve γ reel ya da kompleks sabitler olmak üzere

$$1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2 + \dots \quad (2.13)$$

olarak ifade edilen seri matematikte büyük bir öneme sahiptir. Bu seri $1+x+x^2+\dots$ geometrik serisinin bir genelleştirilmesi olduğundan *hipergeometrik seri* adını alır. (2.13) ifadesinden görülmektedir ki, γ değeri sıfır ya da negatif bir tamsayı olmamalıdır. (2.13) hipergeometrik serisi $|x| < 1$ için yakınsak, $|x| > 1$ için ıraksaktır. $|x| = 1$ olduğu zaman $\gamma > \alpha+\beta$ ise seri mutlak yakınsaktır. $x = -1$ iken $\gamma > \alpha+\beta-1$ ise seri yakınsaktır. Tanım 2.18 deki eşitlik dikkate alınarak, (2.13) hipergeometrik serisi

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = F(\alpha, \beta; \gamma; x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_r(\beta)_r}{(\gamma)_r r!} x^r \quad (2.14)$$

şeklinde yazılabilir. Bu F fonksiyonu hipergeometrik fonksiyon olarak adlandırılır. (2.14) eşitliğinde görülen F nin altındaki 2 ve 1 alt indisleri serinin payında α ve β , paydasında γ parametrelerinin bulunduğunu ifade eder. (2.14) eşitliğinin genelleştirilmiş şekli

$${}_pF_q(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \gamma_1, \dots, \gamma_q; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n(\alpha_2)_n \dots (\alpha_p)_n}{(\gamma_1)_n(\gamma_2)_n \dots (\gamma_q)_n} \frac{x^n}{n!}$$

dir.

2.6 Hipergeometrik Matris Fonksiyonları

Bu kısımda hipergeometrik matris fonksiyonların bazı özellikleri verilmiştir.

Tanım 2.23 $\mathbb{C}^{r \times r}$ deki bir C matrisi,

$$\forall n \geq 0 \text{ doğal sayısı için } C + nI \text{ matrisleri regüler} \quad (2.15)$$

koşulunu sağlasın. Bu C matrisi ve herhangi $A, B \in \mathbb{C}^{r \times r}$ matrisleri için

$${}_2F_1(A, B; C; z) = F(A, B; C; z) = \sum_{n=0}^{\infty} (A)_n (B)_n (C)_n^{-1} \frac{z^n}{n!} \quad (2.16)$$

serisi, $|z| < 1$ için yakınsaktır (Jódar ve Cortés 2000).

Hipergeometrik Matris Diferensiyel Denklem

$A, B, C \in \mathbb{C}^{r \times r}$ matrisleri için (2.15) koşuluna ek olarak

$$BC = CB \quad (2.17)$$

koşulu da sağlanmak üzere

$$z(1-z)W'' - zAW' + W'(C - z(B+I)) - AWB = \mathbf{0} \quad , \quad 0 \leq |z| < 1 \quad (2.18)$$

şeklindeki hipergeometrik matris diferensiyel denklemini dikkate alalım. $F_n \in \mathbb{C}^{r \times r}$ belirlenecek matrisler olmak üzere, bu denklemin

$$W_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n \quad ; \quad F_0 = I \quad , \quad |z| < 1$$

tipinde serisel çözümünü araştıralım. $W_1(z)$ nin serisel ifadesi ve

$$W_1'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n F_n z^{n-1} \quad , \quad W_1''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) F_n z^{n-2}$$

türevleri, (2.18) denkleminde yerlerine yazılıp, z nin kuvvetlerinin katsayıları $\mathbf{0}$ matrisine eşitlenirse

$$F_{n+1} = \frac{(A + nI) F_n (B + nI) (C + nI)^{-1}}{n+1} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

eşitliği yazılabilir. $F_0 = I$ olduğu dikkate alınarak, n yerine sırasıyla $0, 1, 2, \dots, (n-2)$, $(n-1)$ yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{(A + (n-1)I)(A + (n-2)I) \dots (A + I) AB (B + I) \dots (B + (n-2)I)}{1.2 \dots (n-1)n} \\ &\quad \times (B + (n-1)I) C^{-1} (C + I)^{-1} \dots (C + (n-2)I)^{-1} (C + (n-1)I)^{-1} \\ &= \frac{(A)_n (B)_n [(C + (n-1)I)(C + (n-2)I) \dots (C + I) C]^{-1}}{n!} \\ &= \frac{(A)_n (B)_n (C)_n^{-1}}{n!} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu durumda

$$W_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A)_n (B)_n (C)_n^{-1}}{n!} z^n = F(A, B; C; z)$$

şeklinde olup, $W_1(0) = I$ ve $0 \leq |z| < 1$ olmak üzere $W_1(z) = F(A, B; C; z)$ hipergeometrik matris fonksiyonu, (2.18) denkleminin bir çözümüdür.

Sonuç 2.3 $A, B, C \in \mathbb{C}^{r \times r}$ matrisleri (2.15) ve (2.17) koşullarını sağlasın.

$F(A, B; C; 0) = I$ olmak üzere $F(A, B; C; z)$ hipergeometrik matris fonksiyonu

$$z(1-z)W'' - zAW' + W'(C - z(B+I)) - AWB = \mathbf{0} \quad , \quad 0 \leq |z| < 1$$

denkleminin bir çözümüdür (Jódar ve Cortés 1998a).

Sonuç 2.4 n pozitif bir tamsayı, $A \in \mathbb{C}^{r \times r}$ herhangi bir matris ve $C \in \mathbb{C}^{r \times r}$, (2.15) koşulunu sağlayan bir matris olmak üzere

$$z(1-z)W'' - zAW' + W'(C + z(n-1)I) + nAW = \mathbf{0}$$

denklemi n -yinci dereceden matris polinom çözümlere sahiptir (Jódar ve Cortés 1998a).

$A, B, C \in \mathbb{C}^{r \times r}$ matrisleri için (2.15) ve (2.17) koşullarına ek olarak

$$AC = CA \tag{2.19}$$

koşulu da sağlanmak üzere

$$z(1-z)W'' - zAW' + W'(C - z(B+I)) - AWB = \mathbf{0} \quad , \quad 0 < |z| < 1 \tag{2.20}$$

şeklindeki hipergeometrik matris diferensiyel denklemini dikkate alalım. Sonuç 2.3 den görülmektedir ki, bu denklemin çözümlerinden biri

$$W_1(z) = F(A, B; C; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A)_n (B)_n (C)_n^{-1}}{n!} z^n \quad , \quad |z| < 1 \tag{2.21}$$

hipergeometrik matris fonksiyonudur. D_0 , negatif reel eksen boyunca kesilen kompleks bir düzlem olsun. $z^{I-C} = \exp[(I-C) \ln z]$ ile gösterilmek ve $V(z)$ fonksiyonu belirlenecek bir fonksiyon olmak üzere, (2.20) denkleminin

$$W_2(z) = V(z) z^{I-C} \quad ; \quad |z| < 1 \quad , \quad z \in D_0$$

tipinde bir çözümünü araştıralım. Ayrıca

$$z^{I-C} = \exp[(I-C) \ln z] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(I-C)^n \ln^n z}{n!}$$

olup, (2.17) eşitliğinden dolayı

$$Bz^{I-C} = z^{I-C}B$$

dir. $W_2(z)$ nin ifadesi ve

$$\begin{aligned} W_2'(z) &= V'(z) z^{I-C} + V(z) z^{-C} (I - C) \\ W_2''(z) &= V''(z) z^{I-C} + 2V'(z) z^{-C} (I - C) - V(z) z^{-C-I} C (I - C) \end{aligned}$$

türevleri, (2.20) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & z(1-z) W_2''(z) - zAW_2'(z) + W_2'(z) (C - z(B+I)) - AW_2(z) B \\ &= \{z(1-z) V'' + 2V' - V'C - 3zV' + 2zV'C - zAV' - zV'B \\ &\quad + VC - VC^2 - AV + AVC - VB - V + VCB + VC - AVB\} z^{I-C} \\ &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2.22}$$

elde edilir. $z \in D_0$ için $z^{I-C} = \exp[(I-C) \ln z] \neq \mathbf{0}$ olduğunu gözönünde bulundurarak bir an için

$$V(z)C = CV(z) \text{ ve } V'(z)C = CV'(z) \tag{2.23}$$

olduğunu varsayalım. Bu durumda (2.22) eşitliğinden

$$\begin{aligned} & z(1-z) V'' - z(A+I-C) V' \\ &+ V'[(2I-C) - z(B+2I-C)] - (A+I-C) V(B+I-C) = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2.24}$$

denklemini elde edilir. Dikkat edilirse, (2.24) denklemini, (2.20) denkleminin

$$A^* = A + I - C, \quad B^* = B + I - C, \quad C^* = 2I - C$$

olan özel bir durumudur. Bu halde, $BC = CB$ için

$$(B+I-C)(2I-C) = (2I-C)(B+I-C)$$

sağlandığından, (2.24) denkleminin çözümlerinden biri, (2.21) eşitliğinden dolayı

$$V(z) = F(A+I-C, B+I-C; 2I-C; z), \quad 0 < |z| < 1 \tag{2.25}$$

şeklindedir. Ayrıca (2.25) çözümünün bulunmasında varsayılan (2.23) kabulünün de doğruluğu gerçekleşmiş olur. Bu durumda (2.20) denkleminin

$$W_2(z) = F(A + I - C, B + I - C; 2I - C; z) z^{I-C}; \quad 0 < |z| < 1, z \in D_0 \quad (2.26)$$

tipinde bir başka çözümü elde edilmiş olur.

Sonuç 2.5 $A, B, C \in \mathbb{C}^{r \times r}$ matrisleri için (2.15), (2.17) ve (2.19) koşulları sağlanmak üzere $0 < |z| < 1$ ve $z \in D_0$ için

$$\left. \begin{aligned} W_1(z) &= F(A, B; C; z) \\ W_2(z) &= F(A + I - C, B + I - C; 2I - C; z) z^{I-C} \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

matris fonksiyonları, (2.20) hipergeometrik matris diferensiyel denkleminin çözümleridir (Jódar ve Cortés 2000).

Eğer $\rho < 1$ olacak şekilde $\Omega(\rho) = \{z \in D_0, 0 < |z| < \rho\}$ bölgesinde

$$S(z) = \begin{bmatrix} W_1(z) & W_2(z) \\ W_1'(z) & W_2'(z) \end{bmatrix}$$

blok matrisi regüler ise $\Omega(\rho)$ bölgesinde $\{W_1, W_2\}$ çifti (2.20) denkleminin temel çözümler cümlesidir (Jódar ve Cortés 2000).

Teorem 2.3 $A, B, C \in \mathbb{C}^{r \times r}$ matrisleri için (2.15), (2.17) ve (2.19) koşulları sağlansın. Ayrıca $0 < |z| < 1$ ve $z \in D_0$ için W_1 ve W_2 , (2.27) eşitliği ile verilmek üzere

$$\Omega(\rho) = \{z \in D_0, 0 < |z| < \rho\}$$

bölgesinde (2.20) denkleminin genel çözümü

$$W(z) = W_1(z)P + W_2(z)Q \quad ; \quad \text{keyfi } P, Q \in \mathbb{C}^{r \times r}$$

olacak şekilde $\rho < 1$ pozitif sayısı vardır (Jódar ve Cortés 2000).

Hipergeometrik Matris Fonksiyonlarla İlgili Özellikler

Sonuç 2.6 i ve j ler doğal sayılar olmak üzere $A = -iI$ matrisi için $(A)_{i+j} = 0$ olup, (2.21) eşitliği i . dereceden bir matris polinomudur.

Teorem 2.4 $A, B, C \in \mathbb{C}^{r \times r}$ pozitif kararlı matrisler ve

$$\beta(C) > \alpha(A) + \alpha(B)$$

olmak üzere (2.21) eşitliği ile tanımlanan seri, $|z| = 1$ için mutlak yakınsaktır (Jódar ve Cortés 1998a).

Teorem 2.5 $\mathbb{C}^{r \times r}$ deki M ve N matrisleri

$$\left. \begin{array}{l} MN = NM \\ M \text{ ve } N - M \text{ pozitif kararlı matrisler} \\ \forall n \geq 0 \text{ tamsayısı için } N + nI \text{ regüler matrisler} \end{array} \right\} \quad (2.28)$$

koşullarını sağlasın. Bu durumda her n için

$$F(-nI, M; N; 1) = \Gamma(N - M + nI) \Gamma^{-1}(N + nI) \Gamma^{-1}(N - M) \Gamma(N)$$

eşitliği geçerlidir (Defez ve Jódar 2002).

İspat. (2.1), (2.8) ve (2.28) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} (M)_k (N)_k^{-1} &= \Gamma^{-1}(M) \Gamma(M + kI) [\Gamma^{-1}(N) \Gamma(N + kI)]^{-1} \\ &= \Gamma^{-1}(M) \Gamma(M + kI) \Gamma^{-1}(N + kI) \Gamma(N) \\ &= \Gamma^{-1}(M) \Gamma^{-1}(N - M) \Gamma(N - M) \\ &\quad \times \Gamma(M + kI) \Gamma^{-1}(N + kI) \Gamma(N) \end{aligned} \quad (2.29)$$

dir. Diğer taraftan (2.10), (2.11) ve (2.12) özelliklerinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{M+(k-1)I} (1-t)^{N-M-I} dt &= \mathcal{B}(M + kI, N - M) = \mathcal{B}(N - M, M + kI) \\ &= \Gamma(N - M) \Gamma(M + kI) \Gamma^{-1}(N + kI) \end{aligned} \quad (2.30)$$

olup, (2.29) ve (2.30) eşitliklerinden dolayı da

$$(M)_k (N)_k^{-1} = \Gamma^{-1}(M) \Gamma^{-1}(N - M) \left(\int_0^1 t^{M+(k-1)I} (1-t)^{N-M-I} dt \right) \Gamma(N) \quad (2.31)$$

olur. (2.31) ifadesi $F(-nI, M; N; 1)$ serisinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& F(-nI, M; N; 1) \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{(-nI)_k (M)_k (N)_k^{-1}}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k \Gamma^{-1}(M) \Gamma^{-1}(N-M)}{k!} \left(\int_0^1 t^{M+(k-1)I} (1-t)^{N-M-I} dt \right) \Gamma(N) \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k t^k}{k!} \right) \Gamma^{-1}(M) \Gamma^{-1}(N-M) t^{M-I} (1-t)^{N-M-I} \Gamma(N) dt
\end{aligned}$$

olduğu görülür. $k > n$ için $(-n)_k = 0$ olduğundan, $|t| < 1$ için

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)_k t^k}{k!} = (1-t)^n$$

dir. O halde

$$\begin{aligned}
& F(-nI, M; N; 1) \\
&= \int_0^1 t^{M-I} (1-t)^n (1-t)^{N-M-I} \Gamma^{-1}(M) \Gamma^{-1}(N-M) \Gamma(N) dt \\
&= \left(\int_0^1 t^{M-I} (1-t)^{N-M+(n-1)I} dt \right) \Gamma^{-1}(M) \Gamma^{-1}(N-M) \Gamma(N)
\end{aligned}$$

olup, bu son eşitlikte (2.10), (2.11) ve (2.12) özellikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& F(-nI, M; N; 1) \\
&= \mathcal{B}(M, N-M+nI) \Gamma^{-1}(M) \Gamma^{-1}(N-M) \Gamma(N) \\
&= \Gamma(M) \Gamma(N-M+nI) \Gamma^{-1}(N+nI) \Gamma^{-1}(M) \Gamma^{-1}(N-M) \Gamma(N) \\
&= \Gamma(N-M+nI) \Gamma^{-1}(N+nI) \Gamma^{-1}(N-M) \Gamma(N)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise istenilendir. ■

Teorem 2.6 $C, D \in \mathbb{C}^{r \times r}$ matrisleri için D pozitif kararlı, $DC = CD$ ve

$$\forall k \geq 0 \text{ tamsayısı için } C + kI \text{ ve } C - D + kI \text{ matrisleri regüler}$$

koşulları sağlansın. Bu durumda $|t| < 1$ ve $n = 0, 1, \dots$ için

$$F(-nI, D; C; t) = (1-t)^n F\left(-nI, C-D; C; \frac{-t}{1-t}\right) \quad (2.32)$$

dir (Defez ve Jódar 2002).

İspat. $|t| < 1$ için Lemma 2.16 dan

$$(1-t)^{n-k} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(k-n)_i}{i!} t^i$$

dir. Burada $(-nI)_k = (-n)_k I$ olduğundan ve yukarıdaki eşitlikten dolayı

$$\begin{aligned} (1-t)^n F\left(-nI, C-D; C; \frac{-t}{1-t}\right) \\ &= (1-t)^n \sum_{k=0}^n \frac{(-nI)_k (C-D)_k (C)^{-1}_k}{k!} \left(\frac{-t}{1-t}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (C-D)_k (C)^{-1}_k}{k!} (1-t)^{n-k} (-1)^k t^k \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(k-n)_i (-n)_k (C-D)_k (C)^{-1}_k}{i! k!} (-1)^k t^{i+k} \end{aligned}$$

olur. $(-n)_k (-n+k)_i = (-n)_{k+i}$ ve $k > n$ için $(-n)_k = 0$ olduğu dikkate alınır

$$(1-t)^n F\left(-nI, C-D; C; \frac{-t}{1-t}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-n)_{k+i} (C-D)_k (C)^{-1}_k}{i! k!} (-1)^k t^{i+k}$$

olduğu görülür. (2.4) eşitliğinden dolayı eşitliğin sağında i yerine $(i-k)$ alınır

$$(1-t)^n F\left(-nI, C-D; C; \frac{-t}{1-t}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^i \frac{(-n)_i (C-D)_k (C)^{-1}_k}{(i-k)! k!} (-1)^k t^i$$

elde edilir. Burada da $(-i)_k = (-1)^k \frac{i!}{(i-k)!}$ eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} (1-t)^n F\left(-nI, C-D; C; \frac{-t}{1-t}\right) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-n)_i}{i!} \left[\sum_{k=0}^i \frac{(-i)_k (C-D)_k (C)^{-1}_k}{k!} \right] t^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-n)_i}{i!} F(-iI, C-D; C; 1) t^i \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Teorem 2.5 den ve $CD = DC$ olduğunun dikkate alınmasıyla

$$\begin{aligned} (1-t)^n F\left(-nI, C-D; C; \frac{-t}{1-t}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-n)_i}{i!} \Gamma(D+iI) \Gamma^{-1}(C+iI) \Gamma^{-1}(D) \Gamma(C) t^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-n)_i}{i!} \Gamma(D+iI) \Gamma^{-1}(D) \Gamma^{-1}(C+iI) \Gamma(C) t^i \end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir. (2.16) gösterimi de dikkate alınır

$$(1-t)^n F\left(-nI, C-D; C; \frac{-t}{1-t}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-nI)_i (D)_i (C)^{-1}_i}{i!} t^i = F(-nI, D; C; t)$$

elde edilir. Bu ise istenilendir. ■

3. CHEBYSHEV MATRİS POLİNOMLARI

Bu bölümde Chebyshev matris polinomları tanıtıldıktan sonra bu polinomların sağladığı hipergeometrik matris fonksiyon, Rodrigues formülü, üç terimli matris rekürans bağıntısı, ortogonallik özelliği verilmiş ve ayrıca bu polinomların sağladığı matris diferensiyel denklem bulunmuştur (Defez ve Jódar 2002).

3.1 Klasik Chebyshev Polinomları

$-1 \leq x \leq 1$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, ikinci basamaktan

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$$

diferensiyel denkleminin çözümlerinden biri

$$T_n(x) = \frac{n}{2} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k! (n-2k)!} (2x)^{n-k} \quad ; \quad n = 0, 1, \dots$$

ile gösterilen $T_n(x)$ *Chebyshev polinomları*dır. Chebyshev polinomları, $I = [-1, 1]$ aralığında $\omega(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olup,

$$\int_{-1}^1 (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} T_n(x) T_m(x) dx = 0 \quad ; \quad n \neq m$$

ortogonallik özelliğini gerçekler. Diğer taraftan bu polinomların normu $\|T_n\|$ olup,

$$\begin{aligned} \|T_n\|^2 &= \int_{-1}^1 (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} [T_n(x)]^2 dx \\ &= \begin{cases} \pi & ; \quad n = 0 \\ \frac{\pi}{2} & ; \quad n \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

dır. Chebyshev polinomları

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) t^n = \frac{1 - xt}{1 - 2xt + t^2}$$

doğurucu fonksiyon bağıntısına, $D = \frac{d}{dx}$ olmak üzere

$$T_n(x) = (-1)^n \frac{2^n n!}{(2n)!} (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} D^n \left[(1 - x^2)^{n-\frac{1}{2}} \right]$$

Rodrigues formülüne ve

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad ; \quad n = 1, 2, \dots$$

şeklinde üç terimli rekürans bağıntısına sahiptir (Rainville 1939).

3.2 Üstel Matris Fonksiyonların Bazı Özellikleri

$A, \mathbb{C}^{r \times r}$ de herhangi bir matris olsun. $0 < t \leq 1$ için

$$t^A = e^{A \ln t}$$

dir. Tanım 2.17 ve Lemma 2.11 den dolayı

$$\begin{aligned} Q_1(x) &= \sum_{k=0}^r \frac{(\|A\| \sqrt{r} x)^k}{k!} \\ Q_2(x) &= \sum_{k=0}^r \frac{(\|I - A\| \sqrt{r} x)^k}{k!} \end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned} \|t^A\| &= e^{\alpha(-A)|\ln t|} Q_1(|\ln t|) = e^{-\beta(A)|\ln t|} Q_1(|\ln t|) \\ &= e^{\beta(A) \ln t} Q_1(|\ln t|) = t^{\beta(A)} Q_1(|\ln t|) \quad ; \quad 0 < t \leq 1 \\ \|t^{I-A}\| &= e^{\beta(I-A)|\ln t|} Q_2(|\ln t|) = t^{1-\alpha(A)} Q_2(|\ln t|) \quad ; \quad 0 < t \leq 1 \end{aligned} \quad (3.1)$$

dir. $P(x)$ sabit bir matris polinom olsun ve A matrisi

$$\forall z \in \sigma(A) \text{ için } 0 < \operatorname{Re}(z) < 1 \quad (3.2)$$

özellikliğini sağlasın. Bu durumda (3.1) ve (3.2) eşitliklerinden dolayı

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^A P(x) &= \mathbf{0} \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} (1+x)^{I-A} P(x) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.3)$$

eşitlikleri sağlar.

A ve B matrisleri sırasıyla

$$\forall z \in \sigma(A) \text{ için } \operatorname{Re}(z) > -1 \quad , \quad \forall w \in \sigma(B) \text{ için } \operatorname{Re}(w) > -1$$

koşullarını sağlasınlar. Bu koşullar altında

$$J = \int_{-1}^1 (1+x)^B (1-x)^A dx$$

integralinde $t = \frac{1+x}{1-x}$ dönüşümü yapılırsa

$$J = 2^{B+I} \left[\int_0^\infty \left(\frac{t}{t+1} \right)^B \left(\frac{1}{t+1} \right)^A \frac{dt}{(1+t)^2} \right] 2^A$$

elde edilir. Bu son integralde $u = \frac{1}{1+t}$ dönüşümü yapılır ve Tanım 2.22 uygulanırsa

$$J = 2^{B+I} \mathcal{B}(B+I, A+I) 2^A \quad (3.4)$$

sonucu bulunur.

3.3 Chebyshev Matris Polinomlarının Hipergeometrik Matris Fonksiyon Gösterimi

$\forall k \geq 0$ tamsayısı için $C + kI$ matrisleri regüler matrisler olmak üzere $C, D \in \mathbb{C}^{r \times r}$ matrisleri için

$$z(1-z)W'' + W'(C - zI) + DW = \mathbf{0} \quad , \quad 0 < |z| < 1 \quad (3.5)$$

şeklindeki hipergeometrik matris diferensiyel denklemini dikkate alalım. (3.5) denkleminde $D = n^2I$ alınırsa

$$z(1-z)W'' + W'(C - zI) + n^2W = \mathbf{0} \quad , \quad 0 < |z| < 1 \quad (3.6)$$

denklemini bulunur. Ayrıca Sonuç 2.3 de $A = nI$ ve $B = -nI$ alınırsa, yine (3.6) denklemini elde edilir. $|z| < 1$ için (2.18) denkleminin bir çözümünün $F(A, B; C; z)$ olduğu bilindiğine göre $A = nI$ ve $B = -nI$ alınırsa $F(-nI, nI; C; z)$ hipergeometrik matris fonksiyonu, (3.6) matris diferensiyel denkleminin bir çözümü olur. (2.1) Pochhammer sembolünden elde edilen

$$(-nI)_k = (-n)_k I = \begin{cases} (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} I & , \quad k \leq n \\ \mathbf{0} & , \quad k > n \end{cases} \quad (3.7)$$

$$(nI)_k = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!} I$$

özelliklerinden dolayı

$$F(-nI, nI; C; z) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k n (n+k-1)!}{k! (n-k)!} [(C)_k]^{-1} z^k$$

yazılabilir. Bu ifadede $[(C)_k]^{-1}$ in yerine (2.9) dan elde edilen eşiti kullanılırsa

$$F(-nI, nI; C; z) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k n (n+k-1)!}{k! (n-k)!} \Gamma^{-1}(C+kI) \Gamma(C) z^k$$

eşitliği elde edilir.

Tanım 3.1 $A \in \mathbb{C}^{r \times r}$ matrisi

$$\forall z \in \sigma(A) \text{ için } 0 < \operatorname{Re}(z) < 1$$

koşulunu sağlasın. $\forall n \geq 0$ doğal sayısı için $T_n(x, A)$, n . dereceden Chebyshev matris polinomu

$$T_n(x, A) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k n (n+k-1)!}{2^k k! (n-k)!} \Gamma(A) \Gamma^{-1}(A+kI) (1-x)^k \quad (3.8)$$

$$= F\left(-nI, nI; A; \frac{1-x}{2}\right) \quad (3.9)$$

eşitliği ile tanımlanır (Defez ve Jódar 2002).

Uyarı 3.1 (3.8) eşitliğinde, $r = 1$ için $A = \frac{1}{2}$ alınırsa

$$T_n\left(x, \frac{1}{2}\right) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k 2^k n (n+k-1)!}{(2k)! (n-k)!} (1-x)^k$$

skaler Chebyshev polinomu elde edilir. Ancak tek dereceli $T_{2n+1}(x, A)$ Chebyshev matris polinomu genelde x e göre tek fonksiyon, çift dereceli $T_{2n}(x, A)$ Chebyshev matris polinomu ise genelde x e göre çift fonksiyon olmayıp bu özelliği ile skaler Chebyshev polinomlarına benzemez.

3.4 Chebyshev Matris Polinomları için Matris Diferensiyel Denklem

Teorem 3.1 $\forall n \geq 0$ doğal sayısı için $T_n(x, A)$, n . dereceden Chebyshev matris polinomu

$$(1-x^2) Y'' + Y'(-2A + (1-x)I) + n^2 Y = \mathbf{0}, \quad |x| < 1 \quad (3.10)$$

matris diferensiyel denklemini sağlar (Defez ve Jódar 2002).

İspat. (3.9) ifadesinden dolayı

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[F \left(-nI, nI; A; \frac{1-x}{2} \right) \right] &= -2T'_n(x, A) \\ \frac{d^2}{dx^2} \left[F \left(-nI, nI; A; \frac{1-x}{2} \right) \right] &= 4T''_n(x, A) \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

eşitlikleri yazılabilir. (2.18) denkleminde $A = nI$ ve $B = -nI$ alınır ve $z = \frac{1-x}{2}$ değişken değiştirmesi yapılırsa, (3.9) ve (3.11) eşitliklerinden dolayı $T_n(x, A)$, n . dereceden Chebyshev matris polinomunun (3.10) denklemini sağladığı gösterilmiş olur. ■

Sonuç 3.1 $\forall n \geq 0$ için $T_n(x, A)$ matris polinomu

$$\frac{d}{dx} \left[Y'(1-x)^2 (1+x)^{-A} (1-x)^{A-I} \right] + n^2 Y (1+x)^{-A} (1-x)^{A-I} = \mathbf{0}, \quad |x| < 1$$

denkleminin bir çözümüdür (Defez ve Jódar 2002).

İspat. $|x| < 1$ için (3.10) eşitliği $\frac{1}{1-x} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{-A}$ ile çarpılır ve düzenlemeler yapılırsa istenen elde edilir. ■

3.5 Chebyshev Matris Polinomları için Rodrigues Formülü

Lemma 3.1 Eğer $C \in \mathbb{C}^{r \times r}$ de $\forall n > 0$ için $C + nI$ lar tersinir koşulunu sağlayan herhangi bir matris ve $D^s(f(t)) = \frac{d^s f(t)}{dt^s}$ ise

$$D^s [t^{C+mI}] = (C + I)_m [(C + I)_{m-s}]^{-1} t^{C+(m-s)I} \quad ; \quad 0 \leq s \leq m, \quad s, m \in \mathbb{N} \quad (3.12)$$

dir (Defez ve Jódar 2002).

Teorem 3.2 A matrisi (3.2) koşulunu sağlasın. $|x| < 1$ için $T_n(x, A)$, n . dereceden Chebyshev matris polinomu

$$T_n(x, A) = \frac{(-1)^n}{2^n} [(A)_n]^{-1} (1+x)^A (1-x)^{A-I} D^n [(1+x)^{-A} (1-x)^{A-I} (1-x^2)^n] \quad (3.13)$$

Rodrigues formülünü sağlar (Defez ve Jódar 2002).

İspat. $|x| < 1$ için $T_n(x, A) = F\left(-nI, nI; A; \frac{1-x}{2}\right)$ eşitliğine Teorem 2.6 uygulanırsa

$$T_n(x, A) = \left(\frac{1+x}{2}\right)^n F\left(-nI, A-nI; A; \frac{x-1}{x+1}\right) \quad (3.14)$$

elde edilir. (2.1), (3.12) ve (3.2) eşitlikleri yardımıyla

$$\left. \begin{aligned} (A-nI)_k &= (-1)^k (I-A)_n [(I-A)_{n-k}]^{-1} \\ D^k [(1+x)^{-A+nI}] &= (I-A)_n [(I-A)_{n-k}]^{-1} (x+1)^{-A+(n-k)I} \\ D^{n-k} [(1-x)^{A+(n-1)I}] &= (-1)^{n-k} (A)_n [(A)_k]^{-1} (1-x)^{A+(k-1)I} \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

yazılabilirler. $|x| < 1$ için (3.14) ve (3.15) özelliklerinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} T_n(x, A) &= \left(\frac{1+x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k}{k!} (A-nI)_k (A)_k^{-1} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^k \\ &= \left(\frac{1+x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (A-nI)_k (A)_k^{-1} \left(\frac{1-x}{x+1}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2^n} (I-A)_n [(I-A)_{n-k}]^{-1} (A)_k^{-1} (1-x)^k (x+1)^{n-k} \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n} [(A)_n]^{-1} (1+x)^A (1-x)^{I-A} \sum_{k=0}^n \left\{ \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (I-A)_n \right. \\ &\quad \times [(I-A)_{n-k}]^{-1} (A)_k^{-1} (A)_n (1-x)^{A+(k-1)I} (x+1)^{-A+(n-k)I} \Big\} \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n} [(A)_n]^{-1} (1+x)^A (1-x)^{A-I} \\ &\quad \times \left\{ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^k [(1+x)^{-A+nI}] D^{n-k} [(1-x)^{A+(n-1)I}] \right\} \quad (3.16) \end{aligned}$$

elde edilir. (3.16) da çarpımın n . türevi için Leibniz kuralı uygulanırsa teorem ispatlanmış olur. ■

3.6 Chebyshev Matris Polinomlarının Ortogonalliği

Sonuç 3.1 den dolayı $T_n(x, A)$, n . dereceden Chebyshev matris polinomu

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x)^A (1+x)^{I-A} \frac{d}{dx} T_n(x, A) \right] + n^2 (1-x)^{A-I} (1+x)^{-A} T_n(x, A) = \mathbf{0} \quad (3.17)$$

denklemini sağlar. Aynı şekilde $T_m(x, A)$, m . dereceden Chebyshev matris polinomu da

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x)^A (1+x)^{I-A} \frac{d}{dx} T_m(x, A) \right] + m^2 (1-x)^{A-I} (1+x)^{-A} T_m(x, A) = \mathbf{0} \quad (3.18)$$

denklemini sağlar. (3.17) denklemi $T_m(x, A)$ ile (3.18) de $T_n(x, A)$ ile çarpılıp taraf tarafa çıkarılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left[(1-x)^A (1+x)^{I-A} \left\{ T_m(x, A) \frac{d}{dx} T_n(x, A) - \left(\frac{d}{dx} T_m(x, A) \right) T_n(x, A) \right\} \right] \\ &= (m^2 - n^2) (1-x)^{A-I} (1+x)^{-A} T_m(x, A) T_n(x, A) \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitliğin $x = -1$ den $x = 1$ e kadar integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & (m^2 - n^2) \int_{-1}^1 (1-x)^{A-I} (1+x)^{-A} T_m(x, A) T_n(x, A) dx \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^A (1+x)^{I-A} \left\{ T_m(x, A) \frac{d}{dx} T_n(x, A) - \left(\frac{d}{dx} T_m(x, A) \right) T_n(x, A) \right\} \\ & \quad - \lim_{x \rightarrow -1^+} (1-x)^A (1+x)^{I-A} \left\{ T_m(x, A) \frac{d}{dx} T_n(x, A) - \left(\frac{d}{dx} T_m(x, A) \right) T_n(x, A) \right\} \end{aligned} \quad (3.19)$$

elde edilir. Bu işlem yapılırken $T_m(x, A)$ ve $T_n(x, A)$ matris polinomların çarpımının değişmeli olduğuna dikkat edilmelidir. Burada

$$P(x) = T_m(x, A) \frac{d}{dx} T_n(x, A) - \left(\frac{d}{dx} T_m(x, A) \right) T_n(x, A)$$

bir matris polinom ve

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1+x)^{I-A} = 2^{I-A} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} (1-x)^A = 2^A \quad (3.20)$$

dır. (3.3) ve (3.20) özellikleri kullanılırsa

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^A (1+x)^{I-A} P(x) = \mathbf{0} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} (1-x)^A (1+x)^{I-A} P(x) = \mathbf{0} \quad (3.21)$$

eşitlikleri yazılabilir. Böylece (3.19) ve (3.21) den yararlanıldığında, $T_n(x, A)$ ların

$$\int_{-1}^1 (1-x)^{A-I} (1+x)^{-A} T_m(x, A) T_n(x, A) dx = \mathbf{0} \quad , \quad n \neq m$$

özellği bulunmuş olur. Ortogonallik özelliğinin tamamlanması için, son olarak,

$$J_n = \int_{-1}^1 (1-x)^{A-I} (1+x)^{-A} T_n^2(x, A) dx$$

integralinde (3.13) gösterimi kullanılır ve bir kez kısmi integrasyon yapılırsa, bu integral

$$\begin{aligned}
J_n &= \frac{(-1)^n}{2^n} [(A)_n]^{-1} \int_{-1}^1 T_n(x, A) D^n [(1+x)^{-A} (1-x)^{A-I} (1-x^2)^n] dx \\
&= \frac{(-1)^n}{2^n} [(A)_n]^{-1} \left\{ \left\{ T_n(x, A) D^{n-1} [(1+x)^{-A} (1-x)^{A-I} (1-x^2)^n] \right\} \Big|_{x=-1}^{x=1} \right. \\
&\quad \left. - \int_{-1}^1 T'_n(x, A) D^{n-1} [(1+x)^{-A} (1-x)^{A-I} (1-x^2)^n] dx \right\} \quad (3.22)
\end{aligned}$$

şekline dönüştür. $1 \leq j \leq k \leq n$ olmak üzere (3.3) den dolayı

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} D^{n-j} [(1+x)^{-A} (1-x)^{A-I} (1-x^2)^n] T_n^{(j-1)}(x, A) &= \mathbf{0} \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} D^{n-j} [(1+x)^{-A} (1-x)^{A-I} (1-x^2)^n] T_n^{(j-1)}(x, A) &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

bulunabilirler. (3.22) ve (3.23) eşitliklerinin kullanılmasıyla J_n integrali için

$$J_n = -\frac{(-1)^n}{2^n} [(A)_n]^{-1} \int_{-1}^1 T'_n(x, A) D^{n-1} [(1+x)^{-A} (1-x)^{A-I} (1-x^2)^n] dx \quad (3.24)$$

ifadesi elde edilir. Ayrıca (3.8) ile (2.9) eşitlikleri kullanılırsa

$$T_n^{(n)}(x, A) = \frac{(2n-1)!}{2^n} n \Gamma(A) \Gamma^{-1}(A+nI) = \frac{(2n-1)!}{2^n} n [(A)_n]^{-1} \quad (3.25)$$

değeri elde edilir. (3.24) integraline $(n-1)$ kez daha kısmi integrasyon uygulanır ve (3.23) özelliklerinden yararlanılır ve de (3.25) ve (3.4) ifadeleri ile Lemma 2.19 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
J_n &= \frac{1}{2^n} [(A)_n]^{-1} \int_{-1}^1 T_n^{(n)}(x, A) [(1+x)^{-A} (1-x)^{A-I} (1-x^2)^n] dx \\
&= \frac{(2n-1)!}{2^{2n}} [(A)_n]^{-2} \int_{-1}^1 (1+x)^{-A+nI} (1-x)^{A+(n-1)I} dx \\
&= \frac{(2n-1)!}{2^{2n}} [(A)_n]^{-2} 2^{-A+(n+1)I} \mathcal{B}(-A+(n+1)I, A+nI) 2^{A+(n-1)I} \\
&= \frac{1}{2} \Gamma(-A+(n+1)I) \Gamma^2(A) \Gamma^{-1}(A+nI) \quad , \quad n = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

sonucu bulunur. Ayrıca $n = 0$ için $T_0(x, A) = I$ olup, Lemma 2.19 dan dolayı J_0 ın

$$J_0 = \int_{-1}^1 (1-x)^{A-I} (1+x)^{-A} T_0^2(x, A) dx = \Gamma(-A+I) \Gamma(A)$$

olduğu görülmüştür. Bu sonuçlardan dolayı aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.3 $\mathbb{C}^{r \times r}$ deki A matrisi

$$\forall z \in \sigma(A) \text{ için } 0 < \operatorname{Re}(z) < 1$$

koşulunu sağlasın. Bu takdirde Chebyshev matris polinomları

$$\int_{-1}^1 (1-x)^{A-I} (1+x)^{-A} T_m(x, A) T_n(x, A) dx = \begin{cases} \mathbf{0} & , \quad n \neq m \\ \Gamma(-A+I) \Gamma(A) & , \quad n = m = 0 \\ \frac{1}{2} \Gamma(-A + (n+1)I) \Gamma^2(A) \Gamma^{-1}(A+nI) & , \quad n = m \neq 0 \end{cases}$$

ortogonalite özelliğini sağlar (Defez ve Jódar 2002).

Sonuç 3.2 Teorem 3.3 den dolayı $\{T_n(x, A)\}_{n \in \mathbb{N}}$ Chebyshev matris polinomları

$[-1, 1]$ aralığında $W(x, A) = (1-x)^{A-I} (1+x)^{-A}$ matris ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldır. Ayrıca $T_n(x, A)$ Chebyshev matris polinomunun başkatsayısı $n = 0$ için I matrisi, $n > 0$ için $\frac{(2n-1)!}{2^n (n-1)!} \Gamma(A) \Gamma^{-1}(A+nI)$ matrisidir.

3.7 Chebyshev Matris Polinomları için Üç Terimli Matris Rekürans Bağıntısı

n . dereceden herhangi bir $Q(x)$ matris polinomu, Chebyshev matris polinomları cinsinden seriye açılabilir. Yani

$$Q(x) = \sum_{k=0}^n \Lambda_k T_k(x, A) , \quad \Lambda_k \in \mathbb{C}^{r \times r} \quad (3.26)$$

şeklinde yazılabilir. Teorem 3.3 den ve (3.26) eşitliğinden dolayı, eğer $P(x)$, n . dereceden daha düşük dereceli herhangi bir matris polinom ise, o zaman

$$\int_{-1}^1 P(x) (1-x)^{A-I} (1+x)^{-A} T_n(x, A) dx = \mathbf{0}$$

eşitliği yazılabilir. (3.26) serisinden dolayı, $n \geq 2$ olmak üzere $(n+1)$. dereceden $(1-x) T_n(x, A)$ matris polinomu

$$(1-x) T_n(x, A) = \sum_{k=0}^{n+1} \Lambda_k T_k(x, A) \quad (3.27)$$

şeklinde seriye açılabilir. Teorem 3.3 den dolayı

$$H_k = \begin{cases} \Gamma(-A + I) \Gamma(A) & , \quad k = 0 \\ \frac{1}{2} \Gamma(-A + (k+1)I) \Gamma^2(A) \Gamma^{-1}(A + kI) & , \quad k > 0 \end{cases}$$

olup

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 (1-x) T_n(x, A) (1-x)^{A-I} (1+x)^{-A} T_k(x, A) dx \\ &= \begin{cases} \mathbf{0} & , \quad k+1 < n \\ \Lambda_{n-1} H_{n-1} & , \quad k = n-1 \\ \Lambda_n H_n & , \quad k = n \\ \Lambda_{n+1} H_{n+1} & , \quad k = n+1 \end{cases} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikten dolayı $k < n-1$ için $\Lambda_k = 0$ olup, (3.27) ifadesi

$$(1-x) T_n(x, A) = \Lambda_{n+1} T_{n+1}(x, A) + \Lambda_n T_n(x, A) + \Lambda_{n-1} T_{n-1}(x, A) \quad (3.28)$$

şeklinde yazılabilir. $k \geq 0$ için H_k matrisinin tersinir olduğu dikkate alınır ve (3.27) eşitliği kullanılırsa, Λ_k katsayıları için,

$$\Lambda_k = \left[\int_{-1}^1 (1-x) T_k(x, A) (1-x)^{A-I} (1+x)^{-A} T_n(x, A) dx \right] H_k^{-1}$$

elde edilir. (3.9) ifadesi yardımıyla (3.28) eşitliğinin her iki yanında $(1-x)$ in sırasıyla $(n+1)$., n ., $(n-1)$. kuvvetlerinin katsayıları eşitlenirse, ardışık katsayılar,

$$\begin{aligned} \Lambda_{n+1} &= -\frac{A + nI}{2n+1} \\ \Lambda_n &= \frac{-2n}{2n-1} (A + (n-1)I) + 2 \frac{(A + nI)}{2n+1} (n+1) \\ \Lambda_{n-1} &= \frac{A - nI}{2n-1} \end{aligned}$$

olarak bulunurlar. Λ_{n-1} , Λ_n ve Λ_{n+1} katsayıları, (3.28) bağıntısında yerlerine yazılırlarsa

$$\begin{aligned} & T_n(x, A) + \left[\frac{(2n-1)(2n-2)}{(2n-3)} (A + (n-1)I)^{-1} (A + (n-2)I) \right. \\ & + (2n-1) (A + (n-1)I)^{-1} (1-x) - 2nI \left. \right] T_{n-1}(x, A) \\ & + \left[(2n-1)I - \frac{(2n-1)(2n-2)}{(2n-3)} (A + (n-1)I)^{-1} (A + (n-2)I) \right] T_{n-2}(x, A) \\ & = \mathbf{0} \quad , \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

üç terimli matris rekürans bağıntısı elde edilir (Defez ve Jódar 2002).

4. GEGENBAUER MATRİS POLİNOMLARI

Bu bölümde Gegenbauer matris polinomları tanıtılmıştır. Burada Gegenbauer matris polinomlarının hipergeometrik matris fonksiyon gösterimleri ve Gegenbauer matris diferensiyel denklemi elde edilmiştir. Ayrıca Gegenbauer matris polinomlarının ortogonalite özelliği verilmiştir.

4.1 Klasik Gegenbauer Polinomları

$-1 \leq x \leq 1$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere ikinci basamaktan

$$(1 - x^2)y'' - (2\lambda + 1)xy' + n(n + 2\lambda)y = 0$$

diferensiyel denkleminin çözümlerinden biri

$$C_n^\lambda(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{(\lambda)_{n-k}}{k! (n-2k)!} (2x)^{n-2k} \quad ; \quad n = 0, 1, \dots$$

ile gösterilen $C_n^\lambda(x)$ Gegenbauer polinomlarıdır. Gegenbauer polinomları, $I = [-1, 1]$ aralığında $\omega(x) = (1 - x^2)^{\lambda - \frac{1}{2}}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olup,

$$\int_{-1}^1 (1 - x^2)^{\lambda - \frac{1}{2}} C_n^\lambda(x) C_m^\lambda(x) dx = 0 \quad ; \quad n \neq m$$

ortogonalite özelliğini gerçekler. Öte yandan, bu polinomların normu $\|C_n\|$ olup,

$$\begin{aligned} \|C_n\|^2 &= \int_{-1}^1 (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} [C_n^\lambda(x)]^2 dx \\ &= 2^{1-2\lambda} \pi \frac{\Gamma(n + 2\lambda)}{(n + \lambda) \Gamma^2(\lambda) \Gamma(n + 1)} \end{aligned}$$

dir. Gegenbauer polinomları

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^\lambda(x) r^n = (1 - 2xr + r^2)^{-\lambda}$$

doğurucu fonksiyon bağıntısına, $D = \frac{d}{dx}$ olmak üzere

$$(1 - x^2)^{\lambda - 1/2} C_n^\lambda(x) = \frac{(-2)^n (\lambda)_n}{n! (n + 2\lambda)_n} D^n (1 - x^2)^{\lambda + n - 1/2}$$

Rodrigues formülüne ve

$$nC_n^\lambda(x) = 2(n + \lambda - 1)x C_{n-1}^\lambda(x) - (n + 2\lambda - 2)C_{n-2}^\lambda(x) \quad , \quad n = 2, 3, \dots$$

şeklinde üç terimli rekürans bağıntısına sahiptir (Rainville 1973).

4.2 Gegenbauer Matris Polinomlarının Hipergeometrik Matris Fonksiyon Gösterimleri

$\mathbb{C}^{r \times r}$ deki herhangi bir A matrisi $\forall z \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ için $(\frac{-z}{2}) \notin \sigma(A)$ koşulunu sağlasın. $C_n^A(x)$ Gegenbauer matris polinomları aşağıdaki matris doğurucu fonksiyonu yardımıyla tanımlanır (Jódar vd. 1995 ve Sayyed vd. 2004):

$$F(x, t) = (1 - 2xt + t^2)^{-A} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^A(x) t^n. \quad (4.1)$$

Yukarıdaki $F(x, t)$ matris fonksiyonunda $|2xt - t^2| < 1$ için sırasıyla (2.2) ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n A(k, n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} A(k, n - k)$$

özellikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} (1 - 2xt + t^2)^{-A} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A)_n (2xt - t^2)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(A)_n}{n!} \binom{n}{k} (2xt)^{n-k} (-t^2)^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (A)_{n-k}}{(n-2k)! k!} (2x)^{n-2k} t^n \end{aligned} \quad (4.2)$$

elde edilir. (4.1) ve (4.2) eşitliklerinde t^n nin katsayılarının eşitlenmesiyle

$$C_n^A(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (A)_{n-k}}{(n-2k)! k!} (2x)^{n-2k} \quad (4.3)$$

Gegenbauer matris polinomları için toplamsal gösterim elde edilmiş olur. (4.3) ten $C_n^A(x)$ in x e göre n . dereceden bir matris polinom olduğu açıktır. (4.1) eşitliğinde x yerine $(-x)$ ve t yerine $(-t)$ alınırsa

$$(1 - 2xt + t^2)^{-A} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n C_n^A(-x) t^n$$

elde edilir ki bu eşitlik ile (4.1) eşitliğinin sol tarafları aynı olup sağ tarafları da aynı olmalıdır. Bu yüzden dolayı

$$C_n^A(-x) = (-1)^n C_n^A(x) \quad (4.4)$$

dir. (4.1) de $x = 1$ alınır

$$(1-t)^{-2A} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^A(1)t^n$$

olup, bu eşitliğin sol tarafında (2.2) serisi kullanılarak, t^n nin katsayılarının eşitlenmesiyle

$$C_n^A(1) = \frac{(2A)_n}{n!}$$

elde edilir. (4.1) de $x = 0$ alınır

$$(1+t^2)^{-A} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^A(0)t^n$$

olup, bu eşitliğin sol tarafında (2.2) serisi kullanılarak, t^n nin katsayılarının eşitlenmesiyle

$$C_{2n}^A(0) = \frac{(-1)^n (A)_n}{n!}, \quad C_{2n+1}^A(0) = 0$$

oldukları görülür. (2.1) de verilen Pochhammer özelliğinin kullanılmasıyla

$$[(2A)_{2k}]^{-1} = 2^{-2k} [(A)_k]^{-1} \left[\left(\frac{2A+I}{2} \right)_k \right]^{-1} \quad (4.5)$$

ve

$$(A)_{n+2k} = (A)_{2k} (A+2kI)_n \quad (4.6)$$

yazılabilirler. $F(x, t) = (1 - 2xt + t^2)^{-A}$ nin

$$(1 - 2xt + t^2)^{-A} = \left[1 - \frac{2t(x-1)}{(1-t)^2} \right]^{-A} (1-t)^{-2A}$$

ifadesi dikkate alınıp, eşitliğin sağ yanında sırasıyla (2.2) ve (4.6) özellikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^A(x)t^n &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A)_k 2^k t^k (x-1)^k}{k! (1-t)^{2k}} (1-t)^{-2A} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A)_k 2^k t^k (x-1)^k}{k!} (1-t)^{-(2A+2kI)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A)_k (2A + 2kI)_n 2^k t^{n+k} (x-1)^k}{k! n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A)_k [(2A)_{2k}]^{-1} (2A)_{2k+n} 2^k t^{n+k} (x-1)^k}{k! n!}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu son eşitliğe sırasıyla (4.5) ve (2.4) özellikleri uygulanır ve (3.7) özelliğinden yararlanılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} C_n^A(x) t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A)_k \left[\left(\frac{1}{2} (2A + I) \right)_k \right]^{-1} [(A)_k]^{-1} (2A)_{2k+n} t^{n+k} \left(\frac{x-1}{2} \right)^k}{k! n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\left[\left(\frac{1}{2} (2A + I) \right)_k \right]^{-1} (2A)_{k+n} t^n \left(\frac{x-1}{2} \right)^k}{k! (n-k)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2A)_n}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{(-nI)_k (2A + nI)_k \left[\left(A + \frac{I}{2} \right)_k \right]^{-1} \left(\frac{1-x}{2} \right)^k}{k!} t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2A)_n}{n!} F \left(-nI, 2A + nI; A + \frac{I}{2}; \frac{1-x}{2} \right) t^n
\end{aligned}$$

elde edilir ki, burada t^n nin katsayılarının eşitlenmesiyle $C_n^A(x)$ lerin

$$C_n^A(x) = \frac{(2A)_n}{n!} F \left(-nI, 2A + nI; A + \frac{I}{2}; \frac{1-x}{2} \right) \quad (4.7)$$

ifadesi bulunur. (4.7) eşitliğine, (4.4) özelliğinin uygulanmasıyla $C_n^A(x)$ lerin

$$C_n^A(x) = (-1)^n \frac{(2A)_n}{n!} F \left(-nI, 2A + nI; A + \frac{I}{2}; \frac{1+x}{2} \right)$$

ile verilen başka bir gösterimi elde edilmiş olur.

Gegenbauer matris polinomları için başka hipergeometrik matris fonksiyon gösterimlerinde elde edilebilir. Bunun için aşağıdaki eşitliklerden yararlanılmıştır. (2.1) deki Pochhammer özelliğinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(n-2k)!} I &= \frac{(-nI)_{2k}}{n!} ; 0 \leq 2k \leq n \\
(-nI)_{2k} &= 2^{2k} \left(\frac{-nI}{2} \right)_k \left(-\frac{(n-1)I}{2} \right)_k
\end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir. $C_n^A(x)$ in (4.3) deki ifadesinde yukarıdaki iki özelliğin kullanılması

masıyla

$$\begin{aligned}
C_n^A(x) &= (2x)^n \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left\{ \frac{(-nI)_{2k} (-1)^k}{k! n!} (A)_{n-k} [(A + (n-k)I) \dots (A + (n-1)I)] \right. \\
&\quad \times [(A + (n-k)I) \dots (A + (n-1)I)]^{-1} (2x)^{-2k} \Big\} \\
&= \frac{(2x)^n}{n!} (A)_n \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{\left(\frac{-nI}{2}\right)_k \left(-\frac{(n-1)I}{2}\right)_k}{k!} [(I - A - nI)_k]^{-1} \left(\frac{1}{x}\right)^{2k} \\
&= \frac{(2x)^n}{n!} (A)_n F\left(\frac{-nI}{2}, -\frac{(n-1)I}{2}; I - A - nI; \frac{1}{x^2}\right)
\end{aligned}$$

Gegenbauer matris polinomlarının başka bir gösterimi bulunur. Şimdi de

$$(1 - 2xt + t^2)^{-A} = \left[1 - \frac{t^2(x^2 - 1)}{(1 - xt)^2}\right]^{-A} (1 - xt)^{-2A}$$

eşitliğinin sağ tarafında sırasıyla (2.2), (2.6) ve (4.5) eşitliklerinin kullanılmasıyla, $C_n^A(x)$ ler için

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} C_n^A(x) t^n &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A)_k}{k!} \left(\frac{t^2(x^2 - 1)}{(1 - xt)^2}\right)^k (1 - xt)^{-2A} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A)_k}{k!} (t^2(x^2 - 1))^k (1 - xt)^{-(2A+2kI)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A)_k (2A + 2kI)_n}{k! n!} (t^2(x^2 - 1))^k (xt)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A)_k [(2A)_{2k}]^{-1} [(2A)_{2k}] (2A + 2kI)_n}{k! n!} (t^2(x^2 - 1))^k (xt)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{-2k} \left[\left(\frac{1}{2}(2A + I)\right)_k\right]^{-1} (2A)_{n+2k}}{k! n!} (t^2(x^2 - 1))^k (xt)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left\{ (2A)_n \frac{\left[\left(A + \frac{I}{2}\right)_k\right]^{-1}}{k! (n - 2k)! 2^{2k}} (x^2 - 1)^k x^{n-2k} \right\} t^n
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ki, burada t^n nin katsayılarının eşitlenmesiyle

$$C_n^A(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (2A)_n \frac{\left[\left(A + \frac{I}{2}\right)_k\right]^{-1}}{k! (n - 2k)! 2^{2k}} (x^2 - 1)^k x^{n-2k} \quad (4.8)$$

toplamsal gösterimi bulunmuş olur. Aşağıdaki eşitliğin sol tarafında $C_n^A(x)$ in (4.8)

deki değeri yerine konulur ve (2.6) gösterimi kullanılırsa

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} (2A)_n^{-1} C_n^A(x) t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xt)^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\left(A + \frac{I}{2} \right)_k \right]^{-1} \left(\frac{t^2(x^2 - 1)}{4} \right)^k \\ &= e^{xt} F \left(-; A + \frac{I}{2}; \frac{t^2(x^2 - 1)}{4} \right)\end{aligned}$$

Gegenbauer matris polinomları için matris doğurucu fonksiyonu bulunur (Sayyed vd. 2004).

4.3 Gegenbauer Matris Polinomları için Matris Diferensiyel Denklem ve Rekürans Bağlılıkları

(4.1) eşitliğinde ifadesi verilen $F(x, t)$ nin x e göre türevi alınır

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{t}{1 - 2xt + t^2} 2AF \quad (4.9)$$

olur. Aynı $F(x, t)$ nin t ye göre türevi alınır

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{x - t}{1 - 2xt + t^2} 2AF \quad (4.10)$$

olur. (4.9) ve (4.10) denklemleri birlikte düşünülürse F matris fonksiyonunun

$$(x - t) \frac{\partial F}{\partial x} - t \frac{\partial F}{\partial t} = \mathbf{0}$$

kısmi türevli matris diferensiyel denklemini sağladığı görülür. (4.1) den dolayı, yukarıdaki denklem açık olarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} x DC_n^A(x) t^n - \sum_{n=0}^{\infty} DC_n^A(x) t^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} n C_n^A(x) t^n = \mathbf{0}$$

şeklinde yazılabilir. Burada ikinci toplamda n yerine $(n - 1)$ yazılır ve $DC_0^A(x) = \mathbf{0}$ (sabitin türevi) olduğu dikkate alınır ve de t^n nin katsayılarının eşitlenirse

$$x DC_n^A(x) - DC_{n-1}^A(x) - n C_n^A(x) = \mathbf{0} \quad ; \quad n \geq 1 \quad (4.11)$$

türevli rekürans bağıntısı elde edilmiş olur. (4.9) ve (4.10) denklemleri, (4.1) eşitliği yardımıyla

$$\frac{1}{1 - 2xt + t^2} 2A(1 - 2xt + t^2)^{-A} = \sum_{n=0}^{\infty} DC_n^A(x) t^{n-1} \quad (4.12)$$

$$\frac{x - t}{1 - 2xt + t^2} 2A(1 - 2xt + t^2)^{-A} = \sum_{n=0}^{\infty} n C_n^A(x) t^{n-1} \quad (4.13)$$

olarak yazılabilirler. $1 - t^2 - 2t(x - t) = 1 - 2xt + t^2$ olduğu dikkate alınıp, (4.12) eşitliği $(1 - t^2)$ ile (4.13) de $(2t)$ ile çarpılıp, taraf tarafa çıkarılırsa

$$2A(1 - 2xt + t^2)^{-A} = (1 - t^2) \sum_{n=0}^{\infty} DC_n^A(x)t^{n-1} - 2t \sum_{n=0}^{\infty} nC_n^A(x)t^{n-1}$$

elde edilir. Bu eşitliğin sol tarafında (4.1) özelliği kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$2A \sum_{n=0}^{\infty} C_n^A(x)t^n = \sum_{n=1}^{\infty} DC_n^A(x)t^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} DC_n^A(x)t^{n+1} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} nC_n^A(x)t^n$$

bulunur. Bu eşitliğin sağ tarafındaki birinci toplamda n yerine $(n + 1)$, ikinci toplamda n yerine $(n - 1)$ alınmasıyla

$$2A \sum_{n=0}^{\infty} C_n^A(x)t^n = \sum_{n=0}^{\infty} DC_{n+1}^A(x)t^n - \sum_{n=1}^{\infty} DC_{n-1}^A(x)t^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} nC_n^A(x)t^n$$

ifadesi yazılabilir. Burada ilk iki toplamda ilk terimler ayrı yazılır ve $DC_0^A(x) = \mathbf{0}$ ile $2AC_0^A(x) = DC_1^A(x)$ olduğu dikkate alınır ve de t^n nin katsayılarının eşitlenirse

$$2(A + nI)C_n^A(x) = DC_{n+1}^A(x) - DC_{n-1}^A(x) \quad ; \quad n \geq 1 \quad (4.14)$$

rekürans bağıntısı bulunur. (4.11) ve (4.14) rekürans bağıntılarından dolayı

$$xDC_n^A(x) = DC_{n+1}^A(x) - (2A + nI)C_n^A(x) \quad (4.15)$$

ulaşılır. (4.15) te n yerine $(n - 1)$ alınır ve bağıntıda $DC_{n-1}^A(x)$ yerine (4.11) deki değeri yerine yazılırsa

$$(x^2 - 1)DC_n^A(x) = nxC_n^A(x) - (2A + (n - 1)I)C_{n-1}^A(x) \quad (4.16)$$

Gegenbauer matris polinomları için türev içeren bir rekürans bağıntısı bulunmuş olur. (4.11) eşitliği $(x^2 - 1)$ ile çarpılıp, (4.16) rekürans bağıntısındaki $(x^2 - 1)DC_n^A(x)$ ve $(x^2 - 1)DC_{n-1}^A(x)$ ifadeleri yerine yazılırsa

$$nC_n^A(x) = (2A + 2(n - 1)I)x C_{n-1}^A(x) - (2A + (n - 2)I)C_{n-2}^A(x) \quad ; \quad n \geq 2 \quad (4.17)$$

diğer bir rekürans bağıntısı elde edilmiş olur. (4.12) eşitliği

$$2A(1 - 2xt + t^2)^{-(A+I)} = \sum_{n=0}^{\infty} DC_{n+1}^A(x)t^n \quad (4.18)$$

şeklinde düzenlenebilir. Ayrıca (4.1) özelliğinin kullanılmasıyla

$$2A(1 - 2xt + t^2)^{-(A+I)} = \sum_{n=0}^{\infty} 2AC_n^{A+I}(x)t^n \quad (4.19)$$

olarak yazılabilir. (4.18) ve (4.19) eşitliklerinde t^n nin katsayılarının eşitlenmesiyle $DC_{n+1}^A = 2AC_n^{A+I}(x)$ olup, n yerine $(n-1)$ alınmasıyla

$$DC_n^A = 2AC_{n-1}^{A+I}(x) \quad (4.20)$$

elde edilir. $0 \leq r \leq n$ için (4.20) nin r defa uygulanmasıyla

$$D^r C_n^A = 2^r(A)_r C_{n-r}^{A+rI}(x)$$

türev içeren başka bir rekürans bağıntısı bulunur. Şimdi Gegenbauer matris polinomları için matris diferensiyel denklem bulunacaktır. (4.15) eşitliğinde n yerine $(n-1)$ alınıp, x e göre türevi alınırsa

$$xD^2C_{n-1}^A(x) = D^2C_n^A(x) - (2A + nI)DC_{n-1}^A(x) \quad (4.21)$$

elde edilir. Ayrıca (4.11) de x e göre türevi alınırsa

$$xD^2C_n^A(x) - D^2C_{n-1}^A(x) - (n-1)DC_{n-1}^A(x) = \mathbf{0} \quad (4.22)$$

bağıntısı bulunur. (4.21) özelliğinde $D^2C_{n-1}^A(x)$ yerine (4.22) denklemindeki ifadesi ve $DC_{n-1}^A(x)$ yerine de (4.11) bağıntısındaki ifadesi yazılırsa

$$(1 - x^2)D^2C_n^A(x) - (2A + I)xDC_n^A(x) + n(2A + nI)C_n^A(x) = \mathbf{0} \quad (4.23)$$

Gegenbauer matris polinomları için matris diferensiyel denklemi elde edilmiş olur (Sayyed vd. 2004).

4.4 Gegenbauer Matris Polinomlarının Ortogonalliği

Bu kısımda Gegenbauer matris polinomlarının ortogonallik özelliği ispatlanmıştır. A matrisi $\mathbb{C}^{r \times r}$ de pozitif kararlı bir matris olsun. (4.23) eşitliği $(1 - x^2)^{A-\frac{I}{2}}$ ile çarpılırsa

$$D \left[(1 - x^2)^{A+\frac{I}{2}} DC_n^A(x) \right] + n(1 - x^2)^{A-\frac{I}{2}} (2A + nI)C_n^A(x) = \mathbf{0} \quad (4.24)$$

denklemini elde edilir. Benzer şekilde $C_m^A(x)$ için (4.24) eşitliğinden dolayı

$$D \left[(1-x^2)^{A+\frac{I}{2}} DC_m^A(x) \right] + m(1-x^2)^{A-\frac{I}{2}}(2A+mI)C_m^A(x) = \mathbf{0} \quad (4.25)$$

denklemini de yazılabilir. (4.24) denklemini $C_m^A(x)$ ile (4.25) de $C_n^A(x)$ ile çarpılıp, taraf tarafa çıkarılırsa

$$\begin{aligned} & D \left[(1-x^2)^{A+\frac{I}{2}} DC_n^A(x) \right] C_m^A(x) - D \left[(1-x^2)^{A+\frac{I}{2}} DC_m^A(x) \right] C_n^A(x) \\ &= -n(1-x^2)^{A-\frac{I}{2}}(2A+nI)C_n^A(x)C_m^A(x) + m(1-x^2)^{A-\frac{I}{2}}(2A+mI)C_m^A(x)C_n^A(x) \end{aligned} \quad (4.26)$$

ifadesi bulunur. $C_n^A(x)$ ve $C_m^A(x)$ matris polinomların çarpımlarının değişmeli olduğuna dikkat edilirse

$$\begin{aligned} & D \left[(1-x^2)^{A+\frac{I}{2}} \{ C_m^A(x) DC_n^A(x) - DC_m^A(x) C_n^A(x) \} \right] \\ &= D \left[(1-x^2)^{A+\frac{I}{2}} DC_n^A(x) \right] C_m^A(x) - D \left[(1-x^2)^{A+\frac{I}{2}} DC_m^A(x) \right] C_n^A(x) \end{aligned}$$

olup, bu eşitlik yardımıyla (4.26) eşitliği

$$\begin{aligned} & (m-n)(2A+(n+m)I)(1-x^2)^{A-\frac{I}{2}}C_m^A(x)C_n^A(x) \\ &= D \left[(1-x^2)^{A+\frac{I}{2}} \{ C_m^A(x) DC_n^A(x) - DC_m^A(x) C_n^A(x) \} \right] \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca m ve n negatif olmayan tam sayılar ve A pozitif kararlı bir matris olduğundan $2A+(n+m)I \neq \mathbf{0}$ dır. Bu durumda her iki tarafın -1 den $+1$ e kadar integrali alınır

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{A-\frac{I}{2}} C_m^A(x) C_n^A(x) dx = \mathbf{0} \quad ; \quad m \neq n \quad (4.27)$$

dır (Sayyed vd. 2004). Bu durumda, A matrisi $\mathbb{C}^{r \times r}$ de bir pozitif kararlı matris olmak üzere Gegenbauer matris polinomları $(1-x^2)^{A-\frac{I}{2}}$ ağırlık fonksiyonuna göre $(-1, 1)$ aralığında ortogonal matris polinomlardır.

$m \neq 0$ için (4.27) özelliğinden dolayı

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{A-\frac{I}{2}} C_m^A(x) dx = \mathbf{0} \quad ; \quad m \neq 0$$

eşitliği yazılabilir. (4.17) bağıntısı $(1-x^2)^{A-\frac{I}{2}}C_n^A(x)$ ile çarpılıp, $(-1, 1)$ aralığında integrali alınır ve (4.27) özelliği kullanılırsa

$$n \int_{-1}^1 (1-x^2)^{A-\frac{I}{2}} [C_n^A(x)]^2 dx = 2(A+(n-1)I) \int_{-1}^1 x(1-x^2)^{A-\frac{I}{2}} C_n^A(x) C_{n-1}^A(x) dx \quad (4.28)$$

gösterimi elde edilir. Yine (4.17) eşitliğinde $(n-1)$ yerine n yazılır ve $(1-x^2)^{A-\frac{I}{2}}C_{n-1}^A(x)$ ile çarpılıp, $(-1, 1)$ aralığında integrali alınır ve (4.27) özelliği kullanılırsa

$$2(A+nI) \int_{-1}^1 x(1-x^2)^{A-\frac{I}{2}} C_{n-1}^A(x) C_n^A(x) dx = (2A+(n-1)I) \int_{-1}^1 (1-x^2)^{A-\frac{I}{2}} [C_{n-1}^A(x)]^2 dx \quad (4.29)$$

eşitliği bulunur. Böylece (4.28) ve (4.29) gösterimlerinin birlikte düşünülmesiyle

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 (1-x^2)^{A-\frac{I}{2}} [C_n^A(x)]^2 dx \\ &= \frac{1}{n} (A+nI)^{-1} (A+(n-1)I) (2A+(n-1)I) \int_{-1}^1 (1-x^2)^{A-\frac{I}{2}} [C_{n-1}^A(x)]^2 dx \end{aligned} \quad (4.30)$$

eşitliği yazılabilir. n değeri için (4.30) eşitliğinde sırasıyla $(n-1)$, $(n-2)$, ..., 1 yazılırsa

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{A-\frac{I}{2}} [C_{n-1}^A(x)]^2 dx &= \frac{1}{n-1} (A+(n-1)I)^{-1} (A+(n-2)I) \\ &\quad \times (2A+(n-2)I) \int_{-1}^1 (1-x^2)^{A-\frac{I}{2}} [C_{n-2}^A(x)]^2 dx \\ &\quad \dots \dots \dots \\ \int_{-1}^1 (1-x^2)^{A-\frac{I}{2}} [C_1^A(x)]^2 dx &= \frac{1}{1} (A+I)^{-1} A \cdot 2A \int_{-1}^1 (1-x^2)^{A-\frac{I}{2}} [C_0^A(x)]^2 dx \end{aligned}$$

gösterimleri bulunur ki burada gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{A-\frac{I}{2}} [C_n^A(x)]^2 dx = \frac{1}{n!} (A+nI)^{-1} A (2A)_n \int_{-1}^1 (1-x^2)^{A-\frac{I}{2}} [C_0^A(x)]^2 dx$$

eşitliği elde edilir. A matrisi $\mathbb{C}^{r \times r}$ de pozitif kararlı bir matris ve $C_0^A(x) = I$ olmak üzere Lemma 2.19 yardımıyla

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{A-\frac{I}{2}} dx = \sqrt{\pi} \Gamma\left(A + \frac{I}{2}\right) \Gamma^{-1}(A+I)$$

sonucuna ulaşılır. Bu sonuçtan dolayı

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{A-\frac{I}{2}} [C_n^A(x)]^2 dx = \frac{1}{n!} (A+nI)^{-1} A(2A)_n \sqrt{\pi} \Gamma\left(A + \frac{I}{2}\right) \Gamma^{-1}(A+I)$$

özellği elde edilir. δ_{mn} Kronecker deltası olmak üzere

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{A-\frac{I}{2}} C_m^A(x) C_n^A(x) dx = \frac{1}{n!} (A+nI)^{-1} A(2A)_n \sqrt{\pi} \Gamma\left(A + \frac{I}{2}\right) \Gamma^{-1}(A+I) \delta_{mn}$$

eşitliği ile verilen Gegenbauer matris polinomlarının ortogonalite özelliği bulunmuş olur (Sayyed vd. 2004).

5. JACOBI MATRİS POLİNOMLARI

5.1 Klasik Jacobi Polinomları

$-1 \leq x \leq 1$, $a, b > -1$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere ikinci basamaktan

$$(1-x^2)y'' + (b-a-(a+b+2)x)y' + n(n+a+b+1)y = 0$$

diferensiyel denkleminin çözümlerinden biri

$$P_n^{(a,b)}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k} (1+b)_n (1+a+b)_{n+k}}{k! (n-k)! (1+b)_k (1+a+b)_n} \left(\frac{x+1}{2} \right)^k \quad ; \quad n = 0, 1, \dots$$

ile gösterilen $P_n^{(a,b)}(x)$ *Jacobi polinomları*dır. Jacobi polinomları, $I = [-1, 1]$ aralığında $\omega(x) = (1-x)^a(1+x)^b$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olup,

$$\int_{-1}^1 (1-x)^a (1+x)^b P_n^{(a,b)}(x) P_m^{(a,b)}(x) dx = 0 \quad ; \quad n \neq m$$

ortogonalite özelliğini gerçekler. Öte yandan, bu polinomların normu $\|P_n^{(a,b)}\|$ olup

$$\begin{aligned} \|P_n^{(a,b)}\|^2 &= \int_{-1}^1 (1-x)^a (1+x)^b [P_n^{(a,b)}(x)]^2 dx \\ &= \frac{2^{a+b+1}}{2n+a+b+1} \frac{\Gamma(a+n+1) \Gamma(b+n+1)}{n! \Gamma(a+b+n+1)} \end{aligned}$$

dir. Jacobi polinomları

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(a,b)}(x) t^n = \frac{2^{a+b}}{\sqrt{1-2xt+t^2}} \left[1-t+\sqrt{1-2xt+t^2} \right]^{-a} \left[1+t+\sqrt{1-2xt+t^2} \right]^{-b}$$

doğurucu fonksiyon bağıntısına, $D = \frac{d}{dx}$ olmak üzere

$$P_n^{(a,b)}(x) = \frac{(-1)^n}{n! 2^n} (1-x)^{-a} (1+x)^{-b} D^n [(1-x)^{a+n} (1+x)^{b+n}]$$

Rodrigues formülüne ve

$$\begin{aligned} &2n(n+a+b)(2n+a+b-2)P_n^{(a,b)}(x) - [(2n+a+b)(2n+a+b-2)x + a^2 - b^2] \\ &\times (2n+a+b-1)P_{n-1}^{(a,b)}(x) + 2(n+a-1)(n+b-1)(2n+a+b)P_{n-2}^{(a,b)}(x) = 0 \end{aligned}$$

şeklinde üç terimli rekürans bağıntısına sahiptir (Szegő 1939).

5.2 Jacobi Matris Polinomlarının Hipergeometrik Matris Fonksiyon Gösterimi

Bu kısımda Jacobi matris polinomları tanıtıldıktan sonra bu polinomların hipergeometrik matris fonksiyon gösterimi elde edilmiştir.

Tanım 5.1 $\mathbb{C}^{r \times r}$ deki A ve B matrisleri sırasıyla

$$\forall z \in \sigma(A) \text{ için } \operatorname{Re}(z) > -1 \text{ ve } \forall z \in \sigma(B) \text{ için } \operatorname{Re}(z) > -1 \quad (5.1)$$

spektral koşullarını sağlasın. $n \geq 0$ doğal sayısı için n . dereceden $P_n^{(A,B)}(x)$ Jacobi matris polinomu

$$P_n^{(A,B)}(x) = \sum_{k=0}^n \left[\binom{n}{k} \frac{(-1)^{n+k}}{2^k n!} \Gamma(A+B+(n+k+1)I) \Gamma^{-1}(A+B+(n+1)I) \right. \\ \left. \times \Gamma(B+(n+1)I) \Gamma^{-1}(B+(k+1)I) (1+x)^k \right] \quad (5.2)$$

şeklinde tanımlanır (Defez vd. 2004).

Lemma 5.1 $\mathbb{C}^{r \times r}$ deki bir P matrisi $\forall z \in \sigma(P)$ için $\operatorname{Re}(z) > -1$ koşulunu sağlıyorsa, $n \geq 0$ doğal sayısı için $\forall w \in \sigma(P+nI)$ olmak üzere $\operatorname{Re}(w) > n-1$ dir (Defez vd. 2004).

İspat. $\sigma(P)$, λ ya göre r -yinci dereceden bir denklem olan $|P - \lambda I| = 0$ şeklindeki P matrisinin karakteristik denkleminin λ köklerinden oluşan bir kümedir ve bu kökler için $\operatorname{Re}(\lambda) > -1$ dir. $P + nI$ matrisinin özdeğerleri, $|(P + nI) - \mu I| = 0$ denkleminin μ kökleridir. Diğer taraftan $|(P + nI) - \mu I| = |P - (\mu - n)I| = 0$ olup, buradan $\lambda = \mu - n$ elde edilir. n bir doğal sayı ve $\operatorname{Re}(\lambda) > -1$ olduğundan $\operatorname{Re}(\lambda) = \operatorname{Re}(\mu - n) > -1$ olup, buradan $\operatorname{Re}(\mu) > n-1$ dir. O halde $\sigma(P+nI)$, $P+nI$ matrisinin μ özdeğerlerinden oluşan küme olmak üzere $\forall w \in \sigma(P+nI)$ için $\operatorname{Re}(w) > n-1$ dir. ■

Sonuç 5.1 $\mathbb{C}^{r \times r}$ deki bir P matrisi $\forall z \in \sigma(P)$ için $\operatorname{Re}(z) > -1$ koşulunu sağlıyorsa, $n > 0$ tamsayısı için $P + nI$ matrisi pozitif kararlıdır.

İspat. Lemma 5.1 de $n > 0$ olmak üzere $\forall w \in \sigma(P+I)$ için $\operatorname{Re}(w) > n-1 \geq 0$ olduğundan ve pozitif kararlılık tanımından $P + nI$ matrisi pozitif kararlıdır. ■

Sonuç 5.2 (2.9) ve Sonuç 5.1 den dolayı, pozitif kararlı $B + I$ matrisi için

$$\Gamma^{-1}(B + (k+1)I) = (B + I)_k^{-1} \Gamma^{-1}(B + I) \quad , \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.3)$$

eşitliği yazılabilir. (5.3) eşitliğindeki özelliğin (5.2) de kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} P_n^{(A,B)}(x) &= \sum_{k=0}^n \left[\frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{(-1)^{n+k}}{n!} (A + B + (n+k)I) (A + B + (n+k-1)I) \right. \\ &\quad \times \dots (A + B + (n+1)I) \Gamma(A + B + (n+1)I) \Gamma^{-1}(A + B + (n+1)I) \\ &\quad \times \Gamma(B + (n+1)I) (B + I)_k^{-1} \Gamma^{-1}(B + I) \left. \frac{(1+x)^k}{2^k} \right] \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=0}^n \left[\frac{(n-k+1) \dots (n-1) n (-1)^k}{k!} (A + B + (n+1)I)_k \right. \\ &\quad \times (B + I)_k^{-1} \Gamma(B + (n+1)I) \Gamma^{-1}(B + I) \left. \left(\frac{1+x}{2} \right)^k \right] \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} F \left(A + B + (n+1)I, -nI; B + I; \frac{1+x}{2} \right) \\ &\quad \times \Gamma^{-1}(B + I) \Gamma(B + (n+1)I) \end{aligned}$$

olduğu görülür ve böylece Jacobi matris polinomlarının

$$P_n^{(A,B)}(x) = \frac{(-1)^n}{n!} F \left(A + B + (n+1)I, -nI; B + I; \frac{1+x}{2} \right) (B + I)_n \quad (5.4)$$

hipergeometrik matris fonksiyonu yardımıyla gösterimi elde edilmiş olur.

5.3 Jacobi Matris Polinomları için Matris Diferensiyel Denklem

Teorem 5.1 $\forall n \geq 0$ doğal sayısı için $P_n^{(A,B)}(x)$ Jacobi matris polinomu

$$\begin{aligned} (1-x^2)Y''(x) + 2Y'(x)B - (A + B + x(A + B + 2I))Y'(x) \\ + n(A + B + (n+1)I)Y(x) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.5)$$

matris diferensiyel denklemini sağlar (Defez vd. 2004).

İspat. Sonuç 2.3 den bilinmektedir ki; $A^*, B^*, C^* \in \mathbb{C}^{r \times r}$ matrisleri için

$$B^*C^* = C^*B^*$$

ve

$\forall n \geq 0$ tamsayısı için $C^* + nI$ matrisleri regüler

koşulları sağlanmak üzere $0 < |z| < 1$ için

$$F(A^*, B^*; C^*; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A^*)_n (B^*)_n (C^*)_n^{-1}}{n!} z^n \quad (5.6)$$

hipergeometrik matris fonksiyonu

$$z(1-z)W''(z) - zA^*W'(z) + W'(z)(C^* - z(B^* + I)) - A^*W(z)B^* = \mathbf{0} \quad (5.7)$$

matris diferensiyel denkleminin bir çözümüdür. (5.1) koşulu sağlanmak üzere A^*, B^* ve C^* matrislerini

$$A^* = A + B + (n+1)I, \quad B^* = -nI, \quad C^* = B + I$$

olarak seçelim. (5.7) denkleminde $x = 2z - 1$ dönüşümü yapılırsa $W'(z) = 2W'(x)$

ve $W''(z) = 4W''(x)$ olup, (5.7) denkleminde karşılık gelen

$$\begin{aligned} & \frac{1+x}{2} \left(1 - \frac{1+x}{2}\right) 4W''(x) - \left(\frac{1+x}{2}\right) (A + B + (n+1)I) 2W'(x) \\ & + 2W'(x) \left(B + I - \left(\frac{1+x}{2}\right) (-nI + I)\right) - (A + B + (n+1)I) W(x) (-nI) \\ & = (1-x^2) W''(x) - (A+B) W'(x) - x(A+B+2I) W'(x) \\ & \quad + 2W'(x) B + n(A+B+(n+1)I) W(x) \\ & = (1-x^2) W''(x) + 2W'(x) B - [A+B+x(A+B+2I)] W'(x) \\ & \quad + n(A+B+(n+1)I) W(x) \\ & = \mathbf{0} \end{aligned}$$

denklemi elde edilir. (5.6) dan dolayı bu denklemin çözümlerinden biri

$$F\left(A + B + (n+1)I, -nI; B + I; \frac{1+x}{2}\right)$$

dir. Sonuç 5.2 den dolayı da

$$\frac{(-1)^n}{n!} F\left(A + B + (n+1)I, -nI; B + I; \frac{1+x}{2}\right) (B + I)_n = P_n^{(A,B)}(x)$$

eşitliği yazılabilir. $\frac{(-1)^n}{n!} I$ ve $(B + I)_n$ değişkenden bağımsız belirli regüler matrisler olduğundan $P_n^{(A,B)}(x)$ de çözüm olacaktır. Dolayısıyla $P_n^{(A,B)}(x)$ Jacobi matris polinomu $-1 < x < 1$ için (5.5) denklemini sağlar. Bu nedenle (5.5) denkleminde Jacobi matris diferensiyel denklemi denir. ■

Sonuç 5.3 $n \geq 0$ tamsayısı için $-1 < x < 1$ aralığında $P_n^{(A,B)}(x)$ Jacobi matris polinomları

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[(1+x)(1-x)^{A+B+I} Y'(x) \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^B \right] \\ + n(A+B+(n+1)I)(1-x)^{A+B} Y(x) \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^B = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.8)$$

denkleminin bir çözümüdür (Defez vd. 2004).

İspat. (5.5) denkleminin her iki yanını soldan $(1-x)^{A+B}$ ve sağdan $\left(\frac{1+x}{1-x} \right)^B$ ile çarpıldıktan sonra gerekli düzenlemeler yapıldığında (5.8) denklemi elde edilir. Dolayısıyla (5.5) denkleminin bir çözümü olan $P_n^{(A,B)}(x)$ Jacobi matris polinomu (5.8) denkleminin de bir çözümüdür. ■

5.4 Jacobi Matris Polinomları için Rodrigues Formülü

$P_n^{(A,B)}(x)$ Jacobi matris polinomları için Rodrigues formülünü elde etmek için (5.1) koşuluna ek olarak

$$AB = BA \quad (5.9)$$

koşulu da sağlanmalıdır. $A, B \in \mathbb{C}^{r \times r}$ matrisleri için (5.1) ve (5.9) koşulları sağlanmak üzere, (5.4) ilk iki parametre bileşenine göre simetrik olduğundan dolayı, Jacobi matris polinomlarının ifadesindeki hipergeometrik matris fonksiyon

$$\begin{aligned} F \left(A+B+(n+1)I, -nI; B+I; \frac{1+x}{2} \right) \\ = F \left(-nI, A+B+(n+1)I; B+I; \frac{1+x}{2} \right) \end{aligned}$$

özellikliğini sağlamaktadır. Bu eşitliğin sağ tarafında

$$D = A+B+(n+1)I \quad \text{ve} \quad C = B+I$$

alalım. D pozitif kararlı ve $DC = CD$ olup, Teorem 2.6 dan dolayı

$$\begin{aligned} F \left(-nI, A+B+(n+1)I; B+I; \frac{1+x}{2} \right) \\ = \frac{(1-x)^n}{2^n} F \left(-nI, -(A+nI); B+I; \frac{x+1}{x-1} \right) \end{aligned} \quad (5.10)$$

yazılabilir. Ayrıca (3.7) ve

$$\begin{aligned} (- (A + nI))_k &= \{ - (A + nI) \} \{ - (A + nI) + I \} \dots \{ - (A + nI) + (k - 1) I \} \\ &= (-1)^k (A + nI) (A + (n - 1) I) \dots (A + (n + k - 1) I) \end{aligned}$$

eşitlikleri dikkate alınarak, (5.4) ve (5.10) dan

$$\begin{aligned} P_n^{(A,B)}(x) &= \frac{(-1)^n (1-x)^n}{n! 2^n} F \left(-nI, - (A + nI); B + I; \frac{x+1}{x-1} \right) (B + I)_n \\ &= \frac{(-1)^n (1-x)^n}{2^n n!} \sum_{k=0}^n \frac{(-nI)_k (- (A + nI))_k (B + I)_k^{-1}}{k!} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^k (B + I)_n \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (- (A + nI))_k (B + I)_k^{-1} (B + I)_n (1+x)^k (1-x)^{n-k} \end{aligned} \quad (5.11)$$

olarak bulunur. Diğer taraftan $D = \frac{d}{dx}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} D^{(k)} \left[(1-x)^{A+nI} \right] &= (-1)^k (A + nI) \dots (A + (n - k + 1) I) (1-x)^{A+(n-k)I} \\ &= (- (A + nI))_k (1-x)^A (1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} D^{(n-k)} \left[(1+x)^{B+nI} \right] &= (B + nI) \dots (B + (k + 1) I) (B + I)_k (B + I)_k^{-1} (1+x)^{B+kI} \\ &= (B + I)_k^{-1} (B + I)_n (1+x)^B (1+x)^k \end{aligned}$$

olup, bunların (5.11) ifadesinde yerlerine konulmasıyla

$$\begin{aligned} P_n^{(A,B)}(x) &= \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-A} (1+x)^{-B} \\ &\quad \times \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^{(k)} \left[(1-x)^{A+nI} \right] D^{(n-k)} \left[(1+x)^{B+nI} \right] \end{aligned}$$

bulunur. Çarpımın türevi için Leibniz kuralından dolayı da, $P_n^{(A,B)}(x)$ ler için

$$P_n^{(A,B)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-A} (1+x)^{-B} D^{(n)} \left[(1-x)^{A+nI} (1+x)^{B+nI} \right]$$

Rodrigues gösterimi elde edilmiş olur. Bu sonucu aşağıdaki teoremle özetleyelim:

Teorem 5.2 $A, B \in \mathbb{C}^{r \times r}$ matrisleri için (5.1) ve (5.9) koşulları sağlansın.

$n = 0, 1, \dots$ için (5.2) ile verilen $P_n^{(A,B)}(x)$ Jacobi matris polinomları

$$P_n^{(A,B)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-A} (1+x)^{-B} D^{(n)} \left[(1-x)^{A+nI} (1+x)^{B+nI} \right] \quad (5.12)$$

Rodrigues formülüne sahiptir (Defez vd. 2004).

Sonuç 5.4 $C \in \mathbb{C}^{r \times r}$ matrisi $\forall z \in \sigma(C)$ için $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$ koşulunu sağlasın. Eğer (5.12) gösteriminde $A = C - I$ ve $B = -C$ alınır ve (3.13) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} P_n^{(C-I, -C)}(x) &= \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-C+I} (1+x)^C D^{(n)} \left[(1-x)^{C-I+nI} (1+x)^{-C+nI} \right] \\ &= \frac{(C)_n}{n!} T_n(x, C) \end{aligned}$$

Jacobi ve Chebyshev matris polinomları arasındaki bir bağıntı elde edilmiş olur (Defez vd. 2002, 2004).

5.5 Jacobi Matris Polinomlarının Ortogonalliği

Bu kısımda, Jacobi matris polinomlarının ortogonallik özelliği verilmektedir. Bu özelliği göstermek için, ilk önce gerekli olan bir lemma verelim.

Lemma 5.2 $A, B \in \mathbb{C}^{r \times r}$ matrisleri için (5.1) ve (5.9) koşulları sağlansın. $Q(x)$ keyfi bir matris polinom olmak üzere

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x^2) (1-x)^A (1+x)^B Q(x) = \mathbf{0}$$

ve

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} (1-x^2) (1-x)^A (1+x)^B Q(x) = \mathbf{0}$$

dır (Defez vd. 2004).

İspat. $(1-x^2) (1-x)^A (1+x)^B Q(x) = (1-x)^{A+I} (1+x)^{B+I} Q(x)$ olup, ilk olarak $x \rightarrow 1^-$ durumunu dikkate alalım. $x = 1$ in sınırlı açık bir komşuluğu V olsun. $Q(x)$ süreklidir ve bu nedenle V nin kapanışında sınırlıdır. Böylece

$$\|Q(x)\| \leq K_1 \quad ; \quad \forall x \in V \quad \text{ve} \quad K_1 \in \mathbb{R}^+$$

dir. $A + I$ matrisinin Schur ayrışımı $Q^H (A + I) Q = D + N$ olmak üzere Lemma 2.10 ve Lemma 2.11 den dolayı,

$$\left\| (1-x)^{A+I} \right\| \leq (1-x)^{\alpha(A+I)} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(\|N\| \sqrt{r} \ln(1-x))^k}{k!} \quad (5.13)$$

dir. A matrisi için (5.1) ve (5.9) koşulları sağlandığından dolayı $A + I$ matrisi

$$\forall z \in \sigma(A + I) \quad \text{için} \quad \operatorname{Re}(z) > 0$$

koşulunu sağlar, yani $\alpha(A+I) > 0$ dir. $0 \leq j \leq r-1$ için

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^a |\ln t|^j = 0 \quad , \quad a > 0$$

olduğundan dolayı

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^{\alpha(A+I)} |\ln(1-x)|^j = 0 \quad , \quad j = 0, 1, \dots, r-1$$

yazılabilir. Diğer yandan (5.13) den

$$0 \leq \left\| (1-x)^{A+I} \right\| \leq (1-x)^{\alpha(A+I)} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(\|N\| \sqrt{r} \ln(1-x))^k}{k!}$$

ifadesindeki son terim $x \rightarrow 1^-$ için 0 a yaklaştığından eşitsizlik üstten sınırlıdır.

O halde

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^{A+I} = \mathbf{0}$$

ve

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1+x)^{B+I} = 2^{B+I}$$

olup, $\left\| (1+x)^{B+I} \right\|$, V de sınırlıdır. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\| (1-x)^{A+I} (1+x)^{B+I} Q(x) \right\| \\ &\leq \left\| (1-x)^{A+I} \right\| \left\| (1+x)^{B+I} \right\| \|Q(x)\| \\ &\leq K_1 \left\| (1-x)^{A+I} \right\| \left\| (1+x)^{B+I} \right\| \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x^2) (1-x)^A (1+x)^B Q(x) = \mathbf{0}$$

elde edilir. Tamamen yukarıdakine benzer işlemlerin tekrarlanmasıyla

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} (1-x^2) (1-x)^A (1+x)^B Q(x) = \mathbf{0}$$

olduğu da gösterilebilir. ■

(5.8) denklemi, $P_n^{(A,B)}(x)$ in bu denklemin bir çözümü olmasından dolayı

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) (1-x)^A (1+x)^B \frac{d}{dx} P_n^{(A,B)}(x) \right] \\ &+ n(A+B+(n+1)I) (1-x)^A (1+x)^B P_n^{(A,B)}(x) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.14)$$

şeklinde yazılabilir. (5.14) denkleminin her iki yanı sağdan $P_m^{(A,B)}(x)$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left[(1-x^2)(1-x)^A(1+x)^B \frac{d}{dx} P_n^{(A,B)}(x) \right] P_m^{(A,B)}(x) \\ & + n(A+B+(n+1)I)(1-x)^A(1+x)^B P_n^{(A,B)}(x) P_m^{(A,B)}(x) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.15)$$

denklemini elde edilir. (5.15) de m ve n nin rolleri değiştirilerek

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left[(1-x^2)(1-x)^A(1+x)^B \frac{d}{dx} P_m^{(A,B)}(x) \right] P_n^{(A,B)}(x) \\ & + m(A+B+(m+1)I)(1-x)^A(1+x)^B P_m^{(A,B)}(x) P_n^{(A,B)}(x) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.16)$$

yazılabilir. $-1 < x < 1$ olmak üzere Jacobi matris polinomlarının çarpma işlemine göre değişmeli olduğu gözönünde bulundurularak, (5.15) ve (5.16) denklemleri taraf tarafa çıkarılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left[(1-x^2)(1-x)^A(1+x)^B \frac{d}{dx} P_n^{(A,B)}(x) \right] P_m^{(A,B)}(x) \\ & - \frac{d}{dx} \left[(1-x^2)(1-x)^A(1+x)^B \frac{d}{dx} P_m^{(A,B)}(x) \right] P_n^{(A,B)}(x) \\ & + (n-m)(A+B+(m+n+1)I)(1-x)^A(1+x)^B P_n^{(A,B)}(x) P_m^{(A,B)}(x) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.17)$$

eşitliği elde edilir. (5.17) de gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{d}{dx} \left[(1-x^2)(1-x)^A(1+x)^B \right. \right. \\ & \left. \left. P_m^{(A,B)}(x) \frac{d}{dx} P_n^{(A,B)}(x) - \left(\frac{d}{dx} P_m^{(A,B)}(x) \right) P_n^{(A,B)}(x) \right] \right. \\ & \left. + \{(n-m)(A+B+(m+n+1)I) \right. \\ & \left. (1-x)^A(1+x)^B P_n^{(A,B)}(x) P_m^{(A,B)}(x)\} = \mathbf{0} \right. \end{aligned} \quad (5.18)$$

bulunur. Burada

$$Q(x, A, B) = P_m^{(A,B)}(x) \frac{d}{dx} P_n^{(A,B)}(x) - \left(\frac{d}{dx} P_m^{(A,B)}(x) \right) P_n^{(A,B)}(x)$$

ile gösterilmek üzere (5.18) eşitliği, $-1 \leq x \leq 1$ aralığında integre edilirse

$$\begin{aligned}
& (m-n)(A+B+(m+n+1)I) \int_{-1}^1 (1-x)^A (1+x)^B P_n^{(A,B)}(x) P_m^{(A,B)}(x) dx \\
&= \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) (1-x)^A (1+x)^B Q(x, A, B) \right] dx \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x^2) (1-x)^A (1+x)^B Q(x, A, B) \\
&\quad - \lim_{x \rightarrow -1^+} (1-x^2) (1-x)^A (1+x)^B Q(x, A, B)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $A+B+(m+n+1)I$ matrisinin regüler bir matris olduğu dikkate alınarak, Lemma 5.2 kullanılırsa

$$\int_{-1}^1 (1-x)^A (1+x)^B P_n^{(A,B)}(x) P_m^{(A,B)}(x) dx = \mathbf{0} \quad , \quad n \neq m$$

bulunur. Jacobi matris polinomlarının ortogonallığının ispatının tamamlanması için

$$\int_{-1}^1 (1-x)^A (1+x)^B \left[P_n^{(A,B)}(x) \right]^2 dx \quad ; \quad n = 0, 1, \dots$$

matrisinin regüler olduğunu göstermek gerekir. Bunun için Teorem 5.2 den yararlanalım ve

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 (1-x)^A (1+x)^B \left[P_n^{(A,B)}(x) \right]^2 dx \\
&= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^1 P_n^{(A,B)}(x) D^{(n)} \left[(1-x)^{A+nI} (1+x)^{B+nI} \right] dx \quad (5.19)
\end{aligned}$$

yazalım. $n \geq 1$ ve $1 \leq k \leq n$ için Lemma 5.2 den dolayı

$$\left. \begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 1^-} D^{(n-1)} \left[(1-x)^{A+nI} (1+x)^{B+nI} \right] P_n^{(A,B)}(x) = \mathbf{0} \\
& \lim_{x \rightarrow -1^+} D^{(n-1)} \left[(1-x)^{A+nI} (1+x)^{B+nI} \right] P_n^{(A,B)}(x) = \mathbf{0} \\
& \lim_{x \rightarrow 1^-} D^{(n-2)} \left[(1-x)^{A+nI} (1+x)^{B+nI} \right] P_n^{(A,B)}(x) = \mathbf{0} \\
& \lim_{x \rightarrow -1^+} D^{(n-2)} \left[(1-x)^{A+nI} (1+x)^{B+nI} \right] P_n^{(A,B)}(x) = \mathbf{0} \\
& \dots\dots\dots \\
& \lim_{x \rightarrow 1^-} D^{(n-k)} \left[(1-x)^{A+nI} (1+x)^{B+nI} \right] P_n^{(A,B)}(x) = \mathbf{0} \\
& \lim_{x \rightarrow -1^+} D^{(n-k)} \left[(1-x)^{A+nI} (1+x)^{B+nI} \right] P_n^{(A,B)}(x) = \mathbf{0}
\end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

dır. (5.19) eşitliğinin sağ tarafına bir kez kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^1 P_n^{(A,B)}(x) D^{(n)} \left[(1-x)^{A+nI} (1+x)^{B+nI} \right] dx \\
&= -\frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} P_n^{(A,B)}(x) D^{(n-1)} \left[(1-x)^{A+nI} (1+x)^{B+nI} \right] dx \\
&+ \frac{(-1)^n}{2^n n!} D^{(n-1)} \left[(1-x)^{A+nI} (1+x)^{B+nI} \right] P_n^{(A,B)}(x) \Big|_{-1}^1
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada (5.20) özelliklerinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
& \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^1 P_n^{(A,B)}(x) D^{(n)} \left[(1-x)^{A+nI} (1+x)^{B+nI} \right] dx \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!} \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} P_n^{(A,B)}(x) D^{(n-1)} \left[(1-x)^{A+nI} (1+x)^{B+nI} \right] dx
\end{aligned}$$

olarak bulunur. (5.20) dikkate alınarak kısmi integrasyon işlemi $(n-1)$ kez daha uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 (1-x)^A (1+x)^B \left[P_n^{(A,B)}(x) \right]^2 dx \\
&= \frac{(-1)^{n+n}}{2^n n!} \int_{-1}^1 \frac{d^n}{dx^n} P_n^{(A,B)}(x) \left[(1-x)^{A+nI} (1+x)^{B+nI} \right] dx \quad (5.21)
\end{aligned}$$

elde edilir. (5.2) den dolayı

$$\frac{d^n}{dx^n} P_n^{(A,B)}(x) = \frac{1}{2^n} \Gamma(A+B+(2n+1)I) \Gamma^{-1}(A+B+(n+1)I)$$

olup, bu değer (5.21) integral gösteriminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 (1-x)^A (1+x)^B \left[P_n^{(A,B)}(x) \right]^2 dx \\
&= \frac{1}{2^{2n} n!} \Gamma(A+B+(2n+1)I) \Gamma^{-1}(A+B+(n+1)I) \\
&\quad \times \int_{-1}^1 (1-x)^{A+nI} (1+x)^{B+nI} dx \quad (5.22)
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. (3.4) özelliğinden dolayı

$$\int_{-1}^1 (1+x)^{B+nI} (1-x)^{A+nI} dx = 2^{B+(n+1)I} \mathcal{B}(B+(n+1)I, A+(n+1)I) 2^{A+nI}$$

ve $AB = BA$ için Lemma 2.19 dan dolayı

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(B+(n+1)I, A+(n+1)I) &= \Gamma(B+(n+1)I) \Gamma(A+(n+1)I) \\ &\quad \times \Gamma^{-1}(A+B+2(n+1)I) \end{aligned}$$

olup, bunların (5.22) de yerlerine konulmasıyla,

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 (1-x)^A (1+x)^B \left[P_n^{(A,B)}(x) \right]^2 dx \\ &= \frac{2^{A+B+I}}{n!} \Gamma(A+B+(2n+1)I) \Gamma^{-1}(A+B+(n+1)I) \\ &\quad \times \Gamma(B+(n+1)I) \Gamma(A+(n+1)I) \Gamma^{-1}(A+B+2(n+1)I) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitliğin ikinci yanındaki matris regüler olduğundan, onun eşiti olan birinci yandaki

$$\int_{-1}^1 (1-x)^A (1+x)^B \left[P_n^{(A,B)}(x) \right]^2 dx$$

matrisinin de regüler olduğu gösterilmiştir. Bunların sonucu olarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 5.3 $A, B \in \mathbb{C}^{r \times r}$ matrisleri için (5.1) ve (5.9) koşulları sağlansın. Negatif olmayan n ve m tamsayıları için

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 (1-x)^A (1+x)^B P_n^{(A,B)}(x) P_m^{(A,B)}(x) dx \\ &= \begin{cases} \mathbf{0} & , \quad n \neq m \\ \frac{2^{A+B+I}}{n!} \Gamma(A+B+(2n+1)I) \Gamma^{-1}(A+B+(n+1)I) \\ \quad \times \Gamma(B+(n+1)I) \Gamma(A+(n+1)I) \Gamma^{-1}(A+B+2(n+1)I) & , \quad n = m \end{cases} \end{aligned}$$

olduğundan $\left\{ P_n^{(A,B)}(x) \right\}_{n=0}^{\infty}$ Jacobi matris polinom ailesi $[-1, 1]$ aralığında

$W(x, A, B) = (1-x)^A (1+x)^B$ matris ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldır (Defez vd. 2004).

Uyarı 5.1 *Jacobi matris polinomlarının ortogonalliği gösterilirken, $AB = BA$ özelliği gereklidir. Bu durumu açıklamak için*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrislerini ele alalım. Bu matrislerin özdeğerleri (5.1) koşullarını sağlar, ancak $AB \neq BA$ dir. (5.2) eşitliğinden dolayı

$$\begin{aligned} P_0^{(A,B)}(x) &= I \\ P_1^{(A,B)}(x) &= \frac{1}{2}(A + B + 2I)x + \frac{1}{2}(A - B) \end{aligned}$$

olup,

$$\int_{-1}^1 (1-x)^A (1+x)^B P_0^{(A,B)}(x) P_1^{(A,B)}(x) dx \neq 0$$

elde edilir, yani ortogonallik sağlanmaz. Gerçekten

$$\begin{aligned} (1-x)^A &= \begin{bmatrix} 1-x & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1+x)^B = \begin{bmatrix} 1 & \log(1+x) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ P_1^{(A,B)}(x) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3x+1 & x-1 \\ 0 & 2x \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olduklarından

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 (1-x)^A (1+x)^B P_0^{(A,B)}(x) P_1^{(A,B)}(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 1-x & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \log(1+x) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3x+1 & x-1 \\ 0 & 2x \end{bmatrix} dx \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{9}(5 - 6 \log(2)) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

5.6 Jacobi Matris Polinomları için Rekürans Bağıntısı

n . dereceden herhangi bir $Q(x)$ matris polinomu

$$Q(x) = \sum_{k=0}^n \Lambda_k P_k^{(A,B)}(x) \quad (5.23)$$

formunda tek şekilde ifade edilebilir (Jóðar *vd.* 1996). Burada $k = 0, 1, \dots, n$ için $\Lambda_k \in \mathbb{C}^{r \times r}$ belirlenecek matrislerdir. $P(x)$, en fazla $(n-1)$. dereceden bir matris polinom olmak üzere Teorem 5.3 ve (5.23) gösteriminden dolayı

$$\int_{-1}^1 P(x) (1-x)^A (1+x)^B P_n^{(A,B)}(x) dx = \mathbf{0} \quad (5.24)$$

olarak yazılabilir. $n \geq 0$ için $(1+x) P_n^{(A,B)}(x)$ matris polinomu $(n+1)$. dereceden olup, (5.23) gösteriminden

$$(1+x) P_n^{(A,B)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \Lambda_k P_k^{(A,B)}(x) \text{ , } \Lambda_k \in \mathbb{C}^{r \times r} \quad (5.25)$$

dir. $k = 0, 1, \dots, (n+1)$ için Λ_k katsayılarını belirleyelim. Teorem 5.3 ü dikkate alarak, bu eşitliğin her iki yanını $(1-x)^A (1+x)^B P_s^{(A,B)}(x)$ ile sağdan çarpıp, $[-1, 1]$ aralığında integre edilirse

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 (1+x) P_n^{(A,B)}(x) (1-x)^A (1+x)^B P_s^{(A,B)}(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 \left(\sum_{k=0}^{n+1} \Lambda_k P_k^{(A,B)}(x) (1-x)^A (1+x)^B P_s^{(A,B)}(x) \right) dx \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq s}}^{n+1} \left(\Lambda_k \int_{-1}^1 P_k^{(A,B)}(x) (1-x)^A (1+x)^B P_s^{(A,B)}(x) dx \right) \\ & \quad + \Lambda_s \int_{-1}^1 P_s^{(A,B)}(x) (1-x)^A (1+x)^B P_s^{(A,B)}(x) dx \\ &= \Lambda_s \int_{-1}^1 P_s^{(A,B)}(x) (1-x)^A (1+x)^B P_s^{(A,B)}(x) dx \end{aligned}$$

olarak bulunur. Son eşitlikte s yerine k alınır

$$\begin{aligned} & \Lambda_k \int_{-1}^1 (1-x)^A (1+x)^B \left(P_k^{(A,B)}(x) \right)^2 dx \\ &= \int_{-1}^1 (1+x) P_n^{(A,B)}(x) (1-x)^A (1+x)^B P_k^{(A,B)}(x) dx \quad (5.26) \end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir. $k = 0, 1, \dots, (n-2)$ için (5.24) integralinden dolayı (5.26) nın sağındaki integral, $\mathbf{0}$ matrisine eşit olacaktır. $k \leq n-2$ için $\Lambda_k = \mathbf{0}$ olup, (5.25) ifadesi

$$(1+x) P_n^{(A,B)}(x) = \Lambda_{n-1} P_{n-1}^{(A,B)}(x) + \Lambda_n P_n^{(A,B)}(x) + \Lambda_{n+1} P_{n+1}^{(A,B)}(x) \quad (5.27)$$

şeklinde yazılabilir. (5.2) gösterimi yardımıyla $P_n^{(A,B)}(x)$, $P_{n-1}^{(A,B)}(x)$ ve $P_{n+1}^{(A,B)}(x)$ matris polinomlarının açık ifadesini (5.27) bağıntısında yerlerine yazıp, sırasıyla $(1+x)^{n-1}$, $(1+x)^n$, $(1+x)^{n+1}$ in katsayılarının eşitlenmesiyle

$$\begin{aligned} \Lambda_{n+1} &= 2(n+1)(A+B+(n+1)I)(A+B+(2n+1)I)^{-1} \\ &\quad \times (A+B+(2n+2)I)^{-1} \\ \Lambda_n &= -2n(B+nI)(A+B+2nI)^{-1} \\ &\quad + 2(n+1)(A+B+(2n+2)I)^{-1}(B+(n+1)I) \\ \Lambda_{n-1} &= (n-1)(A+B+nI)^{-1}(B+(n-1)I)(B+nI) \\ &\quad - (n+1)(A+B+(2n-1)I)(A+B+2nI)(A+B+nI)^{-1} \\ &\quad \times (A+B+(2n+1)I)^{-1}(A+B+(2n+2)I)^{-1}(B+nI)(B+(n+1)I) \\ &\quad - 2n(A+B+(2n-1)I)(A+B+nI)^{-1}(A+B+2nI)^{-1}(B+nI)^2 \\ &\quad + 2(n+1)(A+B+(2n-1)I)(A+B+nI)^{-1} \\ &\quad \times (A+B+(2n+2)I)^{-1}(B+nI)(B+(n+1)I) \end{aligned} \quad (5.28)$$

katsayıları bulunur. Bu sonuçlar aşağıdaki teoremle özetlenebilir.

Teorem 5.4 $A, B \in \mathbb{C}^{r \times r}$ matrisleri için (5.1) ve (5.9) koşulları sağlansın. Λ_{n-1} , Λ_n , $\Lambda_{n+1} \in \mathbb{C}^{r \times r}$ matrisleri ise (5.28) ile verilmek üzere $P_n^{(A,B)}(x)$ Jacobi matris polinomları

$$\Lambda_{n+1} P_{n+1}^{(A,B)}(x) = (xI + \{I - \Lambda_n\}) P_n^{(A,B)}(x) - \Lambda_{n-1} P_{n-1}^{(A,B)}(x) \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

üç terimli bir matris rekürans bağıntısını sağlar (Defez vd. 2004).

6. BESSEL MATRİS FONKSİYONLARI

Bu bölümde, 1994 yılında Jódar ve arkadaşları tarafından yapılan bir makale incelenmiştir (Jódar vd. 1994). Burada Bessel tipli matris diferensiyel denklemlerin açık çözümü, Frobenius metoduyla bulunmakta ve Bessel matris fonksiyonları tanıtılmaktadır.

Bu bölümde, Bölüm 1 de verilen (1.1) denkleminin bir özel hali olarak, A , $\mathbb{C}^{n \times n}$ de karesel kompleks bir matris, $X(t)$ ise $\mathbb{C}^n$ de bilinmeyen vektör fonksiyon olmak üzere

$$t^2 X''(t) + tX'(t) + (t^2 I - A^2) X(t) = 0 \quad , \quad 0 < t < \infty \quad (6.1)$$

denklemini ele alınmıştır. A köşegenleştirilemeyen bir matris ise (6.1) denklemini skaler denklemlere dönüştürülemez.

Jódar ve arkadaşları, 1992 ve 1993 yıllarındaki makalelerinde (6.1) denkleminin

$$X(t) = \left(\sum_{k \geq 0} C_k t^k \right) t^z \quad ; \quad C_k \in \mathbb{C}^{n \times n} \quad , \quad z \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

tipindeki çözümlerini araştırmışlardır (Jódar vd. 1992, 1993). Aynı Matematikçiler, 1992 de A matrisinin köşegen bir matris olması durumunu, 1993 de ise genel durumu incelemişlerdir. Ancak 1993 deki metotta C_k katsayılarını belirlemek için cebirsel matris denklemlerinin çözülmesine gerek duyulmuştur. Burada ise 1993 de kullanılan A matrisi için daha zayıf spektral koşullar yardımıyla denklemin çözümüne ulaşmak için C_k matris katsayılarını belirlemek amacıyla cebirsel matris denklemini çözmülmesine gerek olmadığı görülmüştür.

Bu bölümde, ilk önce Bessel matris fonksiyonları teorisinin temellerini oluşturmak için matris fonksiyonları ile ilgili özellikler ele alınmıştır. Daha sonra (6.1) tipindeki matris diferensiyel denklemlerin çözümlerinin temel çözümler cümlesi bulunmuştur. Ayrıca A matrisinin özdeğerlerinin tamsayı olmadığı durumunda (6.1) denkleminin genel çözümünün açık ifadesini bulmamızı sağlayan birinci tür Bessel matris fonksiyonu kavramı verilmiş ve Bessel matris fonksiyonlarının ikinci türünde, (6.1) denkleminin bir çözümü olduğu gösterilmiştir.

6.1 Matris Fonksiyonları ile İlgili Ön Bilgiler

Tanım 6.1 (Sıfırlanan Polinom): $f(\lambda)$ bir skaler polinom ve A da bir karesel matris olsun. Eğer $f(A) = \mathbf{0}$ ise $f(\lambda)$ skaler polinomu, A karesel matrisinin sıfırlanan polinomu olarak adlandırılır (Ganthmacher 1959).

Tanım 6.2 (Minimal Polinom): $\Psi(\lambda)$, başkatsayısı 1 olan ve A matrisinin en düşük dereceli sıfırlanan bir polinom ise A nın minimal polinomu olarak adlandırılır (Ganthmacher 1959).

Herhangi bir sıfırlanan $f(\lambda)$ polinomu, $\Psi(\lambda)$ minimal polinomuna bölündüğünde

$$f(\lambda) = \Psi(\lambda)q(\lambda) + r(\lambda)$$

eşitliği yazılabilir. Burada $r(\lambda)$, $\Psi(\lambda)$ dan daha düşük dereceli bir polinomdur.

$$f(A) = \Psi(A)q(A) + r(A)$$

eşitliğinde $f(A) = \Psi(A) = \mathbf{0}$ ise, o takdirde $r(A) = \mathbf{0}$ olmalıdır. Fakat $r(\lambda)$, $\Psi(\lambda)$ dan daha düşük dereceli bir polinom olduğundan $r(\lambda) \equiv 0$ olmalıdır. Yani herhangi bir matrisin sıfırlanan polinomunun, minimal polinomuna bölümü kalansızdır.

Tanım 6.3 $m \times m$ boyutlu karesel A matrisinin farklı özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ ve

$$\sum_{k=1}^s m_k = m$$

olmak üzere, A matrisinin minimal polinomu

$$\Psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{m_s}$$

olarak verilir (Ganthmacher 1959).

$g(\lambda)$ ve $h(\lambda)$, A matrisi için

$$g(A) = h(A)$$

eşitliğini sağlayan iki polinom olsun. $d(\lambda) = g(\lambda) - h(\lambda)$ farkı, A nın bir sıfırlanan polinomu olduğundan, A nın bir minimal polinomu olan $\Psi(\lambda)$ ya kalansız bölünür yani

$$g(\lambda) \equiv h(\lambda) \pmod{\Psi(\lambda)}$$

dir. Bundan dolayı öyle bir $p(\lambda)$ polinomu vardır ki, bu polinom

$$d(\lambda) = g(\lambda) - h(\lambda) = p(\lambda)\Psi(\lambda)$$

eşitliğini gerçeklemelidir. A matrisinin m_k katlı özdeğeri olan λ_k ($k = 1, 2, \dots, s$) için, $\Psi(\lambda)$ nın tanımından dolayı

$$\Psi(\lambda_k) = 0, \Psi'(\lambda_k) = 0, \dots, \Psi^{(m_k-1)}(\lambda_k) = 0 \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, s$$

veya başka bir ifadeyle

$$d(\lambda_k) = 0, d'(\lambda_k) = 0, \dots, d^{(m_k-1)}(\lambda_k) = 0 \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, s$$

eşitlikleri sağlanır. Yani $d(\lambda) = g(\lambda) - h(\lambda)$ olmasından dolayı $g(\lambda)$ ve $h(\lambda)$ polinomları için

$$g(\lambda_k) = h(\lambda_k), g'(\lambda_k) = h'(\lambda_k), \dots, g^{(m_k-1)}(\lambda_k) = h^{(m_k-1)}(\lambda_k) \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, s$$

eşitlikleri yazılabilir.

Tanım 6.4 A karesel bir matris ve $f(\lambda)$ ise $\sigma(A)$ yı içeren bir bölgede tanımlı bir fonksiyon olsun. A matrisinin m_k katlı özdeğeri olan λ_k ($k = 1, 2, \dots, s$) için $f(\lambda)$ fonksiyonunun türevleri

$$f(\lambda_k), f'(\lambda_k), \dots, f^{(m_k-1)}(\lambda_k) \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, s$$

değerlerini alır. Bu değerler, A matrisinin spektrumunda $f(\lambda)$ fonksiyonunun değerleri olarak adlandırılır. Böylesi değerlerin kümesi $f(\Lambda_A)$ ile gösterilir (Ganthmacher 1959).

Lemma 6.1 Eğer A matrisinin spektrumunda $f(\lambda)$ fonksiyonu tanımlıysa

$$f(A) = g(A)$$

dır. Burada $g(\lambda)$, A nın spektrumunda $f(\lambda)$ fonksiyonu ile aynı değerleri alan herhangi bir polinomdur. Yani

$$f(\Lambda_A) = g(\Lambda_A)$$

dır (Ganthmacher 1959).

Tanım 6.5 A nın spektrumunda $f(\lambda)$ fonksiyonu ile aynı değerleri alan kompleks katsayılı tüm polinomlar ailesinde,

$$r(\lambda_k) = f(\lambda_k), r'(\lambda_k) = f'(\lambda_k), \dots, r^{(m_k-1)}(\lambda_k) = f^{(m_k-1)}(\lambda_k) \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, s$$

interpolasyon koşullarını sağlayan derecesi m den düşük ancak ve yalnız bir $r(\lambda)$ polinomu vardır. Bu $r(\lambda)$ polinomu, A matrisinin spektrumu üzerinde tanımlı $f(\lambda)$ fonksiyonu için Lagrange-Sylvester İnterpolasyon polinomu olarak adlandırılır (Ganthmacher 1959).

Lemma 6.2 A matrisinin spektrumunda $\sum_{p=0}^{\infty} u_p(\lambda)$ serisinin yakınsak olması için

gerek ve yeter koşul $\sum_{p=0}^{\infty} u_p(A)$ serisinin bir matrise yakınsamasıdır. Yani

$f(\Lambda_A) = \sum_{p=0}^{\infty} u_p(\Lambda_A)$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul $f(A) = \sum_{p=0}^{\infty} u_p(A)$ olmasıdır (Ganthmacher 1959).

Teorem 6.1 $f(\lambda)$, A matrisinin spektrumu üzerinde tanımlı bir fonksiyon ve $r(\lambda)$, Lagrange-Sylvester interpolasyon polinomu olsun. Bu takdirde

$$f(A) = r(A)$$

dır (Ganthmacher 1959).

Örnek 6.1

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

matrisinin minimal polinomu λ^n dir. 0 özdeğeri, n katlı özdeğer olduğundan dolayı, H matrisinin spektrumu üzerinde $f(\lambda)$ fonksiyonunun değerleri $f(0)$, $f'(0)$, ..., $f^{(n-1)}(0)$ olup, $f(\lambda)$ ya ait Lagrange-Sylvester interpolasyon polinomu

$$r(\lambda) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \lambda + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \lambda^{n-1}$$

dir. Teorem 6.1 den dolayı

$$\begin{aligned} f(H) &= r(H) \\ &= f(0)I + \frac{f'(0)}{1!}H + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}H^{n-1} \end{aligned}$$

olup,

$$f(H) = \begin{bmatrix} f(0) & \frac{f'(0)}{1!} & \frac{f''(0)}{2!} & \dots & \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \\ 0 & f(0) & \frac{f'(0)}{1!} & \dots & \frac{f^{(n-2)}(0)}{(n-2)!} \\ \vdots & \dots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{f'(0)}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(0) \end{bmatrix}_{n \times n}$$

olarak elde edilir (Ganthmacher 1959).

Örnek 6.2

$$J = \begin{bmatrix} v & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & v & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & v \end{bmatrix}_{n \times n}$$

matrisinin minimal polinomu $(\lambda - v)^n$ dir. $J = vI + H$ dan $J - vI = H$ yazılabilir. v , n katlı özdeğer olduğundan dolayı, J matrisinin spektrumu üzerinde $f(\lambda)$ fonksiyonunun değerleri $f(v)$, $f'(v)$, ..., $f^{(n-1)}(v)$ olup, $f(\lambda)$ ya ait Lagrange-Sylvester interpolasyon polinomu

$$r(\lambda) = f(v) + \frac{f'(v)}{1!}(\lambda - v) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(v)}{(n-1)!}(\lambda - v)^{n-1}$$

dir. Teorem 6.1 den dolayı

$$\begin{aligned} f(J) &= r(J) \\ &= f(v)I + \frac{f'(v)}{1!}(J - vI) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(v)}{(n-1)!}(J - vI)^{n-1} \\ &= f(v)I + \frac{f'(v)}{1!}H + \dots + \frac{f^{(n-1)}(v)}{(n-1)!}H^{n-1} \end{aligned}$$

olup,

$$f(J) = \begin{bmatrix} f(v) & \frac{f'(v)}{1!} & \frac{f''(v)}{2!} & \cdots & \frac{f^{(n-1)}(v)}{(n-1)!} \\ 0 & f(v) & \frac{f'(v)}{1!} & \cdots & \frac{f^{(n-2)}(v)}{(n-2)!} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{f'(v)}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(v) \end{bmatrix}_{n \times n}$$

olarak elde edilir (Ganthmacher 1959).

Tanım 6.6 Esas köşegen üzerindeki bütün elemanları eşit ve esas köşegen üzerindeki ilk köşegendeki bütün elemanları 1 ve diğer bütün elemanları 0 olan bir kare matrise Jordan blok matris denir (Taşçı 2005).

Tanım 6.7 A , $n \times n$ tipinde herhangi bir matris olsun. J_i ler A matrisinin Jordan blokları olmak üzere

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & J_k \end{bmatrix}_{n \times n}$$

olacak şekilde tersinir Q matrisi vardır (Taşçı 2005).

Lemma 6.3 f , $\sigma(A)$ yı içeren bir bölgede tanımlı bir fonksiyon olsun. $\mathbb{C}^{n \times n}$ de

$$B = TAT^{-1}$$

eşitliğini sağlayan A, B matrisleri ve tersinir olan T matrisi için

$$f(B) = Tf(A)T^{-1}$$

dir (Ganthmacher 1959).

6.2 Bessel Fonksiyonları

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0 \quad (6.2)$$

denkleminin çözümlerinden biri ν . basamaktan birinci tür Bessel fonksiyonu

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{m \geq 0} \frac{(-1)^m}{m!} \Gamma^{-1}(\nu + m + 1) \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \quad , \quad 0 < x < \infty \quad (6.3)$$

dir. ν nün tamsayı olması durumunda ikinci tür Bessel fonksiyonu

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi}$$

ile tanımlıdır. Bundan dolayı (6.2) denkleminin genel çözümü

$$y = AJ_\nu(x) + BJ_{-\nu}(x) \quad ; \quad \nu \notin \mathbb{Z}$$

$$y = AJ_\nu(x) + BY_\nu(x) \quad ; \quad \nu \in \mathbb{Z}$$

dir (Lebedev 1972).

6.3 Bessel Matris Fonksiyonlarına Giriş

Eğer H ,

$$H = \begin{bmatrix} \nu & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \nu & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \nu \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{p \times p} \quad (6.4)$$

ile tanımlı Jordan blok matrisi ve $f(z)$, ν nün komşuluğunda analitik bir fonksiyon ise Örnek 6.2 den dolayı

$$f(H) = \begin{bmatrix} f(\nu) & \frac{f'(\nu)}{1!} & \frac{f''(\nu)}{2!} & \dots & \frac{f^{(p-1)}(\nu)}{(p-1)!} \\ 0 & f(\nu) & \frac{f'(\nu)}{1!} & \dots & \frac{f^{(p-2)}(\nu)}{(p-2)!} \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{f'(\nu)}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(\nu) \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

olur (Ganthmacher 1959).

$J_\nu(t)$, ν parametresine göre tam fonksiyondur (Lebedev 1972). Bundan dolayı (6.5)

özelliğinin kullanılmasıyla $t > 0$ için, $J_\nu(t)$, ν nün fonksiyonu olmak üzere (6.4)

eşitliğindeki H Jordan blok matrisine, matris fonksiyonel hesabın uygulanmasıyla

$$\begin{aligned}
J_H(t) &= \begin{bmatrix} J_v(t) & \frac{1}{1!} \frac{\partial}{\partial v} J_v(t) & \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial v^2} J_v(t) & \dots & \frac{1}{(p-1)!} \frac{\partial^{p-1}}{\partial v^{p-1}} J_v(t) \\ 0 & J_v(t) & \frac{1}{1!} \frac{\partial}{\partial v} J_v(t) & \dots & \frac{1}{(p-2)!} \frac{\partial^{p-2}}{\partial v^{p-2}} J_v(t) \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{1!} \frac{\partial}{\partial v} J_v(t) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & J_v(t) \end{bmatrix} \\
&= \left(\frac{1}{(j-i)!} \frac{\partial^{j-i}}{\partial v^{j-i}} J_v(t) \right)_{i \leq j} \quad ; \quad i, j = 1, 2, \dots, p
\end{aligned} \tag{6.6}$$

matrisi yazılabilir. (6.3) eşitliği ve Lemma 6.2 den dolayı

$$J_H(t) = \left(\frac{t}{2} \right)^H \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \Gamma^{-1}(H + (m+1)I) \left(\frac{t}{2} \right)^{2m} \tag{6.7}$$

dir.

Eğer H , (6.4) deki gibi bir Jordan blok matris ise $(-H)$, Jordan blok matris değildir. Böylece (6.5) eşitliği uygulanamaz. Bundan dolayı, $J_{-H}(t)$ nın hesaplanması aşağıdaki lemmayla verilmiştir:

Lemma 6.4 $p \geq 1$ için H , (6.4) de tanımlı olan Jordan blok matris ve $J_v(t)$ de v . basamaktan birinci tür Bessel fonksiyonu olsun. $J_{-H}(t)$ matrisi

$$\begin{aligned}
J_{-H}(t) &= \left(\frac{t}{2} \right)^{-H} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \Gamma^{-1}(-H + (m+1)I) \left(\frac{t}{2} \right)^{2m} \\
&= \left(\frac{1}{(j-i)!} \frac{\partial^{j-i}}{\partial v^{j-i}} J_{-v}(t) \right)_{i \leq j} \quad ; \quad i, j = 1, 2, \dots, p
\end{aligned} \tag{6.8}$$

ile tanımlanan üst üçgensel matristir.

İspat. $(-H)$ matrisi ve onun Jordan formu olan Θ matrisi arasında

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & (-1)^p \end{bmatrix} = ((-1)^i \delta_{ij}), \quad \Theta = \begin{bmatrix} -v & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -v & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -v \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$-H = P^{-1} \Theta P \tag{6.9}$$

bağıntısı vardır. (6.6) eşitliğinden

$$\begin{aligned} J_{\Theta}(t) &= \left(\frac{1}{(j-i)!} \frac{\partial^{j-i}}{\partial(-v)^{j-i}} J_{-v}(t) \right)_{i \leq j} \\ &= \left(\frac{(-1)^{j-i}}{(j-i)!} \frac{\partial^{j-i}}{\partial v^{j-i}} J_{-v}(t) \right)_{i \leq j} ; \quad i, j = 1, 2, \dots, p \end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir. Böylece (6.9) ve Lemma 6.3 den dolayı

$$J_{-H}(t) = P^{-1} J_{\Theta}(t) P$$

olur. $P^{-1} J_{\Theta}(t)$ matrisinin (i, j) . elemanı

$$\begin{aligned} (P^{-1} J_{\Theta}(t))_{ij} &= \sum_{k=1}^{j-i} (-1)^i \delta_{ik} \frac{(-1)^{j-k}}{(j-k)!} \frac{\partial^{j-k}}{\partial v^{j-k}} J_{-v}(t) \\ &= (-1)^i \frac{(-1)^{j-i}}{(j-i)!} \left(\frac{\partial^{j-i}}{\partial v^{j-i}} J_{-v}(t) \right) \\ &= \frac{(-1)^j}{(j-i)!} \left(\frac{\partial^{j-i}}{\partial v^{j-i}} J_{-v}(t) \right) \end{aligned} \tag{6.10}$$

elde edilir. (6.9) ve (6.10) eşitliklerinden dolayı

$$\begin{aligned} (P^{-1} J_{\Theta}(t) P)_{ij} &= ([P^{-1} J_{\Theta}(t)] P)_{ij} \\ &= \sum_{k=i}^p \frac{(-1)^k}{(k-i)!} \left(\frac{\partial^{k-i}}{\partial v^{k-i}} J_{-v}(t) \right) (-1)^j \delta_{kj} \\ &= \frac{1}{(j-i)!} \left(\frac{\partial^{j-i}}{\partial v^{j-i}} J_{-v}(t) \right) \end{aligned}$$

dir. Böylece sonuç ispatlanmıştır. ■

Lemma 6.5 $\mathbb{C}^{n \times n}$ de A, B, C, D ikili olarak değişmeli matrisler ve

$$T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_{2n \times 2n}$$

olsun. $\mathbb{C}^{n \times n}$ de T tersinir matris olması için gerek ve yeter koşul $AD - BC$ tersinir matris olmasıdır (Halmos 1967).

Eğer (6.1) denkleminin çözümü, $C, D \in \mathbb{C}^n$ de vektörler olmak üzere

$$Z(t) = X_1(t)C + X_2(t)D \quad , \quad 0 < t < \infty$$

ile tek olarak tanımlanan $Z(t) \in \mathbb{C}^n$ ise $0 < t < \infty$ da $\{X_1, X_2\}$ çözüm çifti (6.1) denkleminin temel çözümler cümlesidir.

Tanım 6.8 $A(t)$ parçalı sürekli bir matris fonksiyon olmak üzere

$$X'(t) = A(t)X(t), \quad X(t_0) = x_0, \quad t_0 \in [a, b]$$

başlangıç değer problemini ele alalım. Problemin tek çözümü

$$\sum_{i=1}^n \phi_i(\cdot; t_0)x_{i0} = \Phi(\cdot; t_0)x_0$$

matris formu ile verilir. Buradaki denklemin $\phi_i(\cdot; \tau)$ çözümü, τ değerinde I_n matrisinin i . kolonu e_i vektörüyle gösterilmiştir. Ayrıca

$$X(t) = \Phi(t; t_0)x_0, \quad t, t_0 \in [a, b]$$

ifadesiyle de verilen çözümde

$$\Phi(t; t) = I, \quad t \in [a, b]$$

koşulunu sağlayan $\Phi(\cdot; \cdot)$ matrisi geçiş durum matrisi olarak adlandırılır (Kailath 1980).

$0 < t < \infty$ da, (6.1) denkleminin $\{X_1, X_2\}$ çözüm çifti temel çözümler cümlesi olduğunu göstermek için yeter şart olarak aşağıdaki lemma verilebilir:

Lemma 6.6 $\{X_1, X_2\}$, $0 < t < \infty$ da (6.1) denkleminin $\mathbb{C}^{n \times n}$ deki çözüm çifti ve $W(t)$, $\mathbb{C}^{2n \times 2n}$ de

$$W(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) & X_2(t) \\ X_1'(t) & X_2'(t) \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

biçiminde tanımlanan bir matris fonksiyon olsun. Eğer $t_1 > 0$ için $W(t_1)$ tersinir matris ise $0 < t < \infty$ da (6.1) denkleminin temel çözümler cümlesi $\{X_1, X_2\}$ dir. Bu durumda $W(t)$, her $t > 0$ için tersinir matristir.

İspat. (6.11) ile tanımlanan $W(t)$ matrisi

$$W'(t) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A^2/t^2 - I & -I/t \end{bmatrix} W(t), \quad 0 < t < \infty \quad (6.12)$$

eşitliğini gerçekler. $G(t, s)$ matrisi, (6.12) eşitliğinde $G(t, t) = I$ özelliğini sağlayan geçiş durum matrisi olsun. Bu durumda $\forall t > 0$ için $W(t) = G(t, t_1)W(t_1)$ dir. $\forall t > 0, s > 0$ için $G(t, s)$ nin tersinir matris olmasından dolayı $W(t)$ de tersinir matristir. ■

6.4 Bessel Matris Fonksiyonlarının Birinci Türü

A matrisi

$$"\forall z \in \sigma(A) \text{ için } z \text{ tamsayı olmasın}" \quad (6.13)$$

koşulunu sağlasın. (6.1) denkleminin

$$X(t) = t^A \sum_{k=0}^{\infty} C_k t^k \quad , \quad C_k \in \mathbb{C}^{n \times n} \quad , \quad t^A = \exp(A \ln t) \quad , \quad t > 0 \quad (6.14)$$

şeklinde çözümlerini arayalım. (6.14) de tanımlı $X(t)$ nin türevleri alınırsa

$$\begin{aligned} X'(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} (kI + A) t^{(k-1)I+A} C_k \\ X''(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} (kI + A) ((k-1)I + A) t^{(k-2)I+A} C_k \end{aligned}$$

olarak yazılabilirler. Yukarıdaki serilerin yakınsaklığı bir an için kabul edilip, (6.1) denkleminde yerlerine yazılırsa C_k matrisleri

$$t^A \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} [(kI + A) ((k-1)I + A) + (kI + A) - A^2] t^k C_k + \sum_{k=2}^{\infty} t^k C_{k-2} \right\} = \mathbf{0} \quad (6.15)$$

eşitliğini sağlar. (6.15) eşitliğinde her bir t^k nın kuvvetlerinin katsayılarının $\mathbf{0}$ matrisine eşitlenmesiyle görülür ki, C_k matrisleri

$$(2A + I)C_1 = \mathbf{0} \quad , \quad k(kI + 2A)C_k + C_{k-2} = \mathbf{0} \quad , \quad k = 2, 3, \dots \quad (6.16)$$

bağıntılarını sağlar. $C_1 = \mathbf{0}$ olduğundan (6.16) dan $k = 0, 1, 2, \dots$ için $C_{2k+1} = \mathbf{0}$ olmalıdır. (6.16) dan $k = 2m$ için

$$4m(mI + A)C_{2m} + C_{2m-2} = \mathbf{0} \quad , \quad m = 1, 2, \dots \quad (6.17)$$

dir. (6.13) ve (6.17) den dolayı

$$C_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m} m!} (A + mI)^{-1} (A + (m-1)I)^{-1} \dots (A + I)^{-1} C_0 \quad (6.18)$$

eşitliği bulunur. Büyük m değerleri için (6.17) de norm alınırsa

$$\begin{aligned} \|C_{2m-2}\| &= 4m \|(mI + A)C_{2m}\| \\ &\geq 4m(m - \|A\|) \|C_{2m}\| \quad , \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6.19)$$

olur. (6.19) dan dolayı $\sum_{m=0}^{\infty} \|C_{2m}\| t^{2m}$ serisi yakınsaktır. Böylece herhangi belirli bir C_0 matrisi için (6.14) ile tanımlı seri $t > 0$ için yakınsaktır. $C_0 = 2^{-A}\Gamma^{-1}(A + I)$ olarak seçildiğinde, (2.8) ve (6.18) den dolayı

$$(A + mI)^{-1}(A + (m - 1)I)^{-1}...(A + I)^{-1}\Gamma^{-1}(A + I) = \Gamma^{-1}(A + (m + 1)I) \quad (6.20)$$

elde edilir. (6.14), (6.18) ve (6.20) eşitliklerinden dolayı, (6.1) denkleminin bir çözümü

$$X(t, A) = \left(\frac{t}{2}\right)^A \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \Gamma^{-1}(A + (m + 1)I) \left(\frac{t}{2}\right)^{2m}, \quad t > 0 \quad (6.21)$$

dır. Şimdi, B_k matrisleri belirlenecek matrisler olmak üzere, (6.1) denkleminin

$$Y(t) = t^{-A} \sum_{k=0}^{\infty} B_k t^k, \quad B_k \in \mathbb{C}^{n \times n}, \quad t^{-A} = \exp(-A \ln t), \quad t > 0 \quad (6.22)$$

formunda serisel çözümünü arayalım. $X(t, A)$ çözümünün elde edilmesindeki aynı yöntemin kullanılmasıyla görülür ki, B_k matrisleri

$$(-2A + I)B_1 = \mathbf{0}, \quad k(kI - 2A)B_k + B_{k-2} = \mathbf{0}, \quad k \geq 2 \quad (6.23)$$

bağıntılarını sağlar. $B_1 = \mathbf{0}$ olduğundan (6.23) eşitliğinden $m = 0, 1, 2, \dots$ için $B_{2m+1} = \mathbf{0}$ olup, B_{2m} ler için

$$4m(mI - A)B_{2m} + B_{2m-2} = \mathbf{0}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (6.24)$$

eşitliği yazılabilir. (6.13) eşitliğinden $(mI - A)$ tersinir matris olduğundan ve herhangi bir $B_0 \in \mathbb{C}^{n \times n}$ için (6.23) den dolayı

$$B_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m}m!} (-A + mI)^{-1}(-A + (m - 1)I)^{-1}...(-A + I)^{-1}B_0, \quad m = 1, 2, \dots \quad (6.25)$$

dir. $B_0 = 2^A\Gamma^{-1}(-A + I)$ olarak seçilirse, (2.8) ve (6.25) den dolayı

$$(-A + mI)^{-1}(-A + (m - 1)I)^{-1}...(-A + I)^{-1}\Gamma^{-1}(-A + I) = \Gamma^{-1}(-A + (m + 1)I) \quad (6.26)$$

bulunur. (6.22), (6.25) ve (6.26) eşitliklerinden dolayı, (6.1) denkleminin bir diğer çözümü olan

$$Y(t) = X(t, -A) = \left(\frac{t}{2}\right)^{-A} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \Gamma^{-1}(-A + (m + 1)I) \left(\frac{t}{2}\right)^{2m}, \quad t > 0 \quad (6.27)$$

elde edilir.

Eğer A , v nün tamsayı olmaması durumunda (6.4) eşitliği ile tanımlı H Jordan matrisi ise (6.21) ve (6.27) eşitlikleri ile tanımlı $X(t, H)$ ve $X(t, -H)$ fonksiyonları sırasıyla (6.7) ve (6.8) eşitlikleri ile verilen $J_H(t)$ ve $J_{-H}(t)$ fonksiyonları ile denk düşmektedir. Böylece $J_H(t)$ ve $J_{-H}(t)$ fonksiyonları

$$t^2 X''(t) + tX'(t) + (t^2 I - H^2) X(t) = 0 \quad , \quad 0 < t < \infty \quad (6.28)$$

matris denkleminin çözümleridir. v nün tamsayı olmaması durumunda $\{J_H(t), J_{-H}(t)\}$ çözüm çiftinin (6.28) denkleminin temel çözümler cümlesi olduğunu göstermek için Lemma 6.5 den $\forall t > 0$ için

$$J_H(t)J'_{-H}(t) - J_{-H}(t)J'_H(t) \quad (6.29)$$

matrisinin tersinir olduğunu göstermek yeterlidir. (6.6) ve (6.8) eşitliklerinden

$$J_H(t)J'_{-H}(t) - J_{-H}(t)J'_H(t)$$

üst üçgensel matristir ve onun köşegen elemanı

$$J_v(t)J'_{-v}(t) - J_{-v}(t)J'_v(t) \quad , \quad 0 < t < \infty \quad (6.30)$$

dır. Skaler durum için v nün tamsayı olmaması durumunda $\{J_v(t), J_{-v}(t)\}$ çözüm çifti, v . basamaktan skaler Bessel denkleminin temel çözümler cümlesidir. Bu durumda $\{J_v(t), J_{-v}(t)\}$ çözüm çiftinin Wronskiyeinden dolayı (6.30) eşitliği sıfırdan farklı olduğundan dolayı (6.29) matrisi tersinirdir. Dolayısıyla aşağıdaki teorem ispatlanmıştır:

Teorem 6.2 v , tam sayı olmayan kompleks bir sayı ve H matrisi (6.4) eşitliğindeki gibi tanımlansın. (6.7) ve (6.8) eşitlikleri ile tanımlanan $\{J_H(t), J_{-H}(t)\}$ çözüm çifti, $0 < t < \infty$ da (6.28) denkleminin temel çözümler cümlesidir.

Genel durum düşünülecek olursa, A matrisi (6.13) koşulunu sağlasın ve H_i Jordan blok matrisleri

$$H_i = \begin{bmatrix} v_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & v_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & v_i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{p_i \times p_i} \quad , \quad p_i \geq 1, \quad p_1 + p_2 + \dots + p_k = n$$

olmak üzere $H = \text{diag}(H_1, \dots, H_k)$ matrisi A nın Jordan kanonik formu olsun. Eğer H_i , (1×1) boyutlu Jordan blok matris ise o takdirde $H_i = (v_i)$ dir. (6.13) koşulunda $1 \leq i \leq k$ için v_i lerin hiçbirisi tamsayı olmasın. Teorem 6.2 de verilen

$$t^2 X''(t) + tX'(t) + (t^2 I - H_i^2) X(t) = 0 \quad , \quad 0 < t < \infty \quad , \quad p_i \geq 1 \quad (6.31)$$

denkleminin temel çözümler cümlesi $\{J_{H_i}(t), J_{-H_i}(t)\}$ olsun. $\mathbb{C}^{n \times n}$ de

$$J(t, H) = [\text{diag}_{1 \leq i \leq k}(J_{H_i}(t))] \quad , \quad J(t, -H) = [\text{diag}_{1 \leq i \leq k}(J_{-H_i}(t))]$$

ile tanımlanan $\{J(t, H), J(t, -H)\}$ matris fonksiyon çifti Teorem 6.2 den dolayı

$$t^2 X''(t) + tX'(t) + (t^2 I - \text{diag}(H_1^2, \dots, H_k^2)) X(t) = 0 \quad , \quad 0 < t < \infty \quad (6.32)$$

denkleminin çözüm çifti olup, genel çözüm için $0 < t < \infty$ da $\{J(t, H), J(t, -H)\}$ çözüm çiftinin (6.32) denkleminin temel çözümler cümlesi olduğunu kanıtlamak gerekir. Şimdi bunu gösterelim. $1 \leq i \leq k$ için $J_{H_i}(t)$ ve $J_{-H_i}(t)$ değişmeli olduğundan $J(t, H)$ ve $J(t, -H)$ de değişmelidir. Diğer taraftan

$$V(t) = J(t, H)J'(t, -H) - J(t, -H)J'(t, H) \quad , \quad 0 < t < \infty \quad (6.33)$$

matrisi, $\{J_{H_i}(t), J_{-H_i}(t)\}$ çözüm çifti (6.31) denkleminin temel çözümler cümlesi ve (6.33) matrisinin köşegen elemanı

$$V(t) = \left[\text{diag}_{1 \leq i \leq k}(J_{H_i}(t)J'_{-H_i}(t) - J_{-H_i}(t)J'_{H_i}(t)) \right]$$

olup, Lemma 6.5 den dolayı tersinir matristir. Böylece $\{J(t, H), J(t, -H)\}$ çözüm çiftinin (6.32) denkleminin temel çözümler cümlesi olduğu gösterilmiş olur.

P , $\mathbb{C}^{n \times n}$ de

$$H = \text{diag}(H_1, \dots, H_k) = PAP^{-1} \quad (6.34)$$

koşulunu sağlayan tersinir bir matris olsun. Bu takdirde $0 < t < \infty$ da

$$X_1(t) = P^{-1}X(t, H)P \quad \text{ve} \quad X_2(t) = P^{-1}X(t, -H)P \quad (6.35)$$

çözümleri (6.1) denkleminin temel çözümler cümlesi olarak tanımlanır. Lemma 6.3,

(6.35), (6.7) ve (6.8) eşitliklerinden dolayı

$$\begin{aligned}
X_1(t) &= P^{-1} [diag_{1 \leq i \leq k}(J_{H_i}(t))] P \\
&= P^{-1} diag_{1 \leq i \leq k} \left[\left(\frac{t}{2} \right)^{H_i} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \Gamma^{-1}(H_i + (m+1)I) \left(\frac{t}{2} \right)^{2m} \right] P \\
&= \left(\frac{t}{2} \right)^A \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \Gamma^{-1}(A + (m+1)I) \left(\frac{t}{2} \right)^{2m} = X(t, A)
\end{aligned}$$

ve $X_2(t) = X(t, -A)$ dır. Buradaki $X(t, A)$ ve $X(t, -A)$ sırasıyla (6.21) ve (6.27) eşitlikleri ile verilen çözümlerin aynısıdır. Böylece aşağıdaki teoremdeki ispatlanmıştır:

Teorem 6.3 $A, \mathbb{C}^{n \times n}$ de (6.13) koşulunu sağlayan bir matris ve $X(t, A)$ ve $X(t, -A)$ sırasıyla (6.21) ve (6.27) eşitlikleri ile tanımlanan matris fonksiyonlar olsunlar. $0 < t < \infty$ da, (6.1) denkleminin $\mathbb{C}^n$ vektör değerli çözümlerinin cümlesi

$$X(t) = X(t, A)C + X(t, -A)D \quad , \quad \text{keyfi } C, D \in \mathbb{C}^n$$

dir.

Tanım 6.9 $A, \mathbb{C}^{n \times n}$ de (6.13) koşulunu sağlayan bir matris olsun. (6.21) eşitliğinde $X(t, A)$ ile verilen matris gösterimi, A basamaktan 1. tür Bessel matris fonksiyonu olarak adlandırılır.

6.5 Bessel Matris Fonksiyonların İkinci Türü

$v \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$ için

$$H_v = \begin{bmatrix} v & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & v & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & v \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

matrisi ile tanımlanan $p \geq 1$ boyutlu Jordan blok olmak üzere, H_v basamaktan Bessel matris fonksiyonlarının ikinci türü

$$Y_{H_v}(t) = J_{H_v}(t) \cot g(\pi H_v) - J_{-H_v}(t) \cos ec(\pi H_v) \quad , \quad 0 < t < \infty \quad (6.37)$$

ile tanımlansın. (6.5) gösteriminden dolayı $\cot g(\pi H_v)$ ve $\cos ec(\pi H_v)$ üst üçgensel matrisleri

$$\left. \begin{aligned} \cot g(\pi H_v) &= \left(\frac{1}{(j-k)!} \frac{\partial^{j-k}}{\partial v^{j-k}} \cot g(\pi v) \right)_{k \leq j} \\ \cos ec(\pi H_v) &= \left(\frac{1}{(j-k)!} \frac{\partial^{j-k}}{\partial v^{j-k}} \cos ec(\pi v) \right)_{k \leq j} \end{aligned} \right\} ; \quad k, j = 1, \dots, p \quad (6.38)$$

ile verilir. (6.37), (6.38) eşitlikleri ve skaler fonksiyonların çarpımları için Leibniz formülünden $Y_{H_v}(t)$ nin

$$\begin{aligned} Y_{H_v}(t) &= \left(\frac{1}{(j-k)!} \frac{\partial^{j-k}}{\partial v^{j-k}} (J_v(t) \cot g(v\pi) - J_{-v}(t) \cos ec(v\pi)) \right)_{k \leq j} \\ &= \left(\frac{1}{(j-k)!} \frac{\partial^{j-k}}{\partial v^{j-k}} Y_v(t) \right)_{k \leq j} ; \quad k, j = 1, \dots, p \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Burada

$$Y_v(t) = J_v(t) \cot g(v\pi) - J_{-v}(t) \cos ec(v\pi)$$

ile verilen Bessel fonksiyonlarının ikinci türüdür.

Teorem 6.4 (*Spektral Dönüşüm Teoremi*) T , $\mathbb{C}^{n \times n}$ de bir matris ve $\mathcal{F}(T)$, $\sigma(T)$ nin komşuğunda analitik fonksiyonların bir kümesi olsun. Eğer $f \in \mathcal{F}(T)$ ise $f(\sigma(T)) = \sigma(f(T))$ dir (Dunford and Schwarz 1959).

n tamsayısı için $\lim_{v \rightarrow n} Y_v(t)$ ve $k \leq j \leq p$ olmak üzere $\lim_{v \rightarrow n} \frac{\partial^{j-k}}{\partial v^{j-k}} Y_v(t)$ limitleri vardır (Lebedev 1972). Bu özelliklerden dolayı

$$H_n = \begin{bmatrix} n & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{p \times p} ; \quad n \in \mathbb{Z}$$

ile tanımlı H_n Jordan blok matrisi için H_n basamaktan Bessel matris fonksiyonlarının ikinci türü

$$Y_{H_n}(t) = \lim_{v \rightarrow n} Y_{H_v}(t) = \left(\frac{1}{(j-k)!} \lim_{v \rightarrow n} \frac{\partial^{j-k}}{\partial v^{j-k}} Y_v(t) \right)_{k \leq j} \quad (6.39)$$

şeklinde yazılabilir. Teorem 6.2 den (6.37) eşitliği ile tanımlanan $Y_{H_v}(t)$ matris fonksiyonu

$$t^2 X''(t) + tX'(t) + (t^2 I - H_v^2) X(t) = 0 \quad , \quad 0 < t < \infty \quad (6.40)$$

veya

$$t^2 Y_{H_v}''(t) + tY_{H_v}'(t) + (t^2 I - H_v^2) Y_{H_v}(t) = 0 \quad , \quad 0 < t < \infty \quad (6.41)$$

denkleminin çözümlerinden biridir. $0 < t < \infty$ aralığında belirli bir t için (6.41) eşitliğinde $v \rightarrow n$ limiti alınır

$$t^2 Y_{H_n}''(t) + tY_{H_n}'(t) + (t^2 I - H_n^2) Y_{H_n}(t) = 0 \quad , \quad 0 < t < \infty$$

elde edilir. Diğer taraftan H_n basamaktan Bessel matris fonksiyonlarının birinci türü $J_{H_n}(t)$,

$$t^2 J_{H_n}''(t) + tJ_{H_n}'(t) + (t^2 I - H_n^2) J_{H_n}(t) = 0 \quad , \quad 0 < t < \infty$$

denklemini sağlayıp, v herhangi bir kompleks sayısı için $\{J_{H_v}(t), Y_{H_v}(t)\}$ çifti (6.40) denklemini gerçekler. $0 < t < \infty$ da $J_{H_v}(t), J_{H_v}'(t), Y_{H_v}(t), Y_{H_v}'(t)$ matris fonksiyonları, matris fonksiyonların hesabı özelliklerinden dolayı ikili olarak değişmelidir. (6.37) tanımından dolayı $v \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$ alınır,

$$Y_{H_v}'(t) = J_{H_v}'(t) \cot g(\pi H_v) - J_{-H_v}'(t) \cos ec(\pi H_v) \quad , \quad 0 < t < \infty$$

olup, H_v ye göre fonksiyonel hesabın değişme özelliğinden

$$\begin{aligned} & J_{H_v}(t)Y_{H_v}'(t) - Y_{H_v}(t)J_{H_v}'(t) \\ &= J_{H_v}(t)J_{H_v}'(t) \cot g(\pi H_v) - J_{H_v}(t)J_{-H_v}'(t) \cos ec(\pi H_v) \\ & \quad - J_{H_v}(t) \cot g(\pi H_v)J_{H_v}'(t) + J_{-H_v}(t) \cos ec(\pi H_v)J_{H_v}'(t) \\ &= \left\{ J_{H_v}(t)J_{-H_v}'(t) - J_{-H_v}(t)J_{H_v}'(t) \right\} \cos ec(\pi H_v) \end{aligned} \quad (6.42)$$

elde edilir. Eğer $v \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$ ise Teorem 6.4 den $\cos ec(\pi H_v)$ matrisi tersinirdir. Diğer taraftan $\{J_{H_v}(t), J_{-H_v}(t)\}$, $0 < t < \infty$ da, (6.40) denkleminin temel çözümler cümlesi olduğundan (6.42) eşitliğindeki matrisi $t > 0$ için tersinirdir. Böylece Lemma 6.5 den eğer $v \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$ ise $\{J_{H_v}(t), Y_{H_v}(t)\}$ çifti (6.40) denkleminin bir temel çözümler cümlesidir. Ayrıca $0 < t < \infty$ da (6.6) ve (6.39) gösterimlerinden dolayı

$$J_{H_n}(t)Y_{H_n}'(t) - Y_{H_n}(t)J_{H_n}'(t)$$

üst üçgensel matrisinin köşegen elemanları

$$J_n(t)Y_n'(t) - Y_n(t)J_n'(t) \quad (6.43)$$

olup, sıfırdan farklıdır. (6.43) farkı, $\{J_n(t), Y_n(t)\}$ çözüm çiftinin Wronskiyeni olduğundan $\{J_n(t), Y_n(t)\}$ çözüm çifti $v = n$. basamaktan skaler Bessel denkleminin temel çözümler cümlesidir. Bu durumda $\{J_{H_n}(t), Y_{H_n}(t)\}$ çiftinde $v \rightarrow n \in \mathbb{Z}$ için (6.40) denkleminin bir temel çözümler cümlesi olduğu gösterilmiş olur. Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmıştır:

Teorem 6.5 *v kompleks bir sayı, H_v matrisi (6.36) ile verilen Jordan blok matris ve (6.6), (6.37) ve (6.39) gösterimleri ile tanımlanan matris fonksiyon çifti $\{J_{H_v}(t), Y_{H_v}(t)\}$ olsun. $\{J_{H_v}(t), Y_{H_v}(t)\}$ çifti $0 < t < \infty$ da (6.40) denkleminin temel çözümler cümlesidir.*

(6.34) ayrışımında, A matrisinin Jordan kanonik formu $H = \text{diag}(H_1, \dots, H_k)$ olsun ve

$$Y(t, H) = \text{diag}_{1 \leq i \leq k} [Y_{H_i}(t)]$$

olarak tanımlansın. Teorem 6.5 ten $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ de herhangi bir matris için (6.32) denkleminin temel çözümler cümlesi $\{X(t, H), Y(t, H)\}$ dır. Eğer $P, \mathbb{C}^{n \times n}$ de (6.34) koşulunu sağlayan herhangi bir matris ise

$$X(t, A) \text{ ve } Y(t, A) = P^{-1}Y(t, H)P, \quad 0 < t < \infty$$

da (6.1) denkleminin temel çözümler cümlesidir. Bu açıklamalara dayanarak aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 6.1 *$A, \mathbb{C}^{n \times n}$ de herhangi bir matris, H matrisi A nın Jordan kanonik formu ve P matrisi (6.34) koşulunu sağlayan tersinir bir matris olsun. (6.21) ile tanımlanan $X(t, A)$ ve $Y(t, A) = P^{-1}Y(t, H)P$ çözümleri için (6.1) denkleminin $\mathbb{C}^n$ vektör değerli tüm çözümlerinin cümlesi*

$$X(t) = X(t, A)C + P^{-1}Y(t, H)PD, \quad 0 < t < \infty, \quad \text{keyfi } C, D \in \mathbb{C}^n$$

dir.

7. JACOBI MATRİS POLİNOMLARI İLE İLGİLİ YENİ BAZI ÖZELLİKLER

Orijinal olan bu bölümde, Altın, Çekim ve Duman'ın yaptığı bir çalışmada bulunan Jacobi matris polinomları ile ilgili özellikler verilmiştir.

7.1 Jacobi Matris Polinomları için Matris Doğurucu Fonksiyonlar

Teorem 7.1 *A ve B matrisleri (5.1) koşulunu sağlamak üzere Jacobi matris polinomları*

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (A + B + I)_n P_n^{(A,B)}(x) [(B + I)_n]^{-1} r^n \\ &= (1 + r)^{-(A+B+I)} F \left(\frac{A + B + I}{2}, \frac{A + B + 2I}{2}; B + I; \frac{2r(x + 1)}{(1 + r)^2} \right), \quad |r| < 1 \end{aligned} \quad (7.1)$$

ile verilen matris doğurucu fonksiyonuna sahiptir.

İspat. (7.1) in sol tarafında $P_n^{(A,B)}(x)$ in (5.4) deki gösterimi kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (A + B + I)_n P_n^{(A,B)}(x) [(B + I)_n]^{-1} r^n = \sum_{n=0}^{\infty} (A + B + I)_n \frac{(-1)^n}{n!} \\ & \times \sum_{k=0}^n \left\{ \frac{((n + 1)I + A + B)_k (-nI)_k [(B + I)_k]^{-1}}{k!} \right. \\ & \left. \times \left(\frac{1 + x}{2} \right)^k (B + I)_n [(B + I)_n]^{-1} r^n \right\} \end{aligned}$$

olur. $(-nI)_k$ için (3.7) özelliğinin kullanılmasıyla yukarıdaki ifade

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (A + B + I)_n P_n^{(A,B)}(x) [(B + I)_n]^{-1} r^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(A + B + I)_n (-1)^{n+k} ((n + 1)I + A + B)_k [(B + I)_k]^{-1} \left(\frac{1 + x}{2} \right)^k}{(n - k)! k!} r^n \end{aligned} \quad (7.2)$$

olarak yazılabilir. Ayrıca (2.1) ile verilen Pochhammer gösteriminden dolayı

$$(A + B + I)_n ((n + 1)I + A + B)_k = (A + B + I)_{n+k}$$

olup, bu eşitlik (7.2) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (A + B + I)_n P_n^{(A,B)}(x) [(B + I)_n]^{-1} r^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A + B + I)_{n+2k} (-1)^n}{n! k!} [(B + I)_k]^{-1} \left(\frac{1+x}{2}\right)^k r^{n+k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(A + B + I)_{2k} (-1)^n r^n}{n!} \left(\frac{1+x}{2}\right)^k \right. \\ & \quad \times \left. \frac{(A + B + I + 2kI)_n r^k}{k!} [(B + I)_k]^{-1} \right\} \end{aligned} \quad (7.3)$$

bulunur. Diğer yandan (2.2) deki $(1 - y)^{-A}$ nın ifadesinden dolayı

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A + B + I + 2kI)_n (-1)^n r^n}{n!} = (1 + r)^{-(A+B+(2k+1)I)}$$

yazılabilir ki, bu ifade (7.3) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (A + B + I)_n P_n^{(A,B)}(x) [(B + I)_n]^{-1} r^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A + B + I)_{2k} (1 + r)^{-(A+B+(2k+1)I)} r^k}{k!} [(B + I)_k]^{-1} \left(\frac{1+x}{2}\right)^k \end{aligned} \quad (7.4)$$

elde edilir. (2.1) ile verilen Pochhammer gösteriminden dolayı

$$(A + B + I)_{2k} = 2^{2k} \left(\frac{A + B + I}{2}\right)_k \left(\frac{A + B + 2I}{2}\right)_k$$

olduğu dikkate alınır ve bu değer (7.4) de yerine konulursa

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (A + B + I)_n P_n^{(A,B)}(x) [(B + I)_n]^{-1} r^n \\ &= (1 + r)^{-(A+B+I)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k} \left(\frac{A+B+I}{2}\right)_k \left(\frac{A+B+2I}{2}\right)_k r^k}{k! (1 + r)^{2k}} [(B + I)_k]^{-1} \left(\frac{1+x}{2}\right)^k \\ &= (1 + r)^{-(A+B+I)} F\left(\frac{A + B + I}{2}, \frac{A + B + 2I}{2}; B + I; \frac{2r(x+1)}{(1+r)^2}\right) \end{aligned}$$

bulunur ve Jacobi matris polinomları için bir matris doğurucu fonksiyonu elde edilmiş olur. ■

Teorem 7.2 *A ve B matrisleri (5.1) koşulunu sağlamak üzere Jacobi matris polinomları*

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (A + B + I)_n P_n^{(A,B)}(x) [(A + I)_n]^{-1} r^n \\ &= (1 - r)^{-(A+B+I)} F\left(\frac{A + B + I}{2}, \frac{A + B + 2I}{2}; A + I; \frac{2r(x - 1)}{(1 - r)^2}\right), \quad |r| < 1 \end{aligned} \quad (7.5)$$

doğurucu fonksiyon eşitliğini sağlar.

İspat. (7.5) in sol tarafında $P_n^{(A,B)}(x)$ in

$$P_n^{(A,B)}(x) = \frac{1}{n!} F\left(A + B + (n + 1)I, -nI; A + I; \frac{1 - x}{2}\right) (A + I)_n$$

ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (A + B + I)_n P_n^{(A,B)}(x) [(A + I)_n]^{-1} r^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (A + B + I)_n \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \left\{ \frac{((n + 1)I + A + B)_k (-nI)_k [(A + I)_k]^{-1}}{k!} \right. \\ & \quad \left. \times \left(\frac{1 - x}{2}\right)^k (A + I)_n [(A + I)_n]^{-1} r^n \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. $(-nI)_k$ nın (3.7) deki eşiti yukarıda yerine konulursa,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (A + B + I)_n P_n^{(A,B)}(x) [(A + I)_n]^{-1} r^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(A + B + I)_n (-1)^k ((n + 1)I + A + B)_k [(A + I)_k]^{-1} \left(\frac{1 - x}{2}\right)^k r^n}{(n - k)! k!} \end{aligned} \quad (7.6)$$

bulunur. (2.1) ile verilen Pochhammer gösteriminden dolayı

$$(A + B + I)_n ((n + 1)I + A + B)_k = (A + B + I)_{n+k}$$

olup, bu ifade (7.6) da yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} (A+B+I)_n P_n^{(A,B)}(x) [(A+I)_n]^{-1} r^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+B+I)_{n+2k} (-1)^k}{n! k!} [(A+I)_k]^{-1} \left(\frac{1-x}{2}\right)^k r^{n+k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(A+B+I)_{2k} (-1)^k r^n}{n!} \left(\frac{1-x}{2}\right)^k \right. \\
&\quad \left. \times \frac{(A+B+I+2kI)_n r^k}{k!} [(A+I)_k]^{-1} \right\} \tag{7.7}
\end{aligned}$$

elde edilir. (2.2) den dolayı

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A+B+I+2kI)_n r^n}{n!} = (1-r)^{-(A+B+(2k+1)I)}$$

olup bu ifadenin (7.7) de yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} (A+B+I)_n P_n^{(A,B)}(x) [(A+I)_n]^{-1} r^n \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+B+I)_{2k} (1-r)^{-(A+B+(2k+1)I)} r^k}{k!} [(A+I)_k]^{-1} \left(\frac{1-x}{2}\right)^k \tag{7.8}
\end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan (2.1) deki Pochhammer gösteriminden dolayı

$$(A+B+I)_{2k} = 2^{2k} \left(\frac{A+B+I}{2}\right)_k \left(\frac{A+B+2I}{2}\right)_k$$

olup bu ifade, (7.8) de yerine konulursa

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} (A+B+I)_n P_n^{(A,B)}(x) [(A+I)_n]^{-1} r^n \\
&= (1-r)^{-(A+B+I)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k} \left(\frac{A+B+I}{2}\right)_k \left(\frac{A+B+2I}{2}\right)_k (-r)^k}{k! (1-r)^{2k}} [(A+I)_k]^{-1} \left(\frac{1-x}{2}\right)^k \\
&= (1-r)^{-(A+B+I)} F\left(\frac{A+B+I}{2}, \frac{A+B+2I}{2}; A+I; \frac{2r(x-1)}{(1-r)^2}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece Jacobi matris polinomları için başka bir matris doğurucu fonksiyonu bulunmuş olur. ■

Teorem 7.3 $\mathbb{C}^{r \times r}$ deki A, B, C, D matrisleri $AB = BA$ ve $\forall n \geq 0$ doğal sayısı için $C + nI$ ve $D + nI$ matrisleri tersinir olma koşullarını sağlasın. İki değişkenli Appell fonksiyonlarının matris versiyonu olan $F_4(A, B; C, D; x, y)$ fonksiyonu

$$F_4(A, B; C, D; x, y) = \sum_{n,k=0}^{\infty} (A)_{n+k} (B)_{n+k} (D)_n^{-1} (C)_k^{-1} \frac{x^k y^n}{k! n!} \quad (7.9)$$

olmak üzere, $P_n^{(A,B)}(x)$ Jacobi matris polinomları

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(A,B)}(x) t^n = F_4\left(I + B, I + A; I + A, I + B; \frac{(x-1)t}{2}; \frac{(x+1)t}{2}\right) \quad (7.10)$$

ile verilen matris doğurucu fonksiyonuna sahiptir.

İspat. (7.10) un sol tarafında $P_n^{(A,B)}(x)$ yerine

$$P_n^{(A,B)}(x) = \frac{(-1)^n (1-x)^n}{n! 2^n} F\left(-nI, -(A+nI); B+I; \frac{x+1}{x-1}\right) (B+I)_n$$

ifadesi yazılır ve (3.7) özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(A,B)}(x) t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(x-1)^n}{n! 2^n} F\left(-nI, -(A+nI); B+I; \frac{x+1}{x-1}\right) (B+I)_n \right\} t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \left\{ \frac{(-1)^k [-(A+nI)]_k}{(n-k)! 2^n k!} (B+I)_k^{-1} (B+I)_n (x-1)^n \right. \\ & \quad \left. \times \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^k t^n \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. (2.5) ile verilen indis değişim özelliğinden dolayı, yukarıdaki eşitliğin ikinci yam

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(A,B)}(x) t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^k [-(A+(n+k)I)]_k}{n! 2^{n+k} k!} (B+I)_k^{-1} \right. \\ & \quad \left. \times (B+I)_{n+k} (x-1)^{n+k} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^k t^{n+k} \right\} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir. Pochhammer sembolünün bilinen özelliklerinden

$$[-(A+(n+k)I)]_k = (-1)^k (A+I)_{n+k} (A+I)_n^{-1}$$

olup, bu eşitlik yukarıda kullanılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(A,B)}(x)t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ (A+I)_{n+k} (B+I)_{n+k} (A+I)_n^{-1} \right. \\ &\quad \left. \times (B+I)_k^{-1} \left(\frac{(x-1)t}{2} \right)^n \left(\frac{(x+1)t}{2} \right)^k \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitliğin ikinci yanı, F_4 ün (7.9) ifadesinden dolayı

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (A+I)_{n+k} (B+I)_{n+k} (A+I)_n^{-1} (B+I)_k^{-1} \left(\frac{(x-1)t}{2} \right)^n \left(\frac{(x+1)t}{2} \right)^k \\ &= F_4 \left(I+B, I+A; I+A, I+B; \frac{(x-1)t}{2}; \frac{(x+1)t}{2} \right) \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir ve böylece istenilende elde edilmiş olur. ■

Teorem 7.4 A, B, C, D matrisleri $\mathbb{C}^{r \times r}$ de olmak üzere, $\forall n \geq 0$ doğal sayısı için $A+nI$ ve $B+nI$ matrisleri tersinir olma koşulunu sağlasınlar. $P_n^{(A,B)}(x)$ Jacobi matris polinomları

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} (C)_n (D)_n (I+B)_n^{-1} P_n^{(A,B)}(x) (I+A)_n^{-1} t^n \\ &= F_4 \left(C, D; I+A, I+B; \frac{(x-1)t}{2}; \frac{(x+1)t}{2} \right) \end{aligned} \quad (7.11)$$

eşitliği ile verilen matris doğurucu fonksiyonuna sahiptir.

İspat. (7.11) in sol tarafında $P_n^{(A,B)}(x)$ yerine

$$P_n^{(A,B)}(x) = \frac{(1+x)^n}{2^n} F \left(-nI, -(B+nI); A+I; \frac{x-1}{x+1} \right) (A+I)_n$$

ifadesi yazılırsa

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} (C)_n (D)_n (I+B)_n^{-1} P_n^{(A,B)}(x) (I+A)_n^{-1} t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (C)_n (D)_n (I+B)_n^{-1} \frac{(1+x)^n}{2^n} F \left(-nI, -(B+nI); A+I; \frac{x-1}{x+1} \right) \right. \\ &\quad \left. \times (A+I)_n (I+A)_n^{-1} t^n \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \left\{ (C)_n (D)_n (I+B)_n^{-1} \frac{(1+x)^n}{2^n} \frac{(-1)^k}{(n-k)!} \frac{[-(B+nI)]_k}{k!} (A+I)_k^{-1} \right. \\
&\quad \left. \times \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^k t^n \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Çift toplamda (2.5) özelliğinin kullanılmasıyla da,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} (C)_n (D)_n (I+B)_n^{-1} P_n^{(A,B)}(x) (I+A)_n^{-1} t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (C)_{n+k} (D)_{n+k} (I+B)_{n+k}^{-1} \left\{ \frac{(-1)^k [-(B+(n+k)I)]_k}{n! 2^{n+k} k!} \right. \\
&\quad \left. \times (A+I)_k^{-1} (x+1)^{n+k} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^k t^{n+k} \right\}
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Pochhammer sembolünden dolayı,

$$[-(B+(n+k)I)]_k = (-1)^k (B+I)_{n+k} (B+I)_n^{-1}$$

değeri yukarıda yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} (C)_n (D)_n (I+B)_n^{-1} P_n^{(A,B)}(x) (I+A)_n^{-1} t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{(C)_{n+k} (D)_{n+k} (B+I)_n^{-1} (A+I)_k^{-1}}{n! k!} \right. \\
&\quad \left. \times \left(\frac{(x-1)t}{2} \right)^k \left(\frac{(x+1)t}{2} \right)^n \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitliğin ikinci yanı, F_4 ün (7.9) ifadesinden dolayı

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(C)_{n+k} (D)_{n+k} (B+I)_n^{-1} (A+I)_k^{-1}}{n! k!} \left(\frac{(x-1)t}{2} \right)^k \left(\frac{(x+1)t}{2} \right)^n \\
&= F_4 \left(C, D; I+A, I+B; \frac{(x-1)t}{2}; \frac{(x+1)t}{2} \right)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir ve böylece istenilen elde edilmiş olur. ■

7.2 Jacobi ve Gegenbauer Matris Polinomları Arasındaki Bir Bağntı

Gegenbauer matris polinomları

$$(1-2xr+r^2)^{-A} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^A(x) r^n \quad (7.12)$$

doğurucu matris fonksiyonu yardımıyla tanımlanmıştır (Jódar vd. 1994).

Teorem 7.1 de $B = A$ alındığında

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (2A + I)_n P_n^{(A,A)}(x) [(A + I)_n]^{-1} r^n \\ &= (1 + r)^{-(2A+I)} F\left(\frac{2A + I}{2}; -; \frac{2r(x + 1)}{(1 + r)^2}\right) \end{aligned}$$

olur ki, burada (2.2) özelliğinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (2A + I)_n P_n^{(A,A)}(x) [(A + I)_n]^{-1} r^n \\ &= (1 + r)^{-(2A+I)} \left(1 - \frac{2r(x+1)}{(1+r)^2}\right)^{-(A+I/2)} \\ &= (1 - 2xr + r^2)^{-(A+I/2)} \end{aligned} \quad (7.13)$$

elde edilir. (7.12) nin A yerine $A + \frac{I}{2}$ alınmış şekliyle (7.13) karşılaştırılırsa

$$C_n^{A+I/2}(x) = (2A + I)_n P_n^{(A,A)}(x) [(A + I)_n]^{-1}$$

olduğu görülür ve böylece bu iki matris polinom arasında sağlanan bir bağıntı elde edilmiş olur.

7.3 Jacobi Matris Polinomları için Rekürans Bağıntıları

Teorem 7.5 $\Psi(u)$ matris fonksiyonu

$$\Psi(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n u^n, \quad \gamma_0 \neq \mathbf{0}, \quad \gamma_n \in \mathbb{C}^{r \times r} \quad (7.14)$$

şeklinde bir seri açılımına ve $f_n(x)$ matris polinomları da,

$$(1 - t)^{-C} \Psi\left(\frac{-4xt}{(1 - t)^2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) t^n, \quad C \in \mathbb{C}^{r \times r} \quad (7.15)$$

şeklinde bir matris doğurucu fonksiyonuna sahip olsun. (7.14) ve (7.15) ile tanımlanan $f_n(x)$ polinomları aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$$f_n(x) = \frac{(C)_n}{n!} \sum_{k=0}^n (-nI)_k (C + nI)_k \left[\left(\frac{C}{2}\right)_k \left(\frac{C}{2} + \frac{I}{2}\right)_k \right]^{-1} \gamma_k x^k \quad (7.16)$$

$$xf'_n(x) - nf_n(x) = -(C + (n-1)I)f_{n-1}(x) - xf'_{n-1}(x) \quad , \quad n \geq 1 \quad (7.17)$$

$$xf'_n(x) - nf_n(x) = -C \sum_{k=0}^{n-1} f_k(x) - 2x \sum_{k=0}^{n-1} f'_k(x) \quad , \quad n \geq 1 \quad (7.18)$$

$$xf'_n(x) - nf_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} (C + 2kI) f_k(x) \quad , \quad n \geq 1 \quad (7.19)$$

Burada $\forall n \geq 0$ doğal sayısı için $C + nI$ lar tersinir matrislerdir.

İspat. Önce (7.16) yı elde edelim. Bunun için, (7.15) de (7.14) serisi kullanılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) t^n = \sum_{k=0}^{\infty} (1-t)^{-(C+2kI)} (-4)^k \gamma_k t^k x^k$$

olur. Bu eşitliğin ikinci yanında sırasıyla (2.2) açılımı ile birlikte

$$[(C)_{2k}]^{-1} = 4^k \left[\left(\frac{C}{2} \right)_k \left(\frac{C}{2} + \frac{I}{2} \right)_k \right]^{-1}$$

eşitliği ve (2.4) indis değiştirme özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) t^n &= \sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{(C+2kI)_n}{n!} [(C)_{2k}] [(C)_{2k}]^{-1} (-4)^k \gamma_k t^{n+k} x^k \\ &= \sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{(C)_{n+2k}}{n!} [(C)_{2k}]^{-1} (-4)^k \gamma_k t^{n+k} x^k \\ &= \sum_{n,k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(C)_{n+2k}}{n!} \left[\left(\frac{C}{2} \right)_k \left(\frac{C}{2} + \frac{I}{2} \right)_k \right]^{-1} \gamma_k t^{n+k} x^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(C)_{n+k}}{(n-k)!} \left[\left(\frac{C}{2} \right)_k \left(\frac{C}{2} + \frac{I}{2} \right)_k \right]^{-1} \gamma_k t^n x^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(C)_n}{n!} \sum_{k=0}^n (-nI)_k (C+nI)_k \left[\left(\frac{C}{2} \right)_k \left(\frac{C}{2} + \frac{I}{2} \right)_k \right]^{-1} \gamma_k x^k t^n \end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak istenilene ulaşmak için t^n nin katsayılarını eşitlemek yeterlidir.

Şimdi de (7.17), (7.18) ve (7.19) rekürans bağıntılarını elde edelim. Bunun için (7.15) in birinci yanındaki

$$G(x, t) = (1-t)^{-C} \Psi \left(\frac{-4xt}{(1-t)^2} \right)$$

matris fonksiyonunun x ve t ye göre türevleri alınır, sırasıyla

$$\frac{\partial G}{\partial x} = -4t(1-t)^{-C-2I} \Psi' \quad (7.20)$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = C(1-t)^{-C-I}\Psi - 4x(1+t)(1-t)^{-C-3I}\Psi' \quad (7.21)$$

denklemleri bulunur. (7.20),(7.21) ve G nin tanımından görülürki, G matris fonksiyonu

$$x(1+t)\frac{\partial G}{\partial x} - t(1-t)\frac{\partial G}{\partial t} = -CtG \quad (7.22)$$

kısmi türevli matris denklemini sağlar. (7.22) denkleminde uygun işlemler yapılarak

$$x\frac{\partial G}{\partial x} - t\frac{\partial G}{\partial t} = -CtG - t^2\frac{\partial G}{\partial t} - xt\frac{\partial G}{\partial x} \quad (7.23)$$

$$x\frac{\partial G}{\partial x} - t\frac{\partial G}{\partial t} = -\frac{Ct}{1-t}G - \frac{2xt}{1-t}\frac{\partial G}{\partial x} \quad (7.24)$$

$$x\frac{\partial G}{\partial x} - t\frac{\partial G}{\partial t} = -\frac{Ct}{1+t}G - \frac{2t^2}{1+t}\frac{\partial G}{\partial t} \quad (7.25)$$

denklemleri yazılabilirler. $G(x, t)$ fonksiyonunun

$$G(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)t^n \quad (7.26)$$

serisel ifadesinin (7.23) te yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \left[xf'_n(x) - nf_n(x) \right] t^n \\ &= -C \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)t^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} nf_n(x)t^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} xf'_n(x)t^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[-(C + (n-1)I)f_{n-1}(x) - xf'_{n-1}(x) \right] t^n \end{aligned}$$

elde edilir ki, burada t^n nin katsayıları eşitlenirse (7.17) rekürans bağıntısı bulunmuş olur.

Şimdi de (7.18) i elde edelim. (7.26) ifadesi (7.24) de yerine yazılır ve $\frac{1}{1-t}$ fonksiyonunun

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \quad ; \quad |t| < 1 \quad (7.27)$$

Taylor serisi ve de (2.4) özelliğinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \left[x f'_n(x) - n f_n(x) \right] t^n &= -C \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^{n+1} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) t^k \right) \\
&\quad - 2x \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^{n+1} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} f'_k(x) t^k \right) \\
&= -C \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n f_k(x) t^{n+1} - 2x \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n f'_k(x) t^{n+1} \\
&= -C \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f_k(x) t^n - 2x \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f'_k(x) t^n
\end{aligned}$$

elde edilir. Nihayet bu son eşitlikte, t^n nin katsayıları eşitlenirse (7.18) bağıntısı bulunur.

Son olarak (7.19) u elde etmek için (7.26) ifadesi (7.25) de yerine yazıldıktan sonra (7.27) serisi ve (2.4) özelliğinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \left[x f'_n(x) - n f_n(x) \right] t^n &= -C \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{n+1} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) t^k \right) \\
&\quad - 2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{n+1} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} k f_k(x) t^k \right) \\
&= - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} (C + 2kI) f_k(x) t^{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} (C + 2kI) f_k(x) t^n
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada t^n nin katsayıları eşitlenirse istenilen (7.19) bağıntısı bulunmuş olur. ■

Rekürans Bağıntıları. (Teorem 7.5 in uygulaması):

Teorem 7.5 te C ve γ_n matrisleri

$$C = A + B + I \quad ; \quad \gamma_n = \frac{(I + A + B)_{2n}}{2^{2n} n!} (I + A)_n^{-1}$$

olarak seçilirse

$$f_n(x) = (I + A + B)_n P_n^{(A,B)}(1 - 2x) (I + A)_n^{-1}$$

elde edilir. Bu durumda (7.17), (7.18) ve (7.19) rekürans bağıntıları kullanılarak, Jacobi matris polinomları için

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & (x-1) \left[(A+B+nI) \frac{dP_n^{(A,B)}(x)}{dx} + \frac{dP_{n-1}^{(A,B)}(x)}{dx} (A+nI) \right] \\ &= (A+B+nI) \left[nP_n^{(A,B)}(x) - P_{n-1}^{(A,B)}(x)(A+nI) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad & (x-1) \frac{dP_n^{(A,B)}(x)}{dx} - nP_n^{(A,B)}(x) = -(A+B+I)_n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \{ (A+B+I)_k \\ & \times \left[(A+B+I)P_k^{(A,B)}(x) + 2(x-1) \frac{dP_k^{(A,B)}(x)}{dx} \right] (I+A)_k^{-1} (A+I)_n \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii)} \quad & (x-1) \frac{dP_n^{(A,B)}(x)}{dx} - nP_n^{(A,B)}(x) = (A+B+I)_n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \{ (-1)^{n-k} \\ & \times (A+B+2kI+I)(A+B+I)_k P_k^{(A,B)}(x) (I+A)_k^{-1} (A+I)_n \}. \end{aligned}$$

rekürans bağıntıları bulunur. Burada $\forall n \geq 0$ doğal sayısı için $A+B+nI$ ler tersinir matrislerdir.

7.4 Jacobi Matris Polinomları için Multilineer ve Multilateral Matris Doğurucu Fonksiyonları

Bu kısımda, Jacobi matris polinomları için bazı multilineer ve multilateral matris doğurucu fonksiyonları bulunmaktadır. Bu tip matris doğurucu fonksiyonları bulmak için öncelikle aşağıdaki teoremi verelim:

Teorem 7.6 $y_1, \dots, y_s$ ($s \in \mathbb{N}$), s tane kompleks değişken ve μ kompleks indis olmak üzere $\Omega_\mu(y_1, \dots, y_s)$ sıfırlanmayan fonksiyonu

$$\Lambda_{\mu,\nu}(y_1, \dots, y_s; z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Omega_{\mu+\nu k}(y_1, \dots, y_s) z^k \quad (7.28)$$

$$(a_k \neq 0, \quad \mu, \nu \in \mathbb{C})$$

doğurucu fonksiyonuna sahip olsun ve $\Theta_{n,p,\mu,\nu}(x; y_1, \dots, y_s; \zeta)$ fonksiyonu

$$\Theta_{n,p,\mu,\nu}(x; y_1, \dots, y_s; \zeta) \quad (7.29)$$

$$: = \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k (A + B + I)_{n-pk} P_{n-pk}^{(A,B)}(x) [(B + I)_{n-pk}]^{-1} \Omega_{\mu+\nu k}(y_1, \dots, y_s) \zeta^k$$

şeklinde gösterilsin. Bu takdirde $n, p \in \mathbb{N}$ ve (5.1) koşulunu sağlayan A ve B matrisleri için Jacobi matris polinomları cinsinden (7.29) ile ifade edilen $\Theta_{n,p,\mu,\nu}$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,p,\mu,\nu} \left(x; y_1, \dots, y_s; \frac{\eta}{t^p} \right) t^n \\ &= (1+t)^{-(A+B+I)} F \left(\frac{A+B+I}{2}, \frac{A+B+2I}{2}; B+I; \frac{2t(x+1)}{(1+t)^2} \right) \\ & \quad \times \Lambda_{\mu,\nu}(y_1, \dots, y_s; \eta) \end{aligned} \quad (7.30)$$

ile verilen matris doğurucu fonksiyonuna sahiptir.

İspat. Teorem 7.6 yı ispatmak için ilk önce (7.29) ile tanımlanan

$$\Theta_{n,p,\mu,\nu} \left(x; y_1, \dots, y_s; \frac{\eta}{t^p} \right)$$

fonksiyonunu, (7.30) un birinci yanındaki yerine yazalım ve bunu S ile gösterelim.

Bu durumda

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k (A + B + I)_{n-pk} P_{n-pk}^{(A,B)}(x) [(B + I)_{n-pk}]^{-1} \Omega_{\mu+\nu k}(y_1, \dots, y_s) \eta^k t^{n-pk} \quad (7.31)$$

olur. (7.31) de n yerine $(n + pk)$ alınırsa ve (7.1) matris doğurucu fonksiyonunun ve (7.28) in kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (A + B + I)_n P_n^{(A,B)}(x) [(B + I)_n]^{-1} \Omega_{\mu+\nu k}(y_1, \dots, y_s) \eta^k t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (A + B + I)_n P_n^{(A,B)}(x) [(B + I)_n]^{-1} t^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Omega_{\mu+\nu k}(y_1, \dots, y_s) \eta^k \end{aligned}$$

$$= (1+t)^{-(A+B+I)} F\left(\frac{A+B+I}{2}, \frac{A+B+2I}{2}; B+I; \frac{2t(x+1)}{(1+t)^2}\right)$$

$$\times \Lambda_{\mu,\nu}(y_1, \dots, y_s; \eta)$$

elde edilir ve böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur. ■

Özel olarak,

$$\Omega_{\mu+\nu k}(y_1, \dots, y_s) \quad (k \in \mathbb{N}_0, \quad s \in \mathbb{N})$$

fonksiyonunun bazı özel seçimlerinde Teorem 7.6'nın bazı uygulamaları aşağıda verilmiştir. Örneğin, Teorem 7.6'da Laguerre matris polinomlarını, yani

$$s = 1 \text{ için } \Omega_{\mu+\nu k}(y) = L_{\mu+\nu k}^{(C,\lambda)}(y)$$

alalım. Buradaki $C \in \mathbb{C}^{r \times r}$ matrisi, $\forall n > 0$ doğal sayısı için $C + nI$ lar tersinir olacak şekilde bir matris ve λ , $\text{Re}(\lambda) > 0$ özelliğini sağlayan bir kompleks sabit olmak üzere, Laguerre matris polinomları

$$L_n^{(C,\lambda)}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \lambda^k}{k! (n-k)!} (C+I)_n [(C+I)_k]^{-1} x^k$$

ifadesine sahip olup,

$$|t| < 1, \quad -\infty < x < \infty$$

koşulları altında

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(C,\lambda)}(x) t^n = (1-t)^{-(C+I)} \exp\left(\frac{-\lambda x t}{1-t}\right) \quad (7.32)$$

matris doğurucu fonksiyonuna sahiptir (Jóðar vd. 1993). Aşağıda Jacobi ve Laguerre matris polinomlarını kullanarak bilateral bir matris doğurucu fonksiyonu elde edilmektedir.

Sonuç 7.1 $a_k \neq 0$, $\mu, \nu \in \mathbb{N}_0$ için Laguerre matris polinomları

$$\Lambda_{\mu,\nu}(y; z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k L_{\mu+\nu k}^{(C,\lambda)}(y) z^k \quad ; \quad n, p \in \mathbb{N} \quad (7.33)$$

matris doğurucu fonksiyonuna sahip olsun.

$$\Theta_{n,p,\mu,\nu}(x; y; \zeta) := \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k (A+B+I)_{n-pk} P_{n-pk}^{(A,B)}(x) [(B+I)_{n-pk}]^{-1} L_{\mu+\nu k}^{(C,\lambda)}(y) \zeta^k \quad (7.34)$$

ile tanımlanan $\Theta_{n,p,\mu,\nu}(x; y; \zeta)$ için bir matris doğurucu fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,p,\mu,\nu} \left(x; y; \frac{\eta}{t^p} \right) t^n = (1+t)^{-(A+B+I)} \times F \left(\frac{A+B+I}{2}, \frac{A+B+2I}{2}; B+I; \frac{2t(x+1)}{(1+t)^2} \right) \Lambda_{\mu,\nu}(y; \eta) \quad (7.35)$$

olarak verilebilir.

İspat. (7.34) ile tanımlanan

$$\Theta_{n,p,\mu,\nu} \left(x; y_1, \dots, y_s; \frac{\eta}{t^p} \right)$$

fonksiyonun (7.35) in sol tarafında yerine yazılmasıyla

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k (A+B+I)_{n-pk} P_{n-pk}^{(A,B)}(x) [(B+I)_{n-pk}]^{-1} L_{\mu+\nu k}^{(C,\lambda)}(y) \eta^k t^{n-pk} \quad (7.36)$$

elde edilir. (7.36) da n yerine $(n+pk)$ alınır ve (7.33) matris doğurucu fonksiyonu kullanılırsa

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (A+B+I)_n P_n^{(A,B)}(x) [(B+I)_n]^{-1} L_{\mu+\nu k}^{(C,\lambda)}(y) \eta^k t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (A+B+I)_n P_n^{(A,B)}(x) [(B+I)_n]^{-1} t^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k L_{\mu+\nu k}^{(C,\lambda)}(y) \eta^k \\ &= (1+t)^{-(A+B+I)} F \left(\frac{A+B+I}{2}, \frac{A+B+2I}{2}; B+I; \frac{2t(x+1)}{(1+t)^2} \right) \Lambda_{\mu,\nu}(y; \eta) \end{aligned}$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanır. ■

Uyarı 7.1 (7.35) de $a_k = 1$, $\mu = 0$, $\nu = 1$ alınması ve (7.32) matris doğurucu fonksiyonunun kullanılmasıyla Jacobi ve Laguerre matris polinomları için

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} (A+B+I)_{n-pk} P_{n-pk}^{(A,B)}(x) [(B+I)_{n-pk}]^{-1} L_k^{(C,\lambda)}(y) \eta^k t^{n-pk} \\ &= (1+t)^{-(A+B+I)} F \left(\frac{A+B+I}{2}, \frac{A+B+2I}{2}; B+I; \frac{2t(x+1)}{(1+t)^2} \right) \\ &\quad \times (1-\eta)^{-(C+I)} \exp \left(\frac{-\lambda y \eta}{1-\eta} \right) ; |\eta| < 1, -\infty < y < \infty \end{aligned}$$

bilateral bir matris doğurucu fonksiyonu elde edilmiş olur.

Teorem 7.6 da $s = 1$ ve $\Omega_{\mu+\nu k}(y) = P_{\mu+\nu k}^{(A,B)}(y)$ ($\mu, \nu \in \mathbb{N}_0$) olarak seçildiğinde Jacobi matris polinomları için bilineer matris doğurucu fonksiyonu aşağıdaki şekilde bulunabilir:

Sonuç 7.2 $a_k \neq 0$, $\mu, \nu \in \mathbb{N}_0$ için Jacobi matris polinomları

$$\Lambda_{\mu,\nu}(y; z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_{\mu+\nu k}^{(A,B)}(y) z^k \quad ; \quad n, p \in \mathbb{N} \quad (7.37)$$

matris doğurucu fonksiyonuna sahip olsun.

$$\Theta_{n,p,\mu,\nu}(x; y; \zeta) := \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k (A + B + I)_{n-pk} P_{n-pk}^{(A,B)}(x) [(B + I)_{n-pk}]^{-1} P_{\mu+\nu k}^{(A,B)}(y) \zeta^k \quad (7.38)$$

ile tanımlanan $\Theta_{n,p,\mu,\nu}(x; y; \zeta)$ için bir matris doğurucu fonksiyonu

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,p,\mu,\nu} \left(x; y; \frac{\eta}{t^p} \right) t^n &= (1+t)^{-(A+B+I)} \\ &\times F \left(\frac{A+B+I}{2}, \frac{A+B+2I}{2}; B+I; \frac{2t(x+1)}{(1+t)^2} \right) \Lambda_{\mu,\nu}(y; \eta) \end{aligned} \quad (7.39)$$

olur.

İspat. (7.38) ile tanımlanan

$$\Theta_{n,p,\mu,\nu} \left(x; y; \frac{\eta}{t^p} \right)$$

fonskiyonu, (7.39) un sol tarafında yerine yazılırsa

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k (A + B + I)_{n-pk} P_{n-pk}^{(A,B)}(x) [(B + I)_{n-pk}]^{-1} P_{\mu+\nu k}^{(A,B)}(y) \eta^k t^{n-pk} \quad (7.40)$$

elde edilir. (7.40) da n yerine $(n + pk)$ alınması ve (7.37) matris doğurucu fonksiyonunun kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (A + B + I)_n P_n^{(A,B)}(x) [(B + I)_n]^{-1} P_{\mu+\nu k}^{(A,B)}(y) \eta^k t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (A + B + I)_n P_n^{(A,B)}(x) [(B + I)_n]^{-1} t^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_{\mu+\nu k}^{(A,B)}(y) \eta^k \\ &= (1+t)^{-(A+B+I)} F \left(\frac{A+B+I}{2}, \frac{A+B+2I}{2}; B+I; \frac{2t(x+1)}{(1+t)^2} \right) \Lambda_{\mu,\nu}(y; \eta) \end{aligned}$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Uyarı 7.2 *Teorem 7.6 da $a_k = 1$, $\mu = 0$, $\nu = 1$ alınıp, Teorem 7.3 ün kullanılmasıyla Jacobi matris polinomları için*

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} (A + B + I)_{n-pk} P_{n-pk}^{(A,B)}(x) [(B + I)_{n-pk}]^{-1} P_k^{(A,B)}(y) \eta^k t^{n-pk} \\
&= (1+t)^{-(A+B+I)} F \left(\frac{A+B+I}{2}, \frac{A+B+2I}{2}; B+I; \frac{2t(x+1)}{(1+t)^2} \right) \\
& \quad \times F_4 \left(I+B, I+A; I+A, I+B; \frac{(y-1)\eta}{2}, \frac{(y+1)\eta}{2} \right).
\end{aligned}$$

bilineer matris doğurucu fonksiyonu bulunmuş olur.

Uyarı 7.3 *Yukarıdakilerin dışında ayrıca, Teorem 7.6 da a_k ($k \in \mathbb{N}_0$) katsayısının ve $\Omega_{\mu+\psi k}(y_1, \dots, y_s)$ çok değişkenli fonksiyonunun uygun seçimlerinde Jacobi matris polinomları için başka multilineer ve multilateral matris doğurucu fonksiyonları da elde edilebilir.*

8. GEGENBAUER MATRİS POLİNOMLARI İLE İLGİLİ YENİ BAZI ÖZELLİKLER

Orijinal bilgilerden oluşan bu bölümde yeni olarak, Gegenbauer matris polinomları için hipergeometrik matris fonksiyon gösterimleri ile multilineer ve multilateral matris doğurucu fonksiyonlar elde edilmektedir. Bu özelliklerin önemli bir kısmı Altın ve Çekim tarafından bir makalede verilmiştir.

8.1 Gegenbauer Matris Polinomlarının Hipergeometrik Matris Fonksiyon Gösterimleri

Teorem 8.1 *A matrisi $\forall z \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ için $(\frac{-z}{2}) \notin \sigma(A)$ koşulunu sağlasın. $C_n^A(x)$ Gegenbauer matris polinomları*

$$C_n^A(x) = \left(\frac{x-1}{2} \right)^n \frac{2^{2n}(A)_n}{n!} \times {}_2F_1 \left(-nI, -A - \left(n - \frac{1}{2} \right) I; -2A - (2n-1)I; \frac{2}{1-x} \right) \quad (8.1)$$

ifadesi ile verilen hipergeometrik matris fonksiyon gösterimine sahiptir. Burada $|x| < 1$ dir.

İspat. (4.7) ifadesinde k yerine $(n-k)$ alınmasıyla, $C_n^A(x)$ lerin ifadesi

$$C_n^A(x) = (2A)_n \sum_{k=0}^n \frac{(-nI)_{n-k} (2A+nI)_{n-k}}{n! (n-k)!} \left(A + \frac{I}{2} \right)_{n-k}^{-1} \left(\frac{1-x}{2} \right)^{n-k} \quad (8.2)$$

şeklinde yazılabilir. $0 \leq k < n$ için (2.1) Pochhammer sembolünün kullanılmasıyla

$$\left. \begin{aligned} (2A+nI)_{n-k} &= (-1)^k (2A+nI)_n [(-2A-(2n-1)I)_k]^{-1} \\ (2A)_n (2A+nI)_n &= (2A)_{2n} \\ \left(A + \frac{I}{2} \right)_{n-k}^{-1} &= (-1)^k \left(-A - \left(n - \frac{1}{2} \right) I \right)_k \left(A + \frac{I}{2} \right)_n^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

olup, (8.3) özelliklerinin (8.2) de yerlerine konulmasıyla

$$C_n^A(x) = \frac{(2A)_{2n}}{n!} \sum_{k=0}^n \left\{ \frac{(-nI)_{n-k} [(-2A - (2n-1)I)_k]^{-1}}{(n-k)!} \right. \\ \left. \times \left(-A - \left(n - \frac{1}{2} \right) I \right)_k \left(A + \frac{I}{2} \right)_n^{-1} \left(\frac{1-x}{2} \right)^{n-k} \right\} \quad (8.4)$$

bulunur. Ayrıca (2.1) ile verilen Pochhammer sembolünden dolayı

$$\frac{(-nI)_{n-k}}{(n-k)!} = (-1)^n \frac{(-nI)_k}{k!} \quad ; \quad 0 \leq k \leq n$$

ve

$$(2A)_{2n} = 2^{2n} (A)_n \left(A + \frac{I}{2} \right)_n$$

olup, bu ifadelerin (8.4) te yerlerine yazılmasıyla

$$C_n^A(x) = \left(\frac{x-1}{2} \right)^n \frac{2^{2n} (A)_n}{n!} \sum_{k=0}^n \left\{ \frac{(-nI)_k \left(-A - \left(n - \frac{1}{2} \right) I \right)_k}{k!} \right. \\ \left. \times [(-2A - (2n-1)I)_k]^{-1} \left(\frac{2}{1-x} \right)^k \right\} \quad (8.5)$$

elde edilir. Son olarak, (8.5) te (2.16) gösteriminin kullanılmasıyla istenilen (8.1) ifadesi bulunmuş olur. ■

Sonuç 8.1 A matrisi $\forall z \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ için $\left(\frac{-z}{2} \right) \notin \sigma(A)$ koşulunu sağlasın. $C_n^A(x)$ Gegenbauer matris polinomları

$$C_n^A(x) = \left(\frac{x+1}{2} \right)^n \frac{2^{2n} (A)_n}{n!} \times \\ {}_2F_1 \left(-nI, -A - \left(n - \frac{1}{2} \right) I; -2A - (2n-1)I; \frac{2}{1+x} \right) \quad (8.6)$$

ifadesi ile verilen hipergeometrik matris fonksiyon gösterimine sahiptir. Burada $|x| < 1$ dir.

İspat. $C_n^A(x)$ in (8.1) ifadesinde x yerine $(-x)$ alınır ve (4.4) ile verilen eşitlik kullanılırsa, $C_n^A(x)$ in (8.6) ile verilen hipergeometrik matris fonksiyonu elde edilir.

■

Teorem 8.2 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisi $\forall z \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ için $\left(\frac{-z}{2}\right) \notin \sigma(A)$ koşulunu sağlayan bir matris olsun. $C_n^A(x)$ Gegenbauer matris polinomları

$$C_n^A(\cos \theta) = \sum_{k=0}^n \frac{(A)_{n-k}(A)_k}{(n-k)! k!} \cos[(n-2k)\theta]$$

eşitliğini sağlar. Burada $x = \cos \theta$ dır.

İspat. (4.1) matris doğurucu fonksiyonunda $x = \cos \theta$ alınmasıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^A(\cos \theta) r^n = (1 - 2 \cos \theta r + r^2)^{-A} \quad (8.7)$$

şeklinde yazılabilir. (8.7) eşitliğinde

$$(1 - 2 \cos \theta r + r^2) = [1 - re^{i\theta}] [1 - re^{-i\theta}]$$

özdeşliğinin yerine yazılmasıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^A(\cos \theta) r^n = [1 - re^{i\theta}]^{-A} [1 - re^{-i\theta}]^{-A}$$

elde edilir. Son eşitliğin sağ tarafında (2.2) özelliğinin kullanılmasıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^A(\cos \theta) r^n = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A)_n}{n!} (re^{i\theta})^n \right] \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A)_k}{k!} (re^{-i\theta})^k \right]$$

olur. Burada (2.4) indis değişim özelliğinin kullanılmasıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^A(\cos \theta) r^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(A)_{n-k}(A)_k}{(n-k)! k!} e^{i(n-2k)\theta} \right) r^n$$

olup, son olarak r^n nin katsayılarının eşitlenmesiyle $C_n^A(\cos \theta)$ nın

$$\begin{aligned} C_n^A(\cos \theta) &= \sum_{k=0}^n \frac{(A)_{n-k}(A)_k}{(n-k)! k!} e^{i(n-2k)\theta} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(A)_{n-k}(A)_k}{(n-k)! k!} \cos(n-2k)\theta \end{aligned}$$

toplamsal gösterimi bulunur. Burada $C_n^A(\cos \theta)$, reel elemanlardan oluşan bir matris olduğundan ikinci ifade daha doğrudur. Böylece istenilen eşitlik bulunmuş olur. ■

Teorem 8.3 $C_n^A(x)$ Gegenbauer matris polinomları

$$C_n^A(x) = \frac{(2A)_n}{n!} \left(\frac{1+x}{2} \right)^n {}_2F_1 \left(-nI, \frac{I}{2} - A - nI; A + \frac{I}{2}; \frac{x-1}{x+1} \right) \quad (8.8)$$

hipergeometrik matris fonksiyon gösterimini sağlar. Burada $|x| < 1$ ve A pozitif kararlı bir matristir (Kahmmash 2009).

İspat. Teorem 2.6'nın koşulları sağlandığından (4.7) hipergeometrik matris fonksiyonuna (2.32) dönüşümü uygulanırsa (8.8) ile verilen eşitlik elde edilir. ■

Teorem 8.4 A matrisi $\forall z \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ için $\left(\frac{-z}{2}\right) \notin \sigma(A)$ koşulunu sağlasın. $C_n^A(x)$ Gegenbauer matris polinomları için

$$C_n^A(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(A)_{n-k} (A)_k}{k! (n-k)!} \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)^{n-k} \left(x - \sqrt{x^2 - 1} \right)^k$$

toplamsal gösterimi vardır.

İspat. İspat için ilk olarak,

$$(1 - 2xr + r^2)^{-A} = \left[1 - \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) r \right]^{-A} \left[1 - \left(x - \sqrt{x^2 - 1} \right) r \right]^{-A}$$

özdeşliğinin kullanılmasıyla (4.1) fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^A(x) r^n = \left[1 - \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) r \right]^{-A} \left[1 - \left(x - \sqrt{x^2 - 1} \right) r \right]^{-A}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu son eşitliğin ikinci kısmındaki fonksiyonların ikisine de (2.2) deki açılımının uygulanmasıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^A(x) r^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A)_n}{n!} \left[\left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) r \right]^n \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A)_k}{k!} \left[\left(x - \sqrt{x^2 - 1} \right) r \right]^k \right)$$

bulunur. Son olarak (2.4) indis değişim özelliği kullanılır ve r^n nin katsayıları eşitlenirse istenilen sonuca ulaşılmış olur. ■

Teorem 8.5 A matrisi $\forall z \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ için $\left(\frac{-z}{2}\right) \notin \sigma(A)$ koşulunu sağlasın. $C_n^A(x)$ Gegenbauer matris polinomları

$$C_n^A(x) = \frac{(2A)_n}{n!} x^n {}_2F_1 \left(\frac{-nI}{2}, -\frac{(n-1)I}{2}; A + \frac{I}{2}; \frac{x^2 - 1}{x^2} \right)$$

eşitliği ile gösterilebilir.

İspat. Gegenbauer matris polinomları

$$C_n^A(x) = (2A)_n \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{x^{n-2k} (x^2 - 1)^k}{2^{2k} k! (n-2k)!} \left(A + \frac{I}{2} \right)_k^{-1} \quad (8.9)$$

şeklinde bir gösterime sahiptir (Sayyed vd. 2004). Ayrıca (2.1) Pochhammer gösteriminden dolayı

$$\frac{1}{2^{2k} (n-2k)!} I = \frac{1}{n!} \left(\frac{-nI}{2} \right)_k \left(-\frac{(n-1)I}{2} \right)_k$$

olduğu gösterilebilir. Bu son eşitlik, (8.9) da yerine yazılır ve (2.16) ifadesi kullanılırsa Gegenbauer matris polinomları için farklı bir hipergeometrik matris fonksiyon gösterimi elde edilmiş olur. ■

8.2 Gegenbauer Matris Polinomları için Matris Doğurucu Fonksiyonlar

Bu kısımda hipergeometrik matris fonksiyonlar yardımıyla Gegenbauer matris polinomları için matris doğurucu fonksiyonları elde edilmektedir.

Teorem 8.6 *A matrisi $\forall z \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ için $\left(\frac{-z}{2}\right) \notin \sigma(A)$ koşulunu sağlasın. $C_n^A(x)$ Gegenbauer matris polinomları*

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (B)_n [(2A)_n]^{-1} C_n^A(x) r^n \\ &= (1-xr)^{-B} {}_2F_1 \left(\frac{B}{2}, \frac{B}{2} + \frac{I}{2}; A + \frac{I}{2}; \frac{(x^2-1)r^2}{(1-xr)^2} \right) \end{aligned} \quad (8.10)$$

ile verilen bir matris doğurucu fonksiyonuna sahiptir. Burada $B \in \mathbb{C}^{r \times r}$, $|x| < 1$ ve $|r| < 1$ dir.

İspat. (8.10) özelliğini ispatlamak için, bu eşitliğin sol tarafında (8.9) ifadesinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (B)_n [(2A)_n]^{-1} C_n^A(x) r^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (B)_n \left\{ \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{x^{n-2k} (x^2-1)^k}{2^{2k} k! (n-2k)!} \left(A + \frac{I}{2} \right)_k^{-1} \right\} r^n \end{aligned}$$

bulunur. Son çift toplamda (2.6) indis değişim özelliğinin uygulanmasıyla

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (B)_n [(2A)_n]^{-1} C_n^A(x) r^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (B)_{n+2k} \frac{x^n (x^2 - 1)^k}{2^{2k} k! n!} \left(A + \frac{I}{2} \right)_k^{-1} r^{n+2k} \end{aligned} \quad (8.11)$$

elde edilir. Burada (2.1) ile verilen Pochhammer sembolünün kullanılmasıyla

$$(B)_{n+2k} = (B)_{2k} (B + 2kI)_n$$

olup, bu ifadenin (8.11) de yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (B)_n [(2A)_n]^{-1} C_n^A(x) r^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(B + 2kI)_n (xr)^n}{n!} \right\} (B)_{2k} \frac{(x^2 - 1)^k}{2^{2k} k!} \left(A + \frac{I}{2} \right)_k^{-1} r^{2k} \end{aligned} \quad (8.12)$$

olur. (2.2) deki ifadenin kullanılmasıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(B + 2kI)_n (xr)^n}{n!} = (1 - xr)^{-(B+2kI)}$$

elde edilir ki, bu son eşitlik (8.12) de yerine konulursa

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (B)_n [(2A)_n]^{-1} C_n^A(x) r^n \\ &= (1 - xr)^{-B} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(B)_{2k} (x^2 - 1)^k}{2^{2k} k!} \left(A + \frac{I}{2} \right)_k^{-1} \left(\frac{r}{1 - xr} \right)^{2k} \end{aligned} \quad (8.13)$$

bulunur. (8.13) te

$$(B)_{2k} = 2^{2k} \left(\frac{B}{2} \right)_k \left(\frac{B}{2} + \frac{I}{2} \right)_k \quad ; \quad k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

özelliliğinin kullanılmasıyla (8.10) matris doğurucu fonksiyonu bulunmuş olur. ■

Teorem 8.7 *A matrisi pozitif kararlı bir matris olsun. $|x| < 1$ için $C_n^A(x)$ Gegenbauer matris polinomları*

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} [(2A)_n]^{-1} \left[\left(A + \frac{I}{2} \right)_n \right]^{-1} C_n^A(x) r^n \\ &= {}_0F_1 \left(-; A + \frac{I}{2}; \left(\frac{x+1}{2} \right) r \right) {}_0F_1 \left(-; A + \frac{I}{2}; \left(\frac{x-1}{2} \right) r \right) \quad ; \quad |r| < 1 \end{aligned} \quad (8.14)$$

ile verilen matris doğurucu fonksiyonuna sahiptir (Kahmmash 2009).

İspat. (8.8) hipergeometrik matris fonksiyon ifadesinde

$$\left(\frac{I}{2} - A - nI\right)_k = (-1)^k \left(A + \frac{I}{2}\right)_n \left[\left(A + \frac{I}{2}\right)_{n-k}\right]^{-1}$$

özellği kullanılırsa, $C_n^A(x)$ in

$$\begin{aligned} C_n^A(x) &= \sum_{k=0}^n \left\{ \frac{(2A)_n \left(A + \frac{I}{2}\right)_n \left[\left(A + \frac{I}{2}\right)_{n-k}\right]^{-1}}{k! (n-k)!} \right. \\ &\quad \times \left. \left[\left(A + \frac{I}{2}\right)_k\right]^{-1} \left(\frac{x-1}{2}\right)^k \left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-k} \right\} \end{aligned} \quad (8.15)$$

toplamsal ifadesi yazılabilir. (8.14) ün sağ tarafında $C_n^A(x)$ in (8.15) deki eşiti yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} [(2A)_n]^{-1} \left[\left(A + \frac{I}{2}\right)_n\right]^{-1} C_n^A(x) r^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\left[\left(A + \frac{I}{2}\right)_{n-k}\right]^{-1}}{k! (n-k)!} \left[\left(A + \frac{I}{2}\right)_k\right]^{-1} \left(\frac{x-1}{2}\right)^k \left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-k} r^n \end{aligned}$$

elde edilir ki, burada sırasıyla (2.5) indis değişim özelliği ve (2.16) ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} [(2A)_n]^{-1} \left[\left(A + \frac{I}{2}\right)_n\right]^{-1} C_n^A(x) r^n \\ &= \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[\left(A + \frac{I}{2}\right)_n\right]^{-1}}{n!} \left(\frac{(x+1)r}{2}\right)^n \right\} \\ &\quad \times \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left[\left(A + \frac{I}{2}\right)_k\right]^{-1}}{k!} \left(\frac{(x-1)r}{2}\right)^k \right\} \\ &= {}_0F_1 \left(-; A + \frac{I}{2}; \left(\frac{x+1}{2}\right)r \right) {}_0F_1 \left(-; A + \frac{I}{2}; \left(\frac{x-1}{2}\right)r \right) \end{aligned}$$

Gegenbauer matris polinomlarının matris doğurucu fonksiyonu elde edilmiş olur. ■

Uyarı 8.1 *Hipergemetrik matris fonksiyonlar, matris fonksiyonların önemli bazı özelliklerini bulmamıza yardımcı olur. Örneğin, (8.8) eşitliği ile verilen hipergeometrik matris fonksiyon gösterimi kullanılarak (8.14) ile verilen matris doğurucu fonksiyonu elde edilmiştir.*

Uyarı 8.2 *Matris doğurucu fonksiyonlar, ortogonal matris polinomlar teorisinde önemli bir kavramdır. Çünkü bu fonksiyonlar, matris polinomlarının bazı önemli özelliklerini elde etmemize yardımcı olurlar. Örneğin, bu kısımda elde edilen matris doğurucu fonksiyonlar yardımıyla bir sonraki kısımda ortogonal matris polinomlar için çok değişkenli matris doğurucu fonksiyonları elde edilmiştir.*

8.3 Gegenbauer Matris Polinomları için Multilineer ve Multilateral Matris Doğurucu Fonksiyonları

Bu kısımda, Gegenbauer matris polinomları için bazı multilineer ve multilateral matris doğurucu fonksiyonları elde edilmektedir. Bu tip matris doğurucu fonksiyonları bulmak için ilk önce aşağıdaki teoremi verelim:

Teorem 8.8 $y_1, \dots, y_s$ ($s \in \mathbb{N}$), s tane kompleks değişken ve μ kompleks indis olmak üzere $\Omega_\mu(y_1, \dots, y_s)$ sıfırlanmayan fonksiyonu

$$\Lambda_{\mu,\nu}(y_1, \dots, y_s; z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Omega_{\mu+\nu k}(y_1, \dots, y_s) z^k \quad (8.16)$$

$$(a_k \neq 0, \mu, \nu \in \mathbb{C})$$

ile verilen doğurucu fonksiyona sahip olsun ve $\Theta_{n,p,\mu,\nu}(x; y_1, \dots, y_s; \zeta)$ fonksiyonu

$$\Theta_{n,p,\mu,\nu}(x; y_1, \dots, y_s; \zeta) := \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k [(2A)_{n-pk}]^{-1} \left[\left(A + \frac{I}{2} \right)_{n-pk} \right]^{-1} C_{n-pk}^A(x) \Omega_{\mu+\nu k}(y_1, \dots, y_s) \zeta^k \quad (8.17)$$

ile gösterilsin. Burada $n, p \in \mathbb{N}$ ve A pozitif kararlı bir matristir. Bu takdirde $|t| < 1$ için Gegenbauer matris polinomları cinsinden (8.17) ile verilen $\Theta_{n,p,\mu,\nu}$ fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,p,\mu,\nu} \left(x; y_1, \dots, y_s; \frac{\eta}{t^p} \right) t^n = {}_0F_1 \left(-; A + \frac{I}{2}; \left(\frac{x+1}{2} \right) t \right) \times {}_0F_1 \left(-; A + \frac{I}{2}; \left(\frac{x-1}{2} \right) t \right) \Lambda_{\mu,\nu}(y_1, \dots, y_s; \eta) \quad ; \quad |x| < 1 \quad (8.18)$$

matris doğurucu fonksiyonuna sahiptir.

İspat. Teorem 8.8 i ispatlamak için (8.17) ile tanımlanan

$$\Theta_{n,p,\mu,\nu} \left(x; y_1, \dots, y_s; \frac{\eta}{t^p} \right)$$

matris fonksiyonunu, (8.18) in sol tarafında yerine yazalım ve S ile gösterelim. Bu durumda

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} \left\{ a_k [(2A)_{n-pk}]^{-1} \left[\left(A + \frac{I}{2} \right)_{n-pk} \right]^{-1} \right. \\ \left. \times C_{n-pk}^A(x) \Omega_{\mu+\nu k}(y_1, \dots, y_s) \eta^k t^{n-pk} \right\} \quad (8.19)$$

olur. (8.19) da n yerine $(n + pk)$ alınıp, (8.16) özelliğinin kullanılmasıyla

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k [(2A)_n]^{-1} \left[\left(A + \frac{I}{2} \right)_n \right]^{-1} C_n^A(x) \Omega_{\mu+\nu k}(y_1, \dots, y_s) \eta^k t^n \\ = \left(\sum_{n=0}^{\infty} [(2A)_n]^{-1} \left[\left(A + \frac{I}{2} \right)_n \right]^{-1} C_n^A(x) t^n \right) \\ \times \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \Omega_{\mu+\nu k}(y_1, \dots, y_s) \eta^k \right) \\ = {}_0F_1 \left(-; A + \frac{I}{2}; \left(\frac{x+1}{2} \right) t \right) {}_0F_1 \left(-; A + \frac{I}{2}; \left(\frac{x-1}{2} \right) t \right) \\ \times \Lambda_{\mu,\nu}(y_1, \dots, y_s; \eta)$$

bulunur ve böylece istenilen elde edilmiş olur. ■

Özel olarak,

$$\Omega_{\mu+\nu k}(y_1, \dots, y_s) \quad , \quad (k \in \mathbb{N}_0, \quad s \in \mathbb{N})$$

fonksiyonunun bazı özel seçimlerinde aşağıda, Teorem 8.8 in bazı uygulamaları verilmiştir. Örneğin, Teorem 8.8 de B ve C matrisleri $\forall z$ özdeğeri için $\text{Re}(z) > -1$ spektral koşulunu sağlayan matrisler olmak üzere

$$P_n^{(B,C)}(y) = \frac{(-1)^n}{n!} {}_2F_1 \left(B + C + (n+1)I, -nI; C + I; \frac{1+y}{2} \right) \\ \times \Gamma^{-1}(C + I) \Gamma(C + (n+1)I)$$

ile verilen Jacobi matris polinomlarını kullanalım. Teorem 7.1 den dolayı Jacobi matris polinomları için bir matris doğurucu fonksiyon

$$\sum_{n=0}^{\infty} (B+C+I)_n P_n^{(B,C)}(y) [(C+I)_n]^{-1} r^n = (1+r)^{-(B+C+I)} \times {}_2F_1 \left(\frac{B+C+I}{2}, \frac{B+C+2I}{2}; C+I; \frac{2r(y+1)}{(1+r)^2} \right), \quad |r| < 1, \quad |y| < 1 \quad (8.20)$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 8.8 de $s = 1$ için $\Omega_{\mu+\nu k}(y) = (B+C+I)_k P_{\mu+\nu k}^{(B,C)}(y) [(C+I)_k]^{-1}$ ($\mu, \nu \in \mathbb{N}_0$) alınmasıyla Gegenbauer ve Jacobi matris polinomları için aşağıdaki bilateral matris doğurucu fonksiyonu elde edilebilir:

Sonuç 8.2 *Jacobi matris polinomları*

$$\Lambda_{\mu,\nu}(y; z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (B+C+I)_k P_{\mu+\nu k}^{(B,C)}(y) [(C+I)_k]^{-1} z^k$$

$$(a_k \neq 0, \quad \mu, \nu \in \mathbb{N}_0)$$

matris doğurucu fonksiyonuna sahip olsun ve

$$\Theta_{n,p,\mu,\nu}(x; y; \zeta) = \sum_{k=0}^{[n/p]} \left\{ a_k [(2A)_{n-pk}]^{-1} \left[\left(A + \frac{I}{2} \right)_{n-pk} \right]^{-1} C_{n-pk}^A(x) \right. \\ \left. \times (B+C+I)_k P_{\mu+\nu k}^{(B,C)}(y) [(C+I)_k]^{-1} \zeta^k \right\}$$

ile gösterilsin. Burada B ve C matrisleri $\forall z$ özdeğeri için $\text{Re}(z) > -1$ ve A , pozitif kararlı olma koşullarını sağlayan matrislerdir. Bu takdirde

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,p,\mu,\nu} \left(x; y; \frac{\eta}{t^p} \right) t^n = {}_0F_1 \left(-; A + \frac{I}{2}; \left(\frac{x+1}{2} \right) t \right) \\ \times {}_0F_1 \left(-; A + \frac{I}{2}; \left(\frac{x-1}{2} \right) t \right) \Lambda_{\mu,\nu}(y; \eta) \quad (8.21)$$

olur. Burada $|t| < 1$ ve $|x| < 1$ dir.

İspat. (8.21) deki eşitlik, Teorem 8.8 deki aynı metodun $s = 1$ halidir. ■

Eğer Sonuç 8.2 de $\Theta_{n,p,\mu,\nu}(x; y; \zeta)$ fonksiyonu

$$\Theta_{n,p,\mu,\nu}(x; y; \zeta) = \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k C_{n-pk}^A(x) (B+C+I)_k P_{\mu+\nu k}^{(B,C)}(y) [(C+I)_k]^{-1} \zeta^k \quad (8.22)$$

şeklinde alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,p,\mu,\nu} \left(x; y; \frac{\eta}{t^p} \right) t^n = (1 - 2xt + t^2)^{-A} \Lambda_{\mu,\nu}(y; \eta)$$

olup, Gegenbauer ve Jacobi matris polinomları için aşağıdaki bilateral matris doğurucu fonksiyonu da elde edilebilir.

Uyarı 8.3 (8.22) de $a_k = 1$, $\mu = 0$, $\nu = 1$ alınıp, (8.20) fonksiyonu kullanılırsa Gegenbauer ve Jacobi matris polinomları için

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} C_{n-pk}^A(x) (B + C + I)_k P_k^{(B,C)}(y) [(C + I)_k]^{-1} \eta^k t^{n-pk} \\ &= (1 - 2xt + t^2)^{-A} (1 + \eta)^{-(B+C+I)} \\ & \times {}_2F_1 \left(\frac{B + C + I}{2}, \frac{B + C + 2I}{2}; C + I; \frac{2\eta(y + 1)}{(1 + \eta)^2} \right) \end{aligned}$$

bilateral matris doğurucu fonksiyonu elde edilmiş olur. Burada $|\eta| < 1$ ve $|y| < 1$ dir.

Teorem 8.8 de $s = 1$ için $\Omega_{\mu+\nu k}(y) = C_{\mu+\nu k}^B(y)$ seçelim. Burada $B, \forall z \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ için $(\frac{-z}{2}) \notin \sigma(B)$ spektral koşulunu sağlayan matris ve $\mu, \nu \in \mathbb{N}_0$ dir. Aşağıda Gegenbauer matris polinomları için bilineer matris doğurucu fonksiyonu elde edilmektedir.

Sonuç 8.3 Gegenbauer matris polinomları

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mu,\nu}(y; z) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k C_{\mu+\nu k}^B(y) z^k \\ (\mu, \nu &\in \mathbb{N}_0, \quad a_k \neq 0) \end{aligned}$$

matris doğurucu fonksiyonuna sahip olsun ve

$$\begin{aligned} \Theta_{n,p,\mu,\nu}(x; y; \zeta) &: = \sum_{k=0}^{[n/p]} \left\{ a_k [(2A)_{n-pk}]^{-1} \left[\left(A + \frac{I}{2} \right)_{n-pk} \right]^{-1} \right. \\ & \times C_{n-pk}^A(x) C_{\mu+\nu k}^B(y) \zeta^k \} \end{aligned}$$

ile gösterilsin. $|t| < 1$ ve $|x| < 1$ için

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,p,\mu,\nu} \left(x; y; \frac{\eta}{t^p} \right) t^n \\
&= {}_0F_1 \left(-; A + \frac{I}{2}; \left(\frac{x+1}{2} \right) t \right) {}_0F_1 \left(-; A + \frac{I}{2}; \left(\frac{x-1}{2} \right) t \right) \Lambda_{\mu,\nu}(y; \eta)
\end{aligned} \tag{8.23}$$

olur.

Uyarı 8.4 Sonuç 8.3 te $a_k = 1$, $\mu = 0$, $\nu = 1$ alınır ve (8.14) eşitliği kullanılırsa Gegenbauer matris polinomları

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} [(2A)_{n-pk}]^{-1} \left[\left(A + \frac{I}{2} \right)_{n-pk} \right]^{-1} C_{n-pk}^A(x) C_k^B(y) \eta^k t^{n-pk} \\
&= {}_0F_1 \left(-; A + \frac{I}{2}; \left(\frac{x+1}{2} \right) t \right) {}_0F_1 \left(-; A + \frac{I}{2}; \left(\frac{x-1}{2} \right) t \right) \\
& \quad \times (1 - 2y\eta + \eta^2)^{-B}
\end{aligned}$$

için bilinear matris doğurucu fonksiyonu elde edilmiş olur.

Uyarı 8.5 Yukarıdakilerin dışında ayrıca, Teorem 8.8 de a_k ($k \in \mathbb{N}_0$) katsayısının ve $\Omega_{\mu+\psi k}(y_1, \dots, y_s)$ çok değişkenli fonksiyonunun uygun seçimlerinde Gegenbauer matris polinomları için başka multilineer ve multilateral matris doğurucu fonksiyonlarda elde edilebilir.

KAYNAKLAR

- Altın, A., Aktaş, R. and Erkuş-Duman, E. 2009. On a multivariable extension for the extended Jacobi polynomials. *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 353(1), pp. 121–133.
- Altın, A. and Çekim, B. Some Miscellaneous Properties for Gegenbauer matrix polynomials. *Util. Math.* (in press).
- Altın, A., Çekim, B. and Erkuş, E. Families of generating functions for Jacobi and related matrix polynomials. *Ars Combin.* (in press).
- Batahan, R.S. 2006. A new extension of Hermite matrix polynomials and its applications. *Linear Algebra Appl.*, Vol. 419, pp. 82-92.
- Çevik, A. 2009. Matris ortogonal polinomların ve matris fonksiyonların bazı özellikleri, Ankara Üniv. Fen Bilimleri Ens. Doktora tezi.
- Defez, E., Hervás, A., Law, A., Villanueva-Oller, J. and Villanueva, R.J. 2000. Progressive transmission of images: PC-based computations, using orthogonal matrix polynomials. *Math. Comput. Mod.*, Vol. 32, pp. 1125-1140.
- Defez, E. and Jódar, L. 2002. Chebyshev matrix polynomials and second order matrix differential equation. *Util. Math.*, Vol. 61, pp. 107-123.
- Defez, E. and Jódar, L. 1998. Some applications of the Hermite matrix polynomials series expansions. *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 99, pp. 105-117.
- Defez, E., Jódar, L. and Law, A. 2004. Jacobi matrix differential equation, polynomial solutions and their properties. *Comput. Math Appl.*, Vol. 48, pp. 789-803.
- Dunford, N. and Schwartz, J. 1957. *Linear operators*, Interscience, 872 p., N. York.
- Erkuş-Duman, E. Matrix Extensions of Polynomials in Several Variables. *Util. Math.* (in press).
- Gantmacher, F. R. 1959. *The theory of matrices*. Vol I, Chelsea, 372 p., New York.
- Geronimo, J.S. 1982. Scattering theory and matrix orthogonal polynomials on the real line, *Circuit Systems Signal Process*, Vol. 1 (3-4), pp. 471-494.
- Golub, G. H. and Van Loan, C.F. 1983, 1989. *Matrix Computations*. Johns Hop

- kins University Press, 694 p., Baltimore, Maryland.
- Halmos, P. R. 1967. A Hilbert space problem book. Van Nostrand, 396 p., New Jersey.
- Herz, C.S. 1955. Bessel functions of matrix argument. *Ann. of Math.*, Vol. 61, pp. 474-523.
- Hille, E. 1969. Lectures on Ordinary Differential Equations. Addison Wesley, 723 p., New York.
- Horn, R.A. and Johnson, C.R. 1993. Matrix Analysis. Cambridge Univ. Press, 575 p., USA.
- James, A.T. 1975. Special functions of matrix and single argument in Statistics. In *Theory and Applications and Special Functions*, pp. 497-520.
- Jódar, L. and Company, R. 1996. Hermite matrix polynomials and second order matrix differential equations. *Approx. Theory Appl.*, Vol. 12, pp. 20-30.
- Jódar, L. , Company, R. and Navarro, E. 1993. Solving explicitly the Bessel matrix differential equation, without increasing problem dimension. *Congr. Numer.*, Vol. 92, pp. 261-276.
- Jódar, L., Company, R. and Navarro, E. 1994a. Bessel matrix functions: explicit solution of coupled Bessel type equations. *Util. Math.*, Vol. 46, pp. 129-141.
- Jódar, L., Company, R. and Navarro, E. 1994b. Laguerre matrix polynomials and systems of second-order differential equations. *Appl. Numer. Math.*, Vol. 15, pp. 53-63.
- Jódar, L., Company, R. and Ponsoda, E. 1995. Orthogonal matrix polynomials and systems of second-order differential equations. *Differ. Equ. Dyn. Syst.*, Vol. 3(3), pp. 269-288.
- Jódar, L. and Cortés J.C. 1998a. On the hypergeometric matrix function. *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 99, pp. 205-217.
- Jódar, L. and Cortés J.C. 1998b. Some properties of Gamma and Beta matrix functions. *Appl. Math. Lett.*, Vol. 11(1), pp. 89-93.
- Jódar, L. and Cortés J.C. 2000. Closed form general solution of the hypergeometric matrix differential equation. *Math. Comput. Modelling*, Vol. 32,

pp. 1017-1028.

- Jódar, L. and Defez, E. 1998. A connection between Laguerre's and Hermite's matrix polynomials. *Appl. Math. Lett.*, Vol. 15(1), pp. 13-17.
- Jódar, L., Defez, E., and Ponsoda, E. 1996. Orthogonal matrix polynomials with respect to linear matrix moment functionals: Theory and applications. *J. Approx. Theory Appl.*, Vol. 12(1), pp. 96-115.
- Jódar, L., Legua, M. and Law, A.G. 1992. A matrix method of Frobenius and applications to generalized Bessel equation. *Congr. Numer.*, Vol. 86, pp. 7-17.
- Kailath, T. 1980. *Linear Systems*, Prentice-Hall, 682 p., New Jersey.
- Keller, H.B. and Wolfe, A.W. 1965. On the nonunique equilibrium states and buckling mechanism of spherical shells. *J. Siam*, Vol. 13, pp. 674-705.
- Kahmmash, G. S. 2009. Some bilateral generating relations involving Gegenbauer matrix polynomials. *Journal of Math. Sci.: Adv. and Appl.*, Vol. 3(1), pp. 89-100.
- Lebedev, N. N. 1972. *Special functions and their applications*. Dover, 308 p., New York.
- Morse, P.M. and Feshbach, H. 1953. *Methods of Theoretical Physics*. McGraw-Hill, 997 p., Tokyo.
- Parter, S.V., Stein, M.L. and Stein, P.R. 1973. On the multiplicity of solutions of a differential equation arising in chemical reactor theory. Tech. Report 194 Department of Computer Science, University of Wisconsin, Madison.
- Rainville, E.D. 1973. *Special Functions*. Chelsea, 385 p., New York.
- Sayyed, K. A. M., Metwally, M. S. and Batahan, R. S. 2004. Gegenbauer matrix polynomials and second order matrix differential equations. *Divulg. Mat.*, Vol. 12 (2), pp. 101-115.
- Sinap, A. and Van Assche, W. 1994. Polynomial interpolation and Gaussian quadrature for matrix valued functions. *Lin. Alg. Appl.* Vol. 207, pp. 71-114.
- Szegő, G. 1939. *Orthogonal polynomials*. Colloquium publications, 432 p., USA.
- Taşcı, D. 2005. *Lineer cebir*. Gazi kitabevi, 585 s., Ankara.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Bayram ÇEKİM
Doğum Yeri : Sivas/Divriği
Doğum Tarihi : 30.09.1982
Medeni Hali : Evli
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise : Mobil Lisesi (Batıkent) (1999)
Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi
Matematik Bölümü (2004)
Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı (2004 – 2007)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl:

Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi
Matematik Bölümü Araştırma Görevlisi 2005-...

Yayımları:

Altın, A., **Çekim, B.** and Erkuş Duman, E. Families of generating functions for Jacobi and related matrix polynomials. Ars Combinatoria (in press).

Altın, A. and **Çekim, B.** Some miscellaneous properties for Gegenbauer matrix polynomials. Utilitas Mathematica (in press).