

İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ ÜZERİNE

DOKTORA TEZİ

Aziz SAĞLAM

Doç. Dr. Hüseyin YILDIRIM
Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Mayıs 2012

TEZ ONAY SAYFASI

Aziz SAĞLAM tarafından hazırlanan “İntegral Eşitsizlikleri Üzerine” adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca .../.../2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı’nda DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Hüseyin YILDIRIM
Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA

Başkan : Prof. Dr. Muhammet YÜRÜSOY

Afyon Kocatepe Ü. Teknik Eğitim Fakültesi

Üye : Doç. Dr. Hüseyin YILDIRIM

Kahramanmaraş Sütçü İmam Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi

Üye : Doç. Dr. Özkan ÖCALAN

Afyon Kocatepe Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi

Üye : Doç. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ

Afyon Kocatepe Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi

Üye : Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA

Düzce Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi

Üye : Yrd. Doç. Dr. Hasan ÖĞÜNMEZ

Afyon Kocatepe Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi

Üye : Yrd. Doç. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ

Afyon Kocatepe Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi



Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun

...../...../..... tarih ve

..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

.....

Enstitü Müdürü

Prof. Dr. Mevlüt DOĞAN

ÖZET

Doktora Tezi

İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ ÜZERİNE

Aziz SAĞLAM

Afyonkarahisar Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Hüseyin YILDIRIM

Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA

Bu tez çalışmasında, Hermit-Hadamard eşitsizliği olarak bilinen

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

tipli eşitsizliğini,

$$\int_a^b p(x) dx \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx \geq \int_a^b p(x) f(x) dx \int_a^b p(x) g(x) dx$$

tipli Čebyšev eşitsizliğini ve

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{x+y} dx dy < \pi \left(\int_0^\infty f^2(x) dx \cdot \int_0^\infty g^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

tipli Hardy-Hilbert eşitsizliğini ele aldık. İlk olarak temel tanım ve teoremler verildi. Daha sonra sırasıyla tezimizin orjinal kısımlarını oluşturan, Hermit-Hadamard tipli eşitsizlikler, Hardy-Hilbert tipli eşitsizlikler ve Čebyšev tipli eşitsizlikler verildi ve genelleştirildi.

2012, vii+70 sayfa

Anahtar Kelimeler: Hermit-Hadamard tipli eşitsizlikler, Hardy-Hilbert tipli eşitsizlikler, Čebyšev tipli eşitsizlikler.

ABSTRACT

Ph.D.Thesis

ON INTEGRAL INEQUALITIES

Aziz SAĞLAM

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Associate Prof. Dr. Hüseyin YILDIRIM

Associate Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA

In this thesis, we consider some inequalities which, known as the Hermit-Hadamard integral inequality

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2},$$

the Čebyšev type integral inequality

$$\int_a^b p(x) dx \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx \geq \int_a^b p(x) f(x) dx \int_a^b p(x) g(x) dx$$

and the Hardy-Hilbert type integral inequality

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{x+y} dx dy < \pi \left(\int_0^\infty f^2(x) dx \cdot \int_0^\infty g^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

First, given the basic definitions and theorems. Then in turn make up parts of the thesis that our original Hermit-Hadamard type integral inequalities, Hardy-Hilbert type integral inequalities and Čebyšev type integral inequalities involving many functions are obtained. These on the one hand generalized and on the other hand improve some existing results.

2012, vii+70 pages

Key Words : Hermit-Hadamard type integral inequalities, Hardy-Hilbert type integral inequalities and Čebyšev type integral inequalities.

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışma Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Doktora çalışmam boyunca, tez konumu belirleyip bu konuda çalışmamı sağlayan, bana rehberlik eden, geniş tecrübesiyle çalışmalarımnda etkin katkısı bulunan ve beni yönlendiren saygıdeğer danışman hocam,

Sayın Doç. Dr. Hüseyin YILDIRIM'a;

ikinci danışmanlığımı üstlenerek, değerli bilgileriyle bana yardımcı olan ve yol gösteren, içten desteğini her zaman yanımda hissettiğim,

Sayın Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA'ya;

teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Doktora çalışmalarım boyunca bana maddi destek sağlayan Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu'na (TÜBİTAK) teşekkür ederim.

Öğrenim hayatım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destek ve güvenden dolayı aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Aziz SAĞLAM

Afyonkarahisar, 2012

SİMGELER DİZİNİ

Γ	: Gamma Fonksiyonu
B	: Beta Fonksiyonu
$\mathbb{R}^+$	: $(0, \infty)$ aralığı
I°	: I aralığının içi
$\mathbb{R}^n$	: n -boyutlu Öklid Uzayı
$\mathbb{C}$	: Kompleks Sayılar
$L^p(\mathbb{R}^n)$	: Mutlak değeri p inci mertebeden integrallenebilen fonksiyonların cümlesi
$A(a, b)$	: Aritmetik Ortalama
$G(a, b)$	: Geometrik Ortalama
$H(a, b)$	: Harmonik Ortalama
$L(a, b)$	: Logaritmik Ortalama
$I(a, b)$	: İdentrik Ortalama
$L_p(a, b)$	: p –Logaritmik Ortalama
E	: Ölçülebilir Küme

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Sekil 2.1.1 f fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıklar	10
Şekil 2.2.1 Konveks ve konkav küme	14
Şekil 2.2.2 Aralık üzerinde konveks fonksiyon	15

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	9
3. HERMİTE-HADAMARD TIPLI EŞİTSİZLİKLER	21
3.1 Bazı Ortalamalar için Uygulamalar	33
4. HARDY-HİLBERT EŞİTSİZLİĞİ VE UYGULAMALARI	35
4.1 Diskret Halleri	46
5. ČEBYŠEV TIPLI EŞİTSİZLİKLER	54
5.1 Ana Sonuçlar	56
KAYNAKLAR	63
ÖZGEÇMİŞ	70

1. GİRİŞ

Eski bir atasözü “Üstadları okuyun!” der ve gerçekten, onların çalışmalarının içerdiği derin ve daimi yenilikçi fikirler bizleri şaşırtmaya devam ediyor.

Pisagor teoremi, cebirin temel teoremi ve Fermat’ın son teoremi yeni nesiller için büyük bir miras ve ilham kaynağı teşkil eder. Son zamanlarda, O.B. Bekken, N. Abel’in hikayesini ve matematiğini hatırlatan bir çalışma ele almıştır. Bu çalışmada N. Abel’in daha az bilinen bazı teknik ve yöntemlerini yeni matematikçilere göstermeyi amaçlamıştır. Eşitsizlikler matematiğin hemen hemen bütün alanlarında önemli bir rol oynamaktadır. Eşitsizlikler ile ilgili ilk temel çalışma 1934 yılında Hardy, Littlewood ve Polya tarafından "Inequalities" adlı kitapta toplanmıştır (Hardy *et al.* 1952). Bu kitap yeni eşitsizlikler ve uygulamaları ile ilgili konuları geniş çapta ele almaktadır. 1934-1960 yılları arasında elde edilen yeni ilginç eşitsizlikleri içeren "Inequalities" adlı yeni bir kitap 1961 yılında E.F. Beckenbach ve R. Bellman tarafından yeniden yazılmıştır (Beckenbach and Bellman 1970). Daha sonra 1970 yılında Mitrinović "Analytic Inequalities" adlı kitap ile bugüne kadar yapılmış tüm yeni eşitsizlikleri bir başlık altında toplamıştır (Mitrinović 1970). 1993 yılında Mitrinović, Pečarić ve Fink daha genel olan "Classical and New Inequalities in Analysis" adlı kitabı yazmışlardır (Mitrinović *et al.* 1993).

Konveksliğin basit ve doğal tanımı Archimedes’e (yaklaşık olarak M.Ö.250) ve onun çok ünlü olan π (pi) değerini hesaplamasına kadar uzanır (Düzgün çokgenleri çevreleyerek ve kazıyarak). Archimedes’in dikkat ettiği gerçek; konveks bir eğrinin çevre uzunluğu onu çevreleyen başka bir konveks eğrinin çevre uzunluğundan daha küçüktür

Konveks fonksiyonların tarihinin bu kadar eski olmasına karşın, ancak 19. yüzyılın sonlarına doğru gelişmeye başlamıştır. 1893 de Hadamard’ın çalışmalarında açık olarak belirtilmemesine rağmen fonksiyonların bu tipteki temel özellikleri ifade edilmiştir (Hadamard 1893). Bu sonuçların konveks fonksiyonları ima etmesine rağmen, konveks fonksiyonlar literatüre Jensen tarafından 1905 ve 1906 yıllarında yaptığı çalışmalar ile sistematik olarak girmiş ve çalışılmaya başlanmıştır (Jensen *et al.* 1905, 1906). Bu tarihlerde yapılan çalışmalar

konveks fonksiyonlar teorisi için önderlik etmişlerdir. 1934 de Hardy, Littlewood ve Polya, 1961 de Beckenbach ve R. Bellman ve 1970 de de Mitrinović gibi araştırmacıların kitaplarında konveks fonksiyonlar için temel eşitsizlikler ele alınmıştır. Ayrıca 1987 yılında Pečarić tarafından sadece konveks fonksiyonları içeren genel eşitsizlikler ile ilgili "Convex Functions: Inequalities" adlı ilk temel kitabı yazılmıştır. Biz konveks fonksiyonları, Analiz, Uygulamalı Matematik, Olasılık teorisi ve matematiğin diğer bir çok alanında direkt veya en direkt uygulamaları vardır. Ayrıca konveks fonksiyonlar eşitsizlik teorisi ve konveks fonksiyonların uygulamasının bir sonucu olan bir çok eşitsizlik ile bağlantısı vardır. Örneğin Hölder ve Minkowski gibi genel eşitsizlikler konveks fonksiyonlar için Jensen Eşitsizliğinin bir sonucudur. Bu bağlamda konveks fonksiyonun tanımı da aslında bir eşitsizliktir. Dolayısıyla konveks fonksiyonlar eşitsizlik teorisinde çok önemli bir role sahiptir. 1883 yılında Hermite tarafından elde edilen yeni bir eşitsizlik bundan on yıl sonra Hadamard tarafından yeniden ele alınarak bu çalışma şimdi günümüzde Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinen

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (1.1)$$

eşitsizliği vermiştir. Bu eşitsizlik ilk olarak Hermite (1822-1901) tarafından Ekim 1881 de, Journal Mathesis dergisine ispatsız olarak yazdığı aşağıdaki ifadeyi bir mektup ile sundu. Bu mektup Mathesis 3 de (1883, p.82) aşağıdaki gibi basıldı:

“Sur deux limites d’une integrale definie. Soit $f(x)$ une fonction qui varie toujours dans le même sens de $x = a$, á $x = b$. On aura les relations

$$(b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (1.2)$$

ou bien

$$(b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \int_a^b f(x) dx > (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

suivant que la courbe $y = f(x)$ tourne sa convexité ou sa concavité vers l'axe des abscisses.

En faisant dans ces formules $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $a = 0$, $b = x$ il vient

$$x - \frac{x^2}{2+x} < \log(1+x) < x - \frac{x^2}{2(1+x)}."$$

Şurası önemlidir ki Hermite'nin bu kısa notu matematiksel literatürde daha önce hiç düşünülmemiştir. (1.2) eşitsizliğinin

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (1.3)$$

için bir ara değer eşitsizliği olduğu açıktır.

(1.2) ifadesindeki Hermite'nin eşitsizliği literatürde Hadamard Eşitsizliği olarak bilinmektedir ve bu sebepten dolayı literatür taramalarında sıkıntılar çıkmaktadır. Biz herhangi bir karışıklığa meydan vermemek için (1.2) ifadesine Hermite-Hadamard eşitsizliği diyeceğiz.

Hermite'nin çalışmasının yayınlanmasında yaklaşık yirmi yıl sonra J.L.W.V. Jensen, (1.3) eşitsizliğini kullanarak konveks fonksiyonları tanımladı (1905-1906).

Jensen (1859-1925) tarafından 1906 yılında ortaya atılan bir sıra çalışmaların başında konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler ve gamma fonksiyonu başlıca çalışmalarıdır. Jensen'ın ünlü eşitsizliği; f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks fonksiyon ve $\lambda_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) sayıları $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$ eşitliğini sağlasın. Bu taktirde ünlü Jensen eşitsizliği $x_i \in [a, b]$ için

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n) \quad (1.4)$$

biçimdedir. Bu eşitsizlik yardımıyla literatürde sıkça karşılaştığımız aşağıdaki; $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$, $f(x) = \ln x$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ dersek, (1.4) den

$$\ln \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \frac{\ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n}{n}$$

buradan iyi bildiğimiz Aritmetik-Geometrik Ortalama eşitsizliği

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \quad (1.5)$$

vardır $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ olması durumunda eşitlik sağlanır. Yukarıdaki (1.4) eşitsizliğinde $f(x) = -x^2$ koyarsak, her $x_1, x_2, \dots, x_n$ ve $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 1$ eşitliğini sağlayan her $\lambda_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) için

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n)^2 \geq \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$$

olur. Bu ifadede $x_k = \frac{a_k}{b_k}$ ve $p_k = b_k^2 (b_1^2 + \dots + b_n^2)^{-1}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) yazarsak Cauchy-Bunyakovsky-Schwartz eşitsizliği elde edilir;

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n| \leq \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + \dots + b_n^2}. \quad (1.6)$$

Konkav fonksiyon üzerinde $f(x) = \ln x$ alırsak, her $x, y \in (0, \infty)$ ve $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$ için

$$\ln(\alpha x + \beta y) \geq \alpha \ln x + \beta \ln y = \ln(x^\alpha y^\beta)$$

$$\alpha x + \beta y \geq x^\alpha y^\beta \Rightarrow \alpha x^{\frac{1}{\alpha}} + \beta y^{\frac{1}{\beta}} \geq xy$$

elde edilir. Son ifade de $\frac{1}{\alpha} = p$, $\frac{1}{\beta} = q$ dersek, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ eşitliğini sağlayan her $p > 1$, $q > 1$ ve $x \geq 0$, $y \geq 0$ için

$$\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \geq xy \quad (1.7)$$

Young eşitsizliği elde edilir.

Jensen eşitsizliği yukarıda saydığımız eşitsizliklerin hepsinden daha genel bir eşitsizlik olduğu için doğal olarak daha geniş bir uygulama alanına sahiptir.

Konumuzla ilgili literatürde birçok sayıda çalışma bulunmaktadır. Bunlardan en önemli ve dikkat çekici olanlarından bahsetmek gerekirse Dragomir, Pearce, Pečarić, Fink, Tong, Fitzpatrick, Pachpatte, Godunova, Varosanec, Özdemir, Kırmacı, Sağlam, Alomari, Darus, Baugoffa, Sarıkaya ve Set'in yakın zamanda yapmış olduğu çalışmalarına bakılabilir (Dragomir 1992, 1994, 2000, 2001, 2002, Pearce and Pečarić 2000, Pečarić and Beesack 1986, Pachpatte 2003, 2004, 2005, 2006, Godunova and Levin 1985, Varosanec 2007, Özdemir 2007, 2000, Kırmacı 2004, 2008, Sağlam *et. al.* 2010a,b, Alomari *et. al.* 2010, Sarıkaya *et. al.* 2008, 2010).

Kırmacı Hadamard eşitsizliği ile ilgili şu lemmayı ifade ve ispat etmiştir (Kırmacı 2004):

Lemma 1.1 $a < b$ ve $a, b \in I^\circ$ (I° , I aralığının içi) olmak üzere I° üzerinde $f : I^\circ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Eger $f' \in L([a, b])$ ise o zaman

$$\begin{aligned} & \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ &= (b-a) \left[\int_0^{\frac{1}{2}} t f'(ta + (1-t)b) dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (t-1) f'(ta + (1-t)b) dt \right]. \end{aligned}$$

dir.

Daha sonra Kırmacı ve Özdemir Hermite-Hadamard eşitsizliği ile ilgili diferensiyellenebilir dönüşümler için şu teoremi ifade ve ispat etmişlerdir (Kırmacı and Özdemir 2004):

Teorem 1.1 $a < b$ ve $a, b \in I^\circ$ olmak üzere I° üzerinde $f : I^\circ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm ve $p > 1$ olsun. Eğer $|f'|^p$ dönüşümü $[a, b]$ aralığı üzerinde konveks ise o zaman

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \leq \frac{\left(3^{1-\frac{1}{q}}\right)}{8} (b-a) (|f'(a)| + |f'(b)|)$$

dir.

Bu lemma ve teoremin ışığı altında türevinin mutlak değeri konveks olan fonksiyonlar üzerinde bir çalışma yaptık ve aşağıdaki şu lemma ve iki teoremi ifade ve ispat ettik:

Lemma 1.2 $a < b$ ve $a, b \in I^\circ$ olmak üzere I° üzerinde $f : I^\circ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Eğer $f' \in L[a, b]$ ise o zaman

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \\ &= \frac{b-a}{2} \int_0^1 \int_0^1 (f'(ta + (1-t)b) - f'(sa + (1-s)b)) (m(s) - m(t)) dt ds. \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır, burada

$$m(.) := \begin{cases} t & , t \in [0, \frac{1}{2}] \\ t - 1 & , t \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

dir.

Teorem 1.2 $a < b$ ve $a, b \in I^\circ$ olmak üzere I° üzerinde $f : I^\circ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Eğer $|f'|^2$ dönüşümü $[a, b]$ aralığı üzerinde konveks ise o zaman

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{b-a}{\sqrt{6}} \left(\frac{|f'(a)|^2 + |f'(b)|^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 1.3 $a < b$ ve $a, b \in I^\circ$ olmak üzere I° üzerinde $f : I^\circ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Eğer $|f'|^q$ dönüşümü $[a, b]$ aralığı üzerinde konveks ve $q > 1$ ise o zaman

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq (b-a) \left(\frac{2}{(p+1)(p+2)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği sağlanır, burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir.

Pachpatte, Čebyšev tipli eşitsizlikle ilgili yeni eşitsizlikleri ispatlamıştır (Pachpatte 2006).

Teorem 1.4 $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $[a, b]$ aralığı üzerinde mutlak sürekli fonksiyonlar ve $f', g' \in L_2[a, b]$ olsun. O zaman

$$|P(F, G, f, g)| \leq \frac{(b-a)^2}{12} \left[\frac{1}{b-a} \|f'\|_2^2 - ([f; a, b])^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{b-a} \|g'\|_2^2 - ([g; a, b])^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

ve

$$|P(A, B, f, g)| \leq \frac{(b-a)^2}{12} \left[\frac{1}{b-a} \|f'\|_2^2 - ([f; a, b])^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{b-a} \|g'\|_2^2 - ([g; a, b])^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizlikleri sağlanır, burada

$$\begin{aligned} P(\alpha, \beta, f, g) &= \alpha\beta - \frac{1}{b-a} \left(\alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx \right) \\ &+ \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right) \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right) \end{aligned}$$

$$[f; a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad F = \frac{f(a) + f(b)}{2}, \quad G = \frac{g(a) + g(b)}{2}, \quad A = f\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad B = g\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

ve

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

dir.

Pachpatte, Čebyšev tipli eşitsizliklere ilave olarak aşağıdaki teoremi öne sürmüştür (Pachpatte 2006):

Teorem 1.5 $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $[a, b]$ aralığı üzerinde mutlak sürekli fonksiyonlar ve bunların türevleri $f', g' \in L_2[a, b]$, $p > 1$ olsun, O zaman

$$|P(C, D, f, g)| \leq \frac{1}{(b-a)^2} \left(\frac{(2^{q+1} + 1)(b-a)^{q+1}}{3(q+1)6^q} \right)^{\frac{2}{q}} \|f'\|_p \|g'\|_p$$

eşitsizliği sağlanır, burada $P(\alpha, \beta, f, g)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere (1.8) deki gibi tanımlıdır,

$$C = \frac{1}{3} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right), \quad D = \frac{1}{3} \left(\frac{g(a) + g(b)}{2} + 2g\left(\frac{a+b}{2}\right) \right)$$

ve

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

dir.

Pachpatte bu teoremlerinin ışığı altında şu teoremleri verdi (Pachpatte 2006):

Teorem 1.6 $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $[a, b]$ aralığı üzerinde mutlak sürekli fonksiyonlar ve bunların türevleri $f', g' \in L_2[a, b]$, $p > 1$ olsun, O zaman

$$|P(F, G, f, g)| \leq \left(\frac{2(b-a)}{(q+1)(q+2)} \right)^{\frac{2}{q}} \|f'\|_p \|g'\|_p$$

eşitsizliği sağlanır, burada $P(\alpha, \beta, f, g)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere (1.8) deki gibi tanımlıdır,

$$F = \frac{f(a) + f(b)}{2}, \quad G = \frac{g(a) + g(b)}{2}$$

ve

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

dir.

Teorem 1.7 $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $[a, b]$ aralığı üzerinde mutlak sürekli fonksiyonlar ve bunların türevleri $f', g' \in L_2[a, b]$, $p > 1$ olsun, O zaman

$$|P(A, B, f, g)| \leq \left(\frac{2(b-a)}{(q+1)(q+2)} \right)^{\frac{2}{q}} \|f'\|_p \|g'\|_p \quad (1.9)$$

eşitsizliği sağlanır, burada $P(\alpha, \beta, f, g)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere (1.8) deki gibi tanımlıdır,

$$A = f\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad B = g\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

ve

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

dir.

Sunulan bu tezde Hermite-Hadamard eşitsizliği detaylı olarak incelenmiştir.

Bu amaçla temel kavramlar adını alan ikinci bölümde, ilk olarak hem pür matematikteki temel tanım ve kavramlar hem de konveks fonksiyonlarla ilgili temel tanım, teorem ve kavramlara yer verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu başlık altında çalışmamızda gerekli olan temel tanım, lemma ve teoremlerden bazılarını vererek, gerekirse açıklayıcı bilgiler vereceğiz.

Tanım 2.1 (Sınırlı Fonksiyon) : $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlanmış olsun. Her $x \in [a, b]$ için $|f(x)| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa, $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sınırlıdır denir.

Tanım 2.2 (Süreklilik): $f : S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in S$ ve $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. $x \in S$ ve $|x - x_0| < \delta$ için $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f , x_0 da süreklidir denir (Bayraktar 2010).

Tanım 2.3 (Düzgün Süreklilik): $f : S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $\varepsilon > 0$ sayısı verilmiş olsun. $|x_1 - x_2| < \delta$ şartını sağlayan her $x_1, x_2 \in S$ için $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f , S de düzgün süreklidir denir (Bayraktar 2010).

Tanım 2.4 (Lipschitz Şartı): $f : S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa f , S de Lipschitz şartını sağlıyor denir (Bayraktar 2010).

Tanım 2.5 (Mutlak Süreklilik) :

$f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ verildiğinde, $[a, b]$ aralığının sonlu sayıdaki her $[x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ ayrık alt aralıkları için,

$$\sum_{i=1}^n |x_i - x_{i-1}| < \delta \implies \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| < \varepsilon$$

olacak biçimde en az bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunabiliyorsa bu durumda, f fonksiyonuna, $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyon denir (Balcı, 2009, s. 134).

Sonuç 2.1 f , S de Lipschitz şartını sağlıyorsa f , S de düzgün süreklidir (Bayraktar 2010).

Teorem 2.1 $[a, b] \subseteq I^\circ$ olsun. Eğer $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı konveks bir fonksiyon ise f Lipschitz şartını sağlar. Sonuç olarak, f $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli ve I° de süreklidir (Pečarić et al. 1992).

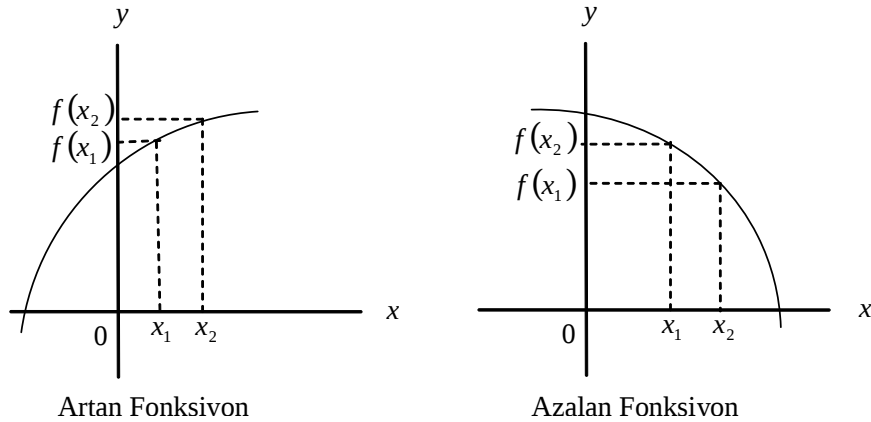
Teorem 2.2 f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise

- a. f , (a, b) aralığında sürekli ve
- b. f , $[a, b]$ aralığında sınırlıdır (Azpeitia 1994).

Tanım 2.6 (Artan Fonksiyon): A sonlu veya sonsuz bir aralık olmak üzere $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Tanım kümesine ait $x_1 \leq x_2$ iken $f(x_1) \leq f(x_2)$ ya da $x_1 \leq x_2$ için $(x_1 - x_2)(f(x_1) - f(x_2)) \leq 0$ oluyorsa ise f fonksiyonuna monoton artan fonksiyon, $f(x_1) < f(x_2)$ ya da $(x_1 - x_2)(f(x_1) - f(x_2)) > 0$ oluyorsa f fonksiyonuna kesin artan fonksiyon denir (Caferov, 1999, s. 251).

Tanım 2.7 (Azalan Fonksiyon): A sonlu veya sonsuz bir aralık olmak üzere $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Tanım kümesine ait $x_1 \leq x_2$ iken $f(x_1) \geq f(x_2)$ ya da $x_1 \leq x_2$ için $(x_1 - x_2)(f(x_1) - f(x_2)) \geq 0$ oluyorsa ise f fonksiyonuna monoton azalan fonksiyon, $f(x_1) > f(x_2)$ ya da $(x_1 - x_2)(f(x_1) - f(x_2)) < 0$ oluyorsa f fonksiyonuna kesin azalan fonksiyon denir (Caferov, 1999, s. 251).

f azalmayan, g artmayan birer fonksiyon olsun. Bu taktirde $x_1 \leq x_2$ iken $f(x_1) \leq f(x_2)$ ve $g(x_1) \geq g(x_2)$ iken $(f(x_1) - f(x_2))(g(x_1) - g(x_2)) \geq 0$ gibi eşitsizlikler elde edebiliriz.



Şekil 2.1.1 f fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıklar

(x_1, x_2) aralığında diferansiyellenebilen $y = f(x)$ fonksiyonu verildiğinde; Eğer bir aralığın tüm x noktalarında $f'(x) \geq 0$ ise fonksiyon bu aralıkta monoton artan, eğer $f'(x) > 0$ ise kesin artan fonksiyondur.

Eğer bir aralığın tüm x noktalarında $f'(x) \leq 0$ ise fonksiyon bu aralıkta monoton azalan, eğer $f'(x) < 0$ ise kesin azalan fonksiyondur.

Teorem 2.3 (Chebyshev Eşitsizliği): $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ikisi de aynı anda artan yada azalan, integrallenebilir iki fonksiyon olsunlar. Bundan başka $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Böylece

$$\int_a^b p(x) dx \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx \geq \int_a^b p(x) f(x) dx \int_a^b p(x) g(x) dx \quad (2.1)$$

eşitsizliği vardır (Mitrinović, Pečarić, Fink, 1993, pp. 239).

Eğer f ve g fonksiyonlarından birisi artmayan ve diğeri azalmayan birer fonksiyon ise (2.1) eşitsizliği yön değiştirir. (2.1) eşitsizliği matematik literatürde Chebyshev eşitsizliği olarak bilinir ve aşağıdaki özel durumları mevcuttur.

$$\int_a^b f(x) g(x) dx \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx \quad (2.2)$$

ve

$$\int_0^1 f(x) g(x) dx \geq \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 g(x) dx \quad (2.3)$$

Yukarıda bahsettiğimiz gibi f ve g fonksiyonlarından birisi artmayan ve diğeri azalmayan birer fonksiyon ise (2.2) ve (2.3) eşitsizlikleri de yön değiştirir.

Tanım 2.8 (Sekronize fonksiyonlar) : $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonları için,

$$(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0, \forall x, y \in [a, b]$$

eşitsizliği sağlamıyorsa bu fonksiyonlara sekronize fonksiyonlar denir (S.S. Dragomir and Charles E.M. Pearce, 2000).

Tanım 2.9 (Gamma Fonksiyonu): $n > 0$ için,

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

ile tanımlanan fonksiyon gamma fonksiyonu olarak tanımlanır. Bu integral $n > 0$ için yakınsaktır .

Tanım 2.10 (Beta Fonksiyonu):

$\text{Re}(x), \text{Re}(y) > 0$ için,

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon beta fonksiyonu olarak tanımlanır. Bu integral $x > 0$ ve $y > 0$ için yakınsaktır.

Beta fonksiyonun şu özellikleri vardır:

i.

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt, \quad x, y > 0, \quad (2.4)$$

ii.

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad x, y > 0, \quad (2.5)$$

iii.

$$\beta(x, y) = \beta(y, x), \quad (2.6)$$

iv.

$$\beta(m, n) = \frac{(m-1)! (n-1)!}{(m+n-1)!}, \quad (2.7)$$

özellikleri vardır (Jeffrey, Dai 2008).

Konvekslik kavramı çok sayıda gerçek dünya problemlerinin çözümünde kullanılan oldukça yararlı bir kavramdır. Konveks fonksiyonlar optimizasyon problemleri için pek çok önemli özelliklere sahiptir.

Tanım 2.11 (Grüss İntegral Eşitsizliği) : $\forall x \in [a, b]$ ve $\varphi \leq f(x) \leq \phi$, $\gamma \leq g(x) \leq \Gamma$ olacak şekilde integrallenebilir, $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları için,

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) g(x) dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \cdot \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right| \leq \frac{1}{4} (\phi - \varphi) (\Gamma - \gamma)$$

dır (S.S. Dragomir and Charles E.M. Pearce, 2000).

Tanım 2.12 (Üçgen Eşitsizliği):

Herhangi bir x, y reel sayıları için

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

$$||x| - |y|| \leq |x - y|,$$

$$||x| - |y|| \leq |x + y|,$$

eşitsizlikleri vardır. Daha genel olarak, $x_1, x_2, \dots, x_n$ reel sayıları için,

$$|x_1 + \dots + x_n| \leq |x_1| + \dots + |x_n|$$

dir (Mitrinović et. al. 1973).

Tanım 2.13 (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu):

f , $[a, b]$ aralığında reel değerli ve reel değişkenli bir fonksiyon olsun. Bu taktirde

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (a < b)$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović et. al. 1973).

Tanım 2.14 (Vektör Uzayı):

L boş olmayan bir küme ve K cismi $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olsun. Toplama ve çarpma işlemlerini,

$$+ : L \times L \rightarrow L, \quad (x, y) \rightarrow x + y \quad (2.8)$$

$$\cdot : K \times L \rightarrow L, \quad (\alpha, y) \rightarrow \alpha \cdot y$$

dönüşümleri ile tanımlayalım. Her $x, y, z \in L$ ve $a, b \in K$ için,

- i. $x + y = y + x$
- ii. $x + (y + z) = (x + y) + z$
- iii. Her $x \in L$ için $x + 0 = x$ eşitliğini sağlayan bir tek $0 \in L$ vardır.
- iv. Her $x \in L$ için $x + (-x) = 0$ eşitliğini sağlayan bir tek $-x \in L$ vardır.
- v. Her $x \in L$ için $1x = x$
- vi. $a(x + y) = ax + ay$

vii. $(a + b)x = ax + bx$

viii. $(ab)x = a(bx)$

şartları sağlansın. Bu durumda L ye K üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay), elemanlarına da vektör denir. $K = \mathbb{R}$ alınırsa L ye reel vektör uzayı, $K = \mathbb{C}$ alınırsa kompleks vektör uzayı denir (Tunç, 2007).

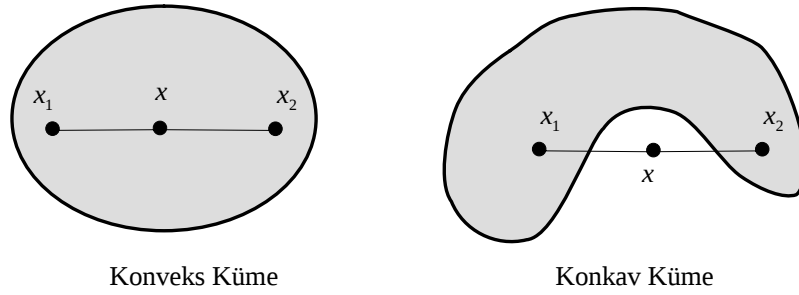
Tanım 2.15 (Konveks ve Konkav Küme):

L bir lineer uzay, $A \subseteq L$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere

$$B = \{z \in L : z = \alpha x + (1 - \alpha)y, \quad 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A \quad (2.9)$$

ise A kümesine konveks küme denir (Bayraktar 2006, s. 108).

Boş küme konveks küme olarak düşünülür. Bunların tersine eğer bir küme konveks değil ise konkav küme olarak ifade edilir.



Şekil 2.2.1 Konveks ve konkav küme

Tanım 2.16 (Konveks Fonksiyon):

$I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0, 1]$ için f fonksiyonu

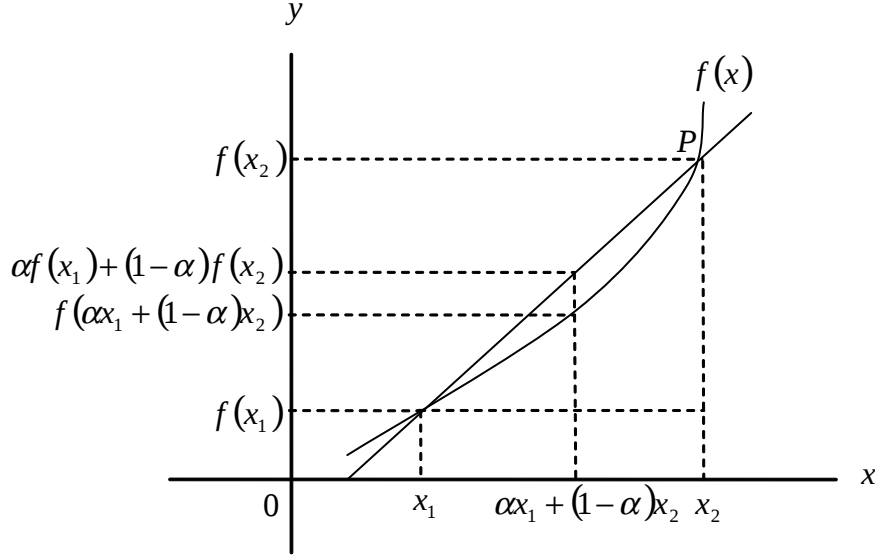
$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) \quad (2.10)$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir (Niculescu, Persson, 2006). Eğer $t \in [0, 1]$ kapalı aralığında uç noktaları dışarıda bırakırsak o zaman konveks fonksiyon şartındaki " $\leq$ " yerine " $<$ " gelir; ki bu durumda

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) < \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) \quad (2.11)$$

olur. Bu durumda f fonksiyonuna kesin konveks fonksiyon denir.

" - f " konveks (kesin konveks) ise o zaman f ye konkav (kesin konkav) denir. Eğer f fonksiyonu hem konveks hem de konkav ise f afindir. Bu afin dđntüřüm uygun m ve n sabitleri için $mx + n$ fonksiyonudur.



şekil 2.2.2 Aralık üzerinde konveks fonksiyon

Geometrik olarak $\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2$ noktasında; f nin eğri üzerinde aldığı değeri $(x_1, f(x_1))$ ve $(x_2, f(x_2))$ noktalarını birleştiren doğru parçasının üzerinde aldığı değeri her zaman daha küçüktür, yani bu iki noktayı birleştiren kiriş (doğru parçası) her zaman eğrinin $[x, y]$ aralığında kalan kısmının üzerinde veya üstündedir. şekil 2.2.2 den de görüldüğü gibi $\alpha \in [0, 1]$ olduğundan $\alpha f(x_1) \leq f(x_1)$ dir. Benzer şekilde $(1 - \alpha) f(x_2) \leq f(x_2)$ dir. Yani $(1 - \alpha) f(x_2)$ de $f(x_2)$ nin altındadır. Dolayısıyla, $\alpha f(x_1) + (1 - \alpha) f(x_2)$, $f(x_1)$ ile $f(x_2)$ arasında olur. Konkav fonksiyon için kiriş f nin grafiğinin $[x_1, x_2]$ aralığında kalan kısmının üzerinde veya altındadır. Daha kısa olarak, $[x_1, x_2]$ aralığı üzerinde konveks olan f fonksiyonu için,

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha) f(x_2)$$

dir.

Tanım 2.17: Bir aralıkta sürekli olan f fonksiyonu aralıktan alınmış her x ve y için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2} \quad (2.12)$$

oluyor ise f fonksiyonuna bu aralıkta dışbükey (yukarı bükey konveks) fonksiyon, $-f$ fonksiyonuna ise içbükey (aşağı bükey konveks) fonksiyon denir (Caferov, 1999).

Teorem 2.4 (Jensen Eşitsizliği): f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks fonksiyon ve $\lambda_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) sayıları $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$ eşitliğini sağlasın. Bu taktirde ünlü Jensen eşitsizliği $x_i \in [a, b]$ için

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n) \quad (2.13)$$

olur (Jensen, 1905,1906). Negatif olmayan λ_i ler için $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$ koşulunu eklemeyen yukarıdaki eşitsizliği

$$f\left(\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}\right) \leq \frac{\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n)}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n} \quad (2.14)$$

yazabiliriz.

Tanım 2.18 (Jensen Konvekslik):

Her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2} \quad (2.15)$$

eşitsizliğini sağlayan $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna Jensen konvekslik veya j -konveks fonksiyon denir. Aynı zamanda bu fonksiyona orta konveks fonksiyon da denir (Jensen, 1905,1906).

$x, y \in I$ için $x \neq y$ olduğunda ” $\leq$ ” yerine ” $<$ ” gelir. O halde fonksiyonuna kesin j -konveks fonksiyon denir.

Özellik 2.1:

1. İki konveks fonksiyonun toplamı (aynı aralık üzerinde tanımlı) yine bir konveks fonksiyondur. Bu toplamda fonksiyonlardan birisi kesin konveks ise toplamda kesin konvekstir.
2. Bir (kesin) konveks fonksiyonun pozitif bir skalerle çarpımı da (kesin) konveks fonksiyondur.

3. Tanımlandığı aralığın bir alt aralığına kısıtlanmış olan (kesin) konveks fonksiyon yine bu aralıkta (kesin) konveks fonksiyondur.

4. Eğer $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ bir (kesin) konveks fonksiyon ve $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ azalmayan (artan) bir konveks fonksiyon ise böylece $f \circ g$ bileşkesi de (kesin) konveks fonksiyondur.

5. f, I ve J aralıkları arasında tam bir eşleme olsun. Eğer f artan ise f nin konveks olması için gerek ve yeter şart f^{-1} in (kesin) konkav olmasıdır. Eğer f azalan bir eşleme ise f ve f^{-1} aynı tip konvektir (Niculescu, Persson, 2006).

Tanım 2.19 (Starshaped Fonksiyon):

$f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(tx) \leq tf(x) \quad (2.16)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna **starshaped** denir, burada $x \in [0, b]$ ve $t \in [0, 1]$ dir (Toader, 1984).

Tanım 2.20 (Logaritmik Konveks Fonksiyon):

$I \subset \mathbb{R}$ ve $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\log t$ konveks ise f fonksiyonuna logaritmik konveks (log-konveks) yada çarpımsal konveks fonksiyon denir. Bu ifadeye özdeş olarak şayet $\forall x, y \in I$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$f(tx + (1-t)y) \leq f^t(x) f^{1-t}(y) \quad (2.21)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna logaritmik konveks fonksiyon denir. (2.21)

eşitsizliği tersine çevrilirse f ye log-konkav denir (Pečarić, Proschan, Tong, 1992).

Tanım 2.21 (İntegrallenebilirlik): Verilen her hangi bir f fonksiyonu ölçülebilir E bölgesi üzerinde

$$\int_E |f(x)| dx < \infty$$

ise f fonksiyonuna E üzerinde integrallenebilir fonksiyon denir.

Tanım 2.22 (Power Mean Eşitsizliği):

$q \geq 1$ olsun. f ve $g, [a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|^p$ ve $|g|^q, [a, b]$

aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x) g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)| dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)| |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Benzer şekilde iki katlı integraller için power mean eşitsizliği aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\int_a^b \int_a^b |f(x) g(x)| dx dy \leq \left(\int_a^b \int_a^b |f(x)| dx dy \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b \int_a^b |f(x)| |g(x)|^q dx dy \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Reel ve kompleks sayılar için temel eşitsizliklerden bir tanesi üçgen eşitsizliğidir.

Tanım 2.23 (Hölder İntegral Eşitsizliği):

$p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x) g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović et. al. 1973).

Benzer şekilde iki katlı integraller için Hölder eşitsizliği aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\int_a^b \int_a^b |f(x) g(x)| dx dy \leq \left(\int_a^b \int_a^b |f(x)|^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b \int_a^b |g(x)|^q dx dy \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Ayrıca Hölder eşitsizliğinin bir sonucu olan power mean eşitsizliği de aşağıdaki gibi ifade edilir.

Tanım 2.24 (Hermite-Hadamard Eşitsizliği) : $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu konveks ise $a, b \in I$ ($a \leq b$) için,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

dır (S.S. Dragomir and Charles E.M. Pearce, 2000).

Tanım 2.25 (Pozitif Sayı için Bazı Anlamlar):

1. Aritmetik Anlam:

$$A = A(a, b) := \frac{a+b}{2} \quad a, b > 0;$$

2. Geometrik Anlam:

$$G = G(a, b) := \sqrt{ab} \quad a, b > 0;$$

3. Harmonik Anlam:

$$H = H(a, b) := \frac{2ab}{a+b} \quad a, b > 0;$$

4. Logaritmik Anlam:

$$L = L(a, b) := \begin{cases} a & a = b \text{ ise} \\ \frac{b-a}{\ln b - \ln a} & a \neq b \text{ ise} \end{cases}, \quad a, b > 0;$$

5. İdentrik Anlam:

$$I = I(a, b) := \begin{cases} a & a = b \text{ ise} \\ \frac{1}{e} \left(\frac{b^b}{a^a} \right)^{\frac{1}{b-a}} & a \neq b \text{ ise} \end{cases}, \quad a, b > 0;$$

6. p -Logaritmik Anlam:

$$L_p = L_p(a, b) := \begin{cases} a & a = b \text{ ise} \\ \left[\frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{(p+1)(b-a)} \right]^{\frac{1}{p}} & a \neq b \text{ ise} \end{cases}, \quad a, b > 0;$$

(Roojin and Hassani, 2007).

Bu anlamlar arasındaki ilişki aşağıdaki gibi literatürde iyi bilinir:

$$H \leq G \leq L \leq I \leq A.$$

Ayrıca, $p \in \mathbb{R}$ olmak üzere L_p nin monoton artan olduğu bilinir ve $L_0 = I$, $L_{-1} = L$ ile gösterilir.

Son olarak, x, y pozitif sayılarının r . kuvvetlerinin genelleştirilmiş logaritmik

anlamı

$$L_r(x, y) := \begin{cases} \frac{r}{r+1} \cdot \frac{x^{r+1} - y^{r+1}}{x^r - y^r} & , r \neq 0, -1, x \neq y \\ \frac{x-y}{\ln x - \ln y} & , r = 0, x \neq y \\ xy^{\frac{\ln x - \ln y}{x-y}} & , r = -1, x \neq y \\ x & , x = y \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır.

3. HERMİTE HADAMARD TIPLİ EŞİTSİZLİKLER

$a < b$, $a, b \in I$ ve I reel sayıların bir aralığı olmak üzere $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonsiyon olsun. Bu durumda

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

şeklinde tanımlanan eşitsizlik literatürde iyi bilinen Hermite-Hadamard İntegral Eşitsizliği olarak adlandırılır.

$f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon ise herhangi $x, y \in [a, b]$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu tanımlama Jensen'in sonuçlarının kökenidir. Konveks analiz, kullanışlı ve matematiğin çok disiplinli bir etkisidir. Konveks eğriler ve konveks bodies eski çağlardan beri matematik literatüründe ortaya çıktı ve kendileri ile ilgili pek çok önemli sonuçlar vardır. Söyleyebiliriz ki f konkav ise $(-f)$ konvektir.

Hadamard Eşitsizliği konveks fonksiyonlar için geometrik önemi nedeniyle büyük ölçüde uygulanan bir eşitliktir ve bu eşitsizlik genişlemesi için büyük bir yelpazede zengin bir matematik literatürü üretti.

Lemma 3.1: $a < b$ olmak üzere $f : I^\circ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° , $a, b \in I^\circ$ (I° , I nın içi) diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Eğer $f' \in L([a, b])$ ise bu durumda

$$m(.) := \begin{cases} t & , t \in [0, \frac{1}{2}] \\ t-1 & , t \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \\ &= \frac{b-a}{2} \int_0^1 \int_0^1 (f'(ta + (1-t)b) - f'(sa + (1-s)b)) (m(s) - m(t)) dt ds. \end{aligned} \quad (3.1)$$

eşitliği sağlanır(Sağlam, Sarıkaya, Yıldırım, 2010).

İspat: $m(\cdot)$ nin tanımından dolayı,

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_0^1 (f'(ta + (1-t)b) - f'(sa + (1-s)b)) (m(t) - m(s)) dt ds \\
&= \int_0^1 \left\{ \int_0^1 f'(ta + (1-t)b) (m(t) - m(s)) dt \right. \\
&\quad \left. - \int_0^1 f'(sa + (1-s)b) (m(t) - m(s)) dt \right\} ds \\
&= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1/2} f'(ta + (1-t)b) (t - m(s)) dt \right. \\
&\quad + \int_{1/2}^1 f'(ta + (1-t)b) (t - 1 - m(s)) dt \left\} ds \\
&\quad - \int_0^1 \left\{ \int_0^{1/2} f'(sa + (1-s)b) (t - m(s)) dt \right. \\
&\quad \left. + \int_{1/2}^1 f'(sa + (1-s)b) (t - 1 - m(s)) dt \right\} ds \\
&= \int_0^1 \int_0^1 (f'(ta + (1-t)b) - f'(sa + (1-s)b)) (m(t) - m(s)) dt ds \\
&= \int_0^{1/2} \left\{ \int_0^{1/2} f'(ta + (1-t)b) (t - s) dt \right\} ds \\
&\quad + \int_{1/2}^1 \left\{ \int_0^{1/2} f'(ta + (1-t)b) (t - s + 1) dt \right\} ds \\
&\quad + \int_0^{1/2} \left\{ \int_{1/2}^1 f'(ta + (1-t)b) (t - s - 1) dt \right\} ds \\
&\quad + \int_{1/2}^1 \left\{ \int_{1/2}^1 f'(ta + (1-t)b) (t - s) dt \right\} ds \\
&\quad - \int_0^{1/2} \left\{ \int_0^{1/2} f'(sa + (1-s)b) (t - s) dt \right\} ds \\
&\quad - \int_{1/2}^1 \left\{ \int_0^{1/2} f'(sa + (1-s)b) (t - s + 1) dt \right\} ds \\
&\quad - \int_0^{1/2} \left\{ \int_{1/2}^1 f'(sa + (1-s)b) (t - s - 1) dt \right\} ds \\
&\quad - \int_{1/2}^1 \left\{ \int_{1/2}^1 f'(sa + (1-s)b) (t - s) dt \right\} ds \\
&= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 - I_5 - I_6 - I_7 - I_8.
\end{aligned}$$

yazılır. Böylece kısmi integrasyon yöntemi kullanılırsa:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{1/2} \left\{ \int_0^{1/2} f'(ta + (1-t)b) (t-s) dt \right\} ds \\
&= \int_0^{1/2} \left\{ (t-s) \frac{f(ta + (1-t)b)}{a-b} \Big|_0^{1/2} - \frac{1}{(a-b)} \int_0^{1/2} f(ta + (1-t)b) dt \right\} ds \\
&= \int_0^{1/2} \left\{ \left(\frac{1}{2} - s\right) \frac{f(\frac{a+b}{2})}{a-b} + s \frac{f(b)}{a-b} \right\} ds - \frac{1}{2(a-b)} \int_0^{1/2} f(ta + (1-t)b) dt \\
&= \left(\left(\frac{s}{2} - \frac{s^2}{2}\right) \frac{f(\frac{a+b}{2})}{a-b} + \frac{s^2}{2} \frac{f(b)}{a-b} \right) \Big|_0^{1/2} - \frac{1}{2(a-b)} \int_0^{1/2} f(ta + (1-t)b) dt \\
&= \frac{1}{8} \frac{f(\frac{a+b}{2})}{a-b} + \frac{1}{8} \frac{f(b)}{a-b} - \frac{1}{2(a-b)} \int_0^{1/2} f(ta + (1-t)b) dt,
\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{1/2}^1 \left\{ \int_0^{1/2} f'(ta + (1-t)b) (t-s+1) dt \right\} ds \\
&= \int_{1/2}^1 \left\{ (t-s+1) \frac{f(ta + (1-t)b)}{a-b} \Big|_0^{1/2} - \frac{1}{(a-b)} \int_0^{1/2} f(ta + (1-t)b) dt \right\} ds \\
&= \int_{1/2}^1 \left\{ \left(\frac{3}{2} - s\right) \frac{f(\frac{a+b}{2})}{a-b} + (s-1) \frac{f(b)}{a-b} \right\} ds - \frac{1}{2(a-b)} \int_0^{1/2} f(ta + (1-t)b) dt \\
&= \left(\left(\frac{3s}{2} - \frac{s^2}{2}\right) \frac{f(\frac{a+b}{2})}{a-b} + \left(\frac{s^2}{2} - s\right) \frac{f(b)}{a-b} \right) \Big|_{1/2}^1 - \frac{1}{2(a-b)} \int_0^{1/2} f(ta + (1-t)b) dt \\
&= \frac{3}{8} \frac{f(\frac{a+b}{2})}{a-b} - \frac{1}{8} \frac{f(b)}{a-b} - \frac{1}{2(a-b)} \int_0^{1/2} f(ta + (1-t)b) dt,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_0^{1/2} \left\{ \int_{1/2}^1 f'(ta + (1-t)b) (t-s-1) dt \right\} ds \\
&= \int_0^{1/2} \left\{ (t-s-1) \frac{f(ta + (1-t)b)}{a-b} \Big|_{1/2}^1 - \frac{1}{(a-b)} \int_{1/2}^1 f(ta + (1-t)b) dt \right\} ds \\
&= \int_0^{1/2} \left\{ \left(s + \frac{1}{2}\right) \frac{f(\frac{a+b}{2})}{a-b} - s \frac{f(a)}{a-b} \right\} ds - \frac{1}{2(a-b)} \int_{1/2}^1 f(ta + (1-t)b) dt \\
&= \left(\left(\frac{s^2}{2} + \frac{s}{2} \right) \frac{f(\frac{a+b}{2})}{a-b} - \frac{s^2}{2} \frac{f(a)}{a-b} \right) \Big|_0^{1/2} - \frac{1}{2(a-b)} \int_{1/2}^1 f(ta + (1-t)b) dt \\
&= \frac{3}{8} \frac{f(\frac{a+b}{2})}{a-b} - \frac{1}{8} \frac{f(a)}{a-b} - \frac{1}{2(a-b)} \int_{1/2}^1 f(ta + (1-t)b) dt,
\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int_{1/2}^1 \left\{ \int_{1/2}^1 f'(ta + (1-t)b) (t-s) dt \right\} ds \\
&= \int_{1/2}^1 \left\{ (t-s) \frac{f(ta + (1-t)b)}{a-b} \Big|_{1/2}^1 - \frac{1}{(a-b)} \int_{1/2}^1 f(ta + (1-t)b) dt \right\} ds \\
&= \int_{1/2}^1 \left\{ \left(s - \frac{1}{2}\right) \frac{f(\frac{a+b}{2})}{a-b} + (1-s) \frac{f(a)}{a-b} \right\} ds - \frac{1}{2(a-b)} \int_{1/2}^1 f(ta + (1-t)b) dt \\
&= \left(\left(\frac{s^2}{2} - \frac{s}{2} \right) \frac{f(\frac{a+b}{2})}{a-b} + \left(s - \frac{s^2}{2} \right) \frac{f(a)}{a-b} \right) \Big|_{1/2}^1 - \frac{1}{2(a-b)} \int_{1/2}^1 f(ta + (1-t)b) dt \\
&= \frac{1}{8} \frac{f(\frac{a+b}{2})}{a-b} + \frac{1}{8} \frac{f(a)}{a-b} - \frac{1}{2(a-b)} \int_{1/2}^1 f(ta + (1-t)b) dt,
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
I_5 &= \int_0^{1/2} \left\{ \int_0^{1/2} f'(sa + (1-s)b) (t-s) dt \right\} ds \\
&= \int_0^{1/2} \left\{ \left(\frac{t^2}{2} - st \right) f'(sa + (1-s)b) \Big|_0^{1/2} \right\} ds \\
&= \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{8} - \frac{s}{2} \right) f'(sa + (1-s)b) ds \\
&= \left(\frac{1}{8} - \frac{s}{2} \right) \frac{f(sa + (1-s)b)}{a-b} \Big|_0^{1/2} + \frac{1}{2(a-b)} \int_0^{1/2} f(sa + (1-s)b) ds \\
&= -\frac{1}{8} \frac{f(\frac{a+b}{2})}{a-b} - \frac{1}{8} \frac{f(b)}{a-b} + \frac{1}{2(a-b)} \int_0^{1/2} f(sa + (1-s)b) ds,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
I_6 &= \int_{1/2}^1 \left\{ \int_0^{1/2} f'(sa + (1-s)b) (t-s+1) dt \right\} ds \\
&= \int_{1/2}^1 \left\{ \left(\frac{t^2}{2} - st + t \right) f'(sa + (1-s)b) \Big|_0^{1/2} \right\} ds \\
&= \int_{1/2}^1 \left(\frac{5}{8} - \frac{s}{2} \right) f'(sa + (1-s)b) ds \\
&= \left(\frac{5}{8} - \frac{s}{2} \right) \frac{f(sa + (1-s)b)}{a-b} \Big|_{1/2}^1 + \frac{1}{2(a-b)} \int_{1/2}^1 f(sa + (1-s)b) ds \\
&= -\frac{3}{8} \frac{f(\frac{a+b}{2})}{a-b} + \frac{1}{8} \frac{f(a)}{a-b} + \frac{1}{2(a-b)} \int_{1/2}^1 f(sa + (1-s)b) ds,
\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
I_7 &= \int_0^{1/2} \left\{ \int_{1/2}^1 f'(sa + (1-s)b) (t-s-1) dt \right\} ds \\
&= \int_0^{1/2} \left\{ \left(\frac{t^2}{2} - st - t \right) f'(sa + (1-s)b) \Big|_{1/2}^1 \right\} ds \\
&= \int_0^{1/2} \left(-\frac{1}{8} - \frac{s}{2} \right) f'(sa + (1-s)b) ds \\
&= \left(-\frac{1}{8} - \frac{s}{2} \right) \frac{f(sa + (1-s)b)}{a-b} \Big|_0^{1/2} + \frac{1}{2(a-b)} \int_0^{1/2} f(sa + (1-s)b) ds \\
&= -\frac{3}{8} \frac{f(\frac{a+b}{2})}{a-b} + \frac{1}{8} \frac{f(b)}{a-b} + \frac{1}{2(a-b)} \int_0^{1/2} f(sa + (1-s)b) ds,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
I_8 &= \int_{1/2}^1 \left\{ \int_{1/2}^1 f'(sa + (1-s)b) (t-s) dt \right\} ds \\
&= \int_{1/2}^1 \left\{ \left(\frac{t^2}{2} - st \right) f'(sa + (1-s)b) \Big|_{1/2}^1 \right\} ds \\
&= \int_{1/2}^1 \left(\frac{3}{8} - \frac{s}{2} \right) f'(sa + (1-s)b) ds \\
&= \left(\frac{3}{8} - \frac{s}{2} \right) \frac{f(sa + (1-s)b)}{a-b} \Big|_{1/2}^1 + \frac{1}{2(a-b)} \int_{1/2}^1 f(sa + (1-s)b) ds \\
&= -\frac{1}{8} \frac{f(\frac{a+b}{2})}{a-b} - \frac{1}{8} \frac{f(a)}{a-b} + \frac{1}{2(a-b)} \int_{1/2}^1 f(sa + (1-s)b) ds.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

(3.2) – (3.9) eşitlikleri tekrar yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_0^1 (f'(ta + (1-t)b) - f'(sa + (1-s)b)) (m(t) - m(s)) dt ds \\
&= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 - I_5 - I_6 - I_7 - I_8 \\
&= 2 \frac{f(\frac{a+b}{2})}{a-b} - \frac{2}{(a-b)} \int_0^1 f(ta + (1-t)b) dt.
\end{aligned}$$

sonucu çıkarılır. $t \in [0, 1]$ için $x = ta + (1-t)b$ değişken değiştirmesi uygulanır

ve her iki taraf $(a - b) / 2$ ile çarpılırsa (3.1) elde edilir bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.1: $a < b$ olmak üzere $f : I^\circ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° , $a, b \in I^\circ$ (I° , I nin içi) diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Eğer $|f'|^2$, $[a, b]$ aralığında konveks ise bu durumda,

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{b-a}{\sqrt{6}} \left(\frac{|f'(a)|^2 + |f'(b)|^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.10)$$

eşitsizliği sağlanır (Sağlam, Sarıkaya, Yıldırım, 2010).

İspat: Lemma 3.1 ve çift integraller için Cauchy-Schwartz eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} & \left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \\ &= \frac{b-a}{2} \left| \int_0^1 \int_0^1 (f'(ta + (1-t)b) - f'(sa + (1-s)b)) (m(s) - m(t)) dt ds \right| \\ &\leq \frac{b-a}{2} \left[\int_0^1 \int_0^1 |f'(ta + (1-t)b) - f'(sa + (1-s)b)| |m(t) - m(s)| dt ds \right] \\ &\leq \frac{b-a}{2} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 |f'(ta + (1-t)b)| |m(t) - m(s)| dt ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 \int_0^1 |f'(sa + (1-s)b)| |m(t) - m(s)| dt ds \right\} \\ &= (b-a) \int_0^1 \int_0^1 |f'(ta + (1-t)b)| |m(t) - m(s)| dt ds \\ &\leq (b-a) \left[\left(\int_0^1 \int_0^1 (m(t) - m(s))^2 dt ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \int_0^1 |f'(ta + (1-t)b)|^2 dt ds \right)^{\frac{1}{2}} \right] \end{aligned} \quad (3.11)$$

elde edilir. $m(t)$ ve $m(s)$ nin tanımlarından ve basit bir hesaplama ile

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_0^1 (m(t) - m(s))^2 dt ds \\
&= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1/2} (t - m(s))^2 dt + \int_{1/2}^1 (t - 1 - m(s))^2 dt \right\} ds \\
&= \int_0^{1/2} \left\{ \int_0^{1/2} (t - s)^2 dt \right\} ds + \int_{1/2}^1 \left\{ \int_0^{1/2} (t - s + 1)^2 dt \right\} ds \\
&+ \int_0^{1/2} \left\{ \int_{1/2}^1 (t - s - 1)^2 dt \right\} ds + \int_{1/2}^1 \left\{ \int_{1/2}^1 (t - s)^2 dt \right\} ds \\
&= \int_0^{1/2} \left\{ \frac{(t - s)^3}{3} \Big|_0^{1/2} \right\} ds + \int_{1/2}^1 \left\{ \frac{(t - s + 1)^3}{3} \Big|_0^{1/2} \right\} ds \tag{3.12} \\
&+ \int_0^{1/2} \left\{ \frac{(t - s - 1)^3}{3} \Big|_{1/2}^1 \right\} ds + \int_{1/2}^1 \left\{ \frac{(t - s)^3}{3} \Big|_{1/2}^1 \right\} ds \\
&= \int_0^{1/2} \left\{ \frac{(1 - 2s)^3}{24} + \frac{s^3}{3} \right\} ds + \int_{1/2}^1 \left\{ \frac{(3 - 2s)^3}{24} + \frac{(s - 1)^3}{3} \right\} ds \\
&+ \int_0^{1/2} \left\{ \frac{(2s + 1)^3}{24} - \frac{s^3}{3} \right\} ds + \int_{1/2}^1 \left\{ \frac{(2s - 1)^3}{3} + \frac{(1 - s)^3}{3} \right\} ds \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

olduğu görülür ve $[a, b]$ aralında $|f'|^2$ konveks olduğundan biliniyor ki $t \in [0, 1]$

için

$$|f'(ta + (1 - t)b)|^2 \leq t |f'(a)|^2 + (1 - t) |f'(b)|^2$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 \int_0^1 |f'(ta + (1-t)b)|^2 dt ds \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\int_0^1 \int_0^1 (t |f'(a)|^2 + (1-t) |f'(b)|^2) dt ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{|f'(a)|^2 + |f'(b)|^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.13)$$

bulubur. Bundan dolayı (3.11) de (3.12) ve (3.13) kullanılırsa, (3.10) elde edilir, bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.2: $a < b$ olmak üzere $f : I^\circ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° , $a, b \in I^\circ$ (I° , I nin içi) diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Eğer $q > 1$ ve $[a, b]$ aralığında $|f'|^q$ konveks ise bu durumda,

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq (b-a) \left(\frac{2}{(p+1)(p+2)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \quad (3.14)$$

eşitsizliği sağlanır ve burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir (Sağlam, Sarıkaya, Yıldırım, 2010)..

İspat: Lemma 3.1 den görülür ki

$$\begin{aligned}
& \left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \\
&= \frac{b-a}{2} \left| \int_0^1 \int_0^1 (f'(ta + (1-t)b) - f'(sa + (1-s)b)) (m(s) - m(t)) dt ds \right| \\
&\leq \frac{b-a}{2} \left[\int_0^1 \int_0^1 |f'(ta + (1-t)b) - f'(sa + (1-s)b)| |m(t) - m(s)| dt ds \right] \\
&\leq \frac{b-a}{2} \left[\int_0^1 \int_0^1 |f'(ta + (1-t)b)| |m(t) - m(s)| dt ds \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 \int_0^1 |f'(sa + (1-s)b)| |m(t) - m(s)| dt ds \right] \\
&\leq (b-a) \int_0^1 \int_0^1 |f'(ta + (1-t)b)| |m(t) - m(s)| dt ds \\
&\leq (b-a) \left[\left(\int_0^1 \int_0^1 |m(t) - m(s)|^p dt ds \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \int_0^1 |f'(ta + (1-t)b)|^q dt ds \right)^{\frac{1}{q}} \right].
\end{aligned} \tag{3.15}$$

olur. $m(t)$ ve $m(s)$ nin tanımından dolayı,

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_0^1 |m(t) - m(s)|^p dt ds \\
&= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1/2} |t - m(s)|^p dt + \int_{1/2}^1 |t - 1 - m(s)|^p dt \right\} ds \\
&= \int_0^{1/2} \int_0^{1/2} |t - s|^p dt ds + \int_{1/2}^1 \int_0^{1/2} |t - s + 1|^p dt ds \\
&\quad + \int_0^{1/2} \int_{1/2}^1 |t - s - 1|^p dt ds + \int_{1/2}^1 \int_{1/2}^1 |t - s|^p dt ds \\
&= J_1 + J_2 + J_3 + J_4.
\end{aligned}$$

yazılır. Böylece kolay bir hesaplama ile

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_0^{1/2} \int_0^{1/2} |t-s|^p dt ds = \int_0^{1/2} \left\{ \int_0^s (s-t)^p dt + \int_s^{1/2} (t-s)^p dt \right\} ds \\
&= \frac{1}{p+1} \int_0^{1/2} \left\{ s^{p+1} + \left(\frac{1}{2} - s \right)^{p+1} \right\} ds = \frac{2}{2^{p+1} (p+1) (p+2)},
\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
J_2 &= \int_{1/2}^1 \int_0^{1/2} |t-s+1|^p dt ds = \int_{1/2}^1 \int_0^{1/2} (t-s+1)^p dt ds, \quad (t-s+1 \geq 0 \text{ için}) \\
&= \frac{1}{p+1} \int_{1/2}^1 \left\{ \left(\frac{3}{2} - s \right)^{p+1} - (1-s)^{p+1} \right\} ds \\
&= \frac{1}{(p+1)(p+2)} - \frac{1}{2^{p+1} (p+1) (p+2)},
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
J_3 &= \int_0^{1/2} \int_{1/2}^1 |t-s-1|^p dt ds = \int_0^{1/2} \int_{1/2}^1 (-t+s+1)^p dt ds, \quad (\text{for } t-s-1 \leq 0) \\
&= \frac{1}{p+1} \int_0^{1/2} \left\{ -s^{p+1} + \left(s + \frac{1}{2} \right)^{p+1} \right\} ds \\
&= \frac{1}{(p+1)(p+2)} - \frac{1}{2^{p+1} (p+1) (p+2)},
\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
J_4 &= \int_{1/2}^1 \int_{1/2}^1 |t-s|^p dt ds = \int_{1/2}^1 \left\{ \int_{1/2}^s (s-t)^p dt + \int_s^1 (t-s)^p dt \right\} ds \\
&= \frac{1}{p+1} \int_{1/2}^1 \left\{ \left(s - \frac{1}{2} \right)^{p+1} + (1-s)^{p+1} \right\} ds \\
&= \frac{1}{2^{p+1} (p+1) (p+2)}.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

elde edilir. (3.16) – (3.19) tekrar yazılırsa

$$\left(\int_0^1 \int_0^1 |m(t) - m(s)|^p dt ds \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{2}{(p+1)(p+2)} \right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.20}$$

olduğu görülür. $|f'|^q$, $[a, b]$ aralığında konveks olduğundan bilinir ki $t \in [0, 1]$

için $|f'(ta + (1-t)b)|^q \leq t|f'(a)|^q + (1-t)|f'(b)|^q$ dir, böylece

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 \int_0^1 |f'(ta + (1-t)b)|^q dt ds \right)^{\frac{1}{q}} &\leq \left(\int_0^1 \int_0^1 (t|f'(a)|^q + (1-t)|f'(b)|^q) dt ds \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

bulunur. Bundan dolayı (3.15) de (3.20) ve (3.21) yazılırsa (3.14) elde edilir, bu da ispatı tamamlar.

3.1 Bazı Ortalamalar için Uygulamalar

Şimdi özel ortalamalar için teoremlerin uygulamalarını göz önüne alalım:

a. Aritmetik Ortalama: $A = A(a, b) := \frac{a+b}{2}$, $a, b \geq 0$,

b. Logaritmik Ortalama:

$$L = L(a, b) := \begin{cases} a & , \quad a = b \\ \frac{b-a}{\ln b - \ln a} & , \quad a \neq b \end{cases}, \quad a, b > 0,$$

c. Identric Ortalama:

$$I = I(a, b) := \begin{cases} a & , \quad a = b \\ \frac{1}{e} \left(\frac{b^b}{a^a} \right)^{\frac{1}{b-a}} & , \quad a \neq b \end{cases}, \quad a, b > 0,$$

d. p -logaritmik ortalama:

$$L_p = L_p(a, b) := \begin{cases} \left[\frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{(p+1)(b-a)} \right]^{\frac{1}{p}} & , \quad a \neq b \\ a & , \quad a = b \end{cases}, \quad p \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}; \quad a, b > 0.$$

Önerme 3.1.1: $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a < b$ ve $n \in \mathbb{Z}$, $|n| \geq 1$ olsun. Bu durumda,

$$|A^n(a, b) - L_n^n(a, b)| \leq |n| \frac{(b-a)}{\sqrt{6}} A(a^{2(n-1)}, b^{2(n-1)})$$

dir (Sağlam, Sarıkaya, Yıldırım, 2010).

İspat: $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$ ve $|n| \geq 1$ için Teorem 3.1 de $f(x) = x^n$ yazılırsa ispat tamamlanır.

Önerme 3.1.2: $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a < b$ ve $n \in \mathbb{Z}$, $|n| \geq 1$ olsun. Bu durumda $q > 1$ için

$$|A(a^n, b^n) - L_n^n(a, b)| \leq |n| (b-a) \left(\frac{2}{(p+1)(p+2)} \right)^{\frac{1}{p}} \left[A(|a|^{q(n-1)}, |b|^{q(n-1)}) \right]^{\frac{1}{q}}$$

dir (Sağlam, Sarıkaya, Yıldırım, 2010).

İspat: $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$ ve $|n| \geq 1$ için Teorem 3.2 de $f(x) = x^n$ yazılırsa ispat tamamlanır.

Önerme 3.1.3: $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a < b$ olsun. Bu durumda her $q > 1$ için

$$\ln \left[\frac{I(a, b)}{A(a, b)} \right] \leq \frac{(b-a)}{ab} \left(\frac{2}{(p+1)(p+2)} \right)^{\frac{1}{p}} [A(|b|^q, |a|^q)]^{\frac{1}{q}}$$

dir (Sağlam, Sarıkaya, Yıldırım, 2010).

İspat: Teorem 3.2 de $f : (0, \infty) \rightarrow (-\infty, 0)$, $f(x) = -\ln(x)$ uygulanır ve ayrıntılar ihmal edilirse ispat tamamlanır.

Önerme 3.1.4: $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a < b$ olsun. Bu durumda her $q > 1$ için

$$|A^{-1}(a, b) - L^{-1}(a, b)| \leq \frac{(b-a)}{(ab)^2} \left(\frac{2}{(p+1)(p+2)} \right)^{\frac{1}{p}} [A(|a|^{2q}, |b|^{2q})]^{\frac{1}{q}}$$

dir (Sağlam, Sarıkaya, Yıldırım, 2010).

İspat: $x \in [a, b]$ için Teorem 3.2 de $f(x) = \frac{1}{x}$ uygulanırda ispat tamamlanır.

4. HARDY-HİLBERT EŞİTSİZLİĞİ VE UYGULAMALARI

İlk olarak iyi bililen Hilbert İntegral Eşitsizliğini tanıyalım: $f(x), g(x) \geq 0$, $0 \leq \int_0^\infty f^2(x)dx < \infty$, ve $0 \leq \int_0^\infty g^2(x)dx < \infty$ olmak üzere

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{x+y} dx dy < \pi \left(\int_0^\infty f^2(x)dx \cdot \int_0^\infty g^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.1)$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{\max\{x,y\}} dx dy < 4 \left(\int_0^\infty f^2(x)dx \cdot \int_0^\infty g^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.2)$$

eşitsizlikleri sağlanır, burada π ve 4 sabitleri sırasıyla (4.1) ve (4.2) nin mümkün olan en iyi sabitleridir. (4.1) eşitsizliği Hilbert integral eşitsizliği ve (4.2) eşitsizliği de Hilbert tipli integral eşitsizliği olarak adlandırılır. Bu eşitsizlikler de Hardy tarafından genişletilmiştir ve şu şekilde ifade edilmiştir: $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f(x), g(x) \geq 0$, $0 \leq \int_0^\infty f^p(x)dx < \infty$ ve $0 \leq \int_0^\infty g^q(x)dx < \infty$ olsun. Bu durumda

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{x+y} dx dy < \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{p})} \left(\int_0^\infty f^p(x)dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty g^q(x)dx \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (4.3)$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{\max\{x,y\}} dx dy < pq \left(\int_0^\infty f^p(x)dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty g^q(x)dx \right)^{\frac{1}{q}} \quad (4.4)$$

dir, burada $\frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{p})}$ ve pq sırasıyla (4.3) ve (4.4) nin mümkün olan en iyi sabitleridir. Hardy-Hilbert eşitsizliği ve uygulamaları analizde önemlidir. Eşitsizliğin bu tipinin genelleştirmesi ile ilgili sonuçların çoğu son yıllarda elde edildi.

Lemma 4.1: $\lambda > 0$, $A_1 \geq 0$, $A_2 \geq 0$, $A_3 \geq 0$, $A_4 > 0$ olsun. $\varpi_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4, x)$ ve $\varpi_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4, y)$ ağırlık katsayıları

$$\varpi_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4, x) := \int_0^\infty \frac{x^{\frac{\lambda}{2}} y^{-1+\frac{\lambda}{2}}}{A_1 x^\lambda + A_2 y^\lambda + A_3 \min\{x^\lambda, y^\lambda\} + A_4 \max\{x^\lambda, y^\lambda\}} dy, \quad (4.5)$$

$$\varpi_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4, y) := \int_0^\infty \frac{x^{-1+\frac{\lambda}{2}} y^{\frac{\lambda}{2}}}{A_1 x^\lambda + A_2 y^\lambda + A_3 \min\{x^\lambda, y^\lambda\} + A_4 \max\{x^\lambda, y^\lambda\}} dx, \quad (4.6)$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $\varpi_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4, x) = \varpi_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4, y) =$

$C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4)$ sabiti

$$C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4) = \begin{cases} \frac{2}{\lambda\sqrt{(A_1+A_4)(A_2+A_3)}} \arctan \sqrt{\frac{A_2+A_3}{A_1+A_4}} \\ + \frac{2}{\lambda\sqrt{(A_1+A_3)(A_2+A_4)}} \arctan \sqrt{\frac{A_1+A_3}{A_2+A_4}} & , A_i > 0, i = 1, 2, 3, 4 \\ \frac{4}{\lambda A_4} & , A_i = 0, A_4 > 0, i = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (4.7)$$

dir (Sağlam, Yıldırım, Sarıkaya, 2010)..

ispat: $t = \left(\frac{y}{x}\right)^\lambda$ dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned} \varpi_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4, x) &= \int_0^\infty \frac{x^{\frac{\lambda}{2}} y^{-1+\frac{\lambda}{2}}}{A_1 x^\lambda + A_2 y^\lambda + A_3 \min\{x^\lambda, y^\lambda\} + A_4 \max\{x^\lambda, y^\lambda\}} dy, \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{A_1 + A_2 t + A_3 \min\{1, t\} + A_4 \max\{1, t\}} dt := I \end{aligned} \quad (4.8)$$

elde edilir.

a. $A_1, A_2, A_3, A_4 > 0$ için

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\lambda} \left\{ \int_0^1 \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{A_1 + A_2 t + A_3 t + A_4} dt + \int_1^\infty \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{A_1 + A_2 t + A_3 + A_4 t} dt \right\} \\ &= \frac{1}{\lambda} \left\{ \frac{2}{\sqrt{(A_1+A_4)(A_2+A_3)}} \int_0^1 \frac{\sqrt{\frac{A_2+A_3}{A_1+A_4}}}{t^2+1} dt + \frac{2}{\sqrt{(A_1+A_3)(A_2+A_4)}} \int_1^\infty \frac{\sqrt{\frac{A_1+A_3}{A_2+A_4}}}{t^2+1} dt \right\} \\ &= \frac{2}{\lambda\sqrt{(A_1+A_4)(A_2+A_3)}} \arctan \sqrt{\frac{A_2+A_3}{A_1+A_4}} + \frac{2}{\lambda\sqrt{(A_1+A_3)(A_2+A_4)}} \arctan \sqrt{\frac{A_1+A_3}{A_2+A_4}}; \end{aligned} \quad (4.9)$$

b. $A_1 = A_2 = A_3 = 0, A_4 > 0$ için

$$I = \frac{1}{\lambda} \left\{ \int_0^1 \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{A_4} dt + \int_1^\infty \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{A_4 t} dt \right\} = \frac{4}{\lambda A_4} \quad (4.10)$$

elde edilir. Böylece $\varpi_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4, x) = C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4)$. Simetrik olarak da $\varpi_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4, y) = C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4)$ olur.

Lemma 4.2: $p > 1$ (veya $0 < p < 1$), $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\lambda > 0$, $A_1, A_2, A_3 \geq 0$, $A_4 > 0$ ve $0 < \varepsilon < \frac{p\lambda}{2}$ olmak üzere,

$$J(\varepsilon) = \int_1^\infty \int_1^\infty \frac{x^{\frac{\lambda}{2}-1-\frac{\varepsilon}{p}} y^{\frac{\lambda}{2}-1-\frac{\varepsilon}{q}}}{A_1 x^\lambda + A_2 y^\lambda + A_3 \min\{x^\lambda, y^\lambda\} + A_4 \max\{x^\lambda, y^\lambda\}} dx dy \quad (4.11)$$

ise bu durumda $\varepsilon \longrightarrow 0^+$ için,

$$\frac{1}{\varepsilon} [C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4) + o(1)] - O(1) < J(\varepsilon) < \frac{1}{\varepsilon} [C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4) + \tilde{o}(1)] \quad (4.12)$$

dir (Sağlam, Yıldırım, Sarıkaya, 2010).

ispat: $t = \left(\frac{x}{y}\right)^\lambda$ alınırsa,

$$\begin{aligned} J(\varepsilon) &= \int_1^\infty \int_1^\infty \frac{x^{\frac{\lambda}{2}-1-\frac{\varepsilon}{p}} y^{\frac{\lambda}{2}-1-\frac{\varepsilon}{q}}}{A_1 x^\lambda + A_2 y^\lambda + A_3 \min\{x^\lambda, y^\lambda\} + A_4 \max\{x^\lambda, y^\lambda\}} dx dy \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_1^\infty y^{-1-\varepsilon} \int_{y^{-\lambda}}^\infty \frac{t^{-\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{\lambda p}}}{A_1 t + A_2 + A_3 \min\{t, 1\} + A_4 \max\{t, 1\}} dt dy \\ &= \frac{1}{\lambda \varepsilon} \int_0^\infty \frac{t^{-\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{\lambda p}}}{A_1 t + A_2 + A_3 \min\{t, 1\} + A_4 \max\{t, 1\}} dt \\ &\quad - \frac{1}{\lambda} \int_1^\infty y^{-1-\varepsilon} \int_0^{y^{-\lambda}} \frac{t^{-\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{\lambda p}}}{A_1 t + A_2 + A_3 \min\{t, 1\} + A_4 \max\{t, 1\}} dt dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon} [C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4) + o(1)] - \frac{1}{\lambda} \int_1^\infty y^{-1-\varepsilon} \int_0^{y^{-\lambda}} \frac{t^{-\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{\lambda p}}}{A_1 t + A_2 + A_3 t + A_4} dt dy \\ &\geq \frac{1}{\varepsilon} [C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4) + o(1)] - \frac{1}{\lambda A_4} \int_1^\infty y^{-1} \left(\int_0^{y^{-\lambda}} t^{-\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{\lambda p}} dt \right) dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon} [C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4) + o(1)] - O(1). \end{aligned} \quad (4.13)$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} J(\varepsilon) &= \int_1^\infty \int_1^\infty \frac{x^{\frac{\lambda}{2}-1-\frac{\varepsilon}{p}} y^{\frac{\lambda}{2}-1-\frac{\varepsilon}{q}}}{A_1 x^\lambda + A_2 y^\lambda + A_3 \min\{x^\lambda, y^\lambda\} + A_4 \max\{x^\lambda, y^\lambda\}} dx dy \\ &< \int_1^\infty \left[\int_0^\infty \frac{x^{\frac{\lambda}{2}-1-\frac{\varepsilon}{p}}}{A_1 x^\lambda + A_2 y^\lambda + A_3 \min\{x^\lambda, y^\lambda\} + A_4 \max\{x^\lambda, y^\lambda\}} dx \right] y^{\frac{\lambda}{2}-1-\frac{\varepsilon}{q}} dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon} [C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4) + \tilde{o}(1)] \end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylece, (4.12) eşitsizliği sağlanır. Bu da Lemma'nın ispatını tamamlar.

Teorem 4.1: Eğer $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\lambda > 0$, $A_1, A_2, A_3 \geq 0$, $A_4 > 0$, $f(x)$, $g(x) \geq 0$ ve $0 \leq \int_0^\infty x^{p(1-\frac{\lambda}{2})-1} f^p(x) dx < \infty$ ve $0 \leq \int_0^\infty x^{q(1-\frac{\lambda}{2})-1} g^q(x) dx < \infty$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} S &:= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{A_1 x^\lambda + A_2 y^\lambda + A_3 \min\{x^\lambda, y^\lambda\} + A_4 \max\{x^\lambda, y^\lambda\}} dx dy \\ &< C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4) \left(\int_0^\infty x^{p(1-\frac{\lambda}{2})-1} f^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty x^{q(1-\frac{\lambda}{2})-1} g^q(x) dx \right)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

eşitsizliği sağlanır, burada (4.7) deki gibi tanımlanan $C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4)$ çarpımı mümkün olan en iyi sabittir (Sağlam, Yıldırım, Sarıkaya, 2010).

ispat: Hölder eşitsizliği ve (4.5) ve (4.6) eşitlikleri dikkate alınarak,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\frac{1}{A_1 x^\lambda + A_2 y^\lambda + A_3 \min\{x^\lambda, y^\lambda\} + A_4 \max\{x^\lambda, y^\lambda\}} \right]^{\frac{1}{p}} \frac{x^{\frac{1-\lambda}{2}}}{y^{\frac{1-\lambda}{2}}} f(x) \\ &\quad \times \left[\frac{1}{A_1 x^\lambda + A_2 y^\lambda + A_3 \min\{x^\lambda, y^\lambda\} + A_4 \max\{x^\lambda, y^\lambda\}} \right]^{\frac{1}{q}} \left[\frac{y^{\frac{1-\lambda}{2}}}{x^{\frac{1-\lambda}{2}}} g(y) \right] dx dy \\ &\leq \left\{ \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{x^{(1-\frac{\lambda}{2})(p-1)} y^{\frac{\lambda}{2}-1}}{A_1 x^\lambda + A_2 y^\lambda + A_3 \min\{x^\lambda, y^\lambda\} + A_4 \max\{x^\lambda, y^\lambda\}} f^p(x) dx \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &\quad \times \left\{ \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{y^{(1-\frac{\lambda}{2})(q-1)} x^{\frac{\lambda}{2}-1}}{A_1 x^\lambda + A_2 y^\lambda + A_3 \min\{x^\lambda, y^\lambda\} + A_4 \max\{x^\lambda, y^\lambda\}} g^q(y) dy \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &= \left\{ \int_0^\infty \varpi_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4, x) x^{p(1-\frac{\lambda}{2})-1} f^p(x) dx \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &\quad \times \left\{ \int_0^\infty \varpi_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4, y) y^{q(1-\frac{\lambda}{2})-1} g^q(y) dy \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &\leq C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4) \left\{ \int_0^\infty x^{p(1-\frac{\lambda}{2})-1} f^p(x) dx \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_0^\infty y^{q(1-\frac{\lambda}{2})-1} g^q(y) dy \right\}^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \quad (4.15)$$

elde edilir. Eğer

$$\begin{aligned}
M \frac{x^{\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)(p-1)} y^{\frac{\lambda}{2}-1}}{A_1 x^\lambda + A_2 y^\lambda + A_3 \min\{x^\lambda, y^\lambda\} + A_4 \max\{x^\lambda, y^\lambda\}} f^p(x) \\
= N \frac{y^{\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)(q-1)} x^{\frac{\lambda}{2}-1}}{A_1 x^\lambda + A_2 y^\lambda + A_3 \min\{x^\lambda, y^\lambda\} + A_4 \max\{x^\lambda, y^\lambda\}} g^q(y), \quad (4.16) \\
M x^{p\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)} f^p(x) = N y^{q\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)} g^q(y), \quad (x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty)
\end{aligned}$$

olacak şekilde M ve N sabitleri mevcut ve sıfırdan farklı ise (4.15) eşitsizliği eşitlik halini alır.

Böylece,

$$M x^{p\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)} f^p(x) = N y^{q\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)} g^q(y) = c \quad (x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty) \quad (4.17)$$

olacak şekilde bir c sabiti vardır.

İdda ediyoruz ki $M = 0$ dır. Gerçekten de $M \neq 0$ ise o zaman

$$x^{p\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)-1} f^p(x) = \frac{c}{Mx}, \quad x \in (0, \infty) \quad (4.18)$$

olur ve $0 \leq \int_0^\infty x^{p\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)-1} f^p(x) dx < \infty$ eşitsizliği ile çelişir. Böylece (4.15) den (4.14) elde edilir.

Eğer $C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4)$ çarpanı mümkün olan en iyi sabit olmasın o zaman bir $K(K < C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4))$ sabiti vardır öyleki

$C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4)$ çarpanı ile K yer değiştirse de (4.14) eşitsizliği hala geçerlidir.

$0 < \varepsilon < \frac{p\lambda}{2}$ ve $x \in (0, 1)$ için $\tilde{f}$ ve $\tilde{g}$ $\tilde{f}(x) = \tilde{g}(x) = 0$ olarak alınırsa, $x \in [1, \infty)$ için $\tilde{f}(x) = x^{\frac{\lambda}{2}-1-\frac{\varepsilon}{p}}$; $\tilde{g}(x) = x^{\frac{\lambda}{2}-1-\frac{\varepsilon}{q}}$ olur o zaman

$$\begin{aligned}
K \left(\int_0^\infty x^{p\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)-1} \tilde{f}^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty x^{q\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)-1} \tilde{g}^q(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
= K \left(\int_0^\infty x^{-1-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty x^{-1-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{q}} = \frac{K}{\varepsilon} \quad (4.19)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. (4.12) eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\tilde{f}(x)\tilde{g}(x)}{A_1 x^\lambda + A_2 y^\lambda + A_3 \min\{x^\lambda, y^\lambda\} + A_4 \max\{x^\lambda, y^\lambda\}} dx dy \\
&= \int_1^\infty \left[\int_1^\infty \frac{x^{\frac{\lambda}{2}-1-\frac{\varepsilon}{p}}}{A_1 x^\lambda + A_2 y^\lambda + A_3 \min\{x^\lambda, y^\lambda\} + A_4 \max\{x^\lambda, y^\lambda\}} dx \right] y^{\frac{\lambda}{2}-1-\frac{\varepsilon}{q}} dy \quad (4.20) \\
&> \frac{1}{\varepsilon} [C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4) + o(1)] - O(1)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bundan dolayı,

$$\frac{1}{\varepsilon} [C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4) + o(1)] - O(1) < \frac{K}{\varepsilon}, \quad (4.21)$$

veya

$$\frac{1}{\lambda} [C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4) + o(1)] - \varepsilon O(1) < K \quad (4.22)$$

olur. $\varepsilon \rightarrow 0^+$ için $C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4) \leq K$ olur ki bu da $K < C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4)$ olması ile çelişir. Böylece $C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4)$ çarpanı (4.14) eşitsizliğinin mümkün olan en iyi sabitidir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Uyarı 4.1:

i. Eğer Teorem 4.1 de $A_1 = A_2 = 0$ ve $\lambda = A_3 = A_4 = 1$ alınrsa o zaman $C_1(0, 0, 1, 1) = \pi$ olur ve (4.14) eşitsizliği Hardy-Hilbert eşitsizliğine dönüşür yani

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{x+y} dx dy < \pi \left(\int_0^\infty x^{\frac{p}{2}-1} f^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty x^{\frac{q}{2}-1} g^q(x) dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

olduğu görülür.

ii. Eğer Teorem 4.1 de $A_1 = A_2 = A_3 = 0$, $\lambda = A_4 = 1$ alınrsa o zaman $C_1(0, 0, 0, 1) = 4$ olur ve (4.14) eşitsizliği

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{\max\{x, y\}} dx dy < 4 \left(\int_0^\infty x^{\frac{p}{2}-1} f^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty x^{\frac{q}{2}-1} g^q(x) dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğine dönüşür.

iii. Eğer Teorem 4.1 de $A_1 = A_2 = 0$ ve $\lambda > 0$, $A_3 = A$, $A_4 = B$ alınrsa o zaman

$$C_\lambda(0, 0, A, B) = \begin{cases} \frac{4}{\lambda\sqrt{AB}} \arctan \sqrt{\frac{A}{B}} & , A, B > 0 \text{ için} \\ \frac{4}{\lambda B} & , A = 0, B > 0 \text{ için} \end{cases}$$

olur, ve (4.14) eşitsizliği

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{A \min\{x^\lambda, y^\lambda\} + B \max\{x^\lambda, y^\lambda\}} dx dy \\ & < C_\lambda(A, B) \left(\int_0^\infty x^{p(1-\frac{\lambda}{2})-1} f^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty x^{q(1-\frac{\lambda}{2})-1} g^q(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüştür (Sağlam, Yıldırım, Sarıkaya, 2010).

Teorem 4.2: $0 < p < 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\lambda > 0$, $A_1, A_2, A_3 \geq 0$, $A_4 > 0$, $f(x)$, $g(x) \geq 0$ ve $0 \leq \int_0^\infty x^{p(1-\frac{\lambda}{2})-1} f^p(x) dx < \infty$ ve $0 \leq \int_0^\infty x^{q(1-\frac{\lambda}{2})-1} g^q(x) dx < \infty$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x)g(x)}{A_1 x^\lambda + A_2 y^\lambda + A_3 \min\{x^\lambda, y^\lambda\} + A_4 \max\{x^\lambda, y^\lambda\}} dx dy \\ & > C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4) \left(\int_0^\infty x^{p(1-\frac{\lambda}{2})-1} f^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty x^{q(1-\frac{\lambda}{2})-1} g^q(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \quad (4.23)$$

eşitsizliği sağlanır, burada (4.7) deki gibi tanımlanan $C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4)$ çarpanı mümkün olan en iyi sabittir (Sağlam, Yıldırım, Sarıkaya, 2010).

İspat: Ters Hölder eşitsizliğinden, ve aynı şekilde (4.23) eşitsizliği elde edilir. Eğer (4.23) deki $C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4)$ çarpanı mümkün olan en iyi sabit olmasın o zaman bir pozitif H ($H > C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4)$) sabiti vardır öyleki $C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4)$ çarpanı ile H yer değiştirse de (4.23) eşitsizliği hala geçerlidir.

$0 < \varepsilon < \frac{p\lambda}{2}$ için $\tilde{f}$ ve $\tilde{g}$ Theorem 4.1 deki gibi alınırsa o zaman

$$\begin{aligned} & H \left(\int_0^\infty x^{p(1-\frac{\lambda}{2})-1} \tilde{f}^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty x^{q(1-\frac{\lambda}{2})-1} \tilde{g}^q(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ & = H \left(\int_0^\infty x^{-1-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty x^{-1-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{q}} = \frac{H}{\varepsilon} \end{aligned} \quad (4.24)$$

olur. (4.12) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\tilde{f}(x)\tilde{g}(x)}{A_1 x^\lambda + A_2 y^\lambda + A_3 \min\{x^\lambda, y^\lambda\} + A_4 \max\{x^\lambda, y^\lambda\}} dx dy \\ &= \int_1^\infty \left[\int_1^\infty \frac{x^{\frac{\lambda}{2}-1-\frac{\varepsilon}{p}}}{A_1 x^\lambda + A_2 y^\lambda + A_3 \min\{x^\lambda, y^\lambda\} + A_4 \max\{x^\lambda, y^\lambda\}} dx \right] y^{\frac{\lambda}{2}-1-\frac{\varepsilon}{q}} dy \quad (4.25) \end{aligned}$$

$$< \frac{1}{\varepsilon} [C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4) + \tilde{o}(1)]$$

elde edilir. Bu nedenle,

$$\frac{1}{\varepsilon} [C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4) + \tilde{o}(1)] > \frac{H}{\varepsilon}, \quad (4.26)$$

veya

$$C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4) + \tilde{o}(1) \geq H \quad (4.27)$$

olduğu görülür.

$\varepsilon \rightarrow 0^+$ için $C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4) \geq H$ olur ki bu da $H > C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4)$ olması ile çelişir. Böylece (4.23) eşitsizliğindeki $C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4)$ çarpımı mümkün olan en iyi sabittir. Bu da istenen sonuçtur.

Uyarı 4.2:

i. Eğer Teorem 4.2 de $A_1 = A_2 = 0$ ve $\lambda = A_3 = A_4 = 1$ alınrsa o zaman $C_1(0, 0, 1, 1) = \pi$ olur ve (4.23) eşitsizliği Hardy-Hilbert eşitsizliğine dönüşür yani

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{x+y} dx dy > \pi \left(\int_0^\infty x^{\frac{p}{2}-1} f^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty x^{\frac{q}{2}-1} g^q(x) dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

olur.

ii. Eğer Teorem 4.2 de $A_1 = A_2 = A_3 = 0$ ve $\lambda = A_4 = 1$ alınrsa $C_1(0, 0, 0, 1) = 4$ olur ve (4.23) eşitsizliği

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{\max\{x, y\}} dx dy > 4 \left(\int_0^\infty x^{\frac{p}{2}-1} f^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty x^{\frac{q}{2}-1} g^q(x) dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğine dönüşür.

iii. Eğer Teorem 4.2 de $A_1 = A_2 = 0$ ve $\lambda > 0$, $A_3 = A$, $A_4 = B$ alınrsa,

$$C_\lambda(0, 0, A, B) = \begin{cases} \frac{4}{\lambda\sqrt{AB}} \arctan \sqrt{\frac{A}{B}} & , A, B > 0 \text{ için} \\ \frac{4}{\lambda B} & , A = 0, B > 0 \text{ için} \end{cases}$$

olur ve (4.23) eşitsizliği

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{A \min\{x^\lambda, y^\lambda\} + B \max\{x^\lambda, y^\lambda\}} dx dy \\ & > C_\lambda(A, B) \left(\int_0^\infty x^{p(1-\frac{\lambda}{2})-1} f^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty x^{q(1-\frac{\lambda}{2})-1} g^q(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür (Sağlam, Yıldırım, Sarıkaya, 2010).

Teorem 4.3: Teorem 4.1 in şartları altında

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty y^{\frac{\lambda p}{2}-1} \left[\int_0^\infty \frac{f(x)}{A_1 x^\lambda + A_2 y^\lambda + A_3 \min\{x^\lambda, y^\lambda\} + A_4 \max\{x^\lambda, y^\lambda\}} dx \right]^p dy \\ & < [C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4)]^p \int_0^\infty x^{p(1-\frac{\lambda}{2})-1} f^p(x) dx, \end{aligned} \tag{4.28}$$

eşitsizliği sağlanır, burada $[C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4)]^p$ çarpanı mümkün olan en iyi sabittir. (4.14) ve (4.28) eşitsizlikleri eşdeğerdir (Sağlam, Yıldırım, Sarıkaya, 2010).

İspat:

$$g(y) = y^{\frac{\lambda p}{2}-1} \left\{ \int_0^\infty \frac{f(x)}{A_1 x^\lambda + A_2 y^\lambda + A_3 \min\{x^\lambda, y^\lambda\} + A_4 \max\{x^\lambda, y^\lambda\}} dx \right\}^{p-1} \quad (4.29)$$

olarak alınırsa (4.14) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \int_0^\infty y^{q(1-\frac{\lambda}{2})-1} g^q(y) dy &= \int_0^\infty y^{\frac{\lambda p}{2}-1} \left\{ \int_0^\infty \frac{f(x)}{A_1 x^\lambda + A_2 y^\lambda + A_3 \min\{x^\lambda, y^\lambda\} + A_4 \max\{x^\lambda, y^\lambda\}} dx \right\}^p dy \\ &= \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty \frac{f(x)}{A_1 x^\lambda + A_2 y^\lambda + A_3 \min\{x^\lambda, y^\lambda\} + A_4 \max\{x^\lambda, y^\lambda\}} dx \right\} \\ &\quad \times \left\{ y^{\frac{\lambda p}{2}-1} \left\{ \int_0^\infty \frac{f(x)}{A_1 x^\lambda + A_2 y^\lambda + A_3 \min\{x^\lambda, y^\lambda\} + A_4 \max\{x^\lambda, y^\lambda\}} dx \right\}^{p-1} \right\} dy \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x)g(x)}{A_1 x^\lambda + A_2 y^\lambda + A_3 \min\{x^\lambda, y^\lambda\} + A_4 \max\{x^\lambda, y^\lambda\}} dx dy \\ &\leq C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4) \left(\int_0^\infty x^{p(1-\frac{\lambda}{2})-1} f^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad \times \left(\int_0^\infty x^{q(1-\frac{\lambda}{2})-1} g^q(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \quad (4.30)$$

yazılır. Bundan dolayı

$$\int_0^\infty y^{q(1-\frac{\lambda}{2})-1} g^q(y) dy \leq [C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4)]^p \int_0^\infty x^{p(1-\frac{\lambda}{2})-1} f^p(x) dx \quad (4.31)$$

olur. Böylece (4.14) den ve (4.30) ve (4.31) eşitsizliklerinin her ikisi birbirinin yerini tuttuğundan (4.28) elde edilir.

Hölder eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{A_1 x^\lambda + A_2 y^\lambda + A_3 \min\{x^\lambda, y^\lambda\} + A_4 \max\{x^\lambda, y^\lambda\}} dx dy \\
&= \int_0^\infty \left\{ y^{\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{p}} \int_0^\infty \frac{f(x)}{A_1 x^\lambda + A_2 y^\lambda + A_3 \min\{x^\lambda, y^\lambda\} + A_4 \max\{x^\lambda, y^\lambda\}} dx \right\} \left\{ y^{\frac{1}{p} - \frac{\lambda}{2}} g(y) \right\} dy \\
&\leq \left\{ \int_0^\infty y^{\frac{\lambda p}{2} - \frac{1}{p}} \left\{ \int_0^\infty \frac{f(x)}{A_1 x^\lambda + A_2 y^\lambda + A_3 \min\{x^\lambda, y^\lambda\} + A_4 \max\{x^\lambda, y^\lambda\}} dx \right\}^p dy \right\}^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \times \left(\int_0^\infty y^{q(1-\frac{\lambda}{2})-1} g^q(y) dy \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned} \tag{4.32}$$

elde edilir. Bu nedenle (4.28) den (4.14) elde edilir ve (4.28) ve (4.14) eşitsizlikleri eşdeğerdir. Eğer (4.28) deki çarpan mümkün olan en iyi sabit değilse o zaman (4.32) den bir çelişki elde edilir ki bu da (4.14) deki çarpanın mümkün olan en iyi sabit olmamasıdır. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 4.4: Teorem 4.2 nin şartları altında

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty y^{\frac{\lambda p}{2} - 1} \left[\int_0^\infty \frac{f(x)}{A_1 x^\lambda + A_2 y^\lambda + A_3 \min\{x^\lambda, y^\lambda\} + A_4 \max\{x^\lambda, y^\lambda\}} dx \right]^p dy \\
&> [C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4)]^p \int_0^\infty x^{p(1-\frac{\lambda}{2})-1} f^p(x) dx
\end{aligned} \tag{4.33}$$

eşitsizliği sağlanır, burada $[C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4)]^p$ çarpma mümkün olan en iyi sabittir. (4.23) ve (4.33) eşitsizlikleri eşdeğerdir (Sağlam, Yıldırım, Sarıkaya, 2010). Teorem 4.2 nin ispatı Teorem 4.3 ün ispatına benzer şekildedir.

4.1 Diskret Halleri

Lemma 4.1.1: $0 < \lambda \leq 2$, $A_1, A_2, A_3 \geq 0$, $A_4 > 0$ olsun ve $\varpi_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4, m)$ ve $\varpi_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4, n)$ ağırlık katsayıları sırasıyla

$$\varpi_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4, m) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^{\frac{\lambda}{2}} n^{-1+\frac{\lambda}{2}}}{A_1 m^\lambda + A_2 n^\lambda + A_3 \min\{m^\lambda, n^\lambda\} + A_4 \max\{m^\lambda, n^\lambda\}} \quad (m \in N), \quad (4.1.1)$$

$$\varpi_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4, n) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{\lambda}{2}} m^{-1+\frac{\lambda}{2}}}{A_1 m^\lambda + A_2 n^\lambda + A_3 \min\{m^\lambda, n^\lambda\} + A_4 \max\{m^\lambda, n^\lambda\}} \quad (n \in N), \quad (4.1.2)$$

olarak tanımlansın. Bu durumda,

$$\begin{aligned} C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4) [1 - \theta_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4, m)] &< \varpi_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4, m) \\ &< C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4), \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

$$\begin{aligned} C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4) [1 - \theta_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4, n)] &< \varpi_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4, n) \\ &< C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4) \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

eşitsizlikleri sağlanır, burada

$$\begin{aligned} \theta_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4, r) &:= \left(\frac{1}{C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4)} \right) \int_0^{r^{-\lambda}} \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{A_1 + A_4 + (A_2 + A_3)t} dt \\ &= O\left(\frac{1}{r^{\frac{\lambda}{2}}}\right) \in (0, 1) \quad (r \in N) \quad (r \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

ve $C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4)$ (4.7) deki gibi tanımlıdır (Sağlam, Yıldırım, Sarıkaya, 2010).

İspat: $0 < \lambda \leq 2$, $A_1, A_2, A_3 \geq 0$, $A_4 > 0$ için Lemma 4.1 den

$$\begin{aligned} \varpi_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4, m) &< \int_0^\infty \frac{m^{\frac{\lambda}{2}} y^{-1+\frac{\lambda}{2}}}{A_1 m^\lambda + A_2 y^\lambda + A_3 \min\{m^\lambda, y^\lambda\} + A_4 \max\{m^\lambda, y^\lambda\}} dy \quad (m \in N), \\ &= \varpi_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4, m) = C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4) \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

yazılır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\varpi_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4, m) &> \int_0^\infty \frac{m^{\frac{\lambda}{2}} y^{-1+\frac{\lambda}{2}}}{A_1 m^\lambda + A_2 y^\lambda + A_3 \min\{m^\lambda, y^\lambda\} + A_4 \max\{m^\lambda, y^\lambda\}} dy \\
&= \frac{1}{\lambda} \int_{m^{-\lambda}}^\infty \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{A_1 + A_2 t + A_3 \min\{1, t\} + A_4 \max\{1, t\}} dt \\
&= I - \frac{1}{\lambda} \int_0^{m^{-\lambda}} \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{A_1 + A_4 + (A_2 + A_3)t} dt \\
&= I (1 - \theta_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4, m))
\end{aligned} \tag{4.1.6}$$

elde edilir, burada $I = \frac{1}{\lambda} C_1(A_1, A_2, A_3, A_4)$ ve

$$0 < \theta_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4, m) = \frac{1}{C_1(A_1, A_2, A_3, A_4)} \int_0^{m^{-\lambda}} \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{A_1 + A_4 + (A_2 + A_3)t} dt < 1 \tag{4.1.7}$$

dir.

$$\int_0^{m^{-\lambda}} \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{A_1 + A_4 + (A_2 + A_3)t} dt \leq \int_0^{m^{-\lambda}} \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{A_1 + A_4} dt = \frac{2}{(A_1 + A_4)m^{\frac{\lambda}{2}}} \tag{4.1.8}$$

olduğundan $\theta_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4, m) = O\left(\frac{1}{m^{\frac{\lambda}{2}}}\right)$ olur. Bundan dolayı (4.1.3) sağlanır. Simetrik olarak (4.1.4) de sağlanır. Bu da istenen sonuçtur (Sağlam, Yıldırım, Sarıkaya, 2010).

Lemma 4.1.2: $p > 0$ ($p \neq 1$), $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $0 < \lambda \leq 2$, $A_1, A_2, A_3 \geq 0$, $A_4 > 0$ ve $0 < \varepsilon < \frac{p\lambda}{2}$ olsun.

$$L(\varepsilon) = \sum_{n=1}^\infty \sum_{m=1}^\infty \frac{m^{\frac{\lambda}{2}-1-\frac{\varepsilon}{p}} n^{\frac{\lambda}{2}-1-\frac{\varepsilon}{q}}}{A_1 m^\lambda + A_2 n^\lambda + A_3 \min\{m^\lambda, n^\lambda\} + A_4 \max\{m^\lambda, n^\lambda\}} \tag{4.1.9}$$

olmak üzere $\varepsilon \rightarrow 0^+$ için

$$[C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4) - o(1)] \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} < L(\varepsilon) < [C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4) + \tilde{o}(1)] \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \tag{4.1.10}$$

dir (Sağlam, Yıldırım, Sarıkaya, 2010).

İspat: $t = \left(\frac{x}{n}\right)^\lambda$ alınırsa ve (4.1.4) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
L(\varepsilon) &< \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{\lambda}{2}-1-\frac{\varepsilon}{p}} n^{\frac{\lambda}{2}-1-\frac{\varepsilon}{q}}}{A_1 x^\lambda + A_2 n^\lambda + A_3 \min\{x^\lambda, n^\lambda\} + A_4 \max\{x^\lambda, n^\lambda\}} dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \left[\frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} \frac{t^{-\frac{1}{2}-1-\frac{\varepsilon}{p}}}{A_1 t + A_2 + A_3 \min\{t, 1\} + A_4 \max\{t, 1\}} dt \right] \\
&= [C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4) + \tilde{o}(1)] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+)
\end{aligned}$$

yazılır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
L(\varepsilon) &> \sum_{n=1}^{\infty} \int_1^{\infty} \frac{x^{\frac{\lambda}{2}-1-\frac{\varepsilon}{p}} n^{\frac{\lambda}{2}-1-\frac{\varepsilon}{q}}}{A_1 x^\lambda + A_2 n^\lambda + A_3 \min\{x^\lambda, n^\lambda\} + A_4 \max\{x^\lambda, n^\lambda\}} dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \left[\frac{1}{\lambda} \int_{n^{-\lambda}}^{\infty} \frac{t^{-\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{p}}}{A_1 t + A_2 + A_3 \min\{t, 1\} + A_4 \max\{t, 1\}} dt \right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \left[C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4) + \tilde{o}(1) - \frac{1}{\lambda} \int_0^{n^{-\lambda}} \frac{t^{-\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{p}}}{(A_1+A_3)t+(A_2+A_4)} dt \right] \\
&> \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} [C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4) + \tilde{o}(1)] - \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^{n^{-\lambda}} \frac{t^{-\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{p}}}{A_2+A_3} dt \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} [C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4) + \tilde{o}(1)] - \frac{1}{\frac{\lambda(A_2+A_3)}{2} - \frac{\varepsilon(A_2+A_3)}{p}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{\lambda}{2}-\frac{\varepsilon}{p}}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \left[C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4) + \tilde{o}(1) - \frac{1}{\frac{\lambda(A_2+A_3)}{2} - \frac{\varepsilon(A_2+A_3)}{p}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{\lambda}{2}-\frac{\varepsilon}{p}}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \right)^{-1} \right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} [C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4) - o(1)] \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+)
\end{aligned} \tag{4.1.11}$$

elde edilir. Böylece (4.1.10) eşitsizliği sağlanır. Bu da istenen sonuçtur.

Teorem 4.1.1: $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $0 < \lambda \leq 2$, $A_1, A_2, A_3 \geq 0$, $A_4 > 0$, $a_n, b_n \geq 0$ ve $0 < \sum_{n=1}^{\infty} n^{p(1-\frac{\lambda}{2})-1} a_n^p < \infty$, $0 < \sum_{n=1}^{\infty} n^{q(1-\frac{\lambda}{2})-1} b_n^q < \infty$ olmak üzere

$$D := \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{A_1 m^\lambda + A_2 n^\lambda + A_3 \min\{m^\lambda, n^\lambda\} + A_4 \max\{m^\lambda, n^\lambda\}}$$

$$< C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^{p(1-\frac{\lambda}{2})-1} a_n^p \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^{q(1-\frac{\lambda}{2})-1} b_n^q \right\}^{\frac{1}{q}} \quad (4.1.12)$$

eşitsizliği sağlar, burada (4.7) ile tanımlanan $C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4)$ çarpımı mümkün olan en iyi sabittir (Sağlam, Yıldırım, Sarıkaya, 2010).

İspat: Hölder eşitsizliğinden

$$D = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{A_1 m^\lambda + A_2 n^\lambda + A_3 \min\{m^\lambda, n^\lambda\} + A_4 \max\{m^\lambda, n^\lambda\}} \right\}^{\frac{1}{p}} \left[\frac{m^{\frac{(1-\frac{\lambda}{2})}{q}}}{n^{\frac{(1-\frac{\lambda}{2})}{p}}} a_m \right]$$

$$\times \left\{ \frac{1}{A_1 m^\lambda + A_2 n^\lambda + A_3 \min\{m^\lambda, n^\lambda\} + A_4 \max\{m^\lambda, n^\lambda\}} \right\}^{\frac{1}{q}} \left[\frac{n^{\frac{(1-\frac{\lambda}{2})}{p}}}{m^{\frac{(1-\frac{\lambda}{2})}{q}}} b_n \right]$$

$$\leq \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{A_1 m^\lambda + A_2 n^\lambda + A_3 \min\{m^\lambda, n^\lambda\} + A_4 \max\{m^\lambda, n^\lambda\}} \frac{m^{(1-\frac{\lambda}{2})(p-1)}}{n^{1-\frac{\lambda}{2}}} a_m^p \right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\times \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{A_1 m^\lambda + A_2 n^\lambda + A_3 \min\{m^\lambda, n^\lambda\} + A_4 \max\{m^\lambda, n^\lambda\}} \frac{n^{(1-\frac{\lambda}{2})(q-1)}}{m^{1-\frac{\lambda}{2}}} b_n^q \right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \varpi_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4, m) m^{p(1-\frac{\lambda}{2})-1} a_m^p \right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\times \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \varpi_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4, n) n^{q(1-\frac{\lambda}{2})-1} b_n^q \right\}^{\frac{1}{q}}. \quad (4.13)$$

yazılır. O zaman (4.1.3) ve (4.1.4) den (4.1.12) elde edilir. $C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4)$ nın mümkün olan en iyi sabit olduğunu göstermek için (4.1.9) de $0 < \varepsilon < \frac{p\lambda}{2}$ için $\tilde{a}_m = m^{\frac{\lambda}{2}-1-\frac{\varepsilon}{p}}$; $\tilde{b}_n = n^{\frac{\lambda}{2}-1-\frac{\varepsilon}{q}}$ alınırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tilde{a}_m \tilde{b}_n}{A_1 m^\lambda + A_2 n^\lambda + A_3 \min\{m^\lambda, n^\lambda\} + A_4 \max\{m^\lambda, n^\lambda\}} = L(\varepsilon) \quad (4.1.14)$$

yazılır. $0 < K \leq C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4)$ olacak şekilde bir sabit var ise (4.1.12) eşitsizliğini sağlar. O halde $C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4)$ nın K yazılırsa o zaman özellikle (4.1.10) den

$$\begin{aligned} [C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4) - o(1)] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} &< K \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^{p(1-\frac{\lambda}{2})-1} \tilde{a}_n^p \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^{q(1-\frac{\lambda}{2})-1} \tilde{b}_n^q \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &= K \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

bulunur, bu da $C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4) - o(1) < K$ olması demektir o zaman $C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4) \leq K$ ($\varepsilon \rightarrow 0^+$) olur. Bundan dolayı (4.1.12).eşitsizliğindeki $K = C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4)$ çarpanı mümkün olan en iyi sabittir. Bu da ispatı tamamlar.

Uyarı 4.1.1:

i. Teorem 4.1.1 de $A_1 = A_2 = 0$ ve $\lambda = A_3 = A_4 = 1$ alınırsa $C_1(0, 0, 1, 1) = \pi$ ve (4.1.12) eşitsizliği Hardy-Hilbert eşitsizliğine dönüşür yani

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n} < \pi \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{p}{2}-1} a_n^p \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{q}{2}-1} b_n^q \right\}^{\frac{1}{q}}$$

olur.

ii. Teorem 4.1.1 de $A_1 = A_2 = A_3 = 0$, $\lambda = A_4 = 1$ alınırsa $C_1(0, 0, 0, 1) = 4$ olur ve (4.1.12) eşitsizliği Hardy-Hilbert tipli

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{\max\{m, n\}} < 4 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{p}{2}-1} a_n^p \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{q}{2}-1} b_n^q \right\}^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğine dönüşür.

iii. Teorem 4.1.1 de $A_1 = A_2 = 0$ ve $\lambda > 0$, $A_3 = A$, $A_4 = B$ alınırsa

$$C_\lambda(0, 0, A, B) = \begin{cases} \frac{4}{\lambda\sqrt{AB}} \arctan \sqrt{\frac{A}{B}} & , A, B > 0 \text{ için} \\ \frac{4}{\lambda B} & , A = 0, B > 0 \text{ için} \end{cases}$$

olur ve (4.1.12) eşitsizliği

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{A \min\{m^\lambda, n^\lambda\} + B \max\{m^\lambda, n^\lambda\}} < C_\lambda(A, B) \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{p(1-\frac{\lambda}{2})-1} a_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{q(1-\frac{\lambda}{2})-1} b_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliğine dönüştür (Sağlam, Yıldırım, Sarıkaya, 2010).

Teorem 4.1.2: $0 < p < 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $0 < \lambda \leq 2$, $A_1, A_2, A_3 \geq 0$, $A_4 > 0$, $a_n, b_n \geq 0$ ve $0 < \sum_{n=1}^{\infty} n^{p(1-\frac{\lambda}{2})-1} a_n^p < \infty$ ve $0 < \sum_{n=1}^{\infty} n^{q(1-\frac{\lambda}{2})-1} b_n^q < \infty$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{A_1 m^{\lambda} + A_2 n^{\lambda} + A_3 \min\{m^{\lambda}, n^{\lambda}\} + A_4 \max\{m^{\lambda}, n^{\lambda}\}} \\ & > C_{\lambda}(A_1, A_2, A_3, A_4) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} [1 - \theta_{\lambda}(A_1, A_2, A_3, A_4, n)] n^{p(1-\frac{\lambda}{2})-1} a_n^p \right\}^{\frac{1}{p}} \\ & \times \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^{q(1-\frac{\lambda}{2})-1} b_n^q \right\}^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

eşitsizliği sağlanır, burada (4.7) deki gibi tanımlanan $C_{\lambda}(A_1, A_2, A_3, A_4)$ çarpanı mümkün olan en iyi sabittir (Sağlam, Yıldırım, Sarıkaya, 2010).

İspat: Ters Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} D &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{A_1 m^{\lambda} + A_2 n^{\lambda} + A_3 \min\{m^{\lambda}, n^{\lambda}\} + A_4 \max\{m^{\lambda}, n^{\lambda}\}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{A_1 m^{\lambda} + A_2 n^{\lambda} + A_3 \min\{m^{\lambda}, n^{\lambda}\} + A_4 \max\{m^{\lambda}, n^{\lambda}\}} \right\}^{\frac{1}{p}} \left[\frac{m^{\frac{(1-\frac{\lambda}{2})}{q}}}{n^{\frac{(1-\frac{\lambda}{2})}{p}}} a_m \right] \\ &\times \left\{ \frac{1}{A_1 m^{\lambda} + A_2 n^{\lambda} + A_3 \min\{m^{\lambda}, n^{\lambda}\} + A_4 \max\{m^{\lambda}, n^{\lambda}\}} \right\}^{\frac{1}{q}} \left[\frac{n^{\frac{(1-\frac{\lambda}{2})}{p}}}{m^{\frac{(1-\frac{\lambda}{2})}{q}}} b_n \right] \\ &\geq \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \varpi_{\lambda}(A_1, A_2, A_3, A_4, m) m^{p(1-\frac{\lambda}{2})-1} a_m^p \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &\times \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \varpi_{\lambda}(A_1, A_2, A_3, A_4, n) n^{q(1-\frac{\lambda}{2})-1} b_n^q \right\}^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

yazılır. O zaman $q < 0$ olduğu gözönüne alınırsa (4.1.3) ve (4.1.4) den (4.1.16) elde edilir. $0 < \varepsilon < \frac{p\lambda}{2}$ için $\tilde{a}_m = m^{\frac{\lambda}{2}-1-\frac{\varepsilon}{p}}$, $\tilde{b}_n = n^{\frac{\lambda}{2}-1-\frac{\varepsilon}{q}}$ ($m, n \in N$) olsun. Eğer $K \geq C_{\lambda}(A_1, A_2, A_3, A_4)$ olacak şekilde bir sabit var ise $C_{\lambda}(A_1, A_2, A_3, A_4)$ ile K yer değiştirilse de (4.1.16) eşitsizliğini sağlar. o zaman özellikle (4.1.9)

ve (4.1.10) dan

$$\begin{aligned}
& [C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4) + \tilde{o}(1)] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} > L(\varepsilon) \\
& > K \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} [1 - \theta_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4, n)] n^{p(1-\frac{\lambda}{2})-1} \tilde{a}_n^p \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^{q(1-\frac{\lambda}{2})-1} \tilde{b}_n^q \right\}^{\frac{1}{q}} \\
& = K \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} - \sum_{n=1}^{\infty} \left[O\left(\frac{1}{n^{\frac{\lambda}{2}}}\right) \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \right] \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \right\}^{\frac{1}{q}} \\
& = K \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \left\{ 1 - \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \right]^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \left[O\left(\frac{1}{n^{\frac{\lambda}{2}}}\right) \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \right] \right\}^{\frac{1}{p}}
\end{aligned} \tag{4.1.18}$$

elde edilir yani

$$C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4) + \tilde{o}(1) > K \left\{ 1 - \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \right]^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \left[O\left(\frac{1}{n^{\frac{\lambda}{2}}}\right) \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \right] \right\}^{\frac{1}{p}} \tag{4.1.19}$$

olur. Bu nedenle $\varepsilon \rightarrow 0^+$ için $C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4) > K$ olduğu görülür. Böylece (4.1.16) daki $K = C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4)$ çarpanı mümkün olan en iyi sabittir.

Uyarı 4.1.2:

i. Teorem 4.1.2 de $A_1 = A_2 = 0$ ve $\lambda = A_3 = A_4 = 1$ alınırsa $C_1(0, 0, 1, 1) = \pi$ ve (4.1.16) eşitsizliği Hardy-Hilbert eşitsizliğine dönüşür yani

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n} > \pi \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{2}{\pi} \arctan \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \right] n^{\frac{p}{2}-1} a_n^p \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{q}{2}-1} b_n^q \right\}^{\frac{1}{q}}$$

olur.

ii. Teorem 4.1.2 de $A_1 = A_2 = A_3 = 0$, $\lambda = A_4 = 1$ alınırsa $C_1(0, 0, 0, 1) = 4$ olur ve (4.1.16) eşitsizliği Hardy-Hilbert tipli

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{\max\{m, n\}} > 4 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{1}{2n^{\frac{1}{2}}} \right] n^{\frac{p}{2}-1} a_n^p \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{q}{2}-1} b_n^q \right\}^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğine dönüşür.

iii. Teorem 4.1.2 de $A_1 = A_2 = 0$ ve $\lambda > 0$, $A_3 = A$, $A_4 = B$ alınırsa

$$C_\lambda(0, 0, A, B) = \begin{cases} \frac{4}{\lambda\sqrt{AB}} \arctan \sqrt{\frac{A}{B}} & , A, B > 0 \text{ için} \\ \frac{4}{\lambda B} & , A = 0, B > 0 \text{ için} \end{cases}$$

olur ve (4.1.16) eşitsizliği

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{A \min\{m^\lambda, n^\lambda\} + B \max\{m^\lambda, n^\lambda\}} \\ & > C_\lambda(A, B) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} [1 - \theta_\lambda(A, B, n)] n^{p(1-\frac{\lambda}{2})-1} a_n^p \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^{q(1-\frac{\lambda}{2})-1} b_n^q \right\}^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür (Sağlam, Yıldırım, Sarıkaya, 2010).

Teorem 4.1.3: Torem 4.1.2 nin şartları altında

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{\lambda p}{2}-1} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{A_1 m^\lambda + A_2 n^\lambda + A_3 \min\{m^\lambda, n^\lambda\} + A_4 \max\{m^\lambda, n^\lambda\}} \right]^p \\ & < [C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4)]^p \sum_{m=1}^{\infty} m^{p(1-\frac{\lambda}{2})-1} a_m^p \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

eşitsizliği sağlanır, burada $[C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4)]^p$ çarpanı mümkün olan en iyi sabittir. (4.1.12) ve (4.1.20) eşitsizlikleri eşdeğerdir (Sağlam, Yıldırım, Sarıkaya, 2010).

İspat:

$$b_n = n^{\frac{\lambda p}{2}-1} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{A_1 m^\lambda + A_2 n^\lambda + A_3 \min\{m^\lambda, n^\lambda\} + A_4 \max\{m^\lambda, n^\lambda\}} \right]^{p-1} \quad (4.1.21)$$

olarak tanımlanırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{q(1-\frac{\lambda}{2})-1} b_n^q = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{A_1 m^\lambda + A_2 n^\lambda + A_3 \min\{m^\lambda, n^\lambda\} + A_4 \max\{m^\lambda, n^\lambda\}} \quad (4.1.22)$$

yazılır. (4.1.12) eşitsizliğinden ve Theorem 4.3 deki benzer metod kullanılırsa (4.1.20) elde edilir. (4.1.20) eşitsizliğindeki çarpan mümkün olan en iyi sabittir ve (4.1.12) eşitsizliği ile (4.1.20) eşitsizliği eşdeğerdir (Sağlam, Yıldırım, Sarıkaya, 2010).

Teorem 4.1.4: Teorem 4.1.3 ün şartları altında

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{\lambda p}{2}-1} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{A_1 m^\lambda + A_2 n^\lambda + A_3 \min\{m^\lambda, n^\lambda\} + A_4 \max\{m^\lambda, n^\lambda\}} \right]^p \\ & > [C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4)]^p \sum_{m=1}^{\infty} m^{p(1-\frac{\lambda}{2})-1} a_m^p \end{aligned} \quad (4.1.23)$$

eşitsizliği sağlanır, burada $[C_\lambda(A_1, A_2, A_3, A_4)]^p$ çarpanı mümkün olan en iyi sabittir ve (4.1.16) ve (4.1.23) eşitsizlikleri eşdeğerdir (Sağlam, Yıldırım, Sarıkaya, 2010).

5. ČEBYŠEV TIPLİ EŞİTSİZLİKLER

$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mutlak sürekli iki fonksiyon ve türevleri $f', g' \in L_\infty[a, b]$ olmak üzere Čebyšev fonksiyoneli

$$T(f, g) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx - \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right) \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx \right) \quad (5.1)$$

şeklinde tanımlanmaktadır ve

$$|T(f, g)| \leq \frac{1}{12}(b-a)^2 \|f'\|_\infty \|g'\|_\infty \quad (5.2)$$

eşitsizliği sağlanır. Bir çok araştırmacı bu eşitsizliğe büyük ilgi göstermiştir.

Özellikle Pachpatte Čebyšev tipli yeni eşitsizlikler elde etmiştir ve bunlar şu şekildedir:

$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mutlak sürekli fonksiyonlar ve $f', g' \in L_2[a, b]$ olsun. Bu durumda

$$|P(F, G, f, g)| \leq \frac{(b-a)^2}{12} \left[\frac{1}{b-a} \|f'\|_2^2 - ([f; a, b])^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{b-a} \|g'\|_2^2 - ([g; a, b])^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

ve

$$|P(A, B, f, g)| \leq \frac{(b-a)^2}{12} \left[\frac{1}{b-a} \|f'\|_2^2 - ([f; a, b])^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{b-a} \|g'\|_2^2 - ([g; a, b])^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliklerini elde etmiştir, burada

$$\begin{aligned} P(\alpha, \beta, f, g) = & \alpha\beta - \frac{1}{b-a} \left(\alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx \right) + \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right) \\ & \times \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx \right) \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$[f; a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}, \quad F = \frac{f(a) + f(b)}{2}, \quad G = \frac{g(a) + g(b)}{2}, \quad A = f\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad B = g\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

ve

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b f^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

olarak ifade edilmiştir. Bunun yanı sıra aşağıdaki eşitsizliği elde etmiştir:

$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mutlak sürekli fonksiyonlar ve türevleri de $f', g' \in L_p[a, b]$, $p > 1$ olmak üzere

$$|P(C, D, f, g)| \leq \frac{1}{(b-a)^2} \left(\frac{(2^{q+1} + 1)(b-a)^{q+1}}{3(q+1)6^q} \right)^{\frac{2}{q}} \|f'\|_p \|g'\|_p$$

eşitsizliğini elde etmiştir, burada $P(\alpha, \beta, f, g)$ (5.3) deki gibi ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$C = \frac{1}{3} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right), \quad D = \frac{1}{3} \left(\frac{g(a) + g(b)}{2} + 2g\left(\frac{a+b}{2}\right) \right)$$

ve

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

olarak ifade edilmiştir.

Bu bölümde yukarıdaki eşitsizliklere benzer elde ettiğimiz yeni eşitsizliklerden bahsedilecektir.

5.1 Ana Sonuçlar

Teorem 5.1.1: $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mutlak sürekli fonksiyonlar, $f', g' \in L_p[a, b]$ ve $p > 1$ olsun. Bu durumda,

$$|P(F, G, f, g)| \leq \left(\frac{2(b-a)}{(q+1)(q+2)} \right)^{\frac{2}{q}} \|f'\|_p \|g'\|_p$$

eşitsizliği sağlanır, burada $P(\alpha, \beta, f, g)$ (5.3)) deki gibi tanımlanmıştır ve

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere,

$$F = \frac{f(a) + f(b)}{2}, \quad G = \frac{g(a) + g(b)}{2}$$

ve

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

dir (Sarıkaya, Sağlam, Yıldırım, 2010).

İspat: Teorem 5.1.1 in ifadesinden

$$F - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt = L(f; a, b), \quad (5.1.1)$$

$$G - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt = L(g; a, b) \quad (5.1.2)$$

yazılır, burada

$$L(f; a, b) = \frac{1}{2(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b (f'(t) - f'(s))(t-s) dt ds$$

dir. (5.1.1) ve (5.1.2) taraf tarafa çarpılırsa

$$P(F, G, f, g) = L(f; a, b) L(g; a, b) \quad (5.1.3)$$

yazılır. (5.1.3) den

$$|P(F, G, f, g)| \leq |L(f; a, b)| |L(g; a, b)| \quad (5.1.4)$$

elde edilir. Hölder İntegral eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} |L(f; a, b)| &\leq \frac{1}{2(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b |f'(t) - f'(s)| |t-s| dt ds \\ &\leq \frac{1}{2(b-a)^2} \left(\int_a^b \int_a^b |f'(t) - f'(s)|^p dt ds \right)^{1/p} \left(\int_a^b \int_a^b |t-s|^q dt ds \right)^{1/q} \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

olduğu görülür. Basit bir hesaplama ile

$$\begin{aligned}
\int_a^b \int_a^b |t-s|^q dt ds &= \int_a^b \left\{ \int_a^s (s-t)^q dt + \int_s^b (t-s)^q dt \right\} ds \\
&= \frac{1}{q+1} \int_a^b \left\{ - (s-t)^{q+1} \Big|_a^s + (t-s)^{q+1} \Big|_s^b \right\} ds \\
&= \frac{1}{q+1} \int_a^b \{ (s-a)^{q+1} + (b-s)^{q+1} \} ds \quad (5.1.6) \\
&= \frac{1}{(q+1)(q+2)} \left((s-a)^{q+2} - (b-s)^{q+2} \right) \Big|_a^b \\
&= \frac{2(b-a)^{q+2}}{(q+1)(q+2)}
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir ve $(a+b)^r \leq 2^{r-1}(a^r + b^r)$, $r \geq 1$, $a > 0$, $b > 0$ olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\int_a^b \int_a^b |f'(t) - f'(s)|^p dt ds &\leq \int_a^b \int_a^b \{ (|f'(t)| + |f'(s)|)^p \} dt ds \\
&\leq 2^{p-1} \int_a^b \int_a^b (|f'(t)|^p + |f'(s)|^p) dt ds \\
&= 2^{p-1} \left\{ \int_a^b \int_a^b |f'(t)|^p dt ds + \int_a^b \int_a^b |f'(s)|^p dt ds \right\} \\
&= 2^p (b-a) \|f'\|_p^p \quad (5.1.7)
\end{aligned}$$

yazılır. (5.1.5) de (5.1.6) ve (5.1.7) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
|L(f; a, b)| &\leq \frac{1}{2(b-a)^2} \left(\frac{2(b-a)^{q+2}}{(q+1)(q+2)} \right)^{1/q} (2^p (b-a))^{1/p} \|f'\|_p \\
&= \left(\frac{2(b-a)}{(q+1)(q+2)} \right)^{1/q} \|f'\|_p \quad (5.1.8)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$|L(g; a, b)| \leq \left(\frac{2(b-a)}{(q+1)(q+2)} \right)^{1/q} \|g'\|_p \quad (5.1.9)$$

olduğuda görülür. Böylece (5.1.4) de (5.1.8) ve (5.1.9) kullanılırsa

$$|P(F, G, f, g)| \leq \left(\frac{2(b-a)}{(q+1)(q+2)} \right)^{2/q} \|f'\|_p \|g'\|_p$$

elde edilir. Bu da istenen sonuçtur.

Teorem 5.1.2: $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mutlak sürekli sonksiyonlar, $f', g' \in L_p[a, b]$, ve $p > 1$ olsun. Bu durumda

$$|P(A, B, f, g)| \leq \left(\frac{2(b-a)}{(q+1)(q+2)} \right)^{\frac{2}{q}} \|f'\|_p \|g'\|_p \quad (5.1.10)$$

eşitsziliği sağlanır, burada $P(\alpha, \beta, f, g)$ (5.1.3) deki gibi tanımlanmıştır ve

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$A = f\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad B = g\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

ve

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

dir (Sarıkaya, Sağlam, Yıldırım, 2010).

İspat: Teorem 5.1.2 nin ifadesinden

$$A - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt = M(f; a, b), \quad (5.1.11)$$

$$B - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt = M(g; a, b) \quad (5.1.12)$$

yazılır, burada

$$M(f; a, b) = \frac{1}{2(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b (f'(t) - f'(s)) (m(t) - m(s)) dt ds$$

ve $M(; a, b)$ de verilen $m(t)$ nin gösterimi de

$$m(t) = \begin{cases} t - a, & t \in (a, \frac{a+b}{2}] \text{ ise} \\ t - b, & t \in (\frac{a+b}{2}, b] \text{ ise} \end{cases}$$

şeklindedir. (5.1.11) ve (5.1.12) taraf tarafa çarpılırsa

$$P(A, B, f, g) = M(f; a, b) M(g; a, b)$$

olduğu görülür ve böylece

$$|P(A, B, f, g)| = |M(f; a, b)| |M(g; a, b)| \quad (5.1.13)$$

yazılır. Hölder İntegral eşitsizliğinden

$$|M(f; a, b)| \leq \frac{1}{2(b-a)^2} \left(\int_a^b \int_a^b |f'(t) - f'(s)|^p dt ds \right)^{1/p} \left(\int_a^b \int_a^b |m(t) - m(s)|^q dt ds \right)^{1/q} \quad (5.1.14)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} & \int_a^b \int_a^b |m(t) - m(s)|^q dt ds \\ &= \int_a^b \left\{ \int_a^{(a+b)/2} |t - a - m(s)|^q dt + \int_{(a+b)/2}^b |t - b - m(s)|^q dt \right\} ds \\ &= \int_a^{(a+b)/2} \int_a^{(a+b)/2} |t - s|^q dt ds + \int_a^{(a+b)/2} \int_{(a+b)/2}^b |t - s + a - b|^q dt ds \\ &+ \int_{(a+b)/2}^b \int_a^{(a+b)/2} |t - s + b - a|^q dt ds + \int_{(a+b)/2}^b \int_{(a+b)/2}^b |t - s|^q dt ds \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \end{aligned} \quad (5.1.15)$$

yazılır. Burada basit bir hesaplama ile

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_a^{(a+b)/2} \int_a^{(a+b)/2} |t-s|^q dt ds \\
&= \int_a^{(a+b)/2} \left\{ \int_a^s (s-t)^q dt + \int_s^{(a+b)/2} (t-s)^q dt \right\} ds \\
&= \frac{1}{q+1} \int_a^{(a+b)/2} \left\{ - (s-t)^{q+1} \Big|_a^s + (t-s)^{q+1} \Big|_s^{(a+b)/2} \right\} ds \\
&= \frac{1}{q+1} \int_a^{(a+b)/2} \left\{ (s-a)^{q+1} - \left(\frac{a+b}{2} - s \right)^{q+1} \right\} ds \tag{5.1.16} \\
&= \frac{1}{(q+1)(q+2)} \left\{ (s-a)^{q+2} - \left(\frac{a+b}{2} - s \right)^{q+2} \right\} \Big|_a^{(a+b)/2} \\
&= \frac{2 \left(\frac{b-a}{2} \right)^{q+2}}{(q+1)(q+2)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_a^{(a+b)/2} \int_{(a+b)/2}^b |t-s+a-b|^q dt ds \\
&= \int_a^{(a+b)/2} \int_{(a+b)/2}^b (s-t+b-a)^q dt ds \\
&= \frac{1}{q+1} \int_a^{(a+b)/2} \left\{ - (s-t+b-a)^{q+1} \Big|_{(a+b)/2}^b \right\} ds \\
&= \frac{1}{q+1} \int_a^{(a+b)/2} \left\{ - (s-a)^{q+1} + \left(s + \frac{b-3a}{2} \right)^{q+1} \right\} ds \tag{5.1.17} \\
&= \frac{1}{(q+1)(q+2)} \left\{ - (s-a)^{q+2} + \left(s + \frac{b-3a}{2} \right)^{q+2} \right\} \Big|_a^{(a+b)/2} \\
&= \frac{(b-a)^{q+2} - 2 \left(\frac{b-a}{2} \right)^{q+2}}{(q+1)(q+2)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_{(a+b)/2}^b \int_a^{(a+b)/2} |t-s+b-a|^q dt ds \\
&= \int_{(a+b)/2}^b \int_a^{(a+b)/2} (t-s+b-a)^q dt ds \\
&= \frac{1}{q+1} \int_{(a+b)/2}^b \left\{ (t-s+b-a)^{q+1} \Big|_a^{(a+b)/2} \right\} ds \\
&= \frac{1}{q+1} \int_{(a+b)/2}^b \left\{ \left(-s + \frac{3b-a}{2} \right)^{q+1} (b-s)^{q+1} \right\} ds \\
&= \frac{1}{(q+1)(q+2)} \left\{ - \left(-s + \frac{3b-a}{2} \right)^{q+2} + (b-s)^{q+2} - \right\} \Big|_{(a+b)/2}^b \\
&= \frac{(b-a)^{q+2} - 2 \left(\frac{b-a}{2} \right)^{q+2}}{(q+1)(q+2)}
\end{aligned} \tag{5.1.18}$$

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int_{(a+b)/2}^b \int_{(a+b)/2}^b |t-s|^q dt ds \\
&= \int_{(a+b)/2}^b \left\{ \int_{(a+b)/2}^s (s-t)^q dt + \int_s^b (t-s)^q dt \right\} ds \\
&= \frac{1}{q+1} \int_{(a+b)/2}^b \left\{ - (s-t)^{q+1} \Big|_{(a+b)/2}^s + (t-s)^{q+1} \Big|_s^b \right\} ds \\
&= \frac{1}{q+1} \int_{(a+b)/2}^b \left\{ \left(s - \frac{a+b}{2} \right)^{q+1} + (b-s)^{q+1} \right\} ds \\
&= \frac{1}{(q+1)(q+2)} \left\{ \left(s - \frac{a+b}{2} \right)^{q+2} - (b-s)^{q+2} \right\} \Big|_{(a+b)/2}^b \\
&= \frac{2 \left(\frac{b-a}{2} \right)^{q+2}}{(q+1)(q+2)}
\end{aligned} \tag{5.1.19}$$

olduğu görülür. (5.1.15) de (5.1.16)-(5.1.19) kullanılırsa,

$$\left(\int_a^b \int_a^b |m(t) - m(s)|^q dt ds \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\frac{2(b-a)^{q+2}}{(q+1)(q+2)} \right)^{\frac{1}{q}} \tag{5.1.20}$$

yazılır. (5.1.7) deki gibi benzer şekilde

$$\left(\int_a^b \int_a^b |f'(t) - f'(s)|^p dt ds \right)^{\frac{1}{p}} \leq 2 (b-a)^{\frac{1}{p}} \|f'\|_p \quad (5.1.21)$$

elde edilir. (5.1.14) de (5.1.20) ve (5.1.21) kullanılırsa

$$|M(f; a, b)| \leq \left(\frac{2(b-a)}{(q+1)(q+2)} \right)^{\frac{1}{q}} \|f'\|_p \quad (5.1.22)$$

ve benzer şekilde

$$|M(g; a, b)| \leq \left(\frac{2(b-a)}{(q+1)(q+2)} \right)^{\frac{1}{q}} \|g'\|_p \quad (5.1.23)$$

eşitsizlikleri elde edilir. (5.1.13) de (5.1.22) ve (5.1.23) kullanılırsa (5.1.10) elde edilir.

KAYNAKLAR

- Aliyev, İ. (1998). Konveks Fonksiyonlar, Jensen Eşitsizliği ve Bazı Uygulamalar. *Matematik Dünyası*, **3**: 17-20.
- Alomari, M., Darus, M. and Kirmaci, U.S. (2010). Refinements of Hadamard-type inequalities for quasi-convex functions with applications to trapezoidal formula and to special means. *Computer and Math. with Appl.*, **59**: 225-232.
- Azar, L. E. (2008). On Some Extensions of Hardy-Hilbert's Inequality and Applications. *Journal of Inequalities and Applications*, vol. **2008**: Article ID 546829, 14 pages.
- Azpeitia, A.G. (1994). Convex functions and the Hadamard inequality. *Rev. Colombiana Mat.*, **28**: 7-12.
- Bakula, M.K., Pečarić, J. and Ribicic, M. (2006). Companion Inequalities to Jensen's inequality for convex and -convex functions. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, vol **7**, Issue 5, Article 194.
- Bakula, M. K. and Pečarić, J. (2004). Note on Some Hadamard-type Inequalities. *JIPAM*, **5**: (3), 74.
- Čebyšev, P. L. (1882). Sur less expressions approximatives des integrales definies par les autres prises entre les memes limites, *Proc. Math. Soc. Charkov*, **2**: 93-98.
- Beckenbach, E.F. and Bellman, R. (1961). Inequalities. *Springer-Verlag*, 198 pp., Berlin.
- Čebyšev, P. L. (1882). O. priblizennyh vyrazenijah odnih integralov cerez drugie. *Soobscenija i protokoly zasedanii Matematiceskogo obcestva pri Imperatorskom Har'kouskom Universitete* No.2, 93-98; Polnoe sobranie sodnenii P. L. Cebyseua. Moskva-Leningrad, 1948a, 128-131.
- Čebyšev, P. L. (1882). Ob odnom rjade, dostavljajuscem predel'nye velicity integralov pri razlozenii podintegral'noi funkcii na mnozeteli, *Priloiienik 57 tomu Zapisok Imp. Akad. Nauk*, No.4: Polnoe sobranie socinenil P. L. Cebyseva. Moskva-Leningrad, 1948b, 157-169.
- Dragomir, S.S., Pečarić, J., and Persson, L.E. (1995). Some inequalities of Hadamard type. *Soochow J.Math.*, **21**: 335–241.

- Dragomir, S.S., Pečarić, J.E., and Sandor, J. (1990). A note on the Jensen-Hadamard inequality. *Anal. Num. Theo. Approx.*, **19**: 29–34.
- Dragomir, S.S. (1992). Two mappings in connection to Hadamard's inequalities, *J.Math.Anal.Appl.*, **167**: 49-56.
- Dragomir, S.S. (1994). Some remarks on Hadamard's inequality for convex functions. *Extracta Math.*, **9(2)**: 88–94.
- Dragomir, S.S. (2000). Refinements of the Hermite-Hadamard inequality for log-convex functions. *RGMA Res. Rep. Coll.*, **3, 4**: 527–533.
- Dragomir, S.S. (2001). Refinements of Hermite-Hadamard's inequality for convex functions. *Tamsui Oxford J. of Math. Sci.*, **17(2)**: 131-137.
- Dragomir, S.S. (2002). On Some New Inequalities of Hermite-Hadamard type for m-Convex Functions. *Tamkang J. of Math.* **33 (1)**: 45-55.
- Dragomir, S.S. and Agarwal, R.P. (1998). Two inequalities for Differentiable and Applications to Special Means of Real Numbers and to Trapezoidal Formula. *App.Math.Lett.* **Vol. 11**: No. 5, pp. 91-95.
- Dragomir, S.S. and Fitzpatrik, S. (1999). The Hadamard's inequality for s -convex functions in the second sense. *Demonstration Math.*, **32 (4)**: 687–696.
- Dragomir, S.S. and Mond, B. (1997). On Hadamard's Inequality for a Class of Functions of Godunova and Levin. *Indian J. of Math.*, **39**: 1-9.
- Dragomir, S.S. and Mond, B. (1998). Integral inequalities of Hadamard's type for log-convex functions. *Demonstratio Math.*, **31(2)**: 354-364.
- Dragomir, S.S. and Pearce, C. E. M. Selected Topic on Hermite- Hadamard Inequalities and Applications, URL:[http:// www. maths. adelaide. edu.au/ Applied/staff/ cpearce.html](http://www.maths.adelaide.edu.au/Applied/staff/cpearce.html)
- Dragomir, S.S. and Toader, Gh. (1993). Some Inequalities for m-Convex Functions. *Studia Univ. Babes-Bolyai. Mathematica*, **38, 1**: 21-28.
- Dragomir S.S. and Mabizela S. (1999). Some error estimates in the trapezoidal quadrature rule, *RGIMA Res. Rep. Coll.*, **2(5)**: 653–663.
- Dragomir S.S., Sunde J. and Buşe C. (2000). Some new inequalities for Jeffreys divergence measure in information, *RGIMA Res. Rep. Coll.*, **3(2)**: 235–243.
- Godunova, E. K. and Levin, V. I. (1985). Neravenstva dlja funkcii sirokogo

klassa, soderzascego vypuklye, monotonnnye i nekotorye drugie vidy funkii. *Vy-cislitel. Mat. i. Fiz. Mezhvuzov. Sb. Nauc. Trudov*, MGPI, Moskva, pp. 138–142.

Hardy, G. H., Littlewood, J.E. and Polya, G. (1952). *Inequalities*, Cambridge University Press, London, UK, 2nd edition.

Hardy, G. H. (1925). Note on a theorem of Hilbert concerning series of positive terms. *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. **23**: no. 2, 45-46.

Hadamard, J. (1893). Etude sur les proprietes des fonctions entieres et en particulier d'une fonction considerée par Riemann, *J.Math.Pures appl.* **58**: 171-215.

Jensen, J. L. W. V. (1905). Om konvexe funktioner og uligheder mellem Middelveerdier. *Nyt. Tidsskrift for Mathematic* **16B**: 49-69.

Jensen, J. L. W. V. (1906). Sur les fonctions convexes et les inegalites entre les valeurs moyennes. *Acta Math.* **30**: 175-193.

Kırmacı U.S., Bakula, M.K. and Özdemir M. E. (2007). Pečarić J., Hadamard-type inequalities for s - Convex Functions. *App.Math.Comp.*, **193**: 26-35.

Kırmacı, U.S. (2004). Inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to midpoint formula, *Appl. Math.Comput.*, **147**: 137-146.

Kırmacı, U.S. (2008). Improvement and Further Generalization of Inequalities for Differentiable Mappings and Applications. *Comp&Math. with Appl.*, **55**: 485-493.

Kırmacı, U.S. and Özdemir, M.E. (2004). On Some Inequalities for Differentiable Mappings and Applications to Special Means of Real Numbers and to Midpoint Formula. *Applied Mathematics and Computation.*, **153**: 361-368.

Kırmacı, U.S. and Özdemir, M.E. (2004). Some inequalities for mappings whose derivatives are bounded and applications to special means of real numbers. *Appl. Math. Lett.*, **17**: 641-645.

Li, Y., Z. Wang, and He, B. (2007). Hilbert's type linear operator and some extensions of Hilbert's inequality. *Journal of Inequalities and Applications*, vol. **2007**: Article ID 82138, 10 pages.

- Liu Z. (2006). Generalizations of some new Čebyšev type inequalities, *J. Inequal. Pure and Appl. Math.*, 7(1), Art.31.
- Lupas, A. (1976). A generalisation of Hadamard's inequality for convex functions. *Univ. Beograd.Publ. Elek. Fak. Ser. Mat. Fiz.*, No. 544-576, 115-121.
- Maligranda, L., Pecaric, J.E. and Persson, L.E. (1994). On some inequalities of the Gruss-Barnes and Borell type. *J.Math.Ana.Appl.*, **187**: 306-323.
- Mitrinović, D.S. (1970). Analytic Inequalities, *Springer-Verlag, Berlin*, 404, New York.
- Mitrinović, D.S. and Vasić, P.M. (1974). History, variations and generalisations of the Čebyšev inequality and the question of some priorities. *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz.*, No. 461-497, 1-30.
- Mitrinović, D.S. and Pečarić, J. (1990). Note on a class of functions of Gordinova and Levin. *C. R. Math.Rep. Acad. Sci. Can.*, **12**: 33-36.
- Mitrinović, J.E. and Pečarić, J.E. (1990). History, variations and generalisations of the Čebyšev inequality and the question of some priorities II. *Rad JAZU (Zagreb)*, 450, fasc. **9**: 139-156.
- Mitrinovic, D.S, Pecaric, J.E. and Fink, A.M. (1991). Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives, *vol. 53 of Mathematics and Its Applications, Kluwer Academic Publishers*, The Netherlands.
- Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E.and Fink, A.M. (1993). Classical and New Inequalities in Analysis. *Kluwer Academic Publishers*, 740, UK.
- Özdemir, M. E. (2007). Konveks Fonksiyonlara Giriş I-II Ders Notları, *Atatürk Üniversitesi*.
- Özdemir, M. E., Bakula M.K. and Pečarić J. (2008). Hadamard-type inequalities -Convex and -Convex Functions. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, v.**9**: Iss. 4, Article 96, 12pp.
- Özdemir, M.E. (2000). A theorem on mappings with bounded derivatives with applications to quadrature rules and means. *Appl. Math. Lett.*, **13**: 19-25.
- Özdemir, M.E. and Kırmacı, U.S. (2003). Two new Theorem on Mappings Uniformly Continuous and Convex with Applications to Quadrature Rules and Means. *Applied Mathematics and Computation*, **143**: 269-274.

- Pachpatte, B.G. (2003): On some inequalities for convex functions, *RGMIA Res. Rep. Coll.*, 6 (E).
- Pachpatte, B.G. (2004). A note on integral inequalities involving two log-convex functions, *Math. Ineq. & Appl.*, 7, 4: 511-515.
- Pachpatte, B.G. (2005). Mathematical Inequalities. *Elsevier B.V.*, Volume **67**: 606.
- Pachpatte, B. G. (2006). New Čebyšev type inequalities via trapezoidal-like rules. *J. Inequal. Pure and Appl. Math.*, **7(1)**: Art.31.
- Pachpatte, B. G. (2006). On Čebyšev type inequalities involving functions whose derivatives belong to L_p spaces, *J. Inequal. Pure and Appl. Math.*, **7(2)**: Art.58.
- Pearce C.E.M. and Pečarić J. (2000). Inequalities for differentiable mappings with application to special means and quadrature formulae, *Appl. Math. Lett.*, **13(2)**: 51–55.
- Pečarić, J. and Beesack, P.R. (1986). On Jensen's inequality for convex functions II. *Journal of Math. Anal. Appl.*, **118**: 125-144.
- Pečarić, J.E. and Dragomir, S.S. (1991). A generalization of Hadamard's inequality for Isotonic linear functionals, *Radovi Matematički*, **7**: 103-107.
- Pečarić, J.E. and Proschan, F., Tong Y.L. (1992). Convex Functions, Partial Orderings, and Statistical Applications. Academic Press Inc., Volume **187**: 485, USA.
- Pečarić J. , Proschan F. and Tong Y.L. (1991). Convex functions, partial ordering and statistical applications, *Academic Press*, New York.
- Saglam, A., Yildirim, H. and Sarikaya, M. Z. (2010). "Generalization of Hardy-Hilbert's Inequality and Applications", *Kyungpook Mathematical Journal*, **50**: 131-152.
- Saglam, A., Yildirim, H. and Sarikaya, M. Z. (2010). "A New Type of Hardy-Hilbert's Integral Inequalities", *Selçuk J. Appl. Math.*, Vol. **11**: No.1. pp. 143-151.
- Saglam, A., Sarikaya, M. Z. and Yildirim, H. (2010). "Some new inequalities of Hermite-Hadamard's type", *Kyungpook Mathematical Journal*, **50**: 399-410.

- Sarikaya, M.Z., Sağlam A. and Yıldırım, H. (2008). On Some Hadamard-Type Inequalities for h -Convex Functions. *Journal of Mathematical Inequalities*, Vol. **2**: No. 3, 335-341.
- Sarikaya, M. Z., Sağlam, A. and Yildirim, H. (2010). On generalization of Cebysev type inequalities. *Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatic*, **5**(1): pp. 41-48.
- Tunç, M. (2010). On some Hadamard-Type Inequalities for Product of Different Kinds of Convex Functions. *Appl. Math. Letter. RGMIA Res. Rep. Coll.*, 13, 1(5).
- Tunç, M. and Kırmacı, U.S. (2010). New Inequalities for Convex Functions. *Erzincan Fen Bilimleri Dergisi*, Vol.**3**: Num.1.
- Tunç, M. and Kırmacı, U.S. (2010). New Integral Inequalities for s -Convex Functions with Applications. *Int. Elect. J. Pure and Applied Math.*, **1**, **2**: 131-141.
- Tunç, M. (2011) Bazı Konveks Fonksiyonlar İçin Hermit-Hadamart Tipli Eşitsizlikler ve Uygulamaları. *Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum*.
- Varošanec, S. (2007). On h -convexity. *J. Math. Anal. Appl.*, 326 (1), 303–311.
- Yang, B. (2004). On an extension of Hilbert’s integral inequality with some parameters. *The Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. **1**: no. 1, article 11, pp. 1-8.
- Yang, B. (2004). On the extended Hilbert’s integral inequality. *Journal of Inequalities in Pure Applied Mathematics*, vol. **5**: no. 4, article 96, pp. 1-8.
- Yang, B. (2004). Generalization of a Hilbert type inequality and its applications. *Chinese Journal of Engineering Mathematics*, vol. **21**: no. 5, pp. 821-824.
- Yang, B. (2007). On a Hilbert-type operator with a symmetric homogeneous Kernel of 1-order and applications, *Journal of Inequalities and Applications*, vol. **2007**: Article ID 47812, 9 pages,
- Xi, G. (2007). A reverse Hardy-Hilbert-type inequality. *Journal of Inequalities*

and Applications, vol. **2007**: Article ID 79758, 7 pages.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Aziz SAĞLAM
Doğum Yeri : Ereğli-KONYA
Doğum Tarihi : 29.06.1980
Medeni Hali : Evli
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : Konya Ereğli İmam Hatip Lisesi, 1997
Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü, 2004
Yüksek Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2007

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, 2005-?

Yayınları (SCI ve Diğer)

1. M. Zeki Sarikaya , Huseyin Yildirim and Aziz Sağlam (2006). On Hardy type integral inequality associated with the generalized translation. *Int. Journal of Contemp. Math. Sciences*, Vol. **1**: no. 5-8, 333 -340.
2. M. Zeki Sarikaya, Huseyin Yildirim and Aziz Sağlam (2007). On Combination of Generalized Riesz Potentials Associated with The Bessel Differential Operator. *International Journal of Math. and Analysis*, Vol **4**: No.1-3, pp. 1-15.
3. M. Zeki Sarikaya, Aziz Sağlam, and Huseyin Yildirim (2008). On some Hadamard-type inequalities for h-convex functions. *Journal of Mathematical Inequalities*, Volume **2**: Number 3, 335-341.

4. Aziz Saglam, Huseyin Yildirim and M. Zeki Sarikaya (2009). On The Product of The Ultra-Hyperbolic Bessel Operator Related to The Elastic Waves. *Selçuk Journal of Appl. Math.*, Vol. **10**: No. 1. pp. 85-93.
5. Aziz Saglam, Huseyin Yildirim and M. Zeki Sarikaya (2010). On the Bessel heat equation related to the Bessel diamond operator. *Acta Applicanda Mathematicae*, 109(3), pp.849-860, DOI 10.1007/s10440-008-9350-z.
6. Aziz Saglam, Huseyin Yildirim and M. Zeki Sarikaya (2010). Generalization of Hardy-Hilbert's Inequality and Applications. *Kyungpook Mathematical Journal*, **50**: 131-152.
7. M. Zeki Sarikaya, Aziz Saglam, and Huseyin Yildirim (2010). On generalization of Cebysev type inequalities. *Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatic*, **5(1)**: pp. 41-48.
8. Aziz Saglam, Huseyin Yildirim and M. Zeki Sarikaya (2010). On The Bessel Ultra-Hyperbolic Heat Equation. *Thai Journal of Mathematics*, **8(1)**: p.149-159.
9. Aziz Saglam, Huseyin Yildirim and M. Zeki Sarikaya (2010). A New Type of Hardy-Hilbert's Integral Inequalities. *Selçuk J. Appl. Math.*, Vol. **11**: No.1. pp. 143-151.
10. Aziz Saglam, M. Zeki Sarikaya and Huseyin Yildirim (2010). Some new inequalities of Hermite-Hadamard's type. *Kyungpook Mathematical Journal*, **50**: 399-410.
11. Aziz Saglam, Huseyin Yildirim (2011). On The Generalized Bessel Heat Equation Related To The Generalized Bessel Diamond Operator. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, Volume **40(2)**: 179-189.
12. M. Zeki Sarıkaya, Aziz Sağlam and Hüseyin YILDIRIM (2012). New inequalities of Hermite-Hadamard type for functions whose second derivatives absolute values are convex and quasi-convex. *International Journal of Open Problems in Computer Science and Mathematics (IJOPCM)*, 5(3).