

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KESİRLİ BASAMAKTAN BAZI DİFERENSİYEL DENKLEM
MODELLERİ

Ashı LÜLECİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2011

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Aslı LÜLECİ tarafından hazırlanan " **Kesirli Basamaktan Bazı Diferensiyel Denklem Modelleri** " adlı tez çalışması 27 / 07 / 2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: *Doç.Dr. Nuri ÖZALP*

Jüri Üyeleri:

Başkan: *Doç.Dr. Ogün DOĞRU*
Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü

Üye: *Doç.Dr. Nuri ÖZALP*
Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü

Üye: *Doç.Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL*
Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof.Dr. Özer KOLSARICI
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KESİRLİ BASAMAKTAN BAZI DİFERENSİYEL DENKLEM MODELLERİ

Aslı LÜLECİ

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç.Dr. Nuri ÖZALP

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. Bu bölümde tezde kullanılacak olan bazı özel fonksiyonlar verilmiştir.

İkinci bölümde, kesirli basamaktan türev ve integral alma yöntemleri verilmiş ve bu yöntemlerin birbiriyle olan ilişkileri ortaya koyulmuştur. İlk olarak Grünwald Letnikov türev ele alınmıştır. Sonrasında ise Riemann-Liouville kesirli türev ve bunun Grünwald Letnikov türev yaklaşımıyla ilişkisi verilmiştir. Son olarak Caputo türev tanımı anlatılmıştır.

Üçüncü bölümde, kesirli basamaktan diferensiyel denklemlerin başlangıç değer problemlerinin çözümlerinin varlık ve tekliği ile ilgili bazı teoremler ve örnekler ele alınmıştır. İlk olarak tek kesirli diferensiyel denklemin varlık ve tekliği ve daha sonra ise n li kesirli diferensiyel denklem sistemi genel durumu için varlık ve teklik teoremleri verilmiştir. Ayrıca örneklerle, kesirli diferensiyel denklemler için başlangıç değer problemlerinin çözüm metodu olarak kullanılabileceği gösterilmiştir.

Son olarak, bazı kesirli basamaktan diferensiyel denklem modelleri ve kesirli basamaktan lineer sistemin karahlık durumu incelenmiştir.

2011 , 74 sayfa

Anahtar Kelimeler: Kesirli Denklemler, kesirli basamaktan türev, kesirli basamaktan integral

ABSTRACT

Master Thesis

On Some Fractional Differential Equations Models

Aslı LÜLECİ

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc.Prof.Dr. Nuri ÖZALP

The thesis consists of four chapters.

The first chapter is devoted to the introduction. In this part some functions are given which are used in the thesis.

In the second chapter, some methods of taking fractional derivative and integral and also the relationship between them are given. Firstly, Grünwald Letnikov derivative is considered. After then, the Riemann-Liouville fractional derivative and the relationship with the Grünwald Letnikov derivative are given. Finally, the definition of Caputo derivative is described.

In the third chapter, Existence and uniqueness of the initial value problems of fractional equations and systems are given. Moreover, with some examples it is shown that the initial value problem can be used as the method of solution for fractional differential equations.

In the final part, some models of fractional differential equations and the stability of fractional linear systems are investigated.

2011 , 74 pages

Key Words: Fractional equations, fractional order derivative, fractional integral

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında görüş ve önerileriyle beni yönlendiren ve bana her konuda yardımcı ve destek olan sayın hocam Doç. Dr. Nuri ÖZALP (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'e, yüksek lisans yaptığım süre boyunca, ilk günden itibaren destek, anlayış ve deneyimlerini benden esirgemeyen sayın hocam Arş. Gör. Elif DEMİRCİ (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'ye ayrıca çalışmalarım sırasında verdiği burs ile beni destekleyen TÜBİTAK'a ve bana anlayış gösteren sevgili aileme en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Aslı LÜLECİ
ANKARA, Temmuz 2011

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
1 GİRİŞ	1
1.1 Diferensiyel Denklem	1
1.2 Kesirli Diferensiyel Denklemler	1
1.3 Kesirli Kalkulusta Bazı Özel Fonksiyonlar	1
1.3.1 Gamma Fonksiyonu	1
1.3.2 Mittag-Leffler Fonksiyonu	7
1.3.3 Wright Fonksiyonu	13
2 KEYFİ BASAMAKTAN TÜREV VE İNTEGRALLER	16
2.1 Oyunun İsmi	16
2.2 Grünwald-Letnikov Kesirli Türevleri;	16
2.2.1 Türev ve İntegralin Ortak İfadesi:	16
2.2.2 Keyfi Basamaktan İntegraller	21
2.2.3 Keyfi Basamaktan Türev	25
2.2.4 $(t - a)^\beta$ nın Kesirli Türevi	28
2.2.5 Tamsayı Basamaktan Türevler ile Birleştirme	30
2.2.6 Kesirli Türevler İle Birleştirilmesi	31
2.3 Riemann-Liouville Kesirli Türevi:	34
2.3.1 Tamsayı Basamaktan Türevlerinin ve İntegrallerin Birleştirilmesi:	35
2.3.2 Keyfi Basamaktan İntegraller:	37
2.3.3 Keyfi Basamaktan Türevler	41
2.3.4 $(t - a)^\beta$ nın Kesirli Türevi:	44
2.3.5 Tamsayı Basamaktan Türevlerle Birleştirilmesi	45
2.3.6 Kesirli Türevlerle Birleştirilmesi:	46
2.3.7 Grünwald-Letnikov Yaklaşımıyla İlişkisi	47
2.4 Diğer Bazı Yaklaşımlar	48
2.4.1 Caputo Kesirli Türevi	49
3 VARLIK VE TEKLİK TEOREMLERİ	52
3.1 Lineer Kesirli Diferensiyel Denklemler	52
3.2 Genel Formda Kesirli Diferensiyel Denklemler	56
3.3 Çözüm Metodu Olarak Varlık ve Teklik Teoremi	59
3.4 Çözümlerin Başlangıç Koşullarına Bağlılığı	61
4 KESİRLİ BASAMAKTAN MODELLER	64
4.1 Leyla-Mecnun Modeli	64
KAYNAKLAR	67
ÖZGEÇMİŞ	68

1. GİRİŞ

1.1 Diferensiyel Denklem

Bir ya da daha fazla değişken arasındaki ilişki, bu değişkenlerin değişim oranının bir fonksiyonu olarak düşünülebilir. Değişim oranları, zaman bağımsız değişken olmak üzere sürekli veya kesikli olarak ifade edilebilir. Değişkenlerin zamana bağlı olduğu düşünülürse; değişkenler, değişim oranları ve fonksiyonlardan oluşan denklemler elde edilir. Bu denklemlere türevsel denklemler ya da diferensiyel denklemler adı verilir. Kısaca, diferensiyel denklemler bir takım bağımsız değişkenleri, bu değişkenlerin fonksiyonlarını ve fonksiyonların sonlu basamaktan türevlerini içeren bu türden matematiksel bağıntılardır.

1.2 Kesirli Diferensiyel Denklemler

Kesirli diferensiyel denklem kendi isminden de anlaşılacağı üzere türev ve integralin tam olmayan (keyfi) derecelere genişletilmiş şeklidir. Konu diferensiyel hesap kadar eski olup, Leibniz ve Newton'un diferensiyel hesaplama tekniğine kadar uzanır. (Bayın S., 2004)

Bir fonksiyonun birinci, ikinci, üçüncü, vs. türevlerinin nasıl alındığını biliyoruz, ancak $\frac{4}{3}$ üncü türevini nasıl alabiliriz? Aynı şekilde fonksiyonu iki ya da üç defa integre edebiliriz, fakat $\frac{1}{2}$ defa integre edebilir miyiz? Leibniz'in 1695'te L'Hospital'a sorduğu "Tamsayı basamaktan türevler kesirli basamaktan türevlere genişletilebilir mi?" sorusu kesirli diferensiyelin çıkış tarihi olarak gösterilebilir. Leibniz'in yanı sıra Liouville, Riemann, Weyl, Lagrange, Laplace, Fourier, Euler, Abel gibi birçok matematikçi de bu konu üzerine çalışmışlardır. (Loverro A., 2004)

1.3 Kesirli Kalkülusta Bazı Özel Fonksiyonlar

Bu bölümde diğer bölümlerde kullanılacak bazı özel fonksiyonların temel teorisi verilecek. Gamma ve Beta Fonksiyonları, Mittag-Leffler fonksiyonları ve Wright fonksiyonları hakkında bilgi verilecek. Bu fonksiyonlar kesirli diferensiyel denklemlerde çok önemli rol oynamaktadırlar.

1.3.1 Gamma Fonksiyonu

Kesirli analizin temel fonksiyonlarından biri; $n!$ in tam olmayan sayılara ve hatta kompleks sayılara genelleşen, Euler'in $\Gamma(z)$ Gamma fonksiyonudur. Gamma fonksiyonunun en basit anlamı faktöriyelin bütün reel sayılar için genelleştirilmesidir.

Gamma Fonksiyonunun Tanımı

Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

ile tanımlanır ve kompleks düzlemin $Re(z) > 0$ sağ yarısında yakınsaktır. Gerçekten;

$$\begin{aligned}\Gamma(x + iy) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1+iy} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} e^{iy \log t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} [\cos(y \log t) + i \sin(y \log t)] dt\end{aligned}\quad (1.2)$$

olup, köşeli parantezin içindeki ifade her t için sınırlıdır. e^{-t} den dolayı sonsuzda yakınsaklık sağlanır ve $t = 0$ daki yakınsaklık için de $x = Re(z) > 1$ gereklidir.

Gamma Fonksiyonunun Bazı Özellikleri

Gamma fonksiyonunun en temel özelliklerinden birisi

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) \quad (1.3)$$

dir. Bu ifade kısmi integrasyon yöntemi ile kolayca ispatlanabilir:

$$\Gamma(z + 1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = [-e^{-t} t^z]_{t=0}^{t=\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z)$$

Buradan açıkça görülmektedir ki; $\Gamma(1) = 1$ dir ve (1.3) ü kullanarak $z = 1, 2, 3, \dots$ için

$$\begin{aligned}\Gamma(2) &= 1\Gamma(1) = 1 = 1! \\ \Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2.1! = 2! \\ \Gamma(4) &= 3\Gamma(3) = 3.2! = 3! \\ &\dots\dots\dots \\ \Gamma(n + 1) &= n\Gamma(n) = n(n - 1)! = n!\end{aligned}$$

elde ederiz.

Gamma fonksiyonunun diğer bir özelliği; gamma fonksiyonu $z = -n$

($n = 0, 1, 2, \dots$) noktalarında basit kutup noktalarına sahiptir. Bunu göstermek için (1.1) i

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (1.4)$$

formunda yazalım. (1.4) deki ilk integral, üstel fonksiyonun seri açılımı kullanılarak hesaplanabilir. Eğer $Re(z) = x > 0$ ise $Re(z + k) = x + n > 0$ ve $t^{z+k}|_{t=0} = 0$ dir. Böylece,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} t^{z-1} dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 t^{k+z-1} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+z)}
\end{aligned}$$

İkinci integral z kompleks değişkeninin bir tam fonksiyonu olarak tanımlanır. Gerçekten,

$$\varphi(z) = \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = \int_1^{\infty} e^{-t} e^{\log t^{z-1}} dt = \int_1^{\infty} e^{(z-1) \log t - t} dt \quad (1.5)$$

yazalım. $e^{(z-1) \log t - t}$ fonksiyonu keyfi z ve $t \geq 1$ için z ve t nin sürekli fonksiyondur. Dahası, eğer $t \geq 1$ (ve böylece $\log t \geq 0$) ise, z nin tam fonksiyonu olur. Kompleks düzlemde keyfi, sınırlı ve kapalı bir D bölgesini ele alalım ve $x_0 = \max_{z \in D} \operatorname{Re}(z)$ diyelim. O halde;

$$\begin{aligned}
|e^{-t} t^{z-1}| &= |e^{(z-1) \log t - t}| \quad (z = x + iy) \\
&= |e^{(x-1) \log t - t}| \cdot |e^{iy \log t}| \\
&= |e^{(x-1) \log t - t}| \leq e^{(x_0-1) \log t - t} = e^{-t} t^{x_0-1}
\end{aligned}$$

olur. Bu (1.5) deki integralin D de düzgün yakınsadığı anlamına gelir ve böylece $\varphi(z)$ fonksiyonu D de düzgün olup, (1.5) de integral altında türeve izin verilir. D bölgesi keyfi olarak seçildiğinden, $\varphi(z)$ fonksiyonunun yukarıdaki özellikleri tüm kompleks düzlemde sağladığı çıkarımı yaparız. Böylece $\varphi(z)$ fonksiyonu integral altında türeve izin veren bir tam fonksiyondur. Yukarıdakileri bir arada göz önüne alırsak;

$$\begin{aligned}
\Gamma(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{k+z} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{k+z} + \text{tam fonksiyon}
\end{aligned} \quad (1.6)$$

elde edilir ve gerçekten $\Gamma(z)$ sadece $z = -n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ da basit kutup noktalarına sahiptir.

Gamma Fonksiyonunun Limit Gösterimi

Gamma fonksiyonu ayrıca

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1) \dots (z+n)} \quad (1.7)$$

limiti ile de gösterilebilir. Burada $Re(z) > 0$ başlangıç kabulünü yapmaktayız.
(1.7) yi ispatlamak için ilk olarak

$$f_n(z) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt \quad (1.8)$$

yardımcı fonksiyonunu ele alalım. $\tau = \frac{t}{n}$ alıp, ardışık olarak kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} f_n(z) &= n^z \int_0^n (1 - \tau)^n \tau^{z-1} d\tau \\ &= \frac{n^z}{z} \cdot n \int_0^1 (1 - \tau)^{n-1} \tau^z d\tau \\ &= \frac{n^z \cdot n!}{z(z+1)\dots(z+n-1)} \int_0^1 \tau^{z+n-1} d\tau \\ &= \frac{n^z \cdot n!}{z(z+1)\dots(z+n)} \end{aligned} \quad (1.9)$$

elde ederiz. İyi bilinen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}$$

eşitliğinden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{z-1} dt \quad (1.10)$$

olmasını bekleyebiliriz ki, buradan da eğer limit ve integraldeki yer değişimi korunuyorsa (1.7) deki gamma fonksiyonunun limit gösterimi ispatlanmış olur. Bunu göstermek için farkı hesaplayalım:

$$\begin{aligned} \Delta &= \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt - f_n^{(z)} \\ &= \int_0^n \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right) t^{z-1} dt + \int_n^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \end{aligned} \quad (1.11)$$

Keyfi bir $\varepsilon > 0$ sayısını alalım. (1.1) deki integral yakınsak olduğundan, $n \geq N$ olacak şekilde bir N sayısı vardır, öyle ki;

$$\left| \int_n^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \right| \leq \int_n^\infty e^{-t} t^{x-1} dt < \frac{\varepsilon}{3} \quad (x = Re(z)) \quad (1.12)$$

N sabitlenirse ve $n > N$ göz önüne alınırsa Δ yı üç integralin toplamı olarak yazabiliriz:

$$\Delta = \left(\int_0^N + \int_N^n \right) \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n \right] t^{z-1} dt + \int_n^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad (1.13)$$

Son integral $\frac{\varepsilon}{3}$ den küçük olup, ikinci integral için ise, $x = \operatorname{Re}(z)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \left| \int_N^n \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n \right] t^{z-1} dt \right| &\leq \int_N^n \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n \right] t^{x-1} dt \\ &< \int_N^\infty e^{-t} t^{x-1} dt < \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned} \quad (1.14)$$

elde edilir.

(1.13) deki ilk integralin hesabı için aşağıdaki yardımcı eşitsizliğe gerek duyarız:

$$0 < e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n < \frac{t^2}{2n} \quad (0 < t < n) \quad (1.15)$$

ki bu

$$1 - e^{-t} \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n = \int_0^t e^{-\tau} \left(1 - \frac{\tau}{n} \right)^n \frac{\tau}{n} d\tau \quad (1.16)$$

ve

$$0 < \int_0^t e^{-\tau} \left(1 - \frac{\tau}{n} \right)^n \frac{\tau}{n} d\tau < \int_0^t e^{-\tau} \frac{\tau}{n} d\tau = e^{-t} \frac{t^2}{2n} \quad (1.17)$$

den elde edilir. ((1.16) bağıntısı her iki tarafın integralenmesi ile elde edilir.)

(1.15) deki yardımcı eşitsizliği kullanarak yeterince büyük n ler için ve sabit N ler için

$$\left| \int_0^N \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n \right] t^{z-1} dt \right| < \frac{1}{2n} \int_0^N t^{x+1} dt < \frac{\varepsilon}{3} \quad (1.18)$$

(1.12), (1.14) ve (1.18) deki eşitsizlikleri gözönüne alınarak keyfi ε için (1.10) daki limit ve integral değişimi gösterilir.

Bu da $\operatorname{Re}(z) > 0$ için gamma fonksiyonunun limit gösterimi olan (1.7) deki formülün ispatını tamamlar.

(1.3) yardımı ile $\operatorname{Re}(z) > 0$ koşulu $z \neq 0, -1, -2, \dots$ ye aşağıdaki şekilde zayıflatılabilir.

Eğer m pozitif bir tamsayı olmak üzere $-m < \operatorname{Re}(z) \leq -m + 1$ ise,

$$\begin{aligned}
\Gamma(z) &= \frac{\Gamma(z+m)}{z(z+1)\dots(z+m-1)} \\
&= \frac{1}{z(z+1)\dots(z+m-1)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!.n^{z+m}}{(z+m)\dots(z+m+n)} \\
&= \frac{1}{z(z+1)\dots(z+m-1)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-m)!. (n-m)^{z+m}}{(z+m)(z+m+1)\dots(z+n)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z.n!}{z(z+1)\dots(z+n)} \tag{1.19}
\end{aligned}$$

Böylece (1.7) deki limit gösterimi $z \neq 0, -1, -2, \dots$ hariç tüm z ler için geçerlidir.

Beta Fonksiyonu

Çoğu durumda gamma fonksiyonunun değerlerinin belirli kombinasyonları yerine beta fonksiyonu olarak adlandırılan bir bağıntı kullanmak daha uygundur.

Beta fonksiyonu çoğunlukla;

$$B(z, w) = \int_0^1 \tau^{z-1} (1-\tau)^{w-1} d\tau, \quad \text{Re}(z) > 0, \text{Re}(w) > 0 \tag{1.20}$$

şeklinde tanımlanır.

(1.1) de verilen gamma fonksiyonu tanımı ile (1.20) deki beta fonksiyonu arasında ilişki kurabilmek için Laplace dönüşümünü kullanacağız.

$$h_{z,w}(t) = \int_0^t \tau^{z-1} (1-\tau)^{w-1} d\tau \tag{1.21}$$

integralini göz önüne alalım. Açık olarak $h_{z,w}(t)$, t^{z-1} ve t^{w-1} fonksiyonunun konvolüsyonudur ve $h_{z,w}(1) = B(z, w)$ dır.

İki fonksiyonun konvolüsyonunun Laplace dönüşümü, onların Laplace dönüşümünün çarpımına eşit olduğundan,

$$H_{z,w}(s) = \frac{\Gamma(z)}{s^z} \cdot \frac{\Gamma(w)}{s^w} = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{s^{z+w}} \tag{1.22}$$

olur. Burada $H_{z,w}(s)$ ile $h_{z,w}(t)$ nin Laplace dönüşümüdür.

Diğer taraftan $\Gamma(z)\Gamma(w)$ çarpımı sabit olduğu için (1.22) nin sağ tarafının ters Laplace dönüşümü alınarak $h_{z,w}(t)$ orijinal fonksiyonunu yeniden elde etmek mümkündür. Laplace dönüşümünün tekliğinden

$$h_{z,w}(t) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} t^{z+w-1} \tag{1.23}$$

olup, $t = 1$ alırsak beta fonksiyonunun en belirgin özelliklerinden birini elde ederiz:

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \tag{1.24}$$

Ayrıca, buradan da

$$B(z, w) = B(w, z) \quad (1.25)$$

elde edilir.

(1.20) deki beta fonksiyonun tanımı sadece $\text{Re}(z) > 0, \text{Re}(w) > 0$ olduğu zaman geçerlidir. Eğer gamma fonksiyonunun analitik genişletmesine sahip isek, (1.24) deki ilişki beta fonksiyonunun tüm kompleks düzleme analitik genişletmesini sağlar.

Beta fonksiyonu yardımıyla gamma fonksiyonu için

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \quad (1.26)$$

önemli bağıntısını elde ederiz. Bu formülünü $0 < \text{Re}(z) < 1$ koşulu altında, $z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ için geçerlidir. (Podlubny, 1999)

1.3.2 Mittag-Leffler Fonksiyonu

e^z üstel fonksiyonu tamsayı basamaktan diferensiyel denklemler teorisinde oldukça önemli rol oynar. Onun bir parametre genişletilmiş şekli,

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (1.27)$$

formülü ile Mittag-Leffler tarafından verilmiştir. (Erdelyi, 1955.)

Mittag-Leffler tipi iki parametrelili fonksiyona genelleştirilme işlemi ilk olarak Agarwal (1953) ve Humbert tarafından Laplace dönüşüm tekniği kullanılarak yapılmış olup, kesirli dereceden diferensiyel hesapta önemli bir yere sahiptir. Bu fonksiyon Agarwal fonksiyonu olarak isimlendirilebilirdi ancak, Humbert ve Agarwal bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonuyla aynı notasyonu kullandıklarından dolayı şu anda iki parametrelili fonksiyon Mittag-Leffler fonksiyonu adıyla kullanılmaktadır.

Tanımı ve Bazı Diğer Fonksiyonlarla İlişkisi

İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (\alpha > 0, \beta > 0) \quad (1.28)$$

seri açılımı ile verilir.

(1.28) denkleminde,

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \quad (1.29)$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z} \quad (1.30)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \right)$$

$$E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)!} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{e^z - 1 - z}{z^2} \quad (1.31)$$

ve en genel haliyle

$$E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}} \left\{ e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!} \right\} \quad (1.32)$$

dir.

Hiperbolik sinüs ve hiperbolik kosinüs, Mittag-Leffler fonksiyonunun özel birer durumlarıdır.

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z) \quad (1.33)$$

$$E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sinh(z) \quad (1.34)$$

Hiperbolik sinüs ve kosinüsün genelleştirilmiş olan n . basamaktan hiperbolik fonksiyonlar Mittag-Leffler fonksiyonunun terimleri ile ifade edilebilirler.

$$h_r(z, n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{nk+r-1}}{(nk+r-1)!} = z^{r-1} E_{n,r}(z^n) \quad (r = 1, 2, \dots, n) \quad (1.35)$$

Bununla beraber sinüs ve cosinüs fonksiyonlarının genelleştirilmişleri olan n . basamaktan trigonometrik fonksiyonlar;

$$k_r(z, n) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{nj+r-1}}{(nj+r-1)!} = z^{r-1} E_{n,r}(-z^n) \quad (r = 1, 2, \dots, n) \quad (1.36)$$

şeklinde ifade edilirler.

$\beta = 1$ için Mittag-Leffler fonksiyonunu bir parametrelilik olarak elde ederiz:

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \equiv E_{\alpha}(z) \quad (1.37)$$

Rasyonel basamaktan diferensiyel denklemleri çözmek için tanımlanan $\mathcal{E}_t(v, \alpha)$ fonksiyonu (1.28) deki Mittag-Leffler fonksiyonunun özel bir durumudur.

$$\mathcal{E}_t(v, \alpha) = t^v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^k}{\Gamma(v+k+1)} = t^v E_{1,v+1}(\alpha t) \quad (1.38)$$

Rabotnov (1977) un $\mathfrak{a}_{\alpha}(\beta, t)$ fonksiyonu Mittag-Leffler fonksiyonunun özel bir durumudur.

$$\mathfrak{z}_\alpha(\beta, t) = t^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta^k \cdot t^{k(\alpha+1)}}{\Gamma((k+1)(1+\alpha))} = t^\alpha E_{\alpha+1, \alpha+1}(\beta t^{\alpha+1}) \quad (1.39)$$

(1.38) ve (1.39) arasındaki ilişkidten dolayı Miller-Ross (1993) ve Rabotnov(1977) fonksiyonlarının özellikleri iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonundan çıkarılır.

Kesirli sinüs ve kosinüs olarak adlandırılan $S_{c_\alpha}(z)$ ve $C_{s_\alpha}(z)$ fonksiyonları iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonunun özel birer halleridir:

$$S_{c_\alpha}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot z^{(2-\alpha)n+1}}{\Gamma((2-\alpha)n+2)} = z E_{2-\alpha, 2}(-\alpha^{2-\alpha}) \quad (1.40)$$

$$C_{s_\alpha}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot z^{(2-\alpha)n}}{\Gamma((2-\alpha)n+1)} = E_{2-\alpha, 1}(-z^{2-\alpha}) \quad (1.41)$$

Sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının Mittag-Leffler fonksiyonu cinsinden ifade edilen diğer bir kesirleştirilmesinden Luchko ve Srivastava (1995) söz etmiştir:

$$\sin_{\lambda, \mu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot z^{2k+1}}{\Gamma(2\mu k + 2\mu - \lambda + 1)} = z E_{2\mu, 2\mu-\lambda+1}(-z^2) \quad (1.42)$$

$$\cos_{\alpha, m}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{\Gamma(2\mu k + \mu - \lambda - 1)} = E_{2\mu, \mu-\lambda+1}(-z^2) \quad (1.43)$$

Elbette kesirli sinüs ve kosinüs versiyonlarının özellikleri Mittag-Leffler fonksiyonunun özelliklerinden çıkarılır.

İki değişkenli Mittag-Leffler fonksiyonu Srivastava (2006) tarafından genişletilerek simetrik bir formda öne sürüldü:

$$\xi_{\alpha, \beta, \lambda, m}^{v, \alpha}(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{m+\frac{\beta(vn+1)-1}{\alpha}} y^{n+\frac{m(\sigma m+1)-1}{\alpha}}}{\Gamma(m\alpha + (vn+1)\beta) \Gamma(n\lambda + (\sigma m+1)\mu)} \quad (1.44)$$

Mittag-Leffler fonksiyonunun çok değişkenli genelleştirilmesi, operatör metoduyla sabit katsayılı lineer kesirli denklemleri çözmek için kullanılan

$$E(z_1, \dots, z_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{\ell_1+\dots+\ell_m=k \\ \ell_1>0, \dots, \ell_m>0}} \frac{(k; \ell_1, \dots, \ell_m) \prod_{i=1}^m z_i^{\ell_i}}{\Gamma\left(\beta + \sum_{i=1}^m \alpha_i \ell_i\right)} \quad (1.45)$$

dır. Burada $(k; \ell_1, \dots, \ell_m)$ multinomiyal katsayılarıdır.

İki Parametrelili Mittag-Leffler Fonksiyonunun Laplace Dönüşümü

(1.28) bağıntısından $E_{\alpha,\beta}(z)$ Mittag-Leffler fonksiyonunun e^x üstel fonksiyonun bir genelleşmesi olduğu görülür. Bu nedenle üstel fonksiyonun, Mittag-Leffler fonksiyonunun bir özel hali olduğunu söyleyebiliriz.

Şimdi, Mittag-Leffler fonksiyonunun Laplace dönüşümünü, bu fonksiyon ve e^z fonksiyonunun karşılaştırılması ile oluşturacağız. Bu amaçla $t^k e^{\alpha t}$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü alışıldık olmayan bir yolla elde edelim.

İlk olarak,

$$\int_0^{\infty} e^{-t} \cdot e^{\pm z t} dt = \frac{1}{1 \pm z}, \quad |z| < 1 \quad (1.46)$$

olduğunu ispatlayalım. Gerçekten, e^z nin seri açılımını kullanarak,

$$\int_0^{\infty} e^{-t} e^{z t} dt = \frac{1}{1 - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pm z)^k}{k!} \int_0^{\infty} e^{-t} t^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} (\pm z)^k = \frac{1}{1 \pm z} \quad (1.47)$$

elde ederiz.

İkinci olarak (1.46) daki denklemin her iki tarafını z ye göre integrallersek

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^k e^{\pm z t} dt = \frac{k!}{(1 - z)^{k+1}} \quad (|z| < 1) \quad (1.48)$$

ve buradan da $t^k e^{\pm \alpha t}$ fonksiyonlarının

$$\int_0^{\infty} e^{-p t} t^k e^{\pm \alpha t} dt = \frac{k!}{(p \pm \alpha)^{k+1}} \quad (\text{Re}(p) > |\alpha|) \quad (1.49)$$

Laplace dönüşümlerini elde ederiz. Şimdi (1.28) deki Mittag-Leffler fonksiyonunu dikkate alalım. (1.28) in aşağıdaki integralde yerleştirilmesi ile

$$\int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(z t^{\alpha}) dt = \frac{1}{1 - z} \quad (|z| < 1) \quad (1.50)$$

bulunur ve (1.48) den $t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha,\beta}^{(k)}(\pm z t^{\alpha})$ ($E_{\alpha,\beta}^{(k)}(y) = \frac{d^k}{dy^k} E_{\alpha,\beta}(y)$) fonksiyonunun Laplace dönüşüm çiftini elde ederiz:

$$\int_0^{\infty} e^{-p t} t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha,\beta}^{(k)}(\pm \alpha t^{\alpha}) dt = \frac{k! p \alpha - \beta}{(p^{\alpha} \pm \alpha)^{k+1}}, \quad (\text{Re}(p) > |\alpha|^{1/\alpha}) \quad (1.51)$$

$\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ için (1.51) in özel durumu;

$$\int_0^{\infty} e^{-p t} t^{\frac{k-1}{2}} E_{1/2,1/2}^{(k)}(\pm \alpha \sqrt{t}) dt = \frac{k!}{(\sqrt{p} \pm \alpha)^{k+1}}, \quad (\text{Re}(p) > \alpha^2) \quad (1.52)$$

yarı diferensiyel denklemlerinin çözümünde kullanışlıdır.

Mittag-Leffler Fonksiyonunun Türevi

(1.28) deki serisel gösterime Riemann-Liouville kesirli basamaktan diferensiyeli

$${}_a D_t^p f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^{m+1} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f(\tau) d\tau \quad (m \leq p < m+1)$$

(γ keyfi bir reel sayı) uygulamasıyla

$${}_0 D_t^\gamma \left(t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(k)}(\lambda t^\alpha) \right) = t^{\alpha k + \beta - \gamma - 1} E_{\alpha, \beta - \gamma}^{(k)}(\lambda t^\alpha) \quad (1.53)$$

elde edilir. $k = 0$, $\lambda = 1$ ve γ tamsayısı için (1.53) deki ilişkinin özel bir şekli;

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^m (t^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}(t^\alpha)) = t^{\beta-m-1} E_{\alpha, \beta-m}(t^\alpha) \quad (1.54)$$

($m = 1, 2, 3, \dots$) şeklindedir.

(1.54) formülü bazı ilginç sonuçlara sahiptir $\alpha = \frac{m}{n}$ (m ve n doğal sayılar olmak üzere) alınrsa;

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^m (t^{\beta-1} E_{\frac{m}{n}, \beta}(t^{m/n})) = t^{\beta-1} E_{\frac{m}{n}, \beta}(t^{\frac{m}{n}}) + t^{\beta-1} \sum_{k=1}^n \frac{t^{-\frac{m}{n}k}}{\Gamma(\beta - \frac{m}{n}k)}; \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.55)$$

elde edilir.

$n = 1$ ve gamma fonksiyonunun bilinen özelliği

$$\frac{1}{\Gamma(-v)} = 0; \quad (v = 0, 1, 2, \dots)$$

dikkate alınrsa (1.55) den

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^m (t^{\beta-1} E_{m, \beta}(t^m)) = t^{\beta-1} E_{m, \beta}(t^m) \quad (1.56)$$

($m = 1, 2, 3, \dots; \beta = 0, 1, 2, \dots, m$) elde ederiz.

(1.55) de $t = z^{\frac{n}{m}}$ değişken değiştirilmesi yapılırsa

$$\begin{aligned} & \left(\frac{m}{n} z^{1-\frac{n}{m}} \frac{d}{dz}\right)^m (z^{(\beta-1)\frac{n}{m}} E_{\frac{n}{m}, \beta}(z)) \\ &= z^{(\beta-1)\frac{n}{m}} E_{\frac{n}{m}, \beta}(z) + t^{(\beta-1)\frac{n}{m}} \sum_{k=1}^n \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta - \frac{m}{n}k)} \end{aligned} \quad (1.57)$$

($m, n = 1, 2, 3, \dots$) olur. (1.57) de $m = 1$ alırsak;

$$\frac{1}{n} \frac{d}{dz} \left(z^{(\beta-1)n} E_{\frac{1}{n}, \beta}(z) \right) = z^{\beta n - 1} E_{\frac{1}{n}, \beta}(z) + z^{\beta n - 1} \sum_{k=1}^n \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta - \frac{k}{n})}; \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

elde edilir.

Mittag-Leffler Fonksiyonu için Diferensiyel Denklemler

(1-54)-(1.57) bağıntılarının Mittag-Leffler fonksiyonu için diferensiyel denklemler olarak algılanabileceğini not edelim şöyle ki, eğer

$$\begin{aligned} y_1(t) &= t^{\beta-1} E_{\frac{m}{n}, \beta} \left(t^{\frac{m}{n}} \right) \\ y_2(t) &= t^{\beta-1} E_{m, \beta} (t^m) \\ y_3(t) &= t^{(\beta-1)\frac{n}{m}} E_{\frac{m}{n}, \beta} (t) \\ y_4(t) &= t^{(\beta-1)n} E_{\frac{1}{n}, \beta} (t) \end{aligned}$$

dersek, bu fonksiyonlar sırasıyla aşağıdaki diferensiyel denklemleri sağlarlar:

$$\frac{d^m y_1(t)}{dt^m} - y_1(t) = t^{\beta-1} \sum_{k=1}^n \frac{t^{-\frac{m}{n}k}}{\Gamma\left(\beta - \frac{m}{n}k\right)} \quad (1.58)$$

$$(m, n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\frac{d^m y_2(t)}{dt^m} - y_2(t) = 0 \quad (1.59)$$

$$(m = 1, 2, 3, \dots; \quad \beta = 0, 1, 2, \dots, m)$$

$$\left(\frac{m}{n} t^{1-\frac{n}{m}} \frac{d}{dt} \right)^m y_3(t) - y_3(t) = t^{(\beta-1)\frac{n}{m}} \sum_{k=1}^n \frac{t^{-k}}{\Gamma\left(\beta - \frac{m}{n}k\right)} \quad (1.60)$$

$$(m, n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\frac{1}{n} \frac{dy_4(t)}{dt} - t^{n-1} y_4(t) = t^{\beta n-1} \sum_{k=1}^n \frac{t^{-k}}{\Gamma\left(\beta - \frac{k}{n}\right)} \quad (1.61)$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots)$$

Toplam Formülleri

İlk olarak,

$$\sum_{v=0}^{m-1} e^{\frac{i2\pi vk}{m}} = \begin{cases} m, & k \equiv 0 \pmod{m} \\ 0, & k \not\equiv 0 \pmod{m} \end{cases} \quad (1.62)$$

aşık bağıntısını göz önüne alalım. Burada $k \equiv p \pmod{m}$ notasyonunun $k - p$ nin m tarafından bölümünden geriye kalanın sıfır olması anlamına geldiğini biliyoruz.

(1.28) deki Mittag-Leffler fonksiyonunun tanımı ile (1.62) birleştirilirse;

$$\sum_{v=0}^{m-1} E_{\alpha, \beta} \left(z e^{z \frac{2\pi v}{m}} \right) = m E_{m\alpha, \beta} (z^m), \quad (m \geq 1) \quad (1.63)$$

elde ederiz.

(1.63) deki α ile $\frac{\alpha}{m}$ ve z ile $z^{\frac{1}{m}}$ değiştirilirse;

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{m} \sum_{v=0}^{m-1} E_{\frac{\alpha}{m},\beta} \left(z^{\frac{1}{m}} e^{z \frac{2\pi v}{m}} \right), \quad (m \geq 1) \quad (1.64)$$

sonucuna varılır. Şimdi (1.64) formülünün temel durumundan söz edelim. $m = 2$ ve $z = t^2$ alırsak

$$E_{\alpha,\beta}(z) + E_{\alpha,\beta}(-z) = 2E_{\alpha,\beta}(z^2) \quad (1.65)$$

elde ederiz.

Benzer olarak

$$\sum_{v=-m}^m e^{i \frac{2\pi v k}{(2m+1)}} = \begin{cases} (2m+1), & k \equiv 0 \pmod{2m+1} \\ 0, & k \not\equiv 0 \pmod{2m+1} \end{cases} \quad (1.66)$$

açık formülü ile başlarsak,

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{2m+1} \sum_{v=-m}^{m-1} E_{\frac{\alpha}{(2m+1)},\beta} \left(z^{\frac{1}{(2m+1)}} e^{i \frac{2\pi v}{(2m+1)}} \right), \quad (m \geq 0) \quad (1.67)$$

elde ederiz.

(1.63) deki toplam formülünün genel şekli

$$\sum_{v=0}^{m-1} e^{i \frac{2\pi z v (m-n)}{m}} E_{\alpha,\beta} \left(z e^{i \frac{z\pi v}{m}} \right) = m z^n E_{m\alpha,\beta+n\alpha}(z^m) \quad (1.68)$$

Srivastova tarafından elde edilmiştir. Açıkça, (1.68) deki bağıntıdan $n = 0$ için (1.63) toplam formülü elde edilir.

1.3.3 Wright Fonksiyonu

Wright fonksiyonu, lineer kısmi kesirli diferensiyel denklemlerin çözümlerinde önemli rol oynamaktadır. Kesirli ısı ve dalga denklemleri örnek gösterilebilir.

Bu fonksiyon, iki parametrelili $E_{\alpha,\beta}(z)$ Mittag-Leffler fonksiyonuyla ilişkilidir. Laplace dönüşümü yardımıyla Humbert ve Agarwal tarafından ortaya konulan birçok kullanışlı bağıntıya sahiptir.

Tanımı

Wright (1933) fonksiyonunu

$$W(z; \alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (1.69)$$

olarak ifade edeceğiz.

İntegral Gösterimi

Bu fonksiyon

$$W(z; \alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{H_a} z^{-\beta} e^{\tau + \tau^{-\sigma}} d\tau \quad (1.70)$$

integraliyle gösterilebilir. Burada H_a , Hankel konturunu ifade etmektedir.

(1.70) i ispatlamak için; integral fonksiyonu z nin kuvvet serisi formunda yazalım ve ters gamma fonksiyonunun

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \int_{H_a} e^{\tau} \cdot \tau^{-z} d\tau$$

formülünü kullanarak terim terime integre edelim.

Diğer Fonksiyonlarla İlişkisi

(1.28) deki tanımdan;

$$W(z; 0, 1) = e^z \quad (1.71)$$

$$\left(\frac{z}{2}\right)^v W\left(\mp \frac{z^2}{4}; 1, v+1\right) = \begin{cases} J_v(z) \\ I_v(z) \end{cases} \quad (1.72)$$

elde ederiz.

$\beta = 1 - \alpha$ alırsak, Mainardi'nin $M(z; \alpha)$ fonksiyonundan

$$W(-z; -\alpha, 1 - \alpha) = M(z; \alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{k! \Gamma(-\alpha(k+1) + 1)} \quad (1.73)$$

elde ederiz.

Wright fonksiyonunun diğer bir sonucu olarak ise;

$$W\left(-z; -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = M\left(z; \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right) \quad (1.74)$$

elde ederiz..

Buradan da görüldüğü gibi Wright fonksiyonu üstel fonksiyon ve Bessel fonksiyonlarının genelleştirilmiş halidir. $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ için z nin bir tam fonksiyonunu elde ederiz.

Ayrıca Mainardi'nin de vurguladığı gibi $W(z; \alpha, \beta)$ fonksiyonu $-1 < \alpha < 0$ için z nin bir tam fonksiyonudur.

Bu durumu ispatlamak için

$$\Gamma(y) \Gamma(1-y) = \frac{\pi}{\sin(\pi y)}$$

(1.26) bağıntısını kullanarak Wright fonksiyonunu

$$W(z; \alpha, \beta) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k \Gamma(1 - \alpha k - \beta) \sin \pi(\alpha k + \beta)}{k!} \quad (1.75)$$

formunda yazabiliriz.

$$s = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{\Gamma(1 - \alpha k - \beta)}{k!} \right| |z|^k \quad (1.76)$$

yardımcısı serisini kullanalım. (1.76) daki serinin $-1 < \alpha < 0$ için yakınsaklık yarıçapı sonsuzdur:

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\Gamma(1 - \alpha k - \beta)}{k!} \cdot \frac{(k+1)!}{\Gamma(1 - \alpha) k - \alpha - \beta} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{|\alpha|^\alpha k^{-\alpha}} = \infty \quad (1.77)$$

Mittag-Leffler ve Wright fonksiyonları arasında ilginç bir ilişki vardır; şöyle ki, Wright fonksiyonunun Laplace dönüşümü Mittag-Leffler fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki gibi açıklanabilir:

$$\begin{aligned} L\{W(t; \alpha, \beta); s\} &= L\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k! \Gamma(\alpha k + \beta)}; s\right\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(\alpha k + \beta)} \cdot \frac{1}{s^{k+1}} \\ &= s^{-1} \cdot E_{\alpha, \beta}(s^{-1}) \end{aligned} \quad (1.78)$$

2. KEYFİ BASAMAKTAN TÜREV VE İNTEGRALLER

Bu bölümde diferensiyel ve integral kavramlarının genelleştirilmiş hallerini göz önüne alacağız.

2.1 Oyunun İsmi

Keyfi bir α . reel basamaktan türev almak,

$$\cdots \int_a^t d\tau_2 \int_a^{\tau_2} f(\tau_1) d\tau_1, \quad \int_a^t f(\tau_1) d\tau_1, \quad f(t), \quad \frac{df(t)}{dt}, \quad \frac{d^2 f(t)}{dt^2}, \quad \cdots$$

operatör dizilerinin bir interpolasyonu olarak düşünülebilir. Bunu

$${}_a D_t^\alpha f(t)$$

notasyonu ile göstereceğiz.

Keyfi basamaktan türeve kısaca *kesirli türev* diyoruz. *Kesirli integral* ise kesirli türevde α nın negatif değerlerine karşılık gelecektir. Böylece $\beta > 0$ basamaktan bir kesirli integral ${}_a D_t^{-\beta} f(t)$ ile gösterilebilir. Kesirli denklem kesirli türevleri içeren denklemdir. Kesirli integral denklem ise, kesirli integralleri içeren integral denklemdir. Kesirli basamaktan sistemler, kesirli diferensiyel denklem veya kesirli integral denklem veya bu denklemlerin bir sistemi tarafından ifade edilen sistemdir.

Bizim kullanacağımız ifadelerde; kesirli integral ifadesi, keyfi basamaktan integral ve α negatif değerine karşılık gelen anlamına gelmektedir. α ve t alt değerlerini kesirli diferensiyelin terminalleri (uç noktaları) olarak kullanacağız. Kesirli diferensiyelde terminallerin görünümü esastır. Bu da bize, gerçek problemlerin kesirli türev uygulamalarında anlam belirsizliğinden kaçınmamıza yardımcı olacaktır.

2.2 Grünwald-Letnikov Kesirli Türevleri;

2.2.1 Türev ve İntegralin Ortak İfadesi:

Bu bölümde, klasik analizde farklı olarak verilen iki notasyonun ortak ifadesine yaklaşımlar ifade edilecektir. Bunlar n . basamaktan türev ve n katlı integrallerdir. Aşağıda göstereceğimiz gibi bu notasyonlar zannedilenin aksine birbirlerine daha yakındır.

Şimdi sürekli bir $y = f(t)$ fonksiyonu alalım. Bilinen tanıma göre $f(t)$ fonksiyonunun birinci basamaktan türevi

$$f'(t) = \frac{df}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır. Bu ifadenin ardışık olarak türevleri alındığı zaman,

$$\begin{aligned}
f''(t) &= \frac{d^2 f}{dt^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{f(t) - f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h) - f(t-2h)}{h} \right\} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2}
\end{aligned} \tag{2.2}$$

(2.1) ve (2.2) yi kullanarak

$$\begin{aligned}
f'''(t) &= \frac{d^3 f}{dt^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(t) - f''(t-h)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2} - \frac{f(t-h) - 2f(t-2h) + f(t-3h)}{h^2} \right\} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

elde edilir ve tümevarımla;

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n f}{dt^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} f(t-rh) \tag{2.4}$$

şeklinde bulunur. Burada;

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!} \tag{2.5}$$

ifadesi binom sabitleri için genel gösterimdir. (2.1) ve (2.4) deki kesirleri genellersek;

$$f_h^{(p)}(t) = \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh) \tag{2.6}$$

elde edilir ve burada p keyfi bir tamsayı ve n de yukarıdaki gibi bir tamsayıdır. Açık olarak, (2.5) den $\binom{p}{p}$ den sonraki tüm katsayıların sıfıra eşit olmasından dolayı, $p \leq n$ için

$$\lim_{h \rightarrow 0} f_h^{(p)}(t) = f^{(p)}(t) = \frac{d^p f}{dt^p} \tag{2.7}$$

dir. Şimdi p nin negatif değerlerini ($p < 0$) alalım. Uygunluk için;

$$\left[\begin{matrix} p \\ r \end{matrix} \right] = \frac{p(p+1)\dots(p+r-1)}{r!} \tag{2.8}$$

alırsak

$$\left(\begin{matrix} -p \\ r \end{matrix} \right) = \frac{-p(-p-1)\dots(-p-r+1)}{r!} = (-1)^r \left[\begin{matrix} p \\ r \end{matrix} \right] \tag{2.9}$$

bulunur. (2.6) daki p yerine $-p$ alırsak

$$f_h^{(-p)}(t) = \frac{1}{h^{-p}} \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t - rh) \quad (2.10)$$

elde edilir. Burada p pozitif bir tam sayıdır.

Eğer n sabitlenirse, $f_h^{(-p)}(t)$, $h \rightarrow 0$ a giderken önemi olmayan sıfır limitine gider. Sıfırdan farklı bir limite ulaşmak için $h \rightarrow 0$ iken $n \rightarrow \infty$ kabul etmemiz gerekir. Böylece, a ise reel sabit olmak üzere $h = \frac{t-a}{n}$ alabiliriz ve $f_h^{(-p)}(t)$ nin sonlu ya da sonsuz olan limit değerini düşünebiliriz ki, bunu

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(-p)}(t) = {}_a D_t^{(-p)} f(t) \quad (2.11)$$

ile göstereceğiz. Burada ${}_a D_t^{(-p)} f(t)$, a ve t bu işleme ait terminaller yani limitler olmak üzere $f(t)$ fonksiyonuna uygulanan belli bir işlemi belirtmektedir.

Şimdi birkaç özel durumu düşünelim. $p = 1$ için

$$f_h^{(-1)}(t) = h \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} 1 \\ r \end{bmatrix} f(t - rh) \quad (2.12)$$

dir. $t - nh = a$ olduğunu dikkate alırsak ve $f(t)$ fonksiyonunun sürekli olduğunu düşünersek, $(t - z = \tau)$ değişken değiştirmesi ile

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(-1)}(t) = {}_a D_t^{-1} f(t) = \int_0^{t-a} f(t - z) dz = \int_a^t f(\tau) d\tau \quad (2.13)$$

elde ederiz. Şimdi $p = 2$ alalım. Bu durumda

$$\begin{bmatrix} 2 \\ r \end{bmatrix} = \frac{2.3.....(2 + r - 1)}{r!} = r + 1$$

olup

$$f_h^{(-2)}(t) = h \sum_{r=0}^n (r + 1) h f(t - rh) \quad (2.14)$$

elde ederiz. $t + h = y$, $f(y - h - rh) = f(y - h(r + 1))$ dersek,

$$f_h^{(-2)}(t) = h \sum_{r=1}^{n+1} r h f(y - rh) \quad (2.15)$$

ve $h \rightarrow 0$ için

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(-2)}(t) = {}_a D_t^{-2} f(t) = \int_0^{t-a} z f(t - z) dz = \int_a^t f(t - \tau) f(\tau) d\tau \quad (2.16)$$

elde ederiz, çünkü $h \rightarrow 0$ iken

$y \rightarrow t$ dir.

$p = 3$ durumu bize ${}_a D_t^{-p}$ için genel ifadeyi gösterecektir:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ r \end{bmatrix} = \frac{3.4...(3+r-1)}{r!} = \frac{1}{1.2}(r+1)(r+2)$$

olduğundan,

$$f_h^{(-3)}(t) = \frac{h}{1.2} \sum_{r=0}^n (r+1)(r+2)h^2 f(t-rh) \quad (2.17)$$

dir. Yine $t+h=y$ dersek, $(r \rightarrow (r-1))$ olduğunda $(y-(r+1)h)$ olup,

$$f_h^{(-3)}(t) = \frac{h}{1.2} \sum_{r=1}^{n+1} r(r+1)h^2 f(y-rh) \quad (2.18)$$

bulunur. Bu ise

$$f_h^{(-3)}(t) = \frac{h}{1.2} \sum_{r=1}^{n+1} (rh)^2 f(y-rh) + \frac{h^2}{1.2} \sum_{r=1}^{n+1} rh f(y-rh) \quad (2.19)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece, $h \rightarrow 0$ için $y \rightarrow t$ ve

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} \frac{h^2}{1.2} \sum_{r=1}^{n+1} rh f(y-rh) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h \int_a^t (t-\tau) f(\tau) d\tau = 0$$

olduğundan $h \rightarrow 0$ için

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(-3)}(t) = {}_a D_t^{-3} f(t) = \frac{1}{2!} \int_0^{t-a} z^2 f(t-z) dz = \frac{1}{2!} \int_a^t (t-\tau)^2 f(\tau) d\tau \quad (2.20)$$

elde edilir.

(2.13) ve (2.20) deki ilişkiden genel gösterim;

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t-rh) = \frac{1}{(p-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \quad (2.21)$$

şeklinde elde edilir.

(2.21) formülünü tümevarımla ispatlamak için, bazı p ler için sağlanan bu eşitliğin $p+1$ için de sağlandığını göstermemiz gerekiyor. Şimdi

$$f_1(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau \quad (2.22)$$

fonksiyonu açık olarak $f_1(a) = 0$ özelliğine sahiptir.

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{-p-1} f(t) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^{p+1} \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p+1 \\ r \end{bmatrix} f(t-rh) \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p+1 \\ r \end{bmatrix} f_1(t-rh) \\ &\quad - \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p+1 \\ r \end{bmatrix} f_1(t-(r+1)h) \end{aligned} \quad (2.23)$$

eşitliğini göz önüne alalım. (2.8) i kullanarak

$$\begin{bmatrix} p+1 \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p+1 \\ r-1 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

buluruz. Burada $\begin{bmatrix} p+1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$ almalıyız.

(2.24) deki ilişki (2.23) deki ilk toplama uygulanırsa ve ikinci toplamda r yerine $r-1$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} {}_aD_t^{-p-1}f(t) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f_1(t-rh) + \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p+1 \\ r-1 \end{bmatrix} f_1(t-rh) \\ &\quad - \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=1}^{n+1} \begin{bmatrix} p+1 \\ r-1 \end{bmatrix} f_1(t-rh) \\ &= {}_aD_t^{-p}f_1(t) - \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \begin{bmatrix} p+1 \\ n \end{bmatrix} f_1(t-(n+1)h) \\ &= {}_aD_t^{-p}f_1(t) - (t-a)^p \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} p+1 \\ n \end{bmatrix} \frac{1}{n^p} f_1\left(a - \frac{t-a}{n}\right) \end{aligned}$$

elde edilir ve (2.21) deki $f_1(t)$ fonksiyonunun tanımından

$$\lim_{h \rightarrow \infty} f_1\left(a - \frac{t-a}{n}\right) = 0$$

bulunur.

(1.7) deki bilinen Gamma fonksiyonunun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} p+1 \\ n \end{bmatrix} \frac{1}{n^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(p+1)(p+2)\dots(p+n)}{n^p.n!} = \frac{1}{\Gamma(p+1)}$$

limit açılımı kullanılırsa

$$\begin{aligned} {}_aD_t^{-p-1}f(t) &= {}_aD_t^{-p}f_1(t) = \frac{1}{(p-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f_1(\tau) d\tau \\ &= \frac{-(t-\tau)^p f_1(\tau)}{p!} \Big|_{\tau=a}^{\tau=t} + \frac{1}{p!} \int_a^t (t-\tau)^p f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{p!} \int_a^t (t-\tau)^p f(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.25)$$

bulunur. Burada aşağıdaki kısmi integrasyon dönüşümünü kullandık:

$$\begin{aligned} f_1(\tau) = u &\implies f_1(\tau) d\tau = du \\ \frac{(t-\tau)^{p-1}}{(p-1)!} d\tau = dv &\implies \frac{-(t-\tau)^p}{p!} = v \end{aligned}$$

Böylece (2.21) formülü tümevarımla ispatlanmış olur.

Şimdi (2.21) deki formülün p katlı integrali temsil ettiğini gösterelim.

$$\frac{d}{dt}({}_a D_t^{-p} f(t)) = \frac{1}{(p-\tau)!} \int_a^t (t-\tau)^{p-\tau} f(\tau) d\tau = {}_a D_t^{-p+1} f(t)$$

ifadesinin a dan t ye integre edilmesiyle

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{-p} f(t) &= \int_a^t ({}_a D_t^{-p+1} f(t)) dt \\ {}_a D_t^{-p+1} f(t) &= \int_a^t ({}_a D_t^{-p+2} f(t)) dt \end{aligned}$$

v.s. elde edilir ve böylece

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{-p} f(t) &= \int_a^t dt \int_a^t ({}_a D_t^{-p+2} f(t)) dt \\ &= \int_a^t dt \int_a^t dt \int_a^t ({}_a D_t^{-p+3} f(t)) dt \\ &= \underbrace{\int_a^t dt \int_a^t dt \int_a^t dt \dots \int_a^t f(t) dt}_{p \text{ kere}} \end{aligned} \quad (2.26)$$

bulunur.

$f(t)$ sürekli fonksiyonunun n tamsayı basamaktan (2.4) türevinin ve p katlı (2.21) integralinin

$${}_a D_t^p f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh) \quad (2.27)$$

genel ifadesinin özel durumları olduğunu görüyoruz. Eğer $p = m$ alırsak m . basamaktan türevi ve eğer $p = -m$ alırsak m katlı integrali elde ederiz.

Bu gözlem doğal olarak (2.27) deki p nin keyfi reel veya kompleks sayı olması durumunda diferensiyel ve integral gösteriminin genel düşüncesi hakkında yol göstermektedir. Biz dikkatimizi p nin reel değerli olması durumuna kısıtlayacağız.

2.2.2 Keyfi Basamaktan İntegraller

$p < 0$ olma durumunu düşünelim. Uygunluk için (2.27) de p yerine $-p$ yazarsak

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t-rh) \quad (2.28)$$

sonucuna ulaşırız. Burada h ve n değerleri $nh = t - a$ şeklinde birbirine bağlıdır. (2.28) deki limitin varlığını ispatlamak ve bu limit değerini hesaplayabilmek için aşağıdaki teoreme ihtiyaç duyacağız.

Teorem 2.1 β_k ($k = 1, 2, \dots$) serisini ele alalım ve varsayalım ki,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = 1 \quad (2.29)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{n,k} = 0, \quad \text{her } k \text{ için} \quad (2.30)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k} = A, \quad \text{her } k \text{ için} \quad (2.31)$$

$$\sum_{k=1}^n |\alpha_{n,k}| < K, \quad \text{her } n \text{ için} \quad (2.32)$$

olsun. Bu durumda,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k} \beta_k = A \quad (2.33)$$

dır.

İspat. (2.29) dan

$$\beta_k = 1 - \sigma_k, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k = 0 \quad (2.34)$$

yazabiliriz. (2.30) dan her sabit r için ($1 < r < n$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{r-1} \alpha_{n,k} \beta_k = 0 \quad (2.35)$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{r-1} \alpha_{n,k} = 0 \quad (2.36)$$

diyebiliriz. (2.35), (2.34), (2.31) ve (2.36) yı kullanarak;

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k} \beta_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=r}^n \alpha_{n,k} \beta_k \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{r-1} \alpha_{n,k} \beta_k = 0 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=r}^n \alpha_{n,k} - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=r}^n \alpha_{n,k} \sigma_k \quad (\beta_k = 1 - \sigma_k) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k} - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k} \sigma_k \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{r-1} \alpha_{n,k} = 0 \right) \\ &= A - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k} \sigma_k \end{aligned}$$

elde ederiz. Şimdi (2.35) ve (2.31) yi kullanarak;

$$\begin{aligned}
\left| A - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k} \beta_k \right| &= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k} \sigma_k = 0 \right| \\
&< \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |\alpha_{n,k}| \cdot |\sigma_k| \\
&< \sigma^* \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |\alpha_{n,k}| \\
&= \sigma^* \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |\alpha_{n,k}| \\
&< \sigma^* K
\end{aligned}$$

elde ederiz. Burada, $\sigma^* = \max_{k \geq r} |\sigma_k|$ dır.

(2.34) den her bir keyfi küçük $\varepsilon > 0$ için $\sigma^* < \frac{\varepsilon}{K}$ olacak şekilde mevcuttur ve böylece (limit tanımı $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k = 0$)

$$\left| A - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k} \beta_k \right| < \varepsilon$$

olur. O halde;

$$A - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k} \beta_k = 0$$

dır. Buradan;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k} \beta_k = A$$

olur. Böylece teoremin (2.33) deki ifadesi sağlanmaktadır. ■

Teorem 2.1 basit bir sonuca sahiptir. Eğer

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = B$$

alırsak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k} \beta_k = AB \tag{2.37}$$

olur. Gerçekten teoremden;

$$\tilde{\beta}_k = \frac{\beta_k}{B}, \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\beta}_k = 1$$

bulunur. Teorem 2.1'i uygularsak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k} \tilde{\beta}_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k} \frac{\beta_k}{B} = A$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k} \beta_k = AB$$

olur. Bu da bize (2.37) yi verir.(2.28) deki limiti hesaplamak için Teorem 2.1 uygulanırsa;

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{-p} f(t) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t - rh) \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \frac{1}{r^{p-1}} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} h (rh)^{p-1} f(t - rh) \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^n \frac{\Gamma(p)}{r^{p-1}} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} \left(\frac{t-a}{r} \right) \left(r \frac{t-a}{n} \right)^{p-1} f\left(t - r \frac{t-a}{n}\right) \end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned} \beta_r &= \frac{\Gamma(p)}{r^{p-1}} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} \\ \alpha_{n,r} &= \frac{t-a}{r} \left(r \frac{t-a}{n} \right)^{p-1} f\left(t - r \frac{t-a}{n}\right) \end{aligned}$$

denilirse ve (1.7) yi kullanılırsa

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \beta_r = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(p)}{r^{p-1}} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} = 1 \quad (2.38)$$

elde edilir.

Açık olarak, eğer $f(t)$ fonksiyonu $[a, t]$ kapalı aralığında sürekli ise;

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^n \alpha_{n,r} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^n \frac{t-a}{n} \left(r \frac{t-a}{n} \right)^{p-1} f\left(t - r \frac{t-a}{n}\right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{r=0}^n h (rh)^{p-1} f(t - rh) \\ &= \int_a^t (t - \tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.39)$$

olur. Burada

$$\begin{aligned} t - rh &= \tau \implies -h dr = d\tau \\ r &= 0 \implies \tau = t \\ r &= n \implies \tau = a \\ \left(h = \frac{t-a}{n} \right) & \end{aligned}$$

ile kısmi integrasyon uyguladık. (2.38) ve (2.39) u gözönüne alıp, Teorem 2.1 uygulanırsa;

$${}_aD_t^{-p}f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t-rh) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \quad (2.40)$$

sonucuna varırız.

Eğer $f'(t)$ türevi $[a, b]$ de sürekli ise, (2.40) ı aşağıdaki şekilde yazarız. Kısmi integrasyonla $(f(\tau) = u \implies f'(\tau)d\tau = du; \quad (t-\tau)^{p-1}d\tau = dv \implies v = -\frac{(t-\tau)^p}{p})$;

$$\begin{aligned} {}_aD_t^{-p}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(p)} \left[-f(\tau) \frac{(t-\tau)^p}{p} \Big|_a^t + \int_a^t \frac{(t-\tau)^p}{p} f'(\tau) d\tau \right] \\ {}_aD_t^{-p}f(t) &= \frac{f(a)/(t-a)^p}{\Gamma(p+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t-\tau)^p f'(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.41)$$

elde edilir ve eğer $f(t)$ fonksiyonunun $(m+1)$. basamaktan türevi sürekli ise;

$${}_aD_t^{-p}f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{p+k}}{\Gamma(p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+k+1)} \int_a^t (t-\tau)^{p+m} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \quad (2.42)$$

(2.42) formülü bize ${}_aD_t^{-p}f(t)$ nin $t = a$ daki asimptotiklerini verir.

2.2.3 Keyfi Basamaktan Türev

$p > 0$ durumunu düşünelim. Amacımız aşağıdaki limiti hesaplamak tır:

$$\begin{aligned} {}_aD_t^p f(t) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t-rh) \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(p)}(t) \end{aligned} \quad (2.43)$$

Burada;

$$f_h^{(p)}(t) = h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t-rh) \quad (2.44)$$

şeklindedir.

(2.43) deki limiti hesaplamak için, ilk olarak $f_h^{(p)}(t)$ ifadesini aşağıdaki şekilde dönüştürelim. Binom katsayılarının

$$\begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p-1 \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p-1 \\ r-1 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

formülünü kullanarak;

$$\begin{aligned}
f_h^{(p)}(t) &= h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p-1}{r} f(t-rh) + h^{-p} \sum_{r=1}^n (-1)^r \binom{p-1}{r-1} f(t-rh) \quad (2.46) \\
&= h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p-1}{r} f(t-rh) + h^{-p} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{r+1} \binom{p-1}{r} f(t-(r+1)h) \\
&= h^{-p} (-1)^n \binom{p-1}{n} f(a) + h^{-p} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \binom{p-1}{r} [f(t-rh) - f(t-(r+1)h)] \\
&= (-1)^n \binom{p-1}{n} h^{-p} f(a) + h^{-p} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \binom{p-1}{r} \Delta f(t-rh)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\Delta f(t-rh) = f(t-rh) - f(t-(r+1)h)$$

dır.

Açık olarak; $\Delta f(t-rh)$, $\tau = t-rh$ noktasında $f(\tau)$ fonksiyonunun birinci basamaktan geri farkıdır.

(2.45) deki binom katsayıları özelliğini m kere tekrarlırsak (2.46) dan

$$\begin{aligned}
f_h^{(p)}(t) &= (-1)^n \binom{n-1}{n} h^{-p} f(a) + (-1)^{n-1} \binom{p-2}{n-1} h^{-p} \Delta f(a+h) \\
&\quad + h^{-p} \sum_{r=0}^{n-2} (-1)^r \binom{p-2}{r} \Delta^2 f(t-rh) \\
&= (-1)^n \binom{p-1}{n} h^{-p} f(a) + (-1)^{n-1} \binom{p-2}{n-1} h^{-p} \Delta f(a+h) \\
&\quad + (-1)^{n-2} \binom{p-3}{n-2} h^{-p} \Delta f(a+2h) \\
&\quad + h^{-p} \sum_{r=0}^{n-3} (-1)^r \binom{p-3}{r} \Delta^3 f(t-rh) \quad (2.47)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \dots \\
&= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{p-k-1}{n-k} h^{-p} \Delta^k f(a+kh) \\
&\quad + h^{-p} \sum_{r=0}^{n-m-1} (-1)^r \binom{p-m-1}{r} \Delta^{m+1} f(t-rh) \quad (2.48)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(2.48) deki ilk toplamdaki k . terimin limitini hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh = t-a}} (-1)^{n-k} \binom{p-k-1}{n-k} h^{-p} \Delta^k f(a+kh) \\
&= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh = t-a}} (-1)^{n-k} \binom{p-k-1}{n-k} (n-k)^{p-k} \\
&\quad \times \left(\frac{n}{n-k} \right)^{p-k} (nh)^{-p+k} \frac{\Delta^k f(a+kh)}{h^k} \\
&= (t-a)^{-p+k} \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-k} \binom{p-k-1}{n-k} (n-k)^{p-k} \\
&\quad \times \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-k} \right)^{p-k} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta^k f(a+kh)}{h^k} \\
&= \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} \tag{2.49}
\end{aligned}$$

olur, çünkü (1.7) yi kullanırsak

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-k} \binom{p-k-1}{n-k} (n-k)^{p-k} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-p+k+1)(-p+k+2)\dots(-p+n)}{(n-k)^{-p+k}(n-k)!} = \frac{1}{\Gamma(-p+k+1)}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-k} \right)^{p-k} = 1 \\
& \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta^k f(a+kh)}{h^k} = f^{(k)}(a)
\end{aligned}$$

olmaktadır.

(2.49) daki limitin bilinmesiyle (2.48) deki ilk toplamın limitini kolayca yazabiliriz. (2.48) deki ikinci toplamın limitini hesaplamak için

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \sum_{r=0}^{n-m-1} (-1)^r \Gamma(-p+m+1) \binom{p-m-1}{r} r^{-m+p} \\
& \times h(rh)^{m-p} \frac{\Delta^{m+1} f(t-rh)}{h^{m+1}} \tag{2.50}
\end{aligned}$$

formunda yazalım. Teorem 2.1'i uygulamak için;

$$\begin{aligned}
\beta_r &= (-1)^r \Gamma(-p+m+1) \binom{p-m-1}{r} r^{-m+p} \\
\alpha_{n,r} &= h(rh)^{m-p} \frac{\Delta^{m+1} f(t-rh)}{h^{m+1}} \quad \left(h = \frac{t-a}{r} \right)
\end{aligned}$$

olarak alalım.

(1.7) yi kullanarak;

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \beta_r = \lim_{r \rightarrow \infty} (-1)^r \Gamma(-p+m+1) \binom{p-m-1}{r} r^{-m+p} = 1 \tag{2.51}$$

olduğunu doğrularız. Buna ek olarak eğer $m - p > -1$ ise

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^{n-m-1} \alpha_{n,r} &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} \sum_{r=0}^{n-m-1} h(rh)^{m-p} \frac{\Delta^{m+1} f(t-rh)}{h^{m+1}} \quad (t-rh=\tau) \\ &= \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.52)$$

dur. (2.51) ve (2.52) ü gözönüne alıp, Teorem 2.1 uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^{n-m-1} (-1)^r \binom{p-m-r}{r} \Delta^{m+1} f(t-rh) \\ = \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.53)$$

elde edilir.

(2.49) ve (2.50) ü kullanarak, sonuç olarak (2.43) limitini elde ederiz:

$$\begin{aligned} {}_a D_t^p f(t) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(p)}(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.54)$$

(2.54) formülü $f^{(k)}(t)$, $(k=1, 2, \dots, m+1)$ türevlerinin kapalı $[a, t]$ aralığında sürekli olması varsayımı altında, ve m lerin $m > p-1$ i sağlayan tamsayı olması koşulunda elde edildi. m ler için en küçük olası değer $m < p < m+1$ eşitsizliği ile belirlenir.

2.2.4 $(t-a)^\beta$ nm Kesirli Türevi

Şimdi v reel sayı olmak üzere

$$f(t) = (t-a)^v$$

kuvvet fonksiyonunun Grünwald-Letnikov kesirli türevini, yani ${}_a D_t^p f(t)$ yı hesaplayalım.

İlk olarak p nin negatif değerlerini ele alalım ki bu $-p$ basamaktan kesirli integralin hesaplanması anlamına geliyor. (2.40) daki formülü kullanarak

$${}_a D_t^p (t-a)^v = \frac{1}{\Gamma(-p)} \int_a^t (t-\tau)^{-p-1} (\tau-a)^v d\tau \quad (2.55)$$

elde edilir. İntegralin yakınsaklığı için $v > -1$ olarak alalım. (2.55) de $\tau = a + \xi(t-a)$ yerine koyulursa ve beta fonksiyonunun (1.20) deki tanımını kullanırsak;

$$\frac{\tau-a}{t-a} = \xi \implies \tau = a + \xi(t-a) \implies d\tau = (t-a)d\xi$$

$$\begin{aligned}\tau &= a \implies \xi = 0 \\ \tau &= t \implies \xi = 1\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}{}_aD_t^p(t-a)^v &= \frac{1}{\Gamma(-p)} \int_0^1 (t-a)(t-a-\xi(t-a))^{-p-1} (a+\xi(t-a)-a)^v d\xi \\ &= \frac{1}{\Gamma(-p)} \int_0^1 (t-a)(t-a)^{-p-1} (1-\xi)^{-p-1} \xi^v (t-a)^v d\xi \\ &= \frac{1}{\Gamma(-p)} (t-a)^{v-p} \int_0^1 (1-\xi)^{-p-1} \xi^v d\xi \\ &= \frac{1}{\Gamma(-p)} B(-p, v+1) (t-a)^{v-p} \\ &= \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-p+1)} (t-a)^{v-p} \quad (p < 0, v > -1)\end{aligned}\tag{2.56}$$

elde edilir.

Şimdi $0 \leq m \leq p < m+1$ olma durumunu ele alalım. (2.54) formülünü uygulayabilmek için, (2.54) deki integralin yakınsaklığı için $v > m$ olması gerekmektedir. Buradan

$${}_aD_t^p(t-a)^v = \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} \frac{d^{m+1}(\tau-a)^v}{d\tau^{m+1}} d\tau\tag{2.57}$$

bulunur. Çünkü integral olmayan bütün toplamlar sıfıra eşit olmaktadır.

$$\frac{d^{m+1}(\tau-a)^v}{d\tau^{m+1}} = v(v-1)\dots(v-m)(\tau-a)^{v-m-1} = \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-m)} (\tau-a)^{v-m-1}$$

olduğu göz önüne alınırsa ve $\tau = a + \xi(t-a)$ değişken değiştirmesi yapılırsa;

$$\begin{aligned}{}_aD_t^r(t-a)^v &= \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-m)\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} (\tau-a)^{v-m-1} d\tau \\ &= \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-m)\Gamma(-p+m+1)} (t-a)^{v-p} \int_0^1 (1-\xi)^{m-p} \xi^{v-m-1} d\xi \\ &= \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-m)\Gamma(-p+m+1)} B(-p+m+1, v-m) (t-a)^{v-p} \\ &= \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(-p+m+1)} (t-a)^{v-p}\end{aligned}\tag{2.58}$$

elde edilir. (2.58) deki ifade ile (2.56) daki ifade resmen birbiriyle aynıdır. Böylece $f(t) = (t-a)^v$ kuvvet fonksiyonunun Grünwald-Letnikov kesirli türevinin aşağıdaki formülle verildiğini elde ederiz:

$${}_aD_t^p(t-a)^v = \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(-p+v+1)}(t-a)^{v-p} \quad (2.59)$$

$$(p < 0, v > -1) \text{ veya } (0 \leq m \leq p < m+1, v > m)$$

Teorik açıdan, fonksiyonların kesirli türevinin Grünwald-Letnikov tanımını göz önüne alarak sınıflandırması çok kısıtlıdır ($(m+1)$ kez sürekli türevlenebilen fonksiyonlar gereklidir). Ancak uygulama problemlerinde fiziksel, kimyasal ve diğer yöntemleri tanımlamada bu tür düzgün fonksiyonlarla her zaman karşılaşmamaktadır.

2.2.5 Tamsayı Basamaktan Türevler ile Birleştirme

(2.54) deki formülde m için sadece bir kısıtlama mevcuttur, yani $m > p-1$ durumu. Şimdi m yerine s olarak (2.54) ü tekrar yazarsak

$${}_aD_t^p f(t) = \sum_{k=0}^s \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+s+1)} \int_a^t (t-\tau)^{s-p} f^{(s+1)}(\tau) d\tau \quad (2.60)$$

elde ederiz. Burada $m < p < m+1$ olduğunu varsayıyoruz. (2.60) daki formülde kesirli basamaktan p nin kesirli türevinin n tamsayı basamaktan türevini hesaplayalım. Burada $s \geq m+n-1$ olarak alırız. Sonuç olarak;

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n}({}_aD_t^p f(t)) &= \sum_{k=0}^s \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p-n+k}}{\Gamma(-p-n+k+1)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(-p-n+s+1)} \int_a^t (t-\tau)^{s-p-n} f^{(s+1)}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.61)$$

$$= {}_aD_t^{p+n} f(t) \quad (2.62)$$

olur.

$s \geq m+n-1$ keyfi olduğundan $s = m+n-1$ alırsak,

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n}({}_aD_t^p f(t)) &= {}_aD_t^{p+n} f(t) \\ &= \sum_{k=0}^{m+n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p-n+k}}{\Gamma(-p-n+k+1)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f^{(m+n)}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.63)$$

elde edilir.

Şimdi tamsayı basamaktan türev $\frac{d^n f(t)}{dt^n}$ nin p basamaktan kesirli türevini

hesaplamak için (2.60) formülünü kullanırsak;

$$\begin{aligned} {}_aD_t^p \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) &= \sum_{k=0}^s \frac{f^{(n+k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(-p+s+1)} \int_a^b (t-\tau)^{s-p} f^{(n+s+1)}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.64)$$

elde ederiz. $s = m - 1$ yazılırsa

$$\begin{aligned} {}_aD_t^p \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(n+k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} \\ &+ \int_a^t (t-\delta)^{m-p-1} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.65)$$

ve (2.63) ile (2.65) karşılaştırıldığında

$$\frac{d^n}{dt^n} ({}_aD_t^p f(t)) = {}_aD_t^p \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p-n+k}}{\Gamma(-p-n+k+1)} \quad (2.66)$$

sonucuna varırız.

(2.66) daki ilişki bize $\frac{d^n}{dt^n}$ ve ${}_aD_t^p$ işlemlerinin yer değiştirebilen işlemler olduğunu gösteriyor, yani

$$\frac{d^n}{dt^n} ({}_aD_t^p f(t)) = {}_aD_t^p \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = {}_aD_t^{p+n} f(t) \quad (2.67)$$

dir, eğer sadece kesirli diferensiyelin alt terminal noktası $t = a$ da

$$f^{(k)}(a) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (2.68)$$

oluyorsa. Kısaca, sadece $t = a$, $f^{(k)}(a) = 0$ ise ${}_aD_t^p$ ve $\frac{d^n}{dt^n}$ yer değişimlidir.

2.2.6 Kesirli Türevler İle Birleştirilmesi

Şimdi p . basamaktan kesirli türevin, q . basamaktan kesirli türevini göz önüne alalım.

$${}_aD_t^p ({}_aD_t^q f(t))$$

Burada iki durum ayrı ayrı gözönüne alınabilir: $p < 0$ ve $p > 0$ olma durumu.

İlk durum; (q nun işaretine bağlı olarak) $q > 0$ basamaktan diferensiyelin veya $-q > 0$ basamaktan integralin $-p > 0$ basamaktan kesirli integrale uygulanması anlamına gelmektedir.

İkinci durum; dış işlemin $p > 0$ basamaktan kesirli türeve uygulanması anlamına gelmektedir.

Her iki durumda da tamsayı basamaktan diferensiyelin bilinen özelliğine benzer durum elde edeceğiz.

$$\frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{d^m f(t)}{dt^m} \right) = \frac{d^m}{dt^m} \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = \frac{d^{m+n} f(t)}{dt^{m+n}}$$

DURUM 1: $p < 0$.

$q < 0$ alalım.

$$\begin{aligned} {}_a D_t^q ({}_a D_t^q f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_a^t (t-\tau)^{-q-1} ({}_a D_t^q f(\tau)) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(-q)\Gamma(-p)} \int_a^t (t-\tau)^{-q-1} d\tau \int_a^t (\tau-\xi)^{-p-1} f(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{\Gamma(-q)\Gamma(-p)} \int_a^t f(\xi) d\xi \int_\xi^t (t-\tau)^{-q-1} (\tau-\xi)^{-p-1} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(-p-q)} \int_a^t (t-\xi)^{-p-q-1} f(\xi) d\xi \\ &= {}_a D_t^{p+q} f(t) \end{aligned} \tag{2.69}$$

elde edilir. Burada;

$$\int_\xi^t (t-\tau)^{-q-1} (\tau-\xi)^{-p-1} d\tau$$

integralini hesaplayalım.

$$\tau = \xi + z(t-\xi)$$

değişken değiştirilmesi yapılırsa ve (1.20) deki beta fonksiyonunun tanımı kullanılırsa;

$$\frac{\tau-\xi}{t-\xi} = z \quad , \quad d\tau = (t-\xi)dz$$

$$\begin{aligned} \int_\xi^t (t-\tau)^{-q-1} (\tau-\xi)^{-p-1} d\tau &= \int_0^1 (t-\xi)(t-\xi)^{-q-1} (1-z)^{-q-1} z^{-p-1} (t-\xi)^{-p-1} dz \\ &= \int_0^1 (t-\xi)^{-q-p-1} (1-z)^{-q-1} z^{-p-1} dz \\ &= (t-\xi)^{-p-q-1} B(-q, -p) \\ &= (t-\xi)^{-p-q-1} \frac{\Gamma(-q)\Gamma(-p)}{\Gamma(-q-p)} \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi varsayalım ki $0 < n < q < n + 1$ olsun. $q - n - 1 < 0$ olduğu yerlerde $q = (n+1) + (q-n-1)$ olarak belirtelim ve (2.62) ve (2.69) daki formülü kullanırsak;

$$\begin{aligned}
{}_aD_t^q({}_aD_t^p f(t)) &= \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \left\{ {}_aD_t^{q-n-1}({}_aD_t^p f(t)) \right\} \\
&= \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \left\{ {}_aD_t^{p+q-n-1} f(t) \right\} \quad \rightarrow (2.69) \text{ dan} \\
&= {}_aD_t^{p+q} f(t)
\end{aligned} \tag{2.70}$$

elde edilir

(2.69) ve (2.70)'i beraber düşünürsek, $p < 0$ değerleri ve herbir reel q için

$${}_aD_t^q({}_aD_t^p f(t)) = {}_aD_t^{p+q} f(t)$$

sonucuna ulaşılır.

DURUM 2: $p > 0$.

Şimdi $0 \leq m < p < m + 1$ olduğunu varsayalım. (2.54) deki formülden;

$$\begin{aligned}
{}_aD_t^p f(t) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(p)}(t) \\
&= \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \\
&\quad \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau
\end{aligned} \tag{2.71}$$

elde edilir.

Şimdi $q < 0$ alıp ${}_aD_t^q({}_aD_t^p f(t))$ yi hesaplayalım.

(2.71) in sağ tarafını incelersek görürüz ki $(t-a)^{-p+k}$ fonksiyonları $k = 0, 1, \dots, m-1$ için singülerliğe sahiplerdir. Bu yüzden; ${}_aD_t^p f(t)$ nin q reel basamaktan türevi yalnızca;

$$f^{(k)}(a) = 0 \quad , (k = 0, 1, \dots, m-1) \tag{2.72}$$

durumunda mevcuttur.

(2.71) in sağ tarafındaki integral ${}_aD_t^{p-m-1} f(t)$ ye eşit ($f(t)$ fonksiyonunun $-p+m+1$ basamaktan kesirli integraline eşit). Böylece (2.72) koşulları altında $f(t)$ nın p . basamaktan türevinin (2.71) deki gösterimi

$${}_aD_t^p f(t) = \frac{f^{(m)}(a)(t-a)^{-p+m}}{\Gamma(-p+m+1)} + {}_aD_t^{p-m-1} f^{(m+1)}(t) \tag{2.73}$$

Şimdi (2.73) de verilen p . basamaktan türevin $q < 0$ basamaktan türevini (diğer bir deyişle $-q > 0$ basamaktan integralini) bulmalıyız.

$${}_aD_t^q({}_aD_t^p f(t)) = \frac{f^{(m)}(a)(t-a)^{-p+m}}{\Gamma(-p-q+m+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p-q+m+1)} \int_a^t \frac{f^{(m+1)}(\tau)}{(t-\tau)^{p+q-m}} d\tau \tag{2.74}$$

Çünkü;

$$\begin{aligned} {}_aD_t^q({}_aD_t^{p-m-1}f^{(m+1)}(t)) &= {}_aD_t^{p+q-m-1}f^{(m+1)}(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(-p-q+m+1)} \int_a^t \frac{f^{(m+1)}(\tau)}{(t-\tau)^{p+q-m}} \end{aligned}$$

şeklindedir. (2.72) deki koşulları ve (2.71) formülünü göz önüne alırsak

$${}_aD_t^q({}_aD_t^p f(t)) = {}_aD_t^{p+q} f(t) \quad (2.75)$$

sonucuna varırız.

Şimdi $0 \leq n < q < n+1$ olsun. Varsayalım ki $f(t)$, (2.72) koşullarını sağlasın ve $q-n-1 < 0$ olma durumunu dikkate alalım. Böylece, (2.75) formülü kullanılırsa;

$$\begin{aligned} {}_aD_t^q({}_aD_t^p f(t)) &= \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \{ {}_aD_t^{q-n-1}({}_aD_t^p f(t)) \} \\ &= \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \{ {}_aD_t^{p+q-n-1} f(t) \} \rightarrow (2.75) \text{ den} \\ &= {}_aD_t^{p+q} f(t) \rightarrow (2.62) \text{ dan} \end{aligned} \quad (2.76)$$

elde edilir ki bu da (2.75) ile aynıdır.

Böylece $p < 0$ ise (2.75) deki tüm keyfi reel q lar için sağlandığı sonucuna varırız. Eğer $0 \leq m < p < m+1$ ise (2.75) deki ilişki tüm keyfi reel q lar için sağlandığı sonucuna $f(t)$ nın (2.72) deki koşulları sağlaması durumunda varırız.

Bundan başka, eğer

$$0 \leq m < p < m+1 \text{ ve } 0 \leq n < q < n+1$$

ve $f(t)$ fonksiyonu,

$$f^{(k)}(a) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, r-1) \quad (2.77)$$

koşulunu $r = \max(n, m)$ olmak üzere sağlıyorsa, ${}_aD_t^p$ ve ${}_aD_t^q$ kesirli diferensiyel operatörleri yer değiştirilebilirdir:

$${}_aD_t^q({}_aD_t^p f(t)) = {}_aD_t^p({}_aD_t^q f(t)) = {}_aD_t^{p+q} f(t) \quad (2.78)$$

2.3 Riemann-Liouville Kesirli Türevi:

Kesirli basamaktan geri farkın limiti olarak tanımlanan Grünwald-Letnikov kesirli türevinin el ile işletilmesi kullanışlı değildir. Elde edilen (2.54) ifadesi, (2.54) deki integralin varlığından dolayı daha iyi görünmektedir. Ancak integral olmayan terim için ne yapmalıyız? sorusunun cevabı basittir. Belli bir integral diferensiyel ifadesi olarak (2.54) ü göz önüne alırsak

$${}_aD_t^p f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^{m+1} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f(\tau) d\tau \quad (m \leq p < m+1) \quad (2.79)$$

olur.

(2.79) daki ifadesi, kesirli türevin en yaygın olarak bilinen tanımıdır ve bu ifadeye Riemann-Liouville tanımı adı verilir.

Açık olarak $f(t)$ nin $m + 1$ kere sürekli diferensiyellenebilir fonksiyon olması varsayımı altında Grünwald-Letnikov kesirli türevinden elde edilen (2.54) deki ifade, *aynı varsayım altında* (2.79) daki ifadeden de elde edilebilir. Bu bize tekrarlanan kısmi integrasyon ve diferensiyele;

$$\begin{aligned} f(\tau) = u & \Rightarrow f'(\tau)d\tau = du \\ (t - \tau)^{m-p}d\tau = dv & \Rightarrow -\frac{(t-\tau)^{m-p+1}}{(m-p+1)} = v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_aD_t^p f(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^{m+1} \int_a^t (t - \tau)^{m-p} f(\tau) d\tau \\ &= \left(\frac{d}{dt}\right)^{m+1} \left[-f(\tau) \frac{(t - \tau)^{-m+p+1}}{m - p + 1} \Big|_{\tau=a}^{\tau=t} + \int_a^t \frac{(t - \tau)^{m-p+1}}{(m - p + 1)} f'(\tau) d\tau \right] \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t - a)^{p+k}}{\Gamma(-p + k + 1)} + \frac{1}{\Gamma(-p + m + 1)} \int_a^t (t - \tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \\ &= {}_aD_t^p f(t) \quad , (m \leq p < m + 1) \end{aligned} \quad (2.80)$$

eşitliğini verir.

Böylece eğer $f(t)$ fonksiyonunu $(m + 1)$ kere sürekli türevlere sahip olacak şekilde göz önüne alırsak, $t \geq 0$ için Grünwald-Letnikov tanımı (2.43), Riemann-Liouville tanımı (2.79) dakine eşit olur.

Pür matematik açısından bu tür fonksiyonlar çok kısıtlıdır. Ancak, bu tip fonksiyonlar uygulamalar için çok önemlidir. Çünkü; dinamik sürecin büyük çoğunluğunun karakteri yeterince pürüzsüzdür ve süreksizliğe izin vermez. Bu gerçeği anlamak uygulamalarda kesirli analizin metotlarının düzgün kullanımı için önemlidir. Özellikle, (2.79) da ki Riemann-Liouville tanımı, $f(t)$ fonksiyonuna zayıf koşullarda önemli fırsat sağladığı için, yani $f(t)$ nin $t > a$ için integralinin varolması ve $(m + 1)$ kere diferensiyellenebilmesi için $f(t)$ nin integralini elde etmek yeterlidir. (2.79) daki $f(t)$ fonksiyonunun zayıf koşulları gereklidir. Örneğin; Abel integral denkleminin çözümlerini elde etmek için bu zayıf koşullar kullanılır.

Şimdi (2.79) da ki Riemann-Liouville tanımının nasıl, tamsayı basamaktan integralin ve diferensiyel kavramlarının birleştirilmesi sonucu olarak elde edildiğini inceleyelim.

2.3.1 Tamsayı Basamaktan Türevlerinin ve İntegrallerin Birleştirilmesi:

Varsayalım ki $f(\tau)$ fonksiyonu sürekli ve her sınırlı (a, t) aralığında integrallenebilir olsun. $f(t)$ fonksiyonu $\tau = a$ noktasında $r < 1$ basamaktan singülerliğe sahip olsun.

$$\lim_{\tau \rightarrow a} (\tau - a)^r f(t) = \text{sabit} (\neq 0)$$

ve integral

$$f^{(-1)}(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau \quad (2.81)$$

şeklinde mevcuttur ve sınırlı değere sahiptir. Öyle ki; $t \rightarrow a$ için sıfıra eşittir. Aslında $\tau = a + y(t - a)$ değişken değiştirmesi yaparsak ve $\varepsilon = t - a$ olarak gösterirsek;

$$\begin{aligned} \tau = a + y(t - a) &\implies \frac{\tau - a}{t - a} = y \\ \tau = a &\implies y = 0 \\ \tau = t &\implies y = 1 \implies d\tau = (t - a)dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow a} f^{(-1)}(t) &= \lim_{t \rightarrow a} \int_a^t f(\tau) d\tau \\ &= \lim_{t \rightarrow a} (t - a) \int_0^1 f(a + y(t - a)) dy \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{1-r} \int_0^1 (\varepsilon y)^r f(a + y(t - a)) y^{-r} dy = 0 \end{aligned} \quad (2.82)$$

elde edilir. Çünkü $r < 1$ dir. Böylece iki kat integrali gözönüne alırsak;

$$\begin{aligned} f^{(-2)}(t) &= \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} f(\tau) d\tau = \int_a^t f(\tau) d\tau \int_{\tau}^t d\tau_1 \\ &= \int_a^t (t - \tau) f(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.83)$$

elde edilir ve (2.83)deki birleşme $f(\tau)$ nun üç katlı integralini verir.

$$\begin{aligned} f^{(-3)}(t) &= \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} d\tau_2 \int_a^{\tau_2} f(\tau_3) d\tau_3 \\ &= \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} f(\tau) d\tau \int_{\tau}^{\tau_1} d\tau_2 \\ &= \int_a^t f(\tau) d\tau \int_{\tau}^t (\tau_1 - \tau) d\tau_1 \\ &= \int_a^t f(\tau) d\tau \left[\frac{(\tau_1 - \tau)^2}{2} \Big|_{\tau}^t \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_a^t (t - \tau)^2 f(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.84)$$

ve tümevarımla genel olarak Cauchy formülü elde edilir.

$$f^{(-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \quad (2.85)$$

Şimdi varsayalım ki $n \geq 1$ sabit ve tamsayı $k \geq 0$ alalım. Açık olarak;

$$f^{(-k-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} D^{-k} \int_a^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \quad (2.86)$$

elde ederiz ve buradaki D^{-k} sembolü ($k \geq 0$) k kez tekrarlanan integrasyonu göstermektedir.

Diğer yandan $n \geq 1$ sabitleri için ve tamsayı $k \geq n$ için $(k - n)$. basamaktan $f(t)$ fonksiyonunun türevi;

$$f^{(k-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} D^k \int_a^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \quad (2.87)$$

olarak yazılabilir ve buradaki D^k sembolü ($k \geq 0$) k kez tekrarlanan diferensiyeli göstermektedir.

Buradan görülüyor ki, (2.86) ve (2.87) formülleri biri diğerinin özel bir durumu olarak göz önüne alınabilir. Öyle ki; (2.87) de $n(n \geq 1)$ sabittir ve D^k sembolü eğer $k \leq 0$ ise k kez integrasyon ve eğer $k \geq 0$ ise k kez diferensiyel anlamına gelmektedir. Eğer; $k = n - 1, n - 2, \dots$ ise (2.87) formülü $f(t)$ nin tekrarlanan integrallerini, eğer $k = n$ ise $f(t)$ fonksiyonunu, $k = n + 1, n + 2, n + 3, \dots$ ise $f(t)$ fonksiyonunun $k - n = 1, 2, 3, \dots$ inci basamaktan türevlerini vermektedir.

2.3.2 Keyfi Basamaktan İntegraller:

n katlı integrasyon kavramını, n nin tamsayı olmayan değerleri için genişletmek için; (2.85) de ki Cauchy formülü ile başlamalıyız ve bu formüldeki tamsayı n yerine reel $p > 0$ yazmalıyız.

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t - \tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \quad (2.88)$$

(2.85) deki n tamsayısı, $n \geq 1$ olma durumunda ele alınmalı, bunun karşılığı olarak p için koşul daha zayıftır. Yani (2.88) deki integralin varolabilmesi için $p > 0$ olarak almalıyız.

Ayrıca kesin makul varsayımlar altında;

$$\lim_{p \rightarrow 0} {}_a D_t^{-p} f(t) = f(t) \quad (2.89)$$

olur. Böylece;

$${}_aD_t^0 f(t) = f(t) \quad (2.90)$$

bulunur.

(2.89) daki ilişkinin ispatı, eğer $f(t)$, $t \geq 0$ için sürekli türevlere sahipse çok kolaydır. Bu durumda kısmi integrasyon ve (1.3) ün kullanılmasıyla;

$$\begin{aligned} (t - \tau)^{p-1} d\tau &= dv, & f(\tau) &= u \\ -\frac{(t-\tau)^p}{p} &= v, & f'(\tau) d\tau &= du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_aD_t^{-p} f(t) &= -\frac{1}{\Gamma(p+1)} (t - \tau)^p f(\tau) \Big|_a^t + \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t - \tau)^p f'(\tau) d\tau \\ {}_aD_t^{-p} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(p+1)} (t - a)^p f(a) + \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t - \tau)^p f'(\tau) d\tau \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece

$$\lim_{p \rightarrow 0} {}_aD_t^{-p} f(t) = f(a) + \int_a^t f'(\tau) d\tau = f(a) + (f(t) - f(a)) = f(t)$$

sonucunu elde ederiz.

Eğer $f(t)$ sadece $t \geq a$ için sürekli ise (2.89) un ispatı biraz daha uzundur. Bu durumda ${}_aD_t^{-p} f(t)$ ifadesini

$$\begin{aligned} {}_aD_t^{-p} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t - \tau)^{p-1} (f(\tau) - f(t)) d\tau + \frac{f(t)}{\Gamma(p)} \int_a^t (t - \tau)^{p-1} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^{t-\tau} (t - \tau)^{p-1} (f(\tau) - f(t)) d\tau \end{aligned} \quad (2.91)$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(p)} \int_{t-\tau}^t (t - \tau)^{p-1} (f(\tau) - f(t)) d\tau \quad (2.92)$$

$$+ \frac{f(t)(t - a)^p}{\Gamma(p+1)} \quad (2.93)$$

formunda yazabiliriz.

(2.92) deki integrali gözönüne alalım. $f(t)$ sürekli olduğu için her $\delta > 0$ için $\varepsilon > 0$ vardır, öyle ki;

$$|f(\tau) - f(t)| < \varepsilon$$

dur. Sonra (2.92) deki integralin ardından gelecek tahmin

$$|I_2| < \frac{\varepsilon}{\Gamma(p)} \int_{t-\delta}^t (t - \tau)^{p-1} d\tau < \frac{\varepsilon \delta^p}{\Gamma(p+1)} \quad (2.94)$$

ve $\delta \rightarrow 0$ iken $\varepsilon \rightarrow 0$ olma durumunu gözönüne alırsak;

tüm $p \geq 0$ için

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} |I_2| = 0 \quad (2.95)$$

elde ederiz.

Şimdi keyfi bir $\varepsilon > 0$ alalım ve δ seçelim.

$$|I_2| < \varepsilon \quad (2.96)$$

tüm $p \geq 0$ lar için geçerlidir. Bu sabit δ lar için (2.91) in integralini takip eden tahmini elde ederiz.

$$|I_1| < \frac{M}{\Gamma(p)} \int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{p-1} d\tau \leq \frac{M}{\Gamma(p+1)} (\delta^p - (t-a)^p) \quad (2.97)$$

$\delta > 0$ sabitleri için

$$\lim_{p \rightarrow 0} |I_1| = 0 \quad (2.98)$$

elde edilir. Aşağıdaki eşitsizliği

$$|{}_a D_t^{-p} f(t) - f(t)| \leq |I_1| + |I_2| + |f(t)| \cdot \left| \frac{(t-a)^p}{\Gamma(p+1)} - 1 \right|$$

gözönüne alalım.

Ayrıca (2.95) limitini ve (2.96) tahminini hesaba katarsak;

$$\limsup_{p \rightarrow 0} |{}_a D_t^{-p} f(t) - f(t)| \leq \varepsilon$$

elde ederiz. Burada ε istenildiği kadar küçük seçilebilir.

Böylece;

$$\limsup_{p \rightarrow 0} |{}_a D_t^{-p} f(t) - f(t)| = 0$$

olur.

Eğer $f(t)$, $t \geq a$ lar için sürekli ise (2.89) geçerli olur.

Eğer $f(t)$, $t \geq a$ lar için sürekli ise (2.88) tarafından tanımlanan keyfi reel basamaktan integrasyon önemli bir özelliğe sahiptir.

$${}_a D_t^{-p} ({}_a D_t^{-q} f(t)) = {}_a D_t^{-p-q} f(t) \quad (2.99)$$

Gerçekten;

$$\begin{aligned}
{}_a D_t^{-p}({}_a D_t^{-q} f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(q)} \int_a^t (t-\tau)^{q-1} D_\tau^{-p} f(\tau) d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_a^t (t-\tau)^{q-1} d\tau \int_a^\tau (\tau-\xi)^{p-1} f(\xi) d\xi \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_a^t f(\xi) d\xi \int_\xi^t (t-\tau)^{q-1} (\tau-\xi)^{p-1} d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_a^t (t-\xi)^{p+q-1} f(\xi) d\xi \\
&= {}_a D_t^{-p-q} f(t)
\end{aligned}$$

ξ dan t ye olan integralin hesabı için $\tau = \xi + \zeta(t - \xi)$ değişken değiştirmesini kullanırız. Bu da bizi beta fonksiyonuna götürür.

$$\frac{\tau - \xi}{t - \xi} = \zeta \implies d\tau = (t - \xi) d\zeta$$

$$\tau = \xi \implies \zeta = 0$$

$$\tau = t \implies \zeta = 1$$

$$\begin{aligned}
\int_\xi^t (t-\tau)^{q-1} (\tau-\xi)^{p-1} d\tau &= (t-\xi) \int_0^1 (t-\xi)^{q-1} (1-\zeta)^{q-1} (t-\xi)^{p-1} \zeta^{p-1} d\zeta \\
&= (t-\xi)^{p+q-1} \int_0^1 \zeta^{p-1} (1-\zeta)^{q-1} d\zeta \\
&= (t-\xi)^{p+q-1} B(p, q) \\
&= (t-\xi)^{p+q-1} \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Açıkça p ve q yer değiştirebilir. Yani;

$${}_a D_t^{-p}({}_a D_t^{-q} f(t)) = {}_a D_t^{-q}({}_a D_t^{-p} f(t)) = {}_a D_t^{-p-q} f(t) \quad (2.100)$$

elde ederiz.

(2.100) deki kural, tamsayı basamaktan türevlerin bilinen özelliği ile benzerdir:

$$\frac{d^m}{dt^m} \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{d^m f(t)}{dt^m} \right) = \frac{d^{m+n} f(t)}{dt^{m+n}} \quad (2.101)$$

2.3.3 Keyfi Basamaktan Türevler

$(k - n)$ tamsayı basamaktan türevler için olan (2.87) gösterimi tamsayı olmayan basamaktan diferensiyel kavramına genişletmek için fırsat sağlar öyle ki, k tamsayısı ve n tamsayısı yerine reel α olarak $k - \alpha > 0$ basamaktan diferensiyel elde ederiz. Bu bize;

$${}_aD_t^{k-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (0 < \alpha \leq 1) \quad (2.102)$$

verir. Burada sadece kısıtlama α içindir ve bu $\alpha > 0$ kısıtlamasıdır. Bu da (2.102) deki integralin yakınsaklığı için gereklidir. Ancak, bu kısıtlama yerine genelliği bozmadan daha kısıtlı. $0 < \alpha \leq 1$ durumu alınabilir. Bu durum (2.102) deki tanım ve keyfi reel basamaktan integrallerin (2.100) deki özelliği yardımıyla kolayca gösterilebilir.

$p = k - \alpha$ ile gösterilirse (2.102) yi

$${}_aD_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t - \tau)^{k-p-1} f(\tau) d\tau, \quad (k-1 \leq p < k) \quad (2.103)$$

veya

$${}_aD_t^p f(t) = \frac{d^k}{dt^k} ({}_aD_t^{-(k+p)} f(t)), \quad (k-1 \leq p < k) \quad (2.104)$$

şeklinde yazabiliriz.

Eğer $p = k - 1$ ise, $(k - 1)$ inci basamaktan bilinen tamsayı basamaktan türev elde ederiz.

$$\begin{aligned} {}_aD_t^{k-1} f(t) &= \frac{d^k}{dt^k} ({}_aD_t^{-(k-(k-1))} f(t)) \\ &= \frac{d^k}{dt^k} ({}_aD_t^{-1} f(t)) = f^{(k-1)}(t) \end{aligned}$$

Ayrıca (2.100) ü kullanınca $p = k \geq 1$ ve $t > a$ için

$${}_aD_t^p f(t) = \frac{d^k}{dt^k} ({}_aD_t^0 f(t)) = \frac{d^k f(t)}{dt^k} = f^{(k)}(t) \quad (2.105)$$

olduğunu görürüz. Bu da $t > a$ için $p = k > 1$ basamaktan Riemann-Liouville kesirli türevi (2.103), bilinen k . basamaktan türeve denk gelmektedir.

Şimdi Riemann-Liouville kesirli türevinin bazı özelliklerini göz önüne alalım. İlk olarak belki de en önemlisi olarak, Riemann-Liouville kesirli türevinin $p > 0$ ve $t > a$ için özelliği;

$${}_aD_t^p ({}_aD_t^{-p} f(t)) = f(t) \quad (2.106)$$

olur ki bu da Riemann-Liouville kesirli diferansiyel operatörün aynı p . basamaktan Riemann-Liouville kesirli integral operatörünün sol tersi anlamına gelmektedir.

(2.106) daki özelliği ispatlamak için, şimdi $p = n \geq 1$ tamsayı olma durumunu göz önüne alalım.

$$\begin{aligned}
{}_a D_t^n ({}_a D_t^{-n} f(t)) &= \frac{d^n}{dt^n} \cdot \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \\
&= \frac{d}{dt} \int_a^t f(\tau) d\tau = f(t)
\end{aligned}$$

Şimdi $k-1 \leq p < k$ alalım ve Riemann-Liouville kesirli integrali için (2.100) deki birleşme kuralını kullanalım.

$${}_a D_t^{-k} f(t) = {}_a D_t^{-(k-p)} ({}_a D_t^p f(t)) \quad (2.107)$$

ve bu yüzden

$$\begin{aligned}
{}_a D_t^p ({}_a D_t^{-p} f(t)) &= \frac{d^k}{dt^k} ({}_a D_t^{-(k-p)} ({}_a D_t^{-p} f(t))) \\
&= \frac{d^k}{dt^k} \{ {}_a D_t^{-k} f(t) \} = f(t)
\end{aligned}$$

olur ki bu da (2.106) özelliğinin ispatını tamamlar.

Bilinen tamsayı basamaktan diferensiyel ve integrasyon ile, kesirli diferensiyel ve integrasyon değiştirilemez.

$f(t)$ fonksiyonunun kesirli türevi ${}_a D_t^p f(t)$ ($k-1 \leq p < k$) birleştirilirse

$${}_a D_t^{-p} ({}_a D_t^p f(t)) = f(t) - \sum_{j=1}^k [{}_a D_t^{p-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(p-j+1)} \quad (2.108)$$

elde edilir. Gerçekten;

$$\begin{aligned}
{}_a D_t^{-p} ({}_a D_t^p f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} {}_a D_\tau^p f(\tau) d\tau \\
&= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t-\tau) {}_a D_\tau^p f(\tau) d\tau \right\} \quad (2.109)
\end{aligned}$$

Diğer taraftan tekrarlı kısmi integrasyon ile (2.100) ü kullanarak;

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t-\tau)^p {}_a D_\tau^p f(\tau) d\tau &= \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t-\tau)^p \frac{d^k}{d\tau^k} \{ {}_a D_\tau^{-(k-p)} f(\tau) \} d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(p-k+1)} \int_a^t (t-\tau)^{p-k} \{ {}_a D_\tau^{-(k-p)} f(\tau) \} d\tau \\
&\quad - \sum_{j=1}^k \left[\frac{d^{k-j}}{dt^{k-j}} ({}_a D_t^{-(k-p)} f(t)) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-j+1}}{\Gamma(2+p-j)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t-\tau)_a^p D_\tau^p f(\tau) d\tau &= \frac{1}{\Gamma(p-k+1)} \int_a^t (t-\tau)^{p-k} \{ {}_a D_\tau^{-(k-p)} f(\tau) \} d\tau \\ &\quad - \sum_{j=1}^k [{}_a D_t^{p-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-j+1}}{\Gamma(2+p-j)} \end{aligned} \quad (2.110)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t-\tau)_a^p D_\tau^p f(\tau) d\tau &= {}_a D_t^{-(p-k+1)} ({}_a D_t^{-(k-p)} f(t)) \\ &\quad - \sum_{j=1}^k [{}_a D_t^{p-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-j+1}}{\Gamma(2+p-j)} \end{aligned} \quad (2.111)$$

$$\frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t-\tau)_a^p D_\tau^p f(\tau) d\tau = {}_a D_t^{-1} f(t) - \sum_{j=1}^k [{}_a D_t^{p-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-j+1}}{\Gamma(2+p-j)} \quad (2.112)$$

(2.110) daki tüm terimlerin varlığı ${}_a D_t^p f(t)$ nin integralinden elde edilir. Çünkü ${}_a D_t^{p-j} f(t)$ ($j = 1, 2, \dots, k$) kesirli türevin koşulu nedeniyle $t = a$ da hepsi sınırlıdır. (2.109) ve (2.112) nin kombinasyonu (2.108) ilişkisinin ispatını sonlandırır.

Önemli özel bir durumdan bahsedilmelidir. Eğer $0 < p < 1$ ise;

$${}_a D_t^{-p} ({}_a D_t^p f(t)) = f(t) - [{}_a D_t^{p-1} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-1}}{\Gamma(p)} \quad (2.113)$$

elde edilir. (2.109) özelliği, genel özelliğin özel bir durumudur.

$${}_a D_t^p ({}_a D_t^{-q} f(t)) = {}_a D_t^{p-q} f(t) \quad (2.114)$$

ifadesi ise $f(t)$ nin sürekli olduğunu varsayımı altında geçerlidir ve eğer $p \geq q \geq 0$ ise ${}_a D_t^{p-q} f(t)$ türevi mevcuttur.

İki durum gözönüne alınabilir. Bunlar, $q \geq p \geq 0$ ve $p > q \geq 0$ olma durumlarıdır.

Eğer $q \geq p \geq 0$ ise (2.100) ve (2.106) özellikleri kullanılarak;

$${}_a D_t^p ({}_a D_t^{-q} f(t)) = {}_a D_t^p ({}_a D_{ta}^{-p} D_t^{-(q-p)}) = {}_a D_t^{-(q-p)} = {}_a D_t^{p-q} f(t)$$

elde ederiz.

Şimdi $p > q \geq 0$ olma durumunu gözönüne alalım. m ve n sabitlerini $0 \leq m-1 \leq p < m$ ve $0 \leq n \leq p-q < n$ olarak ifade edelim. Açıkça $n \leq m$ dir. Böylece (2.103) tanımını ve (2.100) özelliğini kullanarak;

$$\begin{aligned} {}_a D_t^p ({}_a D_t^{-q} f(t)) &= \frac{d^m}{dt^m} \left\{ {}_a D_t^{-(m-p)} ({}_a D_t^{-q} f(t)) \right\} \\ &= \frac{d^m}{dt^m} \left\{ {}_a D_t^{p-q-m} f(t) \right\} \\ &= \frac{d^n}{dt^n} \left\{ {}_a D_t^{p-q-n} f(t) \right\} = {}_a D_t^{p-q} f(t) \end{aligned}$$

elde edilir. Söz edilen (2.108) deki özellik genel özelliğin, özel bir durumudur.

$${}_aD_t^{-p}({}_aD_t^q f(t)) = {}_aD_t^{q-p} f(t) - \sum_{j=1}^k [{}_aD_t^{q-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(1+p-j)} \quad (2.115)$$

$$(0 \leq k-1 \leq q < k)$$

(2.115) formülünü ispatlamak için (eğer $q \leq p$ ise) (2.100) özelliğini ilk olarak kullanırız. veya (eğer $q \geq p$ ise) (2.114) özelliğini kullanırız ve sonra (2.108) özelliğini kullanırız:

$$\begin{aligned} {}_aD_t^{-p}({}_aD_t^q f(t)) &= {}_aD_t^{q-p} \{ {}_aD_t^{-q}({}_aD_t^q f(t)) \} \\ &= {}_aD_t^{q-p} \left\{ f(t) - \sum_{j=1}^k [{}_aD_t^{q-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{q-j}}{\Gamma(p-j+1)} \right\} \\ &= {}_aD_t^{q-p} f(t) - \sum_{j=1}^k [{}_aD_t^{q-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(1+p-j)} \end{aligned}$$

burada (2.117) deki bilinen

$${}_aD_t^{q-p} \left\{ \frac{(t-a)^{q-j}}{\Gamma(1+q-j)} \right\} = \frac{(t-a)^{q-j}}{\Gamma(1+p-j)}$$

kuvvet fonksiyonunu kullandık.

2.3.4 $(t-a)^\beta$ nın Kesirli Türevi:

Şimdi, v reel sayı olmak üzere

$$f(t) = (t-a)^v$$

kuvvet fonksiyonunun ${}_aD_t^p f(t)$ Riemann Kesirli Türevini hesaplayalım.

Bu amaçla varsayalım ki $n-1 \leq p < n$ olsun ve Riemann-Liouville türevinin tanımını hatırlayalım:

$${}_aD_t^p f(t) = \frac{d^n}{dt^n} ({}_aD_t^{-(n-p)} f(t)) \quad (n-1 \leq p < n) \quad (2.116)$$

Bu fonksiyonun (2.56) da hesaplanan, $\alpha = n-p$ basamaktan kesirli integralini (2.116) formülüne uyarlırsak;

$${}_aD_t^{-\alpha}((t-a)^v) = \frac{\Gamma(1+v)}{\Gamma(1+v+\alpha)} (t-a)^{v+\alpha}$$

olur ve buradan;

$${}_aD_t^p((t-a)^v) = \frac{\Gamma(1+v)}{\Gamma(1+v-p)} (t-a)^{v-p} \quad (2.117)$$

elde edilir.

Ayrıca $f(t) = (t-a)^v$ için tek kısıtlama $v > -1$ için $f(t)$ nin integrallenebilir olmasıdır.

2.3.5 Tamsayı Basamaktan Türevlerle Birleştirilmesi

Birçok uygulama probleminde Riemann-Liouville kesirli türevinin tamsayı basamaktan türevlerle birleştirilmesi görülmektedir.

Şimdi p reel basamaktan Riemann-Liouville kesirli türevinin n . basamaktan türevini göz önüne alalım. Riemann-Liouville türevinin (2.102) tanımını kullanarak,

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dt^n}({}_a D_t^{k-\alpha} f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d^{n+k}}{dt^{n+k}} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \\ &= {}_a D_t^{n+k-\alpha} f(t)\end{aligned}\quad (2.118)$$

$$(0 < \alpha \leq 1)$$

ve $p = k - \alpha$ ile gösterirsek

$$\frac{d^n}{dt^n}({}_a D_t^p f(t)) = {}_a D_t^{n+p} f(t) \quad (2.119)$$

elde ederiz.

Ayrıca;

$$\begin{aligned}{}_a D_t^{-n} f^{(n)}(t) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \\ &= f(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^j}{\Gamma(j+1)}\end{aligned}\quad (2.120)$$

olduğunu ve

$${}_a D_t^p g(t) = {}_a D_t^{p+n} ({}_a D_t^{-n} g(t)) \quad (2.121)$$

olduğunu dikkate almamız.

(2.120), (2.121) ve (2.117) yi kullanırsak;

$$\begin{aligned}{}_a D_t^p \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) &= {}_a D_t^{p+n} ({}_a D_t^{-n} f^{(n)}(t)) \\ &= {}_a D_t^{p+n} \left(f(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^j}{\Gamma(j+1)} \right) \\ &= {}_a D_t^{p+n} f(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{j-p-n}}{\Gamma(1+j-p-n)}\end{aligned}\quad (2.122)$$

elde ederiz ki bu da (2.66) daki ilişkiye benzer. Böylece, Grünwald-Letnikov türevinde olduğu gibi, Riemann-Liouville kesirli türev operatörü ${}_a D_t^p$ de, $\frac{d^n}{dt^n}$ türev operatörüyle yer değiştirebilir:

$$\frac{d^n}{dt^n}({}_a D_t^p f(t)) = {}_a D_t^p \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = {}_a D_t^{p+n} f(t) \quad (2.123)$$

Ancak yukarıdaki bu durum, $f(t)$ fonksiyonunun kesirli diferansiyelini $t = a$, alt terminal noktasında,

$$f^{(k)}(a) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (2.124)$$

koşulunu sağlamasıyla geçerli olur.

2.3.6 Kesirli Türevlerle Birleştirilmesi:

Şimdi iki kesirli Riemann-Liouville kesirli türev operatörünün birleştirilmesini inceleyelim:

$${}_aD_t^p \quad (m-1 \leq p < m) \text{ ve } {}_aD_t^q \quad (n-1 \leq q < n)$$

olsun.

(2.104) deki Riemann-Liouville kesirli türev tanımını, (2.108) deki formülü ve (2.119) daki tamsayı basamaktan türevlerle birleştirilmesi özelliği sırasıyla kullanırsak;

$$\begin{aligned} {}_aD_t^p({}_aD_t^q f(t)) &= \frac{d^m}{dt^m} \left\{ {}_aD_t^{-(m-p)} ({}_aD_t^p f(t)) \right\} \\ &= \frac{d^m}{dt^m} \left\{ {}_aD_t^{p+q-m} f(t) - \sum_{j=1}^n [{}_aD_t^{q-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{m-p-j}}{\Gamma(1+m-p-j)} \right\} \\ &= {}_aD_t^{p+q} f(t) - \sum_{j=1}^n [{}_aD_t^{p-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-p-j}}{\Gamma(1-p-j)} \end{aligned} \quad (2.125)$$

elde ederiz.

p ve q nun yerleri değiştirilirse;

$${}_aD_t^q({}_aD_t^p f(t)) = {}_aD_t^{p+q} f(t) - \sum_{j=1}^m [{}_aD_t^{p-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-q-j}}{\Gamma(1-q-j)} \quad (2.126)$$

yazabiliriz.

(2.125) ve (2.126) daki ilişkinin birleştirilmesi, bize genel olarak Riemann-Liouville kesirli türev operatörleri olan ${}_aD_t^p$ ve ${}_aD_t^q$ nun değiştirilmeyeceğini sadece bir istisnai durum dışında ($p = q$ durumunun yanı sıra) söylemektedir.

Şöyle ki $p \neq q$ için;

$${}_aD_t^p({}_aD_t^q f(t)) = {}_aD_t^q({}_aD_t^p f(t)) = {}_aD_t^{p+q} f(t) \quad (2.127)$$

(2.125) ve (2.126) yı taraf tarafa toplarsak sağ kısım yok olur. Bunun için aynı anda

$$[{}_aD_t^{p-j} f(t)]_{t=a} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (2.128)$$

$$[{}_aD_t^{q-j} f(t)]_{t=a} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (2.129)$$

koşullarının gerçekleşmesi gerekir. Eğer $f(t)$ yeterli sayıda sürekli türevlere sahipse, (2.128) koşulu

$$f^{(j)}(a) = 0 \quad (j = 0, 1, 2, \dots, m-1) \quad (2.130)$$

koşuluna ve (2.129) koşulu

$$f^{(j)}(a) = 0 \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (2.131)$$

koşuluna eşdeğer olur. Böylece eğer

$$f^{(j)}(a) = 0 \quad (j = 0, 1, 2, \dots, r-1) \quad (2.132)$$

$$r = \max(n, m)$$

ise (2.127) deki ilişki (p . ve q . basamaktan türevlerin yer değiştirmesi) korunur.

2.3.7 Grünwald-Letnikov Yaklaşımıyla İlişkisi

Önceden bahsedildiği gibi, Riemann-Liouville ve Grünwald-Letnikov keyfi reel basamak-tan diferensiyel yaklaşımları arasında bir ilişki mevcuttur.

Şimdi varsayalım ki $f(t)$ fonksiyonu $[a, T]$ aralığında $(n-1)$ defa sürekli diferensiyele sahiptir ve $f^{(n)}(t)$ aynı $[a, T]$ aralığında yer alır. O halde her bir p için ($0 < p < n$) Riemann-Liouville türevi ${}_aD_t^p f(t)$ mevcuttur ve Grünwald-Letnikov türeve ${}_aD_t^p f(t)$ rastgelmektedir. Eğer; $0 \leq m-1 \leq p < m \leq n$ ise $a < t < T$ için

$$\begin{aligned} {}_aD_t^p f(t) &= {}_aD_t^p f(t) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{j-p}}{\Gamma(1+j-p)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{p-m+1}} d\tau \end{aligned} \quad (2.133)$$

mevcuttur.

Gerçekten; (2.133) formülünün sağ kısmı Grünwald-Letnikov türevine ${}_aD_t^p f(t)$ eşittir. Diğer taraftan;

$$\frac{d^m}{dt^m} \left\{ \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{m+j-p}}{\Gamma(1+m+j-p)} + \frac{1}{\Gamma(2m-p)} \int_a^t (t-\tau)^{2m-p-1} f^{(m)}(\tau) d\tau \right\}$$

olarak yazılabilir. Taraf tarafa m integrasyondan sonra bu bize ${}_aD_t^p f(t)$ Riemann-Liouville formunu verir.

$$\frac{d^m}{dt^m} \left\{ \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f(\tau) d\tau \right\} = \frac{d^m}{dt^m} \{ {}_aD_t^{-(m-p)} f(t) \} = {}_aD_t^p f(t)$$

(2.133) ilişkisi birçok uygulama problemi açısından önemlidir. Eğer $f(t)$ sürekli ve $f'(t)$, $[a, T]$ aralığında integrallenebilir ise, her bir p ($0 < p < 1$) için Riemann-Liouville ve Grünwald-Letnikov türevlerinin her ikisinde mevcuttur ve

$${}_aD_t^p f(t) = {}_aD_t^p f(t) = \frac{f(a)(t-a)^{-p}}{\Gamma(1-p)} + \frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_a^t (t-\tau)^{-p} f'(\tau) d\tau \quad (2.134)$$

formunda yazılabilir. Açık olarak, (2.134) de verilen türev integrallenebilirdir.

(2.133) den diğer bir önemli özellik ise $p > 0$ basamaktan türevin varlığı, tüm $0 < q < p$ olacak şekildeki q lar için q basamaktan türevin varlığı anlamına gelmektedir.

Daha da kesin olarak eğer verilen sürekli, integrallenebilir $f(t)$ fonksiyonunun Riemann-Liouville (Grünwald-Letnikov) ${}_aD_t^p f(t)$ türevi mevcutsa ve integrallenebilir ise, $0 < q < p$ olacak şekildeki her bir q için ${}_aD_t^q f(t)$ mevcuttur ve integrallenebilir.

Gerçekten, eğer $g(t) = {}_aD_t^{-(1-p)} f(t)$ şeklinde gösterirsek

$${}_aD_t^p f(t) = \frac{d}{dt}({}_aD_t^{-(1-p)} f(t)) = g'(t)$$

şeklinde yazabiliriz.

$g'(t)$ nin integrallenebildiğini biliyoruz ve (2.134) formülünü ve $0 < 1 + q - p < 1$ eşitsizliğini dikkate alırsak, ${}_aD_t^{1+q-p} g(t)$ türevinin var olduğu ve integrallenebilir olduğu sonucuna varırız. (2.114) özelliğini kullanırsak;

$${}_aD_t^{1+q-p} g(t) = {}_aD_t^{1+q-p} ({}_aD_t^{-(1-p)} f(t)) = {}_aD_t^q f(t)$$

elde edilir.

Grünwald-Letnikov ve Riemann-Liouville tanımları arasındaki (2.133) deki ilişki, uygulama problemlerini formüle etmek için, kesirli türevleri el ile işletmek için ve kesirli basamaktan diferensiyel denklemler için başlangıç- değer probleminin fiziksel anlamlarının formülasyonu için çok önemlidir.

$f(t)$ fonksiyonu için aynı varsayımlar altında ($f(t)$ nin $(m - 1)$ defa sürekli diferensiyellenebilir ve $[a, T]$ aralığında m . türevi integrallenebilir olması durumu) ve p için

$$[{}_aD_t^p f(t)]_{t=a} = 0 \quad (2.135)$$

koşulunun

$$f^{(j)}(a) = 0 \quad (j = 0, 1, 2, \dots, m - 1) \quad (2.136)$$

koşuluna eş değerdir.

Gerçekten, eğer (2.136) koşulu gerçekleşiyorsa, (2.133) de $t \rightarrow a$ konulursa (2.135) elde edilir. Diğer taraftan, eğer (2.135) koşulu gerçekleşiyorsa, (2.133) ün her iki tarafı sırasıyla $(t - a)^{p-j}$ ($j = m - 1, m - 2, \dots, 1, 0$) yerine yazılırsa ve $t \rightarrow a$ iken limiti alınır, (2.136) daki koşulu elde ederiz. ($f^{(m-1)}(a) = 0, f^{(m-2)}(a) = 0, \dots, f'(a) = 0, f(a) = 0$)

Bu yüzden; (2.135) in gerçekleşmesi için gerek ve yeter koşul (2.136) nın gerçekleşmesidir. (2.135) ve (2.136) koşullarının eşitliğinden, eğer bazı $p > 0$ lar için $f(t)$ nin p . basamaktan türevi $t = a$ terminal noktasında sıfıra eşit oluyorsa, q basamaktan tüm türevler ($0 < q < p$) benzer şekilde $t = a$ noktasında sıfıra eşit olur:

$$[{}_aD_t^q f(t)]_{t=a} = 0$$

2.4 Diğer Bazı Yaklaşımlar

Diferensiyel ve integral kavramlarının genelleştirilmesi için, diğer yaklaşımlar arasında, biz M.Caputo tarafından verilen yaklaşımı ve genelleşmiş fonksiyonlara dayanan

yaklaşımı dikkate alacağız. Çünkü, bu yaklaşımlar uygulamalı problemlerin çözümlerinde daha kullanışlıdır.

M.Caputo tarafından geliştirilen yaklaşım, tamsayı basamaktan türevlerin alt terminal noktalarında ($t = a, y'(a), y''(a)...$ gibi) limit değerlerinin, kesirli basamaktan diferansiyel denklem formunda başlangıç değer problemleri için başlangıç koşullarını formüle etmeyi sağlamaktadır.

Genelleştirilmiş fonksiyon yaklaşımı $\delta(t)$ Dirac delta fonksiyonunun kullanımına yardımcı olur. Bu iki fonksiyon sıkça test sinyalleri modelleri olarak kullanılır.

2.4.1 Caputo Kesirli Türevi

Kesirli Diferensiyelin tekniğin Riemann-Liouville tanımları kesirli türev, integral ve onun uygulamalarıyla ilgilenen saf matematiksel çalışmalarda çok büyük bir rol oynamıştır. (Tamsayı basamaktan diferansiyel denklemlerin çözümleri yeni fonksiyon sınıflarının tanımları serilerin toplamı gibi...)

Bununla birlikte modern teknolojinin gelişimi saf matematiğin uygulama ve ele alınış şeklini de etkilemiştir. Uygulama problemleri, başlangıç koşullarını fiziksel durumlara en uygun şekilde veren kesirli diferansiyel denklemler gerektirmektedir.

Ne yazık ki; Riemann-Liouville yaklaşımıyla, $t = a$ alt terminal noktasındaki Riemann-Liouville kesirli türevinin limit değerlerini başlangıç koşulları doğurmaktadır.Örneğin;

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow a} {}_a D_t^{\alpha-1} f(t) &= b_1, \\ \lim_{t \rightarrow a} {}_a D_t^{\alpha-2} f(t) &= b_2, \\ &\dots, \\ \lim_{t \rightarrow a} {}_a D_t^{\alpha-n} f(t) &= b_n,\end{aligned}\tag{2.137}$$

burada b_k lar verilen sabitlerdir. ($k = 1, 2, \dots, n$)

Verilen başlangıç koşullarındaki başlangıç değer problemleri matematiksel olarak başarılı bir şekilde çözülmesine rağmen, bunların sonuçları kullanışlı değildir. Çünkü; bu tip başlangıç koşullarına fiziksel bir yorum yapılamaz.

Kesirli diferansiyel tekniğinde, başlangıç koşullarını fiziksel durumlara en uygun şekilde veren Caputo olmuştur.

Caputo'nun tanımı;

$${}_a^c D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha - n)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\alpha+1-n}}, \quad (n - 1 < \alpha < n)\tag{2.138}$$

ile verilir.Caputo yaklaşımının en temel avantajı, Caputo kesirli türevlerinin tamsayı dereceden diferansiyel denklemlerinkiyle aynı formda başlangıç koşullarına sahip olmasıdır.

Başka bir ifadeyle, $t = a$ alt limitinde, bilinen bir fonksiyonun tam derece türevlerinin limit değerlerini içermesidir.

$f(t)$ fonksiyonu normal koşullar altında, $\alpha \rightarrow n$ için Caputo türevi, $f(t)$ fonksiyonunun n . basamaktan gereksel türevi olmaktadır. Gerçekten;

$$0 \leq n - 1 < \alpha < n$$

olduğunu varsayalım ve $f(t)$ fonksiyonu her $T > a$ için $[a, T]$ de $(n+1)$ sürekli sınırlı türe ve sahiptir.

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha \rightarrow n} {}^c D_t^\alpha f(t) &= \lim_{\alpha \rightarrow n} \left(\frac{f^{(n)}(a)(t-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha} f^{(n+1)}(\tau) d\tau \right) \\ &= f^{(n)}(a) + \int_a^t f^{(n+1)}(\tau) d\tau = f^{(n)}(t), \quad (n = 1, 2, \dots)\end{aligned}$$

elde edilir.

Riemann-Liouville kesirli türev ve Caputo kesirli türevi arasında bazı farklılıklar vardır. Riemann-Liouville kesirli türevinin Laplace dönüşümünün formülü,

$$\int_0^\infty e^{-pt} \{ {}_0 D_t^\alpha f(t) \} dt = p^\alpha F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k \cdot {}_0 D_t^{\alpha-k-1} f(t) \Big|_{t=0} \quad (2.139)$$

$$(n-1 \leq \alpha < n)$$

olmaktadır.

Caputo türevinin Laplace dönüşümü;

$$\int_0^\infty e^{-pt} \{ {}^c_0 D_t^\alpha f(t) \} dt = p^\alpha F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \quad (2.140)$$

$$(n-1 < n \leq n)$$

olmaktadır. Buradan da görüldüğü gibi Riemann-Liouville kesirli türevinin Laplace dönüşümü (2.137) deki başlangıç koşullarının kullanımına izin vermektedir ki bu da problemin fiziksel yorumunu sağlamaktadır. Aksine; Caputo türevinin Laplace dönüşümü bilinen fiziksel yorumu ile klasik tamsayı basamaktan türevlerin başlangıç koşullarının kullanımına izin vermektedir.

Laplace dönüşüm methodu sık sık uygulamalı problemleri çözmek için kullanılmaktadır. Laplace dönüşüm formülünü seçmek, hangi tip kesirli türevin tanımının kullanılacağını anlamak için çok önemlidir.

Riemann-Liouville tanımı ve Caputo tanımı arasındaki diğer bir önemli fark ise, sabitin Caputo türevinin sıfır olmasına rağmen C sabitinin Riemann-Liouville kesirli türevinin alt terminal noktası olan a daki sonlu değerinin sıfıra eşit olmasıdır.

Riemann-Liouville ve Caputo yaklaşımları arasındaki diğer bir önemli fark ise uygulamalar için çok önemli bir farktır, öyle ki; Caputo türevi için

$${}^c_a D_t^\alpha ({}^c_a D_t^m f(t)) = {}^c_a D_t^{\alpha+m} f(t) \quad , (m = 0, 1, 2, \dots; n-1 < \alpha < n) \quad (2.141)$$

olmasına rağmen

$${}_a D_t^m ({}_a D_t^\alpha f(t)) = {}_a D_t^{\alpha+m} f(t) \quad , (m = 0, 1, 2, \dots; n-1 < \alpha < n) \quad (2.142)$$

olmasıdır.

(2.143) deki ve (2.144) deki formüllerdeki diferensiyel operatörlerinin yer değiştirebilmesi; bazı koşullar altında mümkün olmaktadır.

$${}_a^c D_t^\alpha ({}_a^c D_t^m f(t)) = {}_a^c D_t^m ({}_a^c D_t^\alpha f(t)) = {}_a^c D_t^{\alpha+m} f(t) \quad (2.143)$$

$$f^{(s)}(0) = 0, \quad s = n, n+1, \dots, m \quad (m = 0, 1, 2, \dots; n-1 < \alpha < n)$$

$${}_a D_t^m ({}_a D_t^\alpha f(t)) = {}_a D_t^\alpha ({}_a D_t^m f(t)) = {}_a D_t^{\alpha+m} f(t) \quad (2.144)$$

$$\begin{aligned} f^{(s)}(0) &= 0, & s &= 0, 1, 2, \dots, m \\ (m &= 0, 1, 2, \dots; & n-1 &< \alpha < n) \end{aligned}$$

Buradan da görüyoruz ki Riemann-Liouville yaklaşımının aksine, Caputo türevinde $f^{(s)}(0)$ ($s = 0, 1, \dots, n-1$) değerlerinde herhangi bir kısıtlama yoktur.

3. VARLIK VE TEKLİK TEOREMLERİ

Bu bölümde kesirli basamaktan diferensiyel denklemlerin başlangıç değer problemlerinin çözümlerinin varlık ve tekliği sorusunu göz önüne alacağız.

İlk olarak sürekli katsayılara sahip lineer kesirli diferensiyel denklemlerin durumunu ele alacağız ve bir terim için kesirli diferensiyel denklemlerin varlık ve tekliğini ve sonra da kesirli diferensiyel denklemlerin n -li sistemi için varlık ve tekliğini ispatlayacağız.

Sonra, kesirli diferensiyel denklemlerin genel durumu için varlık ve teklik teoremini vereceğiz. Ayrıca örneklerle, ispat metodunun bazen doğrudan kesirli diferensiyel denklemler için başlangıç değer problemlerinin çözüm metodu olarak kullanılabileceğini göstereceğiz.

Son olarak, genel formun kesirli diferensiyel denkleminin çözümlerinin başlangıç koşullarına bağlılığını çalışacağız ve başlangıç koşullarındaki küçük bir değişimin, aralığın başlangıç koşulunu içermeyen kısmında çözümde sadece küçük değişimlere neden olacağını göstereceğiz

3.1 Lineer Kesirli Diferensiyel Denklemler

Bu kısımda lineer kesirli diferensiyel denklemlerin ardışık türevleri için başlangıç değer problemlerinin çözümlerinin varlık ve tekliğini inceleyeceğiz. Aşağıdaki başlangıç değer problemini ele alalım:

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{\sigma_n}y(t) + \sum_{j=0}^n p_j(t) {}_0D_t^{\sigma_{n-j}}y(t) + p_n(t)y(t) &= f(t) \\ (0 < t < T < \infty) \\ [{}_0D_t^{\sigma_{k-1}}y(t)]_{t=0} &= b_k \\ (k &= 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} {}_aD_t^{\sigma_k} &\equiv {}_aD_t^{\alpha_k} \cdot {}_aD_t^{\alpha_{k-1}} \dots {}_aD_t^{\alpha_1}; \\ {}_aD_t^{\sigma_{k-1}} &\equiv {}_aD_t^{\alpha_{k-1}} \cdot {}_aD_t^{\alpha_{k-2}} \dots {}_aD_t^{\alpha_1}; \\ \sigma_k &= \sum_{j=0}^n \alpha_j \quad (k = 1, 2, \dots, n); \\ 0 &< \alpha_j \leq 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n), \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f(t) &\in L_1(0, T), \\ \int_0^T |f(t)| dt &< \infty \end{aligned}$$

notasyonunun basitliği için $f(t) \equiv 0, t > T$ için olduğunu varsayacağız. İlk olarak $p_k(t) \equiv 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$) olma durumunu gözönüne alalım.

Teorem 3.1 Eğer $f(t) \in L_1(0, T)$ ve

$${}_0D_t^{\sigma_n} y(t) = f(t) \quad (3.2)$$

denklemini (3.2) deki başlangıç koşulunu sağlayan $y(t) \in L_1(0, T)$ tek çözümüne sahiptir.

İspat. Verilen problemin çözümünü inşa edelim. (3.3) deki denkleme ardışık kesirli türevlerin Laplace dönüşümü uygulanması ile

$$s^{\sigma_n} Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s_0^{\sigma_n - \sigma_{n-k}} \left[{}_0D_t^{\sigma_{n-k-1}} y(t) \right]_{t=0} = F(s) \quad (3.3)$$

denklemini elde edilir. Burada $Y(s)$ ve $F(s)$, $y(t)$ ve $f(t)$ nin Laplace dönüşümünü göstermektedir. (3.2) deki başlangıç koşullarını uygularsak;

$$Y(s) = s^{-\sigma_n} F(s) + \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-k} s^{-\sigma_{n-k}} \quad (3.4)$$

yazabiliriz ve ters Laplace dönüşümü bize

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t - \tau)^{\sigma_n - 1} f(\tau) d\tau + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_{n-k}}{\Gamma(\sigma_{n-k})} t^{\sigma_{n-k} - 1} \quad (3.5)$$

denklemini verir veya $i = n - k$ dersek

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t - \tau)^{\sigma_n - 1} f(\tau) d\tau + \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{\Gamma(\sigma_i)} t^{\sigma_i - 1} \quad (3.6)$$

elde ederiz.

(2.117) kuvvet fonksiyonlarının Riemann-Liouville kesirli diferansiyeli için olan kuralı kullanırsak ve

$$\frac{1}{\Gamma(-m)} = 0, \quad m = 1, 2, \dots$$

olduğunu gözönüne alırsak,

$${}_0D_t^{\sigma_k} \left(\frac{t^{\sigma_i - 1}}{\Gamma(\sigma_i)} \right) = \begin{cases} \frac{t^{\sigma_i - \sigma_k - 1}}{\Gamma(\sigma_i - \sigma_k)}, & (k < i) \\ 0, & (k \geq i) \end{cases} \quad (3.7)$$

$${}_0D_t^{\sigma_{k-1}} \left(\frac{t^{\sigma_i - 1}}{\Gamma(\sigma_i)} \right) = \begin{cases} \frac{t^{\sigma_i - \sigma_k}}{\Gamma(1 + \sigma_i - \sigma_k)}, & (k < i) \\ 1, & (k = i) \\ 0, & (k > i) \end{cases} \quad (3.8)$$

elde ederiz. Burada $k = 1, 2, \dots, n$ ve $i = 1, 2, \dots, n$ dir.

(3.7) deki formülden $y(t) \in L_1(0, T)$ dir. (3.8) ve (3.9) formüllerini kullanırsak, (3.7) de tanımlanan $y(t)$ fonksiyonunu (3.3) deki denklemden yerine koyunca ve (3.2)

deki başlangıç koşulları, $y(t)$ nin bunları sağlamış olduğunu göstermiş olur ve böylece çözümün varlığı ispatlanmış olur.

Teklik ise kesirli diferensiyelin lineerliğinden ve Laplace dönüşümünün özelliklerinden elde edilir. Gerçekten, eğer $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ olmak üzere problemin iki çözümü olduğunu varsayarsak,

$$z(t) = y_1(t) - y_2(t)$$

fonksiyonu da

$${}_0D_t^{\sigma_n} z(t) = 0$$

denklemini ve sıfır başlangıç koşulun sağlamalıdır. Sonra, $z(t)$ nin Laplace dönüşümü $Z(s) = 0$ ve böylece $z(t) = 0$ hemen hemen her yerde verilen aralıktadır ki bu da $L_1(0, T)$ de çözümün tekliğini ispatlar. ■

Şimdi, (3.1)-(1.2) probleminin çözümlerinin varlık ve tekliğini ispatlayalım:

Teorem 3.2 *Eğer $f(t) \in L_1(0, T)$ ve $p_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) ler kapalı $[0, T]$ aralığında sürekli fonksiyonlar ise, (3.1) ve (3.2) de verilen başlangıç değer problemi*

$$y(t) \in L_1(0, T)$$

olmak üzere tek bir çözüme sahiptir.

İspat. Bu teoremin ispat metodu olarak M.M.Dzhrbashyan ve A.B.Nersesyan tarafından yayımlanan makaledeki basit düşünceleri kullanacağız. Varsayalım ki; (3.1)-(3.2) problemi $y(t)$ çözümüne sahip olsun ve

$${}_0D_t^{\sigma_n} y(t) = \varphi(t) \tag{3.9}$$

olduğunu gösterelim.

Teorem 3.1'i kullanırsak;

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t - \tau)^{\sigma_n - 1} \varphi(\tau) d\tau + \sum_{i=1}^n b_i \frac{t^{\sigma_i - 1}}{\Gamma(\sigma_i)} \tag{3.10}$$

yazabiliriz. (3.8)'i kullanırsak, $\varphi(t)$ fonksiyonu için ikinci çeşit Volterra integral denklemini elde ederiz:

$$\varphi(t) + \int_0^t K(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau = g(t) \tag{3.11}$$

Burada;

$$K(t, \tau) = p_n(t) \frac{(t - \tau)^{\sigma_n - 1}}{\Gamma(\sigma_n)} + \sum_{k=1}^{n-1} p_{n-k}(t) \frac{(t - \tau)^{\sigma_n - \sigma_k - 1}}{\Gamma(\sigma_n - \sigma_k)}$$

$$g(t) = f(t) - p_n(t) \sum_{i=1}^n b_i \frac{t^{\sigma_i - 1}}{\Gamma(\sigma_i)} - \sum_{k=1}^{n-1} p_{n-k}(t) \sum_{i=k+1}^n b_i \frac{t^{\sigma_i - \sigma_k - 1}}{\Gamma(\sigma_i - \sigma_k)}$$

dır. $p_{j(t)}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) fonksiyonları $[0, T]$ de sürekli oldukları için, $K(t, \tau)$ çekirdek eği zayıf singüler çekirdek formunda yazılabilir:

$$K(t, \tau) = \frac{K^*(t, \tau)}{(t - \tau)^{1-\mu}} \quad (3.12)$$

burada $K^*(t, \tau)$ lar, $0 \leq t \leq T$, $0 \leq \tau \leq T$ için sürekli ve

$$\mu = \min \{\sigma_n, \sigma_n - \sigma_{n-1}, \sigma_n - \sigma_{n-2}, \dots, \sigma_n - \sigma_1\} = \min \{\sigma_n, \alpha_n\}$$

dir.

Benzer şekilde $g(t)$ fonksiyonu;

$$g(t) = \frac{g^*(t)}{t^{1-v}} \quad (3.13)$$

formunda yazılabilir ve burada $g^*(t)$ ler $[0, T]$ de sürekli fonksiyonlardır. Ayrıca;

$$\begin{aligned} v &= \min \{\sigma_1, \dots, \sigma_n; \sigma_2 - \sigma_1, \dots, \sigma_n - \sigma_1; \sigma_3 - \sigma_2, \dots, \sigma_n - \sigma_2; \dots; \sigma_n - \sigma_{n-1}\} \\ &= \min \{\sigma_1, \dots, \sigma_n; \alpha_2, \dots, \alpha_n\} = \min \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \end{aligned}$$

dir.

Açık olarak $0 < \mu \leq 1$, $0 < v \leq 1$ dir. (3.13) deki zayıf singüler çekirdek ile (3.12) deki denklemin ve $g(t) \in L_1(0, T)$ nin sağ tarafının $\varphi(t) \in L_1(0, T)$ tek çözümüne sahip olduğu bilinmektedir. Teorem 3.1'e göre (3.10)'un tek çözümü $y(t) \in L_1(0, T)$, aynı zamanda (3.1)-(3.2) probleminin çözümü olan (3.2), (3.11) formülünü kullanarak belirlenebilir. Bu da Teorem 3.2 nin ispatını tamamlar. ■

Genellikle pek çok uygulama probleminde $y(t)$ fonksiyonu için sıfır başlangıç koşulu ve onun tamsayı basamaktan türevleri kullanılmıştır.

Varsayalım ki; $m - 1 \leq \sigma_n < m$ ve

$$y^{(j)}(0) = 0 \quad (j = 0, 1, \dots, m - 1) \quad (3.14)$$

olsun.

Bu durumda; Riemann-Liouville türevleri için birleşme kuralını kullanırsak, aynı σ_k basamaktan Riemann-Liouville kesirli türevlerle (3.1) denklemindeki bütün sıralı kesirli türevleri yer değiştirebiliriz. Bu da bize;

$${}_0D_t^{\sigma_n} y(t) + \sum_{j=1}^{n-1} p_j(t) {}_0D_t^{\sigma_{n-j}} y(t) + p_n(t) y(t) = f(t) \quad (3.15)$$

denklemini verir.

(3.15) deki sıfır başlangıç koşullarından (3.2) deki tüm koşullar sıfır olur. ($b_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$). Bunun dışında $f(t)$ fonksiyonunu sürekli alırsak Teorem 3.3'e ulaşırız.

Teorem 3.3 *Eğer $f(t)$ ve $p_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) ler $[0, T]$ kapalı aralığında sürekli fonksiyonlar ise, (3.16) daki başlangıç değer problemi*

$$m - 1 \leq \sigma_n \leq m, \sigma_n > \sigma_{n-1} > \sigma_{n-2} > \dots > \sigma_2 > \sigma_1 > 0$$

olduğu (3.15) de, $[0, T]$ aralığında sürekli olan tek $y(t)$ çözümüne sahiptir.

3.2 Genel Formda Kesirli Diferensiyel Denklemler

Uygulamalarda, lineer kesirli diferensiyel denklemlerin yanı sıra lineer olmayan kesirli diferensiyel denklemlerde görülmektedir. Bu nedenle, bu kesimde genel formun kesirli diferensiyel denklemleri için başlangıç değer problemlerinin çözümlerinin varlık ve tekliğini inceleyeceğiz. Bu sebeple, Miller-Ross, Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov ve Caputo kesirli türevleri arasında bağlantı kurulduğunda, aşağıda verilen sonuçlar kesirli diferensiyelin tüm bu dönüşümleri için kullanılacaktır.

$${}_0D_t^{\sigma_n}y(t) = f(t, y) \quad (3.16)$$

$$[{}_0D_t^{\sigma_k-1}y(t)]_{t=0} = b_k, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (3.17)$$

başlangıç değer problemini ele alalım.

$$\begin{aligned} {}_aD_t^{\sigma_k} &\equiv {}_aD_t^{\alpha_k} \cdot {}_aD_t^{\alpha_{k-1}} \dots {}_aD_t^{\alpha_1} \\ {}_aD_t^{\sigma_k-1} &\equiv {}_aD_t^{\alpha_k-1} \cdot {}_aD_t^{\alpha_{k-1}} \dots {}_aD_t^{\alpha_1} \\ \sigma_k &= \sum_{j=1}^k \alpha_j \quad (k = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

$$0 < \alpha_j \leq 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Varsayalım ki; $f(t, y)$, (t, y) düzleminin G çevresinde tanımlı olsun ve aşağıdaki eşitsizliği sağlayan $(t, y) \in G$ noktalarından oluşan $R(h, k) \subset G$ bölgesinde tanımlı olsun.

$$0 < t < h, \quad \left| t^{1-\sigma_1}y(t) - \sum_{i=1}^n b_i \frac{t^{\sigma_i-\sigma_1}}{\Gamma(\sigma_i)} \right| \leq K \quad (3.18)$$

Burada h ve K sabittir.

Teorem 3.4 $f(t, y)$ reel değerli sürekli fonksiyonu G çevresinde tanımlı olsun ve y ye göre

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq A |y_1 - y_2|$$

Lipschitz koşulunu sağlasın, öyle ki;

$$|f(t, y)| \leq M < \infty \quad \text{tüm } (t, y) \in G \text{ için,}$$

olsun. Ayrıca,

$$K \geq \frac{Mh^{\sigma_n-\sigma_1+1}}{\Gamma(1+\sigma_n)}$$

alalım. Bu durumda (3.17)-(3.18) probleminin tek ve sürekli $y(t)$ çözümü $R(h, k)$ bölgesinde mevcuttur.

İspat. Bu teoremin ispatı E.Pitcher ve W.E.Sewell ve M.A.Al-Basaam'ın görüşlerine dayanmaktadır. (3.7) kuralını kullanarak, (2.105) deki birleşme kuralı yardımıyla $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1$ basamaktan kesirli integralin sıralı olarak uygulanması ile

$$y(t) = \sum_{i=1}^n b_i \frac{t^{\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma_i)} + \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t-\tau)^{\sigma_n-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau \quad (3.19)$$

elde ederiz. Buradan görölüyor ki; $y(t)$ (3.17)-(3.18)'i sağlıyorsa ayrıca (3.20) denklemini de sağlamaktadır.

Diğer yandan, eğer $y(t)$ (3.20)'nin çözümü ise ${}_0D_t^{\sigma_n}$ kesirli türev operatörünün ardışık olarak ve (4.8) formülünün uygulanması ile, $y(t)$ için (3.17) kesirli diferensiyel denklemi elde edilir. (3.9) un kullanımı $y(t)$ nin (3.20) yi ve (3.18) koşulunu sağladığını göstermektedir. Böylece (3.20) denklemi (3.17)-(3.18) başlangıç değer problemine eşdeğer olmaktadır.

Şimdi ardışık $y_0(t), y_1(t), y_2(t), \dots$ fonksiyonlarını aşağıdaki ilişki yardımıyla tanımlayalım.

$$y_0(t) = \sum_{i=1}^n b_i \frac{t^{\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma_i)} \quad (3.20)$$

$$y_m(t) = \sum_{i=1}^n b_i \frac{t^{\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma_i)} + \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t-\tau)^{\sigma_n-1} f(\tau, y_{m-1}(\tau)) d\tau \quad (3.21)$$

$$m = 1, 2, \dots$$

Göstereyim ki; $\lim_{m \rightarrow \infty} y_m(t)$ mevcuttur ve (3.20) denkleminin gerekli çözümlerini verir.

İlk olarak, her m için $y_m(t) \in R(h, K)$ olduğunu $0 < t \leq h$ için çıkarım yaparak gösterebiliriz.

$$\begin{aligned} \left| t^{1-\sigma_1} y_m(t) - \sum_{i=1}^n b_i \frac{t^{\sigma_i-\sigma_1}}{\Gamma(\sigma_i)} \right| &= \left| \frac{t^{1-\sigma_1}}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t-\tau)^{\sigma_n-1} f(\tau, y_{m-1}(\tau)) d\tau \right| \\ &\leq \frac{M t^{\sigma_n-\sigma_1+1}}{\Gamma(1+\sigma_n)} \leq \frac{M h^{\sigma_n-\sigma_1+1}}{\Gamma(1+\sigma_n)} \leq K \end{aligned} \quad (3.22)$$

ve aynı nedenlerden dolayı $y_1(t)$ içinde aynı eşitsizlik elde edilir.

$$\left| t^{1-\sigma_1} y_1(t) - \sum_{i=1}^n b_i \frac{t^{\sigma_i-\sigma_1}}{\Gamma(\sigma_i)} \right| \leq \frac{M h^{\sigma_n-\sigma_1+1}}{\Gamma(1+\sigma_n)} \leq K$$

Buradan her m için

$$|y_m(t) - y_{m-1}(t)| \leq \frac{M A^{m-1} t^{m\sigma_m}}{\Gamma(1+m\sigma_m)} \quad (3.23)$$

olduğunu gösterebiliriz. Gerçekten (3.23) ü kullanarak $m = 1$ için

$$|y_1(t) - y_0(t)| \leq \frac{M t^{\sigma_n}}{\Gamma(1+\sigma_n)}, (0 < t \leq h) \quad (3.24)$$

olur. Varsayalım ki;

$$|y_{m-1}(t) - y_{m-2}(t)| \leq \frac{M A^{m-2} t^{(m-1)\sigma_m}}{\Gamma(1+(m-1)\sigma_m)}, (0 < t \leq h) \quad (3.25)$$

olsun. Buradan, (3.22) ve (3.26) yı kullanarak ve (2.114) deki kuvvet fonksiyonu için Riemann-Liouville kesirli türevini kullanarak;

$$\begin{aligned}
|y_m(t) - y_{m-1}(t)| &\leq \frac{A}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t-\tau)^{\sigma_n} |y_{m-1}(\tau) - y_{m-2}(\tau)| d\tau \\
&\leq \frac{MA^{m-1}}{\Gamma(1+(m-1)\sigma_n)} \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t-\tau)^{\sigma_n-1} \tau^{(m-1)\sigma_n} d\tau \\
&= \frac{MA^{m-1}}{\Gamma(1+(m-1)\sigma_n)} \cdot {}_0D_t^{-\sigma_n} t^{(m-1)\sigma_n} \\
&= \frac{MA^{m-1}}{\Gamma(1+(m-1)\sigma_n)} \frac{\Gamma(1+(m-1)\sigma_n) t^{(m-1)\sigma_n+\sigma_n}}{\Gamma(1+(m-1)\sigma_n+\sigma_n)} \\
&= \frac{MA^{m-1} t^{m\sigma_n}}{\Gamma(1+m\sigma_n)} \tag{3.26}
\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu da bizi (3.24) ün her m için geçerli olduğunu gösterir. Şimdi;

$$y^*(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} (y_m(t) - y_0(t)) = \sum_{j=1}^{\infty} (y_j(t) - y_{j-1}(t)) \tag{3.27}$$

serisini ele alalım. (3.24)'e göre $0 \leq t \leq h$ için terimlerinin gerçek değeri buna denk gelen yakınsak nümerik serinin terimlerinden daha küçüktür.

$$M \sum_{j=1}^{\infty} \frac{MA^{j-1} h^{j\sigma_n}}{\Gamma(1+j\sigma_n)} = \frac{M}{A} (E_{\sigma_n,1}(Ah_n^\sigma) - 1) \tag{3.28}$$

Burada $E_{\lambda,\mu}(z)$ Mittag-Leffler fonksiyonudur. Buda (3.28) deki serinin düzgün yakınsak olduğu anlamına gelmektedir. Açıkça, (3.28) serisinin herbir terimi $(y_j(t) - y_{j-1}(t))$, $0 \leq t \leq h$ aralığında t nin sürekli bir fonksiyonudur. Buna göre; (3.28) deki $y^*(t)$ seri toplamı $0 \leq t \leq h$ için sürekli bir fonksiyondur ve

$$y(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} y_m(t) = y_0(t) + y^*(t)$$

şeklinde yazılabildiğinden $y(t)$, $0 \leq t \leq h$ için sürekli bir fonksiyondur. $y_m(t)$ nin düzgün yakınsak olması (3.22) deki ilişkide $m \rightarrow \infty$ için limit almamıza olanak sağlar. Bu da bize (3.21) ve (3.22) tarafından tanımlanan $y(t)$ limit fonksiyonunun (3.20) nin çözümü olduğunu gösterir.

Son olarak, çözümlerin tekliğini ispatlayalım. $\tilde{y}(t)$, (3.20) denkleminin $0 < t \leq h$ aralığında sürekli olan diğer bir çözümü olsun. $z(t) = y(t) - \tilde{y}(t)$ fonksiyonu (3.20) ye göre aşağıdaki denklemi sağlar.

$$z(t) = \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t-\tau)^{\sigma_n-1} f(\tau, z(\tau)) d\tau \tag{3.29}$$

Burada $z(0) = 0$ dır. Böylece $z(t)$, $0 \leq t \leq h$ için sürekli bir fonksiyon olur. $|z(t)| < B$, $0 \leq t \leq h$ olsun. Burada B sabittir ve (3.30) denkleminde;

$$|z(t)| \leq \frac{ABt^{\sigma_n}}{\Gamma(1 + \sigma_n)} \quad (0 \leq t \leq h) \quad (3.30)$$

olduğunu elde ederiz. Verilen eşitsizlik j kez tekrar edildiğinde;

$$|z(t)| \leq \frac{A^j B t^{j\sigma_n}}{\Gamma(\sigma_n)}, \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (3.31)$$

elde ederiz. Eşitsizliğin sağ tarafında (yani B ye kadar olan tarafta) serinin genel fonksiyonunun $E_{\sigma_n,1}(At_n^\sigma)$ Mittag-Leffler fonksiyonu olduğunu görüyoruz ve bu yüzden her t için

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{A^j t^{j\sigma_n}}{\Gamma(\sigma_n)} = 0$$

olur. (3.32) nin $j \rightarrow \infty$ için limiti alınırsa $z(t) \equiv 0$ olduğu sonucuna varılır. Bu da bize $0 < t \leq h$ için

$$\tilde{y}(t) \equiv y(t)$$

olduğunu gösterir. Böylece Teorem 3.4 ün ispatı tamamlanmış olur. ■

3.3 Çözüm Metodu Olarak Varlık ve Teklik Teoremi

Bazı durumlarda, Teorem 3.4, kesirli diferensiyel denklemlerin çözümleri için direkt bir method olarak kullanılabilir. Bu durumu iki örnekle göstereyim:

Örnek 3.1 *Aşağıdaki başlangıç değer problemini gözönüne alalım*

$${}_0D_t^{\sigma_n} y(t) = \lambda y(t) \quad (3.32)$$

$$[{}_0D_t^{\sigma_k-1} y(t)]_{t=0} = b_k \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (3.33)$$

Bu durumda $f(t, y) = \lambda y$ dir. Teorem 3.4 ün ispatını gözönüne alırsak;

$$y_0(t) = \sum_{i=1}^n b_i \frac{t^{\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma_i)} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} y_m(t) &= y_0(t) + \frac{\lambda}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t-\tau)^{\sigma_n-1} y_{m-1}(\tau) d\tau \\ &= y_0(t) + \lambda {}_0D_t^{-\sigma_n} y_{m-1}(t) \\ &\quad (m = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (3.35)$$

(3.35) ve (3.36) yı kullanırsak ve (2.114) deki kuvvet fonksiyonunun kesirli diferensiyeli için olan formülü uygularsak

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y_0(t) + {}_0D_t^{-\sigma_n} \left\{ \sum_{i=1}^n b_i \frac{t^{\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma_i)} \right\} \\ &= y_0(t) + \lambda \sum_{i=1}^n b_i \frac{t^{\sigma_n+\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma_n + \sigma_i)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_2(t) &= y_0(t) + \lambda {}_0D_t^{-\sigma_n} y_1(t) \\
&= y_0(t) + \lambda {}_0D_t^{-\sigma_n} \left\{ y_0(t) + \lambda \sum_{i=1}^n b_i \frac{t^{\sigma_n + \sigma_i - 1}}{\Gamma(\sigma_n + \sigma_i)} \right\} \\
&= y_0(t) + \lambda \sum_{i=1}^n b_i \frac{t^{\sigma_n + \sigma_i - 1}}{\Gamma(\sigma_n + \sigma_i)} + \lambda^2 \sum_{i=1}^n b_i \frac{t^{2\sigma_n + \sigma_i - 1}}{\Gamma(2\sigma_n + \sigma_i)} \\
&= \sum_{i=1}^n b_i \sum_{k=0}^2 \frac{\lambda^k t^{k\sigma_n + \sigma_i - 1}}{\Gamma(k\sigma_n + \sigma_i)}
\end{aligned}$$

elde edilir ve

$$y_m(t) = \sum_{i=1}^n b_i \sum_{k=0}^m \frac{\lambda^k t^{k\sigma_n + \sigma_i - 1}}{\Gamma(k\sigma_n + \sigma_i)}, \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (3.36)$$

şeklinde gösterilebilir. (3.37) de $m \rightarrow \infty$ için limit alınrsa, (3.33)-(3.34) probleminin çözümleri elde edilir.

$$y(t) = \sum_{i=1}^n b_i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k t^{k\sigma_n + \sigma_i - 1}}{\Gamma(k\sigma_n + \sigma_i)} = \sum_{i=1}^n b_i t^{\sigma_i - 1} E_{\sigma_n, \sigma_i}(\lambda t^n) \quad (3.37)$$

Burada $E_{\alpha, \beta}(z)$ Mittag-Leffler fonksiyonudur. Bu örnekteki, (3.38) çözümleri Laplace dönüşüm metoduyla da elde edilebilir.

Eğer $n = 1$ ve $\alpha_1 = 1$ ise (3.33)-(3.34) başlangıç değer problemi

$$y'(t) = \lambda y(t), \quad y(0) = b_1 \quad (3.38)$$

formunu alır. (1.31) deki ilişkiyi gözönüne alırsak, (3.38) formülü (3.39) probleminin

$$y(t) = b_1 E_{1,1}(\lambda t) = e^{\lambda t}$$

klasik çözümünü verir.

Örnek 3.2 Terimleri Riemann-Liouville kesirli türevler olan başlangıç değer problemini ele alalım.

$${}_0D_t^\alpha y(t) = t^\alpha y(t), \quad [{}_0D_t^{\alpha-1} y(t)]_{t=0} = b \quad (3.39)$$

$$(0 < \alpha < 1)$$

Bu durumda $f(t, y) = t^\alpha y$ dir. Teorem 3.4 ün ispatından;

$$y_0(t) = \frac{bt^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \quad (3.40)$$

$$y_m(t) = \frac{bt^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \tau^\alpha y_{m-1}(\tau) d\tau \quad (3.41)$$

$$(m = 1, 2, 3, \dots)$$

elde edilir. (3.35) ve (3.36) yı kullanalım ve (2.117) deki kuvvet fonksiyonunun kesirli diferensiyeli için olan formülü uygulayalım:

$$y_m(t) = \frac{bt^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + b \sum_{k=1}^m \frac{\Gamma(2\alpha)\Gamma(4\alpha)\dots\Gamma(2k\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(3\alpha)\dots\Gamma(2k\alpha+\alpha)} t^{\alpha(2k+1)-1}$$

$$(m = 1, 2, 3, \dots)$$

ve $m \rightarrow \infty$ için limit alınrsa bu da bize

$$y(t) = \frac{bt^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + b \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^k \Gamma(2j\alpha)}{\prod_{j=1}^k \Gamma(2j\alpha+\alpha)} t^{\alpha(2k+1)-1} \quad (3.42)$$

çözümü verir.

3.4 Çözümlerin Başlangıç Koşullarına Bağlılığı

Bu kesimde başlangıç koşullarındaki küçük bir değişmeden kaynaklanan çözümdeki değişimleri ele alacağız.

(3.18) başlangıç koşullarındaki küçük değişimleri aşağıdaki gibi gösterelim:

$$[{}_0D_t^{\sigma_k-1}y(t)]_{t=0} = b_k + \delta_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.43)$$

Burada δ_k ($k = 1, 2, \dots, n$) ler keyfi sabitlerdir.

Teorem 3.5 *Teorem 3.4 ün varsayımlarının sağlandığını kabul edelim. Eğer $y(t)$ (3.18) başlangıç koşullarını sağlayan (3.17) denkleminin çözümleri ise, $\tilde{y}(t)$ de (3.44) başlangıç koşullarını sağlamak üzere aynı denklemin çözümleridirler. $0 < t \leq h$ için*

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| \leq \sum_{i=1}^n |\delta_i| t^{\sigma_i-1} E_{\sigma_n, \sigma_i}(At_n^\sigma) \quad (3.44)$$

sağlanır. Burada $E_{\alpha, \beta}(z)$ Mittag-Leffler fonksiyonudur.

İspat. Teorem 3.4 den

$$y(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} y_m(t)$$

$$y_0(t) = \sum_{i=1}^n b_i \frac{t^{\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma_i)} \quad (3.45)$$

$$y_m(t) = y_0(t) + \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t-\tau)^{\sigma_n-1} f(\tau, y_{m-1}(\tau)) d\tau \quad (3.46)$$

$$m = 1, 2, \dots$$

ve

$$\tilde{y}(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{y}_m(t)$$

$$\begin{aligned}\tilde{y}_0(t) &= \sum_{i=1}^n (b_i + \delta_i) \frac{t^{\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma_i)} \\ \tilde{y}_m(t) &= \tilde{y}_0(t) + \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t-\tau)^{\sigma_n-1} f(\tau, \tilde{y}_{m-1}(\tau)) d\tau\end{aligned}\quad (3.47)$$

(3.46) ve (3.48) den direkt olarak,

$$|y_0(t) - \tilde{y}_0(t)| \leq \sum_{i=1}^n |\delta_i| \frac{t^{\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma_i)} \quad (3.48)$$

elde edilir.

(3.47) ve (3.49) daki ilişkiyi, $f(t, y)$ fonksiyonu için Lipschitz koşulunu, (3.50) eşitsizliğini ve (2.114) deki kuvvet fonksiyonu için Riemann-Liouville kesirli diferensiyel kuralını kullanırsak;

$$\begin{aligned}|y_1(t) - \tilde{y}_1(t)| &= \left| \sum_{i=1}^n \delta_i \frac{t^{\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma_i)} + \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t-\tau)^{\sigma_n-1} \{f(\tau, y_0(\tau)) - f(\tau, \tilde{y}_0(\tau))\} d\tau \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |\delta_i| \frac{t^{\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma_i)} + \frac{A}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t-\tau)^{\sigma_n-1} |y_0(\tau) - \tilde{y}_0(\tau)| d\tau \\ &\leq \sum_{i=1}^n |\delta_i| \frac{t^{\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma_i)} + \frac{A}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t-\tau)^{\sigma_n-1} \left\{ \sum_{i=1}^n |\delta_i| \frac{\tau^{\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma_i)} \right\} d\tau \\ &\leq \sum_{i=1}^n |\delta_i| \frac{t^{\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma_i)} + A_{\cdot 0} D_t^{\sigma_n} \left\{ \sum_{i=1}^n |\delta_i| \frac{t^{\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma_i)} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n |\delta_i| \frac{t^{\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma_i)} + A \sum_{i=1}^n |\delta_i| \frac{t^{\sigma_n+\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma_n + \sigma_i)} \\ &= \sum_{i=1}^n |\delta_i| t^{\sigma_i-1} \sum_{k=0}^1 \frac{A^k t^{k\sigma_n}}{\Gamma(k\sigma_n + \sigma_i)}\end{aligned}$$

elde ederiz. Benzer şekilde;

$$\begin{aligned}|y_2(t) - \tilde{y}_2(t)| &\leq \sum_{i=1}^n |\delta_i| \frac{t^{\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma_i)} + \frac{A}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t-\tau)^{\sigma_n-1} |y_1(\tau) - \tilde{y}_1(\tau)| d\tau \\ &\leq \sum_{i=1}^n |\delta_i| \frac{t^{\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma_i)} + A_{\cdot 0} D_t^{\sigma_n} \left\{ \sum_{i=1}^n |\delta_i| \frac{t^{\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma_i)} + A \sum_{i=1}^n |\delta_i| \frac{t^{\sigma_n+\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma_n + \sigma_i)} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n |\delta_i| \frac{t^{\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma_i)} + A \sum_{i=1}^n |\delta_i| \frac{t^{\sigma_n+\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma_n + \sigma_i)} + A^2 \sum_{i=1}^n |\delta_i| \frac{t^{2\sigma_n+\sigma_i-1}}{\Gamma(2\sigma_n + \sigma_i)} \\ &= \sum_{i=1}^n |\delta_i| t^{\sigma_i-1} \sum_{k=0}^2 \frac{A^k t^{k\sigma_n}}{\Gamma(k\sigma_n + \sigma_i)}\end{aligned}$$

elde ederiz ve buradan;

$$|y_m(t) - \tilde{y}_m(t)| \leq \sum_{i=1}^n |\delta_i| t^{\sigma_i-1} \sum_{k=0}^m \frac{A^k t^{k\sigma_n}}{\Gamma(k\sigma_n + \sigma_i)} \quad (3.49)$$

$$m = 1, 2, \dots$$

olur. (3.51) in $m \rightarrow \infty$ için limiti alınırsa;

$$\begin{aligned} |y(t) - \tilde{y}(t)| &\leq \sum_{i=1}^n |\delta_i| t^{\sigma_i-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\sigma_n}}{\Gamma(k\sigma_n + \sigma_i)} \\ &= \sum_{i=1}^n |\delta_i| t^{\sigma_i-1} E_{\sigma_n, \sigma_i}(At^n) \end{aligned}$$

elde edilir ki, bu da Teorem 3.5 in ispatını tamamlar. ■

4. KESİRLİ BASAMAKTAN MODELLER

Kesirli basamaktan denklemlerin kararlılık durumu, tamsayı basamaktan denklemlerin kararlılık durumuna benzer şekilde incelenmektedir. Kesirli basamaktan lineer sistemlerin kararlılık durumunu incelerken, tamsayı lineer sistemlerde olduğu gibi özdeğerlerin durumunu incelemek ya da Routh-Hurwitz koşullarını uygulamak gerekmektedir. Lineer olmayan kesirli basamaktan sistemlerde ise, öncelikle sistem lineer hale getirilir ve daha sonra elde edilen kesirli basamaktan lineer sistemin kararlılık durumu ele alınır.

Bazı durumlarda kesirli basamaktan sistemin denge noktasının kararlılık durumunu incelerken Routh-Hurwitz koşulları gereklidir, ancak yeterli değildir. Kesirli basamaktan sistemlerin lokal asimptotik kararlılığını incelemek için;

$$\begin{aligned} D^\alpha x(t) &= f(x, y) \\ D^\alpha y(t) &= g(x, y) \end{aligned}$$

$\alpha \in [0, 1)$ sistemini ele alalım. Bu sistemin denge noktaları $f(x, y) = 0$ ve $g(x, y) = 0$ denklemlerinin ortak çözümünü ile elde edilir.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Jakobiyen matrisinin λ özdeğerleri;

$$|\arg(\lambda)| > \frac{\alpha\pi}{2}$$

koşulunu sağlıyorsa denge noktası **lokal asimptotik kararlıdır** denir.

Zamana bağlı gerçek hayat problemlerinin çoğunda karşımıza tamsayı basamaktan diferensiyel denklemler çıkmaktadır. Son zamanlarda, bazı modellerde tamsayı basamak yerine kesirli basamak kullanmanın daha iyi yaklaşım getirdiği anlaşılmıştır.

Şimdi, kesirli basamaktan lineer sistemin kararlılık durumunu incelemek için kesirli basamaktan bir sistem ele alalım.

4.1 Leyla-Mecnun Modeli

Bu modelde Leyla ve Mecnun'un aşk ilişkisini inceleyelim.

$$\begin{aligned} M(t) &= \text{Mecnun'un } t \text{ anındaki sevgisi/nefreti} \\ L(t) &= \text{Leyla'nın } t \text{ anındaki sevgisi/nefreti} \end{aligned}$$

olarak tanımlayalım ve

$$\begin{aligned} D_*^\alpha M(t) &= aM + bL \\ D_*^\alpha L(t) &= bM + aL \end{aligned}$$

lineer sistemini ele alalım. Burada a ve b parametrelerinin işaretleri, Leyla ve Mecnun'un birbirlerine gösterdikleri duygunun çeşidini gösterebilir. Buna göre a ve b nin

pozitif ve negatif değerlerini ele alarak denge noktasının kararlılık durumunu inceleyelim:

(i) $a > 0$ ve $b > 0$ olsun. Burada a ve b parametreleri ilişkide tarafların birbirlerine karşı heveslerinin birer ölçütüdür. Bu durumda Mecnun, Leyla onu sevdiği için daha da cesaretlenmektedir.

$$\begin{aligned} aM + bL &= 0 \\ bM + aL &= 0 \end{aligned}$$

denklemlerinden $(0, 0)$ denge noktası elde edilir.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$$

katsayılar matrisini oluşturursak, $A - \lambda I = 0$ denkleminde λ özdeğerleri bulunur.

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & a - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

determinantından,

$$\begin{aligned} (a - \lambda)^2 &= b^2 \\ (a - \lambda) &= \pm b \end{aligned}$$

$\lambda_1 = a + b$ ve $\lambda_2 = a - b$ özdeğerleri elde edilir. A matrisinden $p = 2a$, $q = a^2 - b^2$ ve $\Delta = p^2 - 4q^2 = 4b^2 > 0$ şeklinde bulunur. O halde ;

$$\begin{aligned} p > 0 \quad \text{ve } q = a^2 - b^2 > 0 \text{ (eğer } a^2 > b^2) \\ \text{veya } q = a^2 - b^2 < 0 \text{ (eğer } a^2 < b^2) \end{aligned}$$

olur. Her iki durumda da $(0, 0)$ denge noktası kararsızdır. Ayrıca özdeğerler,

$$\begin{aligned} \lambda_1 = a + b > 0 \quad \text{ve } \lambda_2 = a - b > 0 \text{ (} a > b \text{ ise)} \\ \text{veya } \lambda_2 = a - b < 0 \text{ (} a < b \text{ ise)} \end{aligned}$$

şeklinde elde edildiği için de $(0, 0)$ noktasının kararsız olduğu söylenir.

Bu durumda, aşıklar birbirlerine karşı çok cesaretli veya çok hassaslardır. Yani duyguları karşılıklı olup, bütün yörüngeler $M = L$ doğrusuna yaklaşır ve $(0, 0)$ verilen sistemin semer noktasıdır.

(ii) $a < 0$ ve $b < 0$ olsun. Burada a ve b parametreleri, ilişkide tarafların birbirlerine karşı tedbirlerinin birer ölçütüdür. Bu durumda Mecnun'da Leyla gibi duygularından kaçmaktadır. Özdeğerler,

$$\begin{aligned} \lambda_1 = a + b < 0 \quad \text{ve } \lambda_2 = a - b < 0 \text{ (} a < b \text{ ise)} \\ \text{veya } \lambda_2 = a - b > 0 \text{ (} a > b \text{ ise)} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

$\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$ olduğunda $(0, 0)$ denge noktası kararsız bir semer noktasıdır. $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ olması halinde ise $(0, 0)$ denge noktası kararlı bir düğüm noktasıdır.

Bu durumda Leyla ve Mecnun arasında karşılıklı ilgisizlikten dolayı bir ilişki oluşmamaktadır.

(iii) $a < 0$ ve $b > 0$ olsun. Burada a parametresi ilişkide tarafların birbirlerine tedbirlerinin bir ölçütü, b parametresi ise heveslerinin bir ölçütüdür. Bu durumda özdeğerler;

$$\lambda_2 = a - b < 0 \quad \text{ve} \quad \lambda_1 = a + b < 0 \quad (a^2 > b^2 \text{ ise}) \\ \text{veya} \quad \lambda_1 = a + b > 0 \quad (a^2 < b^2 \text{ ise})$$

şeklinde elde edilir.

Eğer $a^2 > b^2$ ise $(0, 0)$ denge noktası kararlıdır. Leyla ve Mecnun arasında karşılıklı ilgisizlikten dolayı bir ilişki oluşmamaktadır.

Eğer $a^2 < b^2$ ise $(0, 0)$ denge noktası kararsızdır. Leyla ve Mecnun'un ilişkisi başlangıçtaki duygularına bağlı olarak ya aşka ya da savaşa dönüşmektedir. Her iki durumda da eğriler $M = L$ doğrusuna yaklaşmaktadır. Yani duyguları karşılıklıdır.

(iv) $a > 0$ ve $b < 0$ olsun. Burada a parametresi ilişkide tarafların birbirlerine heveslerinin bir ölçütü, b parametresi ise tedbirlerinin bir ölçütüdür. Bu durumda özdeğerler;

$$\lambda_2 = a - b > 0 \quad \text{ve} \quad \lambda_1 = a + b > 0 \quad (a^2 > b^2 \text{ ise}) \\ \text{veya} \quad \lambda_2 = a + b < 0 \quad (a^2 < b^2 \text{ ise})$$

şeklinde elde edilir. Her iki durumda da $(0, 0)$ denge noktası kararsızdır. (Steven H. Strogatz, (1994))

KAYNAKLAR

- Erdelyi, A., (ed.) 1955. Higher Transcendental Functions, V.3., McGraw Hill, N.Y.
- Kilbas, A. Srivastava, H. M.- Trujillo J.J. 2006. Theory and Application of Fractional Differential Equations, Mathematical Studies 204, Elsevier.
- Loverro A., Fractional Calculus. 2004. History, Defination and Applications for the Engineer, Department of Aerospace and Mechanical Engineering University of Notre Dame, IN 46555, USA.
- Miller, K.S. Ross B. 1993. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley and Sons.
- Özalp, N. 2006. Matematiksel Modelleme. Gazi Yayınları, Ankara.
- Podlubny I. 1999. Fractional Differential Equations, Mathematics in Science and Engineering, Vol 198, Academic Press.
- Rabotnov, Y. N. 1977. Elements of Hereditary Solids Mechanics, Moscov.
- Selçuk B. 2004. Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler Genişletilmiş ikinci baskı, Ders Kitapları Anonim Şirketi.
- Srivastava H. M Luchko Y.F. 1995. The exact solutions of certian differential equation of fractional order by using exponential calculus, Computers Math. Applic. V.29, no. 8, pp. 73-85
- Strogatz, S.H. 1994. Nonlinear Dynamics and Chaos.
- Wright, E.M. 1933. On the coefficients of power series having exponential singularities, J. London Math. Soc., V. 8, pp. 71-79.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Aslı LÜLECİ

Doğum Yeri: Ankara

Doğum Tarihi: 26/09/1987

Medeni Hali: Bekar

Yabancı Dili: İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise: Konak Anadolu Lisesi

Lisans: Ankara Üniversitesi, Matematik Bölümü

Yüksek Lisans: Ankara Üniversitesi, FBE

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl:

Yayınları: