ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

PERİYODİK VE YARI PERİYODİK OLAN İKİNCİ MERTEBEDEN FARK OPERATÖRLERİNİN ÖZDEĞERLERİ

Elis SOYLU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2011

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

PERİYODİK VE YARI PERİYODİK OLAN
İKİNCİ MERTEBEDEN FARK OPERATÖRLERİNİN ÖZDEĞERLERİ

Elis SOYLU

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Cafer COŞKUN

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.
İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.
İkinci bölümde, spektral analizin ve lineer fark denklemlerinin bazı temel tanım ve teoremleri verilmiştir.
Üçüncü bölümde, periyodik ve yarı periyodik koşullarla verilen ikinci mertebeden fark denklemlerinin özdeğerlerinin varlığı gösterilip sayısı hesaplanmıştır.Ayrıca, başlangıç koşullarıyla verilen lineer homogen olmayan denklemin çözümlerinin gösterimleri elde edilmiştir.
Dördüncü bölümde, periyodik ve yarı periyodik koşullarla verilen problemin bazı başlangıç koşullarını sağlayan φ ve ψ çözümleri yardımıyla, denklemin özdeğerlerine ilişkin özellikleri incelenerek, bu özdeğerler arasındaki sıralama bağıntısı gösterilmiştir.

Temmuz 2011, 35 sayfa

Anahtar Kelimeler : Fark operatörü, periyodik operatör, yarı periyodik operatör, özdeğer, özfonksiyon

ABSTRACT

Master Thesis

EIGENVALUES OF SECOND-ORDER DIFFERENCE EQUATIONS WITH PERIODIC AND ANTIPERIODIC BOUNDARY CONDITIONS

Elis SOYLU

Ankara University
Graduate School of Natural And Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Cafer COŞKUN

This thesis consists of four chapters.
The first chapter is devoted to the introduction.
In Chapter two, some basic concepts of spectral analysis and linear difference equations have been recalled.
In Chapter three, existence of eigenvalues of periodic and antiperiodic boundary value problems has been showed, numbers of their eigenvalues has been calculated. In addition, a representation of solutions of a nonhomogeneous linear equation with initial conditions has been given.
In Chapter four, by means of solutions φ and ψ with some initial conditions, properties of eigenvalues of periodic and antiperiodic boundary value problems of second-order difference equations have been studied and comparison between eigenvalues has been showed.

2011, 35 pages

Key Words: Difference operator, periodic operator, antiperiodic operator, eigenvalue, eigenfunction

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana vererek çalışmalarım boyunca yakın ilgi ve önerilerini esirgemeyen hocam, Sayın Yrd. Doç.Dr. Cafer COŞKUN (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'a en içten saygı ve minnetlerimi sunarım.

Bu tez "TÜBİTAK-2228 Yüksek Lisans Burs Programı" tarafından desteklenmiştir. TÜBİTAK'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın tüm aşamalarında beni yalnız bırakmayan ve destekleyen, sevgisini ve sabrını eksik etmeyen sevgili aileme sonsuz teşekkürler ederim.

Bu tezin her aşamasında anlayışla yanımda bulunan sevgili dostlarıma en içten teşekkürlerimi sunarım.

Elis SOYLU
Ankara, Temmuz 2011.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\triangle$	İleri fark operatörü
∇	Geri fark operatörü
$\{n\}_{n=0}^{N-1}$	$[0, N-1]$ aralığındaki tam sayılar
$W[y, z]$	y ve z çözümlerinin wronskiyeni
$D(L)$	L operatörünün tanım kümesi

ŞEKİLLER DİZİNİ

1.GİRİŞ

Fonksiyonel Analiz ve Uygulamalı Matematiğin birçok probleminin çözümünde diferensiyel operatörlerin özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının bulunması gerekir. Dolayısıyla diferensiyel operatör ve denklemlerin spektral teorisi önem arz etmiş ve birçok matematikçinin araştırma konusu olmuştur.

Özdeğer ve özvektör kelimelerinin İngilizce karşılıkları *eigenvalue* ve *eigenvector* kelimeleridir. *Eigen* terimini ilk olarak David Hilbert (1862-1943) kullanmıştır. Hilbert *eigenfunktion* ve *eigenwert* ifadelerini ilk olarak integral denklemlerle ilgili bildirilerinde kullanmıştır. Hilbert'in çıkış noktası homogen olmayan integral denklemlerin, bir λ parametresiyle matrissel karşılığının $(I - \lambda A)x = y$ olması idi. Hilbert bu eşitliğin homogen kısmının sıfırdan farklı çözümüne karşılık gelen λ değerlerine *eigenwerte* adını vermiştir ve λ değerleri A matrisinin karakteristik köklerine karşılık gelmektedir. *Eigenvector* kavramı ise ilk olarak Courant ve Hilbert tarafından sonlu boyut ifadesi açıklanırken kullanılmıştır. John Von Neuman (1903-1957) bir eserinde $f \neq 0$ şartı altında $Rf = \lambda f$ ifadesindeki λ' yı *eigenwerte,* f' yi ise *eigenfunktion* olarak adlandırmıştır. Bu yaygın bir kullanım haline gelmiştir. 1946 yılında Jeffreys' in "Methods of Mathematical Physics" adlı eserinde özdeğer kavramı karakteristik değer ve gizli kök kavramlarıyla eş anlamlı olarak ifade edilmiştir.

Son yıllarda self-adjoint Sturm-Liouville operatörlerinin spektral analizi ile ilgili pek çok çalışma yapılmıştır. Sturm-Liouville operatörlerinin yerine fark operatörleri alınarak sürekli durumdan kesikli duruma geçilmiştir. Bu alandaki birçok çalışma Atkinson (1964), Agarwal (1997), Shi ve Chen (1999), Bohner (1996, 1998, 2001), Sun ve Shi (2006) tarafından yapılmıştır.

Bu yüksek lisans tezinde, N bir doğal sayı ve

$$[0, N-1] = \{n\}_{n=0}^{N-1} = \{0, 1, 2, ..., N-1\}$$

olmak üzere

$$l\,[0, N-1] = \{y = (y_0, y_1, ..., y_{N-1}) : y_n \in \mathbb{C}, 0 \leq n \leq N-1\}$$

uzayında, $n \in [0, N-1]$ için $y_n \in \mathbb{C}$, p_n, q_n, $\omega_n > 0$ ve λ spektral parametre olmak üzere

$$-\nabla\,(p_n \triangle y_n) + q_n y_n = \lambda \omega_n y_n \tag{1.1}$$

sisteminin

$$y_0 = y_N \quad , \quad y_{-1} = y_{N-1} \tag{1.2}$$

periyodik koşulları ve

$$y_0 = -y_N \quad , \quad y_{-1} = -y_{N-1} \tag{1.3}$$

yarı periyodik sınır koşulları yardımıyla özdeğerleri incelenecektir. Burada $p_{-1} = p_{N-1} = 1$ olmak üzere fark operatörleri

$$\begin{aligned} \triangle y_n &= y_{n+1} - y_n, \\ \nabla y_n &= y_n - y_{n-1} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu kısımda, ihtiyacımız olan bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1 X ve Y, K cismi üzerinde iki vektör uzayı olmak üzere,
her $x, y \in X$ ve her $\alpha, \beta \in K$ için

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$$

koşulunu sağlayan $A : X \to Y$ operatörü **lineerdir** denir (Kreyszig 1978).

Tanım 2.2 X, K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Bu durumda
(i) $\forall x \in X$ için $< x, x > \geq 0$; $< x, x >= 0 \Longleftrightarrow x = 0$
(ii) $\forall x, y \in X$ için $< x, y >= \overline{< y, x >}$
(iii) $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in K$ için $< \alpha x, y >= \alpha < x, y >$
(iv) $\forall x, y, z \in X$ için $< x + y, z >=< x, z > + < y, z >$
özelliklerini gerçekleyen $<, >: X \times X \to K$ dönüşümüne X **üzerinde bir iç çarpım** denir.
$<, >$, X üzerinde bir iç çarpım olmak üzere $X = (X, <, >)$ ikilisine de bir **iç çarpım uzayı** adı verilir.
X bir iç çarpım uzayı olmak üzere $\| x \| = \sqrt{< x, x >}$ eşitliği ile tanımlı norma göre tam ise **Hilbert Uzayı** adını alır (Kreyszig 1978).

Tanım 2.3 H bir Hilbert uzayı ve $A : D(A) \subset H \to H$ lineer bir operatör olsun. $D(A) \subset H$ yoğun olmak üzere her $x \in D(A)$ ve her $y \in H$ için

$$< Ax, y >=< x, A^* y >$$

eşitliğini gerçekleyen A^* operatörüne A **operatörünün adjointi** denir.
Adjointi kendisine eşit olan operatöre de **self-adjoint operatör** adı verilir (Kreyszig 1978).

Tanım 2.4 Her $x, y \in D(A)$ için

$$< Ax, y >=< x, Ay >$$

eşitliğini gerçekleyen A operatörüne **simetrik operatör** adı verilir (Kreyszig 1978).

Tanım 2.5 L lineer operatörünün tanım bölgesinde

$$Ly = \lambda y$$

denkleminin sıfırdan farklı bir y çözümü varsa, $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısına L operatörünün **özdeğeri,** y çözümüne de λ sayısına karşılık gelen **özfonksiyon** denir (Naimark 1967).

Tanım 2.6 L operatörünün bir λ özdeğerine karşılık gelen lineer bağımsız özfonksiyonlarının sayısına λ nın **katı** denir. λ özdeğerinin katı bir ise **basit,** birden büyük ise **çok katlı özdeğer** denir (Atkinson 1964).

3. İKİNCİ MERTEBEDEN SELF-ADJOİNT FARK DENKLEMLERİNİN ÖZDEĞERLERİ

Bu bölümde, ele alınan self-adjoint fark denkleminin özdeğerlerinin varlığı ve sayısı incelenecek, daha sonra ise başlangıç koşuluyla verilen homogen olmayan lineer denklemin çözümlerinin gösterimi elde edilecektir.

$l[0, N-1]$ uzayında

$$(ly)_n := w_n^{-1} \{(p_n + p_{n-1} + q_n)y_n - p_{n-1}y_{n-1} - p_n y_{n+1}\}$$

yardımıyla, tanım kümesi

$$D(L) = \left\{ y = \{y_n\}_{n=0}^{N-1} : y \in l\,[0, N-1]\,, \quad \begin{array}{l} 1)\ l\,(y) \in l\,[0, N-1] \\ 2)\ y_0 = y_N \\ \quad y_{-1} = y_{N-1} \end{array} \right\}$$

olan ve her $y \in D(L)$ için

$$Ly := l(y)$$

ile tanımlanan L operatörü gözönüne alınsın. (1.1)-(1.3) problemi için de yukarıdakine benzer bir tanım kümesi oluşturularak bir operatör tanımlanabilir.

Bu uzay üzerinde her $y, z \in l[0, N-1]$ için

$$< y, z >= \sum_{n=0}^{N-1} y_n w_n \overline{z_n} \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanan $<, >$ fonksiyonunun bir iç çarpım olduğu açıktır.

Bu iç çarpım ve L operatörü yardımıyla, ileride yararlanılacak olan bazı teorem ve özellikler aşağıda verilmiştir.

$$-\nabla\left(p_n \triangle y_n\right)+q_n y_n=\lambda \omega_n y_n$$

(1.1) denklem sistemini göz önüne alalım.

Fark operatörleri kullanılarak, (1.1) eşitliğinden

$$-\nabla\left(p_n\left(y_{n+1}-y_n\right)\right)+q_n y_n=\lambda \omega_n y_n$$

$$\Longrightarrow -\left[p_n y_{n+1}-p_n y_n-p_{n-1} y_n+p_{n-1} y_{n-1}\right]+q_n y_n=\lambda \omega_n y_n$$

$$\Longrightarrow p_n y_{n+1}=\left(p_n+p_{n-1}+q_n-\lambda \omega_n\right) y_n-p_{n-1} y_{n-1} \tag{3.2}$$

eşitliği elde edilir.

p_n, q_n, ω_n reel olduğundan (3.2) denkleminden $n \in [0, N-1]$ için y_n, $y_0 \neq 0$ ise λ nın $n-$inci dereceden polinomu, $y_{-1} \neq 0$, $y_0 = 0$ ise λ nın $(n-1)-$inci dereceden polinomu olacaktır.

Lemma 3.1 $y=(y_n)_{n=0}^{N-1}$ ve $z=(z_n)_{n=0}^{N-1}$ sırasıyla

$$-\nabla\left(p_n \triangle y_n\right)+q_n y_n=\lambda \omega_n y_n \quad , \quad n \in [0, N-1] \tag{3.3}$$

$$-\nabla\left(p_n \triangle z_n\right)+q_n z_n=\mu \omega_n z_n \quad , \quad n \in [0, N-1] \tag{3.4}$$

denklem sistemlerinin çözümleri ise, her n$\in [0, N-1]$ için

$$(\lambda-\mu) \sum_{j=0}^{n} \omega_j y_j z_j=p_n(y_n z_{n+1}-y_{n+1} z_n)-p_{-1}(y_{-1} z_0-y_0 z_{-1})$$

gerçeklenir (Wang ve Shi 2005).

İspat. (3.3) ve (3.4) eşitlikleri sırasıyla z_n ve $-y_n$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa

$$\left[\nabla\left(p_n \triangle z_n\right)\right] y_n-\left[\nabla\left(p_n \triangle y_n\right)\right] z_n=\lambda \omega_n y_n z_n-\mu \omega_n y_n z_n$$

ifadesi elde edilir.

Buradan

$$\begin{aligned}
(\lambda-\mu)\sum_{j=0}^{n}\omega_j y_j z_j &= \sum_{j=0}^{n}\left[\left(\nabla\left(p_j\triangle z_j\right)\right)y_j-\left(\nabla\left(p_j\triangle y_j\right)\right)z_j\right]\\
&= \sum_{j=0}^{n}\left(p_j z_{j+1}y_j-p_j y_{j+1}z_j+p_{j-1}z_{j-1}y_j-p_{j-1}y_{j-1}z_j\right)\\
&= p_0 z_1 y_0-p_0 y_1 z_0+p_{-1}z_{-1}y_0-p_{-1}y_{-1}z_0\\
&\quad +p_1 z_2 y_1-p_1 y_2 z_1+p_0 z_0 y_1-p_0 y_0 z_1\\
&\quad \vdots\\
&\quad +p_n z_{n+1}y_n-p_n y_{n+1}z_n+p_{n-1}z_{n-1}y_n-p_{n-1}y_{n-1}z_n\\
&= p_n\left(y_n z_{n+1}-y_{n+1}z_n\right)-p_{-1}\left(y_{-1}z_0-y_0 z_{-1}\right)
\end{aligned}$$

bulunur.

Tanım 3.1 $y=(y_n)_{n=0}^{N}$ ve $z=(z_n)_{n=0}^{N}$, (1.1) denkleminin herhangi iki çözümü ise bu çözümlerin Wronskiyeni

$$W[y,z](n)=\begin{vmatrix} y_{n+1} & z_{n+1}\\ p_n\Delta y_n & p_n\Delta z_n\end{vmatrix} \tag{3.5}$$

olarak tanımlanır (Wang ve Shi 2005).

Lemma 3.1 yardımıyla aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.1 (1.1) denklem sisteminin herhangi iki çözümünün Wronskiyeni sabittir (Wang ve Shi 2005).

İspat. Wronskiyenin tanımından

$$
\begin{aligned}
W[y,z](n) &= \begin{vmatrix} y_{n+1} & z_{n+1} \\ p_n \triangle y_n & p_n \triangle z_n \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} y_{n+1} & z_{n+1} \\ p_n y_{n+1} - p_n y_n & p_n z_{n+1} - p_n z_n \end{vmatrix} \\
&= p_n y_{n+1} z_{n+1} - p_n y_{n+1} z_n - p_n y_{n+1} z_{n+1} + p_n y_n z_{n+1} \\
&= -p_n \left(y_{n+1} z_n - y_n z_{n+1} \right)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Lemma 3.1 de $\lambda = \mu$ alınırsa her $n \in [0, N-1]$ için

$$p_n \left(y_{n+1} z_n - y_n z_{n+1} \right) = p_{-1} \left(y_{-1} z_0 - y_0 z_{-1} \right) \tag{3.6}$$

bulunur. Bu ise her $n \in [0, N-1]$ için

$$W[y,z](n) = -p_{-1} \left(y_{-1} z_0 - y_0 z_{-1} \right)$$

olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır.

(1.1) sisteminin

$$y_0 = y_N, \qquad y_{-1} = y_{N-1}$$

tipindeki koşullarına **periyodik sınır koşulları**, (1.1) sistemi bu koşul ile göz önüne alındığında elde edilen probleme de (1.1) sisteminin **periyodik sınır değer problemi** denir.

Aynı sistemin

$$y_0 = -y_N, \qquad y_{-1} = -y_{N-1}$$

şeklindeki koşullarına da **yarı periyodik sınır koşulları** denir. Bu koşul ile birlikte elde edilen probleme de **yarı periyodik sınır değer problemi** adı verilir.

Teorem 3.2 (1.1)-(1.2) ve (1.1)-(1.3) problemlerinin N tane reel özdeğeri vardır (Wang ve Shi 2005).

İspat. $y, z \in D(L)$ olsun. Bu durumda y ve z, (1.2) sınır koşullarını sağlamalıdır. O halde

$$\begin{aligned} y_{N-1} &= y_{-1} \\ y_N &= y_0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} z_{N-1} &= z_{-1} \\ z_N &= z_0 \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanmalıdır. Ayrıca, (3.1) ile verilen iç çarpım tanımına göre

$$\begin{aligned} \langle Ly, z\rangle &= \langle ly, z\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} (ly)_n w_n \overline{z_n} \\ \langle y, Lz\rangle &= \langle y, lz\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} y_n w_n \overline{(lz)_n} \end{aligned}$$

eşitlikleri de gerçeklenir.

L operatörünün tanımı ve sonlu toplamın özellikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \langle Ly, z\rangle - \langle y, Lz\rangle &= \sum_{n=0}^{N-1} (ly)_n w_n \overline{z_n} - \sum_{n=0}^{N-1} y_n w_n \overline{(lz)_n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[(ly)_n w_n \overline{z_n} - y_n w_n \overline{(lz)_n}\right] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} [-p_{n-1} y_{n-1} \overline{z_n} + p_{n-1} y_n \overline{z_{n-1}} \\ &\quad -p_n y_{n+1} \overline{z_n} + p_n y_n \overline{z_{n+1}}] \\ &= -p_{-1} y_{-1} \overline{z_0} + p_{-1} y_0 \overline{z_{-1}} \\ &\quad -p_{N-1} y_N \overline{z_{N-1}} + p_{N-1} y_{N-1} \overline{z_N} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. $p_{-1} = p_{N-1} = 1$ olduğu dikkate alınıp, (1.2) sınır koşulları da yerlerine yazıldığında

$$\begin{aligned} \langle Ly, z\rangle - \langle y, Lz\rangle &= -y_{-1}\overline{z_0} + y_0\overline{z_{-1}} - y_N\overline{z_0} + y_{N-1}\overline{z_N} \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise her $y, z \in D(L)$ için

$$\langle Ly, z\rangle = \langle y, Lz\rangle \tag{3.7}$$

olması demektir.

μ, (1.2) sınır koşullarıyla verilen (1.1) fark denkleminin bir özdeğeri olsun. Bu durumda, $Ly = \mu y$ ve $y \neq 0$ olacak biçimde bir $y \in D(L)$ vardır.
L operatörünün tanımı gereğince, $n \in [0, N-1]$ için

$$w_n^{-1}\left\{(p_n + p_{n-1} + q_n)y_n - p_{n-1}y_{n-1} - p_n y_{n+1}\right\} = \mu y_n$$

gerçeklenir. Buna göre (3.7) gereğince

$$\langle Ly, y\rangle = \langle y, Ly\rangle$$

yazılabileceğinden

$$\begin{aligned} \langle \mu y, y\rangle &= \langle y, \mu y\rangle \\ \mu\langle y, y\rangle &= \bar{\mu}\langle y, y\rangle \\ \|y\|^2(\mu - \bar{\mu}) &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. $\|y\| \neq 0$ olduğundan

$$\mu = \bar{\mu}$$

olmalıdır ki, bu da μ özdeğerinin reel olduğunu gösterir.

(1.1)-(1.2) problemine karşılık gelen operatörün lineer dönüşümü A matrisiyle gösterilmek üzere, $A - \lambda I$ matrisi

$$\begin{pmatrix} (p_0 + p_{-1} + q_0 - \omega_0\lambda) & -p_0 & \dots & -1 \\ -p_0 & (p_1 + p_0 + q_1 - \omega_1\lambda) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & \dots & (p_{N-1} + p_{N-2} + q_{N-1} - \omega_{N-1}\lambda) \end{pmatrix}$$

şeklinde bulunur. $A - \lambda I$ matrisi simetrik olup simetrik bir matris köşegenleştirilebilir. Köşegen bir matrisin köşegen elemanları matrisin özdeğerleri olacağından bu matrisin tam N tane özdeğeri olacaktır.

Benzer şekilde (1.1)-(1.3) probleminin de N tane reel özdeğeri vardır.

Şimdi de (1.1)-(1.2) ile (1.1)-(1.3) problemlerinin özdeğerlerini daha kolay inceleyebilmek için

$$y_{-1} = y_{N-1} = 0 \tag{3.8}$$

Dirichlet koşullarına bakalım. (1.1)-(3.8) probleminin özdeğerleri arasındaki ilişki aşağıdaki lemma ve teoremlerde verilmiştir.

Teorem 3.3 λ ve μ, (1.1)-(3.8) denklem sisteminin özdeğerleri ve bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar da sırasıyla $y_n(\lambda)$, $y_n(\mu)$ olmak üzere $0 \leq n < N-1$ için

$$(\lambda - \mu) \sum_{j=0}^{n} \omega_j y_j(\lambda) y_j(\mu) = \begin{vmatrix} y_{n+1}(\lambda) & y_{n+1}(\mu) \\ p_n \triangle y_n(\lambda) & p_n \triangle y_n(\mu) \end{vmatrix} \tag{3.9}$$

elde edilir (Atkinson 1964).

İspat. Teorem 3.1 ve Lemma 3.1 deki eşitliklerden yararlanıp (3.8) sınır koşulları kullanılırsa istenen eşitlik elde edilir.

Teorem 3.4 λ, (1.1)-(3.8) denklem sisteminin özdeğeri ve $y(\lambda) = (y_n(\lambda))$ fonksiyonu da bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyon olsun. $y'_n(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} y_n(\lambda)$ olmak üzere, $0 \leq n < N-1$ için

$$\sum_{j=0}^{n} \omega_j \{y_j(\lambda)\}^2 = \begin{vmatrix} y'_{n+1}(\lambda) & y_{n+1}(\lambda) \\ p_n \triangle y'_n(\lambda) & p_n \triangle y_n(\lambda) \end{vmatrix}$$

eşitliği elde edilir (Atkinson 1964).

İspat. (3.9) ifadesinin sol tarafı düzenlenip yazıldığında

$$(\lambda - \mu) \sum_{j=0}^{n} \omega_j y_j(\lambda) z_j(\lambda) = p_n \left[y_{n+1}(\lambda) y_n(\mu) - y_n(\lambda) y_{n+1}(\mu) \right]$$

bulunur. Bu eşitliğin sol tarafındaki paranteze $y_{n+1}(\lambda)y_n(\lambda)$ ifadesi eklenip çıkarılır ve eşitliğin her iki tarafı $(\lambda - \mu)$ ifadesine bölündükten sonra $\mu \to \lambda$ iken limit alınırsa

$$\sum_{j=0}^{n} \omega_j \{y_j(\lambda)\}^2 = p_n \left[y_{n+1}(\lambda) y'_n(\lambda) - y'_{n+1}(\lambda) y_n(\lambda) \right]$$

elde edilir.

Eşitliğin sol tarafında (3.8) sınır koşulları dikkate alınırsa

$$y'_{n+1}(\lambda) y_n(\lambda) - y_{n+1}(\lambda) y'_n(\lambda) < 0 \tag{3.10}$$

eşitsizliği bulunur.

Teorem 3.5 (1.1)-(3.8) sisteminin $n = 1, 2, ..., N-1$ için çözümü $y_n(\lambda) = (y_n(\lambda))$ olmak üzere $y_n(\lambda)$ ile $y_{n-1}(\lambda)$ ardışık polinomları ortak sıfıra sahip değildir. Ayrıca, birinin iki sıfırı arasında diğerinin bir sıfırı vardır (Atkinson 1964).

İspat. (1.1)-(3.8) sisteminin özdeğerleri reel olduğundan (3.10) eşitsizliğinden $y_n(\lambda)$, $y_{n-1}(\lambda)$ ardışık polinomlarının ortak sıfırı yoktur.

Şimdi de sıfırlarının yerlerini inceleyelim.

λ_1 ve λ_2, $y_n(\lambda)$ çözümünün ardışık sıfırları olsun. $y_n(\lambda)$ çözümü sadece basit sıfırlara sahip olduğundan $y_n'(\lambda_1)$ ile $y_n'(\lambda_2)$ zıt işaretlidir. (3.10) eşitsizliğinde n yerine $n-1$ yazılırsa

$$y_n'(\lambda_1)\, y_{n-1}(\lambda_1) > 0$$

ve

$$y_n'(\lambda_2)\, y_{n-1}(\lambda_2) > 0$$

bulunur. Buradan $y_{n-1}(\lambda_1)$ ile $y_{n-1}(\lambda_2)$ çözümlerinin zıt işaretli olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla ardışık $y_n(\lambda)$ ve $y_{n-1}(\lambda)$ polinomlarından birinin iki sıfırı arasında diğerinin bir sıfırı vardır.

(1.1)-(3.8) probleminin özdeğerleri hakkında verilen bu teoremler yardımıyla aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1 (1.1)-(3.8) sınır değer probleminin

$$\mu_0 < \mu_1 < ... < \mu_{N-2}$$

artan şekilde sıralanan $N-1$ tane reel ve basit özdeğeri vardır.

$$y_{-1}(\lambda) = 0, y_0(\lambda) \neq 0 \tag{3.11}$$

başlangıç koşullarıyla birlikte $n \in [0, N-1]$ için

$$p_n y_{n+1} = (p_n + p_{n-1} + q_n - \lambda\omega_n)\, y_n - p_{n-1} y_{n-1}$$

denkleminin çözümü $y_n(\lambda)$ olsun.

Bu durumda, $y_n(\lambda)$ çözümünün $[0, N-1]$ tamsayı aralığında

(i) $\lambda < \mu_0$ ise işaret değişimi yoktur,

(ii) $\mu_r < \lambda < \mu_{r+1} (0 \leq r \leq N-3)$ ise $(r+1)$ tane işaret değişimi vardır,

(iii) $\lambda > \mu_{N-2}$ ise $(N-1)$ tane işaret değişimi vardır

(Atkinson 1964).

Lemma 3.2 $0 \leq k \leq N-2$ için μ_k, (1.1)-(3.8) probleminin artan sırada düzenlenmiş ve (3.11) koşulunu sağlayan özdeğerleri olsun. O halde, $n = -1, 0, ..., N-2$ için

$$y_x(\mu_k) = \begin{cases} y_{-1}(\mu_k) & , \quad x = -1 \\ (y_{n+1}(\mu_k) - y_n(\mu_k))(x-n) + y_n(\mu_k) & , \quad n < x \leq n+1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $y_x(\mu_k)$ sürekli fonksiyonu $0 \leq k \leq N-2$ için $(-1, N-1)$ aralığında k tane sıfır yerine sahiptir (Atkinson 1964).

Teorem 3.3 φ_n ve ψ_n (1.1) denkleminin

$$\varphi_{-1} = \psi_0 = 1 \text{ ve } \varphi_0 = \psi_{-1} = 0$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri olsun. Herhangi bir $\{f_n\}_{n=0}^{N-1} \subset \mathbb{C}$ ve $c_{-1},\ c_0 \in \mathbb{C}$ için $n \in [0, N-1]$ olmak üzere

$$-\nabla(p_n \triangle z_n) + (q_n - \lambda\omega_n) z_n = \omega_n f_n \tag{3.12}$$

$$z_{-1} = c_{-1},\ z_0 = c_0 \tag{3.13}$$

başlangıç değer probleminin tek bir z çözümü vardır ve $n \in [-1, N]$ için bu çözüm

$$z_n = c_{-1}\varphi_n + c_0\psi_n + \sum_{j=0}^{n-1} \omega_j \left(\varphi_n\psi_j - \varphi_j\psi_n\right) f_j$$

şeklinde gösterilir $\left(\text{Burada } \sum_{j=0}^{-2} \cdot = \sum_{j=0}^{-1} \cdot := 0 \text{ dır.}\right)$ (Wang ve Shi 2005).

İspat. (1.1) denklem sistemi göz önüne alınırsa, (3.12) ile (3.13) probleminin tek bir çözümü vardır. (3.6) yardımıyla $W[\varphi,\psi](n)=1$ olacağından φ ve ψ çözümlerinin lineer bağımsızlığı kolayca görülür.

Parametrelerin değişimi metodu kullanılırsa, $n\in[-1,N]$ için

$$z_n = A_n\varphi_n + B_n\psi_n$$

yazılabileceğinden

$$\begin{aligned}\triangle z_n &= z_{n+1}-z_n = A_{n+1}\varphi_{n+1}+B_{n+1}\psi_{n+1}-A_n\varphi_n-B_n\psi_n\\ &= A_n\left(\varphi_{n+1}-\varphi_n\right)-A_n\varphi_{n+1}+\varphi_{n+1}\left(A_{n+1}-A_n\right)+\varphi_{n+1}A_n\\ &\quad +B_n\left(\psi_{n+1}-\psi_n\right)-B_n\psi_{n+1}+\psi_{n+1}\left(B_{n+1}-B_n\right)+\psi_{n+1}B_n\end{aligned}$$

elde edilir. $n\in[-1,N-1]$ için

$$\varphi_{n+1}\triangle A_n+\psi_{n+1}\triangle B_n=0$$

alınırsa ve

$$\triangle z_n = A_n\triangle\varphi_n + B_n\triangle\psi_n$$

olduğu göz önünde bulundurulursa

$$-\bigtriangledown\left(p_n\triangle z_n\right) = -\bigtriangledown\left(A_np_n\triangle\varphi_n + B_np_n\triangle\psi_n\right)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
-\bigtriangledown\left(A_np_n\bigtriangleup\varphi_n\right) &= -\bigtriangledown\big(A_np_n\left(\varphi_{n+1}-\varphi_n\right)\big)\\
&= -\big[A_np_n\left(\varphi_{n+1}-\varphi_n\right)-A_{n-1}p_{n-1}\left(\varphi_n-\varphi_{n-1}\right)\big]\\
&= [-A_np_n\left(\bigtriangleup\varphi_n\right)-A_{n-1}p_{n-1}\left(\bigtriangleup\varphi_{n-1}\right)\\
&\quad +A_np_{n-1}\left(\bigtriangleup\varphi_{n-1}\right)-A_np_{n-1}\left(\bigtriangleup\varphi_{n-1}\right)]\\
&= -\big[A_np_n\left(\bigtriangleup\varphi_n\right)+\left(\bigtriangledown A_n\right)p_{n-1}\bigtriangleup\varphi_{n-1}-A_np_{n-1}\left(\bigtriangleup\varphi_{n-1}\right)\big]\\
&= -\big[A_n\bigtriangledown\left(p_n\bigtriangleup\varphi_n\right)+\left(\bigtriangledown A_n\right)p_{n-1}\bigtriangleup\varphi_{n-1}\big]
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer işlemler B_n katsayılı terim için de yapılırsa

$$\begin{aligned}
-\bigtriangledown\left(p_n\bigtriangleup z_n\right) &= -A_n\bigtriangledown\left(p_n\bigtriangleup\varphi_n\right)-\left(\bigtriangledown A_n\right)p_{n-1}\bigtriangleup\varphi_{n-1}\\
&\quad -B_n\bigtriangledown\left(p_n\bigtriangleup\psi_n\right)+\left(\bigtriangledown B_n\right)p_{n-1}\bigtriangleup\psi_{n-1}
\end{aligned}$$

bulunur.

φ_n ve ψ_n (1.1) denklem sisteminin çözümleri olduğundan, $n\in[0,N-1]$ için

$$-\bigtriangledown\left(p_n\bigtriangleup\varphi_n\right)+q_n\varphi_n=\lambda\omega_n\varphi_n$$

denklemi A_n ile ve

$$-\bigtriangledown\left(p_n\bigtriangleup\psi_n\right)+q_n\psi_n=\lambda\omega_n\psi_n$$

denklemi de B_n ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
-A_n\bigtriangledown\left(p_n\bigtriangleup\varphi_n\right)+A_nq_n\varphi_n &= \lambda\omega_nA_n\varphi_n\\
-B_n\bigtriangledown\left(p_n\bigtriangleup\psi_n\right)+B_nq_n\psi_n &= \lambda\omega_nB_n\psi_n
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikler beraber gözönüne alınırsa

$$-\bigtriangledown(p_n\bigtriangleup z_n)=\left(\lambda\omega_n-q_n\right)\left(A_n\varphi_n+B_n\psi_n\right)-\left(\bigtriangledown A_n\right)p_{n-1}\bigtriangleup\varphi_{n-1}-\left(\bigtriangledown B_n\right)p_{n-1}\bigtriangleup\psi_{n-1}$$

eşitliğine ulaşılır.

$n \in [-1, N]$ için

$$(\bigtriangledown A_n)\, p_{n-1} \bigtriangleup \varphi_{n-1} + (\bigtriangledown B_n)\, p_{n-1} \bigtriangleup \psi_{n-1} = -\omega_n f_n$$

$f_n \in \mathbb{C}$ olmak üzere A_n ve B_n katsayılarını kolayca bulmak için

$$(\bigtriangledown A_N)\, p_{N-1} \bigtriangleup \varphi_{N-1} + (\bigtriangledown B_N)\, p_{N-1} \bigtriangleup \psi_{N-1} = -\omega_N f_N$$

yardımcı koşulu kullanılırsa, $n \in [0, N]$ için

$$\begin{aligned} \varphi_n \bigtriangledown A_n + \psi_n \bigtriangledown B_n &= 0 \\ (\bigtriangledown A_n)\, p_{n-1} \bigtriangleup \varphi_{n-1} + (\bigtriangledown B_n)\, p_{n-1} \bigtriangleup \psi_{n-1} &= -\omega_n f_n \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Cramer Kuralından

$$\bigtriangledown A_n = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \psi_n \\ -\omega_n f_n & p_{n-1} \bigtriangleup \psi_{n-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_n & \psi_n \\ p_{n-1} \bigtriangleup \varphi_{n-1} & p_{n-1} \bigtriangleup \psi_{n-1} \end{vmatrix}} = \frac{\omega_n \psi_n f_n}{W[\varphi, \psi](n-1)}$$

ve

$$\bigtriangledown B_n = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_n & 0 \\ p_{n-1} \bigtriangleup \varphi_{n-1} & -\omega_n f_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_n & \psi_n \\ p_{n-1} \bigtriangleup \varphi_{n-1} & p_{n-1} \bigtriangleup \psi_{n-1} \end{vmatrix}} = -\frac{\omega_n \varphi_n f_n}{W[\varphi, \psi](n-1)}$$

eşitlikleri elde edilir.

$p_{-1} = 1$, $\varphi_{-1} = \psi_0 = 1$, $\varphi_0 = \psi_{-1} = 0$ ve Wronskiyen sabit olduğundan $n = 0$ noktasındaki değeri 1 olarak elde edilecek olursa

$$\bigtriangledown A_n = \omega_n \psi_n f_n, \;\; \bigtriangledown B_n = -\omega_n \varphi_n f_n, n \in [0, N]$$

ifadesine ulaşılır. Buradan $n \in [-1, N]$ için

$$A_n = A_{-1} + \sum_{j=0}^{n} \omega_j \psi_j f_j$$

ve

$$B_n = B_{-1} - \sum_{j=0}^{n} \omega_j \varphi_j f_j$$

bulunur. Böylece

$$z_n = A_{-1}\varphi_n + B_{-1}\psi_n + \sum_{j=0}^{n-1} \omega_j \left(\varphi_n \psi_j - \varphi_j \psi_n\right) f_j$$

gösterimi elde edilir. (3.13) koşulları kullanılarak da

$$z_n = c_{-1}\varphi_n + c_0\psi_n + \sum_{j=0}^{n-1} \omega_j \left(\varphi_n \psi_j - \varphi_j \psi_n\right) f_j$$

eşitliğine ulaşılır.

4. İKİNCİ DERECEDEN SELF-ADJOİNT FARK DENKLEMİNİN ÖZDEĞERLERİNİN SIRALANMASI

Bu bölümde periyodik ve yarı periyodik sınır koşullarıyla ikinci mertebeden self-adjoint fark denklemlerinin özdeğerleri arasındaki karşılaştırmayı elde edebilmek için gerekli önermeler verilecektir.

Öncelikle bu önermelerde sıkça kullanılacak olan önemli bir ifade gösterilecektir. (3.6) ifadesinde n yerine $N-1$ alınır ve $p_{N-1}=1$ eşitliği kullanılırsa

$$\varphi_N\psi_{N-1}-\varphi_{N-1}\psi_N=-1 \tag{4.1}$$

elde edilir.

Lemma 4.1 λ sayısının (1.1)-(1.2) problemininin bir özdeğeri olması için gerek ve yeter koşul $f(\lambda)=\varphi_{N-1}(\lambda)+\psi_N(\lambda)=2$ koşulunu sağlamasıdır. Ayrıca λ özdeğerinin çok katlı olması için gerek ve yeter koşul

$$\begin{aligned}\varphi_{N-1}(\lambda) &= \psi_N(\lambda)=1\\ \varphi_N(\lambda) &= \psi_{N-1}(\lambda)=0\end{aligned}$$

eşitliklerinin gerçeklenmesidir (Wang ve Shi 2005).

İspat. φ_n ve ψ_n, (1.1) denkleminin lineer bağımsız iki çözümü olduğundan, λ sayısının, (1.1)-(1.2) probleminin bir özdeğeri olması için gerek ve yeter koşul

$$c\varphi_n+d\psi_n \qquad\qquad (|c|+|d|\neq 0)$$

ifadesinde (1.2) sınır koşullarını sağlayacak biçimde c, d sabitlerinin mevcut olmasıdır. İlk sınır koşulu yerine yazıldığında

$$c\left(1-\varphi_{N-1}(\lambda)\right)-d\psi_{N-1}(\lambda)=0 \tag{4.2}$$

eşitliği elde edilir. İkinci sınır koşulu yerine yazıldığında ise

$$c\varphi_N(\lambda) + d(\psi_N(\lambda) - 1) = 0 \tag{4.3}$$

eşitliğine ulaşılır. c ve d aynı anda sıfır olamayacağından

$$\begin{vmatrix} 1 - \varphi_{N-1}(\lambda) & \psi_{N-1}(\lambda) \\ \varphi_N(\lambda) & \psi_N(\lambda) - 1 \end{vmatrix} = 0$$

gerçeklenmelidir. Buradan

$$f(\lambda) = \varphi_{N-1}(\lambda) + \psi_N(\lambda) = 2$$

bulunur.

λ özdeğerinin çok katlı olması için, yani (1.1) denkleminin (1.2) sınır koşullarını gerçekleyen lineer bağımsız iki çözümünün olması için gerek ve yeter koşul ise

$$\varphi_{N-1}(\lambda) = \psi_N(\lambda) = 1$$

ve

$$\varphi_N(\lambda) = \psi_{N-1}(\lambda) = 0$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

Önerme 4.1 $0 \leq k \leq N-2$ için μ_k, (1.1) -(3.8) problemininin bir özdeğeri olsun. Bu durumda

$$k \text{ tek ise } f(\mu_k) \geqslant 2,$$

$$k \text{ çift ise } f(\mu_k) \leq -2$$

eşitsizlikleri gerçeklenir (Wang ve Shi 2005).

İspat. φ_n ve ψ_n (1.1) denkleminin lineer bağımsız iki çözümü olduğundan;

$|c| + |d| \neq 0$ koşulunu sağlayan c ve d sabitleri için

$$y_n = c\varphi_n(\mu_k) + d\psi_n(\mu_k)$$

çözümü (1.1) denklemi ile (3.8) koşullu problemin μ_k özdeğerine göre özfonksiyonudur.

$y_{-1} = y_{N-1} = 0$ olduğu gözönüne alındığında

$$\begin{gathered} c\varphi_{-1}(\mu_k) + d\psi_{-1}(\mu_k) = 0 \\ c\varphi_{N-1}(\mu_k) + d\psi_{N-1}(\mu_k) = 0 \end{gathered}$$

eşitliklerinden

$$\begin{aligned} c &= 0, \\ d\psi_{N-1}(\mu_k) &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

c ve d aynı anda sıfır olamayacağından $\psi_{N-1}(\mu_k) = 0$ olmalıdır.

Böylece, $\psi_n(\mu_k)$ (1.1)-(3.7) probleminin özfonksiyonu olur.

$$p_n y_{n+1} = (p_n + p_{n-1} + q_n - \lambda\omega_n)y_n - p_{n-1}y_{n-1}$$

eşitliğinde; n yerine $N-1$ ve y_n yerine $\psi_n(\mu_k)$ alınırsa

$$p_{N-1}\psi_N(\mu_k) = (p_{N-1} + p_{N-2} + q_{N-1} - \lambda\omega_{N-1})\psi_{N-1}(\mu_k) - p_{N-2}\psi_{N-2}(\mu_k)$$

bulunur. $p_{N-1} = 1$ ve $\psi_{N-1}(\mu_k) = 0$ olduğundan

$$\psi_N(\mu_k) = -p_{N-2}\psi_{N-2}(\mu_k)$$

gerçeklenir. Bu durumda $p_{N-2} > 0$ olduğundan; $\psi_{N-2}(\mu_k)$ ile $\psi_N(\mu_k)$ zıt işaretli olur.

$n = -1, 0, ..., N-2$ için

$$\psi_x(\mu_k) = \begin{cases} \psi_{-1}(\mu_k), \; x = -1 \\ (\psi_{n+1}(\mu_k) - \psi_n(\mu_k))(x-n) + \psi_n(\mu_k), \; n < x \leq n+1 \end{cases}$$

parçalı fonksiyonu $[-1, N]$ aralığında süreklidir.

Lemma 3.2 gereğince $\psi_x(\mu_k)$ fonksiyonunun $(-1, N-1)$ aralığında k tane sıfır yeri vardır.

Dolayısıyla $\psi_x(\mu_0)$ fonksiyonunun $(-1, N-1)$ reel aralığında sıfırı yoktur.
$\psi_0(\mu_0) = 1$ olduğundan

$$\psi_x(\mu_0) > 0$$

elde edilir. Buradan

$$\psi_N(\mu_0) = -p_{N-2}\psi_{N-2}(\mu_0) \Longrightarrow \psi_N(\mu_0) < 0$$

eşitsizliği gerçeklenir.

Lemma 2.3 gereğince $\psi_x(\mu_1)$ fonksiyonunun $(-1, N-1)$ reel aralığında bir tane sıfır yeri vardır.

$$\psi_{-1}(\mu_1) = 0, \;\; \psi_0(\mu_1) = 1$$

olduğundan $\psi_{N-2}(\mu_1) < 0$ bulunur. Aksi halde $\psi_x(\mu_1)$ fonksiyonunun birden fazla sıfırı olurdu. O halde

$$\psi_N(\mu_1) = -p_{N-2}\psi_{N-2}(\mu_1) \Longrightarrow \psi_N(\mu_1) > 0$$

eşitsizliği elde edilir.

Benzer şekilde devam edilirse, $2 \leq k \leq N-2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} k \text{ tek için,} \quad \psi_N(\mu_k) > 0 \\ k \text{ çift için,} \quad \psi_N(\mu_k) < 0 \end{aligned}$$

elde edilir. (4.1) ifadesi ve

$$\psi_{N-1}(\mu_k) = 0$$

eşitliği kullanılırsa

$$\varphi_{N-1}(\mu_k)\psi_N(\mu_k) = 1$$

bulunur.

k tek için $\psi_N(\mu_k) > 0$ olduğu

$$f(\mu_k) = \psi_N(\mu_k) + \frac{1}{\psi_N(\mu_k)}$$

eşitliğinde göz önüne alınırsa

$$f(\mu_k) \geq 2$$

eşitsizliği elde edilir.

Benzer şekilde k çift için

$$f(\mu_k) \leq -2$$

bulunur.

Önerme 4.2 Aşağıdaki önermeler doğrudur:

(i) λ sayısının (1.1)-(1.2) probleminin çok katlı özdeğeri olması için gerek ve yeter koşul $f(\lambda) = 2$ ve $f'(\lambda) = 0$ eşitliklerinin gerçeklenmesidir.

(ii) λ sayısının (1.1)-(1.3) probleminin çok katlı özdeğeri olması için gerek ve yeter koşul $f(\lambda) = 2$ ve $f'(\lambda) = 0$ eşitliklerinin gerçeklenmesidir (Wang ve Shi 2005).

Ayrıca $0 \leq i \leq N-2$ için μ_i (1.1)-(3.8) problemininin bir özdeğeri ve $\lambda \neq \mu_i$ olmak üzere $f(\lambda) = 2$ veya -2 ise; λ, (1.1)-(1.2) veya (1.1)-(1.3) problemlerinin basit özdeğeridir ve

$$\begin{array}{ll} f'(\lambda) < 0 & , \quad \lambda < \mu_0 \\ (-1)^r f'(\lambda) > 0, \ 0 \leq r \leq N-3 & , \quad \mu_r < \lambda < \mu_{r+1} \\ (-1)^{N-2} f'(\lambda) > 0 & , \quad \lambda > \mu_{N-2} \end{array}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. *(i)* φ_n ve ψ_n (1.1) denklem sisteminin çözümü olduğundan

$$\begin{aligned} -\nabla\left(p_n \triangle \varphi_n(\lambda)\right) + q_n\varphi_n(\lambda) &= \lambda\omega_n\varphi_n(\lambda) \\ -\nabla\left(p_n \triangle \psi_n(\lambda)\right) + q_n\psi_n(\lambda) &= \lambda\omega_n\psi_n(\lambda) \end{aligned}$$

λ ya göre türevlerini alırsak

$$\begin{aligned} -\nabla\left(p_n \triangle \varphi_n'(\lambda)\right) + (q_n - \lambda\omega_n)\varphi_n'(\lambda) &= \omega_n\varphi_n(\lambda) \\ -\nabla\left(p_n \triangle \psi_n'(\lambda)\right) + (q_n - \lambda\omega_n)\psi_n'(\lambda) &= \omega_n\psi_n(\lambda) \end{aligned}$$

bulunur. Başlangıç koşullarından

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_{-1} = \psi_0 = 1 \\ \varphi_0 = \psi_{-1} = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} \varphi_{-1}' = \psi_0' = 0 \\ \varphi_0' = \psi_{-1}' = 0 \end{array}$$

elde edilir.

Teorem 2.3 gereğince

$$\begin{aligned}
\varphi_n'(\lambda) &= \sum_{j=0}^{n-1} \omega_j \varphi_j(\lambda)(\varphi_n(\lambda)\psi_j(\lambda) - \varphi_j(\lambda)\psi_n(\lambda)) \\
\psi_n'(\lambda) &= \sum_{j=0}^{n-1} \omega_j \psi_j(\lambda)(\varphi_n(\lambda)\psi_j(\lambda) - \varphi_j(\lambda)\psi_n(\lambda))
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

$$f = \varphi_{N-1} + \psi_N$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
f' &= \varphi_{N-1}' + \psi_N' \\
&= \sum_{j=0}^{N-2} \omega_j \varphi_j (\varphi_{N-1}\psi_j - \varphi_j \psi_{N-1}) + \sum_{j=0}^{N-1} \omega_j \psi_j (\varphi_N \psi_j - \varphi_j \psi_N)
\end{aligned}$$

olarak yazılır.

$$\omega_{N-1}\varphi_{N-1}(\varphi_{N-1}\psi_{N-1} - \varphi_{N-1}\psi_{N-1}) = 0$$

gereğince

$$f' = \sum_{j=0}^{N-1} \omega_j (\psi_j^2 \varphi_N + \varphi_j \psi_j (\varphi_{N-1} - \psi_N) - \varphi_j^2 \psi_{N-1})$$

elde edilir.

$$A := \begin{pmatrix} \varphi_N & \frac{\varphi_{N-1} - \psi_N}{2} \\ \frac{\varphi_{N-1} - \psi_N}{2} & -\psi_{N-1} \end{pmatrix}$$

ve

$$\delta_j := \begin{pmatrix} \psi_j & \varphi_j \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \psi_j \\ \varphi_j \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanmak üzere

$$f' = \sum_{j=0}^{N-1} \omega_j \delta_j$$

olarak gösterilebilir.

$f(\lambda)=2$ olması halinde

$$\begin{aligned}\det A(\lambda) &= -\varphi_N\psi_{N-1}-\frac{\left(\varphi_{N-1}-\psi_N\right)^2}{4}\\ &= \left(-\varphi_N\psi_{N-1}+\varphi_{N-1}\psi_N\right)-\varphi_{N-1}\psi_N-\frac{\left(\varphi_{N-1}^2-2\varphi_{N-1}\psi_N+\psi_N^2\right)}{4}\end{aligned}$$

olup (4.1) ifadesinden

$$-\varphi_N\psi_{N-1}+\varphi_{N-1}\psi_N=1$$

eşitliği bilindiğinden

$$\begin{aligned}\det A(\lambda) &= 1-\frac{\left(\varphi_{N-1}^2-2\varphi_{N-1}\psi_N+\psi_N^2\right)}{4}\\ &= 1-\frac{1}{4}f^2(\lambda)=0\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$-\varphi_N(\lambda)\psi_{N-1}(\lambda)=\left(\frac{\varphi_{N-1}(\lambda)-\psi_N(\lambda)}{2}\right)^2\geq 0 \qquad (4.4)$$

elde edilir.

$f(\lambda)=2$ ise, bütün $0\leq j\leq N-1$ için $f'(\lambda)$, $\delta_j(\lambda)\equiv 0$ olmadan sıfır olamaz. Çünkü φ_n ve ψ_n lineer bağımsızdır, $\delta_j(\lambda)$ nın özdeş olarak sıfır olması için gerek ve yeter şart $A(\lambda)$ matrisinin bütün bileşenlerinin sıfır olmasıdır. $f(\lambda)=2$ durumunda

$$f(\lambda)=\varphi_{N-1}(\lambda)+\psi_N(\lambda)=2$$

eşitliğinden

$$\varphi_N=\psi_{N-1}=0,\ \varphi_{N-1}=\psi_N=1$$

bulunur.

(ii): Benzer biçimde $f(\lambda)=-2$ durumunda ise

$$\varphi_N=\psi_{N-1}=0,\ \varphi_{N-1}=\psi_N=-1$$

elde edilir.

$f(\lambda) = 2(\text{veya } -2)$ durumunda $f'(\lambda) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul, λ özdeğerinin basit olmamasıdır.

$\lambda \neq \mu_i$ $(0 \leq i \leq N-2)$ için $f(\lambda) = 2$ (veya -2) olsun.

$$\psi_{N-1}(\lambda) \neq 0$$

olduğu bilinmektedir. Böylece λ, (1.1)-(1.2) veya (1.1)-(1.3) problemlerinin basit özdeğeridir.

$0 \leq j \leq N-1$ için δ_j de özdeş olarak sıfır olamaz. (4.4) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\delta_j &= \psi_j^2\varphi_N + \varphi_j\psi_j(\varphi_{N-1} - \psi_N) - \varphi_j^2\psi_{N-1} \\
&= \psi_j^2\left(-\frac{1}{4\psi_{N-1}}(\varphi_{N-1} - \psi_N)^2\right) + \varphi_j\psi_j(\varphi_{N-1} - \psi_N) - \varphi_j^2\psi_{N-1} \\
&= -\psi_{N-1}\left(\varphi_j^2 - \varphi_j\psi_j\frac{\left(\varphi_{N-1} - \psi_N\right)}{\psi_{N-1}} + \frac{\left(\varphi_{N-1} - \psi_N\right)^2}{4\psi_{N-1}^2}\psi_j^2\right) \\
&= -\psi_{N-1}\left(\varphi_j - \frac{\left(\varphi_{N-1} - \psi_N\right)}{2\psi_{N-1}}\psi_j^2\right)^2
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$f'(\lambda) = -\psi_{N-1}(\lambda)\sum_{j=0}^{N-1}\omega_j\left(\varphi_j - \frac{\left(\varphi_{N-1} - \psi_N\right)}{2\psi_{N-1}(\lambda)}\psi_j^2(\lambda)\right)^2$$

elde edilir. Yani, $f'(\lambda)$ ile $\psi_{N-1}(\lambda)$ zıt işaretli olur.

Lemma 2.2 ve $\psi_0 = 1 > 0$ eşitsizliği kullanılarak

$\lambda < \mu_0$	ise $-\psi_{N-1}(\lambda) < 0$
$0 \leq r \leq N-3$ için $\mu_r < \lambda < \mu_{r+1}$	ise $sgn(-\psi_{N-1}(\lambda)) = sgn((-1)^{r+1}(-1)) = sgn(-1)^r$
$\lambda > \mu_{N-2}$	ise $sgn(-\psi_{N-1}(\lambda)) = sgn(-1)^{N-2}$

olacağından istenen elde edilir.

Önerme 4.3 $0 \leq i \leq N-2$ için μ_i (1.1) -(3.8) problemininin bir özdeğeri olmak üzere $\nu_0 < \mu_0 < \mu_1 < ... < \mu_{N-2}$ ve $f(\nu_0) \geq 2$ olacak şekilde en az bir ν_0 sabiti vardır (Wang ve Shi 2005).

İspat. ψ_{N-1}, λ nın (N–1)-inci dereceden polinomu, φ_{N-1} de λ nın (N-2)-inci dereceden polinomudur. Böylece

$$\psi_{N-1}(\lambda) = (-1)^N A_N \lambda^N + A_{N-1}\lambda^{N-1} + ... + A_0$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda $n \in [0, N-1]$ için

$$A_N = \frac{\omega_0\omega_1...\omega_{N-1}}{p_0 p_1 ... p_{N-1}} > 0$$

olduğundan

$$f(\lambda) = \varphi_{N-1}(\lambda) + \psi_N(\lambda) = (-1)^N A_N \lambda^N + h(\lambda)$$

elde edilir. Burada $h(\lambda)$ polinonomu N-1 den büyük olmayan dereceye sahiptir.

$$\lim_{\lambda \to -\infty} f(\lambda) = \lim_{\lambda \to -\infty} \left[(-\lambda)^N A_N + h(\lambda) \right] = +\infty$$

gerçeklenir. Önerme 3.1 de kullanılarak $f(\nu_0) \geq 2$ olan $\nu_0 < \mu_0$ şeklinde bir ν_0 sabiti olduğu görülür.

Önerme 4.4 N tek ise $f(\xi_0) \leq -2$ ve $\mu_0 < \mu_1 < ... < \mu_{N-2} < \xi_0$ olacak şekilde en az bir ξ_0 sabiti vardır.

N çift ise $f(\eta_0) \geq 2$ ve $\mu_0 < \mu_1 < ... < \mu_{N-2} < \eta_0$ olacak şekilde en az bir η_0 sabiti vardır (Wang ve Shi 2005).

İspat. Önerme 3.1 gereğince

$$\begin{array}{ll} N \text{ tek ise} & f(\mu_{N-2}) \geq 2 \\ N \text{ çift ise} & f(\mu_{N-2}) \leq -2 \end{array}$$

olduğu bilinmektedir. Ayrıca

$$f(\lambda) = \varphi_{N-1}(\lambda) + \psi_N(\lambda) = (-1)^N A_N \lambda^N + h(\lambda)$$

olduğundan N tek ise

$$\lim_{\lambda \to +\infty} f(\lambda) = -\infty$$

ve N çift ise

$$\lim_{\lambda \to +\infty} f(\lambda) = +\infty$$

bulunur. Dolayısıyla N tek olmak üzere $\xi_0 > \mu_{N-2}$ ve $f(\xi_0) \leq -2$ olacak şekilde en az bir ξ_0 sabiti , N çift olmak üzere $\eta_0 > \mu_{N-2}$ ve $f(\eta_0) \geq 2$ olacak şekilde en az bir η_0 sabiti vardır.

Önerme 4.5 $0 \leq k \leq N-2$ için μ_k, (1.1)-(3.8) probleminin özdeğeri olmak üzere aşağıdaki önermeler gerçeklenir.

(i) k tek olmak üzere $f(\mu_k) = 2$ ve $f'(\mu_k) = 0$ ise $f''(\mu_k) < 0$

(ii) k çift olmak üzere $f(\mu_k) = -2$ ve $f'(\mu_k) = 0$ ise $f''(\mu_k) > 0$

(Wang ve Shi 2005).

İspat. $f(\mu_k) = 2$ ve $f'(\mu_k) = 0$ eşitliklerinden μ_k, (1.1)-(1.2) probleminin çok katlı özdeğeridir. Bu durumda

$$\begin{aligned} \varphi_N(\mu_k) &= \psi_{N-1}(\mu_k) = 0 \\ \varphi_{N-1}(\mu_k) &= \psi_N(\mu_k) = 1 \end{aligned} \tag{4.5}$$

elde edilir.

$$f'(\mu_k) = \varphi'_{N-1}(\mu_k) + \psi'_N(\mu_k) = 0$$

olduğundan

$$\varphi'_{N-1}(\mu_k) = -\psi'_N(\mu_k) \tag{4.6}$$

bulunur. (4.1) eşitliği olan

$$\varphi_N\psi_{N-1}-\varphi_{N-1}\psi_N=-1$$

denkleminin λ ya göre iki kere türevi alınır ve burada (4.5) ile (4.6) eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$\varphi'_N\psi_{N-1}+\varphi_N\psi'_{N-1}-\varphi'_{N-1}\psi_N-\varphi_{N-1}\psi'_N=0$$

$$\varphi''_N\psi_{N-1}+\varphi'_N\psi'_{N-1}+\varphi'_N\psi'_{N-1}+\varphi_N\psi''_{N-1}-\varphi''_{N-1}\psi_N-\varphi'_{N-1}\psi'_N-\varphi'_{N-1}\psi'_N-\varphi_{N-1}\psi''_N=0$$

elde edilir. $\psi_{N-1}(\mu_k)=0$ eşitliği ile (4.5) ve (4.6) koşulları kullanılırsa

$$\varphi''_{N-1}(\mu_k)+\psi''_N(\mu_k)-2\left(\varphi'_{N-1}(\mu_k)\right)^2-2\varphi'_N(\mu_k)\psi'_{N-1}(\mu_k)=0$$

bulunur.

Buradan

$$\begin{aligned} f''(\mu_k) &= \varphi''_{N-1}(\mu_k)+\psi''_N(\mu_k) \\ &= 2\left[\left(\varphi'_{N-1}(\mu_k)\right)^2+\varphi'_N(\mu_k).\psi'_{N-1}(\mu_k)\right] \end{aligned} \tag{4.8}$$

gerçeklenir. (4.5) ve

$$\begin{aligned} \psi'_n(\lambda) &= \sum_{j=0}^{n-1}\omega_j\psi_j(\lambda)(\varphi_n(\lambda)\psi_j(\lambda)-\varphi_j(\lambda)\psi_n(\lambda)) \\ \varphi'_n(\lambda) &= \sum_{j=0}^{n-1}\omega_j\varphi_j(\lambda)(\varphi_n(\lambda)\psi_j(\lambda)-\varphi_j(\lambda)\psi_n(\lambda)) \end{aligned}$$

eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned}\varphi'_{N-1}(\mu_k) &= \sum_{j=0}^{N-2} \omega_j \varphi_j(\mu_k)\psi_j(\mu_k) \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \omega_j \varphi_j(\mu_k)\psi_j(\mu_k)\end{aligned}$$

bulunur ve buradan

$$\begin{aligned}\varphi'_{N}(\mu_k) &= \sum_{j=0}^{N-1} \omega_j \varphi_j(\mu_k)(\varphi_N(\mu_k)\psi_j(\mu_k) - \varphi_j(\mu_k)\psi_N(\mu_k)) \\ &= -\sum_{j=0}^{N-1} \omega_j \varphi_j^2(\mu_k) \\ \psi'_{N-1}(\mu_k) &= \sum_{j=0}^{N-2} \omega_j \psi_j^2(\mu_k) = \sum_{j=0}^{N-1} \omega_j \psi_j^2(\mu_k)\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. (4.5) ifadesinden $n \in [1, N]$ için

$$f''(\mu_k) = 2\left[\left(\sum_{j=0}^{N-1} \omega_j \varphi_j(\mu_k)\psi_j(\mu_k)\right)^2 - \left(\sum_{j=0}^{N-1} \omega_j \varphi_j^2(\mu_k)\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{N-1} \omega_j \psi_j^2(\mu_k)\right)\right]$$

bulunur.

φ_n ve ψ_n lineer bağımsız olduğundan Hölder eşitsizliği yardımıyla

$$f''(\mu_k) < 0$$

eşitsizliği elde edilir.

Son olarak bu bölümdeki önermelerin sonucunda aşağıdaki teorem elde edilir.

Dördüncü bölümdeki tüm önermeler, Teorem 3.2 ve Ara Değer Teoremi kullanılacak olursa aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir.

Teorem 4.1 $0 \leq i \leq N-1$ için μ_i, λ_i, $\widetilde{\lambda}_i$ sırasıyla (1.1)-(3.8), (1.1)-(1.2) ve (1.1)-(1.3) problemlerinin özdeğerleri olmak üzere aşağıdakiler doğrudur.

(i) N tek ise

$$\nu_0 \leq \lambda_0 < \widetilde{\lambda}_1 \leq \mu_0 \leq \widetilde{\lambda}_2 < \lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 < ... < \lambda_{N-2} \leq \mu_{N-2} \leq \lambda_{N-1} < \widetilde{\lambda}_N \leq \xi_0$$

(ii) N çift ise

$$\nu_0 \leq \lambda_0 < \widetilde{\lambda}_1 \leq \mu_0 \leq \widetilde{\lambda}_2 < \lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 < ... < \widetilde{\lambda}_{N-1} \leq \mu_{N-2} \leq \widetilde{\lambda}_N < \lambda_{N-1} \leq \eta_0$$

(Wang ve Shi 2005)

N sayısının durumlarına göre bu dizilişini grafikle gösterecek olursak

(i) N tek ise

(ii) N çift ise

olduğu görülür.

KAYNAKLAR

Atkinson, F. V. 1964. *Discrete and Continuous Boundary Problems.* New York, Academic Press.

Kreyszig, E. 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications.* New York: Wiley&Sons. Inc.

Naimark, M. A. 1968. *Linear Differantial Operators I* George G. Harrap&Company, p. 13.

Shi, Y. and Chen, S. 1999. *Spectral theory of second-order vector difference equations.* J. Math. Anal. Appl. , 239, pp. 195-212.

Wang, Y. and Shi, Y. 2005. *Eigenvalues of second-order difference equations with periodic and antiperiodic boundary conditions.* J. Math. Anal. Appl. , 309, pp. 56-69.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Elis SOYLU
Doğum Yeri	:	Bulgaristan
Doğum Tarihi	:	25.08.1986
Medeni Hali	:	Bekar
Yabancı Dili	:	İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	:	Aydınlıkevler Anadolu Lisesi (2004)
Lisans	:	Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2008)