

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**KAOTİK DAVRANIŞA SAHİP KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEM
SİSTEMLERİ VE NÜMERİK ÇÖZÜMÜ**

DOKTORA TEZİ

Arş. Gör. Ali KONURALP

**MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI**

MANİSA 2012

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER.....	i
SEMBOL LİSTESİ.....	iv
ŞEKİL LİSTESİ.....	vi
TEŞEKKÜR.....	ix
ÖZET.....	x
ABSTRACT.....	xii
GİRİŞ.....	xiv
1. BÖLÜM.....	1
RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ İNTEGRALLERİ VE KESİRLİ TÜREVLERİ.....	1
1.1. Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri ve Kesirli Türevleri.....	1
1.2. Yarı Eksende Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri ve Kesirli Türevleri.....	8
1.3. Reel Eksende Liouville Kesirli İntegralleri ve Kesirli Türevleri.....	11
2. BÖLÜM.....	13
CAPUTO VE GRÜNWARD-LETNİKOV KESİRLİ TÜREVLERİ.....	13
2.1. Caputo Kesirli Türevleri.....	13
2.2. Grünwald-Letnikov Kesirli Türevleri.....	20
3. BÖLÜM.....	23
KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN NÜMERİK ÇÖZÜM METOTLARI.....	23
3.1. Giriş.....	23
3.2. Varyasyonel İterasyon Metodu.....	24
3.2.1. Varyasyonel İterasyon Metodunun Probleme Uygulama Esasları.....	24
3.2.2. Lineer Lagrange Çarpanı.....	25
3.2.3. Lineer Olmayan Lagrange Çarpanı.....	26
3.3. Nümerik Hesaplamalar.....	27
3.3.1. Lineer Lagrange Çarpanının Dikkate Alınması.....	27
3.3.2. Lineer Olmayan Lagrange Çarpanının Dikkate Alınması.....	29
3.4. Sonuç.....	30
4. BÖLÜM.....	31
KESİRLİ İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİ ÇÖZMEK İÇİN VARYASYONEL İTERASYON METODU.....	31
4.1. Özet.....	31
4.2. Giriş.....	31
4.3. Ön hazırlıklar.....	32
4.4. Çözüm Metodu.....	32

4.5. Nümerik Örnekler.....	34
4.6. Sonuç.....	38
5. BÖLÜM.....	39
DİNAMİK JİROSKOP SİSTEMİ.....	39
5.1. Dinamik Sistemlere Kısa Bir Bakış ve Dinamik Jiroskop Sistemine Giriş	39
5.2. Jiroskop Sisteminin Elde Edilmesi.....	41
5.2.1. Jiroskop Sisteminin Varyasyonel Hesabı.....	46
5.3. Dinamik Jiroskop Sisteminin Yaklaşık Çözümü için Lie Seri Tekniği	47
5.4. Lyapunov Üstelini Hesaplama Tekniği	48
5.4.1. Bir Boyutlu Lyapunov Üsteli için Java Algoritması.....	49
6. BÖLÜM.....	51
KESİRLİ MERTEBELİ DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİ	51
6.1. Giriş	51
6.2. Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklem Sistemleri.....	53
6.3. Otonom Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklem Sistemleri.....	53
6.4. Kesirli Türevlerin Nümerik Hesaplaması	53
6.4.1. Grünwald-Letnikov Yaklaşımı	53
6.4.2. Adams-Bashforth-Moulton Yaklaşımı	54
6.5. Kesirli Mertebeden Jjiroskop Sistemi	56
6.6. Kesirli Mertebeden Jiroskop Sisteminin Analizi.....	56
6.6.1. Modifiye Edilmiş Sistemin Nümerik Çözüm Algoritması	57
6.6.1.1. Grünwald-Letnikov Çözüm Algoritması.....	57
6.6.1.2. Adams-Bashforth-Moulton Çözüm Algoritması	58
6.6.2. Modifiye Edilmiş Sistemin Simülasyon Sonuçları	61
6.6.2.1. Durum 1.....	61
6.6.2.2. Durum 2.....	69
6.6.2.2.1. Durum 2.1	69
6.6.2.2.2. Durum 2.2	71
6.6.2.2.3. Durum 2.3	73
6.6.2.2.4. Durum 2.4	75
6.6.2.2.5. Durum 2.5	78
6.6.2.2.6. Durum 2.6	80
6.6.2.3. Durum 3.....	82
6.6.2.3.1. Durum 3.1	82
6.6.2.3.2. Durum 3.2	83
6.6.2.3.3. Durum 3.3	85
6.6.2.3.4. Durum 3.4	87

6.6.2.3.5. Durum 3.5	88
6.6.2.4. Durum 4.....	89
6.6.2.4.1. Durum 4.1	89
6.6.2.4.2. Durum 4.2	89
6.6.2.4.3. Durum 4.3	90
6.7 Sonuç.....	91
KAYNAKLAR	92
ÖZGEÇMİŞ	99

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	: Negatif olmayan tam sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$C^n[a, b]$	: $[a, b]$ üzerinde n 'inci mertebeden sürekli diferansiyellenebilir kompleks değerli fonksiyonların uzayı
$AC[a, b]$	: $[a, b]$ üzerinde mutlak sürekli fonksiyonların uzayı
$AC^n[a, b]$	: $[a, b]$ üzerinde $(n-1)$ 'inci mertebeden sürekli türevlere sahip kompleks değerli fonksiyonların uzayı
$L_p(a, b)$	: $1 \leq p \leq \infty$ için $\Omega = [a, b]$ üzerindeki Lebesgue kompleks değerli ölçülebilir f fonksiyonlarının kümesi
$\Gamma(.)$	: Gama fonksiyonu
$E_{\alpha, \beta}(\cdot)$	: İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonunu
$\Re(z)$	: z sayısının reel kısmı
$\Im(z)$	: z sayısının sanal kısmı
$[\Re(z)]$	: $\Re(z)$ 'nin tam kısmı
α	: Kompleks bir sayı
I_{a+}^{α}	: α 'ıncı mertebeden soldan Riemann-Liouville kesirli integral operatörü
I_{b-}^{α}	: α 'ıncı mertebeden sağdan Riemann-Liouville kesirli integral operatörü
D_{a+}^{α}	: α 'ıncı mertebeden soldan Riemann-Liouville kesirli türev operatörü
D_{b-}^{α}	: α 'ıncı mertebeden sağdan Riemann-Liouville kesirli türev operatörü
$f_{n-\alpha}(x)$	: f fonksiyonunun $(n-\alpha)$ 'ıncı mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali
I_{0+}^{α}	: Yarı reel eksen üzerinde α 'ıncı mertebeden soldan Liouville kesirli integral operatörü
I_{-}^{α}	: Yarı reel eksen üzerinde α 'ıncı mertebeden sağdan Liouville kesirli integral operatörü

- D_{a+}^{α} : Yarı reel eksen üzerinde α 'ıncı mertebeden soldan Liouville kesirli türev operatörü
- D_{-}^{α} : Yarı reel eksen üzerinde α 'ıncı mertebeden sağdan Liouville kesirli türev operatörü
- ${}^c D_{a+}^{\alpha}$: α 'ıncı mertebeden soldan Caputo kesirli türev operatörü
- ${}^c D_{b-}^{\alpha}$: α 'ıncı mertebeden sağdan Caputo kesirli türev operatörü
- ${}^c D_{b-}^{\alpha}$: α 'ıncı mertebeden sağdan Caputo kesirli türev operatörü
- $V(\mathbf{a})$: $\mathbf{a}$ parametresine bağlı lineer Lie diferansiyel operatörü

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 3.1. $\alpha = 1$, $\mu = 1.02$, $a = 1.31$, ve $w = 0.5$ için çözüm grafiği	28
Şekil 3.2. $\alpha = 1$, $\mu = 1.02$, $a = 1.31$, ve $w = 0.5$ için lineer olmayan Lagrange çarpanıyla hesaplanan çözüm grafiği	30
Şekil 3.3. $\mu = 1.02$, $a = 1.31$, ve $w = 0.5$ için (3.1) probleminin farklı α değerleri ile çözümleri	30
Şekil 5.1. Jiroskop yapısı	41
Şekil 5.2. Euler açılarıyla birlikte bir jiroskop	42
Şekil 6.1. x_1 konum fonksiyonunun zamana göre yaklaşık değerleri	62
Şekil 6.2. x_2 konum fonksiyonunun zamana göre yaklaşık değerleri	62
Şekil 6.3. x_3 konum fonksiyonunun zamana göre yaklaşık değerleri	63
Şekil 6.4. Parametrik değerlerin alınmasıyla hesaplanan (x_1, x_2) iki boyutlu görülen garip çeker	63
Şekil 6.5. Sistemin iki boyutlu (x_3, x_2) faz düzlemindeki davranışları	64
Şekil 6.6. Sistemin iki boyutlu (x_3, x_1) faz düzlemindeki birbirlerine göre olan davranışları	64
Şekil 6.7. Üç konumlu sistemin simülasyonu	65
Şekil 6.8. [17]'e göre hesaplanan x_1 konum fonksiyonunun zamana göre yaklaşık değerleri ...	65
Şekil 6.9. [17]'e göre hesaplanan x_2 konum fonksiyonunun zamana göre yaklaşık değerleri ..	66
Şekil 6.10 [17]'e göre hesaplanan x_3 konum fonksiyonunun zamana göre yaklaşık değerleri .	66
Şekil 6.11. [17]'e göre hesaplanan (x_1, x_2) iki boyutlu görülen garip çeker	67
Şekil 6.12. [17]'e göre hesaplanan (x_3, x_2) faz düzlemi	67
Şekil 6.13. [17]'e göre hesaplanan (x_3, x_1) faz düzlemi	68
Şekil 6.14 [17]'deki parametre değerlerine göre hesaplanan üç konumlu sistem simülasyonu .	68
Şekil 6.15. $\alpha = \beta = 0.9$, $\gamma = 1$ için sistemin x_1 bileşeninin konum-zaman grafiği	69
Şekil 6.16. $\alpha = \beta = 0.9$, $\gamma = 1$ için sistemin x_2 bileşeninin konum-zaman grafiği	70
Şekil 6.17. $\alpha = \beta = 0.9$, $\gamma = 1$ için sistemin x_1, x_2 faz düzlemindeki simülasyonu	70
Şekil 6.18 $\alpha = \beta = 0.9$, $\gamma = 1$ için sistemin üç konumlu simülasyonu	71
Şekil 6.19. $\alpha = \beta = 0.97$, $\gamma = 1$ için sistemin x_1 bileşeninin konum-zaman grafiği	71
Şekil 6.20. $\alpha = \beta = 0.97$, $\gamma = 1$ için sistemin x_2 bileşeninin konum-zaman grafiği	72

Şekil 6.21. $\alpha = \beta = 0.97$, $\gamma = 1$ için sistemin x_1, x_2 faz düzlemindeki simülasyonu	72
Şekil 6.22. $\alpha = \beta = 0.97$, $\gamma = 1$ için sistemin üç konumlu simülasyonu	73
Şekil 6.23. $\alpha = \beta = 1.1$, $\gamma = 1$ için sistemin x_1 bileşeninin konum-zaman grafiği	73
Şekil 6.24. $\alpha = \beta = 1.1$, $\gamma = 1$ için sistemin x_2 bileşeninin konum-zaman grafiği	74
Şekil 6.25. $\alpha = \beta = 1.1$, $\gamma = 1$ için sistemin x_1, x_2 faz düzlemindeki simülasyonu	74
Şekil 6.26. $\alpha = \beta = 1.1$, $\gamma = 1$ için sistemin üç konumlu simülasyonu	75
Şekil 6.27. $\alpha = \beta = 0.7$, $\gamma = 1$ için sistemin x_1 bileşeninin konum-zaman grafiği	75
Şekil 6.28. $\alpha = \beta = 0.7$, $\gamma = 1$ için sistemin x_2 bileşeninin konum-zaman grafiği	76
Şekil 6.29. $\alpha = \beta = 0.7$, $\gamma = 1$ için sistemin x_1, x_2 faz düzlemindeki simülasyonu	76
Şekil 6.30. $\alpha = \beta = 0.7$, $\gamma = 1$ için sistemin x_1, x_2 faz düzlemindeki yakın görünümü	77
Şekil 6.31. $\alpha = \beta = 0.7$, $\gamma = 1$ için sistemin üç konumlu simülasyonu	77
Şekil 6.32. $\alpha = \beta = 0.7$, $\gamma = 1$ için sistemin üç boyutlu uzaydaki yakından görünümü	78
Şekil 6.33. $\alpha = \beta = 0.6$, $\gamma = 1$ için sistemin x_1 bileşeninin konum-zaman grafiği	78
Şekil 6.34. $\alpha = \beta = 0.6$, $\gamma = 1$ için sistemin x_2 bileşeninin konum-zaman grafiği	79
Şekil 6.35. $\alpha = \beta = 0.6$, $\gamma = 1$ için sistemin x_1, x_2 faz düzlemindeki simülasyonu	79
Şekil 6.36. $\alpha = \beta = 0.6$, $\gamma = 1$ için sistemin üç konumlu simülasyonundan bir kesit	79
Şekil 6.37. $\alpha = \beta = 0.9$, $\gamma = 1$ için sistemin x_1 bileşeninin konum-zaman grafiği	80
Şekil 6.38. $\alpha = \beta = 0.9$, $\gamma = 1$ için sistemin x_2 bileşeninin konum-zaman grafiği	80
Şekil 6.39. $\alpha = \beta = 0.9$, $\gamma = 1$ için sistemin x_1, x_2 faz düzlemindeki simülasyonu	81
Şekil 6.40. $\alpha = \beta = 0.9$, $\gamma = 1$ için sistemin üç konumlu simülasyonu	81
Şekil 6.41. $\alpha = \beta = 0.9$, $\gamma = 1$ için sistemin $\mathbf{x}_0 = (0.5, -0.1, 25)$ başlangıç değerlerine sahip üç konumlu simülasyonu	82
Şekil 6.42. $\alpha = \beta = \gamma = 0.95$ için sistemin x_1, x_2 faz düzlemindeki simülasyonu	83
Şekil 6.43. $\alpha = \beta = \gamma = 0.95$ için sistemin x_1, x_2 faz düzlemindeki yakın görüntüsü	83
Şekil 6.44. $\alpha = \beta = \gamma = 0.95$ için sistemin x_1, x_2 faz düzleminin simülasyonu	84
Şekil 6.45. $\alpha = \beta = \gamma = 0.95$ değerleri için sistemin üç konumlu simülasyonu	84
Şekil 6.46. $\alpha = \beta = \gamma = 1.1$ ve $\omega = 5$ için sistemin x_1 ile x_2 bileşeninin konum-zaman grafiği	85

Şekil 6.47. $\alpha = \beta = \gamma = 1.1$ ve $\omega = 5$ için x_1, x_2 faz düzlemindeki görüntüsü	85
Şekil 6.48. $\alpha = \beta = \gamma = 1.1$ ve $\omega = 5.1$ için x_1, x_2 faz düzleminin görüntüsü.....	86
Şekil 6.49. $\alpha = \beta = \gamma = 1.1$ ve $\omega = 5.1$ için sistemin üç konumlu simülasyonu.....	86
Şekil 6.50. $\alpha = \beta = \gamma = 0.7$ için x_1, x_2 faz düzlemindeki görüntüsü	87
Şekil 6.51. $\alpha = \beta = \gamma = 0.9$ için x_1, x_2 faz düzlemindeki yakın görüntüsü	88
Şekil 6.52. $\alpha = \beta = 0.9$ ile $\gamma = 1.1$ için x_1, x_2 faz düzlemindeki görüntüsü	89
Şekil 6.53. $\alpha = \beta = 0.8$, $\gamma = 1.1$, $\omega = 8.78$, $f = 36$ ve $x_0 = (-0.08, 0.5, 1)$ için x_1, x_2 faz düzleminin görüntüsü	90
Şekil 6.54. $\alpha = \beta = 0.8$, $\gamma = 1.1$, $\omega = 8.78$, $f = 36$ ve $x_0 = (-0.08, 0.5, 1)$ için $x_1 x_2$ düzlemi	90

TEŞEKKÜR

Akademisyenlik sürecimin başlamasından itibaren bilimsel yönden her türlü desteğini sonuna kadar veren, akademik hayatın zorluklarına nasıl göğüs gerebileceğim konusunda bilinçlenmemi sağlayan, gerektiğinde de maddi yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam Prof. Dr. Necdet BİLDİK'e teşekkürü bir borç bilirim.

Hayata gözlerimi açtığımdan beridir hep desteklerini hissettiğim, eğitimimin devam etmesi için gece gündüz çalışan, yapacağıma inanmamı sağlayan ve maddi manevi her türlü fedakârlığı ortaya koyan, kendi ihtiyaçlarını geri plana atıp, benim ihtiyaçlarımı karşılama çabası içinde çırpınarak bugünlere ulaşmama vesile olan aileme sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımızın en önemi dönüm noktalarından bir tanesi olan canım kızım Ela'cığıma göstermiş olduğıu derin saygı ve sevgisinden ötürü ayrıca teşekkürlerimi sunarım.

Lisans eğitimini beraber tamamladığımız ve o günden bu güne bana karşı tebessümünü hiç eksik etmeyen, Lisansüstü eğitimimi başaracağıma ve akademik hayatta başarılı olacağıma dair inancı ile beni her zaman cesaretlendiren, tez çalışmamın her evresinde sürekli anlayışlı ve sabırlı olan, farklı bakış açılarını yakalamamı sağlayan pozitif yaklaşımlarıyla hep sonsuz desteğini gördüğüm, hayatın olumlu olumsuz bütün şartlarına bereberce göğüs gerdiğimiz, kendisini her zaman çok sevdiğim Eşim Çiğdem KONURALP'e bütün kalbimle teşekkürlerimi sunarım.

ÖZET

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmuştur.

Birinci bölümde, kesirli integral ve türevlerin Riemann-Liouville anlamındaki ifadelerine yer verilmiştir. Soldan ve sağdan Riemann-Liouville kesirli integralleri ve kesirli türevleri yarım eksen ve reel eksen de olmak üzere ayrı ayrı ifade edilmiştir. Kesirli analizle ilgili bazı tanım ve teoremlere de yer verilmiştir[42].

İkinci bölümde, Caputo ve Grünwald-Letnikov kesirli türevleri ile ilgili genel tanım ve teoremler ifade edilmiştir[42].

Üçüncü bölümde, adi kesirli diferansiyel denklemler için nümerik bir çözüm yolu olan varyasyonel iterasyon metodu verilmiştir. Göz önüne alınan örnek bir problem için metodun probleme uygulama esaslarına, lineer ve lineer olmayan yapıya sahip Lagrange çarpanları ele alınarak değinilmeye çalışılmıştır. Mertebesi ikiden daha küçük bir kesirli türevi ihtiva eden, ikinci mertebeden diferansiyel denklemin orijinal yapısı değiştirilmeksizin, çeşitli parametre değerleri için söz konusu denklemin nümerik çözümleri yapılmıştır.

Dördüncü bölümde, kesirli integro-diferansiyel denklem sistemlerini çözmek için varyasyonel iterasyon metodunun çözüm algoritması verilmiştir. Bu metod kullanılarak örnek sistemlerin çözümleri kesirli mertebenin bir fonksiyonu olarak bulunmaya çalışılmıştır. Bunun yanında bilinen farklı çözüm metotları ile elde edilmiş çözümler, varyasyonel iterasyon metodunun kullanılmasıyla elde edilenler ile benzer sonuçları verdiği gözlenmiştir.

Beşinci bölümde, dinamik sistemlere kısa bir giriş yapılmış ardından Lagrange dinamikleri kullanılarak jiroskobun literatürde yer alan denklem sistemi yapısı elde edilmiştir. Jiroskop sisteminin üçüncü konum bileşeni olarak zaman fonksiyonunun seçilmesiyle modifiye edilen üç boyutlu otonom denklem sistemi yapısı oluşturulmuştur. Modifiye sistemin yaklaşık çözümü için Lie serisi tekniği sunulmuş ve bu tekniğin kullanılmasıyla sistemin belirli parametre değerleri için Lyapunov üstelini hesap edebilen Java tabanlı bir algoritma yazılmıştır.

Son bölüm olan altıncı bölümde ise, bir önceki bölümde oluşturulan modifiye sistemin kesirli mertebeden ifade edilmiş yapısı göz önüne alınmıştır. Son yıllarda yaygın olarak kullanılan Grünwald-Letnikov ve Adams-Bashforth-Moulton çözüm yaklaşımları ifade edilmiş ve bu metotlar modifiye sisteme adapte edilmiştir. Göz önüne alınan sistemin çeşitli mertebeden yapılarının kaotik davranışlarının inceleneyeceği dört farklı durum grubundan toplam onbeş farklı alt durum oluşturulmuştur. Bu alt durumlara ilişkin simülasyon sonuçlarını gösteren şekiller verilmiştir. Son olarakta sistemin yapısı üzerinden genel bir sonuca varılmıştır.

Bu tez çalışmasının orijinal kısımları, üçüncü bölüm, dördüncü bölüm, beşinci bölümün dördüncü kesimi ile orijinal modifiye sistemin incelendiği altıncı bölümün beşinci, altıncı ve yedinci kesimleridir.

ABSTRACT

This thesis consists of six chapters.

In the first chapter, Riemann-Liouville fractional integrals and derivatives are given. Left-sided and right-sided Riemann-Liouville integrals and fractional derivatives, of order arbitrary number, on a finite interval of real line, on the half-axis and also on the real axis are given. Some basic definitions and theorems are expressed for understanding how a fractional integral and derivative are calculated [42].

In the second chapter, Caputo and Grünwald-Letnikov fractional derivatives and their related basic theorems are expressed [42].

In the third chapter, a numerical approach for ordinary fractional differential equations, variational iteration method, is given. Considering an ordinary fractional differential equation, the principles of applying this method to the equation are expressed by taking into account the linear and nonlinear forms of Lagrange multiplier. Without changing the original form of the second order differential equation including one fractional derivative term of order less than two, the numerical solutions are obtained for various parameter values.

In the fourth chapter, using variational iteration method, the solution algorithm of system of fractional integro-differential equation is given. The solutions of representative systems, as a function of the fractional order, were obtained using this algorithm. Calculated solutions using variational iteration method gave similar results with those of obtained by using other known methods.

In the fifth chapter, a brief introduction to dynamical systems is given. Using the Lagrangian dynamics, the structure of gyro ordinary differential equation is obtained analogously as in the literature. Then gyro ordinary differential equation is modified into an autonomous three dimensional system by choosing a new variable that is the third position component of the gyro system as the function of time. Lie series technique for the solution of the modified system was

expressed and a Java-based algorithm that can count the Lyapunov exponent of the modified system for the specific parameter values is written.

In the final chapter, a fractional-order system is formed as in the modified structure generated in the previous chapter and that system is taken into account through the whole chapter. Adams-Bashforth-Moulton and Grünwald-Letnikov approaches for the numerical solutions of fractional differential equations which are widely used in recent years are expressed and these methods are adapted to modified system. In order to examine the behavior of a chaotic system, it is considered a variety of a total of fifteen different sub-circumstances from four different circumstances groups. It is also given the figures which show the resulting graphs of the simulation of given these sub-circumstances.

The original sections of this thesis are third chapter, forth chapter, forth section of the fifth chapter and fifth, sixth and seventh sections of sixth chapter in which the modified gyro systems are investigated.

GİRİŞ

Son zamanlarda, pek çok bilim dalında önemli bir yer tutmakta olan kesirli analiz ile ilgili çalışmalar artarak devam etmektedir. Özellikle Doğa Bilimleri, Mühendislik ve Teknoloji alanlarında popüler olmuş, tamamen teorik kesirli analiz çalışmalarından disiplinlerarası uygulamalı çalışmalara kadar geniş bir spekturumda kayda değer bir konu haline gelmiştir. Kesirli analizin hikayesi, 1695 yılında L'Hospital'in Leibniz'e yazdığı ve içinde $\frac{1}{2}$. mertebeden türevin anlamını sorduğu mektup ile başlar. 1738'de Euler, x^α kuvvet fonksiyonunun tamsayı olmayan mertebeden türev değerlerini gözlemlemiş ve 1820'de Lacroix, x^α kuvvet fonksiyonunun yarım mertebeden türevi için Euler'in kullandığı tarzı tekrarlayarak yaklaşık bir formül bulmuştur. Bu çalışmaların yanında 1823 yılında Abel tarafından kesirli mertebeden bir denklemin ilk çözümleri ortaya konmuştur. 1832'den sonra kesirli analizin lineer adi diferansiyel denklemlerin bazı tiplerine uygulamaları Liouville'nin makalelerinde görülmektedir. Daha sonra, Riemann'ın 1847'de daha bir öğrenci iken ortaya koyduğu Riemann ifadesi, Liouville'nin inşası ile ana bir formül haline gelmiş ve günümüzde kullandığımız şekle dönüşmüştür. Kesirli analiz üzerindeki çalışmalar, 1880'lerden sonra modern matematikçiler için anlamlı ve uygun bir aşamaya gelmiştir. Bu zamana kadar yapılan çalışmalardan, kesirli analizin neredeyse her alanda uygulanabilir olduğu düşünülmektedir. Bu nedenle kesirli integral ve kesirli türev operatörleri ile modellenmiş problemleri çözmek için daha etkin ve daha gerçekçi çözüm tekniklerinin ortaya çıkması doğaldır. Liouville, yukarıda anlatılan kesirli diferansiyel denklemleri çözmeye çalışan ilk kişidir. Konunun anlaşılmasına büyük katkı sağlayan Caputo, Grünwald, Letnikov, Bagley, Torvik, Oldham, Spainer, Mainardi, Podlubny, Samko, Kilbas, Srivastava, Trujillo, Marichev, Miller, Ross, Baleanu, Kiryakova [7,12-15,39-43,48,52,57,59,61,62,64,65,73, 80] ve daha birçok önemli yazarın teorik ve uygulamalı çalışmalarını içeren makaleleri ve kitapları sayesinde, önceleri gizemli bir çalışma alanı olan kesirli analiz günümüzde büyük bir araştırmacı topluluğu tarafından kullanılmaktadır.

Ülkemizde yaklaşık son yirmi yıllık süreçte kesirli analiz konusu üzerinde çeşitli çalışmalar başlatılmıştır. Türkiye adresli olarak 1995 yılında yapılan ve bu yıldan sonra artan bir ivmeyle

üretilen bilimsel çalışmalar, konunun anlaşılması ve aydınlatılması noktasında günümüzde hem Türkiye'nin de başrolü aktif biçimde paylaşmakta olduğunu hem de bu alanda derin katkılarının olduğunu göstermektedir.

Diğer yandan Machado, Kiryakova, Mainardi tarafından yazılmış olan "Recent history of fractional calculus" adlı 2011 yılında bir inceleme olarak "Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation" dergisinde yayınlanan makalede, kesirli analizin yakın geçmişinden (1974'den itibaren) başlayan ve günümüze kadar yazılmış başlıca önemli kaynakların bir dizisi yer almaktadır.

Kesirli analiz üzerinde çalışmaların hepsinden anlaşılacağı üzere, kesirli analizin temelinde yatan, bu çalışmaların olmazsa olmazları "özel fonksiyonlar"dır. Gama fonksiyonları, Mittag Leffler fonksiyonları ile bunların genelleştirilmiş gösterimleri en önemlileridir. Üstelik gerekli kısaltmaları sağlamaları açısından bu fonksiyonların kullanılmasıyla hem analitik yaklaşımlar kolayca ifade edilmekte hem de yaklaşık çözümler hesap edilmektedir.

Reel sayı değerleri için Gama fonksiyonu, doğal sayılar için belirtilen faktöryel işleminin bir genelleştirmesini vermektedir. Böylece Gama fonksiyonu istenilen herhangi bir reel sayı değerine karşılık gelen genelleştirilmiş faktöryel işlemini tanımlamaktadır. Literatürden de bilindiği gibi $t^{z-1} = e^{(z-1)\log(t)}$ olmak üzere Gama fonksiyonu

$$z \in \mathbb{C} \text{ için } \Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \quad (0.1)$$

tanımı ile verilmektedir. $\Re(z) > 0$ şartını sağlayan bütün $z \in \mathbb{C}$ kompleks sayıları için bu integral değeri yakınsaktır. Bununla birlikte bu özel fonksiyonun farklı tanımlamaları da aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1) \cdots (z+n)} \quad (0.2.a)$$

veya

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^z}{1 + \frac{z}{n}} \quad (0.2.b)$$

(0.1), (0.2.a) ve (0.2.b) tanımlarından $n \in \mathbb{N}_0$ için $\Gamma(n+1) = n!$ olduğu ve $z = 1/2$ için de $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ olduğu görülür.

Bunun yanında $\alpha \in \mathbb{C}$ ve $n \in \mathbb{N}_0$ için binom katsayıları

$$\binom{\alpha}{0} = 1 \text{ ve } \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} \quad (0.3)$$

ile tanımlanmıştır.

Eğer $\alpha \notin \mathbb{Z}^-$ ise,

i) $\alpha \in \mathbb{C}$ ve $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{n! \Gamma(\alpha-n+1)} \quad (0.4)$$

ii) $\alpha \in \mathbb{C}$ ve $\beta \in \mathbb{C}$ için

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-\beta+1) \Gamma(\beta+1)} \quad (0.5)$$

eşitlikleri yazılabilir.

Ayrıca yine kesirli analiz için büyük önem taşıyan özel fonksiyonlardan bir tanesi de Mittag-Leffler fonksiyonudur. Katsayılarında gamma fonksiyonunu barındıran kuvvet serisi formatındaki bir parametrelili $E_\alpha(z)$ biçimindeki Mittag-Leffler fonksiyonu $z \in \mathbb{C}$, $\Re(z) > 0$ için

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (0.6)$$

olarak ve $\beta \in \mathbb{C}$ için (0.6) bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonunun iki parametreye genelleştirilmesi ile de iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (0.7)$$

biçiminde tanımlanır.

1. BÖLÜM

RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ İNTEGRALLERİ VE KESİRLİ TÜREVLERİ

Bu bölüm, Riemann-Liouville kesirli integrallerin ve kesirli türevlerin farklı tiplerinin tanımlarını ve bazı özelliklerini içermektedir. Genel olarak soldan ve sağdan türev tanımları ve bazı teoremler ispatları ile Samko[64] ve Kilbas[42] tarafından ifade edilmiş haliyle verilecektir.

1.1. Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri ve Kesirli Türevleri

Bu kesimde, reel eksenin sonlu bir aralığında Riemann-Liouville kesirli integralleri ve kesirli türevlerinin tanımlarını ve bu integrallerin sürekli ve toplanabilir fonksiyon uzaylarında mevcut bazı özelliklerini vereceğiz.

$-\infty < a < b < \infty$ olmak üzere $\Omega = [a, b]$, $\mathbb{R}$ reel ekseninde bir sonlu aralık olsun. $\Re(z) > 0$ olmak üzere $\alpha \in \mathbb{C}$ için α 'ıncı mertebeden soldan ve sağdan Riemann-Liouville kesirli integralleri $I_{a+}^{\alpha} f$ ve $I_{b-}^{\alpha} f$ sırasıyla

$$(I_{a+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (x > a; \Re(\alpha) > 0) \quad (1.1)$$

$$(I_{b-}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t) dt}{(t-x)^{1-\alpha}} \quad (x < b; \Re(\alpha) > 0) \quad (1.2)$$

olarak tanımlanır. Burada $\alpha = n \in \mathbb{N}$ iken (1.1) ve (1.2) denklemleri (sırası ile)

$$(I_{a+}^n f)(x) = \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \dots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \quad (1.3)$$

$$(I_{b-}^n f)(x) = \int_x^b dt_1 \int_{t_1}^b dt_2 \dots \int_{t_{n-1}}^b f(t_n) dt_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b (t-x)^{n-1} f(t) dt \quad (1.4)$$

biçiminde ifade edilir.

$n = [\Re(\alpha)] + 1$, $\Re(z) \geq 0$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ olmak üzere α 'ıncı mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevleri $D_{a+}^\alpha y$ ve $D_{b-}^\alpha y$ sırasıyla;

$$(D_{a+}^\alpha y)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{a+}^{n-\alpha} y)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{y(t) dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \quad x > a \quad (1.5)$$

$$(D_{b-}^\alpha y)(x) = \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (I_{b-}^{n-\alpha} y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{y(t) dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}, \quad x < b \quad (1.6)$$

olarak gösterilir.

i) $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$ olduğu zaman; $y(x)$ 'in n 'inci mertebeden alışımlı türevi $y^{(n)}(x)$ olup;

$$\begin{aligned} (D_{a+}^0 y)(x) &= (D_{b-}^0 y)(x) = y(x), \\ (D_{a+}^n y)(x) &= y^{(n)}(x), \\ (D_{b-}^n y)(x) &= (-1)^n y^{(n)}(x) \end{aligned} \quad (1.7)$$

yazılır.

ii) Eğer $0 < \Re(\alpha) < 1$ ise, bu takdirde

$$(D_{a+}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{y(t) dt}{(x-t)^{\alpha-[\Re(\alpha)]}} \quad (0 < \Re(\alpha) < 1; x > a) \quad (1.8)$$

ve

$$(D_{b-}^\alpha y)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{y(t) dt}{(t-x)^{\alpha-[\Re(\alpha)]}} \quad (0 < \Re(\alpha) < 1; x < b). \quad (1.9)$$

iii) $\alpha \in \mathbb{R}^+$ olduğunda; (1.5) ve (1.6) eşitlikleri

$$(D_{a+}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{y(t) dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \quad (n = [\alpha] + 1; x > a) \quad (1.10)$$

ve

$$(D_{b-}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{y(t) dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}} \quad (n = [\alpha] + 1; x < b). \quad (1.11)$$

biçiminde olurken, (1.8) ve (1.9) eşitlikleri ise

$$(D_{a+}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{y(t) dt}{(x-t)^\alpha}, \quad (0 < \alpha < 1; x > a) \quad (1.12)$$

ve

$$(D_{b-}^\alpha y)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^b \frac{y(t) dt}{(t-x)^\alpha}, \quad (0 < \alpha < 1; x < b) \quad (1.13)$$

şeklinde tanımlanır.

iv) Eğer $\Re(\alpha) = 0$ ise, bu takdirde

$$(D_{a+}^{i\theta}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-i\theta)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{y(t) dt}{(x-t)^{i\theta}}, \quad (\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; x > a) \quad (1.14)$$

$$(D_{b-}^{i\theta}y)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-i\theta)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{y(t) dt}{(t-x)^{i\theta}} \quad (\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; x < b). \quad (1.15)$$

$(x-a)^{\beta-1}$ ve $(b-x)^{\beta-1}$ kuvvet fonksiyonlarının (1.1), (1.5) ve (1.2), (1.6) Riemann-Liouville kesirli integrali ve kesirli türevi aşağıdaki gibi ifade edilir:

v) Eğer $\Re(\alpha) \geq 0$ ve $\beta \in \mathbb{C}$ ($\Re(\beta) > 0$) ise, bu takdirde

$$(I_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(x-a)^{\beta+\alpha-1} \quad (\Re(\alpha) > 0) \quad (1.16)$$

$$(D_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1} \quad (\Re(\alpha) \geq 0) \quad (1.17)$$

$$(I_{b-}^{\alpha}(b-t)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(b-x)^{\beta+\alpha-1} \quad (\Re(\alpha) > 0) \quad (1.18)$$

$$(D_{b-}^{\alpha}(b-t)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(b-x)^{\beta-\alpha-1} \quad (\Re(\alpha) \geq 0). \quad (1.19)$$

Özel olarak, eğer $\beta=1$ ve $\Re(\alpha) \geq 0$ ise bu takdirde bir sabitin Riemann-Liouville kesirli türevleri, genellikle sıfıra eşit değildir. Bu durum (1.17) ve (1.19) denklemlerinde göz önüne alınırsa, $\Gamma(1)=1$ olduğundan

$$(D_{a+}^{\alpha}1)(x) = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad (D_{b-}^{\alpha}1)(x) = \frac{(b-x)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \quad (0 < \Re(\alpha) < 1) \quad (1.20)$$

bulunur. Diğer taraftan $j=1,2,3,\dots, [\Re(\alpha)]+1$ için

$$(D_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\alpha-j})(x) = 0, \quad (D_{b-}^{\alpha}(b-t)^{\alpha-j})(x) = 0. \quad (1.21)$$

Sonuç 1.1: $\Re(\alpha) > 0$ ve $n = [\Re(\alpha)]+1$ olsun.

(a) $(D_{a+}^{\alpha}y)(x) = 0$ eşitliğinin geçerli olması için gerek ve yeter şart $j=1,\dots,n$ için $c_j \in \mathbb{R}$ keyfi sabitler olmak üzere

$$y(x) = \sum_{j=1}^n c_j (x-a)^{\alpha-j}$$

olmasıdır.

Özel olarak, $0 < \Re(\alpha) \leq 1$ iken $(D_{a+}^{\alpha}y)(x) = 0$ bağıntısının sağlanması için gerek ve yeter şart herhangi bir $c \in \mathbb{R}$ ile birlikte $y(x) = c(x-a)^{\alpha-1}$ olmasıdır.

(b) $(D_{b-}^\alpha y)(x) = 0$ eşitliğinin geçerli olması için gerek ve yeter şart $j = 1, \dots, n$ için $d_j \in \mathbb{R}$ keyfi sabitler olmak üzere

$$y(x) = \sum_{j=1}^n d_j (b-x)^{\alpha-j}$$

olmasıdır.

Benzer şekilde özellikle, $0 < \Re(\alpha) \leq 1$ olduğu zaman $(D_{b-}^\alpha y)(x) = 0$ bağıntısının sağlanması için gerek ve yeter şart herhangi bir $d \in \mathbb{R}$ ile birlikte $y(x) = d(b-x)^{\alpha-1}$ olmasıdır.

$$1 \leq p < \infty \text{ için } \|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \text{ ve } p = \infty \text{ için } \|f\|_p = \operatorname{ess\,sup}_{a \leq x \leq b} |f(x)| \quad (1.22)$$

olmak üzere $\|f\|_p < \infty$ olacak şekilde $\Omega = [a, b]$ üzerindeki Lebesgue kompleks değerli ölçülebilir f fonksiyonlarının kümesi $1 \leq p \leq \infty$ için $L_p(a, b)$ olsun. Burada $\operatorname{ess\,sup} |f(x)|$, $f(x)$ fonksiyonunun esas maksimumudur. $1 \leq p \leq \infty$ ve $c = 1/p$ için $\|f\|_p$ normlu $L_p(a, b)$ uzayının kullanılmasıyla $I_{a+}^\alpha f$ ve $I_{b-}^\alpha f$ kesirli integrasyon operatörlerinin sınırlılığı gösterilebilir[42,64].

Lemma 1.1: (a) $\Re(\alpha) > 0$ şartıyla I_{a+}^α ve I_{b-}^α kesirli integral operatörleri $1 \leq p \leq \infty$ için $L_p(a, b)$ uzayında sınırlıdır ve

$$\|I_{a+}^\alpha f\|_p \leq K \|f\|_p, \quad \|I_{b-}^\alpha f\|_p \leq K \|f\|_p, \quad \left(K = \frac{(b-a)^{\Re(\alpha)}}{\Re(\alpha) |\Gamma(\alpha)|} \right). \quad (1.23)$$

(b) Eğer $0 < \alpha < 1$ ve $1 < p < 1/\alpha$ ise, bu takdirde $q = p/(1-\alpha p)$ olmak üzere $L_p(a, b)$ 'den $L_q(a, b)$ içine $I_{a+}^\alpha f$ ve $I_{b-}^\alpha f$ operatörleri sınırlıdır.

Tanım 1.1: $n = 1, 2, 3, \dots$ için, $f^{(n-1)}(x) \in AC[a, b]$ olacak şekilde $[a, b]$ aralığı üzerinde $(n-1)$ 'inci mertebeye kadar sürekli türevlere sahip kompleks değerli $f(x)$ fonksiyonlar uzayı $AC^n[a, b]$ ile gösterilir ve

$$AC^n[a, b] = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \text{ ve } (D^{n-1}f)(x) \in AC[a, b], D = \frac{d}{dx} \right\} \quad (1.24)$$

biçiminde ifade edilir.

Lemma 1.2: $\Re(\alpha) \geq 0$ ve $n = [\Re(\alpha)] + 1$ olsun. Eğer $y(x) \in AC^n[a, b]$ ise, bu takdirde $D_{a+}^\alpha y$ ve $D_{b-}^\alpha y$ kesirli türevleri $[a, b]$ üzerinde hemen hemen her yerde mevcuttur ve sırasıyla

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)} (x-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{y^{(n)}(t) dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \quad (1.25)$$

ve

$$(D_{b-}^{\alpha}y)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k y^{(k)}(b)}{\Gamma(1+k-\alpha)} (b-x)^{k-\alpha} + \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \frac{y^{(n)}(t) dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}} \quad (1.26)$$

formunda elde edilir.

Sonuç 1.2: Eğer $0 \leq \Re(\alpha) < 1$, ($\alpha \neq 0$) ve $y(x) \in AC^n[a, b]$ ise, bu takdirde

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{y(a)}{(x-a)^{\alpha}} + \int_a^x \frac{y'(t) dt}{(x-t)^{\alpha}} \right] \quad (1.27)$$

ve

$$(D_{b-}^{\alpha}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{y(b)}{(b-x)^{\alpha}} - \int_x^b \frac{y'(t) dt}{(t-x)^{\alpha}} \right]. \quad (1.28)$$

Lemma 2.3: Eğer $\Re(\alpha) > 0$ ve $\Re(\beta) > 0$ ise, bu takdirde

$$(I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} f)(x) = (I_{a+}^{\alpha+\beta} f)(x) \quad (1.29)$$

ve

$$(I_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\beta} f)(x) = (I_{b-}^{\alpha+\beta} f)(x) \quad (1.30)$$

eşitlikleri, $1 \leq p \leq \infty$ ve $f(x) \in L_p[a, b]$ için $x \in [a, b]$ nin hemen hemen her noktasında sağlanır. Eğer $\alpha + \beta > 1$ ise, bu takdirde (1.29) ve (1.30) bağıntıları $[a, b]$ aralığının her bir noktasında geçerlidir.

Kesirli diferansiyel alma işleminin, kesirli integral alma işleminin soldan ters işlemi olduğu aşağıdaki lemma ile verilebilir.

Lemma 2.4: Eğer $\Re(\alpha) > 0$ ve $1 \leq p \leq \infty$ için $f(x) \in L_p(a, b)$ ise, bu takdirde

$$\begin{aligned} (D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} f)(x) &= f(x) \\ (D_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\alpha} f)(x) &= f(x) \end{aligned} \quad (\Re(\alpha) > 0) \quad (1.31)$$

eşitlikleri $[a, b]$ kapalı aralığında hemen hemen her yerde sağlanır.

Lemma 1.2 ve 1.4 den aşağıda kesirli diferansiyel alma ve kesirli integral alma işlemlerinin operatörleri arasında çeşitli bağlantılar türetilir.

Özellik 1.1: Eğer $\Re(\alpha) > \Re(\beta) > 0$ ise, bu takdirde, $f(x) \in L_p(a, b)$ ($1 \leq p \leq \infty$) için

$$\begin{aligned} (D_{a+}^{\beta} I_{a+}^{\alpha} f)(x) &= I_{a+}^{\alpha-\beta} f(x) \\ (D_{b-}^{\beta} I_{b-}^{\alpha} f)(x) &= I_{b-}^{\alpha-\beta} f(x) \end{aligned} \quad (1.32)$$

bağıntıları $[a, b]$ kapalı aralığında hemen hemen her yerde sağlanır.

Özel olarak $\beta = k \in \mathbb{N}$ ve $\Re(\alpha) > k$ alınırsa,

$$\begin{aligned} (D^k I_{a+}^\alpha f)(x) &= I_{a+}^{\alpha-k} f(x) \\ (D^k I_{b-}^\alpha f)(x) &= (-1)^k I_{b-}^{\alpha-k} f(x). \end{aligned} \quad (1.33)$$

Özellik 1.2: $\Re(\alpha) \geq 0$, $m \in \mathbb{N}$ ve $D = \frac{d}{dx}$ türev operatörü olsun.

(a) Eğer $(D_{a+}^\alpha y)(x)$ ve $(D_{a+}^{\alpha+m} y)(x)$ kesirli türevleri mevcutsa, bu takdirde

$$(D^m D_{a+}^\alpha y)(x) = (D_{a+}^{\alpha+m} y)(x). \quad (1.34)$$

(b) Eğer $(D_{b-}^\alpha y)(x)$ ve $(D_{b-}^{\alpha+m} y)(x)$ kesirli türevleri mevcutsa, bu takdirde

$$(D^m D_{b-}^\alpha y)(x) = (-1)^m (D_{b-}^{\alpha+m} y)(x). \quad (1.35)$$

Bir sonraki özelliği göstermek üzere $\Re(\alpha) > 0$ ve $1 \leq p \leq \infty$ için

$$I_{a+}^\alpha(L_p) = \{f : f = I_{a+}^\alpha \phi, \phi \in L_p(a, b)\} \quad (1.36)$$

$$I_{b-}^\alpha(L_p) = \{f : f = I_{b-}^\alpha \phi, \phi \in L_p(a, b)\} \quad (1.37)$$

ile tanımlı $I_{a+}^\alpha(L_p)$ ve $I_{b-}^\alpha(L_p)$ fonksiyon uzayları kullanılır. I_{a+}^α kesirli integrasyon operatörünün D_{a+}^α ile bileşkesi aşağıdaki gibidir.

Lemma 1.5: $\Re(\alpha) > 0$, $n = [\Re(\alpha)] + 1$ ve f fonksiyonunun $(n - \alpha)$ 'ıncı mertebeden (1.1) kesirli integrali $f_{n-\alpha}(x) = (I_{a+}^{n-\alpha} f)(x)$ şeklinde olsun.

(a) Eğer $1 \leq p \leq \infty$ için $f(x) \in I_{a+}^\alpha(L_p)$ ise, bu takdirde

$$(I_{a+}^\alpha D_{a+}^\alpha f)(x) = f(x). \quad (1.38)$$

(b) Eğer $f(x) \in L_1(a, b)$ ve $f_{n-\alpha}(x) \in AC^n[a, b]$ ise, bu takdirde

$$(I_{a+}^\alpha D_{a+}^\alpha f)(x) = f(x) - \sum_{j=1}^n \frac{f_{n-\alpha}^{(n-j)}(a)}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x - a)^{\alpha-j} \quad (1.39)$$

eşitliği $[a, b]$ kapalı aralığının hemen hemen her yerinde sağlanır.

Özel olarak, eğer $0 < \Re(\alpha) < 1$ ise,

$$(I_{a+}^\alpha D_{a+}^\alpha f)(x) = f(x) - \frac{f_{1-\alpha}(a)}{\Gamma(\alpha)} (x - a)^{\alpha-1} \quad (1.40)$$

ve eğer $\alpha = n \in \mathbb{N}$ ise

$$(I_{a+}^n D_{a+}^n f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k. \quad (1.41)$$

Özellik 1.3: $n, m \in \mathbb{N}$ için $n-1 < \alpha \leq n$, $m-1 < \beta \leq m$ ve $\alpha + \beta < n$ olacak şekilde $\alpha > 0$, $\beta > 0$ olsun. Ayrıca $f \in L_1(a, b)$, $f_{m-\alpha} \in AC^m[a, b]$ olduğu kabul edilsin. Bu takdirde

$$(D_{a+}^\alpha D_{a+}^\beta f)(x) = (D_{a+}^{\alpha+\beta} f)(x) - \sum_{j=1}^m (D_{a+}^{\beta-j} f)(a+) \frac{(x-a)^{-j-\alpha}}{\Gamma(1-j-\alpha)}. \quad (1.42)$$

İspat: $n > \alpha + \beta$ olduğundan (1.5) ve yarı-grup özelliğine sahip (1.29) ile (1.30) denklemleri göz önüne alınırsa

$$(D_{a+}^\alpha D_{a+}^\beta f)(x) = \left(\frac{d}{dx} \right)^n (I_{a+}^{n-\alpha} D_{a+}^\beta f)(x) = \left(\frac{d}{dx} \right)^n (I_{a+}^{n-\alpha-\beta} [I_{a+}^\beta D_{a+}^\beta f])(x) \quad (1.43)$$

elde edilir.

Diğer yandan $f \in L_1(a, b)$ ve $f_{m-\alpha} \in AC^m([a, b])$ olduğundan Lemma 1.4 den (α yerine β koyarak)

$$(I_{a+}^\beta D_{a+}^\beta f)(t) = f(t) - \sum_{j=1}^m \frac{(I_{a+}^{m-\beta} f)^{(m-j)}(a+)}{\Gamma(\beta-j+1)} (x-a)^{\beta-j} \quad (1.44)$$

yazılır. Burada (1.5) bağıntısı kullanılarak $[(I_{a+}^{m-\beta} f)]^{(m-j)}(x) = (D_{a+}^{\beta-j} f)(x)$ eşitliği bulunur. Ayrıca (1.44) eşitliği (1.7) ifadesinde yerine yazılarak (1.42) bağıntısı elde edilir.

Lemma 1.6: $\Re(\alpha) > 0$ ve $n = [\Re(\alpha)] + 1$ olsun. Ayrıca $(n-\alpha)$ 'inci mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali için $g_{n-\alpha}(x) = (I_{b-}^{n-\alpha} g)(x)$ tanımlansın.

(a) Eğer $1 \leq p \leq \infty$ ve $g(x) \in I_{b-}^\alpha(L_p)$ ise, bu takdirde

$$(I_{b-}^\alpha D_{b-}^\alpha g)(x) = g(x). \quad (1.45)$$

(b) Eğer $g(x) \in L_1(a, b)$ ve $g_{n-\alpha}(x) \in AC^n[a, b]$ ise, bu takdirde

$$(I_{b-}^\alpha D_{b-}^\alpha g)(x) = g(x) - \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{n-j} g_{n-\alpha}^{(n-j)}(a)}{\Gamma(\alpha-j+1)} (b-x)^{\alpha-j} \quad (1.46)$$

formülü $[a, b]$ kapalı aralığının hemen hemen her yerinde sağlanır.

Özel olarak, eğer $0 < \Re(\alpha) < 1$ ise, bu takdirde $g_{1-\alpha}(x) = (I_{b-}^{1-\alpha} g)(x)$ için

$$(I_{b-}^\alpha D_{b-}^\alpha g)(x) = g(x) - \frac{g_{1-\alpha}(a)}{\Gamma(\alpha)} (b-x)^{\alpha-1} \quad (1.47)$$

olur ve

$$(I_{b-}^n D_{b-}^n g)(x) = g(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k g^{(k)}(b)}{k!} (b-x)^k \quad (1.48)$$

eşitliği sağlanır.

1.2. Yarı Eksende Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri ve Kesirli Türevleri

Bu kesimde, $\mathbb{R}^+$ yarı eksen üzerinde Liouville kesirli integrallerin ve kesirli türevlerin bazı özellikleri ve tanımları gösterilecektir. (1.1) ve (1.2) Riemann-Liouville kesirli integralleri ile (1.5) ve (1.6) kesirli türevleri, $\mathbb{R}$ reel doğrusunun bir sonlu $[a, b]$ aralığında tanımlanmış olmasına karşın burada bu tanımlamalar $\mathbb{R}^+$ yarı eksenine genişletilecektir[42,64].

(1.1) ve (1.2) kesirli integraller tanımlamalarının yarı eksen üzerinde sırasıyla

$$(I_{0+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (x > 0; \Re(\alpha) > 0) \quad (1.49)$$

$$(I_{-}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} \frac{f(t) dt}{(t-x)^{1-\alpha}} \quad (x > 0; \Re(\alpha) > 0) \quad (1.50)$$

biçiminde tanımlanırken, (1.5) ile (1.6) kesirli türevler ise yine yarı eksen üzerinden $n = [\Re(\alpha)] + 1$, $\Re(\alpha) \geq 0$, $x > 0$ olmak üzere sırasıyla

$$(D_{0+}^{\alpha} y)(x) = \left(\frac{d}{dx} \right)^n (I_{0+}^{n-\alpha} y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_0^x \frac{y(t) dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \quad (1.51)$$

$$(D_{-}^{\alpha} y)(x) = \left(-\frac{d}{dx} \right)^n (I_{-}^{n-\alpha} y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx} \right)^n \int_x^{\infty} \frac{y(t) dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}} \quad (1.52)$$

şeklinde ifade edilir.

(1.49) ve (1.50) eşitliklerindeki $I_{0+}^{\alpha} f$ ve $I_{-}^{\alpha} f$ ile (1.51) ve (1.52) eşitliklerindeki $D_{0+}^{\alpha} y$ ve $D_{-}^{\alpha} y$ ifadeleri sırasıyla $\mathbb{R}^+$ yarı ekseninde Liouville soldan ve sağdan kesirli integralleri ve kesirli türevleri olarak adlandırılır.

Özel olarak, $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$ olduğunda $y^{(n)}(x)$, $y(x)$ 'in n 'inci mertebeden alışılmış türevi olmak üzere

$$\begin{aligned} (D_{+}^0 y)(x) &= (D_{-}^0 y)(x) = y(x); \quad (D_{+}^n y)(x) = y^{(n)}(x), \\ (D_{-}^n y)(x) &= (-1)^n y^{(n)}(x) \quad (n \in \mathbb{N}). \end{aligned} \quad (1.53)$$

Eğer $0 < \Re(\alpha) < 1$ ve $x > 0$ ise, bu takdirde

$$(D_{0+}^{\alpha} y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{y(t) dt}{(x-t)^{\alpha-[\Re(\alpha)]}} \quad (1.54)$$

$$(D_{-}^{\alpha} y)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^{\infty} \frac{y(t) dt}{(t-x)^{\alpha-[\Re(\alpha)]}} \quad (1.55)$$

olur.

Eğer $\Re(\alpha) = 0$ ($\alpha \neq 0$) ise, bu takdirde (1.54) ve (1.55) Liouville kesirli türevleri sanal mertebededir ve sırasıyla

$$(D_{0+}^{i\theta} y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-i\theta)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{y(t) dt}{(x-t)^{i\theta}} \quad (\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; x > 0) \quad (1.56)$$

$$(D_-^{i\theta} y)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-i\theta)} \frac{d}{dx} \int_x^\infty \frac{y(t) dt}{(t-x)^{i\theta}} \quad (\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; x > 0) \quad (1.57)$$

biçimindedir. I_{0+}^α ve D_{0+}^α Liouville kesirli hesap operatörleri $\alpha = 0$ olmak üzere (1.16) ve (1.17) bağıntılarını sağlarken, I_-^α ve D_-^α Liouville kesirli hesap operatörleri $x^{\beta-1}$ kuvvet fonksiyonuna ve $e^{-\lambda x}$ üstel fonksiyonuna uygulandığında her ikisi de sabit bir çarpandan farklı olmak üzere sırasıyla aynı formdaki bir kuvvet fonksiyonunu ve aynı üstel fonksiyonu verir.

Özellik 1.4: $\Re(\alpha) \geq 0$ olsun.

(a) Eğer $\Re(\beta) > 0$ ise, bu takdirde

$$(I_{0+}^\alpha t^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} x^{\beta+\alpha-1} \quad (\Re(\alpha) > 0; \Re(\beta) > 0) \quad (1.58)$$

$$(D_{0+}^\alpha t^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} x^{\beta-\alpha-1} \quad (\Re(\alpha) \geq 0; \Re(\beta) > 0). \quad (1.59)$$

(b) Eğer $\beta \in \mathbb{C}$ ise, bu takdirde

$$(I_-^\alpha t^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(1-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)} x^{\beta+\alpha-1} \quad (\Re(\alpha) > 0; \Re(\alpha+\beta) < 1) \quad (1.60)$$

$$(D_-^\alpha t^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(1+\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)} x^{\beta-\alpha-1} \quad (\Re(\alpha) \geq 0; \Re(\alpha+\beta - [\Re(\alpha)]) < 1). \quad (1.61)$$

(c) Eğer $\Re(\lambda) > 0$ ise, bu takdirde

$$(I_-^\alpha e^{-\lambda t})(x) = \lambda^{-\alpha} e^{-\lambda x} \quad (\Re(\alpha) > 0) \quad (1.62)$$

$$(D_-^\alpha e^{-\lambda t})(x) = \lambda^\alpha e^{-\lambda x} \quad (\Re(\alpha) \geq 0). \quad (1.63)$$

Burada $0 < \alpha < 1$ ve $1 \leq p < 1/\alpha$ ise $I_{0+}^\alpha f$ ve $I_-^\alpha f$ integralleri bir $f(x) \in L_p(\mathbb{R}^+)$ fonksiyonu için tanımlıdır. Bu formülleri kullanarak ve bağıntının n kez diferansiyeli alınarak,

$$\begin{aligned} (D_-^\alpha t^{\beta-1})(x) &= \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (I_-^{n-\alpha} t^{\beta-1})(x) = \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \left[\frac{\Gamma(1-n+\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)} x^{\beta+n-\alpha-1} \right] \\ &= (-1)^n \frac{\Gamma(1-n+\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)} \frac{\Gamma(\beta+n-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha)} x^{\beta-\alpha-1} \end{aligned} \quad (1.64)$$

yazılır. Ayrıca,

$$\Gamma(1-n+\alpha-\beta)\Gamma(\beta+n-\alpha) = \frac{\pi}{\sin[(\beta-\alpha+n)\pi]} = \frac{(-1)^n \pi}{\sin[(\beta-\alpha)\pi]} \quad (1.65)$$

$$\frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha)} = \frac{\Gamma(1+\alpha-\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(1+\alpha-\beta)} = \frac{\Gamma(1+\alpha-\beta) \sin[(\beta-\alpha)\pi]}{\pi} \quad (1.66)$$

dir. Bu bağıntılar (1.64) denkleminde yerine yazılırsa, (1.61) eşitliği elde edilir.

Özellik 1.5: $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $p \geq 1$ ve $\alpha + \beta < 1/p$ olsun. Eğer $f(x) \in L_p(\mathbb{R}^+)$ ise, bu takdirde

$$\begin{aligned} (I_{0+}^\alpha I_{0+}^\beta f)(x) &= (I_{0+}^{\alpha+\beta} f)(x) \\ (I_-^\alpha I_-^\beta f)(x) &= (I_-^{\alpha+\beta} f)(x) \end{aligned} \quad (1.67)$$

biçimindeki yarı grup özellikleri sağlanır.

$(D_{0+}^\alpha y)$ ve $(D_-^\alpha y)$ kesirli türevleri, yeterince iyi tanımlanmış $y(x)$ fonksiyonları için örneğin $\mathbb{R}^+$ kompakt olduğundan, $C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ uzayında mevcut olacaktır.

Özellik 1.6: Eğer $\alpha > 0$ ise, bu takdirde

$$\begin{aligned} (D_{0+}^\alpha I_{0+}^\alpha f)(x) &= f(x) \\ (D_-^\alpha I_-^\alpha f)(x) &= f(x) \end{aligned} \quad (1.68)$$

bağıntıları “yeterince iyi tanımlanmış” $f(x)$ fonksiyonları için doğrudur. Özel olarak, bu formüller $f(x) \in L_1(\mathbb{R}^+)$ için sağlanır.

Özellik 1.7: Eğer $\alpha > \beta > 0$ ise, bu takdirde

$$\begin{aligned} (D_{0+}^\beta I_{0+}^\alpha f)(x) &= (I_{0+}^{\alpha-\beta} f)(x) \\ (D_-^\beta I_-^\alpha f)(x) &= (I_-^{\alpha-\beta} f)(x) \end{aligned} \quad (1.69)$$

formülleri, $f(x) \in L_1(\mathbb{R}^+)$ olacak şekilde yeterince iyi tanımlanmış $f(x)$ fonksiyonları için geçerlidir.

Özel olarak, $\beta = k \in \mathbb{N}$ ve $\Re(\alpha) > k$ olduğunda

$$(D_{0+}^k I_{0+}^\alpha f)(x) = (I_{0+}^{\alpha-k} f)(x) \text{ ve } (D_-^k I_-^\alpha f)(x) = (-1)^k (I_-^{\alpha-k} f)(x). \quad (1.70)$$

Özellik 1.8. $\alpha > 0$, $m \in \mathbb{N}$ ve $D = d/dx$ olsun.

(a) Eğer $(D_{0+}^\alpha y)(x)$ ve $(D_{0+}^{\alpha+m} y)(x)$ kesirli türevleri mevcut ise, bu takdirde

$$(D^m D_{0+}^\alpha y)(x) = (D_{0+}^{\alpha+m} y)(x). \quad (1.71)$$

(b) Eğer $(D_-^\alpha y)(x)$ ve $(D_-^{\alpha+m} y)(x)$ kesirli türevleri mevcut ise, bu takdirde

$$(D^m D_-^\alpha y)(x) = (-1)^m (D_-^{\alpha+m} y)(x). \quad (1.72)$$

1.3. Reel Eksende Liouville Kesirli İntegralleri ve Kesirli Türevleri

Bu kesimde, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ reel eksenin tamamında Liouville kesirli integrallerin ve kesirli türevlerin bazı özellikleri ve tanımları verilecektir[42,64]. Reel eksende tanımlı Liouville kesirli türevleri ve integralleri Kesim 1.2'de sunulan yarı eksendeki durumlara benzerdir. Kesirli integraller $x \in \mathbb{R}$ ve $\Re(\alpha) > 0$ olduğunda

$$(I_+^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (1.73)$$

$$(I_-^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty \frac{f(t) dt}{(t-x)^{1-\alpha}} \quad (1.74)$$

biçimindedir ve kesirli türevler de $n = [\Re(\alpha)] + 1$, $\Re(\alpha) > 0$ ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$(D_+^\alpha y)(x) = \left(\frac{d}{dx} \right)^n (I_+^{n-\alpha} y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_{-\infty}^x \frac{y(t) dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \quad (1.75)$$

$$(D_-^\alpha y)(x) = \left(-\frac{d}{dx} \right)^n (I_-^{n-\alpha} y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx} \right)^n \int_x^\infty \frac{y(t) dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}} \quad (1.76)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

(1.73) ve (1.74) de $I_+^\alpha f$ ile $I_-^\alpha f$ ve (1.75) ve (1.76) de $D_+^\alpha y$ ve $D_-^\alpha y$ için yazılan ifadeler, tüm $\mathbb{R}$ reel eksende Liouville soldan ve sağdan kesirli integralleri ve kesirli türevleri olarak adlandırılırlar. Özel olarak, $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$ olduğunda $y^{(n)}(x)$, $y(x)$ 'in n 'inci mertebeden alışımlı türevi olduğunda

$$(D_+^0 y)(x) = (D_-^0 y)(x) = y(x);$$

$$(D_-^\alpha y)(x) = y^{(n)}(x), (D_-^n y)(x) = (-1)^n y^{(n)}(x) \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (1.77)$$

biçimindedir. Eğer $0 < \Re(\alpha) < 1$ ve $x \in \mathbb{R}$ ise, bu takdirde

$$(D_+^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x \frac{y(t) dt}{(x-t)^{\alpha-\Re(\alpha)}} \quad (1.78)$$

$$(D_-^\alpha y)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^\infty \frac{y(t) dt}{(t-x)^{\alpha-\Re(\alpha)}} \quad (1.79)$$

olur.

$\Re(\alpha) = 0$ ($\alpha \neq 0$) olduğunda, tamamen sanal mertebeden (1.78) ve (1.79) Liouville kesirli türevleri sırasıyla

$$(D_+^{i\theta} y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-i\theta)} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x \frac{y(t) dt}{(t-x)^{i\theta}} \quad (\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; x \in \mathbb{R}) \quad (1.80)$$

$$(D_-^{i\theta}y)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-i\theta)} \frac{d}{dx} \int_x^\infty \frac{y(t) dt}{(t-x)^{i\theta}} \quad (\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; x \in \mathbb{R}) \quad (1.81)$$

biçimindedir.

Özellik 1.4(b)'nin bir benzeri, ikisi birden sabit çarpandan farklı olan, $e^{\lambda x}$ üstel fonksiyonunun D_+^α ve I_+^α Liouville kesirli hesap operatörleri aynı üstel fonksiyonu ortaya koyar.

Özellik 1.9. $\Re(\alpha) > 0$ olsun.

(a) $\Re(\alpha) \geq 0$ ise, bu takdirde

$$(I_+^\alpha e^{\lambda t})(x) = \lambda^\alpha e^{\lambda x}. \quad (1.82)$$

(b) $\Re(\alpha) \geq 0$ ise, bu takdirde

$$(D_+^\alpha e^{\lambda t})(x) = \lambda^\alpha e^{\lambda x}. \quad (1.83)$$

Burada $0 < \alpha < 1$ ve $1 \leq p < 1/\alpha$ olduğunda $I_+^\alpha f$ ve $I_-^\alpha f$ integralleri bir $f(x) \in L_p(\mathbb{R})$ fonksiyonu için tanımlanır.

2. BÖLÜM

CAPUTO VE GRÜNWARD-LETNİKOV KESİRLİ TÜREVLERİ

2.1. Caputo Kesirli Türevleri

Bu kesimde Kilbas[42] kitabında ifade edilmiş Caputo kesirli türevlerin tanımları ve bazı özellikleri verilecektir. $\mathbb{R}$ reel uzayın sonlu aralığı $[a, b]$ olsun ve sırasıyla (1.5) ve (1.6) eşitlikleri ile tanımlanan $\alpha \in \mathbb{C}$ mertebeye sahip Riemann-Liouville türevleri $\Re(\alpha) \geq 0$ için

$$D_{a+}^{\alpha}[y(t)](x) \equiv (D_{a+}^{\alpha}y)(x) \quad \text{ve} \quad D_{b-}^{\alpha}[y(t)](x) \equiv (D_{b-}^{\alpha}y)(x)$$

şeklinde yazılsın. $[a, b]$ aralığı üzerinde $\Re(\alpha) \geq 0$ için $\alpha \in \mathbb{C}$ mertebeden soldan $({}^C D_{a+}^{\alpha}y)(x)$ ve sağdan $({}^C D_{b-}^{\alpha}y)(x)$ kesirli Caputo türevleri;

$$\alpha \notin \mathbb{N}_0 \text{ için } n = [\Re(\alpha)] + 1 \text{ ve } \alpha \in \mathbb{N}_0 \text{ için } n = \alpha \quad (2.1)$$

olmak üzere sırasıyla

$$({}^C D_{a+}^{\alpha}y)(x) := \left(D_{a+}^{\alpha} \left[y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] \right)(x) \quad (2.2)$$

$$({}^C D_{b-}^{\alpha}y)(x) := \left(D_{b-}^{\alpha} \left[y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(b)}{k!} (b-t)^k \right] \right)(x) \quad (2.3)$$

biçiminde üstte verilen Riemann-Liouville kesirli türevleri yardımıyla tanımlanır.

Özellikle, $0 < \Re(\alpha) < 1$ olduğunda, (2.2) ve (2.3) bağıntıları

$$({}^C D_{a+}^{\alpha}y)(x) = (D_{a+}^{\alpha}[y(t) - y(a)])(x) \quad (2.4)$$

$$({}^C D_{b-}^{\alpha}y)(x) = (D_{b-}^{\alpha}[y(t) - y(b)])(x) \quad (2.5)$$

şeklinde ifade edilir.

$\alpha \notin \mathbb{N}_0$ ve $y(x)$ fonksiyonunun $\Re(\alpha) \geq 0$ için $\alpha \in \mathbb{C}$ mertebeden $({}^C D_{a+}^\alpha y)(x)$ ve $({}^C D_{b-}^\alpha y)(x)$ Caputo kesirli türevleri, $(D_{a+}^\alpha y)(x)$ ve $(D_{b-}^\alpha y)(x)$ Riemann-Liouville kesirli türevleri cinsinden de yazılabilir, bu takdirde (1.7) eşitliklerinden

$$({}^C D_{a+}^\alpha y)(x) = (D_{a+}^\alpha y)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (x-a)^{k-\alpha}, \quad (n = [\Re(\alpha)] + 1) \quad (2.6)$$

$$({}^C D_{b-}^\alpha y)(x) = (D_{b-}^\alpha y)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(b)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (b-x)^{k-\alpha}, \quad (n = [\Re(\alpha)] + 1) \quad (2.7)$$

bağıntıları yazılır. Burada özellikle $0 < \Re(\alpha) < 1$ olduğunda,

$$({}^C D_{a+}^\alpha y)(x) = (D_{a+}^\alpha y)(x) - \frac{y(a)}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha} \quad (2.8)$$

$$({}^C D_{b-}^\alpha y)(x) = (D_{b-}^\alpha y)(x) - \frac{y(b)}{\Gamma(1-\alpha)} (b-x)^{-\alpha} \quad (2.9)$$

elde edilir.

Eğer $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ ise, bu takdirde $({}^C D_{a+}^\alpha y)(x)$ ve $({}^C D_{b-}^\alpha y)(x)$ biçimindeki Caputo kesirli türevleri ile $(D_{a+}^\alpha y)(x)$ ve $(D_{b-}^\alpha y)(x)$ biçimindeki Riemann-Liouville kesirli türevleri aşağıda verilen durumlarda çakışır:

i) Eğer $n = [\Re(\alpha)] + 1$ için $y(a) = y'(a) = \dots = y^{(n-1)}(a) = 0$ ise;

$$({}^C D_{a+}^\alpha y)(x) = (D_{a+}^\alpha y)(x), \quad (2.10)$$

ii) Eğer $n = [\Re(\alpha)] + 1$ için $y(b) = y'(b) = \dots = y^{(n-1)}(b) = 0$ ise;

$$({}^C D_{b-}^\alpha y)(x) = (D_{b-}^\alpha y)(x). \quad (2.11)$$

Burada özellikle, $0 < \Re(\alpha) < 1$ olduğunda,

$$y(a) = 0 \text{ ise, } ({}^C D_{a+}^\alpha y)(x) = (D_{a+}^\alpha y)(x) \quad (2.12)$$

$$y(b) = 0 \text{ ise, } ({}^C D_{b-}^\alpha y)(x) = (D_{b-}^\alpha y)(x) \quad (2.13)$$

bulunur.

Eğer $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$ için n 'inci mertebeden adi $y^{(n)}(x)$ türevleri mevcut ise, bu takdirde $({}^C D_{a+}^\alpha y)(x)$ ile ifade edilen Caputo kesirli türevi $y^{(n)}(x)$ ile çakışır, ayrıca $(-1)^n$ çarpanıyla birlikte $y^{(n)}(x)$ ile $({}^C D_{b-}^\alpha y)(x)$ Caputo kesirli türevi de çakışmaktadır. Yani

$$({}^C D_{a+}^\alpha y)(x) = y^{(n)}(x) \text{ ve } ({}^C D_{b-}^\alpha y)(x) = (-1)^n y^{(n)}(x) \quad (2.14)$$

olup buradan $({}^C D_{a+}^\alpha y)(x)$ ve $({}^C D_{b-}^\alpha y)(x)$ Caputo kesirli türevleri, (2.2) ve (2.3) eşitliklerinin sağ tarafındaki $y(x)$ fonksiyonlarının Riemann-Liouville kesirli türevlerinin mevcut olması durumunda tanımlıdır.

Teorem 2.1: $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ ve $\Re(\alpha) \geq 0$ için $n = [\Re(\alpha)] + 1$; $\alpha \in \mathbb{N}_0$ için $n = \alpha$ olsun. Eğer $y(x) \in AC^n[a, b]$ ise, bu takdirde $({}^C D_{a+}^\alpha y)(x)$ ve $({}^C D_{b-}^\alpha y)(x)$ Caputo kesirli türevleri, $[a, b]$ aralığında hemen hemen her yerde mevcuttur.

(a) Eğer $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ ise, $D = \frac{d}{dx}$ ve $n = [\Re(\alpha)] + 1$ olmak üzere Caputo türevleri sırasıyla

$$({}^C D_{a+}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x \frac{y^{(n)}(t) dt}{(x - t)^{\alpha - n + 1}} =: (I_{a+}^{n - \alpha} D^n y)(x) \quad (2.15)$$

$$({}^C D_{b-}^\alpha y)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n - \alpha)} \int_x^b \frac{y^{(n)}(t) dt}{(t - x)^{\alpha - n + 1}} =: (-1)^n (I_{b-}^{n - \alpha} D^n y)(x) \quad (2.16)$$

ile gösterilir.

Özellikle, $0 < \Re(\alpha) < 1$ ve $y(x) \in AC[a, b]$ olduğunda,

$$({}^C D_{a+}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_a^x \frac{y'(t) dt}{(x - t)^\alpha} = (I_{a+}^{1 - \alpha} Dy)(x) \quad (2.17)$$

$$({}^C D_{b-}^\alpha y)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_x^b \frac{y'(t) dt}{(t - x)^\alpha} = -(I_{b-}^{1 - \alpha} Dy)(x) \quad (2.18)$$

şeklindedir.

(b) Eğer $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$ ise, bu takdirde (2.2) ifadesinden

$$({}^C D_{a+}^\alpha y)(x) = \left(\frac{d}{dx} \right)^n \left[y(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k \right] \quad (2.19)$$

yazılabildiğinden $({}^C D_{a+}^n y)(x)$ ve $({}^C D_{b-}^n y)(x)$ Caputo kesirli türevleri (2.14) ile gösterilir.

Özellikle $\alpha = 0$ ise

$$({}^C D_{a+}^0 y)(x) = ({}^C D_{b-}^0 y)(x) = y(x) \quad (2.20)$$

biçiminde yazılır.

Aşağıda verilen teorem [64], $[a, b]$ aralığı üzerinde n 'inci mertebeye kadar sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar uzayı $C^n[a, b]$ 'daki $y(x)$ fonksiyonları için Teorem 2.1 ile benzerlik gösterir.

Teorem 2.2: $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ ve $\Re(\alpha) \geq 0$ için $n = [\Re(\alpha)] + 1$; $\alpha \in \mathbb{N}_0$ için $n = \alpha$ olsun. Ayrıca $y(x) \in C^n[a, b]$ kabul edilsin. Bu takdirde $({}^C D_{a+}^\alpha y)(x)$ ve $({}^C D_{b-}^\alpha y)(x)$ Caputo kesirli türevleri, $[a, b]$ aralığında sürekli olup,

$$({}^C D_{a+}^\alpha y)(x) \in C[a, b] \text{ ve } ({}^C D_{b-}^\alpha y)(x) \in C[a, b].$$

(a) Eğer $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ ise, bu takdirde $({}^C D_{a+}^\alpha y)(x)$ ve $({}^C D_{b-}^\alpha y)(x)$ sırasıyla (2.15) ve (2.16) ile verilen eşitlikler ile temsil edilirler. Ayrıca

$$({}^C D_{a+}^\alpha y)(a) = ({}^C D_{b-}^\alpha y)(b) = 0. \quad (2.21)$$

Özellikle, $0 < \Re(\alpha) < 1$ için Caputo türevleri sırasıyla (2.17) ve (2.18) denklemleri ile temsil edilirler.

(b) Eğer $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$ ise, bu takdirde $({}^C D_{a+}^\alpha y)(x)$ ve $({}^C D_{b-}^\alpha y)(x)$ kesirli türevleri (2.14)'teki gösterimlere sahiptir.

Sonuç 2.1: $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ ve $\Re(\alpha) \geq 0$ için $n = [\Re(\alpha)] + 1$; $\alpha \in \mathbb{N}_0$ için $n = \alpha$ olsun.

(a) Eğer $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ ise, bu takdirde $C^n[a, b]$ uzayından

$$C_a[a, b] = \{f(x) \in C[a, b]; f(a) = 0, \|f\|_{C_a} = \|f\|_C\} \quad (2.22)$$

$$C_b[a, b] = \{f(x) \in C[a, b]; f(b) = 0, \|f\|_{C_b} = \|f\|_C\} \quad (2.23)$$

ile ifade edilen $C_a[a, b]$ ve $C_b[a, b]$ uzaylarına tanımlanan ${}^C D_{a+}^\alpha$ ve ${}^C D_{b-}^\alpha$ Caputo kesirli operatörleri sırasıyla sınırlıdır. Ayrıca,

$$k_\alpha = \frac{(b-a)^{n-\Re(\alpha)}}{|\Gamma(n-\alpha)|[n-\Re(\alpha)+1]} \quad (2.24)$$

olmak üzere bu operatörler

$$\|{}^C D_{a+}^\alpha y\|_{C_a} \leq k_\alpha \|y\|_{C^n} \text{ ve } \|{}^C D_{b-}^\alpha y\|_{C_b} \leq k_\alpha \|y\|_{C^n} \quad (2.25)$$

eşitsizliklerini sağlar.

(b) Eğer $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$ ise, bu takdirde ${}^C D_{a+}^\alpha$ ve ${}^C D_{b-}^\alpha$ operatörleri $C^n[a, b]$ uzayından $C[a, b]$ uzayına sınırlıdır. Bu operatörlerin sınırlılığı

$$\|{}^C D_{a+}^n y\|_C \leq \|y\|_{C^n} \text{ ve } \|{}^C D_{b-}^n y\|_C \leq \|y\|_{C^n} \quad (2.26)$$

olarak yazılır.

Özellik 2.1: $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ ve $\Re(\alpha) \geq 0$ için $n = [\Re(\alpha)] + 1$; $\alpha \in \mathbb{N}_0$ için $n = \alpha$ olsun. Ayrıca $\Re(\beta) > 0$ kabul edilsin. Bu takdirde aşağıdaki bağıntılar yazılır:

$$({}^C D_{a+}^{\alpha} (t-a)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (x-a)^{\beta-1} \quad (\Re(\beta)) > n \quad (2.27)$$

$$({}^C D_{b-}^{\alpha} (b-t)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-x)^{\beta-1} \quad (\Re(\beta)) > n \quad (2.28)$$

$$({}^C D_{a+}^{\alpha} (t-a)^k)(x) = 0 \quad \text{ve} \quad ({}^C D_{b-}^{\alpha} (t-a)^k)(x) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n-1). \quad (2.29)$$

Özellikle $f(x) = 1$ ise

$$({}^C D_{a+}^{\alpha} 1)(x) = 0 \quad \text{ve} \quad ({}^C D_{b-}^{\alpha} 1)(x) = 0. \quad (2.30)$$

elde edilir.

$\alpha \in \mathbb{N}$ ve $\Re(\alpha) \notin \mathbb{N}_0$ iken ${}^C D_{a+}^{\alpha}$ ve ${}^C D_{b-}^{\alpha}$ Caputo kesirli türev operatörleri, I_{a+}^{α} ve I_{b-}^{α} Riemann-Liouville kesirli integrasyon operatörlerinin soldan ters operatörleridir. Fakat bu operatörler $\Re(\alpha) \in \mathbb{N}_0$ ve $\Im(\alpha) \neq 0$ olduğunda böyle bir özelliğe sahip değildir.

Lemma 2.1 $\Re(\alpha) > 0$ ve $y(x) \in L_{\infty}(a, b)$ veya $y(x) \in C[a, b]$ olsun.

(a) Eğer $\Re(\alpha) \notin \mathbb{N}$ veya $\alpha \in \mathbb{N}$ ise, bu takdirde

$$({}^C D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} y)(x) = y(x) \quad \text{ve} \quad ({}^C D_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\alpha} y)(x) = y(x) \quad (2.31)$$

(b) Eğer $\Re(\alpha) \in \mathbb{N}$ ve $\Im(\alpha) \neq 0$ ise, bu takdirde

$$({}^C D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} y)(x) = y(x) - \frac{(I_{a+}^{\alpha+1-n} y)(a+)}{\Gamma(n-\alpha)} (x-a)^{n-\alpha} \quad (2.32)$$

$$({}^C D_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\alpha} y)(x) = y(x) - \frac{(I_{b-}^{\alpha+1-n} y)(b-)}{\Gamma(n-\alpha)} (b-x)^{n-\alpha} \quad (2.33)$$

şeklindedir.

$y(x) \in L_{\infty}(a, b)$ ($y(x) \in C[a, b]$ olmasına denktir.) olduğundan, $x \in [a, b]$ olmak üzere herhangi bir $k = 0, 1, \dots, n-1$ değeri için

$$\left| (I_{a+}^{\alpha-k} y)(x) \right| \leq \frac{K}{|\Gamma(n-\alpha)|[\Re(\alpha)-k]} (x-a)^{\Re(\alpha)-k} \quad \left(K = \|y\|_{L_{\infty}} = \|y\|_C \right) \quad (2.34)$$

yazılır böylece

$$(I_{a+}^{\alpha} y)^{(k)}(a+) = 0, \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \quad (2.35)$$

elde edilir.

$\alpha = m + i\theta$ ($m \in \mathbb{N}; \theta \neq 0$) olsun. Bu takdirde $n = m + 1 \geq 2$ ve $(K = \|y\|_{L_{\infty}} (= \|y\|_C))$, $(k = 0, 1, \dots, m-1)$ olmak üzere,

$$(I_{a+}^{\alpha} y)^{(k)}(x) = (I_{a+}^{\alpha-k} y)(x) \quad (k = 0, 1, \dots, n-2) \quad (2.36)$$

$$\left| (I_{a+}^{m+i\theta-k} D^n y)(x) \right| \leq \frac{K(x-a)^{m-k}}{\left| \Gamma(m+i\theta-\alpha) \right| (m-k)} \quad (2.37)$$

ifadeleri elde edilir ve böylece

$$(I_{a+}^\alpha y)^{(k)}(a+) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n-2) \quad (2.38)$$

yazılır.

Lemma 2.2: $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ ve $\Re(\alpha) \geq 0$ için $n = [\Re(\alpha)] + 1$; $\alpha \in \mathbb{N}_0$ için $n = \alpha$ olsun. Eğer $y(x) \in AC^n[a, b]$ veya $y(x) \in C^n[a, b]$ ise, bu takdirde

$$(I_{a+}^\alpha {}^C D_{a+}^\alpha y)(x) = y(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \quad (2.39)$$

$$(I_{b-}^\alpha {}^C D_{b-}^\alpha y)(x) = y(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k y^{(k)}(b)}{k!} (b-x)^k \quad (2.40)$$

şeklindedir.

Özellikle, eğer $0 < \Re(\alpha) \leq 1$ ve $y(x) \in AC[a, b]$ veya $y(x) \in C[a, b]$ ise, bu takdirde

$$(I_{a+}^\alpha {}^C D_{a+}^\alpha y)(x) = y(x) - y(a) \quad (2.41)$$

$$(I_{b-}^\alpha {}^C D_{b-}^\alpha y)(x) = y(x) - y(b). \quad (2.42)$$

$\alpha \notin \mathbb{N}$ için $({}^C D_{a+}^\alpha y)(x)$ ve $({}^C D_{b-}^\alpha y)(x)$ türevleri yarı-grup özelliği kullanılarak

$$(I_{a+}^\alpha {}^C D_{a+}^\alpha y)(x) = (I_{a+}^\alpha I_{a+}^{n-\alpha} D^n y)(x) = (I_{a+}^n D_{a+}^n y)(x) \quad (2.43)$$

$$(I_{b-}^\alpha {}^C D_{b-}^\alpha y)(x) = (-1)^n (I_{b-}^\alpha I_{b-}^{n-\alpha} D^n y)(x) = (I_{b-}^n D_{b-}^n y)(x) \quad (2.44)$$

şeklinde yazılabilir.

Eğer $\alpha \in \mathbb{N}$ ise, bu takdirde

$$(I_{a+}^n D_{a+}^n f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \quad (2.45)$$

$$(I_{b-}^n D_{b-}^n g)(x) = g(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k g^{(k)}(b)}{k!} (b-x)^k \quad (2.46)$$

yazılır.

Uyarı 2.1: $\alpha > 0$ için, (2.31)'deki ilk formül Diethelm tarafından (2.23) formundaki $(D_{*a}^\alpha y)(x)$ Caputo türevi kullanılarak (2.39) bağıntısı elde edilmiştir[20,42]. Burada bu formüllerin sadece $\alpha \geq 0$ için formüle edildiğine, fakat $\alpha = 0$ durumu için ek açıklamaya ihtiyaç duyulduğuna dikkat edelim.

$f(x) \in AC^n[a, b]$ ve $f(x) \in C^n[a, b]$ olmak üzere (2.2)-(2.3) bağıntıları ile ifade edilen Caputo türevleri, (2.14) veya (2.15)-(2.16) formunda temsil edilebilen haliyle Teorem 2.1 ve Teorem 2.2'de gösterilen sonlu bir $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlanır.

(2.15) ve (2.16) formülleri $\mathbb{R}$ eksenini ve $\mathbb{R}^+$ yarı eksenini üzerinde Caputo türevlerinin tanımı için kullanılabilir. Böylece $\mathbb{R}$ eksenini ve $\mathbb{R}^+$ yarı eksenini üzerinde ($\Re(\alpha) > 0$ ve $\alpha \notin \mathbb{N}$ ile) $\alpha \in \mathbb{C}$ mertebeden Caputo kesirli türevine karşılık gelen formüller aşağıdaki gibi sırasıyla tanımlanır [7]:

$$({}^C D_{0+}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x \frac{y^{(n)}(t) dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \quad x \in \mathbb{R}^+ \quad (2.47)$$

$$({}^C D_-^\alpha y)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^\infty \frac{y^{(n)}(t) dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}, \quad x \in \mathbb{R}^+ \quad (2.48)$$

$$({}^C D_+^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{y^{(n)}(t) dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.49)$$

$$({}^C D_-^\alpha y)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^\infty \frac{y^{(n)}(t) dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.50)$$

$0 < \Re(\alpha) < 1$ olduğunda, (2.47)-(2.48) ve (2.49)-(2.50) bağıntıları aşağıdaki formdadır:

$$({}^C D_{0+}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{y'(t) dt}{(x-t)^\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^+ \quad (2.51)$$

$$({}^C D_-^\alpha y)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^\infty \frac{y'(t) dt}{(t-x)^\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^+ \quad (2.52)$$

$$({}^C D_+^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{y'(t) dt}{(x-t)^\alpha}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.53)$$

$$({}^C D_-^\alpha y)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^\infty \frac{y'(t) dt}{(t-x)^\alpha}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.54)$$

$\alpha = n \in \mathbb{N}$ için $({}^C D_{0+}^n y)(x)$, $({}^C D_-^n y)(x)$ ve $({}^C D_+^n y)(x)$, $({}^C D_-^n y)(x)$ Caputo türevleri ise

$$({}^C D_+^n y)(x) := y^{(n)}(x), \quad ({}^C D_-^n y)(x) := (-1)^{(n)} y^{(n)}(x) \quad (x \in \mathbb{R}^+) \quad (2.55)$$

$$({}^C D_+^n y)(x) := y^{(n)}(x), \quad ({}^C D_-^n y)(x) := (-1)^{(n)} y^{(n)}(x) \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (2.56)$$

biçiminde tanımlanır.

Özellik 2.2: Eğer $\Re(\alpha) > 0$ ve $\lambda > 0$ ise, bu takdirde

$$({}^C D_+^\alpha e^{\lambda t})(x) = \lambda^\alpha e^{\lambda t} \quad \text{ve} \quad ({}^C D_-^\alpha e^{-\lambda t})(x) = \lambda^\alpha e^{-\lambda t}. \quad (2.57)$$

$E_\alpha[\lambda(x-a)^\alpha]$ Mittag-Leffler fonksiyonu, ${}^C D_{a+}^\alpha$ Caputo türevine göre invaryanttır.

Lemma 2.3: $\alpha > 0$, $a \in \mathbb{R}$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olsun. Bu takdirde

$$({}^C D_+^\alpha E_\alpha[\lambda(x-a)^\alpha])(x) = \lambda E_\alpha[\lambda(x-a)^\alpha] \quad (2.58)$$

$$({}^C D_-^\alpha t^{\alpha-1} E_\alpha(\lambda t^{-\alpha}))(x) = \frac{1}{x} E_{\alpha,1-\alpha}(\lambda x^{-\alpha}) \quad (2.59)$$

dir.

Özellikle, $\alpha = n \in \mathbb{N}$ için,

$$D^n E_n[\lambda(x-a)^n] = E_n[\lambda(x-a)^n] \quad (2.60)$$

$$D^n [t^{n-1} E_n(\lambda t^{-n}))(x) = \frac{1}{x} E_{n,1-n}(\lambda x^{-n}) = \frac{\lambda}{x^{n+1}} E_n(\lambda x^{-n}) \quad (2.61)$$

2.2. Grünwald-Letnikov Kesirli Türevleri

Bu kesimde Grünwald-Letnikov kesirli türevleri ve bunların bazı özellikleri verilecektir [42,64]. Bu kesirli türev işlemi, $n \in \mathbb{N}$ için $y(x)$ fonksiyonunun n 'inci mertebeden

$$y^{(n)}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\Delta_h^n y)(x)}{h^n} \quad (2.62)$$

formundaki alışılmış türev tanımlamasının bir genelleştirilmesine dayanmaktadır. Burada $(\Delta_h^n y)(x)$, merkezi $x \in \mathbb{R}$ noktasında alınan ve $h \in \mathbb{R}$ adım aralığı ile bir $y(x)$ fonksiyonunun $n \in \mathbb{N}_0$ için n 'inci mertebeden sonlu farkıdır. Bir kesirli türev (2.62) bağıntısındaki $n \in \mathbb{N}$ sayısı $\alpha > 0$ ile doğrudan yer değiştirilmek sureti ile tanımlanır. Bunun için, h^n nın yerine h^α yazılırken; $(\Delta_h^n y)(x)$ sonlu farkının yerine, $x, h \in \mathbb{R}$ ve $\alpha > 0$ için kesirli $\alpha \in \mathbb{R}$ mertebeden

$$(\Delta_h^\alpha y)(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} y(x - kh) \quad (2.63)$$

ile tanımlanan kesirli $(\Delta_h^\alpha y)(x)$ farkı alınır. Burada $\binom{\alpha}{k}$ binom katsayıları (3) eşitliklerinde verildiği gibidir. $h > 0$ olduğunda (2.63) farkı soldan fark, $h < 0$ olduğunda ise (2.63) farkı sağdan fark olarak adlandırılır.

(2.63) serisi, her bir $\alpha > 0$ için ve her sınırlı $y(x)$ fonksiyonu için mutlak ve düzgün yakınsaktır. Ayrıca $(\Delta_h^\alpha y)(x)$ farkı ise aşağıdaki özelliklere sahiptir:

Özellik 2.3: Eğer $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ ise, sınırlı bir $y(x)$ fonksiyonu için

$$(\Delta_h^\alpha \Delta_h^\beta y)(x) = (\Delta_h^{\alpha+\beta} y)(x) \quad (2.64)$$

eşitliği sağlanır.

$\alpha = n \in \mathbb{N}$ için (2.63) bağıntısı $x, h \in \mathbb{R}$ için

$$(\Delta_h^n y)(x) := \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} y(x - kh) \quad (2.65)$$

eşitliği ile çakışmaktadır. $\alpha = 0$ için sonlu fark (2.63)'ten $(\Delta_h^0 y)(x) = y(x)$ olarak elde edilir.

Soldan ve sağdan $y_+^{(\alpha)}(x)$ ve $y_-^{(\alpha)}(x)$ biçimindeki Grünwald-Letnikov türevleri sırasıyla

$$y_+^{(\alpha)}(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(\Delta_h^\alpha y)(x)}{h^\alpha}, \quad \alpha > 0$$

$$y_-^{(\alpha)}(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(\Delta_{-h}^\alpha y)(x)}{h^\alpha}, \quad \alpha > 0$$

şeklinde ifade edilir.

Burada (2.63) bağıntısı ile verilen $(\Delta_h^\alpha y)(x)$ kesirli fark tanımı $y(x)$ fonksiyonunun en azından yarı eksen üzerinde olmasını kabul etmektedir. $[a, b]$ sonlu aralığı üzerinde verilen bir $f(x)$ fonksiyonu için böylesi bir fark, $[a, b]$ haricinde sıfır olup $y(x)$ 'in analitik devamlılığından dolayı aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$(\Delta_h^\alpha y)(x) = (\Delta_h^\alpha y^*)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} y^*(x - kh) \quad x, h \in \mathbb{R} \text{ ve } \alpha > 0 \quad (2.66)$$

Burada

$$y^*(x) = \begin{cases} y(x), & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases} \quad (2.67)$$

fonksiyonu özel olarak tanımlanır. Diğer yandan (2.66) farkını analitik devam kullanılmadan sadece $y(x)$ fonksiyonu cinsinden

$$(\Delta_{h,a+}^\alpha y)(x) := \sum_{k=0}^{\left[\frac{x-a}{h} \right]} (-1)^k \binom{\alpha}{k} y(x - kh) \quad x, h \in \mathbb{R} \text{ ve } h > 0, \alpha > 0 \quad (2.68)$$

$$(\Delta_{h,b-}^\alpha y)(x) := \sum_{k=0}^{\left[\frac{b-x}{h} \right]} (-1)^k \binom{\alpha}{k} y(x + kh) \quad x, h \in \mathbb{R} \text{ ve } \alpha > 0 \quad (2.69)$$

biçiminde yazmak mümkündür.

Böylece $[a,b]$ sonlu aralığı üzerinde verilen bir $f(x)$ fonksiyonunun pozitif α 'ıncı mertebeden soldan ve sağdan Grünwald-Letnikov kesirli türevi, sırasıyla

$$y_{a+}^{(\alpha)}(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(\Delta_{h,a+}^\alpha y)(x)}{h^\alpha} \quad \alpha > 0$$

$$y_{b-}^{(\alpha)}(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(\Delta_{h,b-}^\alpha y)(x)}{h^\alpha} \quad \alpha > 0$$

olarak tanımlanır.

3. BÖLÜM

KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN NÜMERİK ÇÖZÜM METOTLARI

3.1. Giriş

Kesirli analiz kavramı; mühendislik, fizik, finans matematiği, kimya, biyomühendislik [42, 47,49,50,61,67,73] gibi alanlarda etkin bir şekilde kullanılması yaygınlaşmış ve halen kaotik sistemlerin yeni nümerik simülasyonları [16,80], gerçek hayat problemleri [6], kontrol işlemleri [62] ve bunlar gibi pek çok sahada da artan bir ivmeyle kullanılarak devam etmektedir. Son zamanlarda kesirli diferansiyel denklemler için çeşitli sayısal hesaplama yöntemleri geliştirilmiş olup başarılı bir şekilde problemlere uygulanmaktadır. Ayrıca kesirli varyasyonlar hesapları da tekamül ettirilerek kesirli problemlere tatbik edilmiş ve halen de devam edilmektedir[7]. Bu tip diferansiyel denklemlere uygulanan metotlar arasında varyasyonel iterasyon metodu etkin bir şekilde kullanımdadır [18,23,29,32,37,54,56].

Bu kesimde, daha sonraki kesimlerde kullanacağımız sayısal metotlara temel teşkil etmesi ve varyasyonel iterasyon metodunun daha iyi anlaşılabilmesi açısından kesirli Van der Pol denkleminin nümerik çözümleri göz önüne alınacaktır. Bu denklemin literatürde farklı tiplerini görmek mümkündür ancak bu bölümde Juhn-Horng Chen ve Wei-Ching Chen'in [16]'te ele aldıkları kesirli sönüme sahip Van der Pol denklemi burada kullanılacaktır.

μ sönüm parametresi, a periyodik kuvvetin genliği, w zorlama frekansı, ${}^C D_{0+}^\alpha$ α 'ıncı mertebeden soldan türev operatörü olmak üzere, homojen başlangıç şartlarına sahip

$$\ddot{x}(t) + \mu \left(x^2(t) - 1 \right) {}^C D_{0+}^\alpha x(t) + x(t) = a \sin w \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0 \quad (3.1)$$

denklemini alalım. Burada α , (3.1) denkleminin mertebesini değiştirmeden $0 < \alpha < 2$ biçimindeki geniş bir aralıkta göz önüne alınacaktır. Kesirli türev Birinci ve İkinci Bölüm'de de ifade edildiği gibi birkaç farklı şekilde tanımlanmıştır [42,62,73]. Fakat, (3.1) başlangıç değer

problemine sorunsuzca uygulanabilir olması sebebiyle bu çalışmada Caputo kesirli türev tanımı kullanılacaktır.

Bunun için önce bu bölümde kullanılacak Caputo türevinin temel tanımını verelim: $m = [\alpha]$ α parametresinden büyük en küçük tam sayı, $x^{(m)}$ x 'in t 'ye göre m 'inci mertebeden türevi, $\Gamma(\cdot)$ gamma fonksiyonu ve $\beta > 0$ mertebeden Riemann-Liouville integral operatörü

$$I^\beta[z(t)] = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} z(s) ds$$

olmak üzere Caputo türevi

$${}^C D_{0+}^\alpha x(t) = I^{m-\alpha} x^{(m)}(t), \quad \alpha > 0$$

şeklindedir.

3.2. Varyasyonel İterasyon Metodu

Diferansiyel denklemlerin çözümlerine başlangıç fonksiyonunun bilinmesi halinde hızlı bir yaklaşımı sağlaması açısından etkin sayısal metotlardan bir tanesi olan varyasyonel iterasyon metodu adi diferansiyel denklemlerden kısmi diferansiyel denklemlere kadar genel diferansiyel denklemlerin çok geniş bir sınıfına başarılı bir şekilde uygulanmıştır [9,30,31,54,58]. Bu kesimde yaklaşım yöntemi (3.1) problemine ilk defa uyarlanmıştır.

3.2.1. Varyasyonel İterasyon Metodunun Probleme Uygulama Esasları

1. Kesimde belirtildiği gibi (3.1) problemi Caputo kesirli türev tanımıyla operatör formunda

$$D^2 x(t) + \mu(x^2(t) - 1) {}^C D_{0+}^\alpha x(t) + x(t) = a \sin w$$

biçiminde ifade edilirse, metodun uygulanması için temel prosedür adımlarından birisi olan problemin kapalı formdaki yapısı; t bağımsız zaman parametresi, x bilinmeyen fonksiyon, F de içerisinde lineer en yüksek mertebeli terimi bulunduran, L ve ayrıca N diferansiyel operatörlerini barındıran fonksiyon olmak üzere

$$F(t, x, {}^C D^\alpha x, D^2 x) = Lx + Nx - g(t, x) = 0 \quad (3.2)$$

halini alır. Buna ek olarak $R(t, x, {}^C D^\alpha x, Dx, g(t, x))$, (3.2) kapalı formundan en yüksek mertebeli lineer terimin çıkarılmasından sonra geriye kalan terimleri kapsayan fonksiyon olarak alınır. $x_0(t)$, (3.1) probleminin ilk yaklaşım çözüm fonksiyonu ve $n \in \mathbb{N}_0$, $n \geq 0$ olmak üzere

$$x_{n+1}(t) = x_n(t) + \int_0^t \lambda(\tau) F(\tau, x_n(\tau), {}^C D_{0+}^\alpha x_n(\tau), D^2 x_n(\tau)) d\tau \quad (3.3)$$

eşitliğine (3.2) ile verilen bağıntının düzeltme fonksiyoneli denir. Burada $\lambda(\tau)$, varyasyonel hesap kullanılarak optimal olarak belirlenen Lagrange çarpanı'dır.

(3.3) düzeltme fonksiyoneliindeki Lagrange çarpanının varyasyonel hesap yapılarak bulunmasından sonra yerine yazılmasıyla elde edilen eşitliğe de iterasyon formülü denir. Bu problem için Lagrange çarpanını aynı ilk terime sahip iki farklı fonksiyon olarak elde etmek mümkündür. Ancak bu çarpanın lineer polinom fonksiyon olarak alınması durumunda elde edilen iterasyon formülüyle oluşturulacak yaklaşık çözümler, (3.1) probleminin göz önüne alındığı tanım kümesindeki daha büyük zaman değerleri için geçerli olmayabilir. Bu nedenle Lagrange çarpanı lineer ve lineer olmayan fonksiyon olması durumunda ayrı ayrı ele alınır.

3.2.2. Lineer Lagrange Çarpanı

(3.2) ifadesinde sadece en yüksek mertebeli terimi göz önüne alarak optimize edilmiş $\lambda(\tau)$ Lagrange çarpanını bulmaya çalışalım. Buna göre (3.3) eşitliği

$$x_{n+1}(t) = x_n(t) + \int_0^t \lambda(\tau) (D^2 x_n(\tau) + R x_n(\tau)) d\tau$$

halini alır. $x_n(\tau)$ değişkeni artımına x_n 'in varyasyonu denir ve δx_n ile gösterilir ve bununla birlikte $\delta \tilde{x}_n$ varyasyonu kısıtlı varyasyon olarak tarif edilir ve burada $\delta \tilde{x}_n = 0$ 'dır. Böylece en son eşitliğin her iki tarafının varyasyonu alınır

$$\delta x_{n+1}(t) = \delta x_n(t) + \delta \int_0^t \lambda(\tau) (D^2 x_n(\tau) + R \tilde{x}_n(\tau)) d\tau. \quad (3.4)$$

Diğer yandan kısıtlı varyasyonların ihmal edilmesiyle

$$\delta x_{n+1}(t) = \delta x_n(t) + \delta \int_0^t \lambda(\tau) (D^2 x_n(\tau)) d\tau$$

elde edilir. Bu son varyasyondaki integral içindeki türev operatörü x_n 'den λ 'ya taşınırsa

$$\delta x_{n+1}(t) = \delta x_n(t) + \lambda(\tau) \delta D x_n(\tau) \Big|_{\tau=t} - \lambda(\tau) \delta x_n(\tau) \Big|_{\tau=t} + \int_0^t \{D^2 \lambda(\tau)\} \delta x_n(\tau) d\tau = 0$$

bulunur. Karşılıklı eşleştirme yapıldığında ise

$$\delta x_n(t) : \quad 1 - \lambda'(\tau) \Big|_{\tau=t} = 0$$

$$\delta D x_n(\tau) : \quad \lambda(\tau) \Big|_{\tau=t} = 0$$

$$\delta x_n(\tau) : \quad D^2 \lambda(\tau) \Big|_{\tau=t} = 0$$

şartları oluşur. Bu eşitlikler ortak çözüldüğünde lineer Lagrange çarpanı $\lambda(\tau) = \tau - t$ olarak elde edilir. Bu değerler yerine yazılarak

$$x_{n+1}(t) = x_n(t) + \int_0^t (\tau - t) (D^2 x_n(\tau) + \mu(x_n^2(\tau) - 1)^C D^\alpha x_n(\tau) + x_n(\tau) - a \sin w\tau) d\tau \quad (3.5)$$

biçiminde iterasyon formülü bulunur. Homojen başlangıç şartlarının dikkate alınmasıyla, sembolik olarak (3.1) probleminin lineer başlangıç yaklaşımı $x_0(t) = 0$ alınır ve (3.5) formülünde, $n = 0$ yazılırsa

$$x_1(t) = \int_0^t (t-\tau) a \sin w\tau d\tau = \frac{a(wt - \sin wt)}{w^2} \quad (3.6)$$

biçiminde birinci iterasyon ve $n = 1$ için α 'ya bağımlı olarak ikinci iterasyon ise

$$\begin{aligned} x_2(t) &= x_1(t) + \int_0^t (\tau-t) \left[D^2 x_1(\tau) + \mu(x_1^2(\tau) - 1) {}^C D^\alpha x_1(\tau) + x_1(\tau) - a \sin w\tau \right] d\tau \\ x_2(t) &= \frac{a(wt - \sin wt)}{w^2} + \int_0^t (\tau-t) \left\{ \mu \left(\frac{(aw\tau - a \sin w\tau)^2 - w^4}{w^4} \right) \right. \\ &\quad \left. \times {}^C D_{0+}^\alpha \left[\frac{aw\tau - a \sin w\tau}{w^2} \right] + \frac{a(w\tau - \sin w\tau)}{w^2} \right\} d\tau \end{aligned} \quad (3.7)$$

şeklinde elde edilir. Bu tarzda yukarıdaki uygulanan prosedüre devam edilirse iterasyon formülünden n . adımdaki x_n yaklaşık çözümüne ulaşılır. Bu iterasyon formülünün yakınsaklığı Lemma 1.1 ve Sonuç 2.1'den kolayca gösterilebilir.

3.2.3. Lineer Olmayan Lagrange Çarpanı

Şimdi de, (3.2) diferansiyel denkleminin lineer terimleri göz önüne alınsın. Bu takdirde Kısım 3.2.2'de ulaşılan adımları tekrardan ikinci mertebeden, iki lineer terimli

$$D^2 x_n(\tau) + x_n(\tau) + N \tilde{x}_n(\tau) = 0$$

denkleminde uygulandığında, bu takdirde düzeltme fonksiyoneli

$$x_{n+1}(t) = x_n(t) + \int_0^t \lambda(\tau) (D^2 x_n(\tau) + x_n(\tau) + N \tilde{x}_n(\tau)) d\tau$$

şeklinde olup, $\delta \tilde{x}_n$ varyasyonu, kısıtlı varyasyon (yani $\delta \tilde{x}_n = 0$) olmak üzere bu fonksiyonelin varyasyonu

$$\delta x_{n+1}(t) = \delta x_n(t) + \delta \int_0^t \lambda(\tau) (D^2 x_n(\tau) + x_n(\tau) + N \tilde{x}_n(\tau)) d\tau \quad (3.8)$$

biçiminde yazılır. Burada kısıtlı varyasyon ihmal edilirse

$$\delta x_{n+1}(t) = \delta x_n(t) + \delta \int_0^t \lambda(\tau) (D^2 x_n(\tau) + x_n(\tau)) d\tau$$

olup, eşitlikteki integralin içerisindeki türev operatörü de x_n 'den λ 'ya taşınırsa

$$\delta x_{n+1}(t) = \delta x_n(t) + \lambda(\tau) \delta D x_n(\tau) \Big|_{\tau=t} - \lambda(\tau) \delta x_n(\tau) \Big|_{\tau=t} + \int_0^t \{(D^2 + 1) \lambda(\tau) \delta x_n(\tau)\} d\tau = 0$$

elde edilir. Bu son eşitliğin ayrıştırılması ile Lagrange çarpanını bulmak için kullanılacak

$$\delta x_n(t) : 1 - \lambda'(\tau) \Big|_{\tau=t} = 0$$

$$\delta D x_n(\tau) : \lambda(\tau) \Big|_{\tau=t} = 0$$

$$\delta x_n(\tau) : (D^2 + 1) \lambda(\tau) \Big|_{\tau=t} = 0$$

şartları oluşturulduğunda, bu şartları sağlayan Lagrange çarpanı böylece $\lambda(\tau) = \sin(\tau - t)$ olarak belirlenir. Dikkat edilirse bu analitik lineer olmayan Lagrange çarpanı Taylor serisi açılımındaki ilk terimi Kısım 3.2.2 de elde edilen lineer Lagrange çarpanıdır. Hem iyi bir salınım davranışını gösterdiği hem de daha iyi yaklaşım sağladığı için lineer olmayan Lagrange çarpanını seçmek daha da uygun olacaktır. Böylece iterasyon formülü

$$x_{n+1}(t) = x_n(t) + \int_0^t \sin(\tau - t) \left(D^2 x_n(\tau) + \mu(x_n^2(\tau) - 1) {}^C D_{0+}^\alpha x_n(\tau) + x_n(\tau) - a \sin w\tau \right) d\tau \quad (3.9)$$

olarak bulunur. Homojen başlangıç şartlarının dikkate alınmasıyla, (sembolik olarak (3.1) probleminin lineer başlangıç yaklaşımı $x_0(t) = 0$ olduğunda) (3.9) formülünde $n = 0$ yazılarak

$$x_1(t) = \int_0^t \sin(t - \tau) a \sin w\tau d\tau = \frac{a[w \sin(t) - \sin(wt)]}{-1 + w^2} \quad (3.10)$$

biçiminde ilk iterasyon ve $n = 1$ yazarak ta α 'ya bağlı olarak

$$\begin{aligned} x_2(t) &= x_1(t) + \int_0^t \sin(\tau - t) \left[D^2 x_1(\tau) + \mu(x_1^2(\tau) - 1) {}^C D_{0+}^\alpha x_1(\tau) + x_1(\tau) - a \sin w\tau \right] d\tau \\ x_2(t) &= x_1(t) + \int_0^t \sin(\tau - t) \left\{ \frac{a^2[-w \sin(\tau) + w^2 \sin(w\tau)]^2}{(-1 + w^2)^2} \right. \\ &\quad \left. + \mu \left(\frac{a^2[w \sin(\tau) - \sin(w\tau)]^2}{(-1 + w^2)^4} - 1 \right) \times {}^C D_{0+}^\alpha \left[\frac{a[w \sin(\tau) - \sin(w\tau)]}{(-1 + w^2)} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{a[\sin(\tau)w - \sin(w\tau)]}{(-1 + w^2)} \right\} d\tau \end{aligned} \quad (3.11)$$

ikinci iterasyon yaklaşımı elde edilir. Bu şekilde yukarıdaki uygulanan prosedüre devam edilirse iterasyon formülünden n 'inci adımdaki x_n yaklaşık çözümüne ulaşılır.

3.3. Nümerik Hesaplamalar

Bu kesimde, sunulan yöntemin kesinliğini ve kullanılabilirliğini göstermek için (3.1) probleminin bazı örneklerine yer verilecektir. Aşağıdaki hesaplamalarda birinci Kesimde bahsedilen parametre değerleri $\mu = 1.02$, $a = 1.31$, ve $w = 0.5$ olarak alınacaktır.

3.3.1. Lineer Lagrange Çarpanının Dikkate Alınması

i) $\alpha = 1$ için: $\alpha = 1 \in \mathbb{N}_0$ olduğundan, bu takdirde (2.19) ifadesinden

$$\begin{aligned} ({}^C D_{a+}^\alpha x_n)(t) &= \left(\frac{d}{dt} \right)^m \left[x_n(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x_n^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] = \left(\frac{d}{dt} \right) \left[x(t) - \sum_{k=0}^{1-1} \frac{x^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] \\ &= \frac{d}{dt} [x_n(t) - x^{(0)}(0)] = Dx_n(t) \end{aligned}$$

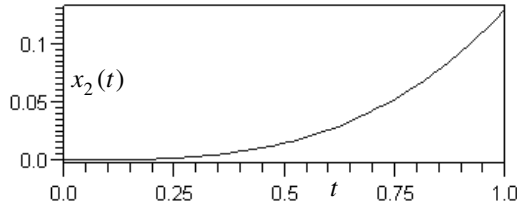
yazılır ve böylece $({}^C D_{0+}^n y)(x)$ soldan Caputo kesirli türevi α 'nın tam sayı değerlerinde adi türeve karşılık gelmektedir. (3.1) probleminde $\alpha = 1$ alınırsa denklem klasik Van der Pol denkleminde indirgenir. Bunun yanında eğer (3.7) formülünde $x_1(t)$ yerine yazılırsa, $x_2(t)$

$$x_2(t) = \frac{a(wt - \sin wt)}{w^2} + \int_0^t (\tau - t) \left[\left(\frac{\mu(aw\tau - a \sin w\tau)^2}{w^4} - \mu \right) \times D \left(\frac{aw\tau - a \sin w\tau}{w^2} \right) + \frac{a\tau}{w} - \frac{a \sin w\tau}{w^2} \right] d\tau. \quad (3.12)$$

biçiminde elde edilir. Bu nedenle (3.1) probleminin ikinci iterasyon çözümü $x(t) \approx x_2(t)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x(t) = & -\frac{73}{36} \frac{a^3 \mu}{w^7} - \frac{a\mu}{w^3} + \frac{at}{w} + \frac{at}{w^3} + \frac{1}{2} \frac{a\mu t^2}{w} - \frac{1}{4} \frac{a^3 \mu t^2}{w^5} - \frac{1}{6} \frac{at^3}{w} - \frac{1}{12} \frac{a^3 \mu t^4}{w^3} \\ & - \frac{a \sin(wt)}{w^2} + \frac{2a^3 \mu t \sin(wt)}{w^6} - \frac{a \sin(wt)}{w^4} + \frac{5a^3 \mu \cos(wt)}{3w^7} + \frac{a\mu \cos(wt)}{w^3} \\ & - \frac{a^3 \mu \cos(wt)}{12w^7} - \frac{a^3 \mu t^2 \cos(wt)}{w^5} + \frac{1}{36} \frac{a^3 \mu \cos(3wt)}{w^7} + \frac{1}{8} \frac{a^3 \mu (\cos(2wt) + 1)}{w^7} \\ & + \frac{1}{4} \frac{a^3 \mu t \sin(2wt)}{w^6} \end{aligned} \quad (3.13)$$

şeklindedir. Dikkat edilecek olunursa uygulanan metot ile elde edilen (3.13) fonksiyonunun, büyük zaman değerleri verildikçe giderek büyümekte olduğu gözlenmiştir. Bu iterasyon formülünün yakınsaklığı için de Lemma 1.1 ve Sonuç 2.1 kullanılabilir.



Şekil 3.1. $\alpha = 1$, $\mu = 1.02$, $a = 1.31$, ve $w = 0.5$ için çözüm grafiği

ii) $\alpha = 1/10$ için : Bu durumda (3.1) problemi

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) + \mu(x^2(t) - 1) {}^C D_{0+}^{0.1} x(t) + x(t) &= a \sin wt \\ x(0) = \dot{x}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

halini alırken (3.14) iterasyon formülü bir önceki (i) şıkında olduğu gibi hesaplanır. α değeri (3.7)'de yerine yazılırsa, yaklaşık ikinci iterasyon çözümü

$$\begin{aligned}
x_2(t) \approx & \frac{a}{w}t - \frac{a}{w^2}\sin wt + \frac{100000aw\mu}{9476649\Gamma(9/10)}t^{49/10} - \frac{aw}{120}t^5 \\
& - \frac{10000000aw^3\mu}{38579438079\Gamma(9/10)}t^{69/10} + \frac{aw^3}{5040}t^7 \\
& + \frac{1000000000aw^5\mu}{271252029133449\Gamma(9/10)}t^{89/10} - \frac{aw^5}{362880}t^9.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

biçiminde elde edilir.

iii) $\alpha = 1/2$ için : (3.1) problemi

$$\begin{aligned}
\ddot{x}(t) + \mu(x^2(t) - 1)^c D_{0+}^{0.5}x(t) + x(t) &= a \sin wt \\
x(0) = \dot{x}(0) &= 0
\end{aligned} \tag{3.16}$$

şeklini alır ve benzer olarak α 'nın bu değeri (3.7)'de yerine yazılırsa yaklaşık çözüm

$$\begin{aligned}
x_2(t) \approx & \frac{a}{w}t - \frac{a}{w^2}\sin wt + \frac{32aw\mu}{945\sqrt{\pi}}t^{9/2} - \frac{aw}{120}t^5 - \frac{128aw^3\mu}{135135\sqrt{\pi}}t^{13/2} + \frac{aw^3}{5040}t^7 \\
& + \frac{512aw^5\mu}{34459425\sqrt{\pi}}t^{17/2} - \frac{aw^5}{362880}t^9 - \frac{8a^3w^3\mu}{53865\sqrt{\pi}}t^{21/2} - \frac{2048aw^7\mu}{13749310575\sqrt{\pi}}t^{25/2}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

olur.

iv) $\alpha = 3/2$ için: $\alpha = 3/2$ alındığında , (3.1) denklemi

$$\begin{aligned}
\ddot{x}(t) + \mu(x^2(t) - 1)^c D_{0+}^{1.5}x(t) + x(t) &= a \sin wt \\
x(0) = \dot{x}(0) &= 0
\end{aligned} \tag{3.18}$$

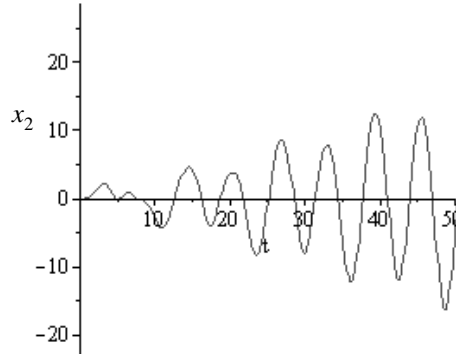
şeklinde iken yaklaşık çözümü (ii) şıkında olduğu gibi

$$\begin{aligned}
x_2(t) \approx & \frac{a}{w}t - \frac{a}{w^2}\sin wt + \frac{16aw\mu}{105\sqrt{\pi}}t^{7/2} - \frac{aw}{120}t^5 - \frac{64aw^3\mu}{10395\sqrt{\pi}}t^{11/2} + \frac{aw^3}{5040}t^7 \\
& + \frac{256aw^5\mu}{2027025\sqrt{\pi}}t^{15/2} - \frac{aw^5}{362880}t^9 - \frac{4a^3w^3\mu}{8721\sqrt{\pi}}t^{19/2} - \frac{1024aw^7\mu}{654729075\sqrt{\pi}}t^{23/2}.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

olarak elde edilir.

3.3.2. Lineer Olmayan Lagrange Çarpanının Dikkate Alınması

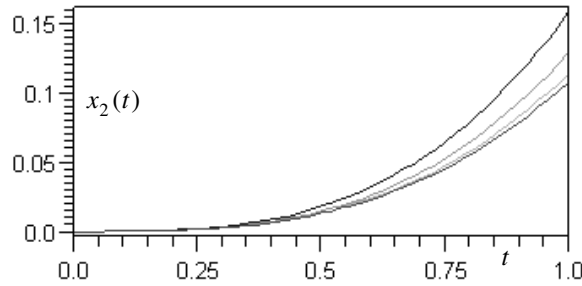
Eğer sonuç olarak elde edilen (3.11) yaklaşık çözümünde $\alpha = 1$ alınırsa, ikinci yaklaşık iterasyon çözümü için Şekil 3.2'deki grafik elde edilir.



Şekil 3.2. $\alpha = 1$, $\mu = 1.02$, $a = 1.31$, ve $w = 0.5$ için lineer olmayan Lagrange çarpanıyla hesaplanan çözüm grafiği

3.4. Sonuç

Bu bölümün 2. Kesiminde hassas yaklaşımı elde etmek için önerilen formül oluştururken Maple programı kullanılmıştır. Hesaplamalar yapılırken, iterasyon formülündeki integralin yaklaşık değeri dokuzuncu mertebenden seriye açılarak ele alınmıştır. Şekil 3.3, Kısım 3.2.2'deki lineer çarpan kullanılarak, (3.1) probleminin farklı α değerleri için çözümlerinin arasındaki bağıntılar gösterilmeye çalışılmıştır. Bu eğriler (yukarıdan aşağıya doğru) sırasıyla α 'nın $\alpha = 0.1$, $\alpha = 0.5$, $\alpha = 1$ ve $\alpha = 1.5$ değerleri için çizilmiştir.



Şekil 3.3. $\mu = 1.02$, $a = 1.31$, ve $w = 0.5$ için (3.1) probleminin farklı α değerleri ile çözümleri

Problemin salınım davranışlarını daha iyi gözlemleyebilmek için lineer olmayan çarpanı seçmek daha uygun olacaktır. Sonuç olarak sunulan metodun göz önüne alınan (3.1) formundaki kesirli Van Der Pol diferansiyel denkleminin nümerik çözümlerini elde ettiği gözlenmiştir. Elde edilen verilere göre yarı analitik çözümler ayrıca parametrelere bağlı olarak da bulunmuştur. Hesaplanan değerler ve grafikler, uygulanan metodun (3.1) denkleminin yaklaşık çözümlerini elde etmek için uygun olduğunu göstermektedir. Ancak uygulanan metotta çözümlerin büyük zaman değerleri için zamana göre giderek büyümekte olduğu ayrıca gözlenmiştir.

4. BÖLÜM

KESİRLİ INTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİ ÇÖZMEK İÇİN VARYASYONEL İTERASYON METODU

4.1. Özet

Bu bölümde, varyasyonel iterasyon metodu kullanılarak kesirli integro-diferansiyel denklem sisteminin nümerik çözümleri elde edilmeye çalışılmaktadır. Bu kesirli diferansiyel denklem sistemi, zamana göre birinci mertebeden türevin yerine $\alpha > 0$ olmak üzere α 'ıncı mertebeden kesirli türev yazılarak elde edilmiştir. Burada yapılacak tüm hesaplamalarda kesirli türevler Caputo anlamında kullanılacaktır. Elde edilen yaklaşık çözümler, sistemin mertebesini tanımlayan bir parametreyi içermektedir. Bu parametre ile sistem kesirli mertebeden bir yapıya sahip olabileceği gibi, $\alpha = 1$ olarak alındığında da denklem sistemi tam mertebeden integro-diferansiyel denklem sistemine indirgendiği görülecektir.

4.2. Giriş

Kesirli lineer olmayan problemlerle psikoloji [3], biyoloji [15], mekanik [42,48], sinyal işleme [51], kontrol teorisi, viskoelastisite [44,61,66], fizik [70], kimya gibi fen ve mühendislikteki pek çok alanda karşılaşılmaktadır. Bu problemler, otonom diferansiyel denklemler veya kısmi diferansiyel denklemler ile modellenenbilmektedir. Bununla beraber, gerçeğe uygun adi diferansiyel denklem sistemlerinin analitik çözüme zaman zaman sahip olmadıkları, böylece nümerik ve yaklaşım metotların böyle problemleri çözmek için kullanıldığı yayınlanan pek çok makaleden açıkça görülmektedir. Son zamanlarda varyasyonel iterasyon metodu çeşitli lineer ve lineer olmayan problemlere uygulanmıştır [33-35]. Bunun yanında lineer olmayan problemleri çözmek için pek çok metot vardır. Örneğin kesirli adi diferansiyel denklemlerin çözümü Adomian ayrışım metodu yardımıyla da bulunmaktadır. Bazı yazarlar yeni metot olan varyasyonel iterasyon metodunu, Adomian ayrışım metodu ve diferansiyel dönüşüm metodu gibi metotlar ile karşılaştırdığında metodun daha hızlı bir şekilde doğru nümerik sonuçlara ulaştığını iddia etmektedir [9,10,24]. Diğer taraftan bazı araştırmacılar bir çok fiziksel fenomende ele alınan

integro diferansiyel denklemleri varyasyonel iterasyon metodunu kullanarak çözmeye çalışmışlardır [45,71,76,79].

Son yıllarda kesirli diferansiyel denklemlerin, kesirli integral denklemlerin ve kesirli kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri oldukça dikkat çekmiştir [5,36,53,54,57,72]. Buna ilaveten değişik teknikler kullanılarak kesirli integro diferansiyel denklem sistemlerin çözümleri bulunmuştur [55,63]. Sonuç olarak bu çalışmada varyasyonel iterasyon metodu lineer ve lineer olmayan kesirli integro-diferansiyel denklem sistemlerin nümerik çözümlerini elde etmek için uygulanacaktır.

c_{ik} belirli bir sabit, α_i zamana bağlı kesirli türevin mertebesini tanımlayan bir parametre ve $y_i(t)$ çözüm vektörü de $t < 0$ için yok olan bir gelişigüzel bir fonksiyon olarak kabul edilmek üzere $k = 0, 1, \dots, m_i$, $m_i < \alpha_i \leq m_{i+1}$, $m_i \in \mathbb{N}$ için $y_i^{(k)}(0) = c_{ik}$ başlangıç şartlarıyla birlikte

$$\frac{d^{\alpha_i} y_i}{dt^{\alpha_i}} = f_i \left(t, y_1, y_2, \dots, y_n, \int_0^t K_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) dx \right) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.1)$$

genel formundaki integro diferansiyel denklem sistemini göz önüne alalım. Yapılan bu çalışma süresince kesirli türevin Caputo anlamında olduğu unutulmamalıdır [13]. $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ ise, bu takdirde $\lambda_i(\tau)$ optimal biçimde belirlenebilen genel Lagrange çarpanı olmak üzere varyasyonel iterasyon fonksiyoneli

$$\mathbf{Y}_{m+1}(t) = \mathbf{Y}_m(t) + \int_0^t \lambda_i(\tau) [D_t^{\alpha_i} \mathbf{Y}_m(\tau) - f_i(\tau, \mathbf{Y}_m(\tau), \int_0^\tau K_i(s, \mathbf{Y}_m) ds)] d\tau \quad (4.2)$$

formundadır.

4.3. Ön hazırlıklar

Birçok çalışmada kesirli türevlerin farklı tanımları yer almaktadır. α 'ıncı mertebeden Riemann-Liouville kesirli integralleri, Riemann-Liouville kesirli türevleri, Caputo kesirli türevi, Grünwald-Letnikov türev tanımlamaları I. Bölüm ve II. Bölümde verilmiştir. Burada yapılan hesaplamalarda soldan Riemann-Liouville kesirli integral operatörü ve soldan Caputo kesirli türev operatörü önceki bölümlerde verildiği şekliyle kullanılacaktır.

4.4. Çözüm Metodu

Varyasyonel iterasyon metodunun temel yapısı burada kesirli mertebeden integro-diferansiyel denklem sistemleri için uygulanacaktır. Kesim 4.2'de göz önüne alınan integro-diferansiyel denklem sisteminden bilindiği üzere, c_{ik} belirli bir sabit, α_i zamana bağlı kesirli türevin mertebesini ve dolayısıyla da i . kesirli integro-diferansiyel denklemin mertebesini tanımlayan bir parametre, K_i bağımsız ve bağımlı değişkenlere bağlı olan çekirdek fonksiyonu

ve $y_i(t)$ ise i 'inci denklemin çözümü olup $t < 0$ için mevcut olmayan gelişigüzel bir fonksiyon olarak kabul edildiğinde $k = 0, 1, \dots, m_i$, $m_i < \alpha_i \leq m_{i+1}$, $m_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, \dots, n$ için $y_i^{(k)}(0) = c_{ik}$ başlangıç şartlarıyla birlikte

$$\frac{d^{\alpha_i} y_i}{dt^{\alpha_i}} = f_i \left(t, y_1, y_2, \dots, y_n, \int_0^t K_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) dx \right) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.3)$$

genel formundaki n tane denklemden oluşan integro-diferansiyel denklem sisteminin çözümünün varlığı ifade edilmişti. Şimdi bu sistemin m 'inci iterasyon yapılarak elde edilen çözümü $\mathbf{Y}_m = (y_{1,m} \ y_{2,m} \ \dots \ y_{n,m})^T$ ve Lagrange çarpanı $i = 1, 2, \dots, n$ için $\lambda_i(\tau)$ olmak üzere (4.3) sisteminin düzeltme fonksiyoneli

$$\mathbf{Y}_{m+1}(t) = \mathbf{Y}_m(t) + \int_0^t \lambda_i(\tau) \left[{}^C D_{\tau}^{\alpha_i} \mathbf{Y}_m(\tau) - f_i \left(\tau, \mathbf{Y}_m(\tau), \int_0^{\tau} K_i(\mathbf{Y}_m(s)) ds \right) \right] d\tau \quad (4.4)$$

biçiminde ifade edilir. Burada her denklem için α_i reel sayısının değerine göre Lagrange çarpanları ayrı ayrı hesap edilmelidir. Ayrıca α_i değerinin sistemdeki denklemlerin yapısına uygun bir tam sayı değerine yükseltilmesi gerekmektedir. Örneğin sistemdeki bir denklemin mertebesi $\alpha_1 = 0.9$ olduğunda integro-diferansiyel denklemin karakteristik yapısı birinci mertebeden bir integro diferansiyel denklem ile benzer olacağından, Lagrange çarpanını hesap ederken kullanılan sistemin düzeltme fonksiyoneli α_1 ile ilgili denklemin mertebesi 1 olarak alınmalıdır. Böylece Lagrange çarpanı, adi diferansiyel denklemlerdeki gibi hesaplanır. Sistemdeki her bir denklemin Lagrange çarpanları bu yolla benzer şekilde elde edilir. Bu haliyle hesaplanan Lagrange çarpanları (4.4)'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} y_{1,m+1}(t) &= y_{1,m}(t) + \int_0^t \lambda_1(t, \tau) \left[{}^C D_{0+}^{\alpha_1} y_{1,m}(\tau) - f_1 \left(\tau, y_1(\tau), \int_0^{\tau} K_1(y_1(s)) ds \right) \right] d\tau \\ y_{2,m+1}(t) &= y_{2,m}(t) + \int_0^t \lambda_2(t, \tau) \left[{}^C D_{0+}^{\alpha_2} y_{2,m}(\tau) - f_2 \left(\tau, y_2(\tau), \int_0^{\tau} K_2(y_2(s)) ds \right) \right] d\tau \\ &\vdots \\ y_{n,m+1}(t) &= y_{n,m}(t) + \int_0^t \lambda_n(t, \tau) \left[{}^C D_{0+}^{\alpha_n} y_{n,m}(\tau) - f_n \left(\tau, y_n(\tau), \int_0^{\tau} K_n(y_n(s)) ds \right) \right] d\tau \end{aligned}$$

biçimindeki iterasyon formülleri elde edilir. $k = 0, 1, \dots, m_i$, $m_i < \alpha_i \leq m_{i+1}$, $m_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, \dots, n$ için $y_i^{(k)}(0) = c_{ik}$ başlangıç şartlarıyla birlikte yukarıdaki formüller kullanılarak, iterasyonlar sırasıyla hesap edilir. Sonuçta, yaklaşık çözüm değerleri $\mathbf{Y}_m = (y_{1,m} \ y_{2,m} \ \dots \ y_{n,m})^T$ olarak bulunur. Eğer Riemann-Liouville integral operatörü ve

Caputo türev operatörünün sınırlılığını gösteren sırasıyla Lemma 1.1 ve Sonuç 2.1 kullanılırsa (4.4) iterasyon sisteminin bir sabit noktası olduğu gösterilebilir. Bu haliyle sonlu bir zaman değeri için çözümler diğer metotlarla hesap edilen değerler ile örtüşmektedir. Bu durum aşağıdaki örneklerde görülmektedir. Önerilen metot ile elde edilen çözümlerin, diğer metotlar ile bulunan çözümler ile benzer olduğu görülmektedir.

4.5. Nümerik Örnekler

Şimdi varyasyonel iterasyon metodu kullanılarak yaklaşık çözümler elde edilmeye çalışılacaktır.

Örnek 4.5.1. $0 < \alpha \leq 1$ için $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = -1$ başlangıç şartları ile verilen

$$\begin{aligned}({}^C D_{0+}^\alpha y_1)(t) &= 1 + t + t^2 - y_2(t) - \int_0^t (y_1(s) + y_2(s)) ds \\({}^C D_{0+}^\alpha y_2)(t) &= -1 - t + y_1(t) - \int_0^t (y_1(s) - y_2(s)) ds\end{aligned}\quad (4.5)$$

lineer kesirli integro-diferansiyel denklem sistemini göz önüne alalım[55]. Bu sistemin $\alpha = 1$ için tam çözümleri

$$y_1(t) = t + e^t, \quad y_2(t) = t - e^t$$

biçimindedir. Bu sistem varyasyonel iterasyon metodu kullanılarak çözülmek istenirse, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ mertebeden iki denkleme sahip sistemin m . iterasyon çözümü $\mathbf{Y}_m = (y_{1,m} \quad y_{2,m})^T$, $i = 1, 2$ için Lagrange çarpanı $\lambda_i(\tau)$ olmak üzere (4.5) sisteminin düzeltme fonksiyoneli

$$\mathbf{Y}_{m+1}(t) = \mathbf{Y}_m(t) + \int_0^t \lambda_i(\tau) \left[{}^C D_\tau^{\alpha_i} \mathbf{Y}_m(\tau) - f_i(\tau, \mathbf{Y}_m(\tau), \int_0^\tau K_i(\mathbf{Y}_m(s)) ds) \right] d\tau \quad (4.6)$$

olarak ifade edilir. Her iki denklem için Lagrange çarpanlarının $i = 1, 2$ için $\lambda_i = -1$ olduğu kolayca görülmektedir. Böylece bu değerler (4.6)'da yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}y_{1,m+1}(t) &= y_{1,m}(t) - \int_0^t \left\{ {}^C D_{0+}^\alpha y_{1,m}(\tau) - 1 - \tau - \tau^2 + y_{2,m}(\tau) \right. \\&\quad \left. + \int_0^\tau [y_{1,m}(s) + y_{2,m}(s)] ds \right\} d\tau \\y_{2,m+1}(t) &= y_{2,m}(t) - \int_0^t \left\{ {}^C D_{0+}^\alpha y_{2,m}(\tau) + 1 + \tau - y_{1,m}(\tau) \right. \\&\quad \left. + \int_0^\tau [y_{1,m}(s) - y_{2,m}(s)] ds \right\} d\tau\end{aligned}\quad (4.7)$$

şeklindeki iterasyon formülleri elde edilir. Burada kalan terim, yani (4.7) denklemlerinin sağ taraflarındaki integraller $m \rightarrow \infty$ iken sıfıra gideceğinden, eşitliğin sağ tarafındaki integraller soldan Riemann-Liouville integral operatörleri olarak modifiye edilecektir. Bu yüzden tam

çözümüne yaklaşım daha etkili olacak ve iterasyon formülü ise nümerik çözümleri çok daha hızlı bir biçimde verecektir. Bu durumda (1.1) ile verilen Riemann-Liouville kesirli integralinde $\alpha = 0$ alınmasıyla da doğrudan yazılabilen yarı eksen üzerinde (1.49) soldan Riemann-Liouville integral operatörü göz önüne alınarak, modifiye edilmiş iterasyon formülleri

$$\begin{aligned} y_{1,m+1}(t) &= y_{1,m}(t) - \left(I_{0+}^{\alpha} \left({}^C D_{0+}^{\alpha} y_{1,m}(\tau) - 1 - \tau - \tau^2 + y_{2,m}(\tau) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_0^{\tau} [y_{1,m}(s) + y_{2,m}(s)] ds \right) \right)(t) \\ y_{2,m+1}(t) &= y_{2,m}(t) - \left(I_{0+}^{\alpha} \left({}^C D_{0+}^{\alpha} y_{2,m}(\tau) + 1 + \tau - y_{1,m}(\tau) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_0^{\tau} [y_{1,m}(s) - y_{2,m}(s)] ds \right) \right)(t) \end{aligned} \quad (4.8)$$

biçiminde bulunur. Bu durum problemin yaklaşık çözümünün kesirli anlamda istenilen fonksiyon açılımı olarak yazılabilmesine sebep olacaktır. Böylece başlangıç değerleri $y_{1,0} = 1$, $y_{2,0} = -1$ olmak üzere $m = 0$ için

$$\begin{aligned} y_{1,1}(t) &= y_{1,0}(t) - \left(I_{0+}^{\alpha} \left({}^C D_{0+}^{\alpha} y_{1,0}(\tau) - 1 - \tau - \tau^2 + y_{2,0}(\tau) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_0^{\tau} [y_{1,0}(s) + y_{2,0}(s)] ds \right) \right)(t) \\ y_{2,1}(t) &= y_{2,0}(t) - \left(I_{0+}^{\alpha} \left({}^C D_{0+}^{\alpha} y_{2,0}(\tau) + 1 + \tau - y_{1,0}(\tau) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_0^{\tau} [y_{1,0}(s) - y_{2,0}(s)] ds \right) \right)(t) \end{aligned} \quad (4.9)$$

başlangıç yaklaşımları elde edilir. (4.5) ile ifade edilen kesirli integro-diferansiyel denklem sistemi için yaklaşık nümerik çözümler

$$\begin{aligned} y_{1,1}(t) &= 1 + \frac{2}{\Gamma(\alpha+1)} t^{\alpha} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)} t^{\alpha+1} + \frac{2}{\Gamma(\alpha+3)} t^{\alpha+2} \\ y_{2,1}(t) &= -1 - \frac{3}{\Gamma(\alpha+2)} t^{\alpha+1} \end{aligned} \quad (4.10)$$

olarak bulunur. (4.8)'te $m = 1$ alınır ve (4.10) kullanılırsa, ikinci iterasyon formülleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} y_{1,2}(t) &= y_{1,1}(t) - \left(I_{a+}^{\alpha} \left({}^C D_{0+}^{\alpha} y_{1,1}(\tau) - 1 - \tau - \tau^2 + y_{2,1}(\tau) + \int_0^{\tau} [y_{1,1}(s) + y_{2,1}(s)] ds \right) \right)(t) \\ y_{2,2}(t) &= y_{2,1}(t) - \left(I_{a+}^{\alpha} \left({}^C D_{0+}^{\alpha} y_{2,1}(\tau) + 1 + \tau - y_{1,1}(\tau) + \int_0^{\tau} [y_{1,1}(s) - y_{2,1}(s)] ds \right) \right)(t) \end{aligned}$$

ve buradan

$$\begin{aligned}
y_{1,2}(t) &= 1 + \frac{2}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha + \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)} t^{\alpha+1} + \frac{2}{\Gamma(\alpha+3)} t^{\alpha+2} \\
&+ \frac{5}{4} \frac{2^{-2\alpha} t^{2\alpha+1} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha)(1+\alpha)(\Gamma(\alpha+1/2)\alpha^2 + 2\Gamma(\alpha+1/2)\alpha + 3\Gamma(\alpha+1/2)/4)} \\
&+ \frac{3}{4} \frac{2^{-2\alpha} t^{2\alpha+1} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha+2)(\Gamma(\alpha+1/2)\alpha^2 + 2\Gamma(\alpha+1/2)\alpha + 3\Gamma(\alpha+1/2)/4)} + \dots \quad (4.11) \\
y_{2,2}(t) &= -1 - \frac{3}{\Gamma(\alpha+2)} t^{\alpha+1} + \frac{2^{1-2\alpha} t^{2\alpha} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+3/2)} - \frac{(2\alpha+3) 2^{-2-2\alpha} t^{1+2\alpha} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+7/2)} \\
&- \frac{(2\alpha+3) 2^{-2-2\alpha} t^{2+2\alpha} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+9/2)} - \frac{(2\alpha+3)(2\alpha+5)(2\alpha+7) 2^{-4-2\alpha} t^{3+2\alpha} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+13/2)}
\end{aligned}$$

dir. Bu yöntemle devam edilirse, $3 \leq m$ için $y_{1,m}(t)$ ve $y_{2,m}(t)$ m 'inci yaklaşık çözümleri $(m-1)$ 'inci yaklaşık çözümleri kullanarak bulunur. Burada (4.5) bağıntısı kullanılarak ikinci iterasyon sonucunda elde edilen (4.11) ile verilen çözümler, [55]'de hesaplanan ayrışım serisinin ilk dört terimi ile çakışmaktadır.

Örnek 4.5.2. $0 < \alpha \leq 1$, $K_1 > 0$, $K_2 > 0$ için $y_1(0) = Y_1$, $y_2(0) = Y_2$ başlangıç şartlarına sahip,

$$\begin{aligned}
({}^C D_{0+}^\alpha y_1)(t) &= y_1(t) \left(K_1 - \gamma_1 y_2(t) - \int_{t-T_0}^t e^{-(t-s)} y_2(s) ds \right) \\
({}^C D_{0+}^\alpha y_2)(t) &= y_2(t) \left(-K_2 + \gamma_2 y_1(t) + \int_{t-T_0}^t e^{-(t-s)} y_1(s) ds \right)
\end{aligned} \quad (4.12)$$

lineer olmayan kesirli integro-diferansiyel denklem sistemini göz önüne alalım[8,55]. Varyasyonel iterasyon metoduna göre, (4.6) bağıntısında f_i kısıtlanmış varyasyon olması dolayısıyla λ_i $i = 1, 2$ için genel Lagrange çarpanlarının her ikisinde -1 olacağından, bu taktirde (4.12) için düzeltme fonksiyonel sistemi,

$$\begin{aligned}
y_{1,m+1}(t) &= y_{1,m}(t) + \int_0^t \lambda_1 \left[({}^C D_{0+}^\alpha y_{1,m})(\tau) \right. \\
&\quad \left. - y_{1,m}(\tau) \left(K_1 - \gamma_1 y_{2,m}(\tau) - \int_{\tau-T_0}^\tau e^{-(\tau-s)} y_{2,m}(s) ds \right) \right] d\tau \\
y_{2,m+1}(t) &= y_{2,m}(t) + \int_0^t \lambda_2 \left[({}^C D_{0+}^\alpha y_{2,m})(\tau) \right. \\
&\quad \left. - y_{2,m}(\tau) \left(-K_2 - \gamma_2 y_{1,m}(\tau) + \int_{\tau-T_0}^\tau e^{-(\tau-s)} y_{1,m}(s) ds \right) \right] d\tau
\end{aligned} \quad (4.13)$$

olarak yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
y_{1,m+1}(t) &= y_{1,m}(t) - \int_0^t \left[({}^C D_{0+}^\alpha y_{1,m})(\tau) \right. \\
&\quad \left. - y_{1,m}(\tau) \left(K_1 - \gamma_1 y_{2,m}(\tau) - \int_{\tau-T_0}^\tau e^{-(\tau-s)} y_{2,m}(s) ds \right) \right] d\tau \\
y_{2,m+1}(t) &= y_{2,m}(t) - \int_0^t \lambda_2 \left[({}^C D_{0+}^\alpha y_{2,m})(\tau) \right. \\
&\quad \left. - y_{2,m}(\tau) \left(-K_2 - \gamma_2 y_{1,m}(\tau) + \int_{\tau-T_0}^\tau e^{-(\tau-s)} y_{1,m}(s) ds \right) \right] d\tau
\end{aligned} \tag{4.14}$$

bağıntıları elde edilir.

Burada kalan terim, yani (4.14) denklemlerinin sağ tarafında bulunan integraller $m \rightarrow \infty$ iken sıfıra gideceğinden, eşitliğin sağ yanındaki integraller sol taraflı Riemann-Liouville integral operatörleri olarak modifiye edilecektir. Bu yüzden tam çözüme yaklaşım daha güçlü olacak ve iterasyon formülü nümerik çözümleri süratli bir şekilde verecektir. Bu durumda (1.1) ile verilen Riemann-Liouville kesirli integralinde $a = 0$ alınmasıyla da doğrudan yazılabilen yarı eksen üzerinde (1.49) soldan Riemann-Liouville integral operatörü göz önüne alınarak, (4.12) sistemi için modifiye edilmiş iterasyon formülleri

$$\begin{aligned}
y_{1,m+1}(t) &= y_{1,m}(t) - \left(I_{0+}^\alpha \left[({}^C D_{0+}^\alpha y_{1,m})(\tau) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - y_{1,m}(\tau) \left(K_1 - \gamma_1 y_{2,m}(\tau) - \int_{\tau-T_0}^\tau e^{-(\tau-s)} y_{2,m}(s) ds \right) \right] \right)(t) \\
y_{2,m+1}(t) &= y_{2,m}(t) - \left(I_{0+}^\alpha \left[({}^C D_{0+}^\alpha y_{2,m})(\tau) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - y_{2,m}(\tau) \left(-K_2 - \gamma_2 y_{1,m}(\tau) + \int_{\tau-T_0}^\tau e^{-(\tau-s)} y_{2,m}(s) ds \right) \right] \right)(t)
\end{aligned} \tag{4.15}$$

şeklinde bulunur. Bir önceki problemde olduğu gibi bu değişim problemin yaklaşık çözümünün kesirli anlamda istenilen fonksiyon açılımı olarak yazılabilmesine sebep olacaktır. Böylece başlangıç değerleri $y_{1,0}(0) = Y_1$, $y_{2,0}(0) = Y_2$ olmak üzere (4.15) formülünde $m = 0$ alınırsa, bu taktide başlangıç yaklaşımları

$$\begin{aligned}
y_{1,1}(t) &= y_{1,0}(t) - \left(I_{0+}^\alpha \left[({}^C D_{0+}^\alpha y_{1,0})(\tau) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - y_{1,0}(\tau) \left(K_1 - \gamma_1 y_{2,0}(\tau) - \int_{\tau-T_0}^\tau e^{-(\tau-s)} y_{2,0}(s) ds \right) \right] \right)(t) \\
y_{2,1}(t) &= y_{2,0}(t) - \left(I_{0+}^\alpha \left[({}^C D_{0+}^\alpha y_{2,0})(\tau) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - y_{2,0}(\tau) \left(-K_2 - \gamma_2 y_{1,0}(\tau) + \int_{\tau-T_0}^\tau e^{-(\tau-s)} y_{2,0}(s) ds \right) \right] \right)(t)
\end{aligned} \tag{4.16}$$

biçiminde olup, (4.12) lineer olmayan kesirli integro-diferansiyel denklem sisteminin ilk iterasyon çözümü

$$\begin{aligned}
y_{1,1}(t) &= Y_1 + Y_1[K_1 - \gamma_1 Y_2 + (e^{-T_0} - 1)Y_2] \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha \\
y_{2,1}(t) &= Y_2 + Y_2[-K_2 + \gamma_2 Y_2 + (1 - e^{-T_0})Y_2] \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha
\end{aligned} \tag{4.17}$$

olarak elde edilir. J. Biazar'ın [8] makalesinde ifade edilen ikinci örneğinde yer alan nümerik çözümler K_2 teriminin önündeki negatif işaret gözden kaçırılarak bulunmasına karşın, kesirli integro-diferansiyel denklemler için orijinal olarak ilk defa modifiye edilmiş varyasyonel iterasyon metodu burada kullanılarak hesaplama yapılan (4.17) çözümleri t 'ye göre yazılmış polinomun ilk iki terimi olduğu gözlenmiştir. Böylece (4.17) çözümlerinin [8,55] da olduğu gibi tamamen aynı olduğu görülür. $y_{1,2}(t)$ ve $y_{2,2}(t)$ çözümleri (4.17) iterasyon formülleri kullanılarak hesap edilir ve böyle devam edilirse m 'inci ($2 \leq m$) $y_{1,m}(t)$ ve $y_{2,m}(t)$ iterasyon çözümleri de $(m-1)$ 'inci yaklaşık çözümler kullanılarak bulunur.

4.6. Sonuç

Düzeltilme fonksiyonel formüllerinde, varyasyonel iterasyon metodu uygulanacak problemler için Lagrange çarpanları, çözümlere daha iyi yakınsamayı sağlamak için formülleri optimize eden en önemli gereçtir. Bu iki örnekte kalan terimler

$$\mathbf{Y}_{m+1}(t) - \mathbf{Y}_m(t) = \int_0^t \lambda_i(\tau) \left[{}^C D_\tau^\alpha \mathbf{Y}_m(\tau) - f_i\left(\tau, \mathbf{Y}_m(\tau), \int_0^\tau K_i(\mathbf{Y}_m(s)) ds\right) \right] d\tau \tag{4.18}$$

denkleminin sağ tarafındaki integraldir ve tüm bu terimler Lagrange çarpanlarının optimum değerlerini elde ettikten sonra $m \rightarrow \infty$ için sıfıra yaklaşırlar. Sabit nokta teorisi kullanıldığında Lemma 1.1 ve Sonuç 2.1'in de yardımıyla (4.18) iterasyon formülünün sabit bir noktası bulunur. Bu durum (4.18) iterasyonunun yakınsak olduğunu, yani $\mathbf{Y}_m \rightarrow \mathbf{Y}$ olduğunu ifade eder. Bu yakınsaklık göz önüne alınarak integral, kesirli Riemann-Liouville anlamında alınmıştır. Böylece çözüme yaklaşımlar daha etkin olmakta ve nümerik çözümler modifiye edilmiş iterasyon formülüyle hızlı bir şekilde elde edilebilmektedir. Biazar[8] ve Momani[55]'nin makalelerindeki uygulama örneklerinin modifiye edilen bu metod ile çözümlerinden elde edilen sonuçların, yine aynı makalelerde elde edilen sonuçlar ile örtüştüğü açık bir biçimde görülmektedir.

5. BÖLÜM

DİNAMİK JİROSKOP SİSTEMİ

5.1. Dinamik Sistemlere Kısa Bir Bakış ve Dinamik Jiroskop Sistemine Giriş

Bir *dinamik sistem*, belirli bir zamandan bir sonraki zamana hareket etmesi için gerekli kurallar ile birlikte bir fiziksel düzendir. Herhangi bir durumun *dinamiği*, zamanın gidişi boyunca durumun nasıl değiştiğini gösterir.

Dinamik sistemlerin matematiksel teorisinin temel bir amacı, sistemin uzun süreli davranışlarını bulmak ve karakterize etmektir. Yaygın olarak kullanılan üç çeşit dinamik sistem vardır. Bunlar:

(i) Sembolik Dinamik Sistemler

(ii) Ayırık - Zaman Sistemleri

(iii) Sürekli – Zaman Sistemleri

biçimindedir.

Sembolik dinamik sistemler içerisindeki fiziksel düzenek, biçimsel sembollerin bir dizgisidir. Diğer yandan ayırık zaman sistemlerindeki çözümler ölçümlerin bir kümesi ile temsil edilmiştir. Sürekli zaman sistemlerinde ise herhangi bir t anındaki f fonksiyonu çözüm olarak alınır. Bu çalışmada sürekli-zaman sistemleri üzerinde durulacaktır.

Doğa olaylarının matematiksel modellenmesi yapılırken, genel olarak lineer olmayan diferansiyel denklemler ortaya çıkmaktadır. Lineer olmayan diferansiyel denklemlerden oluşan bir sisteme lineer olmayan sistem denir. Lineer olmayan diferansiyel denklemlerin yapılarını incelemek, çözümlerini analitik olarak bulmak zor olduğu kadar, lineer olmayan sistemlerin çözümlerini de bulmak o derece zor olacaktır. Ancak çoğu zaman yapısal olarak veya belirli şartlar altında lineer olmayan bu tarzdaki yapılar tanım kümesinde çözümlerinin mevcut olduğu bilinen lineer denklem sistemlerine indirgenirler. Böylece sistemin nitel davranışları çözümlerin yaklaşık olarak hesaplanması ile ortaya çıkacaktır.

Lineer olmayan sistemler; çeşitli şartlar oluşturularak suni olarak elde edilmiş yapılar olabileceği gibi, doğal olarak ortaya çıkan çoğu fiziksel, kimyasal, biyolojik veya mühendislik sahasında başlangıç şartlarına haiz yapıların matematiksel modellerinin kullanılması ile de ortaya çıkabilmektedir. Bir dinamik sistemin çözümlerinin davranışları ile sistem içerisinde bulunan parametreler arasında çok güçlü bir bağ vardır ve bu bağa göre kaotik sistemler kaotik davranışlar sergilemektedir. Parametreler belirli tanım aralıklarında farklı değerler alarak değişirken denge noktaları da parametrelerin özel ele alındığı tanım aralığında değişebilmektedir. Dolayısıyla denge noktalarının bu değişen parametrelere göre ele alınmasıyla sistemin genel karakteri hakkında iyi bir analiz yapılabilir.

Böyle sistemlerde, sistemin göz önüne alındığı uzay üzerinde başlangıç şartları civarındaki yörüngeler, her ne kadar birbirine yakın seçilmiş olsalar da, her biri kendini evrimleştirerek bir anda uzayın farklı alanlarında devam ederek, birbirinden bağımsız kalabilirler. En azından temelde, deterministik Newtonyen sistemin o anki konumu, sistemin başlangıç şartlarına sahip bir sistem olmasına karşın, stokastik sistemlerde parazitliğin veya kontrol edilebilmenin dışındaki diğer dış şartların yüzünden başlangıç şartları o anki konumları kısmen belirlemektedir. Stokastik sistemlerde anlık konum, geçmiş başlangıç şartlarının yanında buna ek olarak yol boyunca karşılaştığı parazitliğin gerçekleşmesini de yansıtmaktadır. Bu yüzden, klasik bilimin ışığı altında, deterministik veya stokastik olmak üzere iki farklı sistem tipi söz konusu olmaktadır [38].

Uzun bir süre bilim adamları, denizde ve atmosferde oluşan türbülanslar, vahşi yaşam popülasyonlarında görülebilen düzensizlikler gibi karmaşalardan, yani doğanın sahip olduğu anlaşılması güç olan konulardan özellikle kaçınmışlardır. Daha sonraları, bu alışılmadık sonuçlar üzerinde çalışılarak düzensizliğin, nonlineerliğin veya kaosun doğayı anlama araçlarından birisi olduğu gösterilmiştir. Böylece nonlineerlik, matematiksel anlamda neredeyse her alanda kullanılmaya başlanmıştır. Teorik fizikte kaos, neredeyse tamamı bilinmeyen kompleks modelleri içeren bir tip yönetilebilir rastgeleliktir [38]. Bunun dışında kaos; yapay sinir ağları, elektronik devreler, lineer olmayan optik, lazerler, popülasyon dinamiği gibi fizik, kimya, biyoloji veya mühendislik bilimlerinin yanı sıra sosyal bilimler, tıp gibi matematiksel modelleme yapılabilecek her türlü alanda yer almaktadır. Sistemin nasıl bir sistem olduğuna bakılmaksızın onun davranışları lineer olmayan yapılar ile benzerlik göstermektedir. Böylece lineer olmayan dinamik sistem, aynı kurala uyan herhangi bir sistemi çalışmak için bilim adamları tarafından kullanılan yaygın bir dil haline gelmiştir.

Bu bölümde İngilizcedeki karşılığı "Gyroscope" veya "Gyro" olan jiroskop, yön ölçümü veya yön ayarlamasında kullanılan, açısal dengenin korunması ilkesiyle çalışan, nesnelerin üç boyutlu ortamda doğrultularını ve iki eksene göre yapılan açıları tespit etmeye yarayan aracın dinamik sisteminin inşası ortaya konacak ve bunun kaotik bir yapıya sahip olduğunu gösteren

pozitif bir Lyapunov üstelinin varlığından bahsedilecektir. Jiroskopik hareketinin temeli fizik kurallarına ve merkezkaç ilkesine dayalıdır.

5.2. Jiroskop Sisteminin Elde Edilmesi

Lineer ve kübik sönüme sahip simetrik jiroskop denklemi, zamana bağlı olan açı fonksiyonu $\theta = \theta(t)$ olmak üzere

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \bar{\alpha}^2 \frac{(1 - \cos\theta)^2}{\sin^3\theta} - \beta \sin\theta + c_1 \frac{d\theta}{dt} + c_2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^3 = f \sin(\omega t) \sin\theta \quad (5.1)$$

şeklindedir. Burada $f \sin(\omega t)$ parametrik bir uyarıcı ve $\bar{\alpha}^2 \frac{(1 - \cos\theta)^2}{\sin^3\theta} - \beta \sin\theta$ terimi de lineer olmayan esneklik kuvvetidir. Buradan

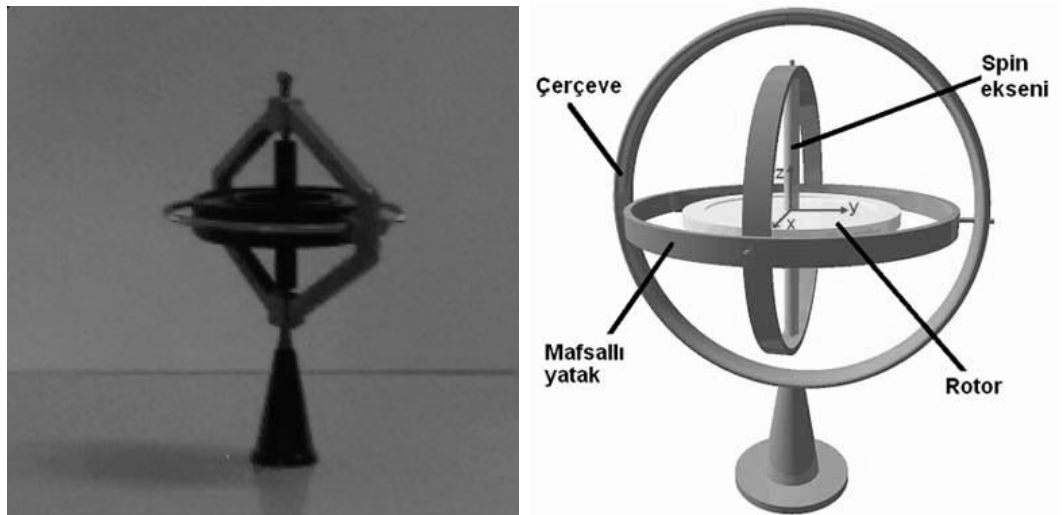
$$x_1 = \theta, x_2 = \dot{x}_1 = \dot{\theta} \quad \text{ve} \quad g(\theta; \alpha, \beta) = \bar{\alpha}^2 \frac{(1 - \cos\theta)^2}{\sin^3\theta} - \beta \sin\theta \quad \text{olarak alınırsa} \quad (5.1)$$

denklemleri

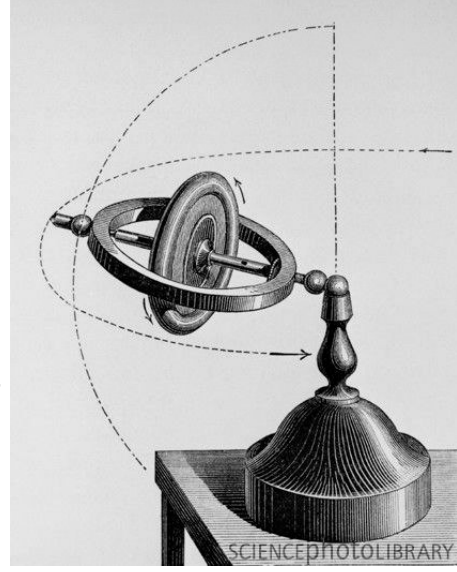
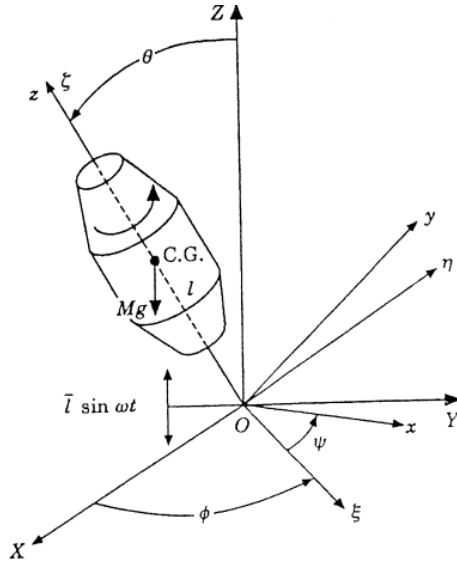
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= g(x_1) - c_1 x_2 - c_2 x_2^3 + [\beta + f \sin(\omega t)] \sin x_1 \end{aligned} \quad (5.2)$$

otonom olmayan denklem sistemi haline gelir. (5.2) sistemi $32 < f < 36$ ve $\bar{\alpha}^2 = 100$, $\beta = 1$, $c_1 = 0.5$, $c_2 = 0.05$ ve $\omega = 2$ için detaylı olarak incelenmiştir [17].

Simetrik bir jiroskop probleminin geometrik yapısı Şekil 5.1'de görülmektedir. Salınımlı bir tabana tutturulmuş simetrik bir jiroskobun hareketi θ (nutation), ϕ (precession) ve ψ (spin) Euler açıları ile tanımlanmıştır (Şekil 5.2).



Şekil 5.1. Jiroskop yapısı



Şekil 5.2. Euler açılarıyla birlikte bir jiroskop

Bir sistemin Lagrangianı bilindiğinde, Euler-Lagrange denkleminde bu ifadenin direkt yerine yazılmasıyla sistemin hareket denklemleri elde edilir. Ayrıca Lagrangian, T sistemin kinetik enerjisi ve V potansiyel enerjisi olmak üzere, $L = T - V$ olarak yazılır. Böylece jiroskobun dinamik sistemin Lagrangianı, I_1 ve I_3 sırasıyla simetrik jiroskobun kutupsal ve ekvatorial atalet momentleri, M_g yerçekimi kuvveti, $\bar{l}$ dış zorlama genliği ve ω dış zorlama frekansı olmak üzere

$$L = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 - M_g (\ell + \bar{l} \sin \omega t) \cos \theta$$

formundadır.

Dikkat edilirse Lagrangian $\theta, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}$ değerlerine bağlı olmasına rağmen ϕ ile ψ değerlerine bağlı değildir. O halde ϕ ve ψ Euler açıları ihmal edilebilir koordinatlardır.

ω_z jiroskobun spin hızı, β_ϕ ve β_ψ sabitler olmak üzere, sistemin momentum integralleri

$$P_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I_1 \dot{\phi} \sin^2 \theta + I_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) \cos \theta = \beta_\phi \quad (5.4)$$

$$P_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) = I_3 \omega_z = \beta_\psi \quad (5.5)$$

olarak bulunur. (5.4) ve (5.5) ifadelerinden $\theta = 0$ olması durumunda momentum integralleri birbirine eşittir yani $\beta_\phi = \beta_\psi$ 'dir. Bu sistemin Lagrangianını modifiye etmek için Routh prosedürü kullanılır. Böylece modifiye edilmiş fonksiyon, ihmal edilebilir koordinatları yok edilmiş

Lagrange denklemini sağlar. Routh prosedürü yukarıda ifade edilen eşitliklere uygulanırsa, bu taktirde

$$\begin{aligned}
 R &= L - \beta_{\phi} \dot{\phi} - \beta_{\psi} \dot{\psi} \\
 &= \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 - M_g (\ell + \bar{\ell} \sin \omega t) \cos \theta \\
 &\quad - I_1 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta - I_3 \dot{\phi} (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) \cos \theta - I_3 \dot{\psi} (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) \\
 &= \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} I_3 \dot{\psi}^2 - I_3 \dot{\psi} \cos \theta - \frac{1}{2} (I_3 \cos^2 \theta + I_1 \sin^2 \theta) \dot{\phi}^2 - M_g (\ell + \bar{\ell} \sin \omega t) \cos \theta
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

olarak sistemin Routhian'ı bulunur. Bu son ifadenin $\dot{\psi}, \dot{\phi}$ değişkenlerinden bağımsız olarak yazılması için, (5.4) ve (5.5) eşitliklerinden $\dot{\psi}, \dot{\phi}$ ifadelerinin θ 'ya bağlı olarak ifade edilmesi gerekir. (5.4) denkleminde (5.5) ifadesi yerine yazılırsa,

$$I_1 \dot{\phi} \sin^2 \theta + \beta_{\psi} \cos \theta = \beta_{\phi}$$

ve buradan

$$\dot{\phi} = \frac{\beta_{\phi} - \beta_{\psi} \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \tag{5.7}$$

yazılır. Ayrıca (5.7) bağıntısı (5.5) ifadesinde yerine yazılırsa

$$I_3 \left(\frac{\beta_{\phi} - \beta_{\psi} \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \cos \theta + \dot{\psi} \right) = \beta_{\psi}$$

ve $\dot{\psi}$ yalnız bırakılırsa

$$\dot{\psi} = \frac{\beta_{\psi}}{I_3} - \frac{\beta_{\phi} - \beta_{\psi} \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \cos \theta \tag{5.8}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca (5.7) ve (5.8) tanımlamaları, (5.6) Routhian formülünde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} I_3 \left(\frac{\beta_{\psi}}{I_3} - \frac{\beta_{\phi} - \beta_{\psi} \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \cos \theta \right)^2 \\
 &\quad - I_3 \left(\frac{\beta_{\phi} - \beta_{\psi} \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \right) \left(\frac{\beta_{\psi}}{I_3} - \frac{\beta_{\phi} - \beta_{\psi} \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \cos \theta \right) \cos \theta \\
 &\quad - \frac{1}{2} (I_3 \cos^2 \theta + I_1 \sin^2 \theta) \left(\frac{\beta_{\phi} - \beta_{\psi} \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \right)^2 - M_g (\ell + \bar{\ell} \sin \omega t) \cos \theta
 \end{aligned}$$

bulunur. Burada gerekli sadeleştirmeler ve düzenlemeler yapılırsa (5.6) Routhian eşitliği θ 'ya bağlı olarak

$$R = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{(\beta_\phi - \beta_\psi \cos \theta)^2}{I_1 \sin^2 \theta} + \frac{\beta_\phi^2}{I_3} \right] - M_g (\ell + \bar{\ell} \sin \omega t) \cos \theta \quad (5.9)$$

biçiminde yazılır.

D_1 , D_2 pozitif sabitler ve bu sistem üzerindeki sürtünmeden veya türbülansstan oluşan zamana bağlı enerji kaybına sebep olan yitirgen kuvveti F olmak üzere

$$F = -D_1 \dot{\theta} - D_2 \dot{\theta}^3 \quad (5.10)$$

şeklinde kabul edilirse, bu taktirde (5.9) ve (5.10) ifadelerinin kullanılmasıyla, sistemin hareket denklemi veren Lagrange denklemi

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial R}{\partial \theta} = F \quad (5.11)$$

biçimindedir. Gerekli türevler alındığında

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} &= I_1 \dot{\theta}, \\ \frac{\partial R}{\partial \theta} &= -\frac{1}{2} \left[\frac{2(\beta_\phi - \beta_\psi \cos \theta) \beta_\psi \sin \theta I_1 \sin^2 \theta - (\beta_\phi - \beta_\psi \cos \theta)^2 2 I_1 \sin \theta \cos \theta}{I_1^2 \sin^4 \theta} \right] \\ &\quad + M_g (\ell + \bar{\ell} \sin \omega t) \sin \theta \\ &= \frac{1}{I_1 \sin^3 \theta} \left[(\beta_\phi - \beta_\psi \cos \theta) \beta_\psi \sin^2 \theta - (\beta_\phi - \beta_\psi \cos \theta)^2 \cos \theta \right] \\ &\quad + M_g (\ell + \bar{\ell} \sin \omega t) \sin \theta \end{aligned} \quad (5.12)$$

bulunur. Sistemin Routhian'ı sadece θ ya bağımlı olarak (5.9) biçiminde yazıldığından (5.11) ifadesi tek bir bağımsız değişkene bağlı olarak ifade edilmiş olur. Böylece (5.11) denklemi

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + \frac{D_1}{I_1} \dot{\theta} + \frac{D_2}{I_1} \dot{\theta}^2 - M_g \ell \sin \theta &= \frac{M_g \bar{\ell}}{I_1} \sin \omega t \sin \theta \\ &\quad - \frac{1}{I_1^2 \sin^3 \theta} \left[(\beta_\phi - \beta_\psi \cos \theta) \beta_\psi \sin^2 \theta - (\beta_\phi - \beta_\psi \cos \theta)^2 \cos \theta \right] \end{aligned} \quad (5.13)$$

biçiminde yazılır. (5.12) denkleminde eğer $\beta_\phi = \beta_\psi$ eşitliği yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial \theta} &= \left[\frac{\beta_\phi^2 (1 - \cos \theta)}{I_1 \sin \theta} - \frac{\beta_\phi^2 (1 - \cos \theta)^2 \cos \theta}{I_1 \sin^3 \theta} \right] + M_g (\ell + \bar{\ell} \sin \omega t) \sin \theta \\
&= \frac{1}{I_1 \sin^3 \theta} \left[\beta_\phi^2 (1 - \cos \theta) \sin^2 \theta - \beta_\phi^2 (1 - \cos \theta)^2 \cos \theta \right] + M_g (\ell + \bar{\ell} \sin \omega t) \sin \theta \\
&= \frac{\beta_\phi^2}{I_1 \sin^3 \theta} \left[(1 - \cos \theta)(1 - \cos^2 \theta) - (1 - \cos \theta)^2 \cos \theta \right] + M_g (\ell + \bar{\ell} \sin \omega t) \sin \theta \\
&= \frac{\beta_\phi^2}{I_1 \sin^3 \theta} \left[(1 - \cos \theta)^2 (1 + \cos \theta) - (1 - \cos \theta)^2 \cos \theta \right] + M_g (\ell + \bar{\ell} \sin \omega t) \sin \theta \\
&= \frac{\beta_\phi^2}{I_1 \sin^3 \theta} \left[(1 - \cos \theta)^2 (1 + \cos \theta - \cos \theta) \right] + M_g (\ell + \bar{\ell} \sin \omega t) \sin \theta \\
&= \frac{\beta_\phi^2 (1 - \cos \theta)^2}{I_1 \sin^3 \theta} + M_g (\ell + \bar{\ell} \sin \omega t) \sin \theta
\end{aligned} \tag{5.14}$$

haline indirgenir. (5.14)'ün (5.11)'de yerine yazılmasıyla (5.13) ile ifade edilen adi diferansiyel denklemi

$$\ddot{\theta} + \frac{D_1}{I_1} \dot{\theta} + \frac{D_2}{I_1} \dot{\theta}^3 + \frac{\beta_\phi^2 (1 - \cos \theta)^2}{I_1^2 \sin^3 \theta} - \frac{M_g}{I_1} l \sin \theta = \frac{M_g \bar{l}}{I_1} \sin \omega t \sin \theta \tag{5.15}$$

olarak bulunur. Burada lineer olmayan (5.15) ile gösterilen diferansiyel denklemin çözümlerine ulaşmak için, bu denklemi üç boyutlu otonom sistem şeklinde yazılması tarafımızdan önerilmektedir. Noktasal türevler t değişkenine bağlı olarak gösterildiğinden böylece yeni bağımlı değişkenler $x_1 = \theta$ ve $x_2 = \dot{\theta}$ olmak üzere, (5.15) diferansiyel denklemi

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -\frac{D_1}{I_1} x_2 - \frac{D_2}{I_1} x_2^3 - \frac{\beta_\phi^2 (1 - \cos x_1)^2}{I_1^2 \sin^3 x_1} + \frac{M_g}{I_1} l \sin x_1 + \frac{M_g \bar{l}}{I_1} \sin(\omega t) \sin x_1
\end{aligned} \tag{5.16}$$

biçiminde veya $x_3 = t$ iken

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -\frac{D_1}{I_1} x_2 - \frac{D_2}{I_1} x_2^3 - \frac{\beta_\phi^2 (1 - \cos x_1)^2}{I_1^2 \sin^3 x_1} + \frac{M_g}{I_1} l \sin x_1 + \frac{M_g \bar{l}}{I_1} \sin(\omega x_3) \sin x_1 \\
\dot{x}_3 &= 1
\end{aligned} \tag{5.17}$$

üç boyutlu bir otonom sistem şeklinde ifade edilir. Burada $x_3(t)|_{t=0} = 0$ olduğu göz ardı edilmemelidir.

5.2.1. Jiroskop Sisteminin Varyasyonel Hesabı

Literatürde bulunan çalışmalarla benzerlik arz eden Lyapunov Üstelini bulmak için gerekli Java algoritmasını oluşturabilme açısından

$$\bar{\alpha} = \frac{\beta_\phi}{I_1}, c_1 = \frac{D_1}{I_1}, c_2 = \frac{D_2}{I_1}, \beta = \frac{M_g l}{I_1} \text{ ve } f = \frac{M_g \bar{l}}{I_1} \quad (5.18)$$

biçiminde bazı yeni parametrelerden oluşan katsayıları belirlemek daha sonraki hesaplamaları kolaylaştıracaktır. Böylece $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ x_3)^T$, $\mathbf{u} = (u_1 \ u_2 \ u_3)^T$ ve $\mathbf{f} = (f_1 \ f_2 \ f_3)^T$ olmak üzere $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ formunda (5.18) parametreleri ile birlikte ifade edilen (5.17) sistemi için varyasyonel denklem

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = (\nabla \mathbf{f})\mathbf{u} \quad (5.19)$$

olup, burada $(\nabla \mathbf{f}) = [\nabla f_i]_{3 \times 3}$ jakobiyeni de yerine yazılırsa

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = T = \frac{\bar{\alpha}^2}{\sin^4 x_1} (\cos^3 x_1 - 4 \cos^2 x_1 + 5 \cos x_1 - 2) + \cos x_1 [\beta + f \sin(\omega x_3)]$$

olmak üzere

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \begin{bmatrix} (f_1)_{x_1} & (f_1)_{x_2} & (f_1)_{x_3} \\ (f_2)_{x_1} & (f_2)_{x_2} & (f_2)_{x_3} \\ (f_3)_{x_1} & (f_3)_{x_2} & (f_3)_{x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

bulunur. Böylece

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ T & -c_1 - 3c_2 x_2^2 & \omega f \cos(\omega x_3) \sin x_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ T u_1 - (c_1 + 3c_2 x_2^2) u_2 + \omega f \cos(\omega x_3) \sin x_1 u_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

yazılır. Buradan da

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= u_2 \\ \dot{u}_2 &= T u_1 - (c_1 + 3c_2 x_2^2) u_2 + \omega f \cos(\omega x_3) \sin x_1 u_3 \\ \dot{u}_3 &= 0 \end{aligned} \quad (5.20)$$

olduğu görülür. Sonuçta

$$\begin{aligned}
\dot{u}_1 &= u_2 \\
\dot{u}_2 &= \left\{ \frac{\bar{\alpha}^2}{\sin^4 x_1} (\cos^3 x_1 - 4 \cos^2 x_1 + 5 \cos x_1 - 2) + \cos x_1 [\beta + f \sin(\omega x_3)] \right\} u_1 \\
&\quad - (c_1 + 3c_2 x_2^2) u_2 + \omega f \cos(\omega x_3) \sin x_1 u_3 \\
\dot{u}_3 &= 0
\end{aligned} \tag{5.21}$$

varyasyonel sistemi elde edilir. Genelliği bozmaksızın $u_3(t) = 0$ olarak alınabilir. Bu takdirde, (5.21) varyasyonel sistemi, u_3 fonksiyonunu ihtiva etmeyen iki boyutlu

$$\begin{aligned}
\dot{u}_1 &= u_2 \\
\dot{u}_2 &= \left\{ \frac{\bar{\alpha}^2}{\sin^4 x_1} (\cos^3 x_1 - 4 \cos^2 x_1 + 5 \cos x_1 - 2) + [\beta + f \sin(\omega x_3)] \cos x_1 \right\} u_1 \\
&\quad - (c_1 + 3c_2 x_2^2) u_2
\end{aligned} \tag{5.22}$$

biçimine indirgenmiş olur.

5.3. Dinamik Jiroskop Sisteminin Yaklaşık Çözümü için Lie Seri Tekniği

Lineer olmayan diferansiyel denklemlerin bir sınıfını çözmek için kullanılan yöntemlerden birisi de Lie seri tekniğidir [60,68].

Lie operatör temsilleri ve bunlara karşılık gelen Lie seri çözümleri, lineer olmayan sistemin parametrelerinin de içinde bulunduğu kuvvet serisi formundadır. Böylece diferansiyel denklemlerin bir sınıfının Lie seri çözümleri elde edilmiş olur. Böylesi çözümlerin lokal olarak sistemi karakterize ettiği görülmektedir. Ayrıca, sistemin Lie seri metodu kullanmak sureti ile çözümü mevcut ise, bu takdirde sistem parametreleri hakkında tahminde bulunmak mümkündür.

Lie serisi tekniğinin temel yapısını vermek için, $\mathbf{x} = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ bilinmeyen fonksiyon; $\mathbf{x}(t_0) = (x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)) = \mathbf{x}^0$ başlangıç değerleri; $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ sistemin parametreleri; $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$, $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{a}$ değerlerine bağlı olan bir vektör fonksiyonu olmak üzere

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \\
\mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}^0
\end{aligned} \tag{5.23}$$

başlangıç değer problemi göz önüne alınsın. Bu durumda (5.23) dinamik sistemi ile ilişkilendirilmiş lineer Lie diferansiyel operatörü

$$\begin{aligned}
V(\mathbf{a}) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}^0; \mathbf{a}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^0} \\
&\equiv f_1(x_1^0, \dots, x_n^0; a_1, \dots, a_k) \frac{\partial}{\partial x_1^0} + \dots + f_n(x_1^0, \dots, x_n^0; a_1, \dots, a_k) \frac{\partial}{\partial x_n^0}
\end{aligned} \tag{5.24}$$

olmak üzere, (5.23) başlangıç değer probleminin Lie serisi çözümü vektör formunda

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= e^{(t-t_0)V(\mathbf{a})} \mathbf{x}^0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^k}{k!} V^k(\mathbf{a}) \mathbf{x}^0 \\ &= \mathbf{x}^0 + (t-t_0)V(\mathbf{a}) \mathbf{x}^0 + \frac{(t-t_0)^2}{2!} V^2(\mathbf{a}) \mathbf{x}^0 + \dots\end{aligned}\quad (5.25)$$

olarak tanımlanır. Eğer özel olarak $t_0 = 0$ ise, (5.23) denklem sisteminin Lie seri çözümü

$$\mathbf{x}(t) = e^{tV(\mathbf{a})} \mathbf{x}^0 = \mathbf{x}^0 + tV(\mathbf{a}) \mathbf{x}^0 + \frac{t^2}{2!} V^2(\mathbf{a}) \mathbf{x}^0 + \dots \quad (5.26)$$

şeklindedir.

(5.25) serisinin yakınsak olması için, $i = 1, 2, \dots, n$ için x_i değişkenlerine göre alınan f_i fonksiyonlarının hepsinin bir tek nokta komşuluğunda holomorfik olduğu kabul edilmesi gereklidir. Böylece eğer $i = 1, 2, \dots, n$ için x_i 'ler aynı nokta komşuluğunda holomorfik iseler, $\mathbf{x}$ vektör fonksiyonuna $V(\mathbf{a})$ Lie operatörünün uygulanmasıyla elde edilen $V(\mathbf{a})\mathbf{x}$ fonksiyonları da holomorfik birer fonksiyon olacaktır. Bununla beraber bütün

$$V^2(\mathbf{a})\mathbf{x} = V(V(\mathbf{a})\mathbf{x}), \dots, V^n(\mathbf{a})\mathbf{x} = V(V^{n-1}(\mathbf{a})\mathbf{x}), \dots$$

fonksiyonları incelenen nokta altında holomorfik olacaklardır ve bu nedenle yakınsak bir kuvvet serisine açılabilirler. Eğer sonlu ve kapalı bir bölgede $V(\mathbf{a})$ operatörü ve $\mathbf{x}$ vektör fonksiyonu holomorfik ise, (5.25) serisi mutlak ve düzgün yakınsak olacak şekilde $|t| \leq T$ şartını sağlayan bir T pozitif sayısı mevcuttur [69].

5.4. Lyapunov Üstelini Hesaplama Tekniği

(5.21) formundaki sistemin bir boyutlu Lyapunov üsteli, Kesim 5.3'de verilen Lie seri tekniği kullanarak hesap edilecektir. Hesaplama, Java[®] programlama dilinde algoritma yazarak yapılır. Benzer bir algoritma [69]'da oluşturulmuştur. Kolaylık olması açısından, algoritma oluşturulurken eğer (5.18) ifadesindeki katsayı tanımlamaları kullanılırsa, bu taktirde (5.17) sistemi

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -c_1 x_2 - c_2 x_2^3 - \bar{\alpha}^2 \frac{(1 - \cos x_1)^2}{\sin^3 x_1} + \beta \sin x_1 + f \sin(\omega x_3) \sin x_1 \\ \dot{x}_3 &= 1\end{aligned}\quad (5.27)$$

biçiminde yazılır. Bunun yanında, (5.27) sistemine karşılık gelen iki boyutlu varyasyonel sistemi ise

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= u_2 \\ \dot{u}_2 &= \left\{ \frac{\bar{\alpha}^2}{\sin^4 x_1} (\cos^3 x_1 - 4 \cos^2 x_1 + 5 \cos x_1 - 2) + [\beta + f \sin(\omega x_3)] \cos x_1 \right\} u_1 \\ &\quad - (c_1 + 3c_2 x_2^2) u_2 \end{aligned} \quad (5.28)$$

olup bu sistemin çözümünde kullanılacak başlangıç değerleri olarak

$$\bar{\alpha} = \frac{\beta_\phi}{I_1} = 10, \quad c_1 = \frac{D_1}{I_1} = 0.5, \quad c_2 = \frac{D_2}{I_1} = 0.05, \quad \beta = \frac{M_g l}{I_1} = 1, \quad \omega = 2 \quad \text{ve} \quad f = \frac{M_g \bar{l}}{I_1} = 36$$

alınsın. Bu durumda $\|\mathbf{u}(T)\| = |u_1(T)| + |u_2(T)|$ olmak üzere, bir boyutlu Lyapunov üsteli

$$\lambda = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \|\mathbf{u}(T)\|$$

formülünden hesaplanır.

5.4.1. Bir Boyutlu Lyapunov Üsteli için Java Algoritması

Burada Lyapunov üstelini hesap etmek için bir Java algoritması verilecektir. Bu algoritma oluşturulurken kullanılan metotlar bir önceki kesimde verilmişti. Denklem sisteminin çözümleri için Lie seri tekniğini kullanılacak ve sonra çözümlerin göz önüne alınmasıyla da bir boyutlu Lyapunov üsteli bulunmaya çalışılacaktır. “Hesaplayıcı” adında bir java klasörü açılarak şu algoritma girilsin.

```
public class Hesaplayici {
    public static void main(String[] args) {
        double Alpha, Beta, c1, c2, f, w;
        double x1, x2, x3, x11, x22, x33;
        double u1, u2, u11, u22;
        double t, count;
        Alpha=10.0; Beta=1.0; c1=0.5; c2=0.05; w=2.0; f=36.0;
        t=0.005; count=0.0;
        double ab1, ab2;
        // başlangıç değerleri
        x11= 1.0; x22=1.2; x33=0.0;
        u11=0.5; u22= 0.5;
        while(count<100.0)
        {x1=x11; x2=x22; x3=x33;
        u1=u11; u2=u22;
```

```

ab1 = -c1*x2 - c2*Math.pow(x2,3)-Math.pow(Alpha,2)*Math.pow((1-
Math.cos(x1)),2)/Math.pow(Math.sin(x1),3)+Beta*Math.sin(x1)+f*Math.sin(w*x3)*Math.sin(x1);
ab2 = (Math.pow(Alpha,2)*(Math.pow(Math.cos(x1),3)-
4*Math.pow(Math.cos(x1),2)+5*Math.cos(x1)-
2)/Math.pow(Math.sin(x1),4)+Beta*Math.cos(x1)+f*Math.cos(x1)*Math.sin(w*x1))*u1-(c1 +
3*c2*Math.pow(x2,2))*u2;
x11 = x1 + t*x2 +0.5*Math.pow(t,2)*ab1;
x22 = x2 + t*ab1+0.5* Math.pow(t,2)*(-(c1+3*c2*x2*x2)*ab1-
x2*Math.pow(Alpha,2)*(Math.pow(Math.cos(x1),3)-
4*Math.pow(Math.cos(x1),2)+5*Math.cos(x1)-2)/Math.pow(Math.sin(x1),4)
+Beta*Math.cos(x1)*x2+f*Math.cos(x1)*Math.sin(w*x3)*x2+f*w*Math.sin(x1)*Math.cos(w*x3));
x33 = t + x3;
u11 = u1 + t*u2 + 0.5*t*t*ab2;
u22 = u2 + t*ab2 +0.5*t*t*(x2*u1*Math.pow(Alpha,2)*(-
Math.pow(Math.cos(x1),4)+8*Math.pow(Math.cos(x1),3)-
18*Math.pow(Math.cos(x1),2)+16*Math.cos(x1)-
5)/Math.pow(Math.sin(x1),5)+u2*Math.pow(Alpha,2)*(-2+5*Math.cos(x1)-
4*Math.pow(Math.cos(x1),2)+Math.pow(Math.cos(x1),3))/Math.pow(Math.sin(x1),4)
+(Beta+f*Math.sin(w*x3))*(u2*Math.cos(x1)-x2*u1*Math.sin(x1))-6*c2*x2*u2*ab1-
(c1+3*c2*x2*x2)*ab2);
count += t;
} // end while
double liap = 1.0/count*Math.log(Math.abs(u11) + Math.abs(u22));
double bolum = count*Math.log(Math.abs(u11) + Math.abs(u22));
System.out.println("Lyapunov üsteli = " + liap);
System.out.println("Lyapunov bölümü = " + bolum);
}
}

```

Bu algoritma çalıştırıldığında göz önüne alınan değerler için Lyapunov üsteli hemen hemen $\lambda \approx 0.1283516148774972$ olarak hesap edilmektedir. Bu değer pozitif bir değer olması sistemin yukarıdaki başlangıç değerleri için kaotik bir yapıya sahip olduğunu göstermektedir.

6. BÖLÜM

KESİRLİ MERTEBELİ DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİ

6.1. Giriş

Kesirli mertebeli diferansiyel denklem sistemleri, diferansiyel denklem sistemlerinde yer alan türev ve integraller yerine kesirli türev ve kesirli integral operatörleri kullanılmak sureti ile de ifade edilebilen sistemlerdir. Bu sistemlerde en azından birinci mertebeden türevleri temsil eden tanımlamalar birinci bölümde ifade edilen çeşitli bilinen kesirli türev tanımları yazılarak bir parametre yardımıyla genelleştirilmiştir. Bu parametre pozitif bir tam sayı ise, bu taktirde genel olarak sistem orijinal halde ifade edildiği gibi tam sayı mertebededir. Sistemin genel yapısını bozmadan belirli bir tanım aralığında mertebe parametresinin değiştirilmesiyle oluşan sistemler, ardışık tam sayı mertebeden iki sistem arasında adeta bir yelpaze vazifesi görerek sistemin aradaki kesirli türev değerlerinde davranışlarını incelemeye olanak sağlamıştır. Böylece tam sayı mertebeden sistemin oluşturduğu geometrik yapı, sistemin mertebesinde daha o tam sayıya ulaşmadan önceki bir reel sayı değerinde ortaya çıkabilmekte veya tam sayıdan daha büyük reel sayı değerlerinde sistemin bu davranışları farklılık gösterebilmektedir. Geleneksel diferansiyel denklem çözüm yöntemlerinin çoğunun kesirli mertebeden diferansiyel denklemlere uygulanmak üzere yeniden düzenlenmeleriyle kesirli diferansiyel denklem sistemlerinin çözümleri de benzer olarak analitik, yarı analitik veya nümerik yöntemlerle de bulunabilmektedir. Genel çözümlerin yanında elbette sistemin özel çözümleri için önceden sahip olunan şartlara ihtiyaç duyulacaktır. Modellenen bir doğa olayının şartları tabi ki de negatif olmayan tam sayı mertebeden olacağından, bu modelin kesirli mertebeden türevlerin kullanılarak yeniden ifade edilmesiyle de oluşan kesirli diferansiyel denklem sisteminin şartları negatif olmayan tam sayı mertebeden olacaktır.

Bazı durumlarda; keyfi bir aralıkta alınan herhangi bir parametre değerlerine göre tam sayı mertebeden diferansiyel denklem sisteminin kararsızlığından bahsederken, aynı sistemin

modifiye edilmiş kesirli mertebeden yapısı, alınan keyfi aralığın bir alt aralığında kararlı olabilmektedir. İşte böylesi durumlar, üzerinde çalışma yapılabilecek kesirli mertebeden diferansiyel denklem sistemlerini tam sayı mertebeden denklem sistemlerine göre daha üstün bir hale getirmektedir. Bu özel durum için bir örnek aşağıdaki şekilde verilir[46] :

$0 < \nu < 1$ ve $0 < \alpha < 1$ için $x(0)$ başlangıç şartı ile birlikte

$$\frac{d}{dt} x(t) = \nu t^{\nu-1}$$

ve

$${}_0^C D_t^\alpha x(t) = \nu t^{\nu-1}$$

olarak iki diferansiyel denklemi göz önüne alalım. Bu denklemlerin analitik çözümleri sırasıyla

$$x(t) = x(0) + t^\nu$$

ve

$$x(t) = x(0) + \frac{\nu \Gamma(\nu) t^{\nu+\alpha-1}}{\Gamma(\nu+\alpha)}$$

biçimindedir. Tam sayı mertebeden diferansiyel denklem $0 < \nu < 1$ aralığındaki herhangi bir ν değeri için kararsızdır. Ancak $0 < \nu < 1 - \alpha$ aralığındaki herhangi bir ν değeri için kesirli mertebeden Caputo türevli ikinci diferansiyel denklem kararlı olmaktadır.

Diğer bir yandan, Poincare-Bendixon teoremi gereğince, pozitif tam sayı mertebeden sistemde kaosu ortaya çıkması için sistemin en az üçüncü mertebeden olması gerekirken, kesirli mertebeden lineer olmayan bir diferansiyel denklem sistemi için bu geçerli değildir. Örneğin Chua Devresi'nin kaotik çekicisi, sistem 2.7 mertebeden olduğu zaman oluşmaktadır [28]. Genelleştirilmiş kesirli mertebeden van der Pol sisteminin de 2,7 mertebeden 3,3 mertebeye kadar kaotik davranışlarının belirli parametre değerleri ile meydana geldiği gösterilmiştir [26]. Yine aynı çalışmada van der Pol sisteminin otonom olmayan yapısı dikkate alındığında kaotik davranışın 1,4 mertebeden ortaya çıktığı ifade edilmiştir. Bunun yanında otonom olmayan kesirli mertebeden Duffing sistemi 2'nin altında olan bir mertebede kaotik biçimde davranabilmektedir[4].

Kesirli mertebeden diferansiyel denklemler için başlangıç şartlarının, tam sayı mertebeli diferansiyel denklemler için tanımlananlarla aynı formda olması da bir avantajdır. Çünkü sistemin tanımlandığı herhangi bir aralıktaki noktada sistemin tam sayı mertebeden türevlerinin bir fiziksel ve geometrik yorumu mevcuttur, yani başlangıç şartlarının açık yorumları yapılabilir ve kesirli mertebeden modellenebilen uygulamalı problemlerin çözümü için bu noktalardaki kesirli türevlerin tanımlarına ihtiyaç duymaktadır. Bu modellerin modifiye edilmesinde kullanılacak birden fazla kesirli integral ve türev tanımlamaları vardır. Genel olarak homojen başlangıç şartları altında kesirli mertebeden Riemann-Liouville ve Caputo türevleri birbirine

eşdeğerdir. Ancak, Riemann-Liouville kesirli türevinin, singülerliğin derecesinin sistemin boyutunun derecesinden daha büyük olduğu hiper-singüler genelleştirilmiş integrallerin bulunması durumunda ve denge noktasındaki sistemin diverjansının sıfır olmamasını gerektiren, sabitlerin kesirli türevinin sıfır olamaması gibi fiziksel uygulamalarda ise maalesef dezavantajları vardır.

6.2. Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklem Sistemleri

Kesirli mertebeden genel bir diferansiyel denklem sistemi, $i = 1, 2, \dots, n$ için $k = 0, 1, \dots, m_i$, $m_i \in \mathbb{N}$ ve $m_i < \alpha_i \leq m_{i+1}$ olacak şekilde α_i zamana bağlı kesirli türevin mertebesini tanımlayan bir parametre, $y_i(t)$ çözüm vektörü, $f_i(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))$ bir fonksiyon, c_{ik} belirli bir sabit olmak üzere $y_i^{(k)}(0) = c_{ik}$ başlangıç şartları ile birlikte

$$\frac{d^{\alpha_i} y_i(t)}{dt^{\alpha_i}} = f_i(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) \quad (6.1)$$

şeklinde ifade edilebilir.

6.3. Otonom Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklem Sistemleri

$i = 1, 2, \dots, n$ için $y_i^{(k)}(0) = c_{ik}$ başlangıç şartlarına sahip kesirli mertebeden genel bir otonom diferansiyel denklem sistemi, $k = 0, 1, \dots, m_i$, $m_i \in \mathbb{N}$ ve $m_i < \alpha_i \leq m_{i+1}$ şartıyla α_i zamansal kesirli türevin mertebesini tanımlayan bir parametre, $y_i(t)$ çözüm vektörü, $f_i(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))$ bir fonksiyon, c_{ik} belirli bir sabit olmak üzere

$$\frac{d^{\alpha_i} y_i(t)}{dt^{\alpha_i}} = f_i(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) \quad (6.2)$$

biçiminde tanımlanır.

6.4. Kesirli Türevlerin Nümerik Hesaplaması

6.4.1. Grünwald-Letnikov Yaklaşımı

Burada kesirli türevlerin nümerik hesaplanmasında literatürde yaygın olarak kullanılan metotlar arasında önemli bir rol oynayan, Grünwald-Letnikov kesirli türev tanımının kullanılmasıyla oluşturulan bir bağıntı kullanılacaktır. Grünwald-Letnikov kesirli türevinin kullanılmasının en önemli sebebi, özelliği gereği türevin tanımında integral ifadesinin yerine seri toplamının mevcut olmasıdır. İkinci Bölümde ifade edildiği gibi, bahsi geçen bu türev; adi türevin limit tanımının reel sayılara genellemesinin bir sonucudur.

Grünwald-Letnikov kesirli türev tanımının kullanılmasıyla elde edilen bağıntı aşağıdaki gibidir[22,59,61,74]:

h hesaplama zaman adımı, L_m bellek uzunluğu, $k = 1, 2, \dots$ için $t_k = kh$ ve $j = 1, 2, \dots$ için $(-1)^j \binom{\alpha}{j}$ de binom katsayıları $c_j^{(\alpha)}$ olmak üzere kh noktalarındaki α . türevin açık nümerik yaklaşım bağıntısı

$${}_{(k-L_m/h)}D_{t_k}^\alpha f(t) \approx h^{-\alpha} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t_{k-j}) \quad (6.3)$$

ile verilmiştir. Burada $c_0^{(\alpha)} = 1$ olarak alınırsa, binom katsayıları için tekrarlama bağıntısı

$$j \geq 1 \text{ için } c_j^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{1+\alpha}{j}\right) c_{j-1}^{(\alpha)} \quad (6.4)$$

şeklinde. Buna göre

$${}_a D_t^\alpha y(t) = f(t, y(t)) \quad (6.5)$$

biçimindeki kesirli diferansiyel denkleminin yaklaşık çözümü

$$y(t_k) = f(t_k, y(t_k))h^\alpha - \sum_{j=v}^k c_j^{(\alpha)} y(t_{k-j}) \quad (6.6)$$

olarak elde edilir. Buradaki seri toplamının alt sınırı $k < (L_m / h)$ için $v = 1$; $k > (L_m / h)$ için $v = k - (L_m / h)$ olmakla birlikte bütün k değerleri için $v = 1$ olarak da alınabilmektedir. Eğer $f(t) \leq M$ ise, istenilen hata miktarı ε olmak üzere L_m bellek uzunluğunu bulmaya imkân veren

$$\left(\frac{M}{\varepsilon |\Gamma(1-\alpha)|} \right)^{1/\alpha} \leq L_m \quad (6.7)$$

eşitsizlik yaklaşımı yazılabilir.

6.4.2. Adams-Bashforth-Moulton Yaklaşımı

Kesirli türevli denklemlerin nümerik hesaplanmasında önemli bir yer tutan metotlardan bir tanesi de Adams-Bashforth-Moulton yaklaşım metodudur. Kesirli diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulmak için Predictor-corrector yaklaşımının[19,21] kullanılması yanında Adams-Bashforth-Moulton tipinde bir doğrultucu-düzeltilici(predictor-corrector) algoritma da kesirli mertebeden denklem sistemlerinin nümerik simülasyonları için önerilmiştir. Bu metot başlangıç şartlarına ihtiyaç duyulmasını gerektirdiğinden Caputo türevleri için de uygundur. Bu metodun işleyişi ise aşağıdaki gibidir[59]:

$$\begin{aligned} D_t^\alpha y(t) &= f(t, y(t)), \quad 0 \leq t \leq T \\ y^{(k)}(0) &= y_0^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1 \end{aligned} \quad (6.8)$$

diferansiyel denkleminin

$$y(t) = \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} y_0^{(k)} \frac{t^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau \quad (6.9)$$

biçimindeki Volterra integral denklemine denk olduğu bilindiğinden, (6.9) Volterra denklemi $n = 0, 1, \dots, N$ için $h = T / N$ olmak üzere $t_n = nh$ düzgün şebeke üzerinde diskritize edilerek kısa bellek prensibini[25] de kullanılarak hassaslık mertebesini koruyan, kesirli diferansiyel denklem sisteminin $y(t_n)$ çözümünün kapalı bir nümerik yaklaşımı elde edilmiş olur.

$j = 1, 2, \dots, n$ için $y_h(t_j)$ yaklaşımlarının hesaplandığı kabul edilirse

$$a_{j,n+1} = \begin{cases} n^{\alpha+1} - (n-\alpha)(n+1)^\alpha, & j = 0 \text{ için} \\ (n-j+2)^{\alpha+1} + (n-j)^{\alpha+1} + 2(n-j+1)^{\alpha+1}, & 1 \leq j \leq n \text{ için} \\ 1, & j = n+1 \text{ için} \end{cases} \quad (6.10)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} y_h(t_{n+1}) &= \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} y_0^{(k)} \frac{t_{n+1}^k}{k!} + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} f(t_{n+1}, y_h^p(t_{n+1})) \\ &\quad + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{j=0}^n a_{j,n+1} f(t_j, y_n(t_j)) \end{aligned} \quad (6.11)$$

ifadesi hesap edilmek istendiğinde, ön yaklaşım değeri olarak $y_h^p(t_{n+1})$ terimleri kestirme olarak alınırsa

$$b_{j,n+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha} ((n+1-j)^\alpha - (n-j)^\alpha) \quad (6.12)$$

olmak üzere bu değerler

$$y_h^p(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} y_0^{(k)} \frac{t_{n+1}^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} f(t_j, y_n(t_j)) \quad (6.13)$$

formülü ile bulunur. Bu metodun hatası $p = \min(2, 1+\alpha)$ için

$$\max_{j=0,1,2,\dots,N} |y(t_j) - y_h(t_j)| = O(h^p) \quad (6.14)$$

düzeyindedir.

6.5. Kesirli Mertebeden Jjiroskop Sistemi

Burada lineer ve kübik sönüme sahip kesirli mertebeden kaotik jiroskop sistemi ele alınacaktır. [1,2,17]'de lineer ve kübik sönüme sahip iki boyutlu simetrik jiroskop sisteminin kaotik yapısı ele alınmış daha sonra onun kaos senkronizasyonu açısından incelemesi yapılmıştır. Ayrıca [78]'de iki ayrı jiroskop sisteminin kaos senkronizasyonu, [75]'de farklı modellenmiş bir jiroskop sisteminin kaotik yapısını inceleyen farklı çalışmalar da ortaya konmuştur.

Bu kesimde (5.1) ile ifade edilen tam sayı mertebeli jiroskop diferansiyel denklemi, otonom kesirli mertebeden diferansiyel denklem sistemi olarak ilk defa modifiye edilecektir. 5.Bölüm'de kullanılan parametrelerin tanımlamaları dikkate alındığında, I_1 simetrik jiroskobun kutupsal atalet momenti, M_g yerçekimi kuvveti, $\bar{I}$ dış zorlama genliği ve ω dış zorlama frekansı, D_1 ve D_2 pozitif sabit, β_ϕ sabit olmak üzere, $x_3 = t$ değişken tanımlaması ile üç boyutlu hale getirilmiş lineer olmayan (5.17) diferansiyel denklemi (5.18) parametreleriyle birlikte

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -c_1 x_2 - c_2 x_2^3 - \bar{\alpha}^2 \frac{(1 - \cos x_1)^2}{\sin^3 x_1} + \beta \sin x_1 + f \sin(\omega x_3) \sin x_1 \\ \dot{x}_3 &= 1\end{aligned}\tag{6.15}$$

olarak yazılabilmektedir. Şimdi kesirli mertebeden otonom sistemi oluşturalım.

x_3 konum değişkeninin de eklenmesiyle oluşan üç konumlu (6.15) sistemine karşılık gelen otonom kesirli diferansiyel sisteminin denklemlerinin mertebeleri sırasıyla α , β ve γ kesirli sayılar olmak üzere

$$\begin{aligned}D^\alpha x_1 &= x_2 \\ D^\beta x_2 &= -c_1 x_2 - c_2 x_2^3 - \bar{\alpha}^2 \frac{(1 - \cos x_1)^2}{\sin^3 x_1} + \beta \sin x_1 + f \sin(\omega x_3) \sin x_1 \\ D^\gamma x_3 &= 1\end{aligned}\tag{6.16}$$

biçiminde tanımlansın. Burada α , β ve γ kesirli sayılarının aynı anda $\alpha = \beta = \gamma = 1$ olması durumunda orijinal olan (6.15) denkleminde ulaşılır. Böylece farklı kesirli mertebeden denklemler ile oluşturulmuş (6.16) sisteminin davranışları irdelenirken, (6.15) denklemi ile verilmiş tam sayı mertebeli sisteminin de simülasyonu incelenmiş olacaktır.

6.6. Kesirli Mertebeden Jiroskop Sisteminin Analizi

(6.16) sistemindeki türev parametreleri olan α , β ve γ kesirli sayılarının farklı değerler almasıyla; adeta geniş bir yelpazede ana sistemin davranışlarını sergileyen bütün değerler de

incelenecektir. Bu kesimde, çeşitli mertebeden (6.16) kesirli diferansiyel denklem sistemi göz önüne alınacak ve belirli bazı değerler için de bu sistemin analizi yapılacaktır. Bu düşünce tarzının farklı tipteki denklem sistemlerine uygulanışı literatürde yer almaktadır [26,27].

Eğer genel bir sınıflandırma yapılacak olursa α , β ve γ için aşağıdaki durumlar söz konusudur.

Durum 1 : $\alpha = \beta = \gamma = 1$ ise, bu halde (6.16) sistemi, (6.15) orijinal modifiye edilmiş üç boyutlu otonom denklem sisteminin tam sayı mertebeden yapısına denk olacaktır. Bu duruma haiz modifiye edilmiş sistemin geniş bir analizi Kısım 6.6.2.1'de yer almaktadır.

Durum 2 : $\gamma = 1$ ve α , β aynı değere sahip kesirli sayılar ise, bu halde (6.16) sistemi, (5.16) orijinal iki boyutlu denklem sisteminin kesir mertebeli iki denklemlili otonom olmayan sistemine denk olacaktır. Bu özellikteki farklı parametre veya mertebe değerlerine haiz modifiye edilmiş sistemin altı farklı alt durum incelemesi ve simülasyon grafikleri Kısım 6.6.2.2'de görülmektedir.

Durum 3 : α , β ve γ aynı kesirli sayılar olarak alındığında, (6.16) otonom sistemi $\alpha + \beta + \gamma$ mertebeden bir yapıya sahip olacaktır. Bu şartı sağlayan sonsuz değer olduğundan sadece birkaç farklı değer burada göz önüne alınacaktır. Belirlenen özel değerlerin girilmesi neticesinde elde edilen sistemin simülasyon analizleri Kısım 6.6.2.3'de verilmiştir.

Durum 4 : (6.16) sistemin sadece üçüncü denkleminin γ kesirli mertebesinin değişmesi ve α , β mertebelerinin aynı kesirli sayılar olma durumu göz önüne alınacaktır. Bu durum için incelemeler Kısım 6.6.2.4'de bulunabilmektedir.

6.6.1. Modifiye Edilmiş Sistemin Nümerik Çözüm Algoritması

6.6.1.1. Grünwald-Letnikov Çözüm Algoritması

(6.16) sistemi Grünwald-Letnikov yaklaşımı ile $n = 0, 1, \dots, N$ ve h adım aralığı olmak üzere $h = T / N$ için $t_n = nh$ düzgün şebeke üzerinde diskritize edilirse,

$$\begin{aligned} {}_{(k-L_m/h)}D_{t_k}^{\alpha} x_1(t) &\approx h^{-\alpha} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\alpha}{j} x_1(t_{k-j}) = f_1(x_1(t_k), x_2(t_k), x_3(t_k)) \\ {}_{(k-L_m/h)}D_{t_k}^{\beta} x_2(t) &\approx h^{-\beta} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\beta}{j} x_2(t_{k-j}) = f_2(x_1(t_k), x_2(t_k), x_3(t_k)) \\ {}_{(k-L_m/h)}D_{t_k}^{\gamma} x_3(t) &\approx h^{-\gamma} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\gamma}{j} x_3(t_{k-j}) = f_3(x_1(t_k), x_2(t_k), x_3(t_k)) \end{aligned} \quad (6.17)$$

yazılır. Burada gerekli düzenlemeler yapılsa,

$$\begin{aligned}
h^{-\alpha} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\alpha}{j} x_1(t_{k-j}) &= x_2(t_k) \\
h^{-\beta} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\beta}{j} x_2(t_{k-j}) &= -c_1 x_2(t_k) - c_2 x_2^3(t_k) - \alpha^2 \frac{(1 - \cos x_1(t_{k-1}))^2}{\sin^3 x_1(t_{k-1})} \\
&\quad + \beta \sin x_1(t_{k-1}) + f \sin(\omega x_3(t_k)) \sin x_1(t_{k-1})
\end{aligned} \tag{6.18}$$

$$\begin{aligned}
h^{-\gamma} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\gamma}{j} x_3(t_{k-j}) &= 1 \\
\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\alpha}{j} x_1(t_{k-j}) &= x_2(t_k) h^\alpha \\
\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\beta}{j} x_2(t_{k-j}) &= \left[-c_1 x_2(t_k) - c_2 x_2^3(t_k) - \alpha^2 \frac{(1 - \cos x_1(t_{k-1}))^2}{\sin^3 x_1(t_{k-1})} \right. \\
&\quad \left. + \beta \sin x_1(t_{k-1}) + f \sin(\omega x_3(t_k)) \sin x_1(t_{k-1}) \right] h^\beta
\end{aligned} \tag{6.19}$$

$$\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\gamma}{j} x_3(t_{k-j}) = h^\gamma$$

bulunur. Böylece $j = 1, 2, \dots$ için $(-1)^j \binom{\alpha}{j}$ de binom katsayıları $c_j^{(\alpha)}$ olmak üzere kh noktalarındaki sistemin nümerik yaklaşım bağıntısı

$$\begin{aligned}
x_1(t_k) &= x_2(t_k) h^\alpha - \sum_{j=v}^k c_j^{(\alpha)} x_1(t_{k-j}) \\
x_2(t_k) &= \left[-c_1 x_2(t_k) - c_2 x_2^3(t_k) - \alpha^2 \frac{(1 - \cos x_1(t_{k-1}))^2}{\sin^3 x_1(t_{k-1})} \right. \\
&\quad \left. + \beta \sin x_1(t_{k-1}) + f \sin(\omega x_3(t_k)) \sin x_1(t_{k-1}) \right] h^\beta - \sum_{j=v}^k c_j^{(\beta)} x_2(t_{k-j}) \\
x_3(t_k) &= h^\gamma - \sum_{j=v}^k c_j^{(\gamma)} x_3(t_{k-j})
\end{aligned} \tag{6.20}$$

biçimindeki denklemlerin ortak çözülmesiyle elde edilir. Burada T_{sim} simülasyon zamanı, $N = [T_{sim} / h]$ için $k = 1, 2, 3, \dots, N$ ve $[x_1(0), x_2(0), x_3(0)]$ başlangıç noktaları olarak alınıp (6.20) formülleri ile birlikte kullanılarak, (6.16) sisteminin nümerik çözümleri bulunmuş olur.

6.6.1.2. Adams-Bashforth-Moulton Çözüm Algoritması

Diğer yandan, (6.16) sisteminin çözüm algoritmasını Adams-Bashforth-Moulton yaklaşımı kullanarak oluşturalım. Şimdi $\alpha, \beta, \gamma \in (0, 1)$ ve $0 \leq t \leq T$ için (6.16) sistemi

$[x_1(0), x_2(0), x_3(0)]$ başlangıç değerleri olmak üzere (6.9) biçimindeki Volterra integral denklemi

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f_1(x_1(\tau), x_2(\tau), x_3(\tau)) d\tau \\ x_2(t) &= x_2(0) + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} f_2(x_1(\tau), x_2(\tau), x_3(\tau)) d\tau \\ x_3(t) &= x_3(0) + \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t (t-\tau)^{\gamma-1} f_3(x_1(\tau), x_2(\tau), x_3(\tau)) d\tau \end{aligned} \quad (6.21)$$

olarak yazılır. Burada $\alpha, \beta, \gamma \in (0,1)$ iken (6.21) ile gösterilen Volterra denklemi $n = 0, 1, \dots, N$ için $h = T / N$ olmak üzere $t_n = nh$ düzgün şebeke üzerinde

$$\begin{aligned} x_{1,n+1} &= x_1(0) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} f_1(x_{1,n+1}^p, x_{2,n+1}^p, x_{3,n+1}^p) \\ &\quad + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{j=0}^n a_{1,j,n+1} f_1(x_{1,j}^p, x_{2,j}^p, x_{3,j}^p) \\ x_{2,n+1} &= x_2(0) + \frac{h^\beta}{\Gamma(\beta+2)} f_2(x_{1,n+1}^p, x_{2,n+1}^p, x_{3,n+1}^p) \\ &\quad + \frac{h^\beta}{\Gamma(\beta+2)} \sum_{j=0}^n a_{2,j,n+1} f_2(x_{1,j}^p, x_{2,j}^p, x_{3,j}^p) \\ x_{3,n+1} &= x_3(0) + \frac{h^\gamma}{\Gamma(\gamma+2)} f_3(x_{1,n+1}^p, x_{2,n+1}^p, x_{3,n+1}^p) \\ &\quad + \frac{h^\gamma}{\Gamma(\gamma+2)} \sum_{j=0}^n a_{3,j,n+1} f_3(x_{1,j}^p, x_{2,j}^p, x_{3,j}^p) \end{aligned} \quad (6.22)$$

olarak diskritize edilir. Burada

$$\begin{aligned} x_{1,n+1}^p &= x_1(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^n b_{1,j,n+1} f_1(x_{1,j}, x_{2,j}, x_{3,j}) \\ x_{2,n+1}^p &= x_2(0) + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{j=0}^n b_{2,j,n+1} f_2(x_{1,j}, x_{2,j}, x_{3,j}) \\ x_{3,n+1}^p &= x_3(0) + \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \sum_{j=0}^n b_{3,j,n+1} f_3(x_{1,j}, x_{2,j}, x_{3,j}) \end{aligned} \quad (6.23)$$

ve $i = 1, 2, 3$ için $a_{i,j,n+1}$ ile birlikte $b_{i,j,n+1}$ katsayıları

$$a_{1,j,n+1} = \begin{cases} n^{\alpha+1} - (n-\alpha)(n+1)^\alpha, & j=0 \text{ için} \\ (n-j+2)^{\alpha+1} + (n-j)^{\alpha+1} + 2(n-j+1)^{\alpha+1}, & 1 \leq j \leq n \text{ için} \\ 1, & j=n+1 \text{ için} \end{cases} \quad (6.24)$$

$$a_{2,j,n+1} = \begin{cases} n^{\beta+1} - (n-\beta)(n+1)^\beta, & j=0 \text{ için} \\ (n-j+2)^{\beta+1} + (n-j)^{\beta+1} + 2(n-j+1)^{\beta+1}, & 1 \leq j \leq n \text{ için} \\ 1, & j=n+1 \text{ için} \end{cases} \quad (6.25)$$

$$a_{3,j,n+1} = \begin{cases} n^{\gamma+1} - (n-\gamma)(n+1)^\gamma, & j=0 \text{ için} \\ (n-j+2)^{\gamma+1} + (n-j)^{\gamma+1} + 2(n-j+1)^{\gamma+1}, & 1 \leq j \leq n \text{ için} \\ 1, & j=n+1 \text{ için} \end{cases} \quad (6.26)$$

$$b_{1,j,n+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha} [(n+1-j)^\alpha - (n-j)^\alpha] \quad (6.27)$$

$$b_{2,j,n+1} = \frac{h^\beta}{\beta} [(n+1-j)^\beta - (n-j)^\beta] \quad (6.28)$$

$$b_{3,j,n+1} = \frac{h^\gamma}{\gamma} [(n+1-j)^\gamma - (n-j)^\gamma] \quad (6.29)$$

formülleri yardımıyla bulunur. Diğer yandan (6.16) sistemine göre

$$f_1(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = x_2(t)$$

$$f_2(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = -c_1 x_2(t) - c_2 x_2^3(t) - \alpha^2 \frac{(1 - \cos x_1(t))^2}{\sin^3 x_1(t)} + \beta \sin x_1(t) + f \sin(\omega x_3(t)) \sin x_1(t) \quad (6.30)$$

$$f_3(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = 1$$

olup, (6.30) eşitlikleri (6.22)-(6.23) denklemlerinde yerlerine yazılırsa sırasıyla

$$\begin{aligned}
x_{1,n+1} &= x_1(0) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} x_{2,n+1}^p + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{j=0}^n a_{1,j,n+1} x_{2,j}^p \\
x_{2,n+1} &= x_2(0) + \frac{h^\beta}{\Gamma(\beta+2)} \left(-c_1 x_{2,n+1}^p - c_2 (x_{1,n+1}^p)^3 - \alpha^2 (1 - \cos x_{1,n+1}^p)^2 / \sin^3 x_{1,n+1}^p \right. \\
&\quad \left. + \beta \sin x_{1,n+1}^p + f \sin(\omega x_{3,n+1}^p) \sin x_{1,n+1}^p \right) \\
&\quad + \frac{h^\beta}{\Gamma(\beta+2)} \sum_{j=0}^n a_{2,j,n+1} \left(-c_1 x_{2,j}^p - c_2 (x_{1,j}^p)^3 - \alpha^2 (1 - \cos x_{1,j}^p)^2 / \sin^3 x_{1,j}^p \right. \\
&\quad \left. + \beta \sin x_{1,j}^p + f \sin(\omega x_{3,j}^p) \sin x_{1,j}^p \right)
\end{aligned} \tag{6.31}$$

$$\begin{aligned}
x_{3,n+1} &= x_3(0) + \frac{h^\gamma}{\Gamma(\gamma+2)} + \frac{h^\gamma}{\Gamma(\gamma+2)} \sum_{j=0}^n a_{3,j,n+1} \\
x_{1,n+1}^p &= x_1(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^n b_{1,j,n+1} x_{2,j} \\
x_{2,n+1}^p &= x_2(0) + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{j=0}^n b_{2,j,n+1} \left(-c_1 x_{2,j}^p - c_2 (x_{1,j}^p)^3 - \alpha^2 (1 - \cos x_{1,j}^p)^2 / \sin^3 x_{1,j}^p \right. \\
&\quad \left. + \beta \sin x_{1,j}^p + f \sin(\omega x_{3,j}^p) \sin x_{1,j}^p \right)
\end{aligned} \tag{6.32}$$

$$x_{3,n+1}^p = x_3(0) + \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \sum_{j=0}^n b_{3,j,n+1}$$

elde edilir. Bu yaklaşımların hataları $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha, \beta, \gamma)$ ve $i = 1, 2, 3$ için $p_i = \min(2, 1 + \alpha_i)$ olmak üzere

$$\max_{j=0,1,2,\dots,N} |x_i(t_j) - x_{i,n+1}(t_j)| = O(h^{p_i}) \tag{6.33}$$

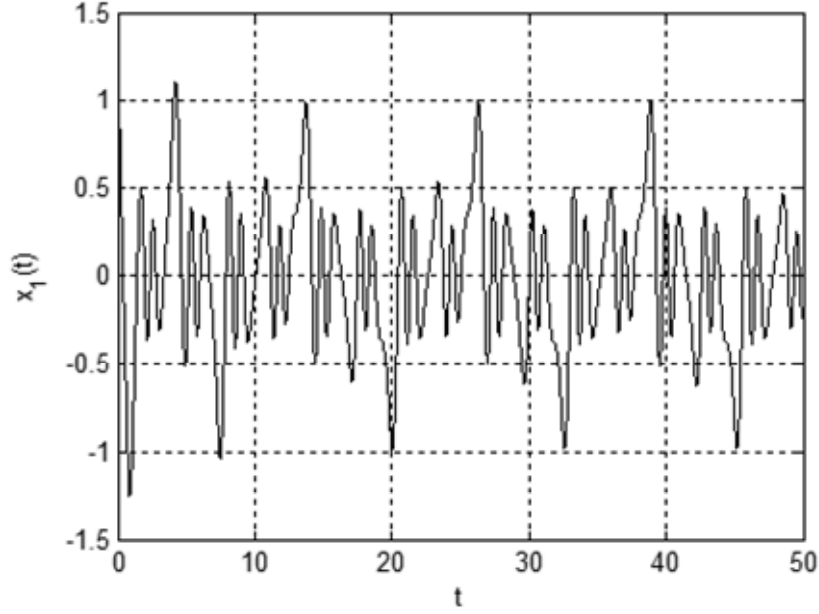
düzeyindedir.

6.6.2. Modifiye Edilmiş Sistemin Simülasyon Sonuçları

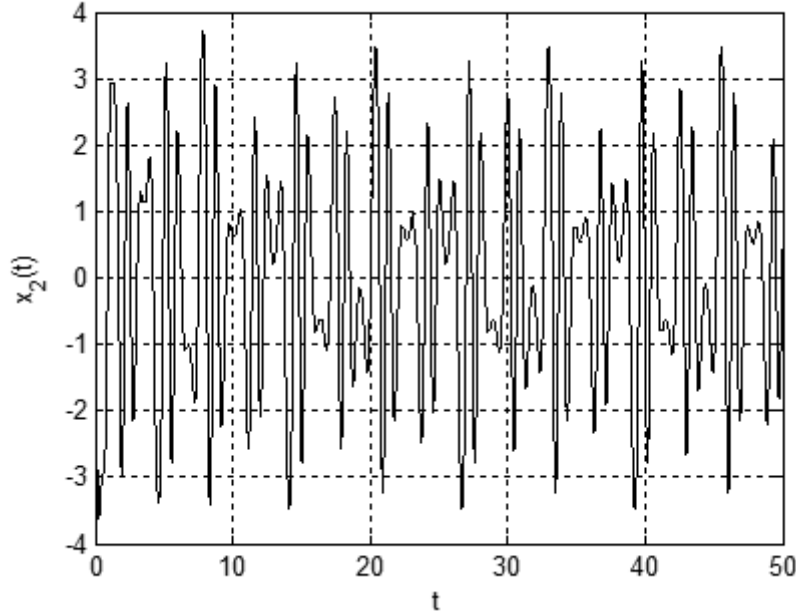
6.6.2.1. Durum 1

Eğer $\alpha = \beta = \gamma = 1$ ise, bu durumda (6.16) sistemi, (6.15) orijinal modifiye edilmiş üç boyutlu otonom denklem sisteminin tam sayı mertebeden yapısına denk olacaktır. $\bar{\alpha} = 10$, $\beta = 1$, $c_1 = 0.5$, $c_2 = 0.05$, $\omega = 2$, $f = 36$ parametreler ve $\mathbf{x}(0) = (1, 1.2, 0)$ başlangıç koşulu olmak üzere, Kesim 5.4'te hesaplanan ve (5.17) sisteminin (5.18) katsayı tanımlamaları ile oluşturulan sistemin varyasyonel sistemine karşılık gelen Lyapunov üstelinin pozitif bir değere sahip olduğunu, 20.000 nokta üzerinden hazırlanan özel Java program simülasyonu ile gözlemlenmiştir. Bu parametre değerleriyle göz önüne alınan sistemin Lyapunov üstelinin pozitif bir değere sahip olmasından dolayı, sistem kaotik bir yapıya sahiptir. Şekil 6.1-6.3'de kaotik bu sistemin konum fonksiyonlarının zamana göre değişimlerini gösterir grafikler yer almaktadır.

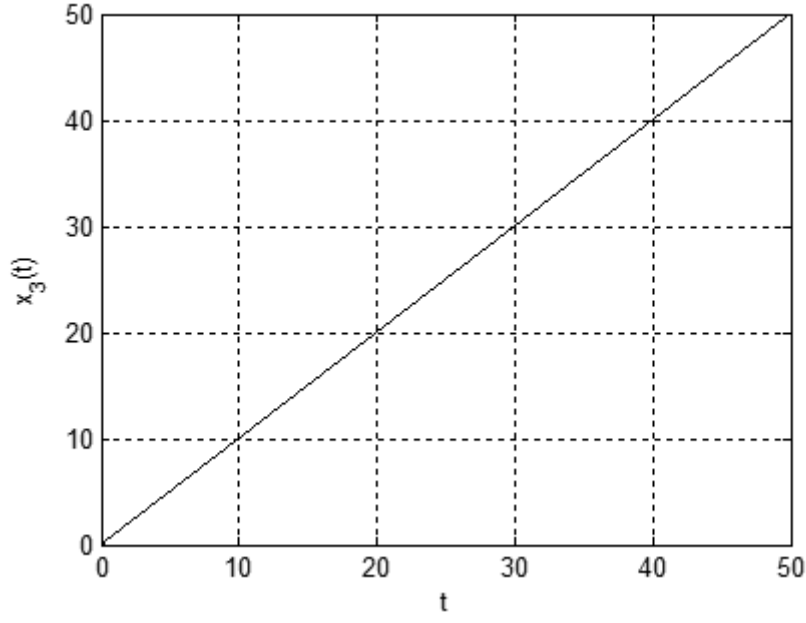
Şekil 6.4-6.6'da yine bu sistemin davranışlarını gösteren konum fonksiyonlarının iki boyutlu faz düzleminde birbirlerine göre grafikleri bulunmaktadır. Ayrıca, Şekil 6.4'de bahsi geçen parametrik değerler ile hesaplanan garip çeker görülmektedir. Şekil 6.7'de ise üç boyutlu uzayda üç konumlu sistemin simülasyonu ve Şekil 6.8-6.14'de de [17]'de ele alınan parametre değerlerine karşılık hesaplanan sistemin yapısı görülmektedir.



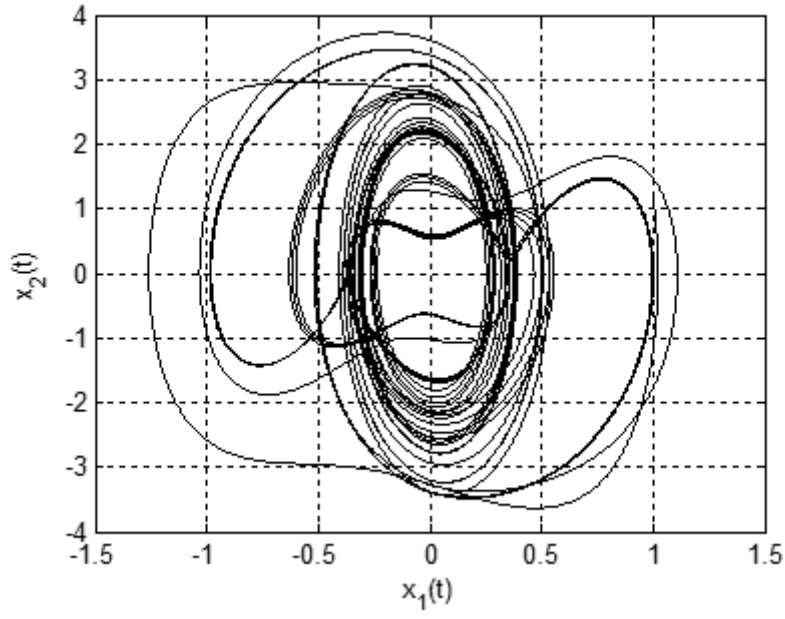
Şekil 6.1. x_1 konum fonksiyonunun zamana göre yaklaşık değerleri



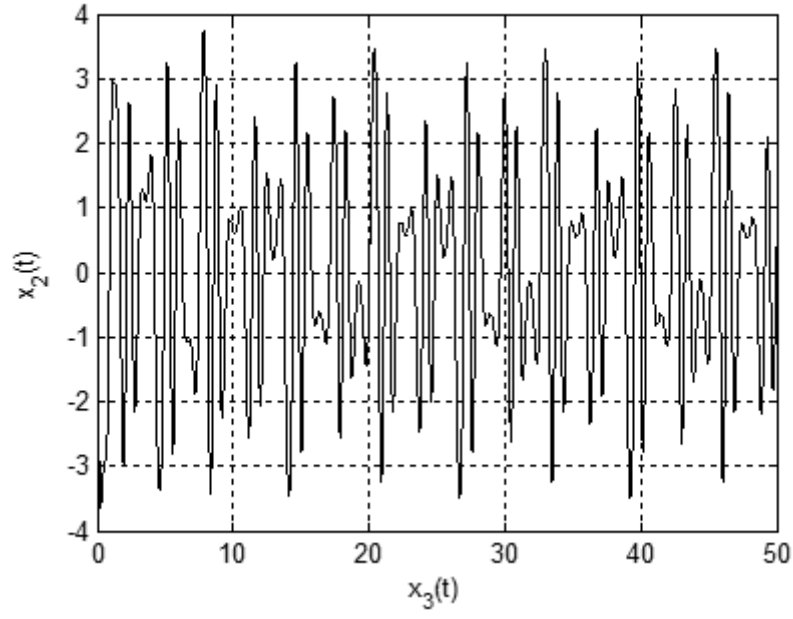
Şekil 6.2. x_2 konum fonksiyonunun zamana göre yaklaşık değerleri



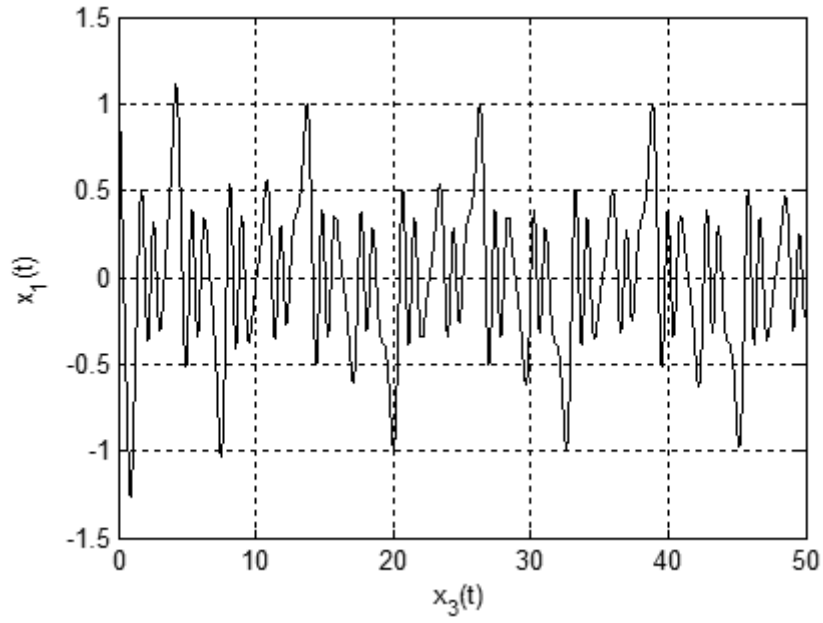
Şekil 6.3. x_3 konum fonksiyonunun zamana göre yaklaşık değerleri



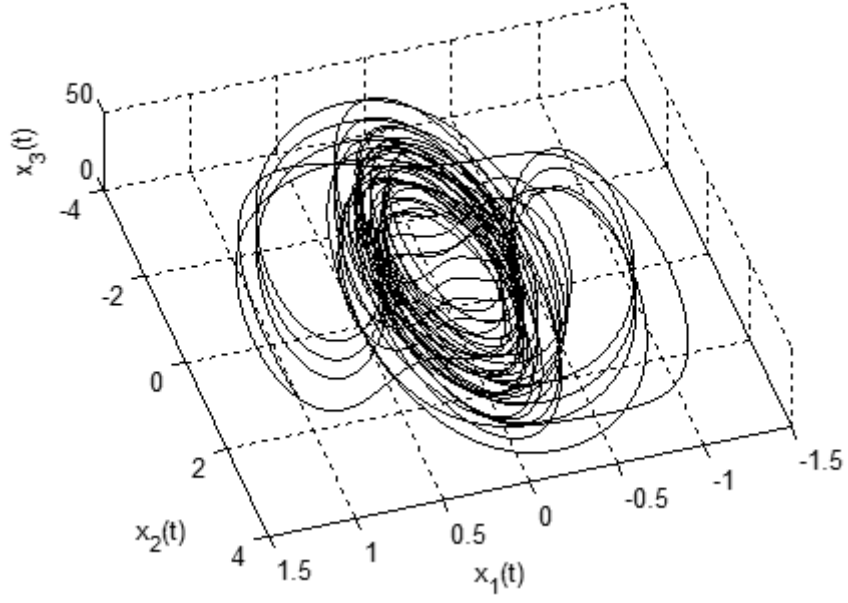
Şekil 6.4. Parametrik değerlerin alınmasıyla hesaplanan (x_1, x_2) iki boyutlu görülen garip çeker



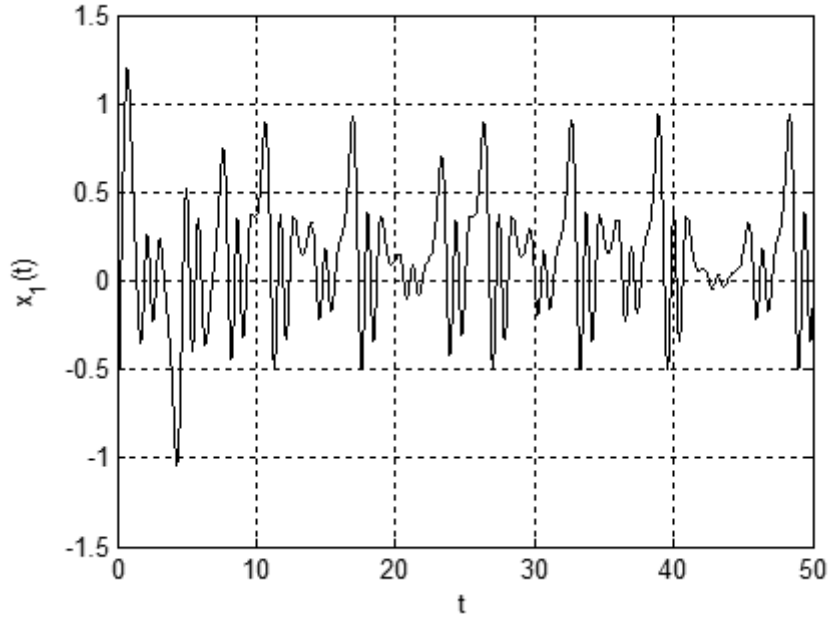
Şekil 6.5. Sistemin iki boyutlu (x_3, x_2) faz düzlemindeki davranışları



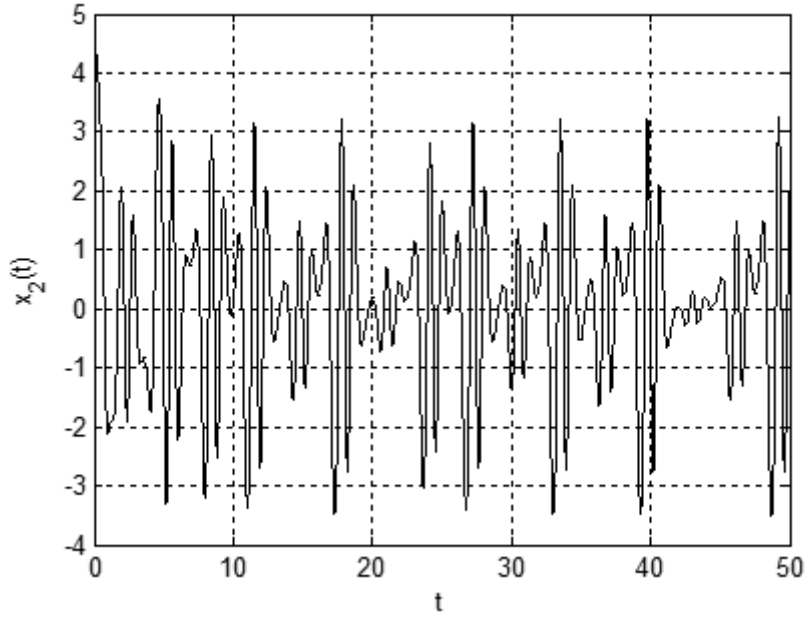
Şekil 6.6. Sistemin iki boyutlu (x_3, x_1) faz düzlemindeki birbirlerine göre olan davranışları



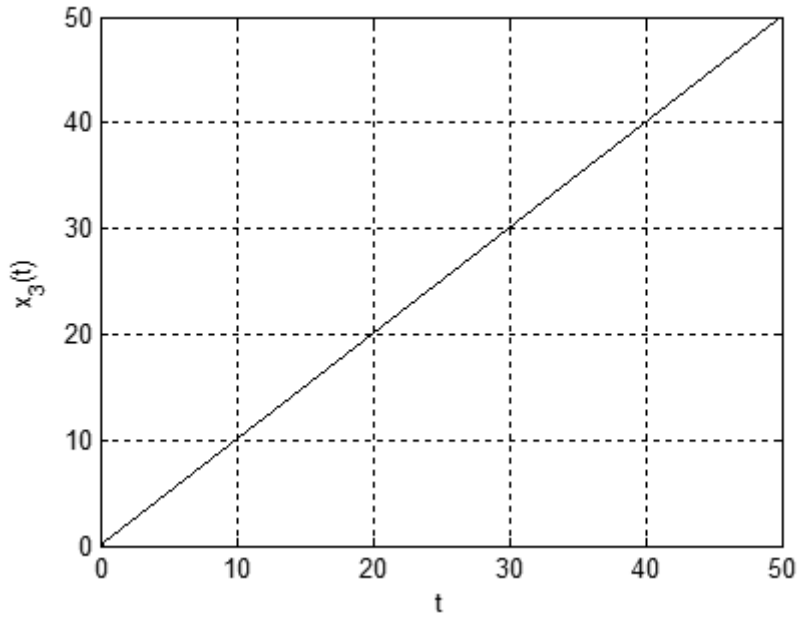
Şekil 6.7. Üç konumlu sistemin simülasyonu



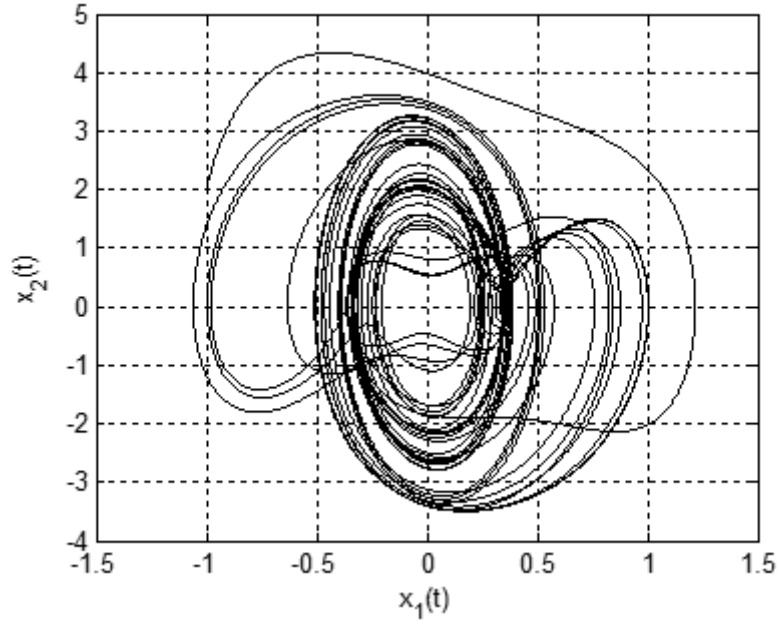
Şekil 6.8. [17]'e göre hesaplanan x_1 konum fonksiyonunun zamana göre yaklaşık değerleri



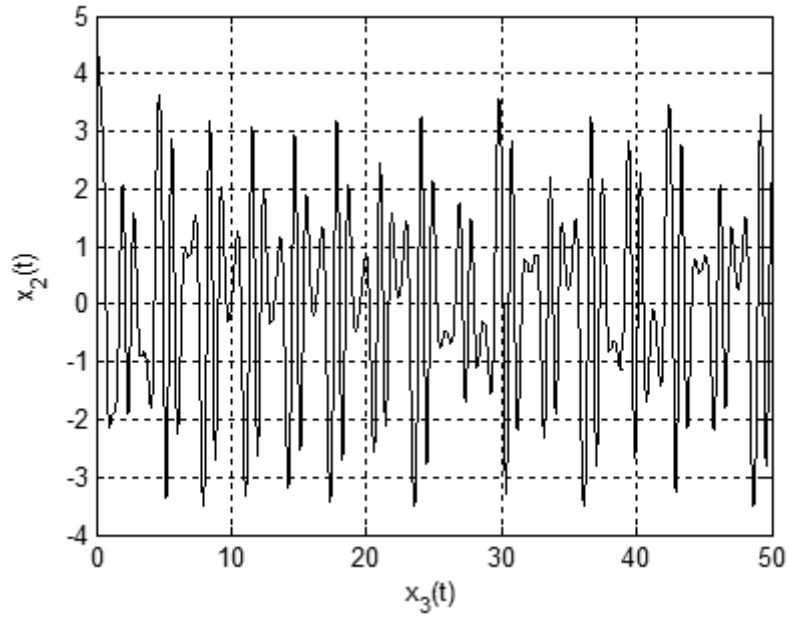
Şekil 6.9. [17]'e göre hesaplanan x_2 konum fonksiyonunun zamana göre yaklaşık değerleri



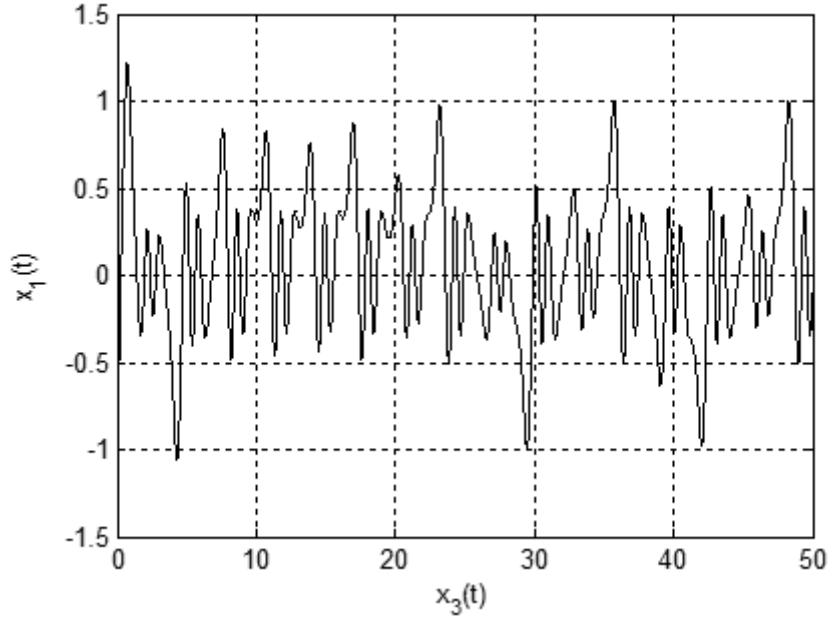
Şekil 6.10 [17]'e göre hesaplanan x_3 konum fonksiyonunun zamana göre yaklaşık değerleri



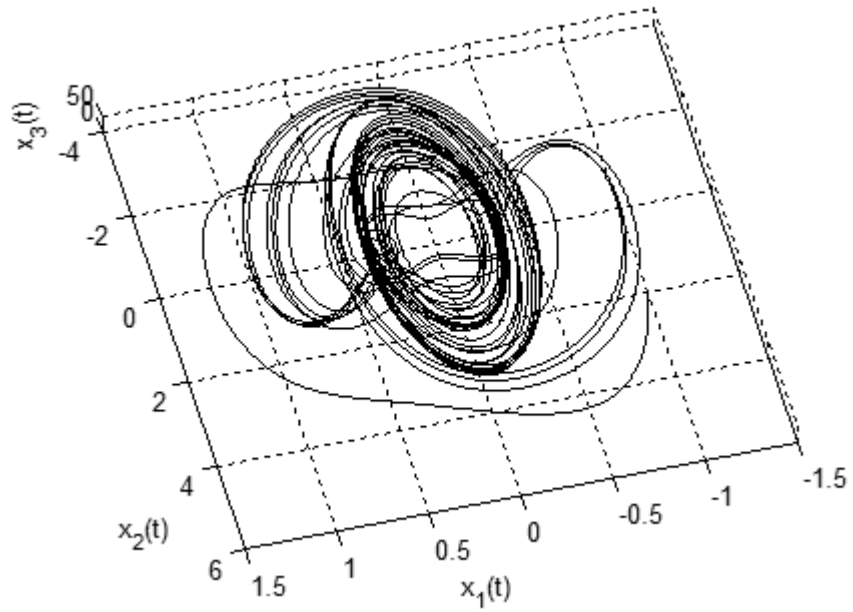
Şekil 6.11. [17]'e göre hesaplanan (x_1, x_2) iki boyutlu görülen garip çeker



Şekil 6.12. [17]'e göre hesaplanan (x_3, x_2) faz düzlemi



Şekil 6.13. [17]'e göre hesaplanan (x_3, x_1) faz düzlemi



Şekil 6.14 [17]'deki parametre değerlerine göre hesaplanan üç konumlu sistem simülasyonu

Yukarıda çizilen şekillerden de anlaşılacağı üzere; kesirli mertebelerin üçünün de 1 olarak kabul edilmesi ile birlikte (6.16) sisteminde yerine yazılmasıyla elde edilen modifiyeli otonom sistem yapısı, (5.16) orijinal iki boyutlu denklem sisteminin kesirli mertebeye sahip iki denklemlili

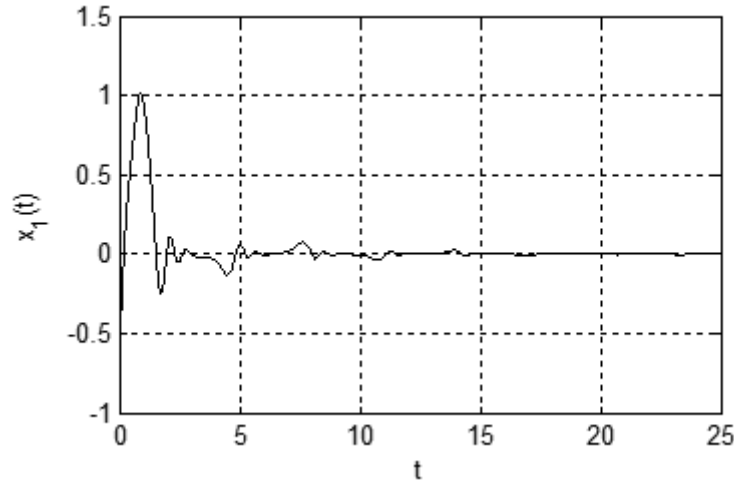
otonom olmayan sisteme denk olduğu açık bir şekilde görülür. Böylece, bu sistemin kaotik yapısı iki boyutlu faz düzlemi olarak Şekil 6.4'te ve Şekil 6.11'de görülmektedir.

6.6.2.2. Durum 2

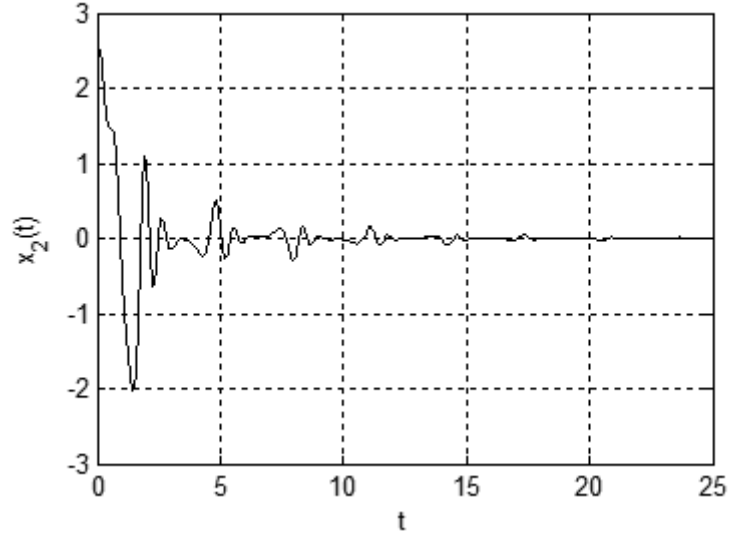
Eğer $\gamma=1$, α ve β aynı değere sahip kesirli sayılar ise, bu takdirde (6.16) sistemi, (5.16) orijinal iki boyutlu denklem sisteminin, kesirli mertebeli iki denklemlili otonom olmayan sisteme denktir.

6.6.2.2.1. Durum 2.1

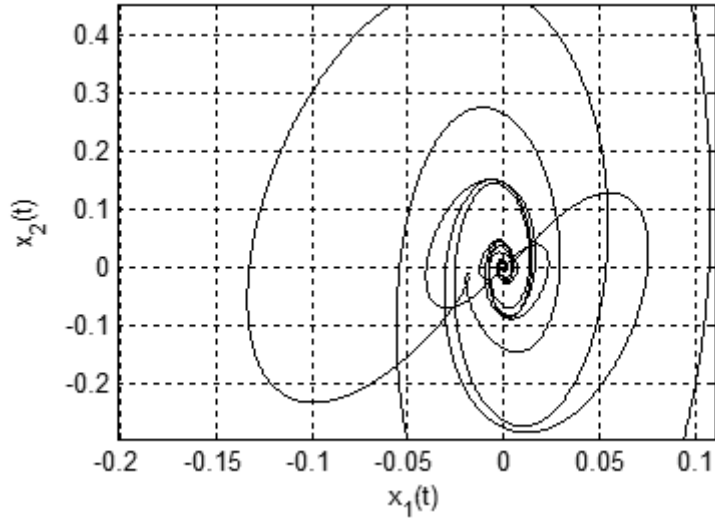
Diğer yandan $\alpha = \beta = 0.9$, $\gamma = 1$ kesirli sayıları için (6.16) otonom sistemi $\alpha + \beta + \gamma = 2.8$ mertebeden bir yapıya sahip olacaktır. Ayrıca $\bar{\alpha} = 10$, $\beta = 1$, $c_1 = 0.5$, $c_2 = 0.05$, $\omega = 2$, $f = 35.5$ parametreleri ile $\mathbf{x}_0 = (-1, 2, 0)$ başlangıç şartı altında (6.16) sisteminin; Şekil 6.15-6.16'da konum bileşenlerinin zamana göre simülasyonları, Şekil 6.17'de x_1, x_2 faz düzlemindeki görüntüsü ve Şekil 6.18'de ise üç konumlu simülasyonu yer almaktadır.



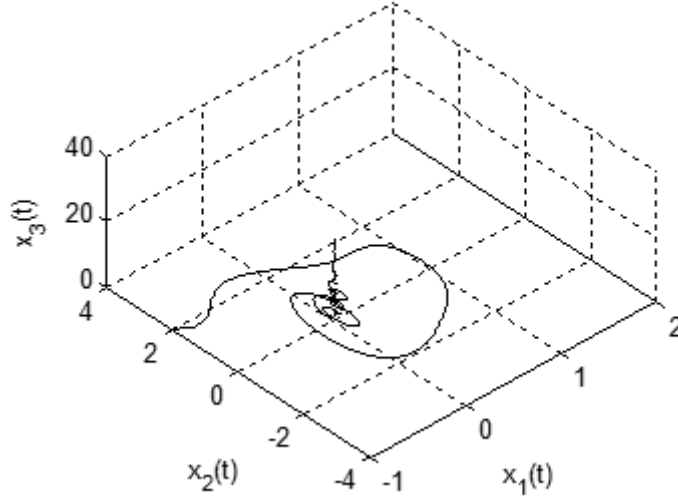
Şekil 6.15. $\alpha = \beta = 0.9$, $\gamma = 1$ için sistemin x_1 bileşeninin konum-zaman grafiği



Şekil 6.16. $\alpha = \beta = 0.9$, $\gamma = 1$ için sistemin x_2 bileşeninin konum-zaman grafiği



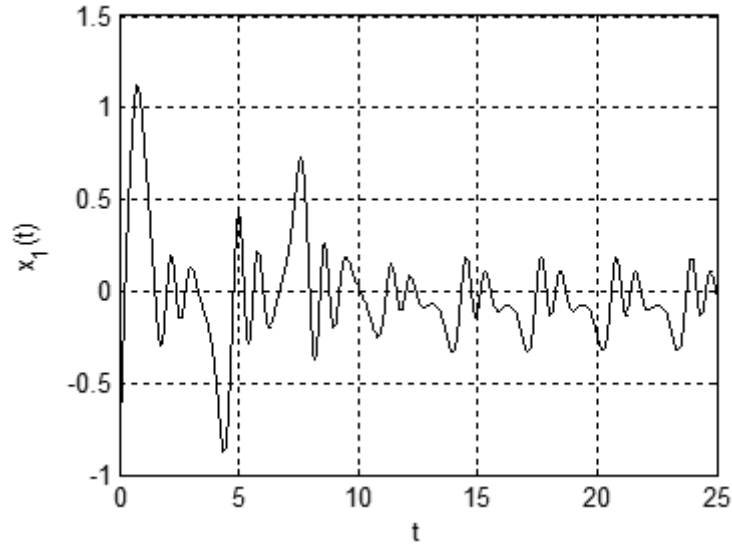
Şekil 6.17. $\alpha = \beta = 0.9$, $\gamma = 1$ için sistemin x_1, x_2 faz düzlemindeki simülasyonu



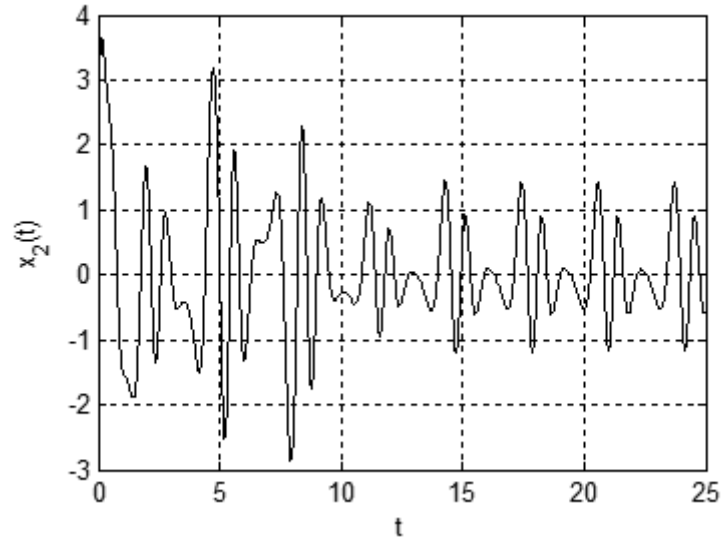
Şekil 6.18 $\alpha = \beta = 0.9$, $\gamma = 1$ için sistemin üç konumlu simülasyonu

6.6.2.2.2. Durum 2.2

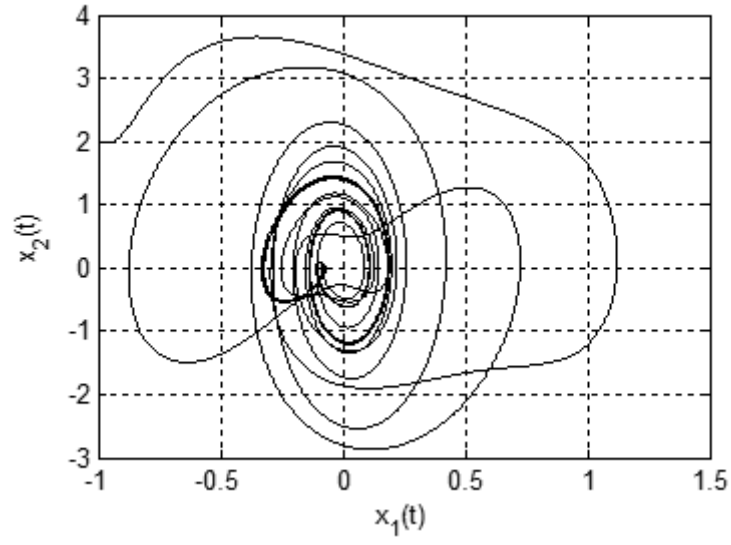
Bu durumda $\alpha = \beta = 0.97$, $\gamma = 1$ kesirli sayıları için (6.16) otonom sistemi $\alpha + \beta + \gamma = 2.94$ mertebeden bir yapıya sahip olacaktır. Buna ilave olarak $\bar{\alpha} = 10$, $\beta = 1$, $c_1 = 0.5$, $c_2 = 0.05$, $\omega = 2$, $f = 35.5$ parametreleri ile $\mathbf{x}_0 = (-1, 2, 0)$ başlangıç koşulu altında (6.16) sisteminin; Şekil 6.19-6.20'da konum bileşenlerinin zamana göre simülasyonları, Şekil 6.21'de x_1, x_2 faz düzlemindeki görüntüsü ve Şekil 6.22'de ise üç konumlu simülasyonu yer almaktadır.



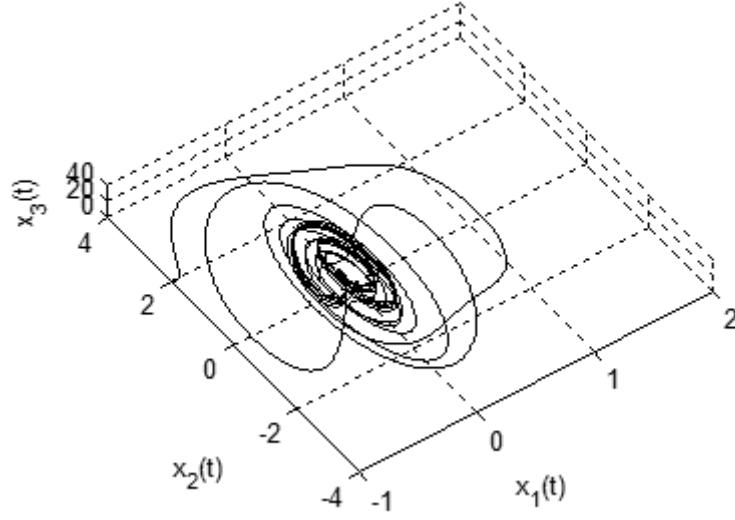
Şekil 6.19. $\alpha = \beta = 0.97$, $\gamma = 1$ için sistemin x_1 bileşeninin konum-zaman grafiği



Şekil 6.20. $\alpha = \beta = 0.97$, $\gamma = 1$ için sistemin x_2 bileşeninin konum-zaman grafiği



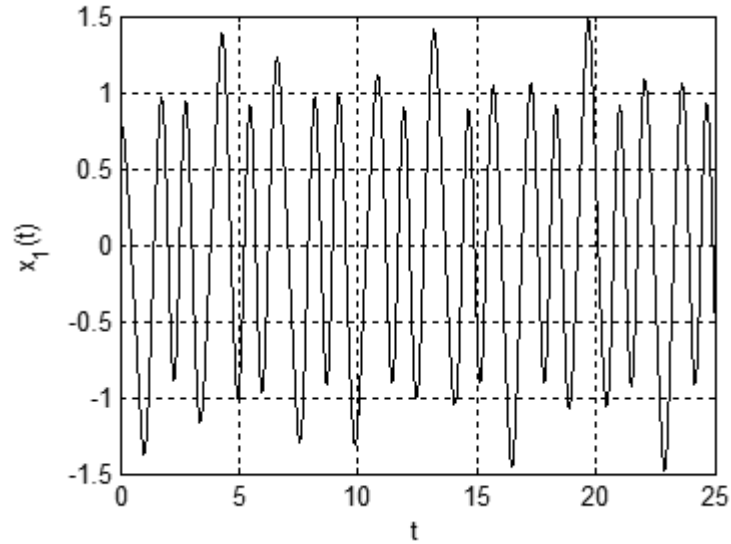
Şekil 6.21. $\alpha = \beta = 0.97$, $\gamma = 1$ için sistemin x_1, x_2 faz düzlemindeki simülasyonu



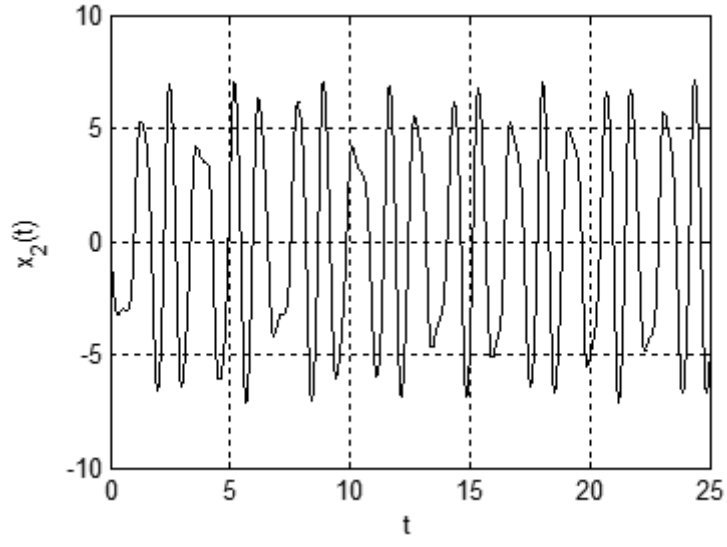
Şekil 6.22. $\alpha = \beta = 0.97$, $\gamma = 1$ için sistemin üç konumlu simülasyonu

6.6.2.2.3. Durum 2.3

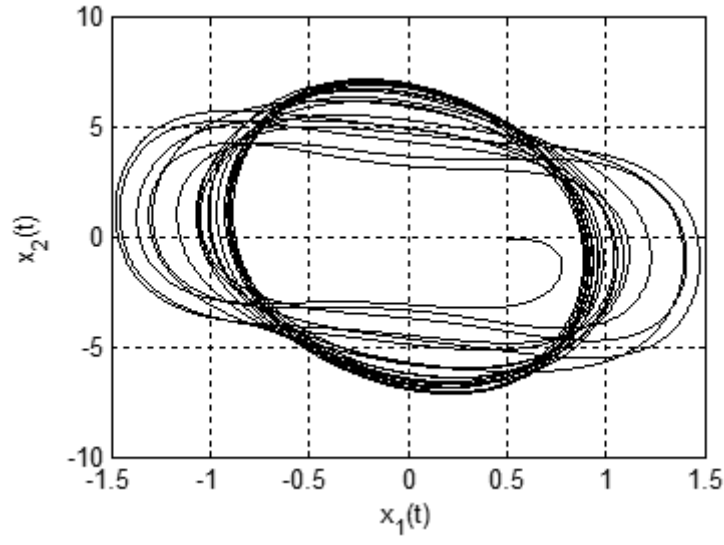
Burada $\alpha = \beta = 1.1$, $\gamma = 1$ kesirli sayıları için (6.16) otonom sistemi $\alpha + \beta + \gamma = 3.2$ mertebeden bir yapıya sahiptir. Ayrıca $\bar{\alpha} = 10$, $\beta = 1$, $c_1 = 0.5$, $c_2 = 0.05$, $\omega = 2$, $f = 35.5$ parametreler ve $\mathbf{x}_0 = (0.5, -0.1, 0)$ başlangıç koşulu ile birlikte (6.16) sisteminin; Şekil 6.23-6.24'da konum bileşenlerinin zamana göre simülasyonları, Şekil 6.25'de x_1, x_2 faz düzlemindeki görüntüsü ve Şekil 6.26'de ise üç konumlu simülasyonu yer almaktadır.



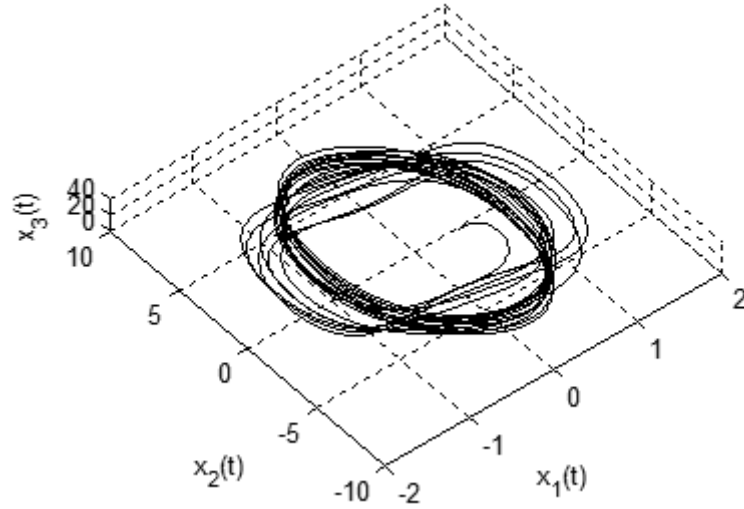
Şekil 6.23. $\alpha = \beta = 1.1$, $\gamma = 1$ için sistemin x_1 bileşeninin konum-zaman grafiği



Şekil 6.24. $\alpha = \beta = 1.1$, $\gamma = 1$ için sistemin x_2 bileşeninin konum-zaman grafiği



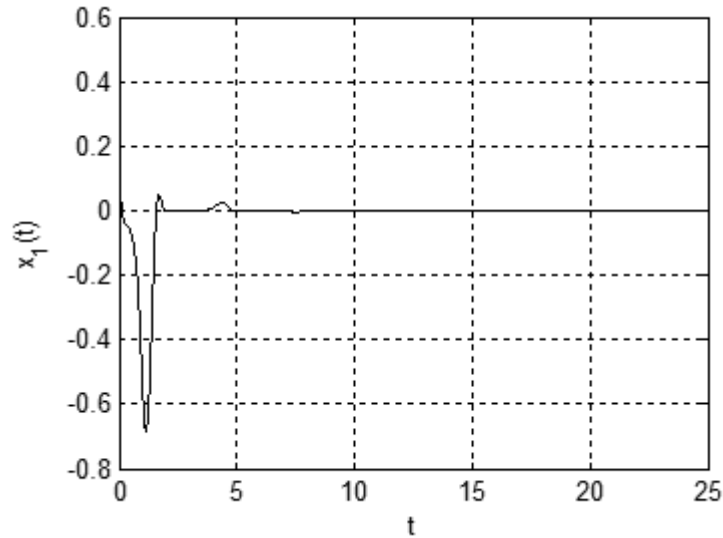
Şekil 6.25. $\alpha = \beta = 1.1$, $\gamma = 1$ için sistemin x_1, x_2 faz düzlemindeki simülasyonu



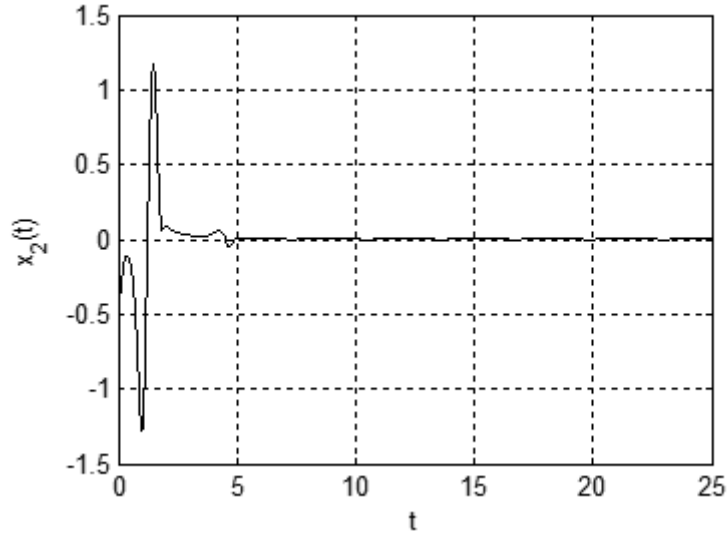
Şekil 6.26. $\alpha = \beta = 1.1$, $\gamma = 1$ için sistemin üç konumlu simülasyonu

6.6.2.2.4. Durum 2.4

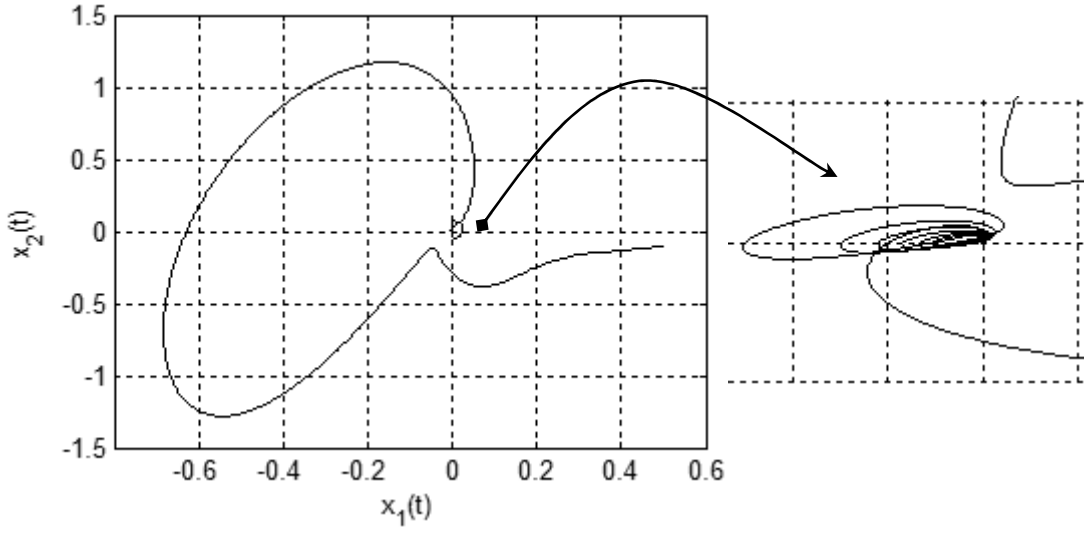
Bu halde $\alpha = \beta = 0.7$, $\gamma = 1$ kesirli sayıları için (6.16) otonom sistemi $\alpha + \beta + \gamma = 2.4$ mertebeden bir yapıya sahip olacaktır. $\bar{\alpha} = 10$, $\beta = 1$, $c_1 = 0.5$, $c_2 = 0.05$, $\omega = 2$, $f = 35.5$ parametre değerleri ile $\mathbf{x}_0 = (0.5, -0.1, 0)$ başlangıç şartı altında (6.16) sisteminin; Şekil 6.27-6.28'da konum bileşenlerinin zamana göre simülasyonları, Şekil 6.29-6.30'da x_1, x_2 faz düzlemindeki görüntüsü ve Şekil 6.31-6.32'de ise üç konumlu simülasyonu yer almaktadır.



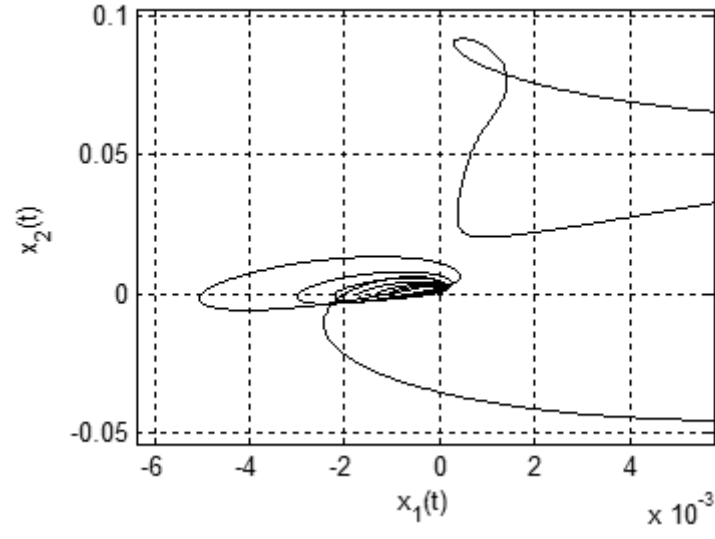
Şekil 6.27. $\alpha = \beta = 0.7$, $\gamma = 1$ için sistemin x_1 bileşeninin konum-zaman grafiği



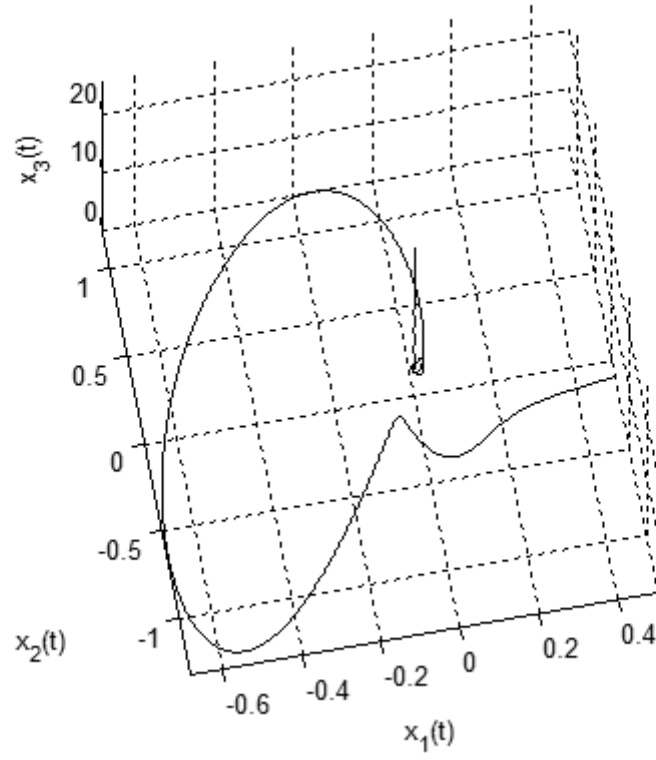
Şekil 6.28. $\alpha = \beta = 0.7$, $\gamma = 1$ için sistemin x_2 bileşeninin konum-zaman grafiği



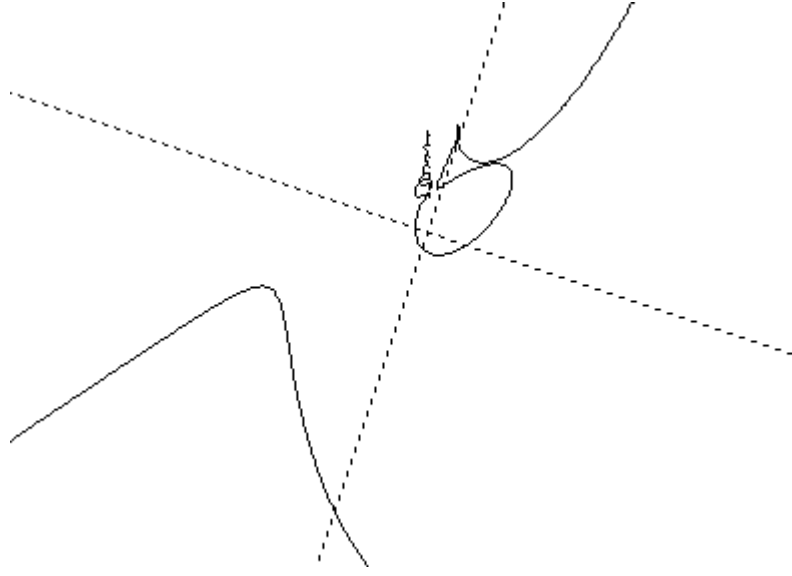
Şekil 6.29. $\alpha = \beta = 0.7$, $\gamma = 1$ için sistemin x_1, x_2 faz düzlemindeki simülasyonu



Şekil 6.30. $\alpha = \beta = 0.7$, $\gamma = 1$ için sistemin x_1, x_2 faz düzlemindeki yakın görünümü



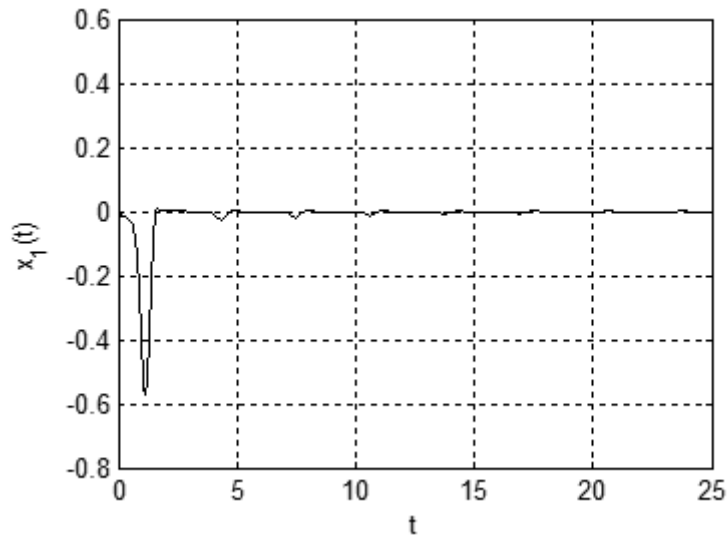
Şekil 6.31. $\alpha = \beta = 0.7$, $\gamma = 1$ için sistemin üç konumlu simülasyonu



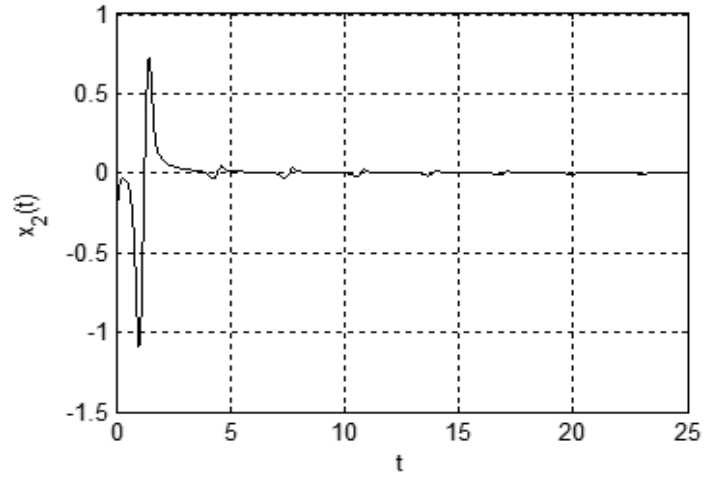
Şekil 6.32. $\alpha = \beta = 0.7$, $\gamma = 1$ için sistemin üç boyutlu uzaydaki yakından görünümü

6.6.2.2.5. Durum 2.5

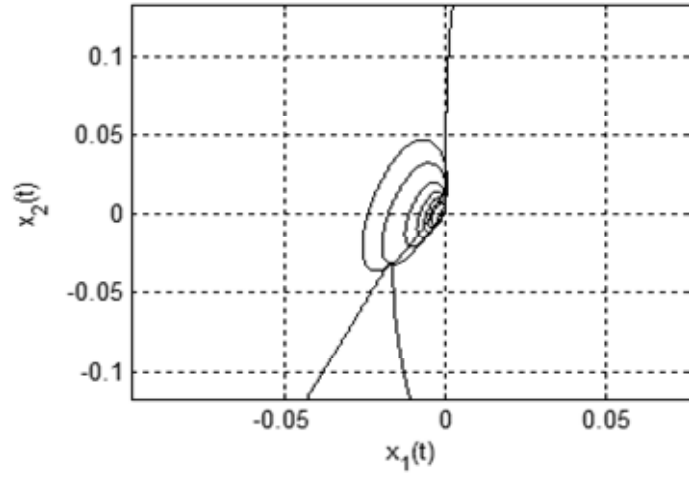
Bu durumda $\alpha = \beta = 0.6$, $\gamma = 1$ kesirli sayıları için (6.16) otonom sistemi $\alpha + \beta + \gamma = 2.2$ mertebeden bir yapıya sahip olacaktır ve $\bar{\alpha} = 10$, $\beta = 1$, $c_1 = 0.5$, $c_2 = 0.05$, $\omega = 2$, $f = 35.5$ parametreler ve $\mathbf{x}_0 = (0.5, -0.1, 0)$ başlangıç koşulu olmak üzere (6.16) sisteminin; Şekil 6.33-6.34'de konum bileşenlerinin zamana göre simülasyonları, Şekil 6.35'da x_1, x_2 faz düzlemindeki görüntüsü ve Şekil 6.36'da ise üç konumlu simülasyonu yer almaktadır.



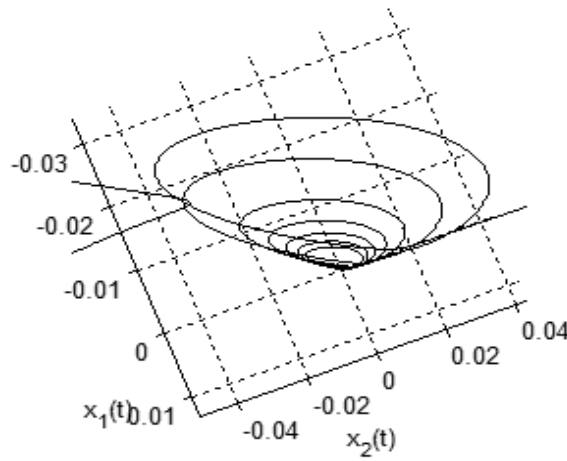
Şekil 6.33. $\alpha = \beta = 0.6$, $\gamma = 1$ için sistemin x_1 bileşeninin konum-zaman grafiği



Şekil 6.34. $\alpha = \beta = 0.6$, $\gamma = 1$ için sistemin x_2 bileşeninin konum-zaman grafiği



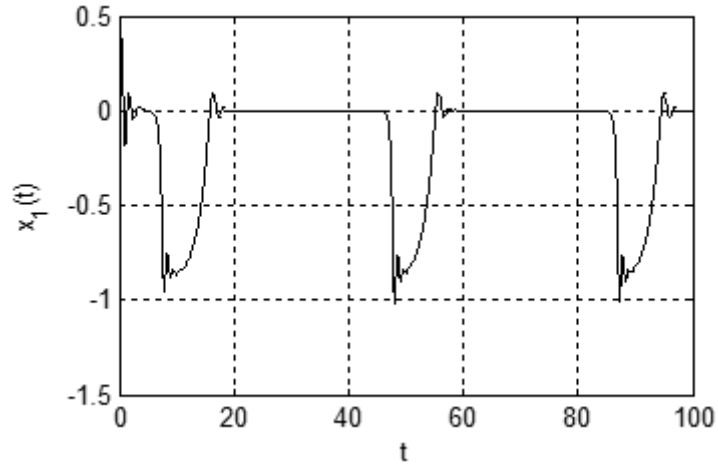
Şekil 6.35. $\alpha = \beta = 0.6$, $\gamma = 1$ için sistemin x_1, x_2 faz düzlemindeki simülasyonu



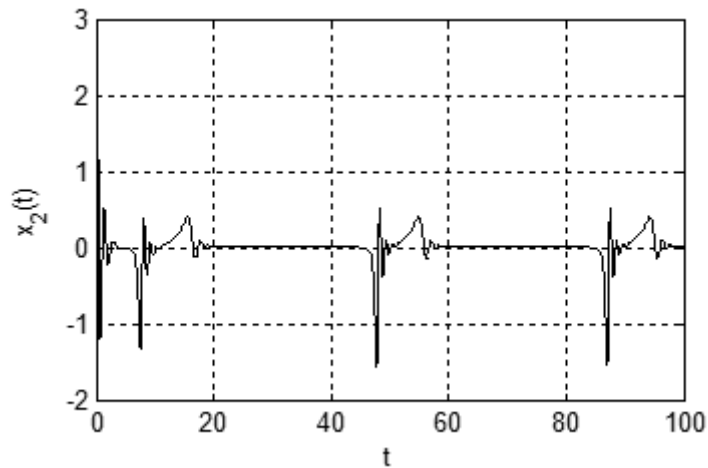
Şekil 6.36. $\alpha = \beta = 0.6$, $\gamma = 1$ için sistemin üç konumlu simülasyonundan bir kesit

6.6.2.2.6. Durum 2.6

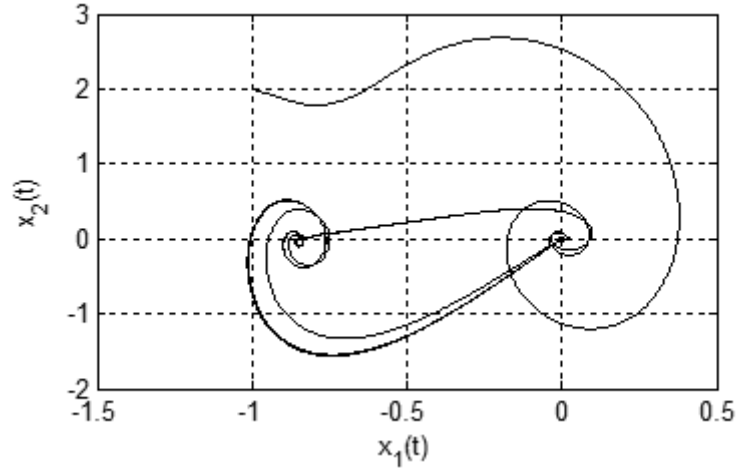
Burada $\alpha = \beta = 0.9$, $\gamma = 1$ kesirli sayıları için (6.16) otonom sistemi $\alpha + \beta + \gamma = 2.8$ mertebeden bir yapıya sahip olacaktır. Bunun yanında $\bar{\alpha} = 10$, $\beta = 1$, $c_1 = 0.5$, $c_2 = 0.05$, $f = 35.5$ parametreleri ve $\mathbf{x}_0 = (-1, 2, 0)$ başlangıç şartı ile birlikte dış zorlamanın dairesel frekansı olan ω parametresinin $\omega = 0.1598$ değeri için (6.16) sisteminin; konum bileşenlerinin zamana göre simülasyonu Şekil 6.37-6.38'de, x_1, x_2 faz düzlemindeki görüntüsü Şekil 6.39'da, bu parametre değerleri ile sistemin üç konumlu simülasyonu Şekil 6.40'da ve aynı parametre değerleri ile $\mathbf{x}_0 = (0.5, -0.1, 25)$ için sistemin üç konumlu simülasyonu ise Şekil 6.41'de yer almaktadır.



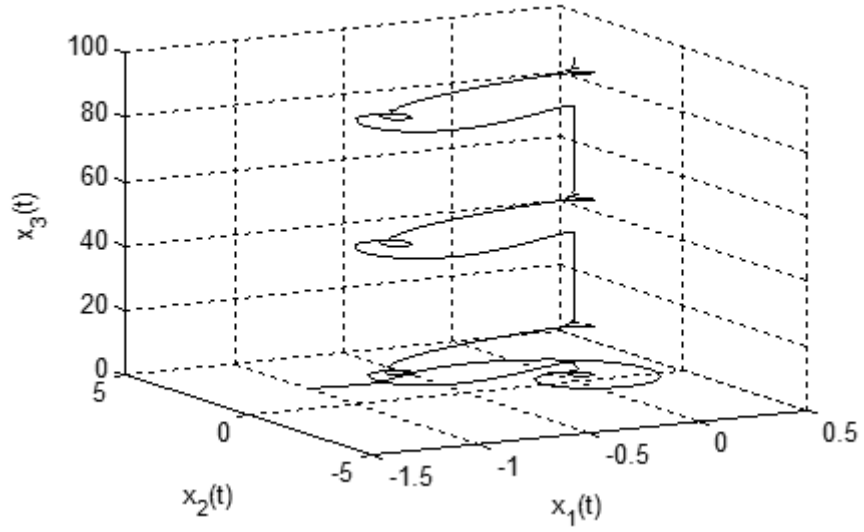
Şekil 6.37. $\alpha = \beta = 0.9$, $\gamma = 1$ için sistemin x_1 bileşeninin konum-zaman grafiği



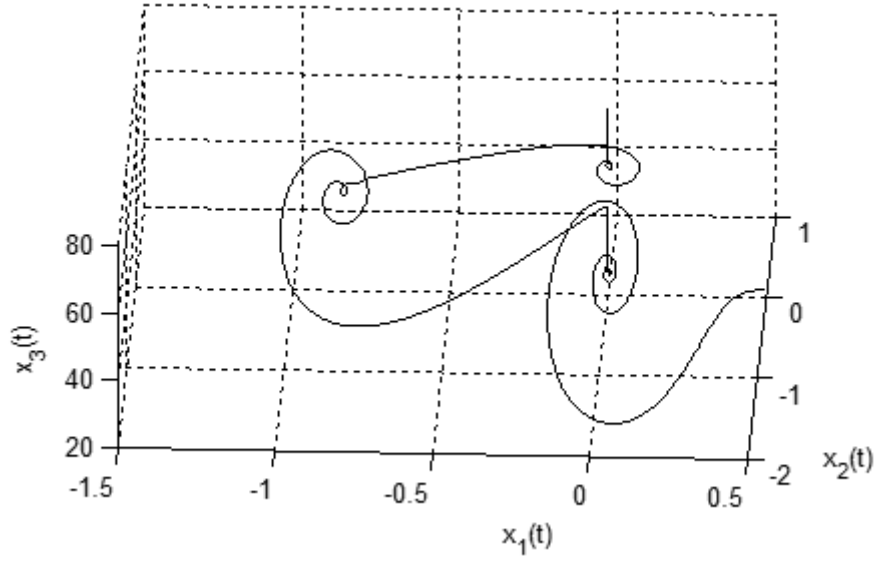
Şekil 6.38. $\alpha = \beta = 0.9$, $\gamma = 1$ için sistemin x_2 bileşeninin konum-zaman grafiği



Şekil 6.39. $\alpha = \beta = 0.9$, $\gamma = 1$ için sistemin x_1, x_2 faz düzlemindeki simülasyonu



Şekil 6.40. $\alpha = \beta = 0.9$, $\gamma = 1$ için sistemin üç konumlu simülasyonu



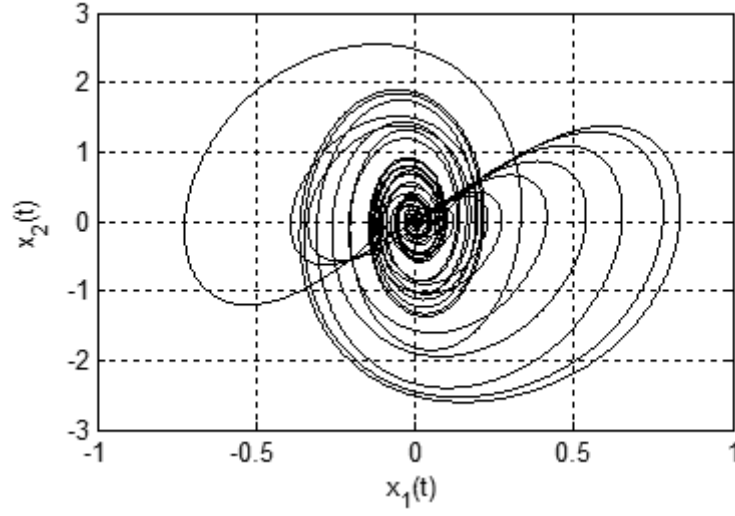
Şekil 6.41. $\alpha = \beta = 0.9$, $\gamma = 1$ için sistemin $\mathbf{x}_0 = (0.5, -0.1, 25)$ başlangıç değerlerine sahip üç konumlu simülasyonu

6.6.2.3. Durum 3

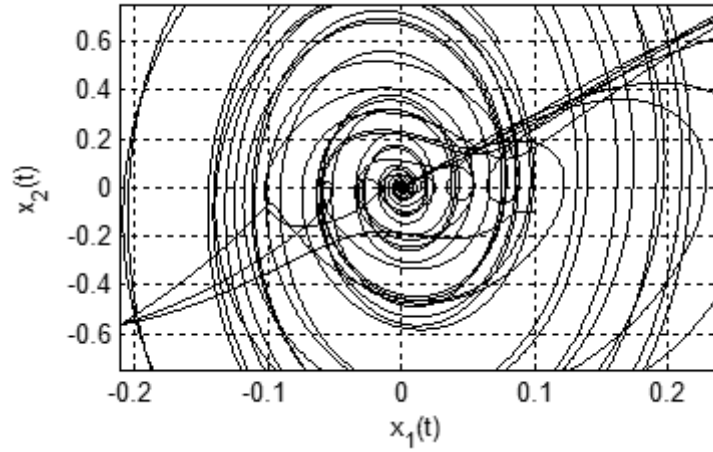
Eğer α, β ve γ aynı değere sahip kesirli sayılar iseler, bu halde (6.16) otonom sistemi $\alpha + \beta + \gamma$ mertebeden bir yapıya sahip olacaktır. Bu şartı sağlayan sonsuz değer olduğundan burada sadece birkaç farklı değer alınması yeterli olacaktır.

6.6.2.3.1. Durum 3.1

Bu halde $\alpha = \beta = \gamma = 0.95$ kesirli sayıları için, (6.16) otonom sistemi $\alpha + \beta + \gamma = 2.85$ mertebeden bir yapıya sahip olacaktır. Diğer yandan $\bar{\alpha} = 10$, $\beta = 1$, $c_1 = 0.5$, $c_2 = 0.05$, $f = 35.5$, $\omega = 1.598$ parametreleri ve $\mathbf{x}_0 = (0.1, -0.1, 0.1)$ başlangıç şartı ile birlikte göz önüne alınan (6.16) sisteminin x_1, x_2 faz düzlemindeki görüntüsü Şekil 6.42-6.43'de yer almaktadır.



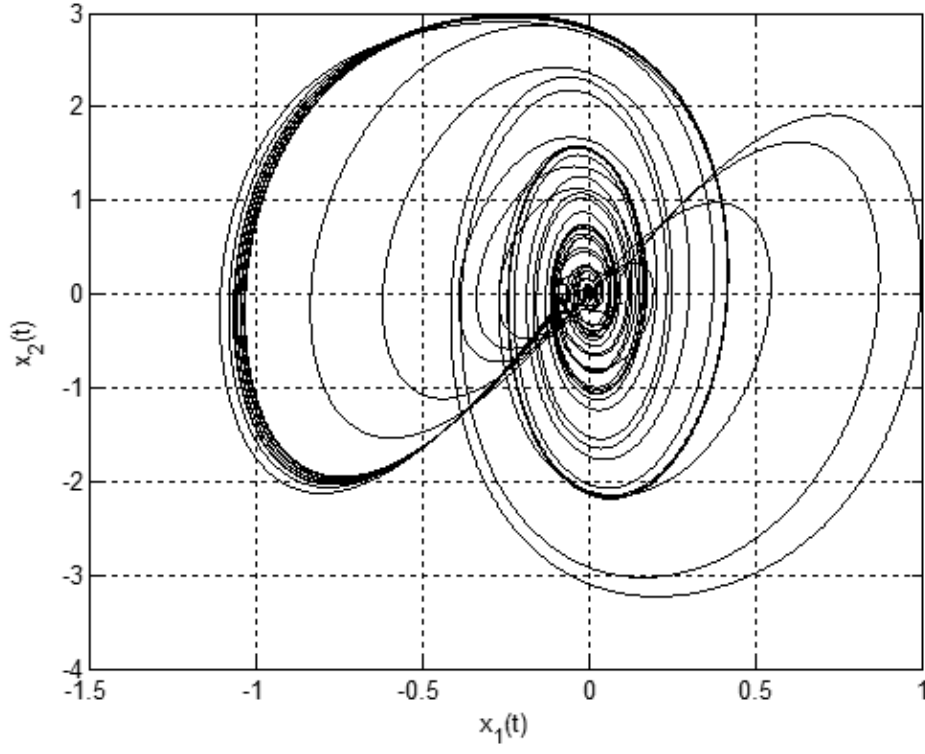
Şekil 6.42. $\alpha = \beta = \gamma = 0.95$ için sistemin x_1, x_2 faz düzlemindeki simülasyonu



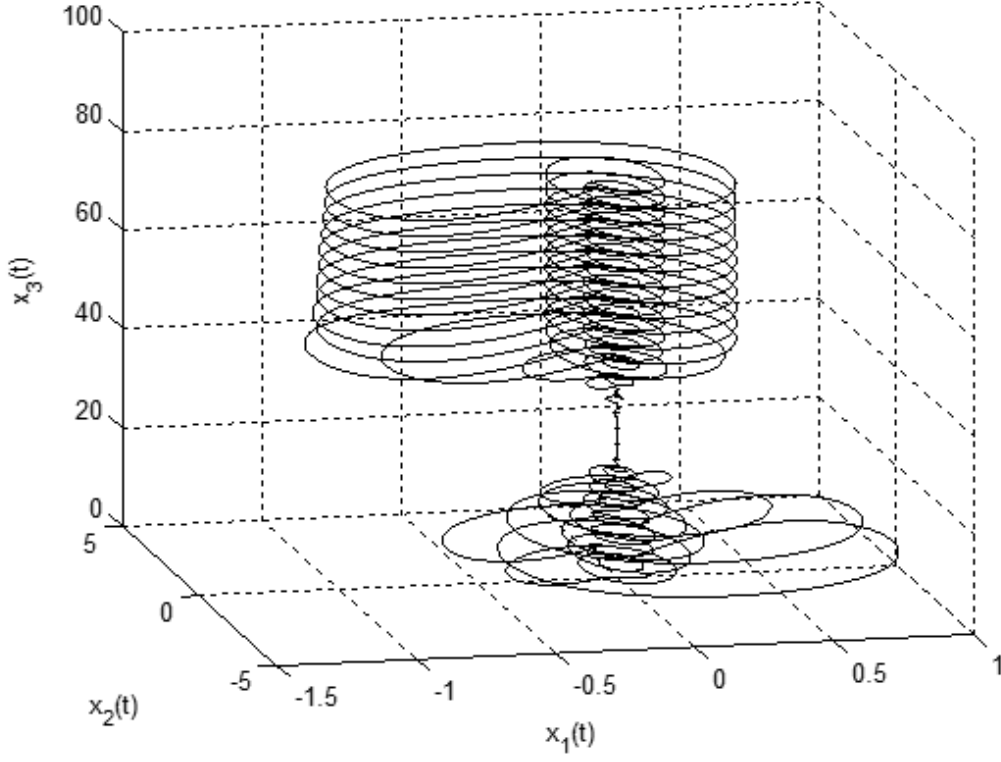
Şekil 6.43. $\alpha = \beta = \gamma = 0.95$ için sistemin x_1, x_2 faz düzlemindeki yakın görüntüsü

6.6.2.3.2. Durum 3.2

Bu durumda $\alpha = \beta = \gamma = 0.95$ kesirli sayıları için, (6.16) otonom sistemi $\alpha + \beta + \gamma = 2.85$ mertebeden bir yapıya sahip olacaktır. Ayrıca burada $\bar{\alpha} = 10, \beta = 1, c_1 = 0.5, c_2 = 0.05, \omega = 2$ parametreleri, $\mathbf{x}_0 = (0.1, -0.1, 0.1)$ başlangıç koşulu ve $38.0 \leq f \leq 39.8$ şartını sağlayan f parametresi için benzer faz düzlemleri elde edilmektedir. Bunlardan temsili olarak bir tanesi $f = 39.5$ değeri için Şekil 6.44'de görülebilir. Aynı zamanda hesaplanan üç konumlu simülasyon sonucu da Şekil 6.45'de yer almaktadır. Buradaki simülasyon $T = 100$ alınarak yapılmış, böylece $N = 10,000$ noktada konum fonksiyonu değerleri de buna göre hesaplanmıştır.



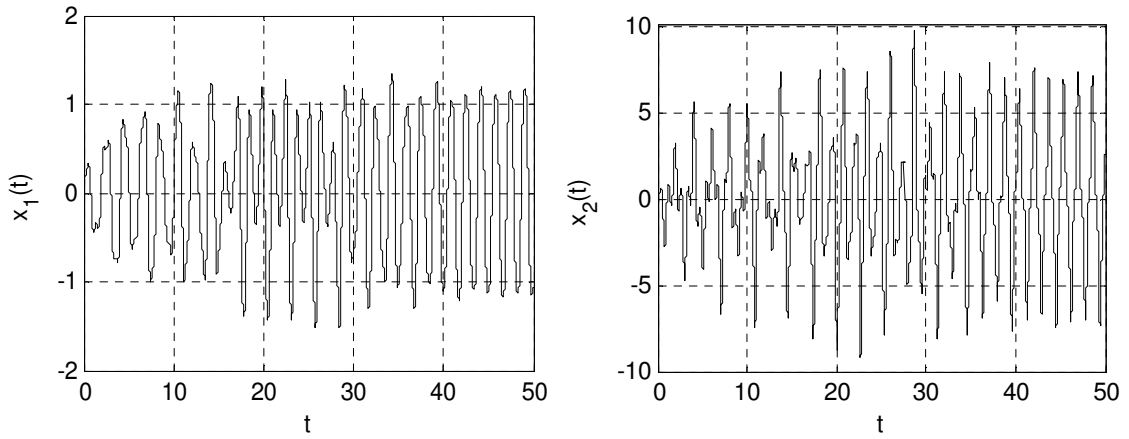
Şekil 6.44. $\alpha = \beta = \gamma = 0.95$ için sistemin x_1, x_2 faz düzleminin simülasyonu



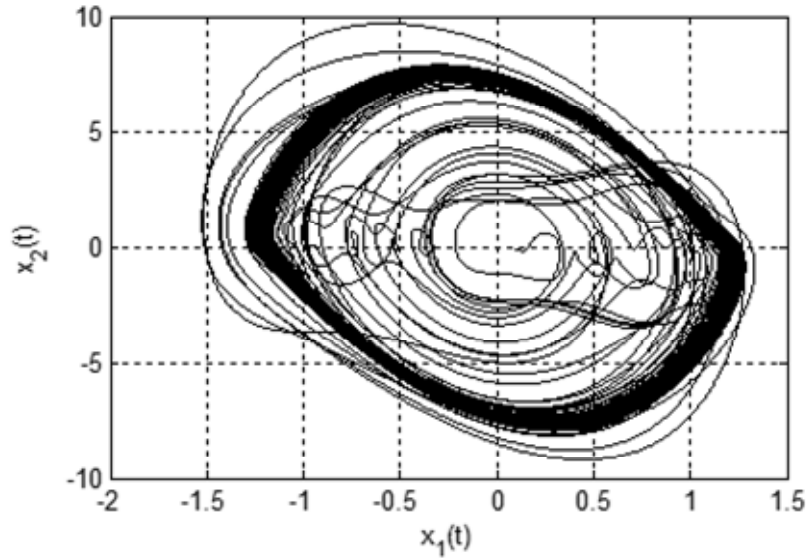
Şekil 6.45. $\alpha = \beta = \gamma = 0.95$ değerleri için sistemin üç konumlu simülasyonu

6.6.2.3.3. Durum 3.3

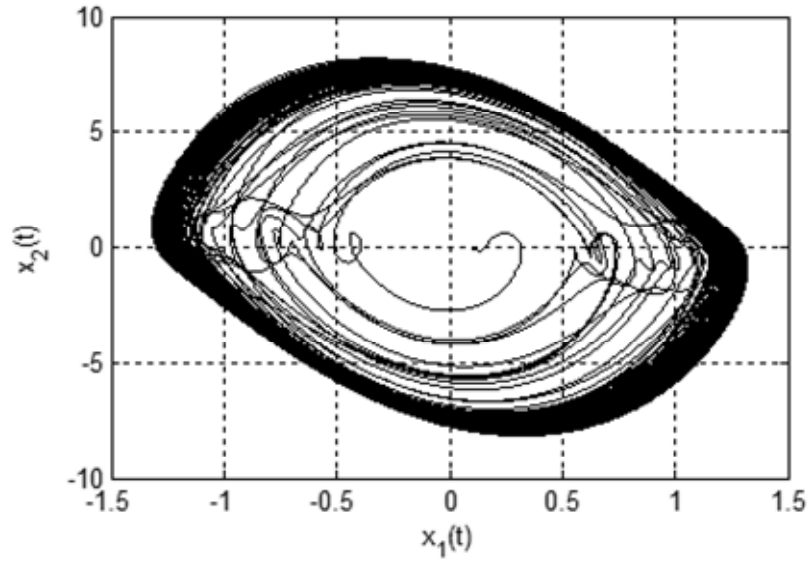
Burada $\alpha = \beta = \gamma = 1.1$ kesirli sayıları için, (6.16) otonom sistemi 3.3 mertebeden bir yapıya sahip olacaktır. Diğer yandan $\bar{\alpha} = 10$, $\beta = 1$, $c_1 = 0.5$, $c_2 = 0.05$, $f = 45.5$ parametreleri ve $\mathbf{x}_0 = (0.1, -0.1, 0.1)$ başlangıç değerleri ile birlikte $\omega = 5$ için (6.16) sisteminin; x_1 ve x_2 bileşenlerinin konum zaman grafikleri Şekil 6.46'da, x_1, x_2 faz düzlemindeki yapısı da Şekil 6.47'de görülmektedir. Bunun yanında $\bar{\alpha} = 10$, $\beta = 1$, $c_1 = 0.5$, $c_2 = 0.05$, $f = 45.5$ parametreleri ve $\mathbf{x}_0 = (0.1, -0.1, 0.1)$ başlangıç değerleri ile birlikte $\omega = 5.1$ için (6.16) sisteminin faz düzlemi Şekil 6.48'de, üç konumlu simülasyonu ise Şekil 6.49'da yer almaktadır.



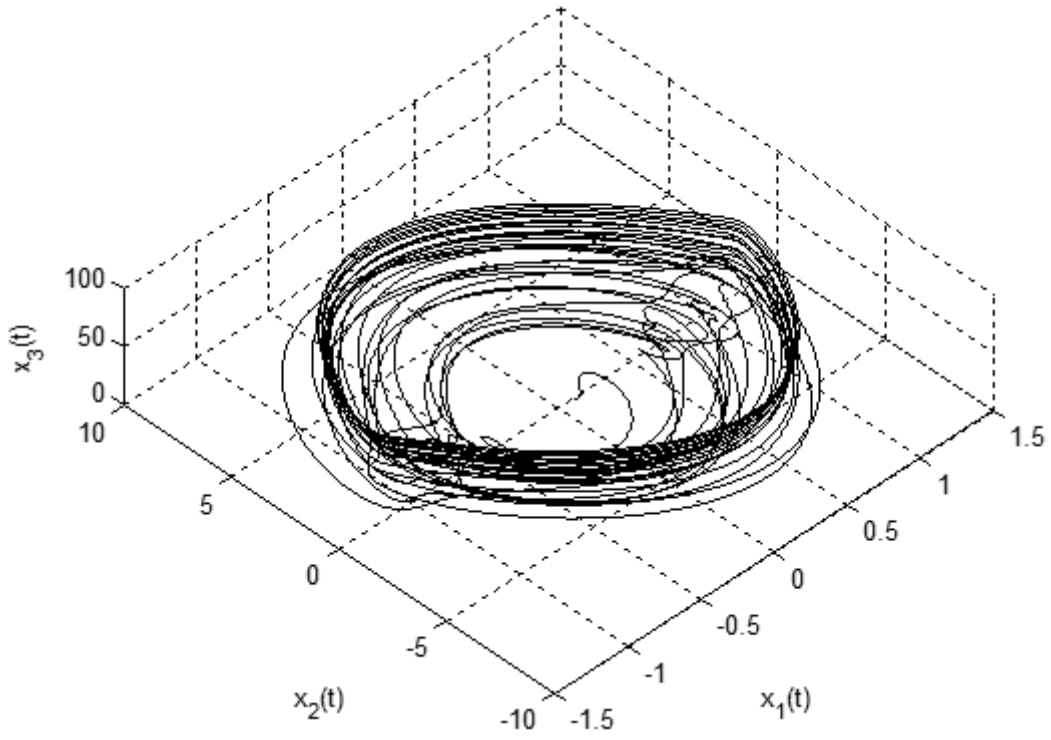
Şekil 6.46. $\alpha = \beta = \gamma = 1.1$ ve $\omega = 5$ için sistemin x_1 ile x_2 bileşeninin konum-zaman grafiği



Şekil 6.47. $\alpha = \beta = \gamma = 1.1$ ve $\omega = 5$ için x_1, x_2 faz düzlemindeki görüntüsü



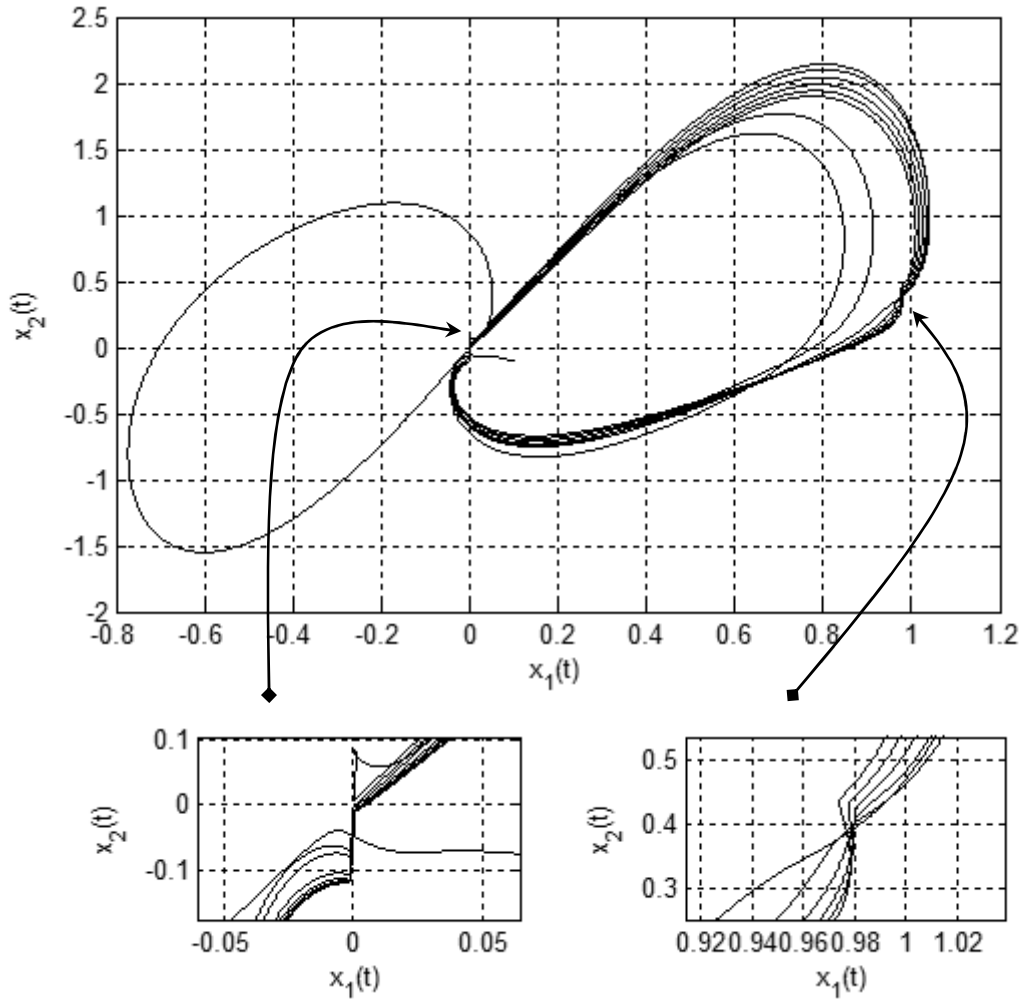
Şekil 6.48. $\alpha = \beta = \gamma = 1.1$ ve $\omega = 5.1$ için x_1, x_2 faz düzleminin görüntüsü



Şekil 6.49. $\alpha = \beta = \gamma = 1.1$ ve $\omega = 5.1$ için sistemin üç konumlu simülasyonu

6.6.2.3.4. Durum 3.4

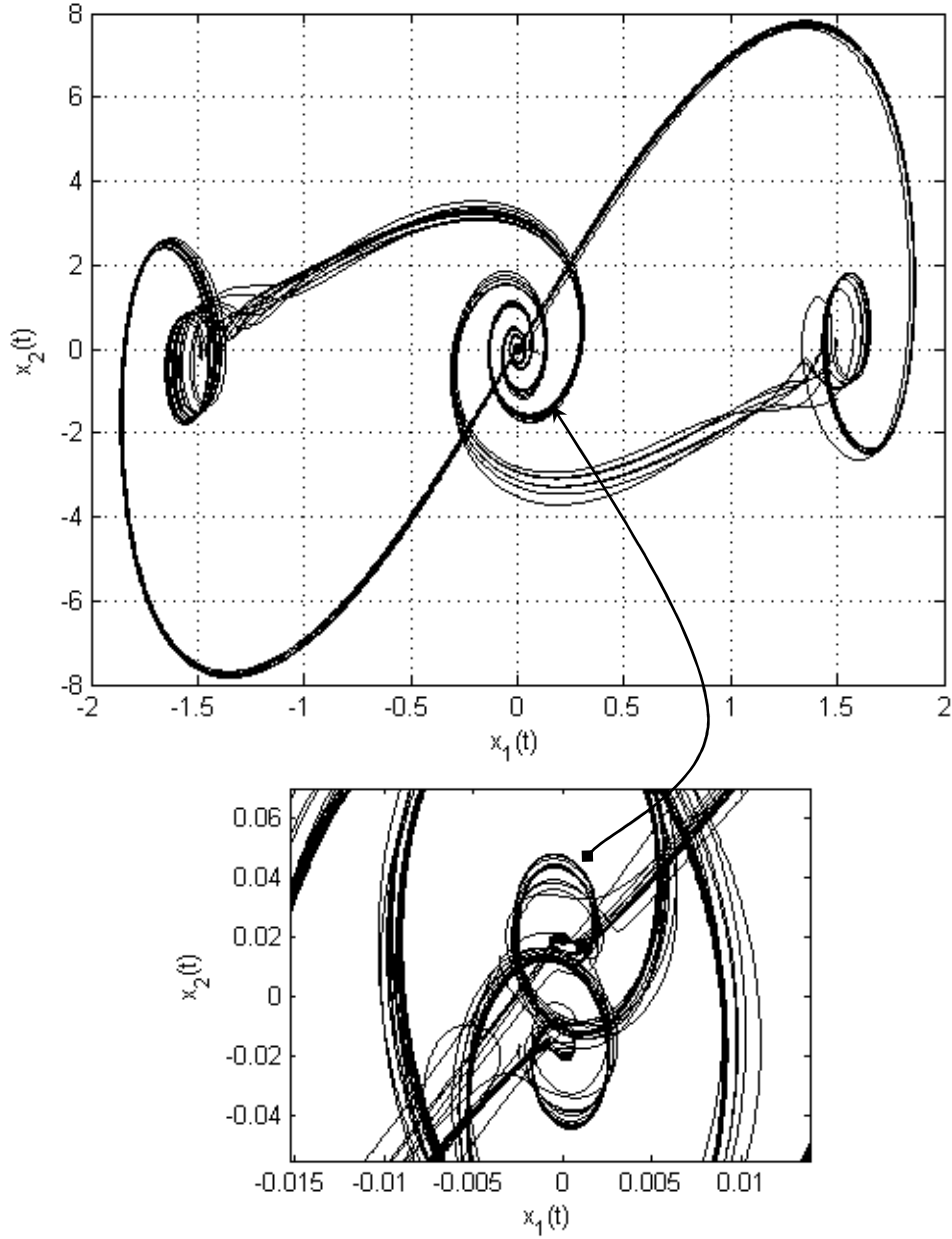
Bu halde $\alpha = \beta = \gamma = 0.7$ kesirli sayıları için, (6.16) otonom sistemi 2.1 mertebeden bir yapıya sahip olacaktır. Ayrıca $\bar{\alpha} = 10$, $\beta = 1$, $c_1 = 0.5$, $c_2 = 0.05$, $f = 40$ parametreleri ve $\mathbf{x}_0 = (0.1, -0.1, 0.1)$ başlangıç koşulu ile birlikte $\omega = 1.95$ için (6.16) sisteminin faz düzlemi Şekil 6.50'da yer almaktadır. Diğer yandan $\bar{\alpha} = 10$, $\beta = 1$, $c_1 = 0.5$, $c_2 = 0.05$, $f = 45.5$ parametreleri ve $\mathbf{x}_0 = (0.1, -0.1, 0.1)$ başlangıç değerleri ile birlikte $\omega = 5.1$ için de benzer faz düzlemi yapısı ortaya çıkmaktadır.



Şekil 6.50. $\alpha = \beta = \gamma = 0.7$ için x_1, x_2 faz düzlemindeki görüntüsü

6.6.2.3.5. Durum 3.5

Bu durumda $\alpha = \beta = \gamma = 0.9$ kesirli sayıları için, (6.16) otonom sistemi 2.1 mertebeden bir yapıya sahip olacaktır. Bunun yanında $\bar{\alpha} = 10$, $\beta = 1$, $c_1 = 0.5$, $c_2 = 0.05$, $\omega = 2$, $f = 104.1$ parametreleri ve $\mathbf{x}_0 = (0.1, -0.1, 0.1)$ başlangıç şartı ile birlikte (6.16) sisteminin faz düzlemi Şekil 6.51'de verilmiştir. Şekil 6.51'deki faz düzleminin bu görüntüsünün benzer yapısı f 'in $f : 70(5)105$ değerleri için de gözlemlenmektedir.



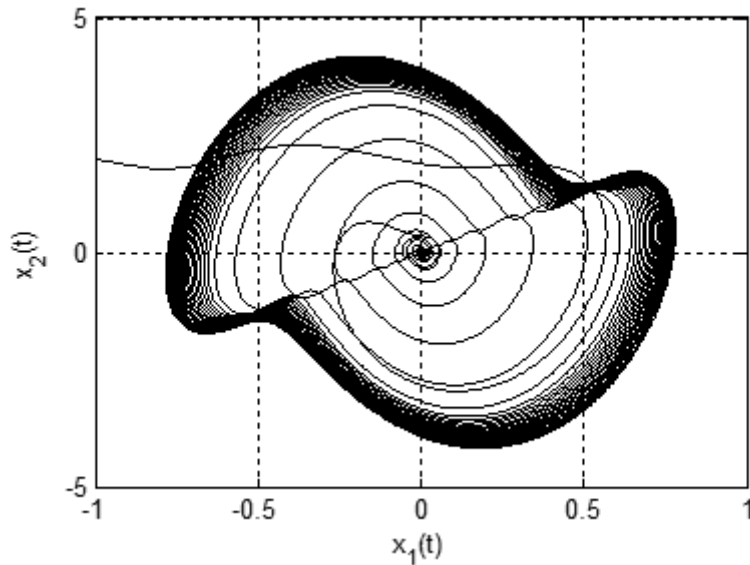
Şekil 6.51. $\alpha = \beta = \gamma = 0.9$ için x_1, x_2 faz düzlemindeki yakın görüntüsü

6.6.2.4. Durum 4

Burada sadece sistemin üçüncü denkleminin kesirli mertebesi olan γ 'nın değişmesi fakat $\bar{\alpha}, \beta$ mertebelerinin ise aynı kesirli sayılara sahip olma durumu göz önüne alınacaktır. Böylece α, β aynı değere sahip kesirli sayılar iken, γ 'nın değiştirilmesiyle elde edilen modifiye edilmiş (6.16) sisteminin davranışları incelenecektir.

6.6.2.4.1. Durum 4.1

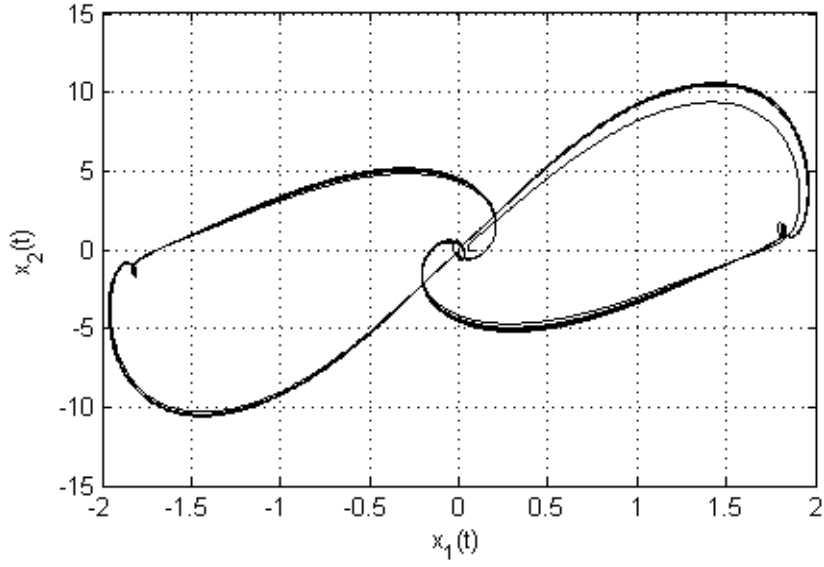
Burada $\alpha = \beta = 0.9$ ve $\gamma = 1.1$ kesirli sayıları için, (6.4) otonom sistemi $\alpha + \beta + \gamma = 2.9$ mertebeden bir yapıya sahip olacaktır. Bunun yanında $\bar{\alpha} = 10, \beta = 1, c_1 = 0.5, c_2 = 0.05, f = 35.5$ parametreleri ve $\mathbf{x}_0 = (-1, 2, 0)$ başlangıç şartları ile birlikte dış zorlamanın dairesel frekansı olan ω parametresinin $\omega = 6.475$ değeri için (6.16) sisteminin x_1, x_2 faz düzlemindeki görüntüsü Şekil 6.52'de yer almaktadır. Ayrıca benzer faz düzlemi yapısı $\omega = 6.4 \sim 6.5$ arasında olmak üzere de görülebilmektedir.



Şekil 6.52. $\alpha = \beta = 0.9$ ile $\gamma = 1.1$ için x_1, x_2 faz düzlemindeki görüntüsü

6.6.2.4.2. Durum 4.2

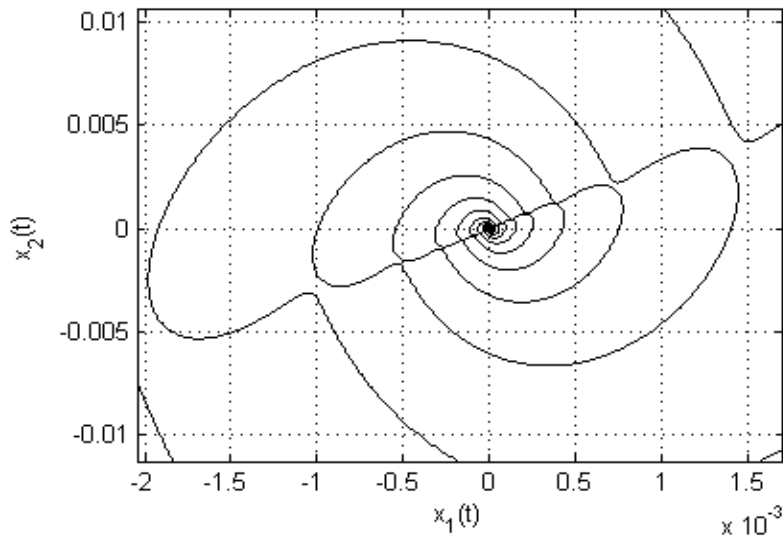
Bu durumda $\alpha = \beta = 0.8$ ile $\gamma = 1.1$ kesirli sayıları için, (6.16) otonom sistemi $\alpha + \beta + \gamma = 2.7$ mertebeden bir yapıya sahip olacaktır. $\bar{\alpha} = 10, \beta = 1, c_1 = 0.5, c_2 = 0.05, \omega = 2, f = 175$ parametreleri ve $\mathbf{x}_0 = (0.1, -0.1, 0.1)$ başlangıç değerleri için (6.16) sisteminin x_1, x_2 faz düzlemindeki görüntüsü Şekil 6.53'de verilmektedir.



Şekil 6.53. $\alpha = \beta = 0.8$, $\gamma = 1.1$, $\omega = 8.78$, $f = 36$ ve $\mathbf{x}_0 = (-0.08, 0.5, 1)$ için x_1, x_2 faz düzleminin görüntüsü

6.6.2.4.3. Durum 4.3

Bu halde $\alpha = \beta = 0.8$ ile $\gamma = 1.1$ kesirli sayıları için, (6.16) otonom sistemi $\alpha + \beta + \gamma = 2.7$ mertebeden bir yapıya sahip olacaktır. Ayrıca $\bar{\alpha} = 10$, $\beta = 1$, $c_1 = 0.5$, $c_2 = 0.05$, $f = 36$ parametreleri ve $\mathbf{x}_0 = (-0.08, 0.5, 1)$ başlangıç değerleri ile birlikte dış zorlamanın dairesel frekansı olan ω parametresinin $\omega = 8.78$ değeri için (6.16) sisteminin x_1, x_2 faz düzlemindeki görüntüsü Şekil 6.54'de yer almaktadır.



Şekil 6.54. $\alpha = \beta = 0.8$, $\gamma = 1.1$, $\omega = 8.78$, $f = 36$ ve $\mathbf{x}_0 = (-0.08, 0.5, 1)$ için x_1, x_2 düzlemi

6.7 Sonuç

Poincare-Bendixon teoreminden hatırlanacağı gibi pozitif tam sayı mertebeden bir sistemde kaosu ortaya çıkması için sistemin en az üçüncü mertebeden olması gerekmektedir. Ancak bu yapı, kesirli mertebeden bir yapıya sahip sistemler için aynı şekilde değildir. Genel olarak kaotik bir yapıya sahip üçüncü mertebeden otonom bir lineer olmayan sistem, türevleri kesirli olarak modifiye edilmiş kesirli diferansiyel denklem sistem yapısında, sistemin mertebesi daha üçüncü mertebeye ulaşmadan kaotik bir durum göstermektedir. Kısım 6.6.2'de (6.16)'daki denklemlerin mertebelerinin toplamında elde edilen sistem mertebesinin 2.1, 2.2, 2.4, 2.7, 2.8, 2.85, 2.9, 2.94, 3.0, 3.2, 3.3 mertebeden yapıları göz önüne alınmıştır. Anlaşılacağı üzere bu durumlarda üçüncü mertebeden bir sistem yapısının, mertebenin reel sayısal değerinin sağından ve solundan yaklaşılması durumunda ortaya çıkan fiziksel durumları incelenmiştir. Kesim 6.6'da ele alınan farklı parametre değerleri için oluşturulan simülasyon sonuçlarının şekilleri de yukarıdaki ifadeyi doğrular niteliktedir. (5.16) ile gösterilen tam sayı mertebeden olan bir sistem, belirli kabuller altında (6.16) sistemi haline getirilmesinden sonra, üç kesirli denkleme sahip (6.16) sisteminin kaotik yapısını veren parametre değerlerinin, iki kesirli denkleme sahip bir sistem için literatürde verilen parametre değerlerinden farklı olduğu, yapılan örneklerden açıkça görülmektedir. Sonuç olarak, sistemin kaotik yapısını etkileyen faktörlerden bir tanesinin de böylece göz önüne alınan sistemin sahip olduğu kesirli mertebeler olduğu anlaşılmaktadır. (5.16) formunda ifade edilen tam sayı mertebeden iki boyutlu otonom olmayan sistemi ile kesirli mertebe değerlerinin aynı ve 1 olması durumunda kesirli mertebeden modifiye edilmiş üç kesirli denkleme sahip otonom (6.16) sistemi, uygulanan çözüm algoritmalarının sahip olacağı hata miktarı gözletilmeksizin benzer parametre değerleri için kaotik bir yapı arz etmektedirler. Üstelik Kesim 6.6'da verilen Durum 1 ile [17]'de verilen grafikler birbirleri ile açıkça görüldüğü gibi örtüşmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] Aghababa M.P, Robust stabilization and synchronization of a class of fractional-order chaotic systems via a novel fractional sliding mode controller, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 17, pp. 2670-2681, 2012.
- [2] Aghababa M.P., Aghababa H.P., Finite-time stabilization of uncertain non-autonomous chaotic gyroscopes with nonlinear inputs, *Appl. Math. Mech.-Engl. Ed.*, 33(2), pp. 155-164, 2012.
- [3] Ahmad W.M., El-Khazali R., Fractional-order dynamical models of love, *Chaos, Solitons and Fractals*, 33(4), pp. 1367-1375, 2007.
- [4] Arena P., Caponetto R., Fortuna L., Porto D., Chaos in a fractional order Duffing system, *Proceedings ECCTD, Budapest*, pp. 1259-1262, September 1997.
- [5] Arikoglu A., Özkol I., Solution of fractional differential equations by using differential transform method, *Chaos, Solitons and Fractals*, 34(5), pp. 1473-1481, 2007.
- [6] Bagley R.L., Torvik P.J., On the appearance of fractional derivative in the behavior of real materials, *J. Appl. Mech.*, 51, pp. 294-298, 1994.
- [7] Baleanu D., Trujillo J.J., On exact solutions of a class of fractional Euler-Lagrange equations, *Nonlinear Dyn.*, 52, pp. 331-335, 2008.
- [8] Biazar J., Solution of systems of integral-differential equations by Adomian decomposition method, *Appl. Math. Comput.*, 168(2), pp. 1232-1238, 2005.
- [9] Bildik N., Konuralp A., The use of variational iteration method, differential transform method and Adomian decomposition method for solving different types of nonlinear partial differential equations, *Int. J. Nonlin. Sci. Num.*, 7, pp. 65–70, 2006.
- [10] Bildik N., Konuralp A., Two dimensional differential transform method, Adomian's Decomposition Method and variational iteration method for partial differential equations", *International Journal of Computer Mathematics*, 83(12), pp. 973-987, 2006.

- [11] Bildik N., Konuralp A., Variational iteration method for solving the system of fractional integro-differential equations, BERE 09, İzmir Ekonomi Üniversitesi, İzmir, 13-17 Haziran 2009. (Özet ve tam metinlerin son gönderilme tarihi 15 Mart 2009'dur.)
- [12] Caputo Michele, Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent, *Anna di Geofis.*, 19, pp. 3-393, 1966.
- [13] Caputo Michele, Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent Part II, *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 13, pp. 529-539, 1967.
- [14] Caputo Michele, *Elasticita e Dissipazione*, Zanichelli, Bologna, 1969.
- [15] Caputo Michele, Cametti Cesare, Diffusion with memory in two cases of biological interest, *Journal of Theoretical Biology*, 254(3), pp. 697-703, 2008.
- [16] Chen, J-H., Chen W-C., Chaotic dynamics of the fractionally damped van der Pol equation, *Chaos, Solitons and Fractals*, 35, pp. 188-198, 2008.
- [17] Chen H-K., Chaos and chaos synchronization of a symmetric gyro with linear-plus-cubic damping, *Journal of Sound and Vibration*, 255(4), pp. 719-740, 2002.
- [18] Das S., Analytical approximate solution of diffusion equation of fractional order by variational iteration method, 57(3), pp. 483-487, 2009.
- [19] Deng W., Short memory principle and a predictor-corrector approach for fractional differential equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 206, pp. 174-188, 2007.
- [20] Diethelm K., *Fractional differential equations, theory and numerical treatment*, TU Braunschweig, Braunschweig, 2003.
- [21] Diethelm K., Ford Neville J., Freed Alan D., A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations, *Nonlinear Dynamics*, 29, pp. 3-22, 2002.
- [22] Dorcak Lubomir, *Numerical models for the simulation of the fractional-order control systems*, The Academy of Sciences, Institute of Experimental Physics, Kosice, Slovak Republic, UEF-04-94, 1994.

- [23] Draganescu G.E., Application of a variational iteration method to linear and nonlinear viscoelastic models with fractional derivatives, *J. Math. Phys.*, 47(8), No.082902, 2006.
- [24] El-Wakil S.A., Abdou M.A., New applications of variational iteration method using Adomian polynomials, *Nonlinear Dyn.*, 52, pp. 41-49, 2008.
- [25] Ford N., Simpson A., The numerical solution of fractional differential equations: speed versus accuracy, Manchester Centre for Computational Mathematics, *Num. Anal. Report* 385, 2001.
- [26] Ge Zheng-Ming, Hsu Mao-Yuan, Chaos in a generalized van der Pol system and its fractional order system, *Chaos, Solitons and Fractals*, 33, pp. 1711-1745, 2007.
- [27] Ge Zheng-Ming, Hsu Mao-Yuan, Chaos excited chaos synchronizations of integral and fractional order generalized van der Pol systems, *Chaos, Solitons and Fractals*, 36, pp. 592-604, 2008.
- [28] Hartley T.T., Lorenzo C.F., Qammer H.K., Chaos in a fractional order Chua's system, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 42(8), pp. 485,1995.
- [29] He J.H., Approximate analytical solution for seepage flow with fractional derivatives in porous media, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 167, pp. 57-68, 1998.
- [30] He J.H., Approximate solution of non-linear differential equations with convolution product nonlinearities, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 167, pp. 69-73, 1998.
- [31] He J.H., Variational iteration method-a kind of non-linear analytical technique: some examples, *Int. J. Nonlinear Mech.*, 34, pp. 699-708, 1999.
- [32] He J.H., Some applications of nonlinear fractional differential equations and their approximations, *Bull. Sci. Technol.*, 15(2), pp. 86–90, 1999.
- [33] He J.H., Some asymptotic methods for strongly nonlinear equations, *Internat. J. Modern Phys. B*, 20(10), pp. 1141-1199, 2006.
- [34] He J.H., Variational iteration method-a kind of non-linear analytical technique: some examples, *Internat. J. Nonlinear Mech.*, 34(4), pp. 699-708, 1999.

- [35] He J.H., Wu X.H., Construction of solitary solution and compacton-like solution by variational iteration method, *Chaos, Solitons and Fractals*, 29(1), pp. 108-113, 2006.
- [36] Huang F., Liu F., The time fractional diffusion and advection-dispersion equation, *ANZIAM J.*, 46, pp. 317-330, 2005.
- [37] İnç M., The approximate and exact solutions of the space- and time-fractional Burgers equations with initial conditions by variational iteration method, *J. Math. Anal. Appl.*, 345(1), pp. 476-484, 2008.
- [38] Ivancevic V.G., Ivancevic T.T., High-dimensional chaotic and attractor systems: A comprehensive introduction, Series: Intelligent systems, Control and Automation: Science and Engineering, Vol. 32, XVI, 2007.
- [39] Kilbas A.A., Bonilla B., Trujillo J.J., Fractional integrals and derivatives, and differential equations of fractional order in weighted spaces of continuous functions (Russian), *Dokl. Nats .Akad. Nauk Belarusi*, 44(6), pp. 18-22, 2000.
- [40] Kilbas A.A., Saigo M., Fractional integrals and derivatives of functions of Mittag-Leffler type, *Dokl. Akad. Nauk Belarusi*, 39(4), pp. 22-26, 1995.
- [41] Kilbas A.A., Saigo M., Solution in closed form of a class of linear differential equations of fractional order, *Differntiel'nye.Uravnenija*, 33(2), pp. 195-204, 1997.
- [42] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J., Theory and applications of fractional differential equations, North-Holland Mathematics Studies 204, Elsevier, Amsterdam, 2006.
- [43] Kiryakova V.S., Generalized fractional calculus and applications, Vol. 301 of Pitman Res. Notes in Math., Wiley and Sons, New York, 1994.
- [44] Koeller R.C., Application of fractional calculus to the theory of viscoelasticity, *J. Appl. Mech.*, 51, pp. 299-307, 1984.
- [45] Lan Xu, Variational iteration method for solving integral equations, *Computers and Mathematics with Applications*, 54(7-8), pp. 1071-1078, 2007.

- [46] Li Yan, Chen YangQuan, Podlubny Igor, Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems: Lyapunov direct method and generalized Mittag-Leffler stability, *Computers and Mathematics with Applications*, 59, pp. 1810-1821, 2010.
- [47] Machado Tenreiro J.A., Discrete-time fractional-order controllers, *Frac. Calc. Appl. Anal.*, 4, pp. 47-66, 2001.
- [48] Mainardi F., Fractional calculus, some basic problems in continuum and statistical mechanics, *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*, Springer Verlag, Wien, pp. 291-348, 1997.
- [49] Mainardi F., Luchko Yu., Pagnini G., The fundamental solution of the space-time fractional diffusion equation, *Frac. Calc. Appl. Anal.*, 4(2), pp. 153, 2001.
- [50] Magin R.L., *Fractional calculus in bioengineering*, Begell House, Connecticut, 2006.
- [51] Marks R.J., Hall M.W., Differintegral interpolation from a band-limited signal's samples, *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Processing*, Vol. ASSP-29, pp. 872, 1981.
- [52] McBride, A.C., *Fractional calculus and integral transforms of generalized functions*, Vol.31 of *Research Notes in Math.*, Pitman, London, 1979.
- [53] Miller K.S., Ross B., *An Introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*, John Wiley and Sons Inc., New York, 1993.
- [54] Momani S., Odibat Z., Numerical approach to differential equations of fractional order, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 207(1), pp. 96-110, 2007.
- [55] Momani S., Qaralleh R., An efficient method for solving systems of fractional integro-differential equations, *Computers and Mathematics with Applications*, 52, pp. 459-470, 2006.
- [56] Odibat Z., Momani S., Application of variational iteration method to nonlinear differential equations of fractional order, *Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 7(1), pp. 15-27, 2006.
- [57] Oldham K.B., Spanier J., *The fractional calculus*, Academic Press, New York (1974).

- [58] Öziş T., Yıldırım A., A study of nonlinear oscillators with $u^{1/3}$ force by He's variational iteration method, Journal of Sound and Vibration, 306, pp. 372, 2007.
- [59] Petras Ivo, Fractional-order nonlinear systems: Modeling, analysis and simulation, Higher Education Press, Springer Verlag, 2011.
- [60] Pilipchuk V.N., Tan C.A., Non-linear system identification based on Lie series solutions, Mechanical Systems and Signal Processing, 19, pp. 71-86, 2005.
- [61] Podlubny I., Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego-Boston-New York-London-Tokyo-Toronto, 1999.
- [62] Ross B., Fractional calculus and its applications, Lecture notes in mathematics. Springer-Verlag, 1974.
- [63] Saberi-Nadjafi J., Tamamgar M., The variational iteration method: A highly promising method for solving the system of integro-differential equations, Comput Math Appl, 56(2), pp. 346-351, 2008.
- [64] Samko, S.G., Kilbas, A.A., Marichev, O.I., Fractional integrals and derivatives: Theory and applications, Gordon and Breach Science Publishers, Switzerland, 1993.
- [65] Saigo, M., Kilbas, A.A., On Mittag-Leffler type function and applications, Integral Transform. Spec. Fund., 7(1-2), 97-112, 1998.
- [66] Skaar S.B., Michel A.N., Miller R.K., Stability of viscoelastic control systems, IEEE Trans. Automat. Control AC, 33(4), pp. 348-357, 1988.
- [67] Stanislavsky, A.A., Fractional oscillator, Phys. Rev. E., 70, No. 051103, 2004.
- [68] Steeb Willi-Hans, Lie Series Technique, Ordinary Differential Equations and Dynamical Integration, Z. Naturforsch., 59a, pp. 349-352, 2004.
- [69] Steeb Willi-Hans, Yorick Hardy, Ruedi Stoop, The Nonlinear Workbook, World Scientific Publishing, Singapore, 2005.

- [70] Sun H.H., Abdelwahab A.A., Onaral B., Linear approximation of transfer function with a pole of fractional order, *IEEE Trans. Automat. Control AC*, 29(5), pp. 441-444, 1984.
- [71] Sweilam N. H., Fourth order integro-differential equations using variational iteration method, *Computers & Mathematics with Applications*, 54(7-8), pp.1086-1091, 2007.
- [72] Sweilam N.H., Khader M.M., Al-Bar R.F., Numerical studies for a multi-order fractional differential equation, *Phys. Lett. A*, 371, pp. 26, 2007.
- [73] Trujillo, J.J., On a Riemann–Liouville generalized Taylor’s formula, *J. Math. Anal. Appl.*, 231, pp. 255-265, 1999.
- [74] Vinagre B.M., Chen Y.Q., Petras Ivo, Two direct Tustin discretization methods for fractional-order differentiator/integrator, *Journal of the Franklin Institute*, 340, pp. 349-362, 2003.
- [75] Wang Cheng-Chi, Liao Te-Tan, et. al., Chaotic Analysis of gyroscope control system via differential transformation method, *Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Networking, Sensing and Control*, Okayama, Japan, pp. 528-532, March 26-29, 2009.
- [76] Wang S.Q., He J.H., Variational iteration method for solving integro-differential equations, *Physics Letters A*, 367(3), pp. 188–191, 2007.
- [77] Wang Wen-Hua, An effective method for solving fractional integro-differential equations, *Acta Universitatis Apulensis*, 20, pp. 229-235, 2009. (2009 Son sayısı)
- [78] Yau Her-Terng, Nonlinear rule-based controller for chaos synchronization of two gyros with linear-plus-cubic damping, *Chaos, Solitons & Fractals*, 34(4), pp. 1357-1365, 2007.
- [79] Yusufoğlu Elçin, An efficient algorithm for solving integro-differential equations system, *Applied Mathematics and Computation* 192(1), pp. 51–55, 2007.
- [80] Zaslavsky G.M., *Hamiltonian chaos and fractional dynamics*, Oxford University Press, Oxford, 2005.

ÖZGEÇMİŞ

ADI SOYADI : Ali KONURALP
ÜNVANI : Araştırma Görevlisi
DOĞUM TARİHİ : 04.07.1980
DOĞUM YERİ : Torbalı / İZMİR

Ortaokul öğrenimini Torbalı Lisesi Ortaokul Kısımında 1993 yılında, Lise öğrenimine de yine aynı okulun 1994 senesinde Torbalı'da ilk defa açılan yabancı dil ağırlıklı lise kısmında başladı. İlk sene yabancı dil hazırlık okuduktan sonra, bu okuldan 1998 yılında mezun oldu. Aynı yıl girdiği ÖYS sınavı sonucunda Celal Bayar Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü'nde okumaya hak kazandı ve bu fakülteden 2002 yılında mezun oldu. Aynı yıl Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Uygulamalı Matematik Programında Yüksek Lisans eğitime başladı ve 2005 yılında Yüksek Lisans derecesi aldı. 2006 yılında altı aylık süreyle vatani görevini tamamladı. 2009 yılında yine Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Uygulamalı Matematik Programında Doktora öğrenimine başladı. 2004 yılından bu yana Celal Bayar Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.