

**SEZGİSEL BULANIK
KONUMSAL NESNELERİN MODELLENMESİ**

**MODELLING INTUITIONISTIC
FUZZY SPATIAL OBJECTS**

PINAR SATILMIŞ

**Hacettepe Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim – Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
Matematik Anabilim Dalı için Öngördüğü
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak hazırlanmıştır.**

2012

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,

Bu çalışma jürimiz tarafından **MATEMATİK ANABİLİM DALI 'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Başkan :
Prof. Dr. Haydar Eş

Üye (Danışman) :
Doç. Dr. Haşmet Gürçay

Üye :
Prof. Dr. Rıza Ertürk

Üye :
Doç. Dr. Ali Erdoğan

Üye :
Yrd. Doç. Dr. Ahmet İrkad

ONAY

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri uyarınca yukarıdaki jüri üyeleri tarafından 20/01/2012 tarihinde uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulunca/....../..... tarihinde kabul edilmiştir.

Prof.Dr. Adil DENİZLİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

SEZGİSEL BULANIK KONUMSAL NESNELERİN MODELLENMESİ

Pınar Satılmış

ÖZ

Coğrafi bilgi sistemlerinde genel olarak gevrek konumsal nesneler arasındaki ilişkiler incelenmektedir. Fakat birçok doğa olayı kesin sınırlara sahip değildir, yani bulanık özelliğe sahiptir. Bu yüzden konumsal nesneler hakkında daha gerçekçi sonuçlar elde edebilmek için bu tezde bulanık ve sezgisel bulanık konumsal nesneler incelenmiştir. Öncelikle bulanık kümeler her biri topolojik özellik olan alt kümelerine ayrılmış ve daha sonra bu kümeler göz önünde bulundurularak iki bulanık küme arasındaki muhtemel bağıntılar belirlenmiştir. Bu bağıntılardan yola çıkarak iki bulanık küme arasındaki muhtemel bağıntıların üyelik dereceleri belirlenmiştir. Bir sonraki adımda ise sezgisel bulanık kümeler her biri topolojik özellik olan alt kümelerine ayrılmış ve bu kısımlar arasındaki bağıntılar belirlenmiştir. Sonuç olarak daha önce verilmiş olan bağıntıların üyelik dereceleri de kullanılarak iki konumsal nesne arasındaki bağıntılar hakkında daha detaylı bilgilere ulaşılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Sezgisel Bulanık Küme, 3*3 Kesişim Matrisi, Sezgisel Bulanık Topoloji, Sezgisel Bulanık Konumsal Nesneler

Danışman: Doç. Dr. Haşmet Gürçay, Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

MODELLING INTUITIONISTIC FUZZY SPATIAL OBJECTS

Pınar Satılmış

ABSTRACT

In Geographic Information Systems generally the relationship between the spatial objects are investigated. But, most natural phenomena don't have strict boundaries. This means, they have fuzzy properties. Therefore, in this thesis to get more real conclusions about spatial objects, fuzzy and intuitionistic fuzzy objects are investigated. Primarily, fuzzy sets are separated into subsets each one of which is topological invariant and then considering these sets possible relations between two sets are determined. By using these relations membership degrees of possible relations between two fuzzy sets are determined. In the next step, intuitionistic fuzzy sets are separated into subsets each one of which is topological invariant and the relational between these parts are defined. In conclusion, using the membership degrees of the relations that are obtained before more detailed information is achieved between two spatial objects.

Keywords: Intuitionistic Fuzzy Sets, 3*3 Intersection Matrices, Intuitionistic Fuzzy Topology, Intuitionistic Fuzzy Spatial Objects.

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Haşmet Gürçay, Hacettepe University, Faculty of Science, Department of Mathematics

TEŞEKKÜR

Çalışmam boyunca yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren, değerli yorum ve önerileri ile katkıda bulunan kıymetli hocam ve tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Haşmet Gürçay'a,

Her zaman bilgi ve tecrübeleriyle bize yardımcı ve destek olan başta bölüm başkanımız Sayın Prof. Dr. Emin Özçağ olmak üzere çok değerli hocalarıma,

Tanıdığım günden itibaren hep yanımda ve destek olan canım arkadaşım ve meslektaşım Zehra Arat'a,

Yüksek lisans programım boyunca desteklerini esirgemeyen Hacer İlhan ve tüm araştırma görevlisi arkadaşlarıma,

Bu günlere gelebilmem için maddi manevi hiçbir fedakârlıktan kaçınmayan canım aileme, manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan çok değerli arkadaşlarıma teşekkürü bir borç bilirim.

Sonsuz Teşekkürler...

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÖZ.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ.....	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	ix
1. GİRİŞ	1
2. BULANIK KÜME TEORİSİ VE BULANIK TOPOLOJİ.....	2
2.1. Bulanık Küme Teorisi.....	2
2.1.1. Bulanık Küme.....	2
2.1.2. Bulanık Kümeler Arasındaki Temel İşlemler.....	3
2.2. Bulanık Topoloji.....	4
2.2.1. Bulanık Topolojik Uzay.....	4
2.2.2. Bulanık Dönüşüm.....	7
2.2.3. İndirgenmiş Uzay.....	7

3. GEVREK BULANIK TOPOLOJİK UZAYLARDA 3*3 ARAKESİT MATRİSİ VE TOPOLOJİK BAĞINTILAR.....	9
3.1. Bulanık Sınır.....	9
3.2. Gevrek Bulanık Topolojik Uzaylarda 3*3 Arakesit Matrisi.....	11
3.3. Gevrek Bulanık Topolojik Uzay.....	12
3.4. Bulanık Topolojik Uzaylarda 3*3 Arakesit Matrisi.....	14
3.5. Gevrek Bulanık Topolojik Uzaylarda Basit Bulanık Bölge	15
3.5.1. Coğrafi Bölge Sistemlerinde Basit Bulanık Bölgeler.....	15
3.5.2. Gevrek Bulanık Topolojik Uzaylarda Basit Bulanık Bölge.....	17
4. GENEL BULANIK TOPOLOJİK UZAYLARDA 3*3 ARAKESİT MATRİSİ VE TOPOLOJİK BAĞINTILAR.....	21
4.1. Genel Bulanık Topolojik Uzaylarda Topolojik Özellikler.....	21
4.2. Genel Bulanık Topolojik Uzaylarda 3*3 Arakesit Matrisi.....	26
4.3. Genel Bulanık Topolojik Uzaylarda Basit Bulanık Bölge.....	27
5. SEZGİSEL BULANIK TOPOLOJİK UZAYLARDA 3*6 ARAKESİT MATRİSİ VE TOPOLOJİK BAĞINTILAR.....	28
5.1. Sezgisel Bulanık Küme Teorisi.....	28
5.2. Sezgisel Bulanık Topolojik Uzay.....	97
5.3. Sezgisel Bulanık Topolojik Uzaylarda 3*6 Arakesit Matrisi.....	35

5.4. Sezgisel Bulanık Topolojik Uzaylarda Topolojik Bağıntılar.....	36
--	-----------

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 2.1. Bulanık kümeler $A = B$ ve $A \subseteq B$	3
Şekil 2.2. Bulanık kümelerde arakesit, birleşim ve tümleyen işlemleri.....	4
Şekil 3.1. $(\tilde{R}, \delta)$ Uzayında bir A bulanık kapalı diskinin sınırı.....	11
Şekil 3.2. Bir orman bölgesinin gevrek formda gösterimi.....	16
Şekil 3.3. Bir orman bölgesinin basit üyelik değeriyle gösterimi.....	16
Şekil 3.4. Bir orman bölgesinin sonlu üyelik değerleriyle gösterimi.....	17
Şekil 3.5. Bir orman bölgesinin üyelik fonksiyonuyla gösterimi.....	17
Şekil 3.6. $(\tilde{R}^2, C)$ uzayında bir basit bulanık bölge tanımı.....	19
Şekil 3.7. $(\tilde{R}^2, C)$ gbtu'da basit bulanık bölgenin içi, sınırı, sınırın içi ve sınırın sınırı.....	19
Şekil 3.8. $(\tilde{R}^2, C)$ gbtu'da basit bulanık bölgenin olası durumları.....	19
Şekil 3.9. $(\tilde{R}^2, C)$ gbtu'da muhtemel olmayan basit bulanık bölgeler.....	20
Şekil 4.1. $(\tilde{R}, d)$ btu'da bir A bulanık kapalı aralığının içi, sınırı, özü, saçağı, içseli, sınırsalı ve iç saçağı.....	24

Şekil 4.2. Bulanık topolojik uzayda bir bulanık kümenin içi, sınırı, özü ve saçığı arasındaki ilişki.....	25
Şekil 4.3. Bulanık topolojik uzayda bir bulanık kümenin.....	25
(1) İçi, içseli ve özü	
(2) Sınırsalı, saçığı ve sınırı arasındaki ilişki	
Şekil 4.4. Bulanık topolojik uzayda bir bulanık kümenin içi ve sınırı ile sınırsal ve içseli arasındaki ilişki.	26
Şekil 5.1. (X, τ) sbtu'da basit bulanık bölge.....	35

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

Çizelge 5.1. İki basit gevrek bölge arasındaki 8 topolojik bağıntı.....	36
Çizelge 5.2. (18) ve (41) matrislerinin alt bağıntıları.....	39
Çizelge 5.3. (18) ve (41) matrislerinden elde edilen bağıntıların üyelik dereceleri.....	40
Çizelge 5.4. A ve B sezgisel bulanık kümeleri arasındaki bağıntıların üyelik dereceleri.....	40
Çizelge 5.5. I_1 ve I_2 topolojik bağıntılarının üyelik dereceleri.....	47

1. GİRİŞ

Coğrafi Bilgi Sistemleri, konumsal bilgilerin toplanması, modellenmesi, analiz edilmesi gibi yöntemlerle sosyal, ekonomik, çevresel vb. sorunların çözümüne yardımcı bir bilgi sistemidir.

İki konumsal nesnenin incelenmesinde, bunların birbiriyle olan ilişkileri ele alınmaktadır. Bu ilişkilerin belirlenmesinde incelediğimiz kümelerin arakesitleri boş ve topolojik değişmez olan alt kümelerinden faydalanır.

Klasik küme teorisinde bir kümenin içi, sınırı ve dışı topolojik değişmezler olup arakesitleri boş kümedir. Bu yüzden klasik küme teorisinde bir kümenin bu alt kümeleri kullanılarak iki küme arasında içinde, içermek, örtüşme, dokunma, kapsama, kapsanma, eşit ve ayrık olmak üzere 8 topolojik bağıntı belirlenebilir.

Orman bölgesi, su bölgesi, popülasyon, bitki örtüsü gibi coğrafik bölgeleri karşılaştırmak istediğimizde klasik küme teorisi yetersiz kalmaktadır. Çünkü bu tür doğa olaylarını klasik kümelerle ifade etmek veri kaybına neden olur. Örneğin, bir bitki örtüsü alanını incelemek istediğimizde bu bitkinin yetiştiği bölgenin sınırlarını kesin olarak saptayabilmek neredeyse imkânsızdır. Fakat bulanık kümelerle bu bölgeyi ifade etmek daha gerçekçi olacaktır.

Tang, X. [20] tarafından bulanık kümelerde öz ve saçak ile içsel ve sınırsal kümeleri tanımlanmış ve bu kümeler aracılığıyla iki bulanık küme arasında topolojik bağıntılar belirlenmiştir: dokunma, örtüşme, içermek, içinde, örtüşme, eşit, ayrık.

Sezgisel bulanık kümeler ise bir küme hakkında iki farklı bilgi edinmemize yardımcı olmaktadır. $A = \langle x, \mu, \nu \rangle$ biçiminde tanımlı bir A sezgisel bulanık kümesi için μ fonksiyonu x ögesinin A kümesine üye olma derecesini verirken, ν fonksiyonu ise x ögesinin A kümesine üye olmama derecesini verir. Bu fonksiyonlardan faydalanarak iki bölge arasında daha net bir bilgi elde etmek mümkündür.

2. BULANIK KÜME TEORİSİ VE BULANIK TOPOLOJİ

2.1. Bulanık Küme Teorisi

2.1.1. Bulanık Küme

Bulanık küme teorisi tanımı klasik kümenin öğelerinin üyelik derecelerinin $\{0,1\}$ kümesinden $[0,1]$ aralığına genişletilmesiyle elde edilmiştir. X bir klasik küme olmak üzere, X kümesinin bir A alt kümesinin karakteristik fonksiyonu $\mu_A(x)$ ile gösterilir. $\mu_A(x)$ fonksiyonunun görüntü kümesi $\{0,1\}$ kümesidir. Eğer $\{0,1\}$ görüntü kümesi $[0,1]$ aralığına genişletilirse, A kümesine *bulanık küme* denir. Bu durumda $\mu_A(x)$ fonksiyonu x öğesinin A bulanık kümesindeki üyelik derecesidir.

Bir A bulanık kümesi $A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X\}$ şeklinde gösterilir. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ sonlu bir küme olduğunda A bulanık kümesi

$$A = \mu_A(x_1)/x_1 + \mu_A(x_2)/x_2 + \dots + \mu_A(x_n)/x_n = \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i)/x_i$$

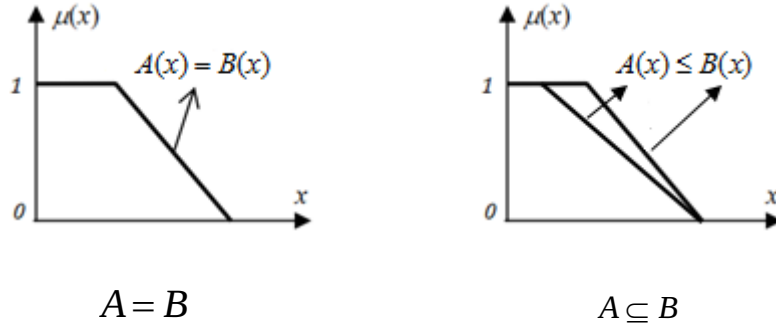
şeklinde ifade edilebilir. X sonsuz öğeli küme ise

$$A = \int_X \mu_A(x)/x$$

şeklinde ifade edilebilir. Kimi zaman bazı kaynaklarda $\mu_A(x)$ yerine $A(x)$ kullanılmaktadır ve biz de kolaylık olması açısından bu kullanımı tercih edeceğiz.

Bu tezde bulanık olmayan veya klasik küme terimleri yerine literatürde genel olarak kabul edilen gevrek küme terimini kullanacağız [15].

Bulanık küme ve gevrek kümeyi karşılaştırsak, gevrek kümenin öğelerinin karakteristik değerleri $[0,1]$ aralığının alt kümesi olan $\{0,1\}$ kümesidir. Bu açıdan gevrek küme bir özel bulanık kümedir. İki bulanık küme A ve B olmak üzere eğer her $x \in X$ için $A(x) = B(x)$ ise, A bulanık kümesi B bulanık kümesine *eşittir* denir ve $A = B$ ile gösterilir. Eğer her $x \in X$ için $A(x) \leq B(x)$ ise, B bulanık kümesi A bulanık kümesini içerir ve $A \subseteq B$ ile gösterilir.



Şekil 2.1. Bulanık kümeler $A = B$ ve $A \subseteq B$

Bir A bulanık kümesinin üyelik derecesi sıfırdan farklı olan x öğelerinin kümesine A bulanık kümesinin *desteği* denir ve $dest(A) = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\}$ biçiminde gösterilir.

Örnek 2.1 X doğal sayılar kümesi olsun. A , büyüklüğü yaklaşık olarak 100'e eşit olan sayıların bulanık kümesi olsun:

$$A = 0.2 / 98 + 0.6 / 99 + 1.0 / 100 + 0.6 / 101 + 0.2 / 102 .$$

Bu durumda A kümesinin desteği $dest(A) = \{98, 99, 100, 101, 102\}$ şeklindedir.

2.1.2. Bulanık Kümeler Arasındaki Temel İşlemler

Bir X kümesinin A ve B iki bulanık alt kümesi arasındaki birleşim, arakesit ve tümleyen işlemleri aşağıdaki şekilde tanımlanır:

(1) Birleşim: $\mu_{A \cup B}(x) = enBüyük (\mu_A(x), \mu_B(x))$ olmak üzere,

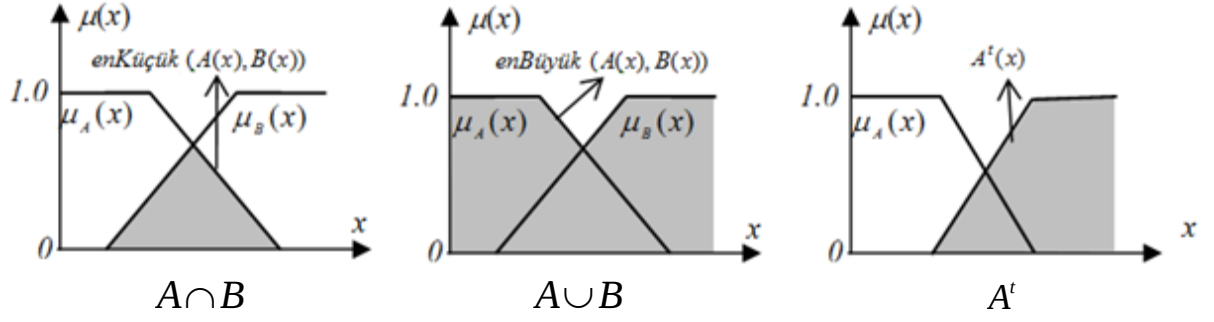
$$A \cup B = \{(x, (A \cup B)(x)) : \forall x \in X\}$$

(2) Arakesit: $\mu_{A \cap B}(x) = enKüçük (\mu_A(x), \mu_B(x))$ olmak üzere,

$$A \cap B = \{(x, (A \cap B)(x)) : \forall x \in X\}$$

(3) Tümleyen: $\mu_{A^t}(x) = 1 - \mu_A(x)$ olmak üzere,

$$A^t = \{(x, A^t(x)) : \forall x \in X\} \text{ şeklindedir.}$$



Şekil 2.2. Bulanık kümelerde arakesit, birleşim ve tümleyen işlemleri

Aşağıda verilen özellikler bulanık kümeler için geçerlidir:

- (1) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$,
- (2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$,
- (3) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$,
- (4) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
- (5) $A \cup \phi = A$, $A \cap X = A$,
- (6) $(A \cup B)^t = A^t \cap B^t$, $(A \cap B)^t = A^t \cup B^t$,
- (7) $A^{tt} = A$.

2.2. Bulanık Topoloji

2.2.1. Bulanık Topolojik Uzay

Bulanık topoloji, bulanık kümeler temel alınarak kurulmuştur. Gevrek topolojinin genişlemesidir ve birkaç tanımı vardır. Burada kullanılacak olan kavram Chang [2] tarafından önerilen tanım üzerine kurulmuştur.

X bir keyfi gevrek küme, $\tilde{\wp}(X)$ ise X 'in bulanık kuvvet kümesi olsun. $\delta \subseteq \tilde{\wp}(X)$ için eğer;

- (i) $\phi, X \in \delta$

$$(ii) \quad \forall A_i \in \delta, \cup_i A_i \in \delta$$

$$(iii) \quad \forall U, V \in \delta, U \cap V \in \delta$$

koşulları sağlanıyorsa δ , X üzerinde *bulanık topolojidir*. (X, δ) ise bulanık topolojik uzaydır (btu). δ ailesinin her ögesine *açık (bulanık) küme* denir. Tümleyeni açık olan kümeye *kapalı (bulanık) küme* denir. A kümesinin içerdiği tüm açık kümelerin birleşimine A kümesinin *içi* denir ve A° ile gösterilir. A° kümesi, A kümesinin içerdiği en geniş açık kümedir. A kümesini kapsayan tüm kapalı kümelerin arakesitine A kümesinin *kapanışı* denir ve A^- ile gösterilir. A^- kümesi, A kümesini kapsayan en küçük kapalı kümedir. Eğer bir A açık kümesinin kapanışının içi A kümesine eşitse A kümesine *düzenli açık* denir. Eğer bir A kapalı kümesinin içinin kapanışı A kümesine eşitse A kümesine *düzenli kapalı* denir. A kümesinin kapanışının tümleyeni A kümesinin *dışındır* ve A^d ile gösterilir. A^d açık kümedir.

X kümesinde bir bulanık kümenin en az bir $x \in X$ için üyelik derecesi sıfırdan farklı ve bu x ögesinden farklı her $y \in X$ için üyelik derecesi sıfır ise bu kümeye *bulanık nokta* denir. Bu kümenin x noktasındaki değeri λ olmak üzere *bulanık nokta* x_λ ile gösterilir ($0 < \lambda \leq 1$) ve desteği x noktasıdır. Burada λ , x_λ noktasının *dayanağıdır*. Ayrıca her $\lambda \leq A(x)$ değeri için $x_\lambda \in A$ olur.

Örnek 2.2 $X = \{1, 2, 3\}$ kümesi olsun. $\delta = \{\emptyset, X, \{1_{0.3}\}, \{1_{0.3}, 2_{0.3}\}\}$, X üzerinde bir bulanık topoloji olsun. Bu durumda $A = \{1_{0.4}\}$ kümesinin içi $A^\circ = \{1_{0.3}\}$, kapanışı $A^- = \{1_{0.7}, 2_{0.7}, 3\}$ ve dışı $A^d = \{1_{0.3}, 2_{0.3}\}$ şeklinde tanımlıdır. Ayrıca $x_\lambda = 1_{0.2}$ bulanık noktasının dayanağı $\lambda = 0.2$ 'dir ve $0.2 \leq A(1) = 0.3$ olduğundan $1_{0.2} \in A$ olur.

Bir bulanık açık aralık ise $x_{\lambda_1}, y_{\lambda_2}$ iki bulanık nokta olmak üzere $(x_{\lambda_1}, y_{\lambda_2})$ şeklinde tanımlıdır.

Önerme 2.3 (X, δ) btu'da A ve B iki bulanık küme olmak üzere aşağıdakiler sağlanır:

$$(1) A^\circ \subseteq A, (A^\circ)^\circ = A^\circ;$$

$$(2) A \subseteq B \Rightarrow A^\circ \subseteq B^\circ$$

$$(3) (A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ, (A \cup B)^\circ \supseteq A^\circ \cup B^\circ$$

Önerme 2.4 (X, δ) btu'da A ve B iki bulanık küme olmak üzere aşağıdakiler sağlanır:

$$(1) A \subseteq A^-, (A^-)^- = A^-;$$

$$(2) A \subseteq B \Rightarrow A^- \subseteq B^-$$

$$(3) (A \cap B)^- \subseteq A^- \cap B^-, (A \cup B)^- = A^- \cup B^-$$

Önerme 2.5 (X, δ) btu'da A bir bulanık küme olmak üzere;

$$A^{ot} = A^{t-}, A^{-t} = A^{to} \text{ eşitlikleri sağlanır.}$$

Tanım 2.6 (1) (X, δ) btu'nda A ve B iki bulanık küme olmak üzere eğer $U \supseteq A$, $V \supseteq B$ ve $U \cap B = V \cap A = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \in \delta$ varsa A ve B kümelerine *ayrık* denir.

(2) (X, δ) btu'nda A ve B iki bulanık küme olmak üzere eğer $H \supseteq A$, $K \supseteq B$ ve $H \cap B = K \cap A = \emptyset$ olacak şekilde U, V kapalı kümeleri varsa A ve B kümelerine *K-ayrık* denir.

Tanım 2.7 (1) X btu'nda bir A bulanık kümesi için $A = C \cup D$ olacak şekilde C ve D ayrık kümeleri yoksa A *açık bağlantılıdır* denir.

(2) X btu'nda bir A bulanık kümesi için $A = C \cup D$ olacak şekilde C ve D K-ayrık kümeleri yoksa A *kapalı bağlantılıdır* denir.

(3) Açık bağlantılı ve kapalı bağlantılı olan kümeye *çift bağlantılı* denir.

2.2.2. Bulanık Dönüşüm

$f : X \rightarrow Y$ bilinen gevrek dönüşüm ve (X, δ) , (Y, σ) btu olsun. (X, δ) btu'dan (Y, σ) btu'a $f^{\rightarrow}$ bulanık dönüşümü şu şekilde tanımlıdır:

$$f^{\rightarrow} : (X, \delta) \rightarrow (Y, \sigma), \quad f^{\rightarrow}(A)(y) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(y)} A(x), & f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}; \quad A \in \wp(X), y \in Y$$

$f^{\rightarrow}$ bulanık dönüşümünün ön görüntüsü $f^{\leftarrow}$ ise şu şekilde tanımlıdır;

$$f^{\leftarrow} : (Y, \sigma) \rightarrow (X, \delta), \quad [f^{\leftarrow}(B)](x) = B(f(x)); \quad B \in \wp(Y), x \in X$$

$f^{\leftarrow} : (Y, \sigma) \rightarrow (X, \delta)$ ters dönüşümü (Y, σ) uzayındaki her açık kümeyi (X, δ) uzayında bir açık kümeye resmediyorsa $f^{\rightarrow} : (X, \delta) \rightarrow (Y, \sigma)$ bulanık dönüşümü (*bulanık*) *süreklidir* denir. $f^{\rightarrow} : (X, \delta) \rightarrow (Y, \sigma)$ bulanık dönüşümü (X, δ) btu'daki her açık kümeyi (Y, σ) btu'da bir açık kümeye resmediyorsa $f^{\rightarrow}$ bulanık dönüşümüne *açık dönüşüm* denir. $f^{\rightarrow} : (X, \delta) \rightarrow (Y, \sigma)$ bulanık dönüşümü birebir, örten, sürekli ve açık ise bu dönüşüme *bulanık homeomorfizma* adı verilir. Bulanık homeomorfizma altında bileşim ve gevrek altküme özellikleri korunur (Liu ve Luo [16]). Bir bulanık kümenin bulanık homeomorfizma altında değişmez olan özelliklerine (*bulanık*) *topolojik özellik* (veya topolojik değişmez) denir.

2.2.3. İndirgenmiş Uzay

İleride kullanacağımız kavramları açıklayabilmek için zayıf indirgenmiş uzay ve indirgenmiş uzay tanımlarından faydalanacağız.

(X, δ) btu olsun. Her $A \in \delta$ için $\text{dest}(A)$ gevrek kümedir. $[\delta] = \{\text{dest}(A) : A \in \delta\}$ için $(X, [\delta])$ gevrek topolojik uzay belirler.

Örnek 2.8 $X = \{1,2,3\}$ kümesi olsun. $\delta = \{\emptyset, X, \{1_{0.3}\}, \{1_{0.3}, 2_{0.3}\}\}$, X üzerinde bir bulanık topoloji olsun. $[\delta] = \{\emptyset, X, \{1\}, \{1,2\}\}$ biçimindedir ve $(X, [\delta])$ gevrek topolojik uzaydır.

$A = \{[0, a) : 0 \leq a \leq 1\}$ kümesi ile üretilen gevrek topolojiye $[0,1]$ aralığında *üst topoloji* denir. $A = \{(a, 1] : 0 \leq a \leq 1\}$ kümesi ile üretilen topolojiye $[0,1]$ aralığında *alt topoloji* denir. $A = \{(a, b) : 0 \leq a < b \leq 1\}$ kümesi ile üretilen topolojiye $[0,1]$ aralığında *aralık topolojisi* denir.

Tanım 2.9 (X, δ) gevrek topolojik uzay olsun. $f : X \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında üst topolojide sürekli ise, f fonksiyonuna *üst yarı sürekli* denir. $f : X \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında alt topolojide sürekli ise, f 'e *alt yarı sürekli* denir. $f : X \rightarrow [0,1]$ fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter koşul f fonksiyonunun alt ve üst yarı sürekli olmasıdır.

Tanım 2.10 (X, δ) btu olsun. Her $U \in \delta$, $(X, [\delta])$ topolojik uzayından $[0,1]$ aralığına alt yarı sürekli dönüşüm ise δ , X kümesi üzerinde *zayıf indirgenmiş bulanık topoloji* olarak adlandırılır. Eğer δ , $(X, [\delta])$ topolojik uzayından $[0,1]$ aralığına tüm alt yarı sürekli dönüşümleri içeriyorsa, δ ailesine X üzerinde *indirgenmiş bulanık topoloji* denir.

3. GEVREK BULANIK TOPOLOJİK UZAYLARDA 3*3 ARAKESİT MATRİSİ VE BASİT BULANIK BÖLGE

3.1. Bulanık Sınır

Bulanık kümeler arasındaki ilişkiyi inceleyebilmek için öncelikle bu kümeleri topolojik kısımlarına parçalamamız gerekmektedir. *Topolojik kısım*, bir kümenin her biri topolojik değişmez ve arakesitleri boş olan ayrıca birleşimleri bu kümeyi veren alt kümelerine denir. Coğrafi bilgi sistemlerinde en çok ilgilenilen konulardan birisi bulanık kümenin sınırıdır. Bulanık topolojide Warren, H. R. [21], Pu, P. M. ve Liu, Y. M. [18], Wu, G. Q. ve Zheng, C. Y. [22], Cuchillo-Ibáñez, E. ve Tarrés, J. [7] tarafından birkaç sınır tanımı verilmiştir. Coğrafi bilgi sistemleri uygulamalarında, bulanık bölgelerin incelenmesinde, öncelikle bölgenin üyelik derecesi 1'den az olan noktaları ele alınır. Ayrıca Clementini ve Di Felice [5] tarafından topolojik uzaylarda verilen sınırın cebirsel tanımını da göz önünde bulundurursak bizim için Warren [21] tarafından verilen aşağıdaki sınır tanımı en ideal olandır. Bu tezde bu tanımı kabul edeceğiz ve küme sınırını ∂A ile göstereceğiz. Warren tarafından verilen sınır tanımı şu şekildedir:

Tanım 3.1 Bir A bulanık kümesinin bulanık

$$\partial A = \cap \{D \mid D \text{ kapalı ve her } x \in X, (A^- \cap A^{t-})(x) > 0 \text{ için } D(x) \geq A^-(x)\}$$

şeklinde tanımlıdır.

Önerme 3.2 (X, δ) btu'da A bir bulanık küme olsun. Aşağıdakiler sağlanır:

- (1) ∂A kapalı kümedir ve $\partial A \subseteq A^-$,
- (2) $\partial A = \emptyset \Leftrightarrow A$ açık, kapalı ve gevrekli,
- (3) $A^- = A^\circ \cup \partial A = A \cup \partial A$,
- (4) $\partial A \supseteq A^- \cap (X - A)^- \supseteq A^- - A^\circ$,
- (5) $\partial(A^\circ) \cup \partial(A^-) \subseteq \partial A$,

$$(6) \partial(\partial A) \subseteq \partial A.$$

Bu sınırı bir örnek ile açıklayalım [20]:

Örnek 3.3 R Öklid uzayından indirgenmiş $(\tilde{R}, \delta)$ bulanık topolojik uzayı şu şekilde tanımlansın. δ ailesinin öğeleri R 'den $[0,1]$ aralığına alt yarı sürekli dönüşümler olsun. Bulanık küme tanımına göre $0 < a, b \leq 1$ sayıları x, y ($x < y$) noktalarının dayanağı olmak üzere $D^\circ = (x_a, y_b)$ bir bulanık açık aralıktır. Eğer D° kümesi R 'den $[0,1]$ aralığına alt yarı sürekli ise D° açık bulanık küme olsun. Bir $D = [x_a, y_b]$, $0 < a, b \leq 1$, $x < y$ bulanık kapalı aralığı R 'den $[0,1]$ aralığına üst yarı sürekli ise, D bulanık kapalı küme olur.

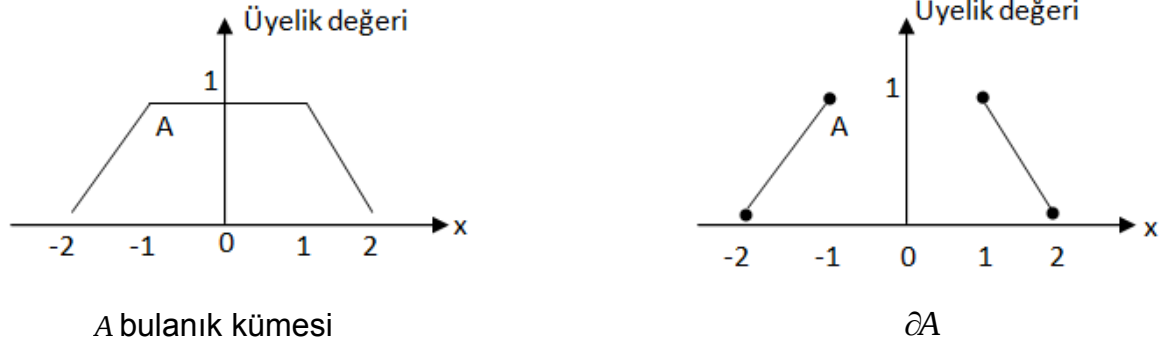
(X, δ) btu'da bir A bulanık kapalı aralığı $\varepsilon > 0$ olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$A = \begin{cases} 0 & , |x| > 2 \\ \varepsilon & , |x| = 2 \\ 2 - |x| & , 1 < |x| < 2 \\ 1 & , |x| = 1 \\ 1 & , |x| < 1 \end{cases}$$

$(\tilde{R}, \delta)$ btu'da A bulanık kümesi R kümesinden $[0,1]$ aralığına üst yarı sürekli dönüşüm olduğundan kapalıdır. Bu kümenin sınırı

$$\partial A = \begin{cases} 0 & , |x| > 2 \\ \varepsilon & , |x| = 2 \\ 2 - |x| & , 1 < |x| < 2 \\ 1 & , |x| = 1 \\ 0 & , |x| < 1 \end{cases}$$

biçimindedir.



Şekil 3.1. $(\tilde{R}, \delta)$ uzayında bir A bulanık kapalı diskinin sınırı

3.2. Gevrek Topolojik Uzaylarda 3*3 Arakesit Matrisi

Konumsal nesneler arasındaki ilişkiyi tanımlamak aslında, konumsal nesneler arasında geçerli işlemler tanımlayıp bu nesneler arasındaki topolojik ilişkinin varlığını test etmektir. İki konumsal nesne arasındaki topolojik ilişki literatürde Clementini, E. ve Di Felice, P. [3, 4], Clementini, E., Di Felice, P. ve van Oosterom, E. [6], Egenhofer, M. J. ve Franzosa, R. D. [10], Egenhofer, M. J. ve Herring, John R. [12] tarafından geniş kapsamlı olarak çalışılmıştır.

İki konumsal nesnenin karşılaştırılmasında temel yaklaşım, bu nesnelerin içleri, sınırları ve dışları arasındaki ikişerli kesişimleri inceleyerek elde edilen “arakesit” matrisinden yola çıkarak nesneler arasındaki ilişkiyi sınıflandırmaktır [13]. İki konumsal nesne arasındaki ilişkileri iç ve sınır değerlerinin etkileşimi olarak değerlendirip sınıflandırmak için ilk olarak gevrek topolojik uzaylarda 2*2 arakesit modeli tanımlanmıştır. Daha sonra bu model, konumsal nesnelerin dışı da değerlendirecek şekilde genişletilmiş, bu ise 3*3 arakesit modeli ile sonuçlanmıştır.

3*3 arakesit yaklaşımı gevrek kümeler için gevrek topolojik uzaylardan üretilmiştir. Bilinen küme teorisinde bir A kümesi için $A \cap A^t = \phi$, $A \cup A^t = X$, $A^\circ \cup \partial A = A^-$ ve $A^\circ \cap \partial A = \phi$ özellikleri sağlanır. Dahası bir kümenin içi, dışı ve sınırı karşılıklı olarak ayrıktır. Bir kümenin içi, sınırı ve dışı bu kümenin topolojik kısımlarıdır. 2*2 arakesit ve 3*3 arakesit yaklaşımları, iki gevrek bölge arasında topolojik bağıntıyı formülleştirmek için bu özellikten faydalanır. Öncelikle iki kümenin içi ve sınırı arasındaki arakesitler tanımlanır. Daha sonra 2*2 arakesit matrisine kümenin dışının eklenmesiyle 3*3 arakesit matrisi elde edilir.

Gevrek topolojik uzaylarda 3*3 arakesit matrisi: X gevrek topolojik uzayında A, B iki küme olmak üzere;

$$I_{3*3}(A, B) = \begin{bmatrix} A^o \cap B^o & A^o \cap \partial B & A^o \cap B^d \\ \partial A \cap B^o & \partial A \cap \partial B & \partial A \cap B^d \\ A^d \cap B^o & A^d \cap \partial B & A^d \cap B^d \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır.

2*2 arakesit ve 3*3 arakesit yaklaşımında topolojik özellik olarak arakesit temel alınır. konumsal nesneler arasındaki ilişkiler tanımlanabilir.

A^o , ∂A , A^d bulanık kümeleri arasındaki ikişerli arakesit boştan farklı olabilir ve üçünün birleşimi ise, X kümesinden farklı olabilir. Bu ise 3*3 arakesit yaklaşımına dayalı topolojik bağıntıların belirlenmesinin tek olmamasına neden olur. Bunu bir örnek ile açıklayalım.

Örnek 3.4 X btu'da şu 3*3 arakesit matrisi verilmiş olsun:

$$\begin{bmatrix} A^o \cap B^o = \emptyset & A^o \cap \partial B \neq \emptyset & A^o \cap B^d \neq \emptyset \\ \partial A \cap B^o = \emptyset & \partial A \cap \partial B \neq \emptyset & \partial A \cap B^d \neq \emptyset \\ A^d \cap B^o \neq \emptyset & A^d \cap \partial B \neq \emptyset & A^d \cap B^d \neq \emptyset \end{bmatrix}$$

Bu 3*3 arakesit matrisi $A^o \cap \partial A \neq \emptyset$ ve $B^o \cap \partial B = \emptyset$ veya $A^o \cap \partial A = \emptyset$ ve $B^o \cap \partial B = \emptyset$ özelliklerini sağlayan A ve B bulanık kümelerinin arakesitlerinin sonucu olabilir. Yani farklı iki bulanık kümenin 3*3 arakesit matrisi aynı olabilir.

3.3. Gevrek Bulanık Topolojik Uzay

Bulanık topolojik uzaylarda 3*3 arakesit yaklaşım problemi üç topolojik kısmın ikişerli arakesitlerin boş olmasından ortaya çıkar.

Önerme 3.5 A , (X, δ) btu'da bir bulanık küme olsun.

$A^o \cap \partial A = \emptyset$ olması için gerek ve yeter koşul A^o kümesinin gevrek olmasıdır.

Kanıt

($\Rightarrow$) $A^\circ \cap \partial A = \emptyset$ olsun. Keyfi $x \in X$ değeri için:

Eğer $A^\circ(x) = 0$ ise A° kümesi gevrek olur.

Eğer $A^\circ(x) > 0$ ise $(A^\circ \cap \partial A)(x) = 0$ olduğundan $\partial A(x) = 0$ olur. $A^{\circ-}(x) > 0$ ve $\partial A^\circ(x) = (A^{\circ-} \cap (X - A^\circ)^-)(x) = 0$ olur. Buradan $(X - A^\circ)^-(x) = 0$ gelir. Böylece $A^\circ(x) = 1$ elde edilir.

($\Leftarrow$) A° gevrek küme olsun. Keyfi $x \in X$ değeri için $(A^{\circ-} \cap (X - A^\circ)^-)(x) > 0$ olsun. A° gevrek küme olduğundan $X - A^\circ$ gevrek kümedir. Böylece keyfi $x \in X$ değeri için $(X - A^\circ)^-(x) = 1 \geq A^-(x)$ şeklindedir. $X - A^\circ$ kapalı küme ve $\partial A \subseteq A^-$ olmasından dolayı $\partial A \subseteq (X - A^\circ)$ olur. Böylece $A^\circ(x) = 1$ olduğunda $\partial A(x) = 0$ gelir. ■

Bu önermeden anlıyoruz ki, bulanık topolojik uzayda bir açık kümenin gevrek olması için gerek ve yeter koşul kümenin içinin ve sınırının ayrık olmasıdır. Bu durumda belli bir bulanık topolojik uzay tanımlanarak topolojik bağıntılar incelenebilir.

Tanım 3.6 (X, C) btu'da tüm açık kümeler gevrek ise (X, C) bulanık topolojik uzayına *gevrek bulanık topolojik uzay* (gbtu) denir.

Bu tür bulanık topolojik uzayda tüm kapalı kümelerde gevreklerdir. Bir gevrek bulanık topolojik uzay ile gevrek topolojik uzay arasındaki fark, gevrek bulanık topolojik uzayın bulanık kümeler bulundurabilmesinde fakat gevrek topolojik uzayın bulunduramamasında yatar. Ayrıca (X, C) gbtu'da tüm açık kümeler gevrek olduğundan X üzerindeki C topolojisi gevreklerdir. (X, C) gbtu'nun temel özellikleri de gevrek topolojik uzay ile aynıdır.

Önerme 3.7 (X, C) gbtu'da bir A bulanık kümesinin bulanık sınırı kümenin tümleyeninin kapanışı ile kümenin kapanışının arakesitidir: $\partial A = A^- \cap A^{t-}$

Kanıt Bulanık sınırın tanımı $\{x:(A^- \cap A^{t-})(x) > 0\}$ kümesinin kapanışı olarak yazılabilir. (X, C) uzayında $(A^- \cap A^{t-})(x) > 0$ eşitsizliği $(A^- \cap A^{t-})(x) = 1$ olur ve $A^- \cap A^{t-}$ kapalı kümedir. Bu durumda $A^- \cap A^{t-} \supseteq \partial A$. Diğer taraftan Önerme 3.2 (4)' e göre $\partial A \supseteq A^- \cap A^{t-}$. Yani $\partial A = A^- \cap A^{t-}$ şeklindedir. ■

Sonuç 3.8 (X, C) gbtu'da bir bulanık kümenin içi sınırı ayrıktır: $\partial A \cap A^o = \emptyset$.

Kanıt A , (X, C) gbtu'da bir bulanık küme olmak üzere:

$$\partial A \cap A^o = A^- \cap A^{t-} \cap A^o = A^o \cap A^{t-} \subseteq A^o \cap A^{ot-} = A^o \cap A^{ot} = \emptyset$$

olduğu görülür. Buradan $\partial A \cap A^o = \emptyset$ olur. ■

Benzer şekilde (X, C) gbtu'da iç, sınır ve dış ikiye ayrılarak ayrılır.

3.4. Gevrek Bulanık Topolojik Uzaylarda 3*3 Arakesit Matrisi

Gevrek bulanık topolojik uzaylarda bir bulanık kümenin içi, dışı ve sınırı gevrek kümeler olduğundan bu kümelerin ikiye ayrılarak ayrılır. Bu yüzden (X, C) gbtu'da A ve B bulanık kümelerinin topolojik kısımları arasında 3*3 arakesit matrisi formüle edilebilmiştir.

Gevrek Bulanık Topolojik Uzaylarda 3*3 Arakesit Matrisi (X, C) gbtu'da A ve B iki bulanık küme olsun.

$$I_{3*3}(A, B) = \begin{bmatrix} A^o \cap B^o & A^o \cap \partial B & A^o \cap B^d \\ \partial A \cap B^o & \partial A \cap \partial B & \partial A \cap B^d \\ A^d \cap B^o & A^d \cap \partial B & A^d \cap B^d \end{bmatrix} \quad \dots(1)$$

(1) matrisi (X, C) uzayında 3*3 arakesit matrisi olarak adlandırılır.

Tang, X. [20] bu matris gösterimini şu şekilde sadeleştirmiştir:

3*3 arakesit matrisinde iki bulanık kümenin topolojik kısımları arasındaki arakesitin boş olması durumunu 0 tersi durumu ise 1 olarak gösterir.

İki bulanık küme arasındaki ayrıklık bağıntısı şu şekilde tanımlanmış olsun:

$$\begin{bmatrix} A^o \cap B^o = \phi & A^o \cap \partial B = \phi & A^o \cap B^d \neq \phi \\ \partial A \cap B^o = \phi & \partial A \cap \partial B \neq \phi & \partial A \cap B^d \neq \phi \\ A^d \cap B^o \neq \phi & A^d \cap \partial B \neq \phi & A^d \cap B^d \neq \phi \end{bmatrix}$$

Böyle bir matris şu şekilde sadeleştirilmiştir:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

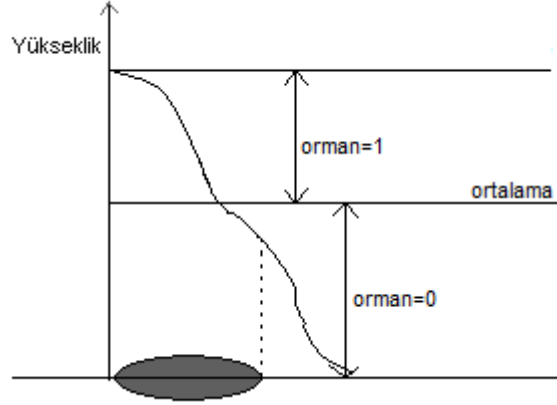
3.5. Gevrek Bulanık Topolojik Uzaylarda Basit Bulanık Bölge

Yukarıdaki kesişim matrisleri iki bulanık küme arasındaki ilişkiyi belirleyebilir. Bununla birlikte tüm bulanık kümeler bulanık uzaysal nesne değiller. Bulanık uzaysal nesneler tanımlamak için genel bulanık kümeleri bazı koşullarla kısıtlamalıyız. Bu bölümde gevrek bulanık topolojik uzaylarda basit bölge tanımını vereceğiz. Öncelikle, gerçekte bulanık bölgenin muhtemel formlarına bakalım.

3.5.1. Coğrafi Bölge Sistemlerinde Basit Bulanık Bölgeler

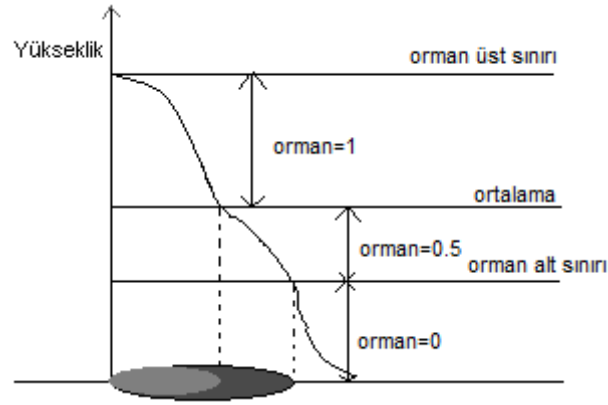
Coğrafi Bilgi Sistemlerinde dağ, okyanus, çim alanı ve popülasyon dağılım oranı gibi doğal olayları gevrek formda veya bulanık formda ifade edilebilir. Örnek olarak bir ormanlık bölgeyi düşünebiliriz. Çeşitli coğrafi etkenlere bağlı olarak ormanların yetişebildikleri, orman alt sınırı ve orman üst sınırı oluşmaktadır. Bu sınırlardan faydalanarak bir bölgenin orman bakımından üyelik değerleri belirlenebilir.

1. Gevrek Form: Orman alt sınırının ve üst sınırının ortalaması alındığında, bu değer altında kalan bölgenin orman değeri sıfır, üstünde kalan bölgenin orman değeri ise bir olur.



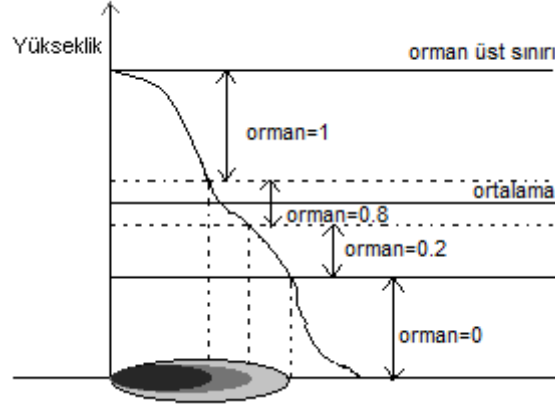
Şekil 3.2. Bir orman bölgesinin gevrek formda gösterimi

2. Bulanık Form I: Bölgenin orman üyelik değeri orman üst sınırı ve alt sınırı değerleri kullanılarak Şekil 3.3'deki gibi belirlenebilir.



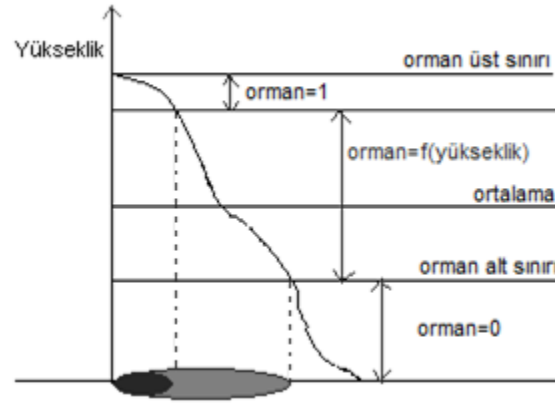
Şekil 3.3. Bir orman bölgesinin basit üyelik değeriyle gösterimi

3. Bulanık Form II: Bölgenin orman üyelik değeri ormanın sonlu tane üyelik derecesi ile gösterilebilir.



Şekil 3.4. Bir orman bölgesinin sonlu üyelik değerleriyle gösterimi

4. Bulanık Form III: Ormanın üyelik değeri, yükseklikten $[0,1]$ aralığına sürekli bir dönüşümün değeri ile gösterilebilir.



Şekil 3.5. Bir orman bölgesinin üyelik fonksiyonuyla gösterimi

3.5.2. Gevrek Bulanık Topolojik Uzaylarda Basit Bulanık Bölge

Konumsal nesneleri incelerken, nesnelerin topolojik kısımları arasındaki arakesitler incelemektedir. Fakat ele alınan bölgeler basit bölgeler olmalı ki arakesit alınırken hatalı sonuç elde etmeyelim. Basit bölge için çeşitli tanımlar verilmiştir. Öncelikle gevrek basit bölge, bağlantılı gevrek topolojik uzaylarda içi bağlantılı düzenli kapalı küme olarak alınmıştır. Daha sonra Schneider M. [19]'de bulanık bölge tanımından bahsetmiştir. Fakat onun tanımında bulanık bölge açık küme olarak alınmıştır ki, bu gevrek basit bölge tanımıyla uyuşmaz. Bunun için (X, C) uzayında bulanık basit bölge tanımının genelleştirilmesi gerekmektedir. Biliyoruz ki, gevrek küme, bulanık kümenin özel halidir. Bu yüzden gevrek basit bölge bulanık basit bölgenin

özel hali olarak ele alınabilir. Tang, X. [20] (X, C) uzayında basit bulanık bölge tanımını aşağıdaki gibi vermiştir.

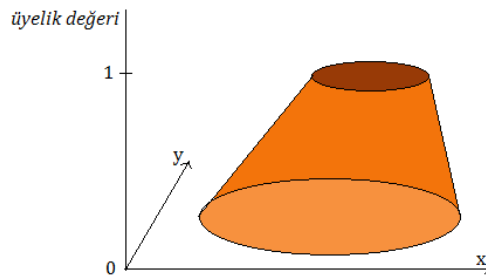
Tanım 3.9 Bağlantılı (X, C) uzayında aşağıda verilen özellikleri sağlayan bir A bulanık kümesi *basit bulanık bölge* olarak adlandırılır.

- (1) A kümesinin kapanışı boştan farklı düzenli kapalı kümedir ($A^- = A^{-o-}$)
- (2) A kümesinin desteği kapanışına eşittir
- (3) A kümesinin içi boştan farklı bağlantılı düzenli açık kümedir.
- (4) A kümesinin sınırı, sınırının içi ve dışı bağlantılıdır.

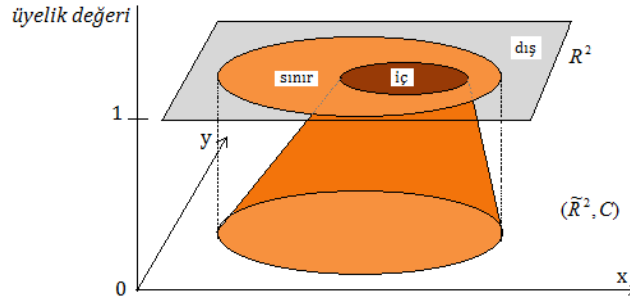
A bulanık kümesinin sınırının içi boş ve A bulanık kümesi gevrek ise, A bulanık kümesi *basit gevrek bölgedir*.

Basit bulanık bölgeyi ifade edebilmek için X uzayını $\tilde{R}^2$ bulanık Öklid uzayı olarak ele alalım. $(\tilde{R}^2, C)$ gbtu'nı tanımlayalım. Tüm noktalar gevrek ise bulanık Öklid uzayı basit Öklid mesafesi olacak. Tüm bulanık açık yuvarların açık ve gevrek olduğu C ailesi, $\tilde{R}^2$ üzerinde bulanık gevrek topolojidir. $(\tilde{R}^2, C)$ ile bilinen Öklid uzayı arasındaki fark $(\tilde{R}^2, C)$ gbtu'nın bulanık küme içerebilmesi Öklid uzayının içermemesinde yatar.

Örnek 3.10 $(\tilde{R}^2, C)$ gbtu'da basit bulanık bölgenin açıklamasının gösterimi aşağıdadır.



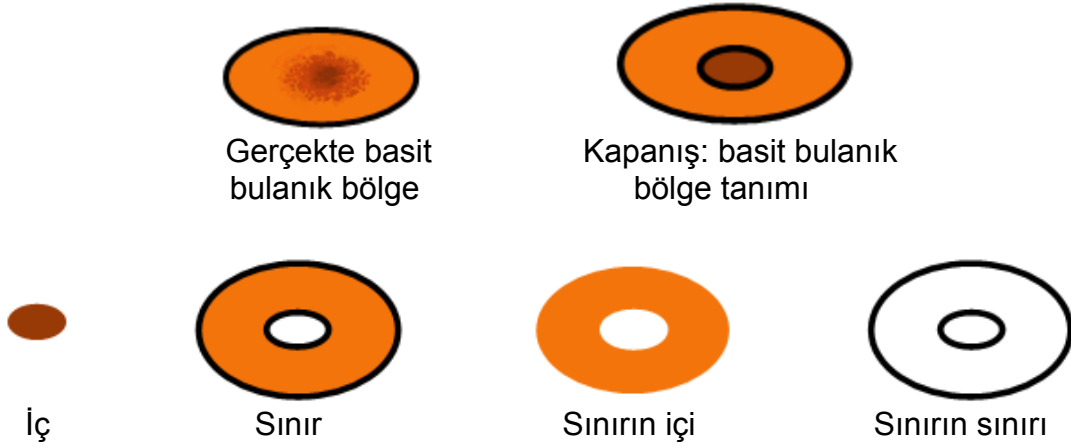
I. Gerçekte basit bulanık bölge



II. Basit bulanık bölgenin incelenmesi

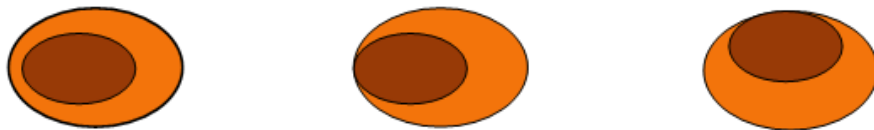
Şekil 3.6. $(\tilde{R}^2, C)$ Uzayında bir basit bulanık bölge tanımı

Şekil 3.6. basit bulanık bölgenin birkaç özelliğinin uzayda gösterimidir. Şekil 3.7. ise basit bulanık bölge tanımının düzlemsel yolla tasviridir. $(\tilde{R}^2, C)$ gbtu'da tüm topolojik özellikler gevrektir. Basit bulanık bölge tanımındaki tüm kavramları düzlemde çizmek mümkündür.

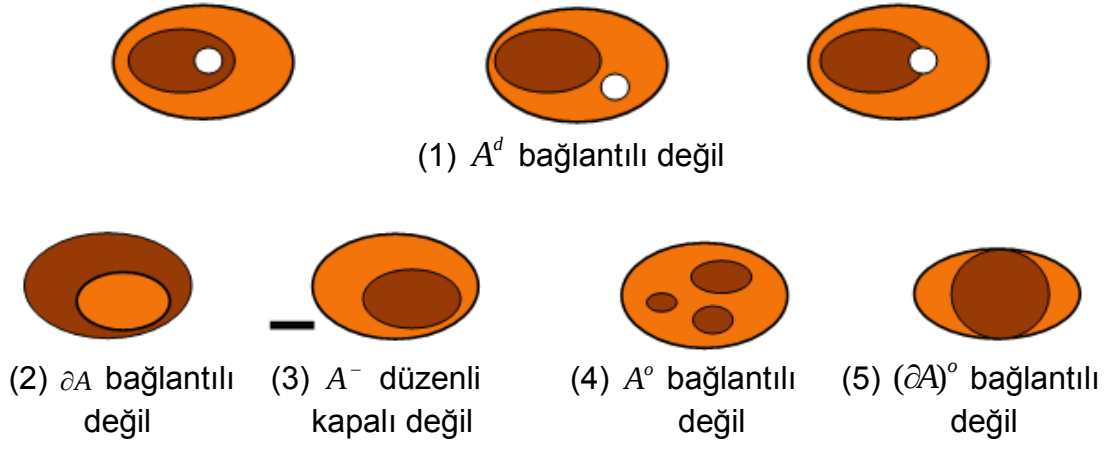


Şekil 3.7. $(\tilde{R}^2, C)$ gbtu'da bir basit bulanık bölgenin içi, sınırı, sınırın içi ve sınırın sınırı

Şekil 3.8. basit bulanık bölgenin düzlemsel yöntemle muhtemel oluşumlarını göstermektedir. Şekil 3.9. ise verilen dört kuraldan en az birini sağlamayan, basit bulanık bölge olamayacak bölgeleri düzlemsel yöntemle göstermektedir.



Şekil 3.8. $(\tilde{R}^2, C)$ gbtu'da basit bulanık bölgenin olası durumları



Şekil 3.9. $(\tilde{R}^2, C)$ gbtu'da muhtemel olmayan basit bulanık bölgeler

4. GENEL BULANIK TOPOLOJİK UZAYLARDA 3*3 ARAKESİT MATRİSİ VE BASİT BULANIK BÖLGE

4.1. Genel Bulanık Topolojik Uzaylarda Topolojik Özellikler

Coğrafi Bilgi Sistemlerinde genel olarak gevrek kümeler incelenmektedir. Fakat doğa olaylarını gevrek kümelerle ifade etmek eksik sonuçlar verebilir. Aynı şekilde bir önceki bölümde incelemiş olduğumuz gbtu'larda açık ve kapalı kümeler gevrek kümeler olduğu için tanımladığımız topolojik bağıntılar ise hala yüzeysel kalmaktadır. Daha gerçekçi bilgiler elde edebilmek için Tang, X. [20], gevrek bulanık topolojik uzaylardaki topolojik kısımları genel bulanık topolojik uzaylara genişletmiştir.

Genel bulanık topolojik uzaylarda bir bulanık kümenin içi, sınırı ve dışının ikiye bölünebilir olması için arakesitleri boş olmayabileceğinden, Tang, X. [20] bir bulanık kümede arakesitleri boş olan farklı topolojik kısımlar aramıştır. Ayrıca bulanık topolojik uzaylarda geçerli olacak basit bulanık bölge tanımını verirken bulduğu topolojik kısımlardan yararlanmıştır. Aşağıda bu tanımlar belirtilmiştir.

Tanım 4.1 (X, δ) btu olsun. Bir A bulanık kümesinin kapanışının $x \in X$ için $(A^- \cap A^{t-})(x) = 0$ koşulunu sağlayan alt kümesine A kümesinin özünü denir ve $A^\oplus$ ile gösterilir. $x \in X$ için $(A^- \cap A^{t-})(x) > 0$ özelliğini sağlayan A kümesinin alt kümesine A kümesinin *saçağı* denir ve ℓA ile gösterilir [20]. Bu tanımlar aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$A^\oplus(x) = A^-(x) \Leftrightarrow (A^- \cap A^{t-})(x) = 0, x \in X$$

$$\ell A(x) = A^-(x) \Leftrightarrow (A^- \cap A^{t-})(x) > 0, x \in X$$

Önerme 4.2 (X, δ) btu'da A bir bulanık küme olsun. $A^\oplus$ açık bulanık küme ise $\ell A = \partial A$ olur [20].

Kanıt $A^\oplus$ açık bulanık küme olsun. Öz tanımdan dolayı $\ell A = A^- \cap A^{\oplus t}$ şeklinde yazılabilir. Buradan ℓA kapalı küme olur. Bu durumda ℓA kümesinin tanımı ∂A ile çakışır, yani $\ell A = \partial A$ olur. ■

Tanım 4.3 Bir bulanık A kümesinin kapanışının desteğini A^+ ile gösterelim. A^+ kümesinin tümleyenine *dışarısı* denir ve A^- ile gösterilir [20].

Tanım 4.4 (X, δ) btu olsun. $A^-(x) > A^o(x)$ özelliğini sağlayan A bulanık kümesinin kapanışının alt kümesine A kümesinin X uzayındaki *sınırsalı* denir ve $\ell^S A$ ile gösterilir. $A^-(x) = A^o(x)$ özelliğini sağlayan A bulanık kümesinin kapanışının alt kümesine A kümesinin X uzayındaki *içseli* denir ve A^i ile gösterilir [20]. Bu tanımlar aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$A^i(x) = A^-(x) \Leftrightarrow A^-(x) = A^o(x), \forall x \in X$$

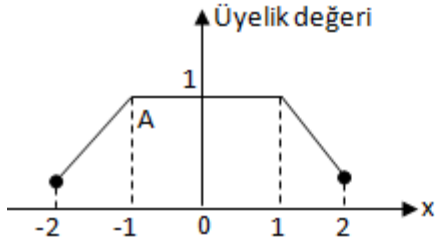
$$\ell^e A(x) = A^-(x) \Leftrightarrow A^-(x) > A^o(x), \forall x \in X$$

Tanım 4.5 A bulanık kümesinin içselinin $A^i \cap A^{\oplus t}$ arakesitine eşit olan alt kümesine, iç saçak denir ve $\ell^i A$ ile gösterilir [20].

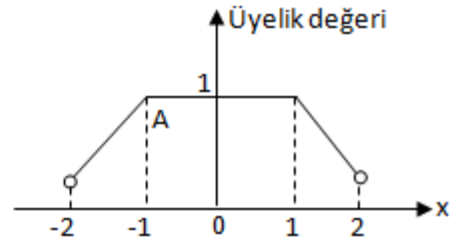
Örnek 4.6 (R, d) bilinen topolojisinin indirgediği $(\tilde{R}, d)$ btu'da, A bir kapalı bulanık aralık olsun.

$$\begin{aligned} A(x) &= \begin{cases} 0 & , |x| > 2 \\ 0.2 & , |x| = 2 \\ 1.8 - 0.8 * |x| & , 1 < |x| < 2 \\ 1 & , |x| \leq 1 \end{cases}, \quad A^o(x) = \begin{cases} 0 & , |x| > 2 \\ 0 & , |x| = 2 \\ 1.8 - 0.8 * |x| & , 1 < |x| < 2, \\ 1 - \varepsilon & , |x| = 1 \\ 1 & , |x| < 1 \end{cases} \\ \partial A(x) &= \begin{cases} 0 & , |x| > 2 \\ 0.2 & , |x| = 2 \\ 1.8 - 0.8 * |x| & , 1 < |x| < 2 \\ 1 & , |x| = 1 \\ 0 & , |x| < 1 \end{cases}, \quad A^{\oplus}(x) = \begin{cases} 0 & , |x| > 2 \\ 0 & , |x| = 2 \\ 0 & , 1 < |x| < 2 \\ 0 & , |x| = 1 \\ 1 & , |x| < 1 \end{cases} \\ \ell A(x) &= \begin{cases} 0 & , |x| > 2 \\ 0.2 & , |x| = 2 \\ 1.8 - 0.8 * |x| & , 1 < |x| < 2 \\ 1 & , |x| = 1 \\ 0 & , |x| < 1 \end{cases}, \quad A^i(x) = \begin{cases} 0 & , |x| > 2 \\ 0 & , |x| = 2 \\ 1.8 - 0.8 * |x| & , 1 < |x| < 2 \\ 0 & , |x| = 1 \\ 1 & , |x| < 1 \end{cases} \\ \ell^S A(x) &= \begin{cases} 0 & , |x| > 2 \\ \varepsilon & , |x| = 2 \\ 0 & , 1 < |x| < 2 \\ 1 - \varepsilon & , |x| = 1 \\ 0 & , |x| < 1 \end{cases}, \quad \ell^i A(x) = \begin{cases} 0 & , |x| > 2 \\ 0 & , |x| = 2 \\ 1.8 - 0.8 * |x| & , 1 < |x| < 2, \\ 0 & , |x| = 1 \\ 0 & , |x| < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

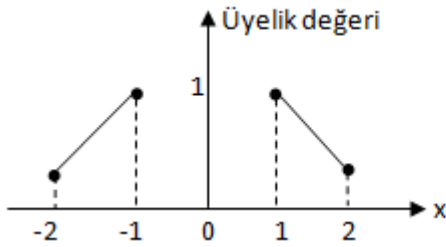
Bu durumda verilen A bulanık kümesi ve topolojik özellikleri Şekil 4.1'deki gibi gösterilir.



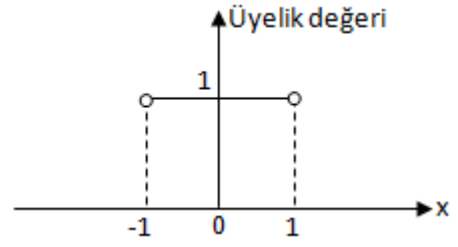
A bulanık kapalı aralığı



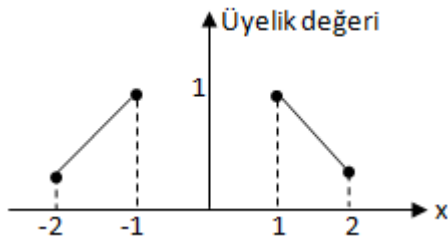
İç



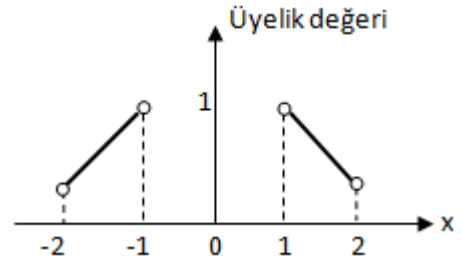
Sınırı



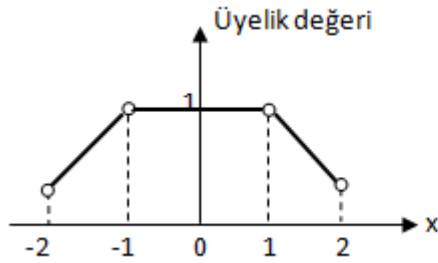
Özü



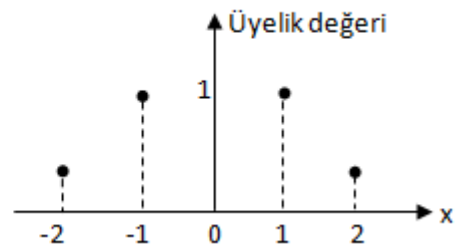
Saçağı



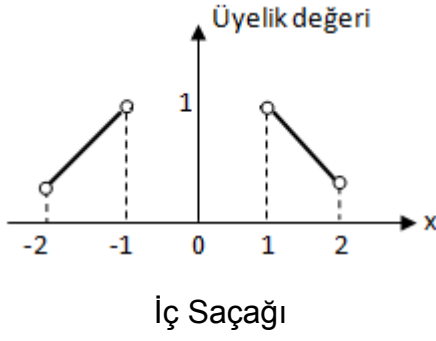
İçsel Sınırı



İçseli



Sınırsalı



Şekil 4.1. $(\tilde{R}, d)$ btu'da bir A bulanık kapalı aralığının içi, sınırı, özü, saçacağı, içsel sınırı, içseli, sınırsalı ve iç saçacağı.

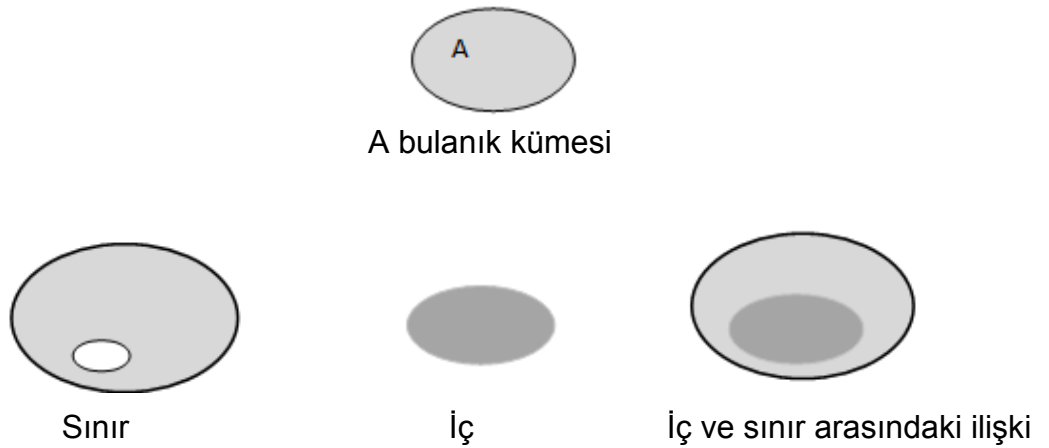
Önerme 4.7 (X, δ) btu'da A bir bulanık küme olmak üzere $A^{\oplus}$, ℓA ve A^{-} ikişerli arakesitleri boştur [20].

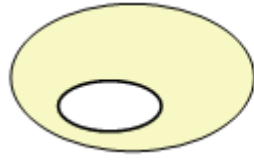
Önerme 4.8 (X, δ) btu'da A bir bulanık küme olsun. Aşağıda verilenler sağlanır [20]:

$$(1) \ell^s A \text{ ve } A^i \text{ ayrıktır: } \ell^e A \cap A^i = \emptyset$$

$$(2) A^{-} = \ell^s A \cup A^i$$

Önerme 4.9 (X, δ) btu'da A bir bulanık küme olsun. A^{-} , $\ell^e A$, $\ell^i A$ ve $A^{\oplus}$ ikişerli olarak ayrıktır ve topolojik özelliklerdir [20].

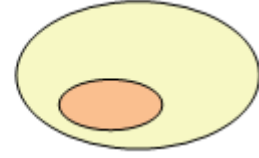




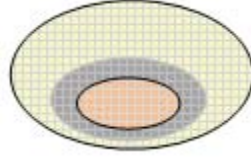
Saçak



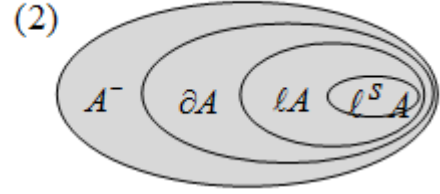
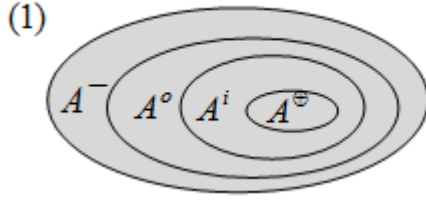
Öz



Saçak ve öz arasındaki ilişki



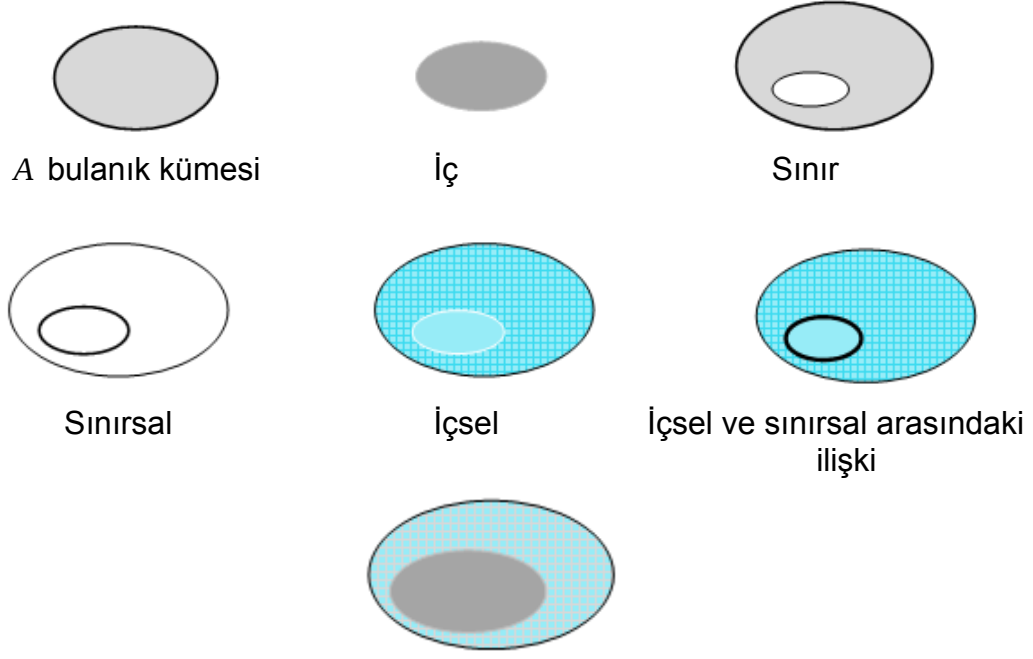
Şekil 4.2. Bulanık topolojik uzayda bir bulanık kümenin içi, sınırı, özü ve saçığı arasındaki ilişki.



Şekil 4.3. Bulanık topolojik uzayda bir bulanık kümenin

(1) İçi, içseli ve özü

(2) Sınırsalı, saçığı ve sınırı arasındaki ilişki



Şekil 4.4. Bulanık topolojik uzayda bir bulanık kümenin iç, sınır, sınırsal ve içsel arasındaki ilişki.

4.2. Genel Bulanık Topolojik Uzayda 3*3 Arakesit Matrisi

Yukarıda ki bölümde bir bulanık kümenin karşılıklı olarak ayrık olan altkümelerinden bahsedildi. Bu kısımlar kullanılarak bulanık topolojik uzayda aşağıda verilen 3*3 arakesit matrisi tanımlanabilir.

Öz, saçak ve dışarı üzerine kurulu 3*3 arakesit matrisi (X, δ) btu'da A ve B iki bulanık küme olmak üzere:

$$I_{3*3} = \begin{bmatrix} A^{\oplus} \cap B^{\oplus} & A^{\oplus} \cap \ell B & A^{\oplus} \cap B^{\ominus} \\ \ell A \cap B^{\oplus} & \ell A \cap \ell B & \ell A \cap B^{\ominus} \\ A^{\ominus} \cap B^{\oplus} & A^{\ominus} \cap \ell B & A^{\ominus} \cap B^{\ominus} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır.

İçsel, sınırsal ve dışarı üzerine kurulu 3*3 arakesit matrisi (X, δ) btu'da A ve B iki bulanık küme olmak üzere:

$$I_{3*3} = \begin{bmatrix} A^i \cap B^i & A^i \cap \ell^S B & A^i \cap B^= \\ \ell^S A \cap B^i & \ell^S A \cap \ell^S B & \ell^S A \cap B^= \\ A^= \cap B^i & A^= \cap \ell^S B & A^= \cap B^= \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır.

4.3. Genel Bulanık Topolojik Uzaylarda Basit Bulanık Bölge Tanımı

Bu bölümde verdiğimiz topolojik özellikleri de kullanarak Tang, X. [20] gevrek bulanık topolojik uzaylarda verilen basit bulanık bölge tanımını, genel bulanık topolojik uzaylara taşımıştır. Bu şekilde pratikteki uygulamalarda daha gerçekçi sonuçlar elde etmiştir.

Tanım 4.10 (X, δ) btu'da aşağıda verilen koşulları sağlayan A bulanık kümesine basit bulanık bölge denir:

- (1) A kümesi boştan farklı çift bağlantılı kapalı kümedir,
- (2) A kümesinin içi, özü ve dışı çift bağlantılı düzenli açık kümedir,
- (3) A kümesinin desteği, A kümesinin içinin kapanışının desteğine eşittir,
- (4) A kümesinin saçağı çift bağlantılı ve içsel saçağı çift bağlantılı açık kümedir,
- (5) A kümesinin sınırsalı boştan farklı kapalı kümedir.

A basit bulanık bölgesinde $A^{\oplus}$ açık bulanık küme olduğundan ℓA kümesi ∂A kümesine eşittir.

5. SEZGİSEL BULANIK TOPOLOJİK UZAYLAR

5.1. Sezgisel Bulanık Küme Teorisi

Tanım 5.1 X boştan farklı bir küme olsun. Sırasıyla $\mu_A : X \rightarrow I$ ve $\nu_A : X \rightarrow I$ fonksiyonları A kümesine üye olma ve olmama derecelerini belirtsin. Her $x \in X$ için $0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1$ olmak üzere bir A *sezgisel bulanık kümesi* (kısaca sbk),

$$A = \{ \langle x, \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle : x \in X \}$$

şeklinde tanımlanır.

Kolaylık olması açısından $A = \{ \langle x, \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle : x \in X \}$ sbk'si için $A = \langle x, \mu_A, \nu_A \rangle$ kısaltmasını kullanacağız.

Bir A sbk'si için eğer $\nu_A = 1 - \mu_A$ sağlanırsa bir önceki bölümde bahsettiğimiz bulanık kümeyi elde ederiz.

Önerme 5.2 X boştan farklı bir küme, A ve B sbk'leri ise $A = \{ \langle x, \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle : x \in X \}$, $B = \{ \langle x, \mu_B(x), \nu_B(x) \rangle : x \in X \}$ şeklinde tanımlansın.

$\mathcal{A} = \{ A_i : i \in J \}$ X kümesindeki sbk'lerin bir ailesi olmak üzere aşağıdakiler sağlanır:

$$(1) A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in X \text{ için } [\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \text{ ve } \nu_A(x) \geq \nu_B(x)];$$

$$(2) A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ ve } B \subseteq A$$

$$(3) A^t = \{ \langle x, \nu_A(x), \mu_A(x) \rangle : x \in X \} \text{ (} A \text{ sbk'sinin tümleyeni)}$$

$$(4) \cap A_i = \{ \langle x, \wedge \mu_{A_i}(x), \vee \nu_{A_i}(x) \rangle : x \in X \}$$

$$(5) \cup A_i = \{ \langle x, \vee \mu_{A_i}(x), \wedge \nu_{A_i}(x) \rangle : x \in X \}$$

$$(6) 0_{\sim} = \{ \langle x, 0, 1 \rangle : x \in X \} \text{ ve } 1_{\sim} = \{ \langle x, 1, 0 \rangle : x \in X \}$$

Önerme 5.3 A, B, C ve $A_i (i \in J)$, X kümesinde sbk'ler olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

$$(1) A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A \text{ ve } A \cup B = B$$

$$(2) A \subseteq B \text{ ve } B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$$

$$(3) B \cap (\cup A_i) = \cup (B \cap A_i)$$

$$(4) B \cup (\cap A_i) = \cap (B \cup A_i)$$

$$(5) A_i \subseteq B \text{ her } i \in J \Rightarrow \cup A_i \subseteq B$$

$$(6) B \subseteq A_i \text{ her } i \in J \Rightarrow B \subseteq \cap A_i$$

$$(7) (\cup A_i)^t = \cap A_i^t$$

$$(8) (\cap A_i)^t = \cup A_i^t$$

$$(9) A \subseteq B \Leftrightarrow B^t \subseteq A^t$$

$$(10) (A^t)^t = A$$

5.2. Sezgisel Bulanık Topolojik Uzay

Tanım 5.4 X boştan farklı bir küme ve τ , X kümesindeki sezgisel bulanık kümelerin bir ailesi olsun.

$$(T1) 0_\sim, 1_\sim \in \tau,$$

$$(T2) G_1, G_2 \in \tau \text{ için } G_1 \cap G_2 \in \tau$$

$$(T3) \forall i \in I, G_i \in \tau \text{ için } \cup G_i \in \tau.$$

τ yukarıda verilen koşulları sağlıyorsa τ ailesine X üzerinde sezgisel bulanık topoloji (kısaca SBT), (X, τ) ikilisine ise *sezgisel bulanık topolojik uzay* (kısaca

sbtu) denir. τ ailesinin her ögesine (X, τ) uzayında *sezgisel bulanık açık küme* (kısaca sbak) denir.

Tanım 5.5 (X, τ) sbtu'da A sbak'nin tümleyenine (A^t) X uzayında *sezgisel bulanık kapalı küme* (kısaca sbkk) denir [13, 8].

Tanım 5.6 (X, τ) sbtu ve $A = \langle x, \mu_A, \nu_A \rangle$ X uzayında sbk olsun. Sırasıyla A kümesinin *içi ve kapanışı* şu şekilde tanımlıdır:

$$A^o = \cup \{G : G, X' \text{te sbak ve } G \subseteq A\}$$

$$A^- = \cap \{K : K, X' \text{te sbkk ve } A \subseteq K\}$$

Sonuç 5.7 (X, τ) sbtu'da A ve B herhangi sbk'ler olsun. Aşağıdaki kurallar sağlanır:

$$(1) A^o \cap B^o = (A \cap B)^o, A^- \cup B^- = (A \cup B)^-,$$

$$(2) A^o \subseteq A \subseteq A^-,$$

$$(3) A^{to} = A^{-t}, A^{t-} = A^{ot}.$$

Tanım 5.8 (X, τ) sbtu ve $A = \langle x, \mu_A, \nu_A \rangle$, X uzayında sbk olsun. A sbk'nin *sınırı* şu şekilde tanımlıdır [17]:

$$\partial A = A^- \cap A^{t-}.$$

Tanım 5.9 (X, τ) sbtu'da $A = \langle x, \mu_A, \nu_A \rangle$ bir sbk olsun. A sbk'nin içerdği sbak'lerin ailesini $\{\langle x, \mu_{G_i}, \nu_{G_i} \rangle : i \in I\}$ ile gösterelim. A sbk'ni içeren sbkk'lerin ailesini $\{\langle x, \mu_{K_j}, \nu_{K_j} \rangle : j \in J\}$ ile gösterelim [17].

Bu durumda sırasıyla μ ve ν 'ye göre *iç, kapanış ve sınır* şu şekilde tanımlanır:

$$A_{[1]}^o = \langle x, enBüyük(\mu_{G_i}), enKüçük(1 - \mu_{G_i}) \rangle = \langle x, enBüyük(\mu_{G_i}), 1 - enBüyük(\mu_{G_i}) \rangle,$$

$$A_{[1]}^- = \langle x, enKüçük(\mu_{K_j}), enBüyük(1 - \mu_{K_j}) \rangle = \langle x, enKüçük(\mu_{K_j}), 1 - enKüçük(\mu_{K_j}) \rangle,$$

$$\partial A_{[1]} = A_{[1]}^- \cap A_{[1]}^{t-},$$

$$A_{<>}^o = \langle x, enBüyük(1 - \nu_{G_i}), enKüçük(\nu_{G_i}) \rangle = \langle x, 1 - enKüçük(\nu_{G_i}), enKüçük(\nu_{G_i}) \rangle,$$

$$A_{<>}^- = \langle x, enKüçük(1 - \nu_{K_j}), enBüyük(\nu_{K_j}) \rangle = \langle x, 1 - enBüyük(\nu_{K_j}), enBüyük(\nu_{K_j}) \rangle,$$

$$\partial A_{<>} = A_{<>}^- \cap A_{<>}^{t-}.$$

Tanımlardan da anlaşılacağı gibi μ ve ν 'ye göre iç, kapanış ve sınır birer bulanık kümedir. Bu yüzden bu kümelerin üyelik fonksiyonları $A_{[1]}^o(x)$ vb. şeklinde gösterilebilir.

Örnek 5.10 d , R uzayında bilinen topoloji olmak üzere, $(\tilde{R}, d)$, (R, d) uzayından indirgenen bulanık topolojik uzay olsun. τ topolojisi ise üye olma fonksiyonları d bulanık topolojisindeki açık kümelerin üyelik fonksiyonları, üye olmama fonksiyonları ise d bulanık topolojisindeki kapalı kümelerin üyelik fonksiyonları olan sezgisel bulanık kümelerden oluşsun.

(R', τ) sbtu'da $A = \{ \langle x, \mu, \nu \rangle : \mu(x) + \nu(x) \leq 1, \mu, 1 - \nu \in d \}$ sezgisel bulanık kümesi aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & , |x| > 2 \\ 0 & , |x| = 2 \\ 1.8 - 0.8 * |x| & , 1 < |x| < 2 \\ 1 - \varepsilon & , |x| = 1 \\ 1 & , |x| < 1 \end{cases}$$

$$\nu(x) = \begin{cases} 1 & , |x| > 2.1 \\ 1 & , |x| = 2.1 \\ -0.77 + 0.7 * |x| & , 1.1 < |x| < 2.1 \\ 1 - \varepsilon & , |x| = 1.1 \\ 1 & , |x| < 1.1 \end{cases}$$

A kümesinin μ ve ν 'ye göre iç ve sınırları aşağıdaki gibidir.

$$A_{[1]}^o(x) = \begin{cases} 0 & , |x| > 2 \\ 0 & , |x| = 2 \\ 1.8 - 0.8 * |x| & , 1 < |x| < 2 \\ 1 - \varepsilon & , |x| = 1 \\ 1 & , |x| < 1 \end{cases},$$

$$\partial A_{\sqcup}(x) = \begin{cases} 0 & , |x| > 2 \\ 0.2 & , |x| = 2 \\ 1.8 - 0.8 * |x| & , 1 < |x| < 2 \\ 1 & , |x| = 1 \\ 0 & , |x| < 1 \end{cases}$$

$$A_{\langle \rangle}^{\circ}(x) = \begin{cases} 0 & , |x| > 2.1 \\ 0 & , |x| = 2.1 \\ 1.77 - 0.7 * |x| & , 1.1 < |x| < 2.1 \\ 1 - \varepsilon & , |x| = 1.1 \\ 1 & , |x| < 1.1 \end{cases}$$

$$\partial A_{\langle \rangle}(x) = \begin{cases} 0 & , |x| > 2.1 \\ 0.3 & , |x| = 2.1 \\ 1.77 - 0.7 * |x| & , 1.1 < |x| < 2.1 \\ 1 & , |x| = 1.1 \\ 0 & , |x| < 1.1 \end{cases}$$

Önerme 5.11 (X, τ) sbtu'nda $A = \langle x, \mu_A, \nu_A \rangle$ bir sbk olsun [17].

$$(1) A_{\sqcup}^{\circ} \subseteq A^{\circ} \subseteq A_{\langle \rangle}^{\circ}$$

$$(2) A_{\sqcup}^{-} \subseteq A^{-} \subseteq A_{\langle \rangle}^{-}$$

$$(3) A_{\{[\cdot], \langle \rangle\}}^{\circ} = \{[\cdot], \langle \rangle\} A^{\circ} \text{ ve } A_{\{[\cdot], \langle \rangle\}}^{-} = \{[\cdot], \langle \rangle\} A^{-}$$

Kanıt Öncelikle üçüncü maddenin kanıtına bakalım, daha sonra bu maddeyi kullanarak birinci ve ikinci maddedeki eşitsizlikleri kanıtlayalım.

(X, τ) sbtu'da $A = \langle x, \mu_A, \nu_A \rangle$ bir sbk olsun. A sbk'nin içerdiği sbk'lerin ailesini $\{\langle x, \mu_{G_i}, \nu_{G_i} \rangle : i \in I\}$ ile gösterelim. A sbk'ni içeren sbkk'lerin ailesini $\{\langle x, \mu_{K_j}, \nu_{K_j} \rangle : j \in J\}$ ile gösterelim.

$$A_{\sqcup}^{\circ} = \langle x, enBüyük(\mu_{G_i}), enKüçük(1 - \mu_{G_i}) \rangle = \langle x, enBüyük(\mu_{G_i}), 1 - enBüyük(\mu_{G_i}) \rangle$$

olduğundan bunun $[\cdot] A^{\circ}$ kümesine eşit olduğu açıktır. Aynı şekilde $A_{\langle \rangle}^{\circ} = \langle \rangle A^{\circ}$,

$$A_{\sqcup}^{-} = [\cdot] A^{-} \text{ ve } A_{\langle \rangle}^{-} = \langle \rangle A^{-} \text{ kümeleri birbirine eşittir.}$$

$enBüyük(\mu_{G_i})$ fonksiyonunu μ_G , $enKüçük(\nu_{G_i})$ fonksiyonunu ν_G ile gösterelim.

Bu durumda aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz:

$$A_{\lfloor \rfloor}^{\circ} = [\] A^{\circ} = \langle x, enBüyük(\mu_{G_i}), 1 - enBüyük(\mu_{G_i}) \rangle = \langle x, \mu_G, 1 - \mu_G \rangle$$

$$A^{\circ} = \langle x, enBüyük(\mu_{G_i}), enKüçük(\nu_{G_i}) \rangle = \langle x, \mu_G, \nu_G \rangle$$

$$A_{<>}^{\circ} = \langle \rangle A^{\circ} = \langle x, 1 - enKüçük(\nu_{G_i}), enKüçük(\nu_{G_i}) \rangle = \langle x, 1 - \nu_G, \nu_G \rangle$$

$\mu_G + \nu_G < 1$ olduğundan $A_{\lfloor \rfloor}^{\circ} \subseteq A^{\circ} \subseteq A_{<>}^{\circ}$ eşitsizliği sağlanır.

Benzer şekilde $A_{\lfloor \rfloor}^{-} \subseteq A^{-} \subseteq A_{<>}^{-}$ eşitsizliği de sağlanır. ■

Tanım 5.12 (X, τ) sbtu'nda $A = \langle x, \mu_A, \gamma_A \rangle$ bir sbk olsun:

(1) A sbk' nin μ 'ye göre kapanışının $A_{\lfloor \rfloor}^{-} \cap A_{\lfloor \rfloor}^{t-} = 0_{\sim}$ olan alt kümesine A kümesinin μ 'ye göre özü denir. $A_{\lfloor \rfloor}^{\oplus}$ ile gösterilir.

(2) A sbk'nin ν 'ye göre kapanışının $A_{<>}^{-} \cap A_{<>}^{t-} = 0_{\sim}$ olan alt kümesine A kümesinin ν 'ye göre özü denir. $A_{<>}^{\oplus}$ ile gösterilir.

Bu tanımlar şu şekilde gösterilebilir:

$$A_{\lfloor \rfloor}^{\oplus} = A_{\lfloor \rfloor}^{-} \Leftrightarrow A_{\lfloor \rfloor}^{-} \cap A_{\lfloor \rfloor}^{t-} = 0_{\sim}$$

$$A_{<>}^{\oplus} = A_{<>}^{-} \Leftrightarrow A_{<>}^{-} \cap A_{<>}^{t-} = 0_{\sim}$$

Örnek 5.13 Örnek 5.10'da verdiğimiz A sbk için :

$$A_{\lfloor \rfloor}^{\oplus} = \begin{cases} 0 & , |x| \geq 1.1 \\ 1.8 - 0.8 * |x| & , 1 < |x| < 1.1, \\ 1 & , |x| \leq 1 \end{cases} \quad A_{<>}^{\oplus} = \begin{cases} 0 & , |x| \geq 2 \\ 0 & , 1 < |x| < 2 \\ 1 & , |x| \leq 1 \end{cases}$$

Tanım 5.14 (X, τ) sbtu'nda $A = \langle X, \mu_A, \nu_A \rangle$ bir sbk olsun:

(1) A sbk'nin μ 'ye göre kapanışının $A_{\sqcup}^- \cap A_{\sqcup}^{t-} \neq 0_{\sim}$ olan altkümesine A sbk'nin μ 'ye göre saçağı denir. $\ell A_{\sqcup}$ ile gösterilir.

(2) A sbk'nin ν 'ye göre kapanışının $A_{<}^- \cap A_{<}^{t-} \neq 0_{\sim}$ olan altkümesine A sbk'nin ν 'ye göre saçağı denir. $\ell A_{<}$ ile gösterilir.

Bu tanımlar şu şekilde gösterilebilir:

$$\ell A_{\sqcup} = A_{\sqcup}^- \Leftrightarrow A_{\sqcup}^- \cap A_{\sqcup}^{t-} \neq 0_{\sim}$$

$$\ell A_{<} = A_{<}^- \Leftrightarrow A_{<}^- \cap A_{<}^{t-} \neq 0_{\sim}$$

Örnek 5.15 Örnek 5.10'da verdiğimiz A sbk için :

$$\ell A_{\sqcup} = \begin{cases} 0 & , |x| > 2.1 \\ 1.8 - 0.8 * |x| & , 1.1 < |x| < 2.1 \\ 0 & , |x| \leq 1.1 \end{cases} , \quad \ell A_{<} = \begin{cases} 0 & , |x| \leq 1 \\ 1 & , 1 < |x| \leq 1.1 \\ 1.77 - 0.7 * |x| & , 1.1 < |x| \leq 2.1 \\ 0 & , |x| > 2.1 \end{cases}$$

Tanım 5.16 (X, τ) sbtu'nda $A = \langle X, \mu_A, \gamma_A \rangle$ bir sbk olsun:

(1) A sbk'nin μ 'ye göre kapanışının desteğinin tümleyenine A sbk'nin μ 'ye göre dışarısı denir. $A_{\sqcup}^=$ ile gösterilir.

(2) A sbk'nin ν 'ye göre kapanışının desteğinin tümleyenine A sbk'nin ν 'ye göre dışarısı denir. $A_{<}^=$ ile gösterilir.

$A_{\sqcup}^{\oplus}$, $\ell A_{\sqcup}$, $A_{\sqcup}^=$ ve $A_{<}^{\oplus}$, $\ell A_{<}$, $A_{<}^=$ kümeleri birer bulanık küme olduklarından aşağıdaki önerme açıktır.

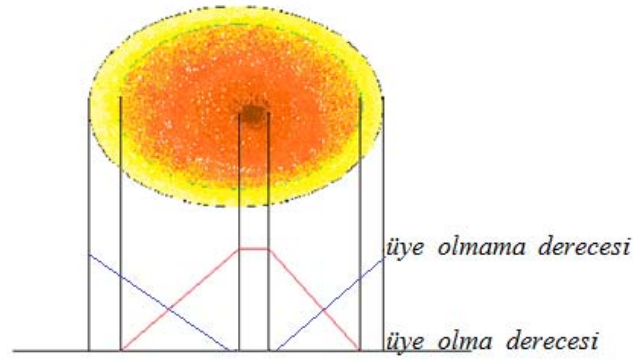
Önerme 5.17 (X, τ) sbtu'nda $A = \langle X, \mu_A, \gamma_A \rangle$ bir sbk olmak üzere, $A_{\sqcup}^{\oplus}$, $\ell A_{\sqcup}$, $A_{\sqcup}^=$ kümeleri ve $A_{<}^{\oplus}$, $\ell A_{<}$, $A_{<}^=$ kümeleri ikişerli ayrıktır.

Tanım 5.18 (X, τ) sbtu'nda,

- (1) Kapanışının içine eşit olan sbak' ye düzenli açık denir, $(A = A^{-o})$
- (2) İçinin kapanışına eşit olan sbkk'ye düzenli kapalı denir. $(A = A^{o-})$ [17].

Tanım 5.19 (X, τ) bağlantılı sbtu'da aşağıda verilen özellikleri sağlayan bir sezgisel bulanık A kümesine basit bulanık bölge denir [17].

- (1) A^- , $A_{[]}$ ve $A_{<>}^-$ düzgün kapalı,
- (2) A^o , $A_{[]}^o$ ve $A_{<>}^o$ düzgün açık,
- (3) $\partial A, \partial A_{[]} \vee \partial A_{<>}$ bağlantılıdır.



Şekil 5.1. (X, τ) sbtu'da basit bulanık bölge

5.3. Sezgisel Bulanık Topolojik Uzaylarda 3*6 Arakesit Matrisi

Sezgisel Bulanık Topolojik Uzaylarda 3*6 Arakesit Matrisi (X, τ) sbtu'da A ve B iki sezgisel bulanık küme olmak üzere:

$$I_{3*6} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} A_{[]}^{\oplus} \cap B_{[]}^{\oplus} & A_{[]}^{\oplus} \cap \ell B_{[]} & A_{[]}^{\oplus} \cap B_{[]}^{-} & A_{<>}^{\oplus} \cap B_{<>}^{\oplus} & A_{<>}^{\oplus} \cap \ell B_{<>} & A_{<>}^{\oplus} \cap B_{<>}^{-} \\ \ell A_{[]}^{\oplus} \cap B_{[]}^{\oplus} & \ell A_{[]}^{\oplus} \cap \ell B_{[]} & \ell A_{[]}^{\oplus} \cap B_{[]}^{-} & \ell A_{<>}^{\oplus} \cap B_{<>}^{\oplus} & \ell A_{<>}^{\oplus} \cap \ell B_{<>} & \ell A_{<>}^{\oplus} \cap B_{<>}^{-} \\ A_{[]}^{-} \cap B_{[]}^{\oplus} & A_{[]}^{-} \cap \ell B_{[]} & A_{[]}^{-} \cap B_{[]}^{-} & A_{<>}^{-} \cap B_{<>}^{\oplus} & A_{<>}^{-} \cap \ell B_{<>} & A_{<>}^{-} \cap B_{<>}^{-} \end{array} \right]$$

şeklinde tanımlıdır.

Bu matrisi I_1 ve I_2 3×3 lük iki matris olmak üzere $I_{3 \times 6} = \begin{bmatrix} I_1 & I_2 \end{bmatrix}$ şeklinde gösterebiliriz. Böylelikle I_1 matrisinin A ve B kümelerinin μ değerlerinden I_2 matrisinin ise, A ve B kümelerinin ν değerlerinden elde edildiği açıktır.

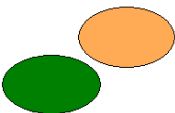
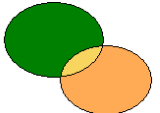
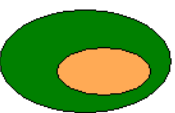
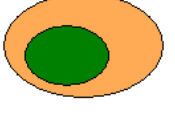
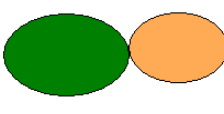
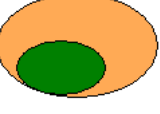
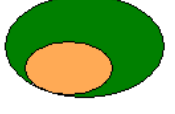
5.4. Sezgisel Bulanık Topolojik Uzaylarda Topolojik Bağlılıklar

Konumsal nesneler arasındaki ilişkiler incelenmeye gevrek kümelerle başlanmıştır. Egenhofer ve Fransoza [10] iki kümenin karşılıklı iç ve sınırlarının ikiye bölünmüş arakesitlerini kullanarak 2×2 arakesit matrisini oluşturmuşlardır. Egenhofer ve Herring [11] ise bölgeleri R^2 düzlemine yerleştirerek iki bölge arasında 8 bağıntı elde etmişlerdir.

Egenhofer ve Herring [11] tarafından bağlantılı sınırlara sahip iki bölge arasındaki 2×2 arakesit matrisi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$I_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} A^o \cap B^o & A^o \cap \partial B \\ \partial A \cap B^o & \partial A \cap \partial B \end{bmatrix}$$

A ve B basit gevrek bölgeleri arasındaki bağıntılar ise Çizelge 5.1.'deki gibi gruplandırılmıştır.

 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Ayrık	 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Eşit	 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Örtüşme	 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ İçerme
 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ İçinde	 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Dokunma	 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Kapsanma	 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Kapsama

Çizelge 5.1. İki basit gevrek bölge arasındaki 8 topolojik bağıntı

Daha sonra 2×2 arakesit matrisine kümenin dışı da eklenerek 3×3 arakesit matrisi elde edilmiştir. Tang, X. [20] ise bulanık topolojik uzaylarda basit bulanık bölge tanımını verdikten sonra öz, saçak ve dışarı tanımları üzerine kurulu 3×3 arakesit

matrisini elde etmiştir. Daha sonra bu matrisi kullanarak iki basit bulanık bölge arasında olması muhtemel kırk dört bağıntı elde etmiştir (Ek 1).

Gevrek topolojik uzaylarda tanımlı olan ayrık, içirme, içinde, kapsama, kapsanma, eşit, dokunma, örtüşme topolojik bağıntıları bulanık bölgeleri sorgulamada kullanılabilir. Bu bağıntılardan içirme ile kapsama ve içinde ile kapsanma genel olarak aynı topolojik özelliği ifade ettiklerinden bu bağıntılar birleştirilmiştir.

Bu altı bağıntı A ve B iki bulanık küme olmak üzere bulanık uzaylara şu şekilde uyarlanmıştır:

- (1) Ayrık: A ve B kümeleri ayrıktır,
- (2) İçerme: A kümesi B kümesini içerir,
- (3) İçinde: A kümesi B kümesinin içindedir,
- (4) Dokunma: İki bulanık kümenin özleri ayrıktır ve sınırları kesişir,
- (5) Eşit: A kümesi B kümesine eşittir.
- (6) Örtüşme: A kümesi B kümesinin içinde değildir ve A kümesi B kümesini içermez.

Daha önce vermiş olduğumuz 44 bağıntı, iki bölge arasında tek bir bağıntı vermekteydi. Fakat iki bulanık küme arasındaki ilişkiyi daha detaylı incelemek mümkündür. Bu bağıntılar A ve B bulanık kümelerinin öz, sınır gibi topolojik kısımları arasında da tanımlanabilir. Tang, X. [20] A ve B bulanık kümeleri için A ve B , $A^\oplus$ ve B , $A^\oplus$ ve $B^\oplus$ ile A ve $B^\oplus$ arasındaki bağıntıları incelemiştir (Ek 3). Bu bağıntılara *alt bağıntı* denir. Daha sonra A , B , $A^\oplus$ ve $B^\oplus$ kümeleri arasında elde ettiği bağıntılardan faydalanarak iki basit bulanık bölge arasındaki bağıntıların üyelik derecelerini belirlemiştir. A ve B , $A^\oplus$ ve B , $A^\oplus$ ve $B^\oplus$ ile A ve $B^\oplus$ kümeleri arasındaki dört bağıntının her birinin üyelik derecesi, toplam üyelik derecesi 1 olacak şekilde 0.25 alınmış ve eğer iki altküme arasındaki bağıntı aynı türden ise alt bağıntının üyelik dereceleri toplanılarak bağıntıların üyelik dereceleri bulunmuştur (Ek 4).

Örnek 5.17

(X, τ) sbtu'da A ve B iki basit bulanık bölge olsun. Farz edelim ki bu iki bölgeden elde edilen I_1 matrisi (18) matrisi olsun. (X, τ) sbtu'da olası 3×6 arakesit matrislerini yazalım. Bu örnekte matrisler için kullanılan numaralandırılmalar Ek 1'de verilmiştir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(18)-(22) bağıntıları

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(18)-(25) bağıntıları

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(18)-(31) bağıntıları

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(18)-(33) bağıntıları

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(18)-(36) bağıntıları

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(18)-(40) bağıntıları

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(18)-(43) bağıntıları

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(18)-(20) bağıntıları

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(18)-(24) bağıntıları

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(18)-(27) bağıntıları

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(18)-(30) bağıntıları

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(18)-(37) bağıntıları

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(18)-(39) bağıntıları

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(18)-(42) bağıntıları

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(18)-(26) bağıntıları

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

(18)-(32) bağıntıları

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

(18)-(38) bağıntıları

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

(18)-(41) bağıntıları

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

(18)-(18) bağıntıları

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

(18)-(19) bağıntıları

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

(18)-(21) bağıntıları

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

(18)-(23) bağıntıları

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

(18)-(28) bağıntıları

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

(18)-(29) bağıntıları

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

(18)-(34) bağıntıları

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

(18)-(35) bağıntıları

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

(18)-(44) bağıntıları

Bu bağıntılardan (18) ve (41) matrislerini ele alalım. Ek 3 ve Ek 4'ten (18) ve (41) matrisleri arasında aşağıdaki alt bağıntılar vardır.

Çizelge 5.2. Bağıntı (18) ve bağıntı (41) arasındaki bağıntılar

Sorgulama Bağıntısı	A ve B	$A^{\oplus}$ ve B	$A^{\oplus}$ ve $B^{\oplus}$	A ve $B^{\oplus}$
(18)	Örtüşme	Örtüşme	Örtüşme	Örtüşme
(41)	Eşit	İçinde	Eşit	İçerme

Çizelge 5.3. Bağıntı (18) ve bağıntı (41) arasındaki bağıntıların üyelik derecesi

Sorgulama Bağıntısı	İçerme	İçinde	Dokunma	Eşit	Örtüşme
(18)	0	0	0	0	1
(41)	0	0	0	1	0

Buradan ise A ve B sezgisel bulanık kümelerinin aralarındaki temel bağıntılarının (18) ve (41) üyelik dereceleri 1 olduğundan gevrek oldukları görülebilir. Sonuç olarak bu iki bulanık küme arasındaki temel bağıntılar için şu çizelgeyi elde ederiz.

Çizelge 5.4. A ve B sezgisel bulanık kümeleri arasındaki temel bağıntılarının üyelik derecesi

Sorgulama Bağıntısı	İçerme	İçinde	Dokunma	Eşit	Örtüşme
A ve B	0	0	0	0.5	0.5

Bu ise sezgilerimizle uyuşmaktadır. Çünkü μ değerlerine göre incelediğimizde bu kümeler örtüşmekte, ν değerlerine göre incelediğimizde ise eşit çıkmaktalar. Yukarıdaki çizelgede de elde ettiğimiz gibi bu kümeler ya eşittir ya da örtüşüyordur.

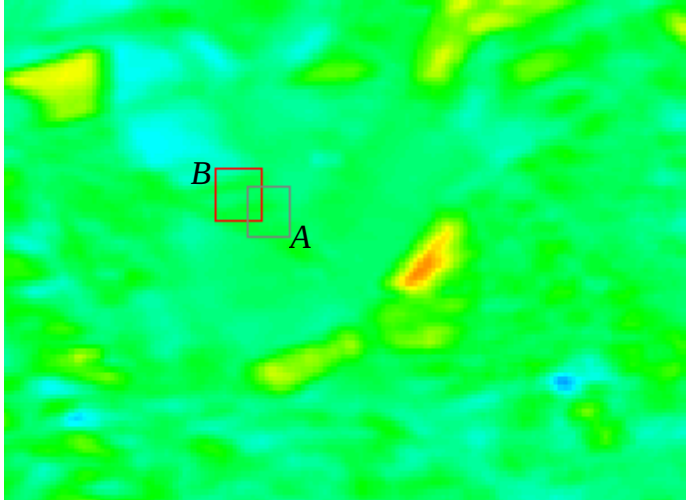
Örnek 5.18

Bu kısımda bir bölgeye ait PCIDSK dosyası (.pix uzantılı dosya) ele alınmıştır. PCIDSK dosyaları coğrafi görüntülerin analiz edilmesinde kullanılır. Bu dosyalar PCI Geomatics şirketinin bir yazılımı olan Geomatics ile oluşturulmuştur. Burada ise Geomatics yazılımı ile birlikte gelen irvine.pix dosyası incelenmiştir. irvine.pix farklı dalga boylarında çekilmiş 6 banddan oluşmaktadır. Her banddaki renkler farklı coğrafi özellikleri vermektedir [23].

Açık mavi: Yüksek yoğunlukta nüfuslu bölgeler,

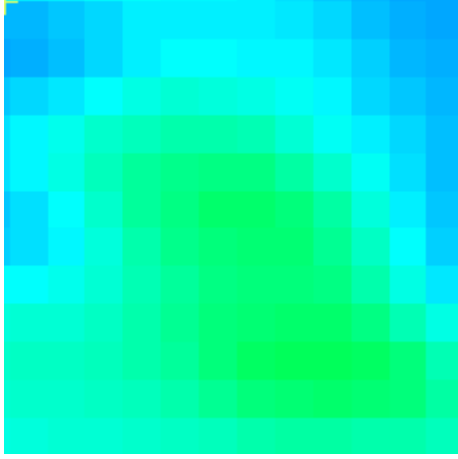
Parlak yeşil: sağlıklı bitki örtüsü vb.

Band 4 ve Band 5'teki parlak yeşil renk değerlerinden faydalananarak yüksek yoğunluklu nüfusa sahip bir alt bölge ile Band 3 ve Band 2'deki açık mavi renk değerlerinden faydalananarak sağlıklı bitki örtüsüne sahip başka bir alt bölge arasındaki topolojik bağıntıyı inceleyelim.



Şekil 4.6. irvine.pix

irvine.pix haritasının (372,92) ve (383,103) pikselleri arasında kalan bölgede yüksek yoğunluklu nüfusu inceleyelim. Bu bölgeyi A ile gösterelim. Bu bölgenin Band 5 değerlerinden elde edilen haritası aşağıdaki gibidir.



Şekil 4.7. irvine.pix, Band 5, A bölgesi

A bölgesinin piksellerinin Band 5'ten elde edilen yeşil renk değerlerinden yola çıkarak, bölgenin özü ve sınırı aşağıdaki gibi belirlenmiştir. Renk değeri 46 ile 53 arasında olan pikseller bölgenin özünü, 45.5608 ile 28.3216 arasında olan pikseller ise sınırları belirtmektedir. Renk değeri bahsedilen aralıklar haricinde olan pikseller ise bölgenin dışıdır.

Piksel no	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103
372												
373												
374												
375												
376												
377												
378												
379												
380												
381												
382												
383												

Şekil 4. 8. A bölgesinin Band 5 değerlerine göre nüfus yoğunluğunun incelenmesi

■ A bölgesinin özü ■ A bölgesinin sınırı □ A bölgesinin dışıdır

A bölgesinin Band 3 değerlerinden elde edilen haritası aşağıdaki gibidir:



Şekil 4. 9. irvine.pix, Band 3, A bölgesi

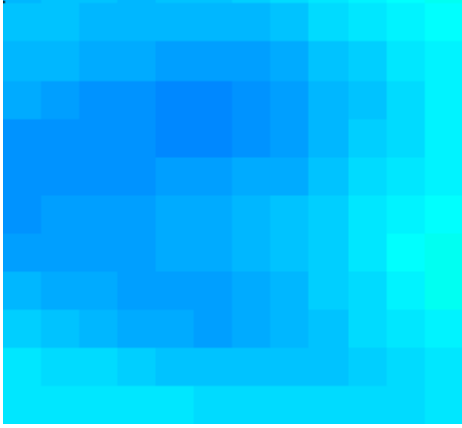
A bölgesinin piksellerinin Band 3'ten elde edilen yeşil renk değerlerinden yola çıkarak, bölgenin özü ve sınırı aşağıdaki gibi belirlenmiştir. Renk değeri 43.6627 ile 48.6824 arasında olan pikseller bölgenin özünü, 43.1608 ile 38.6431 arasında olan pikseller ise sınırları belirtmektedir. Renk değeri bahsedilen aralıklar haricinde olan pikseller ise bölgenin dışıdır.

Piksel no	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103
372												
373												
374												
375												
376												
377												
378												
379												
380												
381												
382												
383												

Şekil 4.10 A bölgesinin Band 3 değerlerine göre nüfus yoğunluğunun incelenmesi

■ A bölgesinin özü ■ A bölgesinin sınırı □ A bölgesinin dışı

irvine.pix haritasının (372,92) ve (383,103) pikselleri arasında kalan bölgede sağlıklı bitki örtüsünü inceleyelim. Bu bölgeyi B ile gösterelim. Bu bölgenin Band 2 değerlerinden elde edilen haritası aşağıdaki gibidir.



Şekil 4.11. irvine.pix, Band 2, B bölgesi

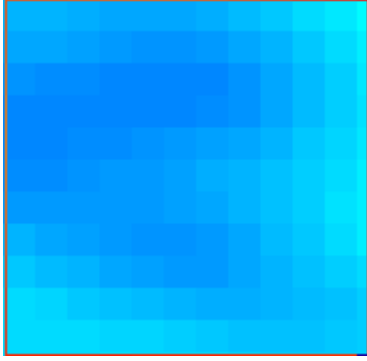
B bölgesinin piksellerinin Band 2'den elde edilen açık mavi renk değerlerinden yola çıkarak, bölgenin özü ve sınırı aşağıdaki gibi belirlenmiştir. Renk değeri 13 ile 25.1686 arasında olan pikseller bölgenin özünü, 25.5882 ile 32.7216 arasında olan pikseller ise, sınırları belirtmektedir.

Piksel no	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97
370												
371												
372												
373												
374												
375												
376												
377												
378												
379												
380												
381												

Şekil 4.12. B bölgesinin Band 2 değerlerine göre sağlıklı bitki örtüsünün incelenmesi

■ B bölgesinin özü ■ B bölgesinin sınırı

B bölgesinin Band 1 değerlerinden elde edilen haritası aşağıdaki gibidir:



Şekil 4.13. irvine.pix, Band 1, B bölgesi

B bölgesinin piksellerinin Band 1’den elde edilen açık mavi renk değerlerinden yola çıkarak, bölgenin özü ve sınırı aşağıdaki gibi belirlenmiştir. Renk değeri 43 ile 66.827 arasında olan pikseller bölgenin özünü, 66.827 ile 74.5137 arasında olan pikseller ise sınırları belirtmektedir.

Piksel no	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97
370												
371												
372												
373												
374												
375												
376												
377												
378												
379												
380												
381												

Şekil 4.14 B bölgesinin Band 1 değerlerine göre sağlıklı bitki örtüsünün incelenmesi

■ B bölgesinin özü ■ B bölgesinin sınırı

A bölgesinin Band 5 değerlerinden ve B bölgesinin Band 2 değerlerinden elde edilen sırasıyla Şekil 4.8 ve Şekil 4.12’yi bölgelerin μ değerlerinden elde edilen topolojik kısımları olarak ele alabiliriz. Böylece Şekil 4.15’teki topolojik bağıntıyı elde ederiz.

Piksel no	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103
370																		
371																		
372																		
373																		
374																		
375																		
376																		
377																		
378																		
379																		
380																		
381																		
382																		
383																		

Şekil 4.15 A bölgesinin Band 5 değerlerinden elde edilen topolojik kısımları ile B bölgesinin Band 2 değerlerinden elde edilen topolojik kısımlarının karşılaştırması

Bu ise bizi $I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrisine götürür.

Aynı şekilde A bölgesinin Band 3 değerlerinden ve B bölgesinin Band 1 değerlerinden elde edilen sırasıyla Şekil 4.10 ve Şekil 4.14'ü bölgelerin ν değerlerinden elde edilen topolojik kısımları olarak ele alabiliriz. Böylece Şekil 4.16'daki topolojik bağıntıyı elde ederiz.

Piksel no	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103
370																		
371																		
372																		
373																		
374																		
375																		
376																		
377																		
378																		
379																		
380																		
381																		
382																		
383																		

Şekil 4.16 A bölgesinin Band 3 değerlerinden elde edilen topolojik kısımları ile B bölgesinin Band 1 değerlerinden elde edilen topolojik kısımlarının karşılaştırması.

Bu ise bizi $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrisine götürür.

Ek 4'ten faydalanarak bu bölgeler arasındaki topolojik bağıntıların üyelik derecelerini elde edebiliriz.

Çizelge 5.5. I_1 ve I_2 topolojik bağıntılarının üyelik dereceleri

Bağıntı	İçerme	İçinde	Dokunma	Eşit	Örtüşme
I_1	0	0	0.75	0	0.25
I_2	0	0	0	0	1

Sonuç olarak iki bölgenin %37,5 olasılıkla dokunduğunu %62,5 olasılıkla örtüştüklerini söyleyebiliriz. Ayrıca iki bölgenin özünü ele aldığımızda, I_1 matrisine göre bu iki bölge dokunmaktadır ve I_2 matrisine göre ise bu iki bölge örtüşmektedir. Bu durumda ancak küçük bir bölgede nüfus yoğunluğu yüksekken sağlıklı bitki örtüsü bulunmaktadır. Yani, sağlıklı bitki örtüsünün bulunduğu bölgede nüfus yoğunluğu düşüktür. Bu ise sezgilerimizle uyusmaktadır.

EK

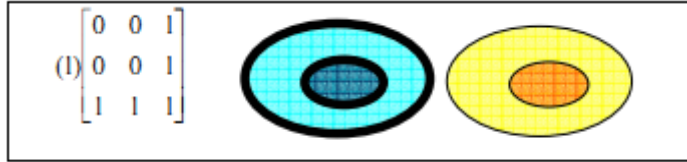
Burada verilen çizelgelerde Tang, X. [20] referans alınmıştır.

EK 1. A ve B basit bulanık kümeleri arasındaki 44 adet 3*3 arakesit matrisleri.

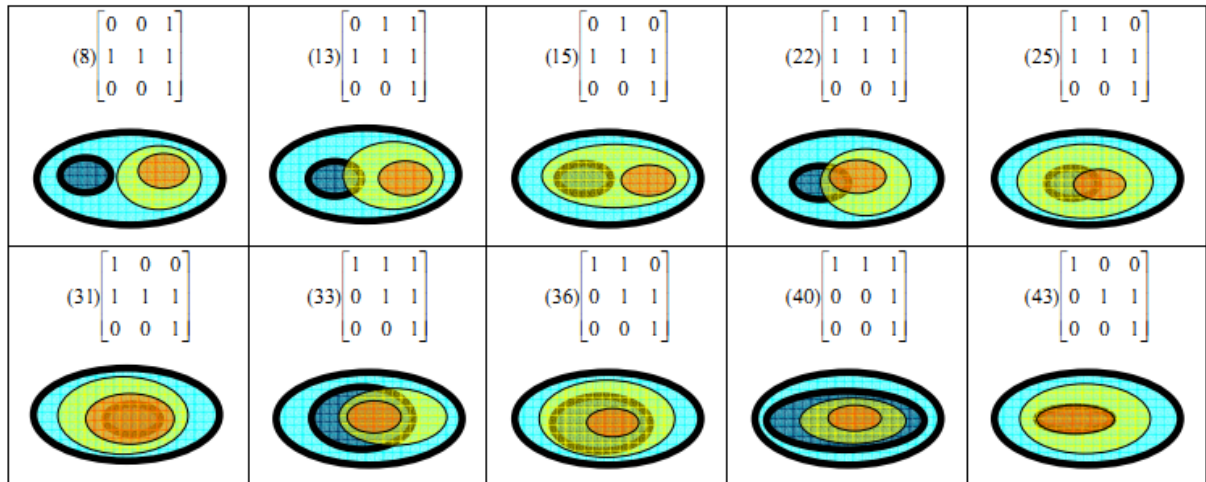
	(1) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$		(2) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$		(3) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
	(4) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$		(5) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$		(6) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
	(7) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$		(8) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		(9) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
	(10) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$		(11) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$		(12) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
	(13) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		(14) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$		(15) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
	(16) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$		(17) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		(18) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
	(19) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$		(20) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$		(21) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
	(22) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		(23) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$		(24) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
	(25) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		(26) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		(27) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
	(28) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$		(29) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$		(30) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
	(31) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		(32) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		(33) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
	(34) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$		(35) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$		(36) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
	(37) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$		(38) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		(39) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
	(40) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		(41) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		(42) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
	(43) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		(44) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$		

EK 2. A ve B basit bulanık kümeleri arasındaki bağıntılar.

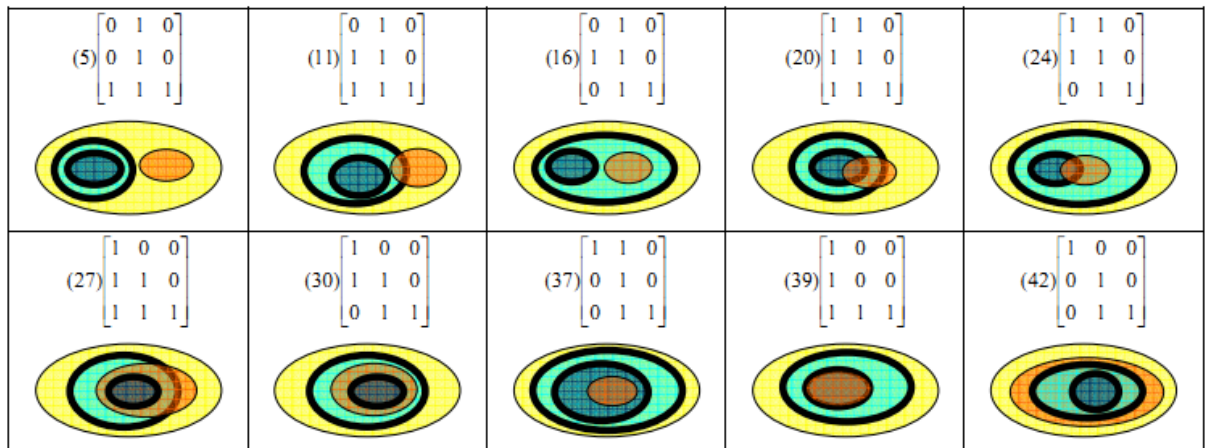
A ve B bulanık kümeleri ayrıktır



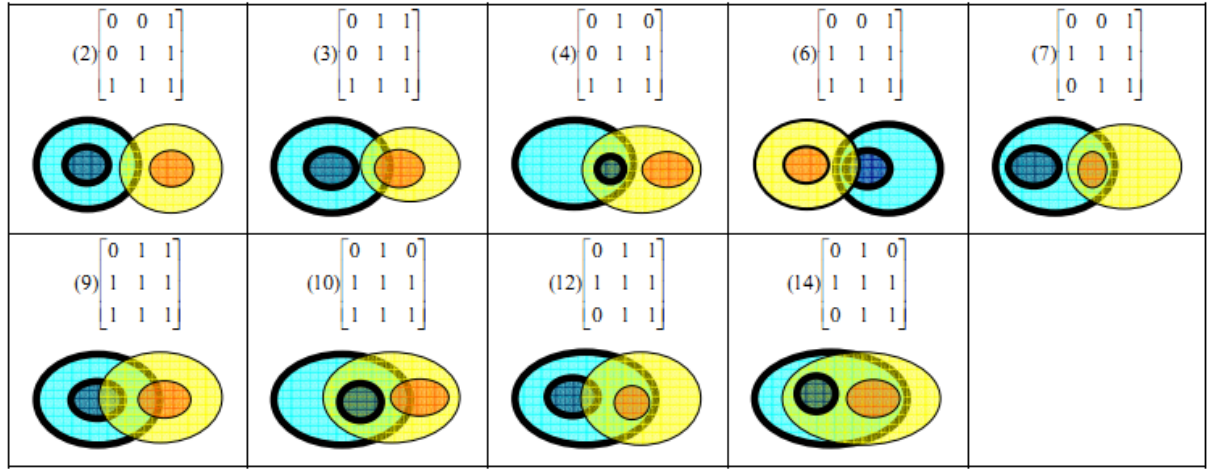
A bulanık kümesi B bulanık kümesini içerir



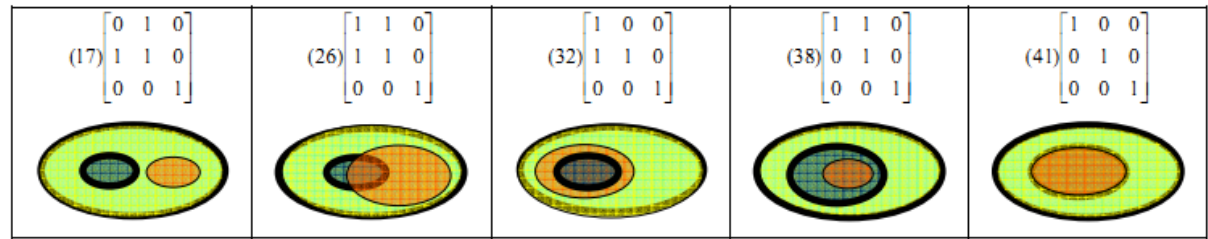
A bulanık kümesi B bulanık kümesinin içindedir



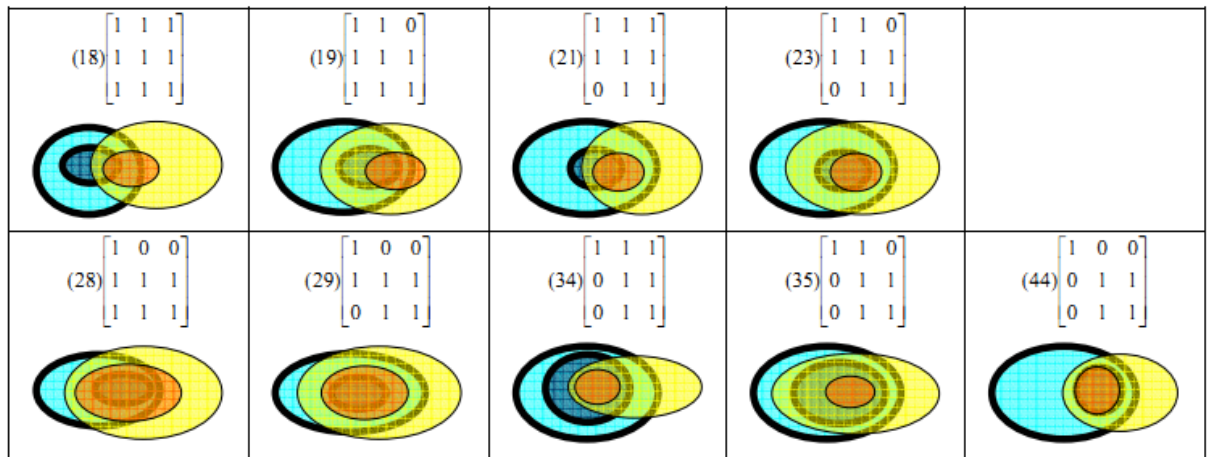
A bulanık kümesi B bulanık kümesine dokunur.



A bulanık kümesi B bulanık kümesine eşittir



A bulanık kümesi ile B bulanık kümesi örtüşür



EK 3.

A ve B basit bulanık kümeleri arasındaki alt bağıntılar

Sorgulama bağıntısı no.	$A^{\oplus}$ ve B	$A^{\oplus}$ ve $B^{\oplus}$	Sorgulama bağıntısı no.	A ve $B^{\oplus}$	$A^{\oplus}$ ve $B^{\oplus}$	Sorgulama bağıntısı no.	$A^{\oplus}$ ve $B^{\oplus}$
(8)	Dokunma	Dokunma	(5)	Dokunma	Dokunma	(17)	Dokunma
(13)	Örtüşür	Dokunma	(11)	Örtüşür	Dokunma	(26)	Örtüşür
(15)	İçinde	Dokunma	(16)	İçerir	Dokunma	(32)	İçinde
(22)	Örtüşür	Örtüşür	(20)	Örtüşür	Örtüşür	(38)	İçerir
(25)	İçinde	Örtüşür	(24)	İçerir	Örtüşür	(41)	Eşit
(31)	İçinde	İçinde	(27)	Örtüşür	İçinde		
(33)	Örtüşür	İçerir	(30)	İçerir	İçinde		
(36)	İçinde	İçerir	(37)	İçerir	İçerir		
(40)	İçerir	İçerir	(39)	İçinde	İçinde		
(43)	İçinde	Eşit	(42)	İçerir	Eşit		
A ve B arasındaki sorgulama bağıntısı: içirme. A ve $B^{\oplus}$ arasındaki sorgulama bağıntısı: içirme.			A ve B arasındaki sorgulama bağıntısı: içinde. $A^{\oplus}$ ve B arasındaki sorgulama bağıntısı: içinde			A ve B arasındaki sorgulama bağıntısı: eşit. A ve $B^{\oplus}$ arasındaki sorgulama bağıntısı: içirme. $A^{\oplus}$ ve B arasındaki sorgulama bağıntısı: içinde.	
Sorgulama bağıntısı no.	A ve $B^{\oplus}$	$A^{\oplus}$ ve B	Sorgulama bağıntısı no.	A ve $B^{\oplus}$	$A^{\oplus}$ ve B	$A^{\oplus}$ ve $B^{\oplus}$	
(2)	Dokunma	Dokunma	(18)	Örtüşme	Örtüşme	Örtüşme	
(3)	Örtüşme	Dokunma	(19)	Örtüşme	İçinde	Örtüşme	
(4)	Dokunma	İçinde	(21)	İçerme	Örtüşme	Örtüşme	
(6)	Dokunma	Örtüşme	(23)	İçerme	İçerme	Örtüşme	
(7)	İçerme	Dokunma	(28)	Örtüşme	İçinde	İçinde	
(9)	Örtüşme	Örtüşme	(29)	İçerme	İçinde	İçinde	
(10)	Örtüşme	İçinde	(34)	İçerme	Örtüşme	İçerme	
(12)	İçerme	Örtüşme	(35)	İçerme	İçinde	İçerme	
(14)	içerme	içerme	(44)	İçerme	İçinde	Eşit	
A ve B arasındaki sorgulama bağıntısı: dokunma. $A^{\oplus}$ ve $B^{\oplus}$ arasındaki sorgulama bağıntısı: dokunma.			A ve B arasındaki sorgulama bağıntısı: örtüşme.				

EK 4.

İki basit bulanık bölge arasındaki alt bağıntıların üyelik dereceleri

Bağıntı	İçerme	İçinde	Dokunma	Eşit	Örtüşme
(2)	0	0	1	0	0
(3)	0	0	0.75	0	0.25
(4)	0	0.25	0.75	0	0
(5)	0	0.5	0.5	0	0
(6)	0	0	0.75	0	0.25
(7)	0.25	0	0.75	0	0
(8)	0.5	0	0.5	0	0
(9)	0	0	0.5	0	0.5
(10)	0	0.25	0.5	0	0.25
(11)	0	0.5	0.25	0	0.25
(12)	0.25	0	0.5	0	0.25
(13)	0.5	0	0.25	0	0.25
(14)	0.5	0	0.5	0	0
(15)	0.5	0.25	0.25	0	0
(16)	0.25	0.5	0.25	0	0
(17)	0.25	0.25	0.25	0.25	0
(18)	0	0	0	0	1
(19)	0	0.25	0	0	0.75
(20)	0	0.5	0	0	0.5
(21)	0.25	0	0	0	0.75
(22)	0.5	0	0	0	0.5
(23)	0.5	0	0	0	0.5
(24)	0.25	0.5	0	0	0.25
(25)	0.5	0.25	0	0	0.25
(26)	0.25	0.25	0	0.25	0.25
(27)	0	0.75	0	0	0.25
(28)	0	0.5	0	0	0.5
(29)	0.25	0.5	0	0	0.25
(30)	0.25	0.75	0	0	0
(31)	0.5	0.5	0	0	0
(32)	0.25	0.5	0	0.25	0
(33)	0.75	0	0	0	0.25
(34)	0.5	0	0	0	0.5
(35)	0.5	0.25	0	0	0.25
(36)	0.75	0.25	0	0	0
(37)	0.5	0.5	0	0	0
(38)	0.5	0.25	0	0.25	0
(39)	0	1	0	0	0
(40)	1	0	0	0	0
(41)	0	0	0	1	0
(42)	0.25	0.5	0	0.25	0
(43)	0.5	0.25	0	0.25	0
(44)	0.25	0.25	0	0.25	0.25

KAYNAKLAR

- [1] Atanassov, K., Intuitionistic Fuzzy Sets, Fuzzy Sets and Systems 20 (1986), 87-96.
- [2] Chang C.L., 1968. Fuzzy topological space. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 24: 182-190.
- [3] Clementini, E. and Di Felice, P., 1994, A Comparison of Methods for Representing Topological Relationships, Information Sciences 80, 1-34.
- [4] Clementini, E. and Di Felice, P., 1996a, A Model for Representing Topological Relationships Between Complex Geometric Features in Spatial Databases, Information Sciences 90(1-4):121-136.
- [5] Clementini E. and Di Felice, P., 1996b. An algebraic model for spatial objects with indeterminate boundaries. In: Geographic Objects with Indeterminate Boundaries, P.A. Burrough and A.U. Frank (eds), Taylor & Francis, London, pp. 155-169.
- [6] Clementini, E. and Di Felice, P., and van Oosterom, E., 1993, A Small Set of Formal Topological Relationships Suitable for End-User Interaction, Proceedings of the Third International Symposium on Large Spatial Databases, Singapore.
- [7] Cuchillo-Ibáñez, E. and Tarrés, J., 1997, On the Boundary of Fuzzy Sets. Fuzzy Sets and Systems, 89: 113-119.
- [8] Çoker, D., 1997, An Introduction to Intuitionistic Fuzzy Topological Spaces, Fuzzy Sets and Systems 88-1 (1997) 81-89.
- [9] Egenhofer, M. J., Clementini, E., and Di Felice, P., 1994, Topological Relations between Regions with Holes, International Journal of Geographical Information Systems 8 (2): 129-144.
- [10] Egenhofer, M. J. and Franzosa, R. D., 1991, Point–Set Topological Spatial Relations, International Journal for Geographical Information Systems, 5(2), 161—174.

- [11] Egenhofer, M. J. and Herring, John R., 1990, A Mathematical Framework for the Definition of Topological Relationships. Proc. Fourth International Symposium on Spatial Data Handling, Zurich, Switzerland, 803-813.
- [12] Egenhofer, M. J. and Herring, John R., 1991, Categorizing Binary Topological Relationships Between Regions, Lines, and Points in Geographic Databases, Technical Report, Department Of Surveying Engineering, University Of Maine, Orono, ME.
- [13] Gürçay, H., Eş, H. and Coker, D., 1997, On Fuzzy Continuity in Intuitionistic Fuzzy Topological Spaces, the Journal of Fuzzy Mathematics Vol. 5, No.2.
- [14] Hacıömeroğlu, M., 2006, Coğrafi Bilgi Sistemlerinde Geometri Sınıf Kütüphanesi, Yüksek Lisans Tezi, Başkent Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, s.28-32.
- [15] Klir, G.J. and Yuan B., 1995, Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications, Includes Bibliographical References and Index ISBN 0-13-101171-5
- [16] Liu Y.M. and Luo M.K., 1997. Fuzzy Topology World Scientific. Mamdani E.H, 1976. Advances in the linguistic synthesis of fuzzy logic controllers. International Journal of Man-Machine Studies, 8: 669-679.
- [17] Malek, M.R., and Twaroch, F., 2004 An Introduction to Intuitionistic Fuzzy Spatial Region. In Proceedings of *ISSDQ '04*.
- [18] Pu, P.M. and Liu, Y.M., 1980, Fuzzy Topology I: Neighborhood Structure of a Fuzzy Point and Moor-Smith Convergence. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 76: 581-599.
- [19] Schneider M., 1999. Uncertainty management for spatial data in databases: fuzzy spatial data types, The 6th International Symposium on Advances in Spatial Databases (SSD), LNCS 1651, Springer Verlag, pp. 330-351.
- [20] Tang, X., 2004, Spatial Object Modeling in Fuzzy Topological Spaces with Applications to Land Cover Change, International Institute for Geo-information Science and Earth Observation Enschede, the Netherlands.

[21] Warren, H.R., 1977, Boundary of a Fuzzy Set, Indiana University Mathematics Journal, 26(2): 191-197.

[22] Wu, G.Q. and Zheng, C.Y., 1991, Fuzzy Boundary and Characteristic Properties of 207 Order-Homomorphisms, Fuzzy Sets and Systems, 39: 329-337.

[23] Internet: Band Combinations

<http://web.pdx.edu/~emch/ip1/bandcombinations.html>

Erişim Tarihi: 6.12. 2011

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Pınar Satılmış
Doğum Yeri : Ankara
Doğum Yılı : 27.02.1986
Medeni Hali : Bekâr
Yazışma Adresi : Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü 06800
Beytepe Çankaya / ANKARA / TÜRKİYE
Telefon : +90312 297 78 50
Elektronik Posta Adresi : pinarmat@hacettepe.edu.tr
Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Durumu:

Lisans : 2004 – 2009 Hacettepe Üniversitesi Matematik
Bölümü, Ankara

İş Tecrübesi:

2010 - : Araştırma Görevlisi, Hacettepe Üniversitesi
Matematik Bölümü