

**VARYANS BİLEŞENİ TAHMİN YÖNTEMLERİNİN
YUMURTA KALİTE VE AĞIRLIĞINA YÖNELİK
BİR UYGULAMA İLE KARŞILAŞTIRMASI**

İlkay DOĞAN

DANIŞMAN

Yrd. Doç. Dr. İbrahim KILIÇ

İSTATİSTİK

Mayıs, 2012

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS

VARYANS BİLEŞENİ TAHMİN YÖNTEMLERİNİN YUMURTA KALİTE VE
AĞIRLIĞINA YÖNELİK BİR UYGULAMA İLE KARŞILAŞTIRMASI

İlkay DOĞAN

DANIŞMAN

Yrd. Doç. Dr. İbrahim KILIÇ

İSTATİSTİK

Mayıs 2012

TEZ ONAY SAYFASI

İlkay DOĞAN tarafından hazırlanan “Varyans Bileşeni Tahmin Yöntemlerinin Yumurta Kalite ve Ağırlığına Yönelik Bir Uygulama ile Karşılaştırması” adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 11/05/2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **İstatistik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. İbrahim KILIÇ

Başkan : Prof. Dr. Mustafa TEKERLİ

Üye : Doç. Dr. Süleyman DÜNDAR

Üye : Yrd. Doç. Dr. İbrahim KILIÇ

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun
...../...../.... tarih ve
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü
Prof. Dr. Mevlüt DOĞAN

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

**Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım
bu tez çalışmasında;**

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

11/05/2012

İlkay DOĞAN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

VARYANS BİLEŞENİ TAHMİN YÖNTEMLERİNİN YUMURTA KALİTE VE AĞIRLIĞINA YÖNELİK BİR UYGULAMA İLE KARŞILAŞTIRMASI

İlkay DOĞAN

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. İbrahim KILIÇ

Bu araştırmada, varyans bileşenlerinin tahmin edilmesinde literatürde yaygın olarak kullanılan yöntemlerden; ANOVA, Henderson III, ML, REML, MINQUE gibi önemli yöntemlerin dengeli ve dengeli olmayan veriler için karşılaştırmalı olarak incelenmesi amaçlanmıştır. Bu çerçevede, söz konusu yöntemler ile sofralık yumurtaların tazelik veya bayatlık durumunu ifade eden Haugh birimi ve yumurta ağırlığına ilişkin varyans bileşenleri tahmin edilmiştir. Çalışma sonucunda dengeli olmayan verilerde Haugh birimine ilişkin varyans bileşenleri tahmininde ana yaşının etkisini en yüksek oranda tahmin eden yöntem Henderson III (%36,59), en düşük oranda tahmin ise ML yöntemi (%23,05) ile elde edilmiştir. Yumurta ağırlığı üzerinde ana yaşının etkisinin belirlenmesinde en yüksek tahmini MINQUE (%72,31), en düşük tahmini ise ML yöntemi (%56,56) vermiştir. Dengeli verilerde, gerek Haugh birimi gerekse yumurta ağırlığı için varyans bileşenleri tahminleri dört yöntemde birbirine eşit bulunmuş olup ML yönteminde ise hata oranı diğer yöntemlerden daha yüksek bulunmuştur. Araştırma sonuçlarının, istatistik literatüre katkı sunmasının yanı sıra bu yöntemlere ihtiyaç duyan ve farklı alanlardaki araştırmacılara da katkı sağlayacağı kanaatine varılmıştır.

2012, x + 73 sayfa

Anahtar Kelimeler: Varyans bileşenleri tahmini, ANOVA, Henderson yöntemleri, ML, REML, MINQUE

ABSTRACT

M.Sc Thesis

COMPARISON OF VARIANCE COMPONENT ESTIMATION METHODS WITH AN APPLICATION ON EGG QUALITY AND WEIGHT

İlkay DOĞAN

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Statistic

Supervisor: Assistant Professor İbrahim KILIÇ

In this study, some important methods such as; ANOVA, Henderson III, ML, REML, MINQUE which are commonly used in literature to estimate variance components, are aimed to investigate comparatively for balanced and unbalanced data. In this context, the variance components related to egg weight and Haugh unit -describing the state of freshness or staleness of table eggs- are estimated with these methods. As a result of this study, with the unbalanced data for the estimation of variance components of Haugh unit, the method that estimated the effect of hen age with the highest rate is Henderson III (36.59%), the method with the lowest rate is ML (23.05%). To determine the influence of the hen age on the egg weight, the highest estimation is found by MINQUE (72,31%) and the lowest estimation is found by ML (%56,56). In the balanced data, for both Haugh units and egg weight, variance components estimates are found equal in four methods, but error ratio in ML method is found higher than other methods. It is expected that the research results will contribute to the statistical literature as well as the researchers in different areas in need of these methods.

2012, x + 73 pages

Key Words: Variance components estimation, ANOVA, Henderson methods, ML, REML, MINQUE

TEŞEKKÜR

Bu araştırmanın konusu, çalışmanın yönlendirilmesi, sonuçların değerlendirilmesi ve yazımı aşamasında yapmış olduğu büyük katkılarından dolayı tez danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. İbrahim KILIÇ'a öncelikle teşekkür ederim. Bu tezin uygulama bölümünde kullandığım verileri benimle paylaşan Sayın Prof. Dr. Zehra BOZKURT ve Ahmet Alper YILMAZ'a ayrıca teşekkür ederim. Bununla birlikte, tez konusunun belirlenmesi ve süreçteki desteklerinden dolayı Sayın Prof. Dr. Mustafa TEKERLİ'ye, yüksek lisans eğitim sürecindeki destek ve katkılarından dolayı İstatistik Anabilim Dalı Başkanı Sayın Doç. Dr. Süleyman DÜNDAR'a teşekkürlerimi arz ederim. Diğer taraftan, araştırma ve yazım süresince yardımlarını esirgemeyen Sayın Yrd. Doç. Dr. Sinan SARAÇLI, Yrd. Doç. Dr. Gonca KILIÇ, Cengiz GAZELOĞLU, Durmuş KARLIK ve isimlerini sayamadığım tüm mesai arkadaşlarıma, her konuda öneri ve eleştirileriyle yardımlarını gördüğüm hocalarıma teşekkürü borç bilirim.

Ayrıca, bu güne gelmemde büyük emekleri olan, tüm eğitim hayatım ve özellikle akademisyenlik sürecindeki rehberliği, çalışma disiplini ve profesyonelliği ile örnek aldığım Sayın Prof. Dr. İsmet DOĞAN ile Yrd. Doç. Dr. Nurhan DOĞAN'a ve hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen sevgili Babam Abdullah DOĞAN ve Annem Hülya DOĞAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İlkay DOĞAN

AFYONKARAHİSAR, 2012

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	Sayfa
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	v
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. LİTERATÜR BİLGİLERİ	3
2.1 Varyans Bileşenleri İle İlgili Genel Bilgiler	3
2.2 Varyans Bileşenlerine İlişkin Bazı Kavramlar	8
2.3 Varyans Bileşenleri Tahmin Yöntemleri	10
2.3.1 Varyans Analizi Yöntemi (ANOVA)	10
2.3.1.1 Dengeli Verilerde Tek Yönlü ANOVA	10
2.3.1.2 Dengeli Olmayan Verilerde Tek Yönlü ANOVA	14
2.3.2 Henderson Yöntemleri	17
2.3.2.1 Henderson I	18
2.3.2.2 Henderson II	20

2.3.2.3 Henderson III	22
2.3.3 En Çok Olabilirlik Tahmin Yöntemi (ML)	24
2.3.3.1 Dengeli Verilerde En Çok Olabilirlik Tahmin Yöntemi	25
2.3.3.2 Dengeli Olmayan Verilerde En Çok Olabilirlik Tahmin Yöntemi ...	30
2.3.4 Kısıtlanmış En Çok Olabilirlik Tahmin Yöntemi (REML)	32
2.3.4.1 Dengeli Verilerde Kısıtlanmış En Çok Olabilirlik Yöntemi	32
2.3.4.2 Dengeli Olmayan Verilerde Kısıtlanmış En Çok Olabilirlik Yöntemi.....	34
2.3.5 Minimum Normlu Karesel Sapmasız Tahmin Yöntemi (MINQUE) ve Minimum Varyanslı Karesel Sapmasız Tahmin Yöntemi (MIVQUE) ..	35
2.4 Varyans Bileşenleri ile İlgili Yapılan Çalışmalar	42
3. MATERYAL ve METOT	46
4. BULGULAR	49
4.1 Dengeli Olmayan Veriler İçin Varyans Bileşenleri Tahmini.....	49
4.2 Dengeli Veriler İçin Varyans Bileşenleri Tahmini.....	53
5. TARTIŞMA ve SONUÇ	58
6. KAYNAKLAR	63
7. ÖZGEÇMİŞ	71

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

Y_{ij}	i. gruptaki j. gözlem değeri
μ	Genel popülasyon ortalaması
α_i	i.grubun etkisi
ε_{ij}	Rasgele hata terimi
$\bar{Y}_i.$	i. grubun ortalaması
$\bar{Y}..$	Genel ortalama
n_i	i. gruptaki gözlem sayısı
N	Toplam gözlem sayısı
a	Grup sayısı
σ_e^2	Hata Varyansı
σ_α^2	Gruplar Arası Varyans
$E(GİKO)$	Grup İçi Kareler Ortalamasının Beklenen Değeri
$E(GAKO)$	Gruplar Arası Kareler Ortalamasının Beklenen Değeri
$\hat{\mu}$	μ 'nün En Çok Olabilirlik Çözümü
$\hat{\sigma}_\alpha^2$	σ_α^2 'nın En Çok Olabilirlik Çözümü
$\hat{\sigma}_e^2$	σ_e^2 'nin En Çok Olabilirlik Çözümü
$\tilde{\mu}$	μ 'nün En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisi
$\tilde{\sigma}_e^2$	σ_e^2 'nin En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisi
$\tilde{\sigma}_\alpha^2$	σ_α^2 'nın En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisi
$\hat{\sigma}_{e,R}^2$	σ_e^2 'nin Kısıtlanmış En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisi
$\hat{\sigma}_{\alpha,R}^2$	σ_α^2 'nın Kısıtlanmış En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisi

Kısaltmalar

ANOVA	Analysis of Variance (Varyans Analizi)
GKT	Genel Kareler Toplamı
GAKT	Gruplar Arası Kareler Toplamı
GİKT	Grup İçi Kareler Toplamı
GAKO	Gruplar Arası Kareler Ortalaması
GİKO	Grup İçi Kareler Ortalaması
ML	Maximum Likelihood (En Çok Olabilirlik)
REML	Restricted Maximum Likelihood (Kısıtlanmış En Çok Olabilirlik)
MINQUE	Minimum Norm Quadratic Unbiased Estimation (Minimum Normlu Sapmasız Karesel Tahmin)
MIVQUE	Minimum Variance Quadratic Unbiased Estimation (Minimum Varyanslı Sapmasız Karesel Tahmin)

ÇİZELGELER DİZİNİ

	Sayfa
Çizelge 2.1 Rasgele etkili model ve sabit etkili model özellikleri	9
Çizelge 2.2 Dengeli veriler için varyans analizi tablosu	13
Çizelge 2.3 Dengeli olmayan veriler için varyans analizi tablosu	16
Çizelge 2.4 μ^2 'nin katsayıları ve varyanslar	19
Çizelge 2.5 Eşitliklerin beklenen değerleri	19
Çizelge 3.1 Dengeli ve dengeli olmayan veriler için frekans değerleri	47
Çizelge 4.1 Dengeli olmayan verilerde Haugh birimi için ANOVA yöntemi ile varyans bileşenleri tahmini sonuçları	49
Çizelge 4.2 Dengeli olmayan verilerde Haugh birimi için Henderson III yöntemi ile varyans bileşenleri tahmini sonuçları	50
Çizelge 4.3 Dengeli olmayan verilerde Haugh birimi için ML, REML ve MINQUE yöntemleri ile varyans bileşenleri tahmini sonuçları	51
Çizelge 4.4 Dengeli olmayan verilerde yumurta ağırlığı için ANOVA yöntemi ile varyans bileşenleri tahmini sonuçları	52
Çizelge 4.5 Dengeli olmayan verilerde yumurta ağırlığı için Henderson III yöntemi ile varyans bileşenleri tahmini sonuçları	52
Çizelge 4.6 Dengeli olmayan verilerde yumurta ağırlığı için ML, REML ve MINQUE yöntemleri ile varyans bileşenleri tahmini sonuçları	53
Çizelge 4.7 Dengeli verilerde Haugh birimi için ANOVA yöntemi ile varyans bileşenleri tahmini sonuçları	54

Çizelge 4.8 Dengeli verilerde Haugh birimi için Henderson III yöntemi ile varyans bileşenleri tahmini sonuçları	54
Çizelge 4.9 Dengeli verilerde Haugh birimi için ML, REML ve MINQUE yöntemleri ile varyans bileşenleri tahmini sonuçları	55
Çizelge 4.10 Dengeli verilerde yumurta ağırlığı için ANOVA yöntemi ile varyans bileşenleri tahmini sonuçları	56
Çizelge 4.11 Dengeli verilerde yumurta ağırlığı için Henderson III yöntemi ile varyans bileşenleri tahmini sonuçları	57
Çizelge 4.12 Dengeli verilerde yumurta ağırlığı için ML, REML ve MINQUE yöntemleri ile varyans bileşenleri tahmini sonuçları	57

1. GİRİŞ

Varyans bileşenlerinin tahmin edilmesine ilişkin yöntemlere yönelik değerlendirmeler, son yıllarda istatistik alanında bilimsel çalışma yapan araştırmacıların bir bölümü için oldukça önemli hale gelmiştir. Uygulamalı istatistik alanında çalışan araştırmacılar, fen bilimleri ve özellikle sağlık bilimleri alanında varyans bileşenlerinin tahminine yönelik duyulan ihtiyaçtan dolayı bu konunun üzerinde önemle durmaktadırlar. Nitekim hayvancılık alanında hayvan ıslahında kullanılan modellerde toplam varyasyon içinde genetik varyansın ve hata varyansının belirlenmesi büyük önem taşımaktadır. Zira genetik iyileştirmede anahtar parametre olan kalıtım derecesinin belirlenmesinde, hatanın yanı sıra diğer şansa bağlı etkilere ait bileşenlerin de tahmin edilmesi gerekir.

Varyans bileşenlerinin tahmin edilmesine ilişkin yapılan bilimsel çalışmalarda, gerek simülasyonla türetilen, gerekse gerçek verileri kullanarak varyans bileşenlerinin tahminlenmesi yapılsa da aynı amacı taşıyan farklı çalışmalarda farklı yöntemler kullanılmakta ve hangi yöntemin hangi durumlarda daha iyi sonuçlar verdiği tartışma konusu haline gelmektedir.

Bu çalışmada, varyans bileşenlerinin tahmin edilmesinde literatürde yaygın olarak kullanılan yöntemlerden; ANOVA, Henderson III, ML, REML, MINQUE gibi önemli yöntemlerin dengeli ve dengeli olmayan veriler için karşılaştırmalı olarak incelenmesi amaçlanmıştır. Bu çerçevede, söz konusu yöntemler ile sofralık yumurtaların tazelik veya bayatlık durumunu ifade eden Haugh birimi ile yumurta ağırlığına ilişkin varyans bileşenleri tahmin edilmiştir. Çalışmada kullanılan veriler, Yılmaz ve Bozkurt (2008) tarafından yapılan çalışmada kullanılan verilerin bir bölümünden oluşmaktadır. Bu bağlamda çalışmada 28 ve 80 haftalık yaştaki iki ticari yumurtacı sürüden (Lohmann White) elde edilmiş toplam 696 adet sofralık yumurta verisi kullanılmıştır. Dengeli veriler için yöntemlerin karşılaştırılması amacıyla ise 416 yumurta verisi kullanılmıştır. Çalışmada, Haugh birimi ile yumurta ağırlığına ilişkin varyans bileşenleri tahmin edilmesine yönelik verilerin analizinde SPSS paket programından yararlanılmıştır.

Çalışmada, öncelikle varyans bileşenleri tahmin yöntemlerine ilişkin geniş bir literatür taraması yapılmıştır. Bu kapsamda, literatür bilgileri başlığı altında varyans bileşenleri ile ilgili genel bilgiler, varyans bileşenlerine ilişkin bazı kavramlar, varyans bileşenleri tahmin yöntemleri ve varyans bileşenleri ile ilgili yapılan çalışmalara yer verilmiştir. Bununla birlikte, ilerleyen bölümlerde materyal ve metot, verilerin analizi sonucunda elde edilen bulgular ve tartışma-sonuç bölümleri yer almaktadır.

Araştırmanın yukarıda belirtilen amacının gerçekleştirilerek varyans bileşenlerinin tahminlenmesine ilişkin yöntemlerin karşılaştırılması ve bu yöntemlerin farklılık veya benzerliklerinin belirlenmesinin, istatistik literatürüne katkı sunmasının yanı sıra bu yöntemlere ihtiyaç duyan ve farklı alanlarda bilimsel faaliyet gösteren araştırmacılar için de önemli olacağı düşünülmektedir.

2. LİTERATÜR BİLGİLERİ

Varyans bileşenleri ile ilgili genel bilgileri içeren bu bölümde, varyans bileşenleri ile ilgili genel bilgiler, varyans bileşenleri ile ilgili kavramlar, varyans bileşenleri tahmin yöntemleri ve varyans bileşenleri ile ilgili yapılmış çalışmalara yer verilmiştir.

2.1 Varyans Bileşenleri İle İlgili Genel Bilgiler

Genel olarak grup ortalamaları arasındaki farklılığı belirli anlamlılık düzeyinde test etmek için kullanılan ANOVA, belirli yöntemler ile toplanan verilerin düzenlenmesi, analiz edilmesi ve elde edilen sonuçların yorumlanmasını içeren bir bilim dalı olarak tanımlanan istatistiğin en önemli konularından biridir. Varyans analizi tablosu sadece gözlemlenen değişkenliğin bölümlere ayrılmasını göstermekle kalmamakta ayrıca belli varsayımlar altında belli veri alt kümelerinin ortalamaları arasındaki farklılıkların test edilmesini sağlayan hesaplamaları da özetlemektedir.

Varyansın tanımını ilk olarak 1918 yılında Fisher (1918) yapmış ve varyans analizi yöntemini geliştirmiştir. Crump (1946, 1951) ve Eisenhart (1947) ise varyans analizi yöntemi kullanılarak varyans bileşenlerinin tahminini doğrudan yapan ilk araştırmacılar. Aslında ismi tam olarak ortaya konmasa ve çerçevesi tam olarak çizilmese de daha önceki tarihlerde farklılık analizleri ile ilgili pek çok çalışma yapılmıştır. Kempthorne (1977) Fisher'in 1918 yılında kantitatif genetik teorisi ile ilgili temel ve özgün bir çalışma yaptığını, varyans ve varyans analizi terimlerinin kullanımını başlattığını, üstü kapalı bir şekilde varyans bileşenleri modellerini kullandığını ve bileşenlerin neden olduğu toplam varyansın yüzdelerini tanımladığını belirtmiştir. Varyans bileşenleri ile ilgili daha önceki tarihi süreç Scheffe (1956) ve Anderson (1978) tarafından detaylı bir şekilde anlatılmıştır. En küçük kareler yöntemi ilk kez astronomi bilimine ilişkin kuyruklu yıldızların yörüngesiyle 1806 yılında ilgilenen Legendre ve 1809 yılında konik kesitler üzerinde çalışan Gauss tarafından kullanılmıştır. Daha sonra Legendre ve Gauss doğrudan olmasa da dolaylı olarak doğrusal modellerin sabit etkileri üzerinde çalışmışlardır (Searle *et al.* 2006).

Rasgele etkili doğrusal modelin bilinen ilk formülasyonu 1861 yılında Airy (1861) tarafından verilmiştir. Airy (1861) tarafından verilen bu formülasyonu Scheffe (1956) “tek yönlü düzen için varyans bileşenleri modelinin çok açık bir kullanımı” şeklinde nitelemiş ve formüle genel ortalama μ 'yü eklemiştir. Scheffe (1956) Airy (1861)'nin modelini dengeli veriler için tüm gruplarda $j = 1, 2, \dots, n$, ve dengeli olmayan veriler için $j = 1, 2, \dots, n_i$ olmak üzere;

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, a \quad (2.1)$$

$$Var(\alpha_i) = \sigma_\alpha^2; Var(e_{ij}) = \sigma_e^2; \text{ (bütün kovaryanslar sıfır)} \quad (2.2)$$

biçiminde tanımlamaktadır. Scheffe'ye göre rasgele etkili modelleri ikinci kullanan kişi Chauvenet (1863) olmuştur. Chauvenet (1863) bazı modeller ileri sürmüş ve $\bar{y}_{..}$ 'nin varyansını,

$$Var(\bar{y}_{..}) = \frac{\sigma_\alpha^2 + \frac{\sigma_e^2}{n}}{a} \quad (2.3)$$

şeklinde göstermiştir.

Varyans bileşenleri modelinin oluşturulmasına; varyans analizi yöntemi tahmini olarak bilinen ve varyans analizinden elde edilen kareler toplamalarını onların beklenen değerlerine eşitlemek şeklindeki yöntem büyük bir katkı yapmış ve böylece varyans bileşenleri tahmininde doğrusal bir denklem grubu elde edilmiştir. Bu fikir tamamen rasgele düzenlenmiş verilerden sınıf içi korelasyonun bir tahminini elde etmek için varyans analizi kullanımından ortaya çıkmıştır. Tippett (1931) dengeli verilerde varyans bileşenleri tahminini, varyans analizi yöntemi ile açıklamakla kalmamış aynı zamanda etkileşimsiz rasgele modelde iki yönlü çapraz sınıflama için geliştirmiştir (Searle *et al.* 2006).

Yates and Zaccopani (1935) ve Neyman vd. (1935) rasgeleleştirilmiş blokların ve Latin kareler düzenlerinin göreceli etkinliklerini incelemişler ve önceki çalışmaların aksine doğrusal modellerin kullanımını kapsamlı bir şekilde matematiksel kavramlar ile açıklamışlardır. Diğer taraftan, varyans bileşenleri modelinde artıklara ait unsur için Neyman vd. (1935) “hata bileşenleri” terimini, Fisher (1935) ise “değişkenliğin

bileşeni” terimini kullanmışlardır. Bununla birlikte, varyans bileşenleri modeli ile ilgili Daniels (1939) ve Winsor and Clarke (1940) tarafından yapılan çalışmalarda Fisher (1925) ile aynı eşitlikler elde edilmiş ve “beklenen değer” kavramı kullanılmıştır. Ayrıca, Eisenhart (1947) “sabit” ve “rasgele” modeller arasında ilk kez kesin bir ayırım yaparak “karışık model” veya “karışık varyans analizi” isimlerini ileri sürmüştür.

1934 yılından sonra karışık modeller veya rasgele modeller altında kareler ortalamalarını (ya da kareler toplamlarını) beklenen değerlerine eşitlemekten oluşan genel varyans bileşenleri tahmin yöntemi artık ANOVA tahmin yöntemi olarak bilinmektedir. 1940’larda bu yöntem için bir takım eklemeler olmuştur. Örneğin, Ganguli (1941) k-yönlü iç içe kümelerde, Crump (1946) rasgele modellerde iki yönlü etkileşimli çapraz sınıflamada kullanmışlardır. Bununla birlikte, varyans bileşenleri tahmin yönteminin zayıf noktasına, yani veriye bağlı olarak negatif tahmin üretme durumuna dikkat çekmişler ve negatif değerleri sıfıra eşitlemeyi önermişlerdir. Fakat bu durum ANOVA yönteminin yansızlık özelliğini ortadan kaldırması bakımından önemlidir (Ganguli 1941, Crump 1946).

Anderson and Bancroft (1952) tarafından yapılan çalışmada, rasgele ve karışık modeller için dengeli verilerde varyans bileşenleri tahmini ayrıntılı bir şekilde yapılmış ve iç içe sınıflamalar için dengeli olmayan veriler üzerinde çalışılmış ve eksik bloklar tasarımlarını dikkate alarak birçok araştırma problemi oluşturulmuştur. Bennett and Franklin (1954) yapılan çalışmada ise varyans bileşenleri açısından sonlu boyutlu popülasyonla ilgili detaylar içeren birçok beklenen kareler ortalaması sunulmuştur. Bu konu daha sonra Searle and Fawcett (1970) tarafından ayrıntılı bir şekilde işlenmiştir.

Varyans bileşenleri tahmini için dengeli olmayan verilerin nasıl kullanılacağı sorusuyla ilgili dönüm noktası olan bir çalışma Henderson (1953) tarafından yapılmıştır. Süt ineği kayıtlarının istatistiksel analizleriyle ilgili olan bu çalışmada, birçok çapraz veya iç içe sınıflamada, rasgele veya karışık modellerde dengeli olmayan veri kullanımı için üç farklı yöntem ileri sürülmüştür. Henderson I, II, III yöntemleri olarak bilinen bu üç yöntem, dengeli veriler için varyans analizindeki kareler toplamlarının beklenen değerlerine eşitlenmesi yöntemi olan ANOVA yöntemine göre düzenlenmiştir.

Henderson (1953) Henderson I yönteminde dengeli verilerle benzer olarak kareler toplamalarını dengeli olmayan veriler için de kullanır. Henderson II yönteminde; model içindeki bütün sabit etkiler için veriyi düzelterek daha sonra bu düzeltilmiş veriler için Henderson I yöntemi kullanılır. Henderson III ise uygun doğrusal model ve onun alt modellerinden elde edilen sonuçların kareler toplamalarına dayalıdır. ANOVA tahmininin ciddi zayıflıklarının farkına varılmasıyla birlikte giderek kullanımının azalmasının yanı sıra Henderson I yönteminin sadece dengeli olmayan verilerde kullanılması, Henderson II yönteminin uygulamasındaki zorluk ve Henderson III yönteminin hesaplama açısından pratik olmaması gibi sonuçlar alternatif bir çözüm olan ML yönteminin ortaya çıkmasına sebep olmuştur (Searle *et al.* 2006).

Dengeli ve dengeli olmayan veriler için tek yönlü sınıflama ile ilgilenen Crump (1947, 1951) dengeli olmayan verilerde elde edilen eşitliklerin iteratif yöntemle çözülmesi gerektiğini belirtmiştir. Herbach (1959) dengeli veri modelleri için bazı tahmin edicilerin negatif olmama şartını hesaba katarak ML tahmin edicisi elde etmiştir. Diğer taraftan, dengeli veriler için örneklem varyansı ve yanlılığı hakkında çalışmalar yapılmıştır (Corbeil and Searle 1976).

Hartley and Rao (1967), tüm modellerin (karışık ve rasgele modeller, ilişkili ya da ilişkisiz etkiler, dengeli ya da dengeli olmayan veri) çözümü için ML tahminleme yöntemini geliştirmişlerdir. Diğer taraftan, Miller (1973, 1977) ve Searle (1970) dengeli ve dengeli olmayan verilerde ML tahmini üzerine çalışmışlardır. Hartley and Rao (1967) tarafından elde edilen ML eşitliklerinde karışık modellere yönelik matris tanımlaması yapılmıştır. Bu eşitlikleri bir veri seti için çözmek ve ML tahminlerini hesaplamak için eşitlikler üzerinde oldukça güç sayılabilecek iteratif hesaplamalar içermektedir. Günümüzde, bilgisayarların ve yeni paket programlarının gelişmesiyle birlikte bu problem ortadan kalkmıştır.

ML tahmini üzerine çalışan Thompson (1962), aynı zamanda modeldeki parametrelerin yerini değiştirmeden olabilirliğin belli bir parçasını maksimize etme fikrini ortaya atmıştır. Bu yöntem günümüzde Kısıtlanmış En Çok Olabilirlik (Restricted Maximum Likelihood, REML) yöntemi olarak bilinmektedir. REML yöntemi Patterson and

Thompson (1971) tarafından dengeli olmayan veriler için geniş bir tabana oturtulmuştur. ML'nin hesaplama zorlukları REML yöntemi için de geçerlidir. REML yönteminin önemli bir özelliği, dengeli veriler için REML eşitliklerinin çözümünün ANOVA tahmin edicilerine eşit olmasıdır. ML sabit etkilere ilişkin serbestlik derecelerini hesaba katmamasına rağmen REML yöntemi sabit etkilere ilişkin serbestlik derecelerini hesaba katar. ML ve REML özellikle dengeli olmayan veriler için tercih edilen yöntemlerdir (Searle *et al.* 2006).

Diğer taraftan, doğrusal modellerde ortalamanın en iyi doğrusal yansız tahminine benzer olan varyans bileşenlerinin minimum varyanslı karesel sapmasız tahmin edicilerini (Minimum Variance Quadratic Unbiased Estimation, MIVQUE) bulma çalışmaları Townsend (1968), Harville (1969) ve Townsend and Searle (1971) ile başlamıştır. Bu çalışmaları Rao (1970, 1971a, 1971b, 1972)'nin minimum normlu karesel sapmasız tahmin edicilerine (Minimum Norm Quadratic Unbiased Estimation, MINQUE) ilişkin eşitlikler üzerine çalışmaları takip etmiştir.

MIVQUE yöntemi bağımlı veya cevap değişkeni olan y 'nin varyans-kovaryans matrisi olan V 'nin bilindiğini kabul eder. V 'nin bilinmediği durumlarda popülasyonun gerçek V 'si önceki bilgiler kullanılarak minimize edilir. V 'lerin aynı olduğu durum minimum varyans anlamına gelir. Modeldeki hata terimlerinin veya rasgele etkilerin dağılım özelliklerine ihtiyaç duymayan MINQUE tahmini, iterasyonlar yerine sadece doğrusal eşitliklerin çözümünü içerir. Kısacası, MINQUE tahmini REML'in ilk iterasyonu ile aynıdır (Hocking and Kutner 1975, Brown 1976, Searle *et al.* 2006).

2.2 Varyans Bileşenlerine İlişkin Bazı Kavramlar

Varyans bileşenleri ve varyans bileşenleri tahmin yöntemlerine yönelik yapılan çalışmalarda pek çok kavrama yer verilmektedir. Bu kavramlara ilişkin genel tanımlamalar aşağıda kısaca özetlenmiştir (Smith and Hocking 1978, Seifert 1979, Searle and Henderson 1979, Andrade and Helms 1984, Searle *et al.* 2006).

Faktör, Seviye ve Etkileri: Her verinin kaynağı ya da birimlerin araştırma konusuna ilişkin incelenecek özellikleri değişken olarak ifade edilebilecek bir faktörü tanımlayabilmektedir. Örneğin; üç ayrı değişken olarak cinsiyet, medeni durum, ilaç türü, vs. düşünülebilir. Bir değişkene ait gruplar ilgili faktörün “seviye”si olarak adlandırılmaktadır. Örnek olarak, cinsiyet faktörü içindeki bay-bayan cinsiyet faktörünün iki ayrı seviyesidir. Bir faktörün farklı seviyelerinin ilgilenilen değişkeni ne kadar etkilediği, ilgili faktöre ilişkin her bir seviyenin değişken üzerindeki etkisini ortaya koymaktadır. Bu etkiler üç ayrı şekilde gruplanabilmektedir. İlki bir faktörün sonlu sayıdaki seviyelerinden oluşan etkiye ilişkin **“sabit etki”** (fixed effect) olarak adlandırılmaktadır. Örneğin cinsiyet faktörünün bay-bayan seviyeleri sabit etkidir. İkinci tür etki ise veri içinde oluşan bir faktörün sonsuz sayıdaki seviyelerinin arasından sadece rasgele örnekleme seçilen **“rasgele etki”** (random effect) şeklinde tanımlanmaktadır. Örneğin, üç farklı sıcaklıkta pişirilen altışar ekmeğin her bir grubundan dört ekmeğin alınırsa burada sıcaklığın etkisi sabit etki olarak düşünülebilir ancak her bir gruptan alınan ekmeğin etkisi ise rasgele etki olarak düşünülür. Çünkü ekmekler belli bir varsayıma veya olasılığa dayalı olarak seçilebilmektedir. Sadece sabit etkilerden oluşan modellere **“sabit etkili model”** (fixed effect model) veya bazen de sadece “sabit model”, sadece rasgele etkilerden oluşan modellere **“rasgele etkili model”** (random effect model) ya da kısaca “rasgele model” denmektedir. Bunun yanında hem sabit hem de rasgele etkilerden oluşan modellere ise **“karışık etkili model”** (mixed effect model) veya “karışık model” adı verilmektedir.

Dengeli – dengeli olmayan veri: Veri, her hücrenin veya her grubun aynı sayıda gözlem içerip içermemesine bağlı olarak farklı şekillerde karakterize edilebilir. Gruplara ilişkin gözlem sayıları eşit olduğunda verinin dengeli dağıldığı bilinir. “Dengeli” kelimesi istatistik alanında çeşitli anlamlarda kullanılmasına rağmen alt sınıfların veya grupların eşit sayıda veri içermesi **“dengeli veri”** olarak tanımlanmaktadır. Gruplara ilişkin gözlem sayıları eşit olmadığında ise veri **“dengeli olmayan veri”** olarak tanımlanmaktadır.

Tek yönlü sınıflama için rasgele etkili model ve sabit etkili modele ilişkin özellikler Çizelge 2.1’de sunulmuştur (Searle *et al.* 2006).

Çizelge 2.1 Rasgele etkili model ve sabit etkili model özellikleri

Özellik	Sabit Etkili Model	Rasgele Etkili Model
Model Denklemi	$y_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij}$	$y_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij}$
y_{ij} 'nin beklenen değeri	$E(y_{ij}) = \mu + \alpha_i$	$E(y_{ij} \alpha_i) = \mu + \alpha_i$ $E(y_{ij}) = \mu$
α_i	Sabit etki	$\alpha_i \sim B.Ö.D. (0, \sigma_\alpha^2)$
e_{ij}	$e_{ij} = y_{ij} - E(y_{ij})$ $= y_{ij} - (\mu + \alpha_i)$	$e_{ij} = y_{ij} - E(y_{ij} \alpha_i)$ $= y_{ij} - (\mu + \alpha_i)$
$E(e_{ij}\alpha_i)$	$e_{ij} \sim B.Ö.D.(0, \sigma_e^2)$ $E(e_{ij}\alpha_i) = \alpha_i E(e_{ij}) = 0$	$e_{ij} \sim B.Ö.D.(0, \sigma_e^2)$ $E(e_{ij}\alpha_i) = 0$
$Var(y_{ij})$	$Var(y_{ij}) = \sigma_e^2$	$Var(y_{ij}) = \sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2$
$cov(y_{ij}, y_{i'j'})$	$cov(y_{ij}, y_{i'j'}) =$ $\begin{cases} \sigma_e^2, i = i' \text{ ve } j = j' \text{ için} \\ 0, \text{diğer durumlarda} \end{cases}$	$cov(y_{ij}, y_{i'j'}) =$ $\begin{cases} \sigma_\alpha^2 + \sigma_e^2, i = i' \text{ ve } j = j' \text{ için} \\ \sigma_\alpha^2, i = i' \text{ ve } j \neq j' \text{ için} \\ 0, \text{diğer durumlarda} \end{cases}$

B.Ö.D:Bağımsız Özdeş Dağılım

Çizelge 2.1’de, faktörlere ilişkin her bir seviyenin bir olasılık dağılımından geldiği varsayıldığında rasgele faktör gibi işlem yapmak gerekmektedir ve ya rasgele etkilerin varyansları ya da rasgele etkilerin gerçek değerlerinin tahmin edicileri hesaplanmaktadır. Buna karşılık faktörlere ilişkin her bir seviyenin bir olasılık dağılımından geldiğini varsaymak mümkün olmadığında ise sabit faktör gibi işlem yapmak gerekmektedir.

2.3 Varyans Bileşenleri Tahmin Yöntemleri

Varyans bileşenleri tahmin yöntemlerine (ANOVA, Henderson I-II-III, ML, REML, MINQUE ve MIVQUE) yönelik bilgiler ve formülasyonlar aşağıda açıklanmıştır.

2.3.1 Varyans Analizi Yöntemi (ANOVA)

Fisher (1925)’in varyans analizi yöntemini tanımlamasından sonra, bu yöntem tedavi etkilerinin anlamlılığının test edilmesinde yaygın olarak kullanılmaya başlanmıştır. Bir bağımlı değişken üzerinde birkaç faktörün etkisi incelenirse, her bir etkenin (faktörün)

toplam varyanstaki oranı, bir başka ifade ile varyans bileşenleri hesaplanabilir. Crump (1946)'ya göre, varyans analizinin diğer bir kullanımı da söz konusu bu varyans bileşenlerinin tahmin edilmesini sağlamaktadır.

2.3.1.1 Dengeli Verilerde Tek Yönlü ANOVA

Yapılan bir çalışmada i grup sayısını, j gözlem sayısını belirtmek üzere a sayıdaki grubun her birine ilişkin gözlem sayısı eşit ve n olduğu varsayılırsa;

$i=1,2,\dots,a$ ve $j=1,2,\dots,n$ olmak üzere

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij} \quad (2.4)$$

doğrusal modeli kullanılmaktadır. Bu modelde;

y_{ij} = i . gruptaki j . gözlem

μ = Genel popülasyon ortalamasını (Bütün y_{ij} 'lerin ortalaması)

α_i = i . grubun etkisini

ε_{ij} = Rasgele hata terimini göstermektedir.

Bu doğrusal modele ilişkin varsayımlar aşağıda verilmiştir (Searle 1971, Kaps and Lamberson 2004, Sahai and Ojeda 2005, Searle *et al.* 2006, Şenoğlu ve Acıtaş 2010);

- ✓ ε_{ij} hata terimleri 0 ortalamalı ve σ^2 varyanslı normal dağılıma sahiptir.
- ✓ Hata terimlerinin varyansları homojendir.
- ✓ Hata terimleri birbirinden bağımsızdır.

Genel ortalama ve i . grubun ortalaması;

$$\bar{y}_{i.} = \frac{\sum_{j=1}^n y_{ij}}{n} \quad (2.5)$$

$$\bar{y}_{..} = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n y_{ij}}{an} = \frac{\sum_{i=1}^a \bar{y}_{i.}}{a} \quad (2.6)$$

formülleri yardımıyla hesaplanmaktadır. Modelde,

$$\sum_{i=1}^a \alpha_i = 0 \text{ olmaktadır.} \quad (2.7)$$

Gözlem değerleri ile genel ortalama arasındaki fark;

$$y_{ij} - \bar{y}_{..} = (y_{ij} - \bar{y}_{i.}) + (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) \quad (2.8)$$

şeklinde yazılabilmektedir. Her iki tarafın karesi alındıktan sonra i ve j üzerinden toplamları alınır (2.8) doğrusal eşitliği;

$$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 \quad (2.9)$$

biçiminde yazılmaktadır. (2.9) eşitliğinin sol tarafı bütün gözlemlerin ortalamalarından sapmalarının genel kareler toplamını (GKT) ifade etmektedir. Eşitliğin sağ tarafı ise gözlem değerlerinin grup ortalamalarından sapmalarının kareler toplamı (GİKT) ve grup ortalamalarının genel ortalamadan sapmalarının kareler toplamı (GAKT) olarak ifade edilmektedir. (2.9) eşitliğinde verilen ifadeler açık olarak

$$GKT = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 \quad (2.10)$$

$$GAKT = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 = n \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 \quad (2.11)$$

$$GİKT = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2 \quad (2.12)$$

$$GAKO = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2}{a-1} = \frac{n \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2}{a-1} \quad (2.13)$$

$$GİKO = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2}{a(n-1)} \quad (2.14)$$

şeklinde gösterilir (Searle *et al.* 2006, Şenoğlu ve Acıtaş 2010).

ANOVA yöntemi kullanılarak varyans unsurlarının tahmin edilmesindeki temel prensip, kareler ortalamalarının beklenen değerlerine eşitlenmesi ve daha sonra elde edilen doğrusal eşitliklerin çözülmesidir (Searle *et al.* 2006).

Varyans bileşenlerinin tahmini klasik varyans analizindeki kareler ortalamasının hesaplanması, kareler ortalamasının kendi beklenen değerlerine eşitlenmesi ve bilinmeyen varyansların çözülmesi ile elde edilir (Henderson 1953).

Gruplar arası kareler ortalamasının beklenen değeri alınır;

$$E(GAKO) = E\left(\frac{n \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2}{a-1}\right) \quad (2.15)$$

bulunur ve (2.4) ve (2.5) formüllerinden

$$\bar{y}_{i.} = \frac{\sum_{j=1}^n (\mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij})}{n} = \frac{n\mu + n\alpha_i + \sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij}}{n} = \mu + \alpha_i + \bar{\varepsilon}_{i.} \quad (2.16)$$

eşitliği elde edilir. Aynı şekilde,

(2.4), (2.6) ve (2.7) formüllerinden

$$\begin{aligned} \bar{y}_{..} &= \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (\mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij})}{an} = \frac{\sum_{i=1}^a (n\mu + n\alpha_i + \sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij})}{an} \\ &= \frac{an\mu + n \sum_{i=1}^a \alpha_i + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij}}{an} = \mu + \bar{\varepsilon}_{..} \end{aligned} \quad (2.17)$$

bulunur ve (2.15) numaralı eşitlikte (2.16) ve (2.17) numaralı eşitlikler yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} E(GAKO) &= E\left(\frac{n \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2}{a-1}\right) = E\left(\frac{n}{a-1} \sum_{i=1}^a (\mu + \alpha_i + \bar{\varepsilon}_{i.} - \mu - \bar{\varepsilon}_{..})^2\right) \\ &= E\left(\frac{n}{a-1} \sum_{i=1}^a (\alpha_i + \bar{\varepsilon}_{i.} - \bar{\varepsilon}_{..})^2\right) \\ &= E\left[\frac{n}{a-1} \left(\sum_{i=1}^a \alpha_i^2 + \sum_{i=1}^a (\bar{\varepsilon}_{i.} - \bar{\varepsilon}_{..})^2 + 2 \sum_{i=1}^a \alpha_i (\bar{\varepsilon}_{i.} - \bar{\varepsilon}_{..})\right)\right] \\ &= \frac{n}{a-1} [\sum_{i=1}^a \alpha_i^2 + \sum_{i=1}^a E(\bar{\varepsilon}_{i.} - \bar{\varepsilon}_{..})^2 + 2 \sum_{i=1}^a \alpha_i E(\bar{\varepsilon}_{i.} - \bar{\varepsilon}_{..})] \end{aligned} \quad (2.18)$$

elde edilir. Burada $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$, $\bar{\varepsilon}_{i.} \sim N(0, \sigma^2/n)$ ve $\bar{\varepsilon}_{..} \sim N(0, \sigma^2/N)$ olduğundan

$$E(\bar{\varepsilon}_{i.} - \bar{\varepsilon}_{..}) = 0 \text{ ve} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} E(\bar{\varepsilon}_{i.} - \bar{\varepsilon}_{..})^2 &= Var(\bar{\varepsilon}_{i.} - \bar{\varepsilon}_{..}) = var(\bar{\varepsilon}_{i.}) + var(\bar{\varepsilon}_{..}) - 2cov(\bar{\varepsilon}_{i.}, \bar{\varepsilon}_{..}) \\ &= \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{N} - \frac{2}{a} var(\bar{\varepsilon}_{i.}) = \frac{(a-1)\sigma^2}{N} \end{aligned} \quad (2.20)$$

olur ve (2.18) numaralı eşitlikte (2.19) ve (2.20) eşitlikleri yerine yazılırsa,

$$E(GAKO) = \frac{n}{a-1} [\sum_{i=1}^a \alpha_i^2 + \sum_{i=1}^a \frac{(a-1)\sigma^2}{N}] = \sigma^2 + \frac{n \sum_{i=1}^a \alpha_i^2}{a-1} \text{ bulunur.}$$

(2.4), (2. 14) ve (2.16) eşitliklerinden yararlanarak $E(GİKO)$ hesaplanırsa,

$$E(GİKO) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2}{a(n-1)}\right) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (\mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij} - \mu - \alpha_i - \bar{\varepsilon}_{i.})^2}{a(n-1)}\right)$$

$$= \frac{1}{a(n-1)} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n E(\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon}_{i.})^2 \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon}_{i.})^2 &= \text{Var}(\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon}_{i.}) = \text{var}(\varepsilon_{ij}) + \text{var}(\bar{\varepsilon}_{i.}) - 2\text{cov}(\varepsilon_{ij}, \bar{\varepsilon}_{i.}) \\ &= \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n} - \frac{2}{n} \text{var}(\varepsilon_{ij}) = \frac{(n-1)\sigma^2}{n} \end{aligned} \quad (2.22)$$

bulunur ve (2.22) numaralı eşitlik (2.21) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$E(GİKO) = \frac{1}{a(n-1)} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n \frac{(n-1)\sigma^2}{n} = \sigma^2 \quad (2.23)$$

şeklinde bulunur (Kaps and Lamberson 2004, Searle *et al.* 2006, Şenoğlu ve Acıtaş 2010). Yukarıdaki bilgiler doğrultusunda dengeli veriler için varyans analizi tablosu Çizelge 2.2’de verilmiştir.

Çizelge 2.2 Dengeli veriler için varyans analizi tablosu

Varyasyon Kaynağı	Serbestlik Derecesi	Kareler Toplamı	Kareler Ortalaması	F istatistiği	Beklenen Kareler Ortalaması
Gruplar arası	a-1	$GAKT = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2$	$GAKO = \frac{GAKT}{a-1}$	$F = \frac{GAKO}{GİKO}$	$\sigma_e^2 + \frac{n \sum_{i=1}^a \alpha_i^2}{a-1}$
Grup içi	a(n-1)	$GİKT = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2$	$GİKO = \frac{GİKT}{a(n-1)}$		σ_e^2
Genel	an-1	$GKT = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2$			

2.3.1.2 Dengeli Olmayan Verilerde Tek Yönlü ANOVA

Yapılan bir çalışmada i grup sayısını, j gözlem sayısını belirtmek üzere a sayıdaki grubun her birine ilişkin gözlem sayısının eşit olmadığı varsayılırsa;

i=1,2,...,a ve j=1,2,...,n_i olmak üzere

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij} \quad (2.24)$$

doğrusal modeli kullanılmaktadır. Bu modelde;

y_{ij} = i.gruptaki j. gözlem

μ = Genel popülasyon ortalamasını (Bütün y_{ij} 'lerin ortalaması)

α_i = i.grubun etkisini

ε_{ij} = Rasgele hata terimini göstermektedir.

$$\bar{y}_{i.} = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}}{n_i} \quad (2.25)$$

$$N = \sum_{i=1}^a n_i \quad (2.26)$$

$$\bar{y}_{..} = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}}{N} \quad (2.27)$$

$$\sum_{i=1}^a n_i \alpha_i = 0 \text{ 'dır.} \quad (2.28)$$

şeklinde hesaplanır. Burada;

$$GKT = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 \quad (2.29)$$

$$GAKT = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^a n_i (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 \quad (2.30)$$

$$GİKT = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2 \quad (2.31)$$

$$GAKO = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2}{a-1} = \frac{\sum_{i=1}^a n_i (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2}{a-1} \quad (2.32)$$

$$GİKO = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2}{N-a} \quad (2.33)$$

formülleri yardımıyla hesaplanmaktadır. Kareler ortalamalarının beklenen değerleri alınırsa;

$$E(GAKO) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^a n_i (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2}{a-1}\right) \quad (2.34)$$

eşitliği elde edilir. (2.24) ve (2.25) formüllerinden

$$\bar{y}_{i.} = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} (\mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij})}{n_i} = \frac{n_i \mu + n_i \alpha_i + \sum_{j=1}^{n_i} \varepsilon_{ij}}{n_i} = \mu + \alpha_i + \bar{\varepsilon}_{i.} \quad (2.35)$$

elde edilir. Aynı şekilde, (2.24), (2.27) ve (2.28) formüllerinden

$$\begin{aligned}\bar{y}_{..} &= \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (\mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij})}{N} = \frac{\sum_{i=1}^a (n_i \mu + n_i \alpha_i + \sum_{j=1}^{n_i} \varepsilon_{ij})}{N} \\ &= \frac{N\mu + \sum_{i=1}^a n_i \alpha_i + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} \varepsilon_{ij}}{N} = \mu + \bar{\varepsilon}_{..}\end{aligned}\quad (2.36)$$

bulunur ve (2.34) numaralı eşitlikte (2.35) ve (2.36) numaralı eşitlikler yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}E(GAKO) &= E\left(\frac{\sum_{i=1}^a n_i (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2}{a-1}\right) = E\left(\frac{1}{a-1} \sum_{i=1}^a n_i (\mu + \alpha_i + \bar{\varepsilon}_{i.} - \mu - \bar{\varepsilon}_{..})^2\right) \\ &= E\left(\frac{1}{a-1} \sum_{i=1}^a n_i (\alpha_i + \bar{\varepsilon}_{i.} - \bar{\varepsilon}_{..})^2\right) \\ &= E\left[\frac{1}{a-1} \left(\sum_{i=1}^a n_i \alpha_i^2 + \sum_{i=1}^a n_i (\bar{\varepsilon}_{i.} - \bar{\varepsilon}_{..})^2 + 2 \sum_{i=1}^a n_i \alpha_i (\bar{\varepsilon}_{i.} - \bar{\varepsilon}_{..})\right)\right] \\ &= \frac{1}{a-1} \left[\sum_{i=1}^a n_i \alpha_i^2 + \sum_{i=1}^a n_i E(\bar{\varepsilon}_{i.} - \bar{\varepsilon}_{..})^2 + 2 \sum_{i=1}^a n_i \alpha_i E(\bar{\varepsilon}_{i.} - \bar{\varepsilon}_{..})\right]\end{aligned}\quad (2.37)$$

biçiminde hesaplanır. Burada $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$, $\bar{\varepsilon}_{i.} \sim N(0, \sigma^2/n_i)$ ve $\bar{\varepsilon}_{..} \sim N(0, \sigma^2/N)$

olduğundan

$$E(\bar{\varepsilon}_{i.} - \bar{\varepsilon}_{..}) = 0 \text{ ve} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned}E(\bar{\varepsilon}_{i.} - \bar{\varepsilon}_{..})^2 &= var(\bar{\varepsilon}_{i.} - \bar{\varepsilon}_{..}) = var(\bar{\varepsilon}_{i.}) + var(\bar{\varepsilon}_{..}) - 2cov(\bar{\varepsilon}_{i.}, \bar{\varepsilon}_{..}) \\ &= \frac{\sigma^2}{n_i} + \frac{\sigma^2}{N} - \frac{2}{a} var(\bar{\varepsilon}_{i.}) = \frac{[N(a-2) + an_i] \sigma^2}{Nan_i}\end{aligned}\quad (2.39)$$

olur ve (2.37) numaralı eşitlikte (2.38) ve (2.39) eşitlikleri yerine yazılırsa,

$$E(GAKO) = \frac{1}{a-1} \left[\sum_{i=1}^a n_i \alpha_i^2 + \sum_{i=1}^a n_i \frac{[N(a-2) + an_i] \sigma^2}{Nan_i}\right] = \sigma^2 + \frac{\sum_{i=1}^a n_i \alpha_i^2}{a-1}$$

bulunur.

(2.24), (2.33) ve (2.35) eşitliklerinden yararlanarak $E(GİKO)$ hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}E(GİKO) &= E\left(\frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2}{N-a}\right) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (\mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij} - \mu - \alpha_i - \bar{\varepsilon}_{i.})^2}{N-a}\right) \\ &= \frac{1}{N-a} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} E(\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon}_{i.})^2\end{aligned}\quad (2.40)$$

bulunur. Burada;

$$\begin{aligned}
E(\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon}_{i.})^2 &= Var(\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon}_{i.}) = var(\varepsilon_{ij}) + var(\bar{\varepsilon}_{i.}) - 2cov(\varepsilon_{ij}, \bar{\varepsilon}_{i.}) \\
&= \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n_i} - \frac{2}{n_i} var(\varepsilon_{ij}) = \frac{(n_i-1)\sigma^2}{n_i}
\end{aligned} \tag{2.41}$$

olduğundan, (2.41) numaralı eşitlik (2.40) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$E(GİKO) = \frac{1}{N-a} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} \frac{(n_i-1)\sigma^2}{n_i} = \sigma^2 \tag{2.42}$$

şeklinde bulunur (Kaps and Lamberson 2004, Searle *et al.* 2006). Bu bilgiler doğrultusunda dengeli olmayan veriler için varyans analizi tablosu Çizelge 2.3'te verilmiştir.

Çizelge 2.3 Dengeli olmayan veriler için varyans analizi tablosu

Varyasyon Kaynağı	Serbestlik Derecesi	Kareler Toplamı	Kareler Ortalaması	F istatistiği	Beklenen Kareler Ortalaması
Gruplar arası	a-1	$\sum_{i=1}^a n_i (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2$	$GAKO = \frac{GAKT}{a-1}$	$F = \frac{GAKO}{GİKO}$	$\sigma_e^2 + \frac{\sum_{i=1}^a n_i \alpha_i^2}{a-1}$
Grup içi	N-a	$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2$	$GİKT = \frac{GİKT}{N-a}$		σ_e^2
Genel	N-1	$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2$			

2.3.2 Henderson Yöntemleri

Henderson (1953) tarafından geliştirilen Henderson yöntemlerinin (I, II ve III) temel prensibi dengeli denemelerde uygulanan varyans analizi sonucunda elde edilen kareler toplamlarının, beklenen değerlerine eşitlenerek elde edilen eşitliklerin çözülmesinden oluşmaktadır. Henderson I ve II yöntemleri tamamen rasgele modeller için geliştirilmişken, Henderson III yöntemi karışık modeller için daha uygundur. Henderson I yöntemi, dengeli denemelere uygulanan varyans analizinden elde edilen kareler toplamlarına karşılık gelen karesel formları kullanmaktadır. Henderson II yöntemi, modelde sabit etkilerin bulunması durumunda Henderson I yöntemindeki varyasyonda

bir düzeltme yaparak Henderson I yönteminin uygulamasından oluşmaktadır. Henderson III yöntemi ise farklı model ve alt modellerin oluşturulmasından kaynaklanan kareler toplamlarındaki azalmaları kullanmaktadır (Henderson 1953).

Aslında varyans bileşenleri tahmini üzerine yapılan çoğu çalışmada alt grup sayıları eşit tek yönlü sınıflama, iç içe sınıflama ve faktöriyel sınıflama ile ilgilenilmektedir. Varyans bileşeni tahmininin kullanımında her zaman istenilen özellikte veri elde edilememektedir. Özellikle araştırma verileri ve iyi planlanmış bir deney olsa bile alt sınıfların dağılımılarından kaynaklanan sayı büyüklüklerinin eşit olmaması durumunda bazen ANOVA uygun değildir (Henderson 1953, Sahai and Ojeda 2005, Searle *et al.* 2006). Bu ve buna benzer ortogonal (dikey) olmayan durumlarda varyans bileşenleri tahmini için üç yeni yöntem tanımlanmıştır. Bu üç yöntem;

1. Uygun ortogonal (dikey) veride klasik varyans analizindeki gibi kareler ortalamaları hesaplanmaktadır. Klasik varyans analizindeki varsayımlar altında kareler ortalamaları kendi beklenen değerlerine eşitlenerek bilinmeyen varyansları çözümlenmektedir.
2. Sabit etkilerin en küçük kareler tahminlerini elde edip, bu tahminlere göre veri düzeltilmektedir. Daha sonra bu düzeltilmiş verileri orijinal veri yerine koyup birinci adım uygulanmaktadır.
3. Ortogonal (dikey) olmayan verinin klasik en küçük kareler analizini kullanarak kareler ortalaması hesaplanmaktadır (sabitlerin uyumunun yöntemi, ağırlıklandırılmış kareler ortalaması vs). Bu kareler ortalamalarını kendi beklenen değerlerine eşitleyip bilinmeyen varyans bulunmaktadır.

Bundan böyle bu 3 yöntem; Henderson I, Henderson II ve Henderson III olarak adlandırılmaktadır. Bu üç yöntem arasında işlemsel olarak Henderson I en basit olanı, Henderson II ilk yöntemle göre biraz daha zor, Henderson III ise en zor olanıdır. Fakat Henderson I modeldeki bazı elemanlar sabit veya bazıları etkileşimli ise yanlış tahminlere sebep olmaktadır. Henderson II'den elde edilen tahminlerde bu yanlışlıklar

ilk işlemde yoktur fakat ikinci işlemde vardır. Henderson III yansız tahminler verir, fakat hesaplamalar engelleyici olmaktadır (Henderson 1953).

2.3.2.1 Henderson-I

Üç yöntem arasında hesaplaması en kolay olan ve bundan dolayı da varyans bileşenlerinin tahmin edilmesinde en sık kullanılan yöntemdir. Bu yöntem varyans analizi yöntemi olarak da bilinmektedir (Henderson 1953).

i grup sayısı, j gözlem sayısı olmak üzere a sayıda grup olduğu varsayılırsa; $i=1,2,\dots,a$ ve $j=1,2,\dots,n_i$ olmak üzere

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij} \quad (2.43)$$

doğrusal modeli elde edilmektedir.

Henderson I aşağıdaki varsayımlarla kullanılabilir (μ hariç):

1. Modeldeki unsurların hepsi ilişkisiz değişkenler olmalıdır.
2. Modeldeki unsurların hepsi 0 ortalamalı ve $\sigma_\alpha^2, \sigma_\varepsilon^2$ varyanslı olmalıdır.

Aşağıdaki eşitlikler hesaplanarak;

$$T = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 \quad (2.44)$$

$$A = \sum_{i=1}^a \frac{y_i^2}{n_i} \quad (2.45)$$

$$CF = \frac{y_{..}^2}{N} \quad (CF: \text{Correction Factor}) \quad (2.46)$$

$$N = \sum_{i=1}^a n_i \quad (2.47)$$

$$K_1 = \sum_{i=1}^a \frac{n_i^2}{N} \quad (2.48)$$

daha sonra bu eşitliklerin beklenen değerleri hesaplanmaktadır. μ^2 'nin katsayıları ve varyanslar Çizelge 2.4'de gösterilmektedir.

Çizelge 2.4 μ^2 'nin katsayıları ve varyanslar

	μ^2	σ_α^2	σ_e^2	Hesaplanan Değerler
T	N	N	N	$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2$
A	N	N	a	$\sum_{i=1}^a \frac{y_{i.}^2}{n_{i.}}$
CF	N	K_1	1	$\frac{y_{..}^2}{N}$

Eğer veri ortogonal (dikey) olsaydı, varyans analizindeki kareler toplamı:

$$\text{GAKT} = \text{A} - \text{CF}$$

$$\text{GİKT} = \text{T} - \text{A} + \text{CF}$$

şeklinde hesaplanırdı. Eğer bu eşitlikler verinin ortogonal (dikey) olmamasına rağmen hesaplanır ve beklenen değerlerine eşitlenirse, varyansların yansız tahminleri bu eşitlikler çözülerek elde edilebilir (Henderson 1953). Gerekli beklenen değerler Çizelge 2.4'den elde edilerek Çizelge 2.5'te sunulmaktadır. Örneğin;

$$E(\text{GAKT}) = E(\text{A} - \text{CF}) = E(\text{A}) - E(\text{CF}).$$

Çizelge 2.5 Eşitliklerin beklenen değerleri

	σ_α^2	σ_e^2	Hesaplanan Değerler
A-CF	$N - K_1$	a-1	$\sum_{i=1}^a \frac{y_{i.}^2}{n_{i.}} - \frac{y_{..}^2}{N}$
T-A+CF	K_1	$N - a + 1$	$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^a \frac{y_{i.}^2}{n_{i.}} + \frac{y_{..}^2}{N}$

İlk eşitlik;

$$(N - K_1)\sigma_\alpha^2 + (a - 1)\sigma_e^2 = \sum_{i=1}^a \frac{y_{i.}^2}{n_{i.}} - \frac{y_{..}^2}{N} \quad (2.49)$$

şeklinde bulunur ve ikinci eşitlik;

$$(K_1)\sigma_\alpha^2 + (N - a + 1)\sigma_e^2 = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^a \frac{y_{i.}^2}{n_{i.}} + \frac{y_{..}^2}{N} \quad (2.50)$$

şeklinde elde edilir. Bu iki eşitlik iki bilinmeyenli iki denklem şeklinde ortak çözülmüş σ_α^2 ve σ_e^2 hesaplanmış olur (Henderson 1953).

2.3.2.2 Henderson-II

Henderson II yöntemi rasgele modellerde kullanılabilir. Bu yöntemde eğer modelde sabit etkiler varsa önce veriler sabit etkilere göre düzeltilmektedir daha sonra Henderson I yöntemi uygulanmaktadır (Henderson 1953, Sahai and Ojeda 2005).

Modeldeki sabit elemanların rasgele değişkenler olduğu varsayımı nedeniyle varyans bileşenlerinin tahminindeki yanlışlık Henderson II yöntemi kullanılarak ortadan kaldırılabilir. Aynı zamanda Henderson I'in basitliği elde tutulabilir. Henderson II sabit etkilerin en küçük kareler ile tahminini içermektedir, veriler bu tahminlere göre düzeltilip sonra düzeltilmiş verilere Henderson I uygulanmaktadır. (Henderson 1953, Sahai and Ojeda 2005).

Bu yöntem Hazel ve Terrill (1945) tarafından sabit etkiler dışında ortogonal olan veri üzerinde kullanılmıştır. Hesaplama amaçları için varsayımlar, sabit etkiler hariç düzeltilmemiş verinin kareler toplamına karşılık gelen beklenen değerler, tahminler için yanlıdır. Henderson II bu yanlışlığı değerlendirmeye ve düzeltmeye olanak sağlamaktadır (Henderson 1953).

Doğrusal modelin;

$$y_a = \sum_{i=1}^p b_i x_{ia} + e_a \quad a = 1, \dots, N \quad (2.51)$$

olduğu varsayılırsa, burada x 'ler bilinmekte; e 'ler 0 ortalamalı, σ_e^2 varyanslı ve ilişkisizdirler. Varyans bileşenleri tahmini problemlerinde b 'lerin hepsi sabit değildir. Fakat çözüm yolu olarak b 'lerin hepsinin sabit olduğu varsayılarak b 'lerin tahminleri en küçük kareler eşitlikleri ile elde edilmektedir. b 'lerin tahminleri için en küçük kareler eşitlikleri;

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p C_{1i} \hat{b}_i &= Y_1 & C_{ij} &= \sum_{a=1}^N x_{ia} x_{ja} \\ \sum_{i=1}^p C_{2i} \hat{b}_i &= Y_2 & Y_i &= \sum_{a=1}^N x_{ia} y_a \\ &\vdots & & \\ \sum_{i=1}^p C_{pi} \hat{b}_i &= Y_p \end{aligned} \quad (2.52)$$

şeklinde ifade edilmektedir (Henderson 1953, Searle *et al.* 2006). (2.52)'deki denklemlerden bir çözüm elde etmek için bazen tahminler üzerinde bir veya daha fazla doğrusal kısıtlamalar koymak gerekmektedir (Henderson 1953).

Bütün $i = 1, \dots, s$ için $b_1, \dots, b_s$ 'ler sabit olduğunda,

$$E(\hat{b}_i - b_i)^2 = K_i \sigma_e^2 \quad (2.53)$$

eşitliği bulunur. Bütün en küçük kareler tahminleri bu özelliğe sahip değildir. Henderson II, sadece (2.53)'ün geçerli olduğu en küçük kareler tahminini kullanarak veriyi düzeltmek için uygulanmaktadır. Veri:

$$z_a = y_a - \sum_{i=1}^s \hat{b}_i x_{ia} \quad (2.54)$$

ifadesiyle birlikte düzeltilmektedir (Henderson 1953). $i \neq j$ olduğunda $i, j = s+1, \dots, r \leq p$ için bütün $C_{ij} = 0$ varsayılırsa,

$$Z_i = \sum_a x_{ia} z_a \quad (2.55)$$

bulunur. Daha sonra,

$$Z_u = Y_u - \sum_{i=1}^s \hat{b}_i C_{ui} \quad (2.56)$$

$$\sum_{i=s+1}^r \frac{Z_i^2}{C_{ii}} \quad (2.57)$$

eşitlikleri hesaplanmaktadır. σ_e^2 hariç, $b_1, \dots, b_s = 0$ varsayımı ile (2.56)'nın beklenen değeri ile (2.57)'nin beklenen değerinin aynı olduğu bulunmaktadır.

$$\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s C^{ij} P_{ij} \quad (2.58)$$

(2.58) ifadesinde C^{ij} 'ler C_{ij} matrisinin ters matrisinin elemanlarıdır ($i, j = 1, \dots, p$) ve

$$P_{uv} = \sum_{i=s+1}^r \frac{C_{iu} C_{iv}}{C_{ii}} \text{ dir.} \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^p C_{ij} b_j &= Y_i \quad i = 1, \dots, s \\ \sum_{j=1}^s C_{ij} b_j + C_{ii} b_i &= Y_i \quad i = s+1, \dots, p \end{aligned} \quad (2.60)$$

(2.52)'deki en küçük kareler eşitliği; (2.60) şeklinde yazılabilirse veya s değeri küçükse, (2.58)'in hesaplaması basittir. (Henderson 1953).

Bu eşitliklerde $i \neq j$ olduğunda bütün $i, j = s+1, \dots, p$ ve $C_{ij} = 0$ 'dır. (2.60) denklemini yazılabildiğinde C^{ij} ve $\hat{b}_i$ ($i, j = 1, \dots, s$);

$$\sum_{j=1}^s C'_{ij} \hat{b}_j = Y'_i \quad (i = 1, \dots, s) \quad (2.61)$$

eşitliklerinden hesaplanabilir (Henderson 1953). (2.61) eşitliğinde;

$$\begin{aligned} C'_{uv} &= C_{uv} - \sum_{i=s+1}^p \frac{C_{iu} C_{iv}}{C_{ii}} \\ Y'_u &= Y_u - \sum_{i=s+1}^p \frac{C_{iu} Y_i}{C_{ii}} \end{aligned} \quad (2.62)$$

şeklinde ifade edilmektedir. $b_1, \dots, b_s$ 'lerin en küçük kareler tahminleri (2.61) eşitliğinin çözümüdür ve $C^{ij}(i, j = 1, \dots, s)$ (2.61)'deki katsayılar matrisi için ters matrisin elemanlarıdır (Henderson 1953).

2.3.2.3 Henderson-III

Hesaplanabilirliği mümkün olduğunda, varyans bileşenlerini hesaplamak için kullanılan üç yöntemden en uygun olanı Henderson III yöntemidir. Öncelikle bu yöntem modeldeki sabit unsurların zorlukları etrafında hareket etmektedir. İkinci olarak, modeldeki unsurlar ilişkili olmalarına rağmen, bu yöntem tarafsız tahminler vermektedir. Ne yazık ki Henderson III dikey olmayan durumda, farklı sınıfların sayısı küçük olmadığında veya planlanan deney düzeni ortogonal olmayan durumu içermediği sürece hesaplanabilirliği uygun değildir. Sonuç olarak varyans analizlerinin kareler ortalamaları en küçük kareler eşitlikleri çözülmeden elde edilebilmektedir. Bu iki durumda da beklenen kareler ortalamalarını hesaplamak kolaydır.

Doğrusal model y_a ile tanımlanırsa, a'ncı gözlem;

$$y_a = \sum_{i=1}^p b_i x_{ia} + e_a \text{ 'dır.} \quad (2.63)$$

Burada x'ler biliniyor, e'ler 0 ortalamalı, σ_e^2 varyanslı ve ilişkisizdir. b'ler sabit ve b'lerin hangi dağılıma sahip olduğu belirtilmemektedir. $b_{q+1}, \dots, b_p = 0$ ise $b_1, \dots, b_q$ 'nun en küçük kareler tahminleri;

$$\begin{aligned} \widehat{b}_1 C_{11} + \widehat{b}_2 C_{12} + \dots + \widehat{b}_q C_{1q} &= Y_1 \\ \widehat{b}_1 C_{21} + \widehat{b}_2 C_{22} + \dots + \widehat{b}_q C_{2q} &= Y_2 \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \end{aligned} \quad (2.64)$$

eşitliklerinin çözümüdür (Henderson 1953). Bu eşitliklerde,

$$C_{ij} = \sum_{a=1}^N x_{ia} x_{ja} \quad (2.65)$$

$$Y_i = \sum_{a=1}^N x_{ia} y_a \quad (2.66)$$

şeklinde bulunmaktadır. $\widehat{b}_1, \dots, \widehat{b}_q$ 'lardan dolayı kareler toplamlarındaki azalma;

$$R(b_1, \dots, b_q) = \sum_{i=1}^q \widehat{b}_i Y_i \quad (2.67)$$

biçiminde ifade edilir. Daha sonra

$$\widehat{b}_i = \sum_{j=1}^q C^{ij} Y_j \quad (2.68)$$

şeklinde hesaplanır. Burada C^{ij} , C_{ij} matrisinin invers matrisinin elemanlarıdır ($i, j = 1, \dots, q$). (2.68) eşitliği (2.67) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$R(b_1, \dots, b_q) = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q C^{ij} Y_i Y_j \quad (2.69)$$

elde edilir. (2.69)'u kullanarak $R(b_1, \dots, b_q)$ beklenen değeri,

$$E(R(b_1, \dots, b_q)) = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q C^{ij} E(Y_i Y_j) \quad (2.70)$$

şeklinde yazmak kolaydır fakat hesaplamak yeterince kolay değildir. (2.70) eşitliği başka bir ifadeyle:

$$\begin{aligned} E(R(b_1, \dots, b_q)) &= \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^p C_{ij} E(b_i b_j) + \sum_{i=q+1}^p \sum_{j=1}^q C_{ij} E(b_i b_j) \\ &\quad + \sum_{i=q+1}^p \sum_{j=q+1}^p \lambda_{ij} E(b_i b_j) + q' \sigma_e^2 \end{aligned} \quad (2.71)$$

biçiminde yazılabilmektedir Burada;

$$\begin{aligned} \lambda_{uv} &= \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q C^{ij} [C_{iu} C_{jv} + C_{iv} C_{ju}] \text{ u} \neq \text{v olduğunda,} \\ \lambda_{uu} &= \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q C^{ij} C_{iu} C_{ju} \text{ olur.} \end{aligned} \quad (2.72)$$

Birçok varyans bileşenleri problemlerinde $E(b_i b_j) = 0$ alınmaktadır ($i \neq j$). Böylece sadece λ_{ii} 'nin hesaplanması gerekmektedir. q' eşitlik (2.64)'teki bağımsız değişkenlerin sayısını belirtmektedir (Henderson 1953).

Düzeltilmemiş genel kareler toplamlarının beklenen değeri,

$$E(\sum_{a=1}^N y_a^2) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p C^{ij} E(b_i b_j) + N \sigma_e^2 \quad (2.73)$$

şeklinde kolayca hesaplanabilir. b'lere ilişkin varsayımlar ne olursa olsun artık kareler ortalamasının σ_e^2 'ye eşit olduğu görülmektedir (Henderson 1953). (2.71) eşitliği kullanılarak;

$$E(R(b_1, \dots, b_p)) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p C_{ij} E(b_i b_j) + p' \sigma_e^2. \quad (2.74)$$

elde edilir. Böylece artık kareler toplamının beklenen değeri;

$$\begin{aligned} &E(\sum_a y_a^2 - R(b_1, \dots, b_p)) \\ &= [\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p C_{ij} E(b_i b_j) + N \sigma_e^2] - [\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p C_{ij} E(b_i b_j) + p' \sigma_e^2] \\ &= (N - p') \sigma_e^2 \end{aligned} \quad (2.75)$$

şeklinde bulunur. $b_{q+1}, \dots, b_p$ 'lerin bağımsız dağılıma sahip 0 ortalamalı ve σ_e^2 varyanslı olduğu varsayıldığında, bu varyans $R(b_1, \dots, b_p) - R(b_1, \dots, b_q)$ eşitliğinin beklenen

değeri alınarak tahmin edilebilmektedir. (2.71) ve (2.74) dikkate alınarak bu farkın beklenen değeri;

$$\begin{aligned} & \sum_{i=q+1}^p \sum_{j=q+1}^p (C_{ij} - \lambda_{ij}) E(b_i b_j) + (p' - q') \sigma_e^2 \\ & = \sum_{i=q+1}^p (C_{ii} - \lambda_{ii}) \sigma^2 + (p' - q') \sigma_e^2 \end{aligned} \quad (2.76)$$

biçiminde bulunur (Henderson 1953). (2.75)'den elde edilen σ_e^2 'nin tahmini kullanılarak (2.76) eşitliği için σ^2 'nin sapmasız bir tahmini $R(b_1, \dots, b_p) - R(b_1, \dots, b_q)$ eşitliğinden elde edilebilmektedir. $b_1, \dots, b_q$ ile ilgili yapılan varsayımların hiçbir öneminin olmadığına dikkat edilmelidir (Henderson 1953).

2.3.3 En Çok Olabilirlik Tahmin Yöntemi (ML)

Sürekli değişkenlerden oluşan veride varyans bileşenlerinin en çok olabilirlik tahmini genellikle normallik varsayımına dayalı durumlara özgüdür. Dengeli olmayan veriler için $y \sim N(\mu 1_N, V = \{ \sigma_\alpha^2 J_{n_j} + \sigma_e^2 I_{n_i} \})$ ile (L) olabilirlik fonksiyonu,

$$L = L(\mu, V|y) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}(y - \mu 1_N)' V^{-1} (y - \mu 1_N)\right]}{(2\pi)^{\frac{1}{2}N} |V|^{\frac{1}{2}}} \quad (2.77)$$

şeklinde tanımlanmaktadır (Searle 1971, Sahai and Ojeda 2005, Searle *et al.* 2006).

Bu y'nin yoğunluk fonksiyonu ile aynıdır, genelde $f(y|\mu, V)$ ile gösterilmektedir ve

$$L(\mu, V|y) \equiv f(y|\mu, V) \text{ 'dir.}$$

Bu iki sembol kesinlikle aynı fonksiyonu göstermektedir fakat her ikisinde kendine özgü kavramlarda kullanılmaktadır. $f(y|\mu, V)$ formülü y'nin (μ ve V ile) yoğunluğu ile ilgilenildiği durumlarda kullanılmaktadır. $L(\mu, V|y)$ ise verinin verilen bazı vektörleri için μ ve V 'nin fonksiyonu olarak yazılabileceği vurgulanmak istendiğinde kullanılmaktadır. (2.77) formülü μ ve V 'nin en çok olabilirlik tahmininin temelinin oluşturmaktadır. V 'nin en çok olabilirlik tahmini σ_α^2 ve σ_e^2 'nin en çok olabilirlik tahminleri ile yer değiştirmektedir (Searle 1971, Sahai and Ojeda 2005, Searle *et al.* 2006).

$aI + bJ$ şeklinde olan (2.77) formülündeki V ile;

$$V^{-1} = \left\{ \frac{1}{a\sigma_\alpha^2} \left(I_{n_i} - \frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_e^2 + n_i\sigma_\alpha^2} J_{n_j} \right) \right\}$$

$$|V| = \prod_{i=1}^a [\sigma_e^{2(n_i-1)} (\sigma_e^2 + n_i\sigma_\alpha^2)] \quad (2.78)$$

eşitlikler elde edilir. (2.78) formülü yardımıyla,

$$L = \frac{\exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_e^2} [\sum_i \sum_j (y_{ij} - \mu)^2 - \sum_i \frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_e^2 + n_i\sigma_\alpha^2} (y_{i.} - n_i\mu)^2] \right\}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}N} \sigma_e^{2 \left[\frac{1}{2}(N-a) \right]} \prod_{i=1}^a (\sigma_e^2 + n_i\sigma_\alpha^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.79)$$

elde edilmektedir. L parametre değerini maksimize etmek, L 'nin doğal logaritmasını maksimize etmek ile aynı olduğu için $l = \log L$ ile gösterilen fonksiyonu maksimize etmek L 'yi maksimize etmekten daha kolaydır. Bu kapsamda,

$$l = \log L = \log L(\mu, V|y)$$

$$= -\frac{1}{2}N \log 2\pi - \frac{1}{2}(N-a) \log \sigma_e^2 - \frac{1}{2} \sum_i \log (\sigma_e^2 + n_i\sigma_\alpha^2)$$

$$- \frac{\sum_i \sum_j (y_{ij} - \mu)^2}{2\sigma_e^2} + \frac{1}{2\sigma_e^2} \sum_i \frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_e^2 + n_i\sigma_\alpha^2} (y_{i.} - n_i\mu)^2 \quad (2.80)$$

elde edilir (Searle 1971, Sahai and Ojeda 2005, Searle *et al.* 2006).

2.3.3.1 Dengeli Verilerde En Çok Olabilirlik Tahmin Yöntemi

Dengeli veri $\forall i$ için $n_i = n$ 'dir. Bu $\log L$ 'yi daha da basitleştirmekte ve;

$$l = \log L = -\frac{1}{2}N \log 2\pi - \frac{1}{2}a(n-1) \log \sigma_e^2 - \frac{1}{2}a[\log (\sigma_e^2 + n\sigma_\alpha^2)]$$

$$- \frac{\sum_i \sum_j (y_{ij} - \mu)^2}{2\sigma_e^2} + \frac{n^2\sigma_\alpha^2 \sum_i (\bar{y}_{i.} - \mu)^2}{2\sigma_e^2(\sigma_e^2 + n\sigma_\alpha^2)} \quad (2.81)$$

şeklinde yazılabilmektedir (Sahai and Ojeda 2005, Searle *et al.* 2006). Son iki terim yeniden düzenlenirse gruplar arası kareler toplamı ve hata kareler toplamı;

$$- \frac{\sum_i \sum_j (y_{ij} - \mu)^2}{2\sigma_e^2} + \frac{n^2\sigma_\alpha^2 \sum_i (\bar{y}_{i.} - \mu)^2}{2\sigma_e^2(\sigma_e^2 + n\sigma_\alpha^2)}$$

$$= -\frac{1}{2\sigma_e^2} [\sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y}_{i.} + \bar{y}_{i.} - \mu)^2 - \frac{n\sigma_\alpha^2}{\sigma_e^2 + n\sigma_\alpha^2} \sum_i n(\bar{y}_{i.} - \mu)^2]$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2\sigma_e^2} \left[G\dot{I}KT + \left(1 - \frac{n\sigma_\alpha^2}{\sigma_e^2 + n\sigma_\alpha^2}\right) \sum_i n(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..} + \bar{y}_{..} - \mu)^2 \right] \\
&= -\frac{1}{2\sigma_e^2} \left\{ G\dot{I}KT + \frac{\sigma_e^2}{\sigma_e^2 + n\sigma_\alpha^2} [GAKT + an(\bar{y}_{..} - \mu)^2] \right\}
\end{aligned} \tag{2.82}$$

elde edilir. Parametrelerin bir fonksiyonunun en çok olabilirlik tahmin edicisi, parametrelerin en çok olabilirliğinin fonksiyonu ile aynı olduğu için (2.81) formülünde

$$\lambda = \sigma_e^2 + n\sigma_\alpha^2 \tag{2.83}$$

yazılarak;

$$\begin{aligned}
l = \log L = & -\frac{1}{2}N \log 2\pi - \frac{1}{2}a(n-1) \log \sigma_e^2 - \frac{1}{2}a \log \lambda \\
& - \frac{G\dot{I}KT}{2\sigma_e^2} - \frac{GAKT}{2\lambda} - \frac{an(\bar{y}_{..} - \mu)^2}{2\lambda}
\end{aligned} \tag{2.84}$$

eşitliği elde edilir.

En çok olabilirlik eşitlikleri $\log L$ 'nin μ, σ_e^2 ve λ 'ya göre kısmi türevlerinin alınıp sıfıra eşitlenmesiyle;

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l}{\partial \mu} &= \frac{an(\bar{y}_{..} - \mu)}{2\lambda}, \\
\frac{\partial l}{\partial \sigma_e^2} &= \frac{-a(n-1)}{2\sigma_e^2} + \frac{G\dot{I}KT}{2\sigma_e^4} = \frac{-a(n-1)}{2\sigma_e^4} \left[\sigma_e^2 - \frac{G\dot{I}KT}{a(n-1)} \right], \\
\frac{\partial l}{\partial \lambda} &= \frac{-a}{2\lambda} + \frac{GAKT}{2\lambda^2} + \frac{an(\bar{y}_{..} - \mu)^2}{2\lambda^2} = \frac{-a}{2\lambda^2} \left(\lambda - \frac{GAKT}{a} \right) + \frac{an(\bar{y}_{..} - \mu)^2}{2\lambda^2}
\end{aligned} \tag{2.85}$$

denklemleri elde edilmektedir (Sahai and Ojeda 2005, Searle *et al.* 2006). Bu kısmi türevleri sıfıra eşitlerken μ, σ_e^2 ve λ parametrelerinin sembolleri değiştirilmektedir. Yani, denklemlerin çözümleri anlamına gelen $\dot{\mu}, \dot{\sigma}_e^2$ ve $\dot{\lambda}$ sembolleri kullanılmaktadır. (2.85) denkleminde;

$$\begin{aligned}
\dot{\mu} &= \bar{y}_{..}, \\
\dot{\sigma}_e^2 &= G\dot{I}KO, \\
\dot{\lambda} &= \frac{GAKT}{a} = \left(1 - \frac{1}{a}\right) GAKO, \\
\dot{\sigma}_\alpha^2 &= \frac{\dot{\lambda} - \dot{\sigma}_e^2}{n} = \frac{\left(1 - \frac{1}{a}\right) GAKO - G\dot{I}KO}{n}
\end{aligned} \tag{2.86}$$

çözümler elde edilmektedir (Sahai and Ojeda 2005, Searle *et al.* 2006). Elde edilen bu çözümler en çok olabilirlik denklemlerinin çözümleridir. Fakat bulunan bu çözümler μ, σ_e^2 ve σ_α^2 değişkenleri için $L(\mu, \sigma_e^2, \sigma_\alpha^2 | y)$ 'nin maksimumu, $L(\dot{\mu}, \dot{\sigma}_e^2, \dot{\sigma}_\alpha^2 | y)$ ile benzer

olan, $L(\hat{\mu}, \hat{V}|y)$ olmasına rağmen gerekli olan en çok olabilirlik tahmin edicileri değildir.

En çok olabilirlik tahmin edicileri $\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}_e^2$ ve $\tilde{\sigma}_\alpha^2$ şeklinde gösterilmektedir. $\hat{\mu}, \hat{\sigma}_e^2$ ve $\hat{\sigma}_\alpha^2$ 'nin sırasıyla $\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}_e^2$ ve $\tilde{\sigma}_\alpha^2$ olmaması nedeni $\hat{\mu}, \hat{\sigma}_e^2$ ve $\hat{\sigma}_\alpha^2$ 'lerin μ, σ_e^2 ve σ_α^2 parametre uzaylarında bulunmama durumlarıdır. Özellikle (2.86) da $\hat{\sigma}_\alpha^2$ negatif olabilir ve negatif olduğu zaman σ_α^2 (bir varyans ve negatif değildir, yani $0 \leq \sigma_\alpha^2 < \infty$) tarafından tanımlanan $(0, \infty)$ parametre uzayında bulunmamaktadır. Böylece $\hat{\sigma}_\alpha^2$ 'nin çözümü negatif olmadığında $\tilde{\sigma}_\alpha^2$ en çok olabilirlik tahmin edicisi olabilmektedir. En çok olabilirliğin tanımı gereğince, olabilirliğin parametre uzayı üzerinde maksimum olması gerekmektedir. Bu yüzden en çok olabilirlik tahmin edicileri $\tilde{\sigma}_e^2 > 0$ ve $\tilde{\sigma}_\alpha^2 \geq 0$ parametre uzaylarında olmalıdır (Sahai and Ojeda 2005, Searle *et al.* 2006).

Buna rağmen, tek yönlü sınıflamada en çok olabilirlik çözümleri olan $\hat{\mu}, \hat{\sigma}_e^2$ ve $\hat{\sigma}_\alpha^2$ çözümlerinden bir tek $\hat{\sigma}_\alpha^2$ 'nin parametre uzayında olmama durumu vardır. Bu da parametrelerin sınırlarından kaynaklanmaktadır ($-\infty < \mu < \infty, 0 < \sigma_e^2 < \infty$ ve $0 \leq \sigma_\alpha^2 < \infty$). Sırasıyla $\hat{\mu}, \hat{\sigma}_e^2$ ve $\hat{\sigma}_\alpha^2$ çözümleri düşünülürse; ilk olarak $\hat{\mu}, \hat{\sigma}_e^2$ ve $\hat{\sigma}_\alpha^2$ 'ye bağımlı değildir ve $\hat{\mu} = \bar{y}_.$, μ uzayında olduğu için μ 'nün en çok olabilirlik tahmin edicisi (Sahai and Ojeda 2005, Searle *et al.* 2006);

$$\tilde{\mu} = \hat{\mu} = \bar{y}_. \text{ dir.} \quad (2.87)$$

GİKO asla negatif olamayacağı için $\hat{\sigma}_e^2 = \text{GİKO}$, σ_e^2 parametre uzayındadır. Fakat $\hat{\sigma}_\alpha^2$ $\hat{\sigma}_e^2$ 'ye bağımlı olduğu için sadece $\tilde{\sigma}_e^2$ 'nin sadece σ_e^2 parametre uzayında olduğundan değil, $(\tilde{\sigma}_e^2, \tilde{\sigma}_\alpha^2)$ tahmin edici çiftinin $(\sigma_e^2, \sigma_\alpha^2)$ tarafından tanımlanan ikili uzayda olduğundan emin olmak gerekmektedir. Sonuç olarak $\hat{\sigma}_e^2 = \text{GİKO}$ σ_e^2 'nin en çok olabilirlik tahmin edicisi değildir (Sahai and Ojeda 2005, Searle *et al.* 2006).

$\hat{\sigma}_e^2$ ve $\hat{\sigma}_\alpha^2$ en çok olabilirlik çözümlerinden $\tilde{\sigma}_e^2$ ve $\tilde{\sigma}_\alpha^2$ en çok olabilirlik tahmin edicilerini elde etmek için σ_e^2 ve $\lambda = \sigma_e^2 + n\sigma_\alpha^2$ ele alınmaktadır. L, σ_e^2 ve λ pozitif parametrelerinin pozitif fonksiyonu olsun ve bu fonksiyon üç boyutlu olarak çizilebilmektedir. (σ_e^2, λ) düzleminin pozitif çeyreği ele alınmaktadır (Sahai and Ojeda 2005, Searle *et al.* 2006).

(σ_e^2, λ) düzleminin pozitif bölümünde $\sigma_e^2 = \lambda$ doğrusu düşünülürse, $\sigma_\alpha^2 \geq 0$ olduğu için $\lambda = \sigma_e^2 + n\sigma_\alpha^2 \geq \sigma_e^2$ 'dir ve $\lambda \geq \sigma_e^2$ noktaları $\sigma_e^2 = \lambda$ doğrusunun alt kısmında kalmaktadır. Bu bölge $(\tilde{\lambda}, \tilde{\sigma}_e^2)$ en çok olabilirlik tahmininin olması gereken bölgedir. Bu bölge “geçerli bölge” olarak adlandırılmaktadır. $(\dot{\lambda}, \dot{\sigma}_e^2)$ noktası bu bölgede olduğu zaman bu noktaya en çok olabilirlik tahmini denir. Yani;

$$\dot{\sigma}_\alpha^2 \geq 0 \text{ olduğu zaman } \tilde{\sigma}_\alpha^2 = \dot{\sigma}_\alpha^2 \text{ ve } \tilde{\sigma}_e^2 = \dot{\sigma}_e^2 \text{ 'dir.} \quad (2.88)$$

$\dot{\sigma}_\alpha^2 < 0$ ($\dot{\lambda} < \dot{\sigma}_e^2$ olduğunda) olduğunda en çok olabilirlik tahminlerini vermemektedir. Bu durumda $\dot{\sigma}_\alpha^2 < 0$ olduğunda $\tilde{\sigma}_\alpha^2 = 0$ olmasını çelişki kullanarak ispatlanmaya çalışılırsa; ayrı ayrı iki durum söz konusudur, $\tilde{\sigma}_e^2 < \dot{\sigma}_e^2$ ve $\tilde{\sigma}_e^2 \geq \dot{\sigma}_e^2$. İlk durum $\tilde{\sigma}_e^2 < \dot{\sigma}_e^2$ ve (2.85) formülü ile birlikte en çok olabilirlik tahmini;

$$\frac{\partial \log L}{\partial \sigma_e^2} \Big|_{\sigma_e^2 = \tilde{\sigma}_e^2} = \frac{-a(n-1)}{2\tilde{\sigma}_e^4} \left[\tilde{\sigma}_e^2 - \frac{G_{IKT}}{a(n-1)} \right] = \frac{-a(n-1)}{2\tilde{\sigma}_e^4} (\tilde{\sigma}_e^2 - \dot{\sigma}_e^2) > 0 \quad (2.89)$$

şeklindedir. Bu nedenle λ ve σ_e^2 'nin fonksiyonu olan logaritma olabilirliğini artırmak için σ_e^2 'yi $\tilde{\sigma}_e^2$ olarak arttırılıp ve λ yerine $\tilde{\lambda}$ yazılmaktadır. Bu $\tilde{\sigma}_e^2$ 'nin bir en çok olabilirlik tahmini olması ile çelişmektedir. İkinci durum düşünülürse, $\tilde{\sigma}_e^2 \geq \dot{\sigma}_e^2$ olduğunda,

$$\tilde{\lambda} \geq \tilde{\sigma}_e^2 \geq \dot{\sigma}_e^2 > \dot{\lambda} \quad (2.90)$$

eşitsizliği elde edilmektedir. İlk eşitsizlik en çok olabilirlik tahminlerinin geçerli bölgede olmasını gerektirmektedir; ikinci eşitsizlik ikinci durumu ifade etmektedir ve üçüncü eşitsizlik $\dot{\sigma}_\alpha^2 < 0$ nedeniyle (2.85) formülü ile birlikte;

$$\frac{\partial \log L}{\partial \lambda} \Big|_{\mu = \bar{y}_., \lambda = \tilde{\lambda}} = \frac{-a}{2\tilde{\lambda}^2} \left(\tilde{\lambda} - \frac{G_{AKT}}{a} \right) + \frac{an(\bar{y}_{..} - \bar{y}_{..})^2}{2\tilde{\lambda}^2} = \frac{-a}{2\tilde{\lambda}^2} (\tilde{\lambda} - \dot{\lambda}) < 0 \quad (2.91)$$

bulunur. Böylece, λ 'yı $\tilde{\lambda}$ olarak arttırarak ve σ_e^2 yerine $\tilde{\sigma}_e^2$ yazarak logaritma olabilirliği arttırılabilmektedir. Bu $\tilde{\lambda}$ 'nın en çok olabilirlik tahmini olması ile çelişmektedir. Bu

nedenle $\dot{\sigma}_\alpha^2 < 0$ olduğunda $\tilde{\sigma}_\alpha^2 > 0$ durumuyla çelişki elde edilmektedir ve sonuç olarak $\tilde{\sigma}_\alpha^2 = 0$ olmak zorundadır. Yani,

$$\dot{\sigma}_\alpha^2 < 0 \text{ olduğunda } \tilde{\lambda} = \tilde{\sigma}_e^2 \text{ ve } \tilde{\sigma}_\alpha^2 = 0 \text{ 'dır.} \quad (2.92)$$

Dolayısıyla $\tilde{\sigma}_\alpha^2 = 0$ olduğunda μ ve σ_e^2 'nin en çok olabilirlik tahmin edicileri $\lambda = \sigma_e^2$ koşulu altında $\log L$ 'yi maksimize ederek elde edilmektedir. Bu, model de $\lambda = \sigma_e^2$ dolayısıyla $\sigma_\alpha^2 = 0$ alınması anlamına gelmez fakat üç boyutlu (L, σ_e^2, λ) uzayında $\lambda = \sigma_e^2$ düzleminde $\log L$ 'yi kısıtlayarak basitçe maksimize edilmektedir. Böylece $\lambda = \sigma_e^2$ olduğunda logaritmanın olabilirliği $l(\lambda = \sigma_e^2)$ olarak belirtilmektedir. (2.84) denkleminde $\lambda = \sigma_e^2$ yerine konularak;

$$l(\lambda = \sigma_e^2) = -\frac{1}{2}N \log 2\pi - \frac{1}{2}N \log \sigma_e^2 - \frac{G\dot{I}KT + GAKT}{2\sigma_e^2} - \frac{an(\bar{y}_.. - \mu)^2}{2\sigma_e^2} \quad (2.93)$$

elde edilir (Sahai and Ojeda 2005, Searle *et al.* 2006). μ ve σ_e^2 'ye ilişkin $\tilde{\mu} = \dot{\mu} = \bar{y}_..$ koşulu ile (2.93) denklemini maksimize edilirse;

$$\tilde{\sigma}_e^2 = \frac{G\dot{I}KT + GAKT}{N} = \frac{GKT}{an} \quad (2.94)$$

$$= \frac{(a-1)GAKO + a(n-1)G\dot{I}KO}{an} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)G\dot{I}KO + \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{a}\right)GAKO$$

$$= G\dot{I}KO + \frac{1}{n}\left[\left(1 - \frac{1}{a}\right)GAKO - G\dot{I}KO\right]$$

$$= \dot{\sigma}_e^2 + \dot{\sigma}_\alpha^2 \quad (2.95)$$

$$< \dot{\sigma}_e^2$$

elde edilir. (2.95) eşitliği dikkatle incelenirse, $\dot{\sigma}_\alpha^2$ (2.95)'i negatif yapmak için asla yeteri kadar negatif olamaz (Çünkü $\tilde{\sigma}_e^2 = \frac{GKT}{an}$ de GKT asla negatif değildir). Böylece $\dot{\sigma}_\alpha^2 < 0$ olduğunda en çok olabilirlik tahmin edicileri $\tilde{\sigma}_\alpha^2 = 0$ ve $\tilde{\sigma}_e^2 = \frac{GKT}{an}$ olur. Özetle en çok olabilirlik tahmin edicileri;

$$\tilde{\sigma}_e^2 = \begin{cases} G\dot{I}KO, & \left(1 - \frac{1}{a}\right)GAKO \geq G\dot{I}KO \\ \frac{GKT}{an}, & \left(1 - \frac{1}{a}\right)GAKO < G\dot{I}KO \end{cases} \quad (2.96)$$

$$\hat{\sigma}_\alpha^2 = \begin{cases} \left[\frac{(1-\frac{1}{a})GAKO - GIKO}{n} \right], & (1-\frac{1}{a})GAKO \geq GIKO \\ 0, & (1-\frac{1}{a})GAKO < GIKO \end{cases} \quad (2.97)$$

şeklinde bulunur (Searle 1971, Sahai and Ojeda 2005, Searle *et al.* 2006).

2.3.3.1 Dengeli Olmayan Verilerde En Çok Olabilirlik Tahmin Yöntemi

(2.77)'nin normallik varsayımı altında logaritmik olabilirliği;

$$l = -\frac{1}{2}N \log 2\pi - \frac{1}{2}(N-a) \log \sigma_e^2 - \frac{1}{2} \sum_i \log \lambda_i \\ - \frac{\sum_i \sum_j (y_{ij} - \mu)^2}{2\sigma_e^2} + \frac{1}{2\sigma_e^2} \sum_i \frac{\sigma_\alpha^2 n_i^2}{\lambda_i} (\bar{y}_i - \mu)^2 \quad (2.98)$$

şeklindedir (Searle 1971, Sahai and Ojeda 2005, Searle *et al.* 2006). Burada;

$$\lambda_i = \sigma_e^2 + n_i \sigma_\alpha^2 \text{ dir.} \quad (2.99)$$

(2.98) denkleminin son iki terimi basitçe yazılırsa;

$$l = -\frac{1}{2}N \log 2\pi - \frac{1}{2}(N-a) \log \sigma_e^2 - \frac{1}{2} \sum_i \log \lambda_i - \frac{GIKT}{2\sigma_e^2} - \sum_i \frac{n_i(\bar{y}_i - \mu)^2}{2\lambda_i} \quad (2.100)$$

elde edilir. Basitleştirme ($\tau = \sigma_\alpha^2 / \sigma_e^2$);

$$1 - \frac{n_i \sigma_\alpha^2}{\lambda_i} = \frac{\sigma_e^2}{\lambda_i} = \frac{1}{1+n_i \tau} \quad (2.101)$$

tanımı kullanılarak kolayca elde edilebilir. En çok olabilirlik eşitlikleri ve çözümleri $\frac{\partial \lambda_i}{\partial \sigma_e^2} = 1$ ve $\frac{\partial \lambda_i}{\partial \sigma_\alpha^2} = n_i$ ile (2.100) denklemindeki $\log L$ 'nin türevi alınırsa,

$$l_\mu = \sum_i \frac{n_i(\bar{y}_i - \mu)}{\lambda_i} \quad (2.102)$$

$$l_{\sigma_e^2} = -\frac{(N-a)}{2\sigma_e^2} - \frac{1}{2} \sum_i \frac{1}{\lambda_i} + \frac{GIKT}{2\sigma_e^4} + \sum_i \frac{n_i(\bar{y}_i - \mu)^2}{2\lambda_i^2} \quad (2.103)$$

$$l_{\sigma_\alpha^2} = -\frac{1}{2} \sum_i \frac{n_i}{\lambda_i} + \sum_i \frac{n_i^2(\bar{y}_i - \mu)^2}{2\lambda_i^2} \quad (2.104)$$

denklemleri bulunur. En çok olabilirlik eşitlikleri, (2.102), (2.103) ve (2.104) denklemlerinin sağ tarafları sıfıra eşitlenerek elde edilmektedir. Daha sonra sırasıyla μ ,

σ_e^2 ve λ_i sembolleri $\dot{\mu}$, $\dot{\sigma}_e^2$ ve $\dot{\lambda}_i = \dot{\sigma}_e^2 + n_i \dot{\sigma}_\alpha^2$ sembolleri ile yer değiştirmektedir. Buradaki $\dot{\mu}$, $\dot{\sigma}_e^2$ ve $\dot{\sigma}_\alpha^2$ en çok olabilirlik eşitliklerinin çözümleridir. Bu işlemler (2.102) denkleminde verilen l_μ 'ye uygulanırsa;

$$\dot{\mu} = \frac{\sum_i \frac{n_i \bar{y}_i}{\dot{\lambda}_i}}{\sum_i \frac{n_i}{\dot{\lambda}_i}} = \frac{\sum_i \frac{n_i \bar{y}_i}{\dot{\sigma}_e^2 + n_i \dot{\sigma}_\alpha^2}}{\sum_i \frac{n_i}{\dot{\sigma}_e^2 + n_i \dot{\sigma}_\alpha^2}} = \frac{\sum_i \bar{y}_i / \text{var}(\bar{y}_i)}{\sum_i \left[\frac{1}{\text{var}(\bar{y}_i)} \right]} \quad (2.105)$$

$$\text{var}(\bar{y}_i) = \dot{\sigma}_\alpha^2 + \frac{\dot{\sigma}_e^2}{n_i} \quad (2.106)$$

eşitlikleri elde edilir (Sahai and Ojeda 2005, Searle *et al.* 2006). $\dot{\sigma}_\alpha^2$ ve $\dot{\sigma}_e^2$, (2.103) ve (2.104) denklemlerinin sağ taraflarının sıfıra eşitlenmesiyle;

$$\frac{G\dot{K}T}{\dot{\sigma}_e^4} - \frac{(N-a)}{\dot{\sigma}_e^2} + \sum_i \frac{n_i (\bar{y}_i - \dot{\mu})^2}{\dot{\lambda}_i^2} - \sum_i \frac{1}{\dot{\lambda}_i} = 0 \quad (2.107)$$

$$\sum_i \frac{n_i^2 (\bar{y}_i - \dot{\mu})^2}{\dot{\lambda}_i^2} = \sum_i \frac{n_i}{\dot{\lambda}_i} \quad (2.108)$$

şeklinde elde edilmektedir. Bu eşitliklerdeki toplam terimlerinin payda kısmında bulunan $\dot{\lambda}_i = \dot{\sigma}_e^2 + n_i \dot{\sigma}_\alpha^2$ ile birlikte tahmin ediciler için açık bir analitik çözüm bulunmamaktadır. Oysaki verinin dengeli olduğu durumda bir çözüm vardı (Searle *et al.* 2006).

En çok olabilirlik tahmin edicileri; dengeli verilerdeki gibi $\dot{\mu}$, $\dot{\sigma}_e^2$ ve $\dot{\sigma}_\alpha^2$ çözümleri ancak $(\dot{\mu}, \dot{\sigma}_e^2, \dot{\sigma}_\alpha^2)$ üçlüsü $(\mu, \sigma_e^2, \sigma_\alpha^2)$ uzayı içinde ise en çok olabilirlik tahmin edicileridir. Bunun sağlandığından emin olurken negatiflik problemi yeniden ortaya çıkmaktadır. Her bir veri seti için, (2.107) ve (2.108) eşitlikleri doğrusal olmayan eşitliklerin sayısal çözümlerine uygun bazı iteratif yöntemlerle sayısal olarak çözülmelidir. İteratif yöntemler uygulandıktan sonra en çok olabilirlik tahmin edicileri;

$$\dot{\sigma}_\alpha^2 \geq 0 \text{ olduğu zaman } \tilde{\sigma}_e^2 = \dot{\sigma}_e^2, \tilde{\sigma}_\alpha^2 = \dot{\sigma}_\alpha^2 \text{ ve } \tilde{\mu} = \dot{\mu} \quad (2.109)$$

$$\dot{\sigma}_\alpha^2 < 0 \text{ olduğu zaman } \tilde{\sigma}_e^2 = \frac{G\dot{K}T}{N}, \tilde{\sigma}_\alpha^2 = 0 \text{ ve } \tilde{\mu} = \bar{y}_.. \quad (2.110)$$

şeklinde elde edilmektedir (Searle 1971, Sahai and Ojeda 2005, Searle *et al.* 2006). İkinci durumda $\hat{\sigma}_\alpha^2 < 0$ iken $\hat{\sigma}_\alpha^2 = 0$ olması dengeli verilerdeki ile aynıdır.

2.3.4 Kısıtlanmış En Çok Olabilirlik Tahmin Yöntemi (REML)

Yerel değişmezlik şeklinde adlandırılan ve en çok olabilirlik yönteminin bir uyarlaması olan kısıtlanmış en çok olabilirlik, olasılığın sadece belli bir kısmını maksimize etmektedir. Tek yönlü sınıflama için olasılığın μ 'yü içermeyen kısmını maksimize etmek anlamına gelmektedir (Searle 1971, Sahai and Ojeda 2005, Searle *et al.* 2006).

REML tahmininin sıklıkla bahsedilen faydalarından birinin karakteristik özelliği; sabit etkiler tahmini ile ilgilenmemesine rağmen bir en çok olabilirlik yöntemi olarak modelin sabit etkilerine ilişkin serbestlik derecelerini hesaba katmasıdır (Searle 1971, Sahai and Ojeda 2005, Searle *et al.* 2006).

2.3.4.1 Dengeli Verilerde Kısıtlanmış En Çok Olabilirlik Yöntemi

Dengeli veriler için kısıtlanmış olabilirlik kolayca elde edilebilmektedir. Bunu elde edebilmek için;

$$L(\mu, \sigma_e^2, \sigma_\alpha^2 | y) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{G\dot{I}KT}{\sigma_e^2} + \frac{GAKT}{\lambda} + \frac{(\bar{y}_{..} - \mu)^2}{\frac{\lambda}{an}}\right]\right\}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}an} \sigma_e^{2\left[\frac{1}{2}a(n-1)\right]} \lambda^{\frac{1}{2}a}} \quad (2.111)$$

eşitliğinden yararlanılmaktadır. $\bar{y}_{..}$, $G\dot{I}KT$ ve $GAKT$ 'dan bağımsız olduğu için (2.111) eşitliği;

$$L(\mu, \sigma_e^2, \sigma_\alpha^2 | y) = L(\mu | \bar{y}_{..}) L(\sigma_e^2, \sigma_\alpha^2 | GAKT, G\dot{I}KT) \quad (2.112)$$

şeklinde yazılabilmektedir. Burada $L(\mu | \bar{y}_{..})$, $\bar{y}_{..}$ 'ye bağlı μ 'nün olabilirliği anlamına gelmektedir. Yani,

$$L(\mu|\bar{y}_{..}) = \frac{\exp\left[-\frac{(\bar{y}_{..}-\mu)^2}{\frac{2\lambda}{an}}\right]}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\lambda}{an}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.113)$$

$$L(\sigma_e^2, \sigma_\alpha^2|GAKT, G\dot{I}KT) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{G\dot{I}KT}{\sigma_e^2} + \frac{GAKT}{\lambda}\right)\right]}{(2\pi)^{\frac{1}{2}(an-1)} \sigma_e^{2\left[\frac{1}{2}a(n-1)\right]} \lambda^{\frac{1}{2}(a-1)} (an)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.114)$$

şeklindedir. (2.114) denklemi GAKT ve G $\dot{I}$ KT'e bağlı σ_e^2 ve σ_α^2 'nın olabilirlik fonksiyonu anlamına gelmektedir. Bu, dengeli verilerle tek yönlü sınıflama için kısıtlanmış olabilirlik olarak adlandırılmaktadır (Searle 1971, Searle *et al.* 2006).

REML tahmini $\sigma_e^2 > 0$ ve $\sigma_\alpha^2 \geq 0$ parametre uzaylarında (2.114) denklemini maksimize ederek σ_e^2 ve σ_α^2 için tahmin edicilerin elde edilmesinden oluşmaktadır. Bu fonksiyonun logaritması l_R :

$$\begin{aligned} l_R &= \log L(\sigma_e^2, \sigma_\alpha^2|GAKT, G\dot{I}KT) \\ &= -\frac{1}{2}(an-1) \log 2\pi - \frac{1}{2} \log an - \frac{1}{2}a(n-1) \log \sigma_e^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}(a-1) \log \lambda - \frac{G\dot{I}KT}{2\sigma_e^2} - \frac{GAKT}{2\lambda} \end{aligned} \quad (2.115)$$

şeklinde gösterilmektedir. Bu fonksiyonun türevleri;

$$\begin{aligned} l_{R,\sigma_e^2} &= \frac{-a(n-1)}{2\sigma_e^2} + \frac{G\dot{I}KT}{2\sigma_e^4} \\ l_{R,\lambda} &= \frac{-(a-1)}{2\lambda} + \frac{GAKT}{2\lambda^2} \end{aligned} \quad (2.116)$$

şeklinde bulunur. Bu denklemleri sıfıra eşitleyip σ_e^2 ve λ yerine $\hat{\sigma}_{e,R}^2$ ve $\hat{\lambda}_R$ yazarak çözümler;

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_R &= \frac{GAKT}{(a-1)} = GAKO \\ \hat{\sigma}_{e,R}^2 &= \frac{G\dot{I}KT}{a(n-1)} = G\dot{I}KO \\ \hat{\sigma}_{\alpha,R}^2 &= \frac{1}{n}(GAKO - G\dot{I}KO) \end{aligned} \quad (2.117)$$

şeklinde elde edilmektedir. Bunlar REML çözümleridir fakat REML tahmin edicileri değildir. (2.117) denkleminde elde edilen REML çözümleri ML durumuna benzer

olarak, ancak $\dot{\sigma}_{e,R}^2$ ve $\dot{\sigma}_{\alpha,R}^2$ sonuçları negatif değilse REML tahmin edicileridir. $\dot{\sigma}_{e,R}^2$ asla negatif olamaz fakat $\dot{\sigma}_{\alpha,R}^2$ negatif olabilmektedir. Bundan dolayı l_R 'yi $\dot{\sigma}_{\alpha,R}^2 = 0$ koşulu altında maksimize etmek gerekmektedir. Bu durumda $\dot{\sigma}_{e,R}^2 = \frac{GKT}{(an-1)}$ olur. Böylece REML tahmin edicileri;

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{\alpha,R}^2 \geq 0 \text{ olduğunda } \dot{\sigma}_{e,R}^2 &= G\dot{I}KO \text{ ve } \dot{\sigma}_{\alpha,R}^2 = \frac{1}{n}(GAKO - G\dot{I}KO) \text{ olur.} \\ \dot{\sigma}_{\alpha,R}^2 < 0 \text{ olduğunda } \dot{\sigma}_{e,R}^2 &= \frac{GKT}{(an-1)} \text{ ve } \dot{\sigma}_{\alpha,R}^2 = 0 \text{ olur.} \end{aligned} \quad (2.118)$$

(2.118) şartlarında olduğu gibi elde edilmektedir (Searle 1971, Sahai and Ojeda 2005, Searle *et al.* 2006).

2.3.4.2 Dengeli Olmayan Verilerde Kısıtlanmış En Çok Olabilirlik Yöntemi

Dengeli olmayan veriler için olabilirlik fonksiyonu;

$$L(\mu, \sigma_e^2, \sigma_\alpha^2 | y) = \frac{\exp\left\{-\left[\frac{\sum_i \sum_j (y_{ij} - \mu)^2}{2\sigma_e^2} - \sum_i \frac{n_i^2 \sigma_\alpha^2 (\bar{y}_i - \mu)^2}{2\sigma_e^2 (\sigma_e^2 + n_i \sigma_\alpha^2)}\right]\right\}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}N} \sigma_e^{2\left[\frac{1}{2}(N-a)\right]} \prod_{i=1}^a (\sigma_e^2 + n_i \sigma_\alpha^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.119)$$

biçiminde yazılmaktadır. Dengeli verilerde olduğu gibi μ 'nün bir fonksiyonunu seçme yani olabilirliğin çarpanlara ayrılması durumu bulunmamaktadır. Fakat REML tahmin edicileri için denklemler çeşitli iteratif yöntemlerle birlikte elde edilebilmektedir (Searle *et al.* 2006).

2.3.5 Minimum Normlu Karesel Sapmasız Tahmin Yöntemi (MINQUE) ve Minimum Varyanslı Karesel Sapmasız Tahmin Yöntemi (MIVQUE)

Minimum norm ve minimum varyans özelliklerini içeren karesel sapmasız tahmin edicileri elde etmek için genel aşamalar Rao (1970, 1971a, 1971b, 1972) tarafından yapılan çalışmalarda sunulmaktadır. Rao (1970), Hartley vd. (1969)'un doğrusal modelde ayrı varyansların tahmini probleminden esinlenmiştir. $y_1, y_2, \dots, y_N$

$$Y = X\beta + e \quad (2.120)$$

modelinden elde edilen rasgele örneklem olsun. Burada; X bilinen $N \times m$ matris, β bilinmeyen parametrelerin m -vektörü ve e rasgele hata terimlerinin N -vektörü olup e , $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_N^2$ köşegen terimlerinden oluşan diagonal (köşegen) matris tarafından verilen varyans-kovaryans matrisine ve 0 ortalama vektörüne sahiptir. Buradaki problem bütün σ_i^2 'ler eşit olmadığında σ_i^2 'leri tahmin etmektir. C.R.Rao (1970) σ_i^2 'lerin sapmasız tahmin edilebilirliğini koruyarak X üzerine koşullar koymaktadır. Aynı zamanda minimum normlu karesel sapmasız tahmini (MINQUE) olarak bilinen tahmin şartlarını sunmaktadır ve Hartley vd. (1969)'nin tahmin edicilerinin aslında MINQUE olduğunu göstermektedir. Rao (1972) de belirtildiği üzere ayrı varyansların tahmini problemi aslında varyans bileşenleri tahmini probleminin özel bir durumudur.

MINQUE ve MIVQUE yöntemlerinin formülleri aşağıda sunulmuştur (Sahai and Ojeda 2005);

Genel doğrusal model;

$$Y = X\alpha + U\beta \quad (2.121)$$

biçiminde ifade edilebilmektedir. Burada $U = [U_1 : U_2 : \dots : U_p]$ ve $\beta' = [\beta'_1 : \beta'_2 : \dots : \beta'_p]$ 'dir. Genel doğrusal modelden;

$$E(Y) = X\alpha \quad (2.122)$$

$$var(Y) = \sum_{i=1}^p \sigma_i^2 V_i \quad (2.123)$$

sonuçları elde edilmektedir. Burada $V_i = U_i U_i'$ $i = 1, 2, \dots, p$ 'dir.

Rao (1972) $Y'AY$ karesel formunu kullanarak MINQUE ve MIVQUE için σ_i^2 varyans bileşenlerinin doğrusal kombinasyonlarını tahmin etmeyi amaçlamaktadır. Burada A , α içindeki değişiklikler için tahmin edicinin değişmezliğini ve yansızlığını sağlayan şartlara bağlı olarak seçilen simetrik matristir.

$$\sum_{i=1}^p \ell_i \sigma_i^2 \quad (2.124)$$

(2.124) kullanılarak yansızlık için;

$$E(Y'AY) = \sum_{i=1}^p \ell_i \sigma_i^2 \quad (2.125)$$

formülüne gereksinim duyulmaktadır. $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ rasgele vektör ve pozitif tanımlı bir A matrisi için;

$$E(Y'AY) = E(Y')AE(Y) + \text{tr}[A \text{Var}(Y)] \quad (2.126)$$

elde edilir. (2.122) ve (2.123), (2.126)'da yerine yazılarak;

$$E(Y'AY) = \alpha' X' A X \alpha + \sum_{i=1}^p \sigma_i^2 [\text{tr} A V_i] \quad (2.127)$$

biçiminde elde edilir. Bu nedenle (2.125)'deki yansızlık koşulu:

$$\alpha' X' A X \alpha + \sum_{i=1}^p \sigma_i^2 [\text{tr} A V_i] = \sum_{i=1}^p \ell_i \sigma_i^2 \quad (2.128)$$

şeklinde olur. Böylece A;

$$X' A X = 0 \text{ ve } [\text{tr} A V_i] = \ell_i \quad (2.129)$$

şartlarını sağladığında $Y'AY$ tahmin edicisi yansızdır. α içindeki değişikliklerin değişmezliği için (örneğin bütün α_0 'lar için $\alpha = \alpha + \alpha_0$ olarak dönüştürülürse);

$$(Y + X\alpha_0)' A (Y + X\alpha_0) = Y'AY \quad (2.130)$$

denklemini ancak ve ancak

$$AX = 0 \quad (2.131)$$

denklemini sağlandığında doğrudur. Böylece, (2.129) ve (2.131)'den α 'nın değişmezliği ve yansızlığı için şartlar;

$$AX = 0 \text{ ve } [\text{tr} A V_i] = \ell_i \quad (2.132)$$

biçiminde elde edilir.

MINQUE ve MIVQUE yöntemlerinin gelişimi aşağıda kısaca özetlenmiştir (Sahai and Ojeda 2005);

MINQUE için; (2.121) modelindeki β_i 'lerin gözlenebilir rasgele vektörler olduğunu varsayarak (2.124)'ün doğal tahmin edicisi

$$\sum_{i=1}^p \ell_i \beta_i' \beta_i / n_i \quad (2.133)$$

şeklinde elde edilmektedir. Bu doğal tahmin edici;

$$\beta' \Delta \beta \quad (2.134)$$

biçiminde de yazılabilmektedir. Burada Δ uygun olarak tanımlanmış diagonal matristir. (2.124)'ün amaçlanan tahmin edicisi ise:

$$Y'AY = (X\alpha + U\beta)'A(X\alpha + U\beta) = \alpha'X'AX\alpha + 2\alpha'X'AU\beta + \beta'U'AU\beta \quad (2.135)$$

şeklindedir. (2.132) koşulları (2.135) tahmin edici denkleminde yerine yazıldığında;

$$Y'AY = \beta'U'AU\beta \text{ elde edilmektedir.} \quad (2.136)$$

Amaçlanan tahmin edici (2.136) ile doğal tahmin edici (2.134) arasındaki fark;

$$\beta'(U'AU - \Delta)\beta \text{ dır.} \quad (2.137)$$

MINQUE; bu iki tahmin edici arasındaki farkı değişmezlik ve yansızlık koşullarına bağlı olarak öklidyen norm kullanarak minimize etmek işlemlerinden oluşmaktadır.

$$\| U'AU - \Delta \| \quad (2.138)$$

(2.138) de $\| \cdot \|$ matrisin normu anlamına gelmektedir ve herhangi bir M matrisi için

$$\| M \| = \{tr[M^2]\}^{1/2} \text{ dir.} \quad (2.139)$$

Verilen öklidyen normun karesini alarak;

$$\| U'AU - \Delta \|^2 = tr[(U'AU - \Delta)^2] = tr[(AU)^2] - tr[\Delta^2] \quad (2.140)$$

eşitliği elde edilmektedir. Burada $V = V_1 + \dots + V_p$ 'dir ve V_i (2.123) de tanımlanmıştır. $tr[\Delta^2]$ A'yı içermediği için, MINQUE problemi (2.132) şartlarına bağlı olarak $tr[(AV)^2]$ 'i minimize etmek olarak değişmektedir.

Alternatif olarak, Rao (1972) β_i 'lerin (çünkü hepsi aynı standart sapmaya sahip olmayabilir) standartlaştırılmasını düşünmüştür.

$$\eta_i = \sigma_i^{-1} \beta_i \quad (2.141)$$

(2.137)'deki fark denklemi (2.141) kullanılarak;

$$\eta' \Sigma^{\frac{1}{2}} (U'AU - \Delta) \Sigma^{\frac{1}{2}} \eta \quad (2.142)$$

şekline dönüşmektedir. Burada $\eta' = (\eta'_1 : \dots : \eta'_p)$ ve

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 I_{m_1} & \dots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \dots & \sigma_p^2 I_{m_p} \end{bmatrix} \text{dir.} \quad (2.143)$$

(2.139) öklidyen normu kullanılarak (2.142)'nin minimizasyonu (2.132) koşulları altında $tr[(AW)^2]$ 'nin minimizasyonu anlamına gelmektedir. Burada;

$$W = \sigma_1^2 V_1 + \dots + \sigma_p^2 V_p \text{ 'dir.} \quad (2.144)$$

(2.144)'deki W matrisinin tanımında bulunan σ_i^2 ağırlıkları bilinmemektedir. Bu sorun için Rao (1972) aşağıdaki iki değişikliği önermektedir.

(i) Eğer $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_p^2}, \dots, \frac{\sigma_{p-1}^2}{\sigma_p^2}$ oranları yaklaşık olarak bilindiğinde, (2.144) de bunları

yerine koyarak W hesaplanabilmektedir.

(ii) σ_i^2 'lerin (2.144)'deki önceki ağırlıkları kullanılarak MINQUE tahmin edicileri elde edilebilmektedir. Bu tahminler daha sonra (2.144) ile yer değiştirerek MINQUE aşamaları tekrar edilmektedir. Bu aşama iteratif MINQUE veya IMINQUE olarak adlandırılmaktadır (Rao ve Kleffe 1988). Bu iteratif düzende, yansızlık özelliği

genellikle bozulmaktadır. Rao (1971a) σ_i^2 'lerin önceki ağırlıklarından bağımsız olan MINQUE şartlarını göstermektedir.

Rao (1972)'den dolayı kullanılan aşağıdaki teorem MINQUE aşamalarında minimizasyon probleminin çözümünde kullanılmaktadır.

TEOREM: Bir P matrisi:

$$P = X(X'H^{-1}X)^{-1}X'H^{-1} \quad (2.145)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada X (2.121) modelinde yer alan matris ve H pozitif tanımlı bir matristir. O halde $tr[(AH)^2]$ 'nin aşağıdaki koşullar altında minimumuna;

$$AX = 0 \text{ ve } tr[AV_i] = \ell_i, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (2.146)$$

$$A^* = \sum_{i=1}^p \lambda_i RV_i R \quad (2.147)$$

burada

$$R = H^{-1}(I - P) \text{ ve } \lambda' = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)' \text{ dir.} \quad (2.148)$$

$$S\lambda = \ell \quad (2.149)$$

(2.149) eşitliğinden karar verilmektedir. Burada

$$S = \{s_{ij}\} = \{trRV_i RV_j\}, \quad i, j = 1, \dots, p \text{ ve } \ell' = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_p)' \text{ dir.} \quad (2.150)$$

İSPAT: (2.149)'dan;

$$\lambda = S^{-1}\ell' \text{ elde edilmektedir.}$$

Yani, $\sum_{i=1}^p \ell_i \sigma_i^2$ 'nin yansız bir tahmin edicisi varsa λ vardır. Ayrıca (2.149) denklemini sağlayan λ 'nın seçiminden dolayı $A^*X = 0$ ve $tr[A^*V_i] = \ell_i$ 'dir. Şimdi, $A = A^* + D$ alternatif bir matris olmak üzere $tr[DV_i] = 0, i = 1, \dots, p$ olur. Dahası $DX = 0 \Rightarrow RHD = D$ 'dir. Sonra;

$$\begin{aligned} tr[A^*HDH] &= \sum_{i=1}^p \lambda_i tr[RV_i RHDH] = \sum_{i=1}^p \lambda_i tr[V_i DHR] \\ &= \sum_{i=1}^p \lambda_i tr[V_i D] = 0 \end{aligned} \quad (2.151)$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla;

$$tr[(A^* + D)H(A^* + D)H] = tr[(A^*H)^2] + tr[(DH)^2]'dir. \quad (2.152)$$

Bu denklem minimumun A^* 'dan elde edildiğini göstermektedir. Teorem MINQUE problemi için bilinmeyen varyans bileşenlerinin önceki oranları olan $\sigma_1^{*2}, \dots, \sigma_p^{*2}$ için $H = V_1 + \dots + V_p$ veya $H = \sigma_1^{*2}V_1 + \dots + \sigma_p^{*2}V_p$ seçerek uygulanabilmektedir. (2.147) formülü kullanılarak $\sum_{i=1}^p \ell_i \sigma_i^2 = \ell' \sigma^2$ 'nin MINQUE tahmin edicisi ($\sigma'^2 = (\sigma_1^2, \dots, \sigma_p^2)$),

$$\ell' \hat{\sigma}^2 = Y' A^* Y = \sum_{i=1}^p \lambda_i Y' R V_i R Y = \sum_{i=1}^p \lambda_i \gamma_i' dir. \quad (2.153)$$

Burada $\gamma_i = Y' R V_i R Y$ 'dir.

$\gamma' = (\gamma_1, \dots, \gamma_p)$ olduğunda (2.153) tahmin edicisi;

$$\ell' \hat{\sigma}^2 = \lambda' \gamma \quad (2.154)$$

biçiminde yazılabilmektedir. (2.154) içinde $\lambda = S^{-} \ell$ ile yer değiştirilirse,

$$\ell' \hat{\sigma}^2 = \ell' S^{-} \gamma \quad (2.155)$$

elde edilir. Böylece σ^2 'nin MINQUE vektörü;

$$\hat{\sigma}^2 = S^{-} \gamma \quad (2.156)$$

şeklinde verilmektedir. (2.156) çözüm vektörü ancak bireysel bileşenler yansız tahmin edilebildiğinde tektir. Fakat $\ell' \sigma^2$ tahmin edilebiliyorsa (2.156)'nın her çözümü tek bir tahmine sebep olmaktadır. MINQUE için çözüm vektörü olan (2.156); $tr[RV_i RV_j]$ (S matrisinin (i,j)'nci elemanı), $Y' R V_i R Y = tr[RV_i R Y Y']$ (γ vektörünün i'nci bileşeni), (2.145)'de tanımlanan P matrisinin hesabını içeren $R = H^{-1}(I - P)$ matrisi gibi terimlerin hesaplanmasını içermektedir.

MIVQUE için; Rao (1971b) yansızlık ve değişmezlik için (2.132) koşullarına bağlı olarak $Y' A Y$ 'nin varyansını minimize (MIVQUE) etmeyi amaçlamaktadır. Genelde, β_i 'nin elemanları σ_i^2 varyansına ve μ_{4i} dördüncü momentine sahip olduğunda $Y' A Y$ 'nin varyansı;

$$Var(Y' A Y) = 2tr[(A W)^2] + \sum_{i=1}^p K_i \sigma_i^4 tr(A V_i)^2 \quad (2.157)$$

biçiminde verilmektedir. Burada, W (2.144)'de tanımlanmıştır ve K_i, β_i içindeki değişkenlerin kurtosis katsayılarıdır, örneğin $K_i = \frac{\mu_{4i}}{\sigma_i^4} - 3$. Normallik varsayımı altında, mesela β_i 'ler normal dağıldığı zaman kurtosis terimleri sıfırdır. Yani;

$$Var(Y'AY) = 2tr[(AW)^2] \text{ 'dir.} \quad (2.158)$$

Bu yüzden normallik varsayımı altında MIVQUE işlemleri, (2.132) koşullarıyla birlikte (2.158) denkleminin minimizasyonundan oluşmaktadır. Böylece normallik varsayımı altında MIVQUE, MINQUE tahmin yönteminin alternatif bir formudur. Rao (1971b) genel MIVQUE minimizasyonu problemi olarak (2.157) denklemini düşünmektedir. Bu anlamda (2.157) formülü;

$$Var(Y'AY) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \lambda_{ij} tr[AV_i AV_j] \quad (2.159)$$

biçiminde de ifade edilebilmektedir. Burada,

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} 2\sigma_i^2 \sigma_j^2, & i \neq j \\ (2 + K_i)\sigma_i^4, & i = j \end{cases} \quad (2.160)$$

şeklinde verilmiştir. λ_{ij} 'ler bilinmediği zaman;

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p tr[(AV_i AV_j)] \quad (2.161)$$

eşitliği minimize edilebilmektedir. Burada dikkat etmek gerekirse (2.161) denklemi $tr[(AV)^2]$ 'ye aynen eşittir. Bu durumda MIVQUE, (2.140)'da seçilen MINQUE normuna özdeştir.

2.4 Varyans Bileşenleri İle İlgili Yapılan Çalışmalar

Varyans bileşenleri ile ilgili farklı alanlarda özellikle hayvancılık, biyoloji ve tıp gibi sağlık bilimleri alanında gerek uluslararası gerekse ulusal literatürde pek çok çalışmaya rastlamak mümkündür. Konu ile ilgili ülkemizde yapılan ve hem ulusal hem de uluslararası literatüre katkıda bulunan bazı çalışmalar aşağıda sunulmuştur.

Akbař vd. (1993) tarafından yapılan ve 43 babadan üç kulućka dönemi sonunda elde edilen 1940 bireyin kullanıldığı çalışmada, yumurta verim dönemi sonunda her bireyin yumurtaya başlama yaşı, yumurta verimi, yumurta randımanı ve ortalama yumurta ağırlığı değerleri toplanmış ve tavuklarda yumurta verim özelliklerine ait bu kayıtlardan yararlanarak varyans bileşenlerinin Henderson III, ML, REML ve MIVQUE yöntemleri ile tahmin edilmesi amaçlanmıştır. Analizlerde, tahmin edilen varyans bileşenleri bakımından kullanılan yöntemler arasında genel olarak bir farklılık bulunmamıştır. Bu durum verilerin dengeli bir desene sahip popölasyondan elde edilmiş olmasına bağlanmıştır.

Doğan vd. (1999) araştırmalarında Bala Tarım İşletmesinde yetiştirilen Holştayn sürüsünün 1985-1992 yılları arasındaki süt verimine ait kayıtlar kullanmışlardır. Çalışmada, tek etken üzerinden tekrarlanan iki etkene sahip deneme düzeninde varyans bileşenlerinin ANOVA yöntemiyle hesaplanarak, süt verimine ait kalıtım derecesinin tahmin edilmesi amaçlanmış ve süt verimine ait kalıtım derecesi 0,738 olarak bulunmuştur.

Esenbuğa ve Dayıoğlu (2002) alışmalarında Atatürk Üniversitesi Ziraat Faköltesi Tarım İşletmesinde yetiştirilen İvesi ve Morkaraman koyunlarının sürü verim özellikleri üzerinde etkili olan çevre faktörlerini incelemişler ve ANOVA, MIVQUE, ML ve REML yöntemlerini kullanarak varyans bileşenleri tahminleri yapmışlardır. ANOVA, MIVQUE, ML ve REML yöntemleri kullanılarak İvesi ve Morkaraman ırkı koyunların ko altı koyun başına gebe koyun sayısı, doğuran koyun sayısı, canlı doğan kuzu sayısı ve süttten kesilen kuzu sayısı; doğuran koyun başına canlı doğan, süttten kesilen, 120. gün ve 210. gün kuzu sayıları; kuzuların doğum ağırlığı, süttten kesim ağırlığı, süttten kesime kadarki günlük canlı ağırlık artışı, mera sonu ağırlığı ve meradaki günlük canlı ağırlık artışı için varyans bileşenleri tahmini yapılmıştır.

Saatçi vd. (2002) tarafından yapılan araştırmada, Welsh Mountain kuzularının süttten kesim ağırlıklarına etki eden (evresel ve genetik) faktörler ve varyans bileşenleri araştırılmıştır. Bu amaçla doğall ve embriyo transferiyle elde edilen 253 kuzunun

düzeltilmiş 50. gün ağırlıkları kullanılmıştır. Çalışmada varyans bileşenlerinin belirlenmesi için REML tahmin yönteminden yararlanılmıştır.

Ulutaş vd. (2004) yapılan projede Gelemen Tarım İşletmesi Siyah Alaca sürüsünde 1982-1997 yılları arasında buzağılayan hayvanların ebeveyn bilgileri ile 305-gün süt verimi ve buzağılama aralığına ait verim kayıtları kullanılmıştır. Buzağılama aralığı ile 305 günlük süt verimine ait varyans bileşenleri REML yöntemiyle tahmin edilmiştir. Sonuç olarak, Gelemen Tarım İşletmesi'nde yetiştirilen Siyah Alacalarda süt verimi için hesaplanan kalıtım derecesi bu ırk için daha önce hesaplananların birçoğuna oldukça yakın bulunmuştur.

Ünalan ve Cebeci (2004) süt verimine etkili olabilecek çevre faktörlerinin etkilerinin ortaya konulması amaçlanan çalışmada, Ceylanpınar Tarım İşletmesi Siyah Alaca sürüsünde 1990-1997 yılları arasında doğum yapan 1816 baş inekten elde edilen toplam 3484 adet süt verim kaydından yararlanarak REML yöntemi ile varyans bileşenleri ve süt verimleri için kalıtım dereceleri tahmin edilmiştir.

Yolcu vd. (2004) tarafından yapılan çalışmada Beyaz Yeni Zelanda tavşanları canlı ağırlıklarına ilişkin varyans bileşenlerinin farklı yöntemlerle tahmin edilmesi amaçlanmıştır. Bu amaçla çalışmada I. generasyonda 16 baba ve 68 ana ile bunlardan elde edilen dölleri arasından rastgele seçilen 22 baba ve 84 ana ile II. generasyon oluşturulmuştur. Bu iki generasyonun verileri kullanılarak ANOVA, ML ve REML yöntemleri ile süttten kesim yaşından 90. güne kadarki canlı ağırlıklara ait varyans bileşenleri ve kalıtım dereceleri tahmin edilmiştir.

Balcıoğlu vd. (2005) tarafından yapılan araştırmada 90 baba, 293 ana ve bunlardan elde edilen 1788 döl kullanılmıştır. Çalışmada ANOVA, ML ve REML yöntemleri kullanılarak Japon bıldırcınlarında canlı ağırlıklara ve canlı ağırlık artışlarına ait kalıtım derecelerinin tahmin edilmesi amaçlanmıştır. Her üç yöntemle tahmin edilen kalıtım dereceleri oldukça yakın sonuçlar vermiştir.

Duru ve Koyuncu (2005) araştırmada İmroz ırkı kuzularda doğum ağırlığı için varyans bileşenleri tahmin edilmesi amaçlanmıştır. Çalışmada, Marmara Hayvancılık Araştırma Enstitüsünden 1999 ve 2000 yıllarında doğan 208 baş İmroz kuzusuna ait doğum ve pedigree bilgileri kullanılmıştır.

Ekiz (2005) tarafından yapılan çalışmada, Türk Merinosu kuzuların süttten kesim öncesi ve sonrası günlük canlı ağırlık artışları üzerine anaya bağılı etkilerin öneminin REML tahmin yöntemi ile incelenmesi amaçlanmıştır.

Orhan ve Kaygısız (2007) araştırmada Van Tarım Meslek Lisesi İşletmesinde yetiştirilen esmer sığırlarda süt veriminin varyans bileşenlerini ANOVA yöntemi kullanılarak tahmin edilmiştir. Araştırmada ırkın süt veriminin ıslahı için gerekli temel bilgi birikimine katkıda bulunulması amaçlanmıştır.

Gevrekçi vd. (2009) çalışmada et kalite özelliklerinde (canlı ağırlık, göğüs et ağırlığı, göğüs randımanı) ML, REML MIVQUE yöntemleriyle elde edilen varyans bileşenleri ve kalıtım dereceleri tahmin edilmiştir. Çalışmada Japon bildirincilerinin ML, REML ve MIVQUE yöntemleriyle elde edilen varyans bileşenleri için et kalite özelliklerinin kalıtım derecelerini karşılaştırmak amaçlanmıştır.

Koyuncu ve Duru (2009) tarafından yapılan araştırmada Marmara Hayvancılık Enstitüsünde Karacabey Merinosu kuzuların 1998–2002 yılları arasındaki doğum ağırlıklarında direkt ve anaya bağılı genetik etkiler için REML yöntemi kullanılarak varyans bileşenlerinin ve kalıtım derecesinin tahmin edilmesi amaçlanmıştır. Bu amaçla yapılan analizler sonucunda doğum ağırlıkları için direkt ve anaya ait kalıtım derecesi sırasıyla 0,08 ve 0,05 olarak bulunmuştur.

Gülbaba (1998) çalışması ile Karaçam türünün genetik yapısını fidan karakterlerini kullanarak ortaya çıkarmak ve bu bilgileri kullanarak Gen Koruma ve Yönetim Alanlarının belirlenmesi için öneriler geliştirmeyi amaçlamıştır. Bu amaçla Bolkar Dağlarından belirlenen dört popülasyona ait 190 aileden fidan yetiştirilerek iki yıl

boyunca gözlemler yapılmış ve elde edilen verilerin varyans bileşenleri ANOVA yöntemi kullanılarak tahmin edilmiştir.

Gülbaba (1999) tarafından yapılan çalışmanın amacı; yurdumuzda okaliptüste ilk defa tesis edilen açık tozlaşma döl denemesi sonucunda elde edilebilecek genetik kazancı, kalıtım derecesini ve bu alanı tohumdan gelen tohum bahçesine dönüştürmektir. Çalışmada, varyans bileşenlerini tahmin etmek için ANOVA yöntemi kullanılmış ve yapılan analizler sonucunda birey düzeyindeki kalıtım derecesi boy için 0,14; çap için 0,16; ağaç hacmi için 0,17 bulunmuştur.

3. MATERYAL ve METOT

Sofralık yumurtaların tazelik veya bayatlık durumunun bir göstergesi olan Haugh birimi ile yumurta ağırlığına ilişkin varyans bileşenlerinin tahmin edilmesine yönelik ANOVA, Henderson, ML, REML, MINQUE yöntemlerinin karşılaştırılması amacı taşıyan bu çalışmada kullanılan veri grubu, Yılmaz ve Bozkurt (2008) tarafından yapılan çalışmada kullanılan verilerin bir bölümünden oluşmaktadır.

Çalışmada, 28 (genç ana) ve 80 (yaşlı ana) haftalık yaştaki iki ticari yumurtacı sürüden (Lohmann White) elde edilen toplam 696 adet sofralık yumurtaya ait veriler kullanılmıştır. Yumurtalar 0.1g duyarlı terazi ile tartılmış ve 0, 15, 30 ve 45 günlük periyotlarda depolanmıştır. Depolama koşulu açısından her bir depolama süresindeki yumurtaların bir bölümü (Tablo 3.1’de belirtilen oranda) otomatik L Kesme Shirink Ambalaj makinesi kullanılarak streç film ile paketlenmiş, bir bölümü de açıkta bırakılmıştır. Yumurtaların sıfır ve 45 gün arasındaki depolama sürecinde ortalama sıcaklık 21.77 °C ve ortalama relatif nem oranı ise %45.13’tür. Yumurtalara ait Haugh birimi (HB), ak yüksekliği (AY) ve ağırlığa (A) bağlı olarak;

$$HB=100\log(AY+7.57 - 1.7A^{.37}) \quad (3.1)$$

bağıntısı ile hesaplanmıştır (Silversides 1994). Yumurtalar Türk Gıda Kodeksi Yumurta ve Yumurta Ürünleri Tebliği’nde belirtilen sınıflamada Haugh birimine (HU) göre, $HU \geq 79$ için “AA”, $55 \leq HU \leq 78$ için “A”, $31 \leq HU \leq 54$ için “B” ve $HU < 30$ için “C” şeklinde sınıflandırılmaktadır (Şekeroğlu 1994, Şenköylü 2001).

Diğer taraftan, değişkenler arasındaki etkileşimlerin önemliliği çok faktörlü varyans analizi ile belirlenmiş ve önemli bulunan etkileşimler varyans bileşenleri tahmininde kullanılmıştır. Ana yaşı, depolama süresi, depolama koşulunun Haugh birimi ve ağırlık üzerindeki etkisine ilişkin varyans bileşenleri ANOVA, Henderson, ML, REML ve MINQUE yöntemleri ile tahmin edilmiştir. Varyans bileşenlerinin tahmininde kullanılan matematiksel model;

$$Y_{ijkl} = \mu + a_i + b_j + c_k + [(ab)_{ij} + (ac)_{ik} + (bc)_{jk} + (abc)_{ijk}] + e_{ijkl} \quad (3.2)$$

şeklinde ifade edilmiştir. Modelde; Y_{ijkl} : i. ana yaşı, j. depolama süresi ve k. depolama koşulu grubundaki l. yumurtaya ait gözlem, μ : genel ortalama, a_i : i. ana yaşının etkisi,

b_j : j. depolama süresinin etkisi, c_k : k. depolama koşulunun etkisi, e_{ijkl} ise $N(0, \sigma^2)$ parametrelili tesadüfi hatayı göstermektedir. Ayrıca $(ab)_{ij}$, $(ac)_{ik}$, $(bc)_{jk}$ ve $(abc)_{ijk}$ ise ana yaşı, depolama süresi ve depolama koşulu arasındaki etkileşimlere ait etkiyi göstermekte olup etkileşimlerin önemli bulunduğu bağımlı değişkene (Haugh birimi) ait modelde kullanılmıştır. Yumurta ağırlığı üzerinde ise ana yaşı, depolama süresi ve depolama koşulu arasındaki etkileşimler önemli bulunmadığı için modelde yer verilmemiştir ($Y_{ijkl} = \mu + a_i + b_j + c_k + e_{ijkl}$). Modelde yer alan tüm etkenlerin şansa bağlı (rasgele) olduğu varsayılmış olup araştırmada dengeli ve dengeli olmayan veriler açısından varyans bileşenleri tahmin yöntemlerini karşılaştırmak için oluşturulan farklı deneme düzenlerinde alınan gruplara ilişkin frekans değerleri Çizelge 3.1’de sunulmuştur.

Çizelge 3.1 Dengeli ve dengeli olmayan veriler için frekans ve yüzde dağılımı

Değişken	Grup	Dengeli olmayan veri için		Dengeli veri için	
		f	%	f	%
Yaş	Genç ana	387	55,60	208	50,0
	Yaşlı ana	309	44,40	208	50,0
Depolama Süresi	0. gün	128	18,39	104	25,0
	14. gün	207	29,74	104	25,0
	30. gün	261	37,50	104	25,0
	45. gün	100	14,37	104	25,0
Depolama Koşulu	Streç film	372	53,45	208	50,0
	Açıkta	324	46,55	208	50,0
TOPLAM		696	100,0	416	100,0

Çizelge 3.1’deki dağılım incelendiğinde, dengeli olmayan veriler için %55.60’ının ana yaşı 28 haftalık (genç ana), %44,40’ının ana yaşı ise 80 haftalık (yaşlı ana) olan toplam 696 adet yumurta kullanılmıştır. Dengeli verilerde ise her bir gruptaki yumurta sayısını eşitlemek (dengeli hale getirebilmek) için toplam 416 adet yumurta ile varyans bileşenleri tahmin edilmiştir.

Henderson II yöntemi model içindeki bütün sabit etkiler için veriyi düzelttikten sonra bu düzeltilmiş veriler üzerinde Henderson I yöntemini uyguladığından ve araştırmada sabit etkiye sahip değişkenler kullanılmadığından bu yöntem ile karşılaştırma yapılmamış ve Henderson III yöntemi ile uygulama gerçekleştirilmiştir.

4. BULGULAR

Dengeli ve dengeli olmayan veriler için varyans bileşenleri tahmin yöntemlerine ilişkin literatürde yaygın olarak kullanılan ANOVA, Henderson III, ML, REML, MINQUE yöntemlerinin karşılaştırılması sonucu elde edilen bulgular Çizelge 4.1 ve Çizelge 4.12 arasında sunulmuştur. Haugh birimi için değişkenler (Ana Yaşı -**Y**, Depolama Süresi-**S**, ve Depolama Koşulu -**K**) arasındaki etkileşimler önemli bulunduğu için etkileşimli model, yumurta ağırlığı için ise etkileşimler önemli olmadığı için etkileşimsiz model sonuçlarına yer verilmiştir.

4.1 Dengeli Olmayan Veriler İçin Varyans Bileşenleri Tahmini

Ana yaşı, depolama süresi, depolama koşulu ve değişkenler arası etkileşimlerin Haugh birimi üzerindeki etkisine ilişkin ANOVA yöntemi ile elde edilen varyans bileşenleri tahmini Çizelge 4.1’de sunulmuştur.

Çizelge 4.1 Dengeli olmayan verilerde Haugh birimi için ANOVA yöntemi ile varyans bileşenleri tahmini sonuçları

Varyans Kaynağı	SD	KO	BKO	Varyans (σ^2)	% σ^2
Y	1	105661,73	$343,63 \sigma_y^2 + 99,84 \sigma_{ys}^2 + 175,02 \sigma_{yk}^2 + 55,23 \sigma_{ysk}^2 + \sigma_e^2$	287,14	32,74
S	3	68251,00	$164,89 \sigma_s^2 + 85,93 \sigma_{ys}^2 + 92,92 \sigma_{sk}^2 + 50,40 \sigma_{ysk}^2 + \sigma_e^2$	378,82	43,20
K	1	5633,93	$300,49 \sigma_k^2 + 151,14 \sigma_{yk}^2 + 95,21 \sigma_{sk}^2 + 49,14 \sigma_{ysk}^2 + \sigma_e^2$	11,41	1,30
Y*S	3	4633,45	$78,72 \sigma_{ys}^2 + 44,96 \sigma_{ysk}^2 + \sigma_e^2$	53,49	6,10
Y*K	1	1089,37	$148,13 \sigma_{yk}^2 + 47,71 \sigma_{ysk}^2 + \sigma_e^2$	6,64	0,76
S*K	3	882,45	$67,09 \sigma_{sk}^2 + 34,46 \sigma_{ysk}^2 + \sigma_e^2$	7,89	0,90
Y*S*K	3	340,92	$32,62 \sigma_{ysk}^2 + \sigma_e^2$	6,62	0,75
Hata	680	124,99	σ_e^2	124,99	14,25

SD:serbestlik derecesi KO:kareler ortalaması BKO:beklenen kareler ortalaması

Çizelge 4.1’deki bulgular incelendiğinde, yumurtaların tazeliğine ilişkin Haugh birimi üzerinde en önemli etkiye sahip değişken toplam varyasyonun %43,20’lik bölümünü açıklayan depolama süresidir. Haugh birimine ilişkin toplam varyasyonun %32,74’lük kısmı ana yaşı tarafından açıklanırken, hata varyansı oranı ise %14,25’dir. Depolama

koşulunun ise toplam varyasyondaki payı %1,30 olarak hesaplanmıştır. Bununla birlikte, ana yaşı*depolama süresi arasındaki etkileşim toplam varyasyonun %6,10'luk bölümünü açıklarken kalan etkileşimlerin tamamının payı ise %2,41'dir.

28 ve 80 haftalık yaştaki iki ticari yumurtacı sürüden elde edilmiş sofralık yumurtaların Haugh birimine ilişkin varyans bileşenleri tahminine yönelik Henderson III yöntemi sonuçları Çizelge 4.2'de verilmiştir.

Çizelge 4.2 Dengeli olmayan verilerde Haugh birimi için Henderson III yöntemi ile varyans bileşenleri tahmini sonuçları

Varyans Kaynağı	SD	KO	BKO	Varyans (σ^2)	% σ^2
Y	1	57898,03	$208,02 \sigma_y^2 + 52,05 \sigma_{ys}^2 + 104,10 \sigma_{yk}^2 + 26,02 \sigma_{ysk}^2 + \sigma_e^2$	262,98	36,59
S	3	38141,98	$130,49 \sigma_s^2 + 65,24 \sigma_{ys}^2 + 65,24 \sigma_{sk}^2 + 32,62 \sigma_{ysk}^2 + \sigma_e^2$	266,10	37,02
K	1	2174,68	$208,20 \sigma_k^2 + 104,10 \sigma_{yk}^2 + 52,05 \sigma_{sk}^2 + 26,02 \sigma_{ysk}^2 + \sigma_e^2$	3,29	0,46
Y*S	3	2917,49	$65,24 \sigma_{ys}^2 + 32,62 \sigma_{ysk}^2 + \sigma_e^2$	39,49	5,49
Y*K	1	1424,10	$104,10 \sigma_{yk}^2 + 26,02 \sigma_{ysk}^2 + \sigma_e^2$	7,61	1,06
S*K	3	843,12	$65,24 \sigma_{sk}^2 + 32,62 \sigma_{ysk}^2 + \sigma_e^2$	7,70	1,07
Y*S*K	3	340,92	$32,62 \sigma_{ysk}^2 + \sigma_e^2$	6,62	0,92
Hata	680	124,99	σ_e^2	124,99	17,39

SD:serbestlik derecesi KO:kareler ortalaması BKO:beklenen kareler ortalaması

Çizelge 4.2 incelendiğinde, yumurtaların Haugh birimi üzerindeki toplam varyasyonun %37,02'lik bölümünü depolama süresi; %36,59'luk bölümünü ana yaşı; %0,46'lık bölümünü depolama koşulu ve %17,39'luk bölümünü ise hata varyansı açıklamaktadır. Yumurtaların Haugh birimi üzerindeki toplam varyasyonda, değişken etkileşimlerinden en önemli etkiye sahip olanı %5,49 ile ana yaşı*depolama süresi etkileşimidir. Diğer taraftan kalan etkileşimlerin toplam varyasyonu açıklama oranı ise %3,05'tir.

Ana yaşı, depolama süresi, depolama koşulu ve değişkenler arasındaki etkileşimlerin Haugh birimi üzerindeki etkisine ilişkin ML, REML ve MINQUE yöntemleri ile elde edilen varyans bileşenleri tahmini sonuçları Çizelge 4.3'te sunulmuştur.

Çizelge 4.3 Dengeli olmayan verilerde Haugh birimi için ML, REML ve MINQUE yöntemleri ile varyans bileşenleri tahmini sonuçları

Varyans Kaynağı	ML		REML		MINQUE	
	Varyans (σ^2)	% σ^2	Varyans (σ^2)	% σ^2	Varyans (σ^2)	% σ^2
Y	157,25	23,05	256,85	30,55	256,08	30,35
S	305,62	44,79	365,13	43,42	369,32	43,77
K	0,000	0,000	3,62	0,43	3,05	0,36
Y*S	67,57	9,90	66,54	7,91	68,06	8,09
Y*K	12,26	1,80	9,58	1,14	8,89	1,05
S*K	8,54	1,25	8,01	0,95	9,10	1,08
Y*S*K	6,10	0,89	6,24	0,74	4,02	0,48
Hata	124,96	18,32	124,92	14,86	124,99	14,82

Çizelge 4.3 incelendiğinde, ML yöntemi için yumurtaların Haugh birimi üzerindeki toplam varyasyonun %44,79'luk bölümünü depolama süresinin; %23,05'lik bölümünü ana yaşının ve %18,32'lik bölümünü ise hata varyansının oluşturduğu görülmektedir. Aynı zamanda depolama koşulunun yumurtaların Haugh birimi üzerindeki varyansı negatif tahmin edildiğinden ve ML yönteminin koşulları gereği toplam varyasyonu açıklama oranı %0 olarak bulunmuştur. Değişkenler arasındaki etkileşimlerin toplam varyasyonu açıklama oranı ise %13,84'tür. Aynı şekilde REML yöntemi için yumurtaların Haugh birimi üzerindeki toplam varyasyonun %43,42'sini depolama süresi; %30,55'ini ana yaşı; %14,86'sını hata varyansı; %0,43'ünü depolama koşulu oluşturmaktadır. Değişkenler arasındaki etkileşimler ise toplam varyasyonun %10,74'lük kısmını oluşturmaktadır. MINQUE yönteminde ise yumurtaların Haugh birimi üzerindeki toplam varyasyonun %43,77'sini depolama süresi; %30,35'ini ana yaşı; %14,82'sini hata varyansı ve %0,36'sını depolama koşulu oluşturmaktadır. Değişkenler arasındaki etkileşimlerde toplam varyasyonun %10,70'ini oluşturmaktadır. Yapılan analizler sonucunda her üç yöntem de Haugh birimi üzerindeki en önemli etkiye sahip değişkeni depolama süresi olarak bulmuş ve değişkenler arasındaki etkileşimler sonucunda Haugh birimi üzerindeki varyasyonda en fazla etkiye sahip etkileşim olarak ise ana yaşı*depolama süresi bulunmuştur.

Ana yaşı, depolama süresi ve depolama koşulunun yumurta ağırlığı üzerindeki etkisine ilişkin ANOVA yöntemi ile elde edilen varyans bileşenleri tahmini sonuçları Çizelge 4.4’te sunulmuştur.

Çizelge 4.4 Dengeli olmayan verilerde yumurta ağırlığı için ANOVA yöntemi ile varyans bileşenleri tahmini sonuçları

Varyans Kaynağı	SD	KT	KO	BKO	Varyans (σ^2)	% σ^2
Y	1	15304,97	15304,97	343,63 $\sigma_y^2 + \sigma_e^2$	44,49	71,58
S	3	154,32	51,44	164,89 $\sigma_s^2 + \sigma_e^2$	0,21	0,34
K	1	122,16	122,16	300,49 $\sigma_k^2 + \sigma_e^2$	0,35	0,56
Hata	690	11798,87	17,10	σ_e^2	17,10	27,52

Çizelge 4.4 incelendiğinde yapılan analizler sonucunda yumurtaların ağırlığına ilişkin toplam varyasyonun %71,58’lik kısmı ana yaşı tarafından açıklanırken; %27,52’lik kısım ise hatadan kaynaklanmaktadır. Depolama süresi ve koşulunun yumurta ağırlığına ait toplam varyasyondaki payı ise sırasıyla %0,34 ve %0,56’dır.

Sofralık yumurtaların yumurta ağırlığına ilişkin varyans bileşenleri tahminine yönelik Henderson III yöntemi sonuçları Çizelge 4.5’te sunulmuştur.

Çizelge 4.5 Dengeli olmayan verilerde yumurta ağırlığı için Henderson III yöntemi ile varyans bileşenleri tahmini sonuçları

Varyans Kaynağı	SD	KT	KO	BKO	Varyans (σ^2)	% σ^2
Y	1	14961,27	14961,27	324,81 $\sigma_y^2 + \sigma_e^2$	46,01	72,21
S	3	173,66	57,89	160,08 $\sigma_s^2 + \sigma_e^2$	0,26	0,41
K	1	122,16	122,16	300,49 $\sigma_k^2 + \sigma_e^2$	0,35	0,55
Hata	690	11798,87	17,10	σ_e^2	17,10	26,84

Çizelge 4.5’te yumurtaların ağırlığına ilişkin toplam varyasyonun %72,21’lik kısmının ana yaşı tarafından açıklandığı; %26,84’lük kısmının hata tarafından açıklandığı;

%0,55'lik kısmının depolama koşulu tarafından açıklandığı ve %0,41'lik kısmının ise depolama süresi tarafından açıklandığı görülmektedir.

Ana yaşı, depolama süresi ve depolama koşulunun yumurta ağırlığı üzerindeki etkisine ilişkin ML, REML ve MINQUE yöntemleri ile elde edilen varyans bileşenleri tahmini sonuçları Çizelge 4.6'da sunulmuştur.

Çizelge 4.6 Dengeli olmayan verilerde yumurta ağırlığı için ML, REML ve MINQUE yöntemleri ile varyans bileşenleri tahmini sonuçları

Varyans Kaynağı	ML		REML		MINQUE	
	Varyans (σ^2)	% σ^2	Varyans (σ^2)	% σ^2	Varyans (σ^2)	% σ^2
Y	22,94	56,56	45,53	72,09	46,00	72,31
S	0,22	0,54	0,22	0,35	0,18	0,28
K	0,30	0,74	0,30	0,48	0,34	0,53
Hata	17,10	42,16	17,10	27,08	17,10	26,88

Çizelge 4.6'daki bulgulara bakılarak, ML yöntemine ilişkin yumurtaların ağırlığı için toplam varyasyonun %56,56'lık bölümü ana yaşı tarafından; %42,16'lık bölümü hata tarafından; %0,74'lük bölümü depolama koşulu tarafından ve %0,54'lük bölümü depolama süresi tarafından açıklandığı görülmektedir. REML yöntemiyle yumurtaların ağırlığı için toplam varyasyonun %72,09'unun ana yaşı tarafından; %27,08'inin hata tarafından; %0,48'inin depolama koşulu tarafından; %0,35'inin depolama süresi tarafından açıklandığı bulunmuştur. MINQUE yönteminde ise yumurtaların ağırlığına ilişkin toplam varyasyonun %72,31'lik kısmını ana yaşının; %26,88'lik kısmını hatanın; %0,53'lük kısmını depolama koşulunun ve %0,28'lik kısmını depolama süresinin oluşturduğu görülmektedir.

4.2 Dengeli Veriler İçin Varyans Bileşenleri Tahmini

28 ve 80 haftalık yaştaki iki ticari yumurtacı sürüden elde edilmiş sofralık yumurtaların yumurta ağırlığına ilişkin varyans bileşenleri tahminine yönelik ANOVA yöntemi sonuçları Çizelge 4.7'de verilmiştir.

Çizelge 4.7 Dengeli verilerde Haugh birimi için ANOVA yöntemi ile varyans bileşenleri tahmini sonuçları

Varyans Kaynağı	SD	KO	BKO	Varyans (σ^2)	% σ^2
Y	1	60415,11	$208,0 \sigma_y^2 + 52,0 \sigma_{ys}^2 + 104,0 \sigma_{yk}^2 + 26,0 \sigma_{ysk}^2 + \sigma_e^2$	235,25	30,51
S	3	20540,01	$104,0 \sigma_s^2 + 52,0 \sigma_{ys}^2 + 52,0 \sigma_{sk}^2 + 26,0 \sigma_{ysk}^2 + \sigma_e^2$	156,41	20,29
K	1	19375,15	$208,0 \sigma_k^2 + 104,0 \sigma_{yk}^2 + 52,0 \sigma_{sk}^2 + 26,0 \sigma_{ysk}^2 + \sigma_e^2$	37,04	4,80
Y*S	3	2558,25	$52,0 \sigma_{ys}^2 + 26,0 \sigma_{ysk}^2 + \sigma_e^2$	29,38	3,81
Y*K	1	9956,09	$104,0 \sigma_{yk}^2 + 26,0 \sigma_{ysk}^2 + \sigma_e^2$	85,82	11,13
S*K	3	2745,42	$52,0 \sigma_{sk}^2 + 26,0 \sigma_{ysk}^2 + \sigma_e^2$	32,98	4,28
Y*S*K	3	1030,40	$26,0 \sigma_{ysk}^2 + \sigma_e^2$	33,45	4,34
Hata	400	160,68	σ_e^2	160,68	20,84

Çizelge 4.7'ye bakılarak, yumurtaların Haugh birimi üzerinde en önemli etkiye sahip değişken toplam varyasyonun %30,51'lik bölümünü açıklayan ana yaşıdır. Haugh birimine ilişkin toplam varyasyonun %20,29'luk kısmı depolama süresi tarafından açıklanırken, hata varyansı oranı ise %20,84'tür. Depolama koşulunun ise toplam varyasyondaki payı %4,80 olarak hesaplanmıştır. Bununla birlikte, ana yaşı*depolama koşulu arasındaki etkileşim toplam varyasyonun %11,13'lük bölümünü açıklarken kalan etkileşimlerin tamamının payı ise %12,43'tür.

Sofralık yumurtaların Haugh birimine ilişkin varyans bileşenleri tahminine yönelik Henderson III yöntemi sonuçları Çizelge 4.8'de verilmiştir.

Çizelge 4.8 Dengeli verilerde Haugh birimi için Henderson III yöntemi ile varyans bileşenleri tahmini sonuçları

Varyans Kaynağı	SD	KO	BKO	Varyans (σ^2)	% σ^2
Y	1	60415,11	$208,0 \sigma_y^2 + 52,0 \sigma_{ys}^2 + 104,0 \sigma_{yk}^2 + 26,0 \sigma_{ysk}^2 + \sigma_e^2$	235,25	30,51
S	3	20540,01	$104,0 \sigma_s^2 + 52,0 \sigma_{ys}^2 + 52,0 \sigma_{sk}^2 + 26,0 \sigma_{ysk}^2 + \sigma_e^2$	156,41	20,29
K	1	19375,15	$208,0 \sigma_k^2 + 104,0 \sigma_{yk}^2 + 52,0 \sigma_{sk}^2 + 26,0 \sigma_{ysk}^2 + \sigma_e^2$	37,04	4,80
Y*S	3	2558,25	$52,0 \sigma_{ys}^2 + 26,0 \sigma_{ysk}^2 + \sigma_e^2$	29,38	3,81
Y*K	1	9956,09	$104,0 \sigma_{yk}^2 + 26,0 \sigma_{ysk}^2 + \sigma_e^2$	85,82	11,13
S*K	3	2745,42	$52,0 \sigma_{sk}^2 + 26,0 \sigma_{ysk}^2 + \sigma_e^2$	32,98	4,28
Y*S*K	3	1030,40	$26,0 \sigma_{ysk}^2 + \sigma_e^2$	33,45	4,34
Hata	400	160,68	σ_e^2	160,68	20,84

Çizelge 4.8 incelendiğinde, yumurtaların Haugh birimi üzerindeki toplam varyasyonun %30,51’lik bölümünü ana yaşı; %20,29’luk bölümünü depolama süresi; %4,80’lik bölümünü depolama koşulu ve %20,84’lük bölümünü ise hata varyansı açıklamaktadır. Yumurtaların Haugh birimi üzerindeki toplam varyasyonda, değişken etkileşimlerinden en önemli etkiye sahip olanı %11,13 ile ana yaşı*depolama koşulu etkileşimidir. Diğer taraftan kalan etkileşimlerin toplam varyasyonu açıklama oranı ise %12,43’tür.

Ana yaşının, depolama süresinin, depolama koşulunun ve değişkenler arası etkileşimlerin Haugh birimi üzerindeki etkisine ilişkin ML, REML ve MINQUE yöntemleri ile elde edilen varyans bileşenleri tahmini sonuçları Çizelge 4.9’da sunulmuştur.

Çizelge 4.9 Dengeli verilerde Haugh birimi için ML, REML ve MINQUE yöntemleri ile varyans bileşenleri tahmini sonuçları

Varyans Kaynağı	ML		REML		MINQUE	
	Varyans (σ^2)	% σ^2	Varyans (σ^2)	% σ^2	Varyans (σ^2)	% σ^2
Y	99,95	16,36	235,25	30,51	235,25	30,51
S	134,45	22,01	156,41	20,29	156,41	20,29
K	0,000	0,000	37,04	4,80	37,04	4,80
Y*S	30,35	4,97	29,38	3,81	29,38	3,81
Y*K	118,09	19,33	85,82	11,13	85,82	11,13
S*K	34,06	5,58	32,98	4,28	32,98	4,28
Y*S*K	33,20	5,44	33,45	4,34	33,45	4,34
Hata	160,68	26,31	160,68	20,84	160,68	20,84

Çizelge 4.9’a bakıldığında ML yöntemi için yumurtaların Haugh birimi üzerindeki toplam varyasyonun %16,36’lık bölümünü ana yaşının; %22,01’lik bölümünü depolama süresinin ve %26,31’lik bölümünü ise hata varyansının oluşturduğu görülmektedir. Aynı zamanda depolama koşulunun yumurtaların Haugh birimi üzerindeki varyansı negatif tahmin edildiğinden ve ML yönteminin koşulları gereği toplam varyasyonu açıklama oranı %0 olarak bulunmuştur. Değişkenler arasındaki etkileşimlerin toplam

varyasyonu açıklama oranı ise %35,32'dir. REML ve MINQUE yöntemleri için yumurtaların Haugh birimi üzerindeki toplam varyasyonun %30,51'ini ana yaşı; %20,29'unu depolama süresi; %20,84'ünü hata varyansı; %4,80'ini depolama koşulu oluşturmaktadır. Değişkenler arasındaki etkileşimler ise toplam varyasyonun %23,56'lık kısmını oluşturmaktadır.

Sofralık yumurtaların yumurta ağırlığına ilişkin varyans bileşenleri tahminine yönelik ANOVA yöntemi sonuçları Çizelge 4.10'da sunulmuştur.

Çizelge 4.10 Dengeli verilerde yumurta ağırlığı için ANOVA yöntemi ile varyans bileşenleri tahmini sonuçları

Varyans Kaynağı	SD	KT	KO	BKO	Varyans (σ^2)	% σ^2
Y	1	9537,66	9537,66	$208,0 \sigma_y^2 + \sigma_e^2$	45,77	71,18
S	3	230,33	76,78	$104,0 \sigma_s^2 + \sigma_e^2$	0,57	0,89
K	1	48,54	48,54	$208,0 \sigma_k^2 + \sigma_e^2$	0,15	0,23
Hata	410	7299,94	17,81	σ_e^2	17,81	27,70

Çizelge 4.10'daki bulgular incelendiğinde yumurtaların ağırlığına ilişkin toplam varyasyonun %71,18'lik kısmı ana yaşı tarafından açıklanırken; %27,70'lik kısım ise hatadan kaynaklanmaktadır. Depolama süresi ve koşulunun yumurta ağırlığına ait toplam varyasyondaki payı ise sırasıyla %0,89 ve %0,23'dür.

28 ve 80 haftalık yaştaki iki ticari yumurtacı sürüden elde edilmiş sofralık yumurtaların yumurta ağırlığına ilişkin varyans bileşenleri tahminine yönelik Henderson III yöntemi sonuçları Çizelge 4.11'de verilmiştir.

Çizelge 4.11'de yumurtaların ağırlığına ilişkin toplam varyasyonun %71,18'lik kısmının ana yaşı tarafından açıklandığı; %27,70'lik kısmının hata tarafından açıklandığı; %0,89'luk kısmının depolama süresi tarafından açıklandığı ve %0,23'lük kısmının ise depolama koşulu tarafından açıklandığı görülmektedir.

Çizelge 4.11 Dengeli verilerde yumurta ağırlığı için Henderson III yöntemi ile varyans bileşenleri tahmini sonuçları

Varyans Kaynağı	SD	KT	KO	BKO	Varyans (σ^2)	% σ^2
Y	1	9537,66	9537,66	208,0 $\sigma_y^2 + \sigma_e^2$	45,77	71,18
S	3	230,33	76,78	104,0 $\sigma_s^2 + \sigma_e^2$	0,57	0,89
K	1	48,54	48,54	208,0 $\sigma_k^2 + \sigma_e^2$	0,15	0,23
Hata	410	7299,94	17,81	σ_e^2	17,81	27,70

Ana yaşının, depolama süresinin ve depolama koşulunun yumurta ağırlığı üzerindeki etkisine ilişkin ML, REML ve MINQUE yöntemleri ile elde edilen varyans bileşenleri tahmini sonuçları Çizelge 4.12’de sunulmuştur.

Çizelge 4.12 Dengeli verilerde yumurta ağırlığı için ML, REML ve MINQUE yöntemleri ile varyans bileşenleri tahmini sonuçları

Varyans Kaynağı	ML		REML		MINQUE	
	Varyans (σ^2)	% σ^2	Varyans (σ^2)	% σ^2	Varyans (σ^2)	% σ^2
Y	23,05	55,45	45,77	71,18	45,77	71,18
S	0,56	1,35	0,57	0,89	0,57	0,89
K	0,15	0,36	0,15	0,23	0,15	0,23
Hata	17,81	42,84	17,81	27,70	17,81	27,70

Çizelge 4.12’deki analiz sonuçlarına bakılarak, ML yöntemine ilişkin yumurtaların ağırlığı için toplam varyasyonun %55,45’lik bölümü ana yaşı tarafından; %42,84’lük bölümü hata tarafından; %1,35’lik bölümü depolama süresi tarafından ve %0,36’lık bölümü depolama koşulu tarafından açıklandığı görülmektedir. REML ve MINQUE yöntemleriyle yumurtaların ağırlığı için toplam varyasyonun %71,18’inin ana yaşı tarafından; %27,70’inin hata tarafından; %0,89’unun depolama süresi tarafından; %0,23’ünün depolama koşulu tarafından açıklandığı bulunmuştur.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Varyans bileşenlerinin tahminine yönelik ANOVA, Henderson III, ML, REML, MINQUE yöntemlerinin dengeli ve dengeli olmayan veriler için karşılaştırmalı olarak incelenmesini amaçlayan bu çalışmada; ana yaşı, depolama süresi ve depolama koşulunun sofralık yumurtaların Haugh birimi ve yumurta ağırlığı üzerindeki etkisi belirlenmeye çalışılmıştır. Yumurta kalite ve ağırlığına ilişkin ulusal çapta pek çok çalışma (Şekeroğlu 1993, Ekimler 1997, Yılmaz 1999, Tunçer 2006, Yılmaz 2007, Tahan 2009) yapılmıştır. Bu araştırmada elde edilen sonuçlar aşağıda kısaca özetlenmiştir.

Dengeli olmayan verilerde, ana yaşının Haugh birimi üzerindeki etkisi ANOVA, Henderson III, ML, REML ve MINQUE yöntemleri için sırasıyla %32,74; %36,59; %23,05; %30,55 ve %30,35 olarak bulunmuştur. Depolama süresinin Haugh birimi üzerindeki etkisi ise ANOVA, Henderson III, ML, REML ve MINQUE yöntemleriyle %43,20; %37,02; %44,79; %43,42 ve %43,77 olarak hesaplanmıştır. Depolama koşulunun etkisinde de %1,30; %0,46; %0; %0,43 ve %0,36'lık oranlar belirlenmiştir. Değişkenler arasındaki etkileşimlerin Haugh birimine ilişkin toplam varyasyonu açıklama oranları ise beş yöntemde birbirinden farklı bulunmuş ve sırasıyla ana yaşı*depolama süresi etkileşimi için %6,10; %5,49; %9,90; %7,91 ve %8,09 olarak, ana yaşı*depolama koşulu için %0,76; %1,06; %1,08; %1,14 ve %1,05 olarak, depolama süresi*depolama koşulu için %0,90; %0,92; %1,25; %0,95 ve %1,08 olarak, ana yaşı*depolama süresi*depolama koşulu için ise %0,75; %0,92; %0,89; %0,74 ve %0,48 olarak hesaplanmıştır. Son olarak hata varyansının toplam varyasyonu açıklama oranları sırasıyla, %14,25; %17,39; %18,32; %14,86 ve %14,82 şeklinde hesaplanmıştır.

Bu bulgular doğrultusunda ana yaşının Haugh birimi üzerindeki etkisine ilişkin en yüksek tahmin %36,59'luk oran ile Henderson III, en düşük tahmin ise %23,05'lik oran ile ML yöntemi ile elde edilir iken diğer üç yöntemdeki oranlar birbirine yakın bulunmuştur. Depolama süresinin Haugh birimi üzerindeki etkisinde ise en yüksek tahmin %44,79'luk oran ile ML, en düşük tahmin de %37,02'lik oran ile Henderson III yöntemi ile elde edilmiştir. Depolama koşulunun etkisini ML yöntemi %0,0 olarak

tahmin ederken, ANOVA ile en yüksek oran (%1,30) hesaplanmıştır. Hata varyansının oranı ise en yüksek ML (%18,32) ve Henderson III (%17,39) yöntemleri ile elde edilmiştir.

Dengeli olmayan verilerde yumurta ağırlığına ilişkin varyans bileşenlerinin toplam varyasyonu açıklama oranları ANOVA, Henderson III, ML, REML ve MINQUE yöntemleriyle ana yaşının etkisi için sırasıyla %71,58; %72,21; %56,56; %72,09; %72,31; depolama süresi için %0,34; %0,41; %0,54; %0,35; %0,28; depolama koşulu için %0,56; %0,55; %0,74; %0,48; %0,53; hata varyansı için %27,52; %26,84; %42,16; %27,08; %26,88 şeklinde hesaplanmıştır. Burada, ana yaşının ağırlık üzerindeki etkisine yönelik en düşük oran %56,56 ile ML yöntemi ile elde edilir iken diğer yöntemler ile benzer sonuçlar bulunmuştur. Yumurta ağırlığı üzerinde şansa bağlı hatanın etkisi farklı faktörlerin yanı sıra babanın etkisinden de kaynaklanıyor olabilir. Nitekim Akbaş vd. (1993) tarafından yumurta ağırlığı üzerinde babanın etkisine ilişkin Henderson III tekniği ile yapılan varyans bileşenleri tahmininde, babanın ağırlıktaki toplam varyasyonun yaklaşık %14'ünü açıkladığı belirtilmiştir. Bununla birlikte, yumurta ağırlığındaki toplam varyasyonda tavuk yaşının etkisi (babanın etkisi elimine edilerek) Hurnic vd. (1997) tarafından %96, Doyon vd. (1985) tarafından ise %99 olarak tespit edilmiştir.

Diğer taraftan dengeli veriler için Haugh birimi üzerinde ana yaşının etkisine ilişkin toplam varyasyonu açıklama oranı ML yöntemi hariç diğer yöntemlerde birbirine eşit %30,51; ML yönteminde ise %16,36 olarak bulunmuştur. Depolama süresinin toplam varyasyonu açıklama oranı ML yönteminde %22,01 iken diğer yöntemlerde %20,29'dur. Depolama koşulunun toplam varyasyonu açıklama oranı ise ML yöntemiyle %0 şeklinde bulunmuşken diğer yöntemlerle %4,80 şeklinde bulunmuştur. Yumurtaların Haugh birimine ilişkin varyans bileşenlerinin etkileşimlerinden ana yaşı*depolama süresi için ML yöntemi hariç diğer yöntemlerde %3,81'lük bir oran hesaplanmışken, ML yönteminde %4,97 hesaplanmıştır. Ana yaşı*depolama süresi için toplam varyasyonu açıklama oranı ML yönteminde %19,33 iken diğer yöntemlerde %11,13'tür. Depolama süresi*depolama koşulu etkileşimi için toplam varyasyonu açıklama oranı ML yöntemiyle %5,58 hesaplanmışken diğer yöntemlerle %4,28 olarak

hesaplanmıştır. Üç değişkenin etkileşiminde oluşan ana yaşı*depolama süresi* depolama koşulu etkileşimi için ise toplama varyasyonu açıklama oranı ML yönteminde %5,44 şeklinde hesaplanmışken diğer yöntemlerle %4,34 şeklinde hesaplanmıştır. Hata varyansının toplam varyasyonu açıklama oranı değeri ise ML yönteminde %26,31, diğer yöntemlerde %20,84 olarak bulunmuştur.

Dengeli verilerde yumurta ağırlığına ilişkin varyans bileşenlerinin toplam varyasyonu açıklama oranları; ana yaşı için ML yönteminde %55,45; diğer yöntemlerde %71,18'dir. Depolama süresi için ML yöntemiyle %1,35; diğer yöntemlerde ise %0,89'luk bir oran belirlenmiştir. Depolama koşulunun toplam varyasyonu açıklama oranı ML yöntemi yardımıyla %0,36 olarak hesaplanmışken, diğer yöntemler yardımıyla %0,23 olarak hesaplanmıştır. Hata varyansının yumurta ağırlığı üzerindeki toplam varyasyonu açıklama oranı ise ML yönteminde %42,84; diğer yöntemlerde %27,70 olarak hesaplanmıştır.

Bu bulgulara göre dengeli veriler için, Haugh birimi ve yumurta ağırlığı üzerinde ana yaşının etkisi dört yöntemde eşit hesaplanmış ve ML yöntemi ile en düşük oranda tahmin yapılmıştır. Depolama süresi ve hata varyansı için ise diğer yöntemlere göre en yüksek oran ML yöntemi ile elde edilmiştir. Depolama koşulunun Haugh birimi üzerinde etkisi ML yöntemi ile %0 olarak bulunurken, yumurta ağırlığı üzerindeki etkisi ise %0,36 olarak bulunmuştur. Hata varyansında ise yumurta ağırlığı için ML yöntemi ile elde edilen oran, birbirine eşit olan diğer yöntemlerden oldukça yüksek bulunmuştur.

Yukarıdaki sonuçlara göre, ML yöntemi ile elde edilen hata varyans oranlarının gerek dengeli gerekse dengeli olmayan veriler için yüksek bulunmasının nedeni, Haugh birimi ve yumurta ağırlığına ilişkin verilerin her bir faktöründeki alt seviyelerinde normal dağılıma sahip olmaması ve varyansların homojen olmaması ile açıklanabilir. Çünkü, sürekli değişkenlerden oluşan veride varyans bileşenlerinin en çok olabilirlik (ML) tahmini genellikle normallik varsayımına dayanmaktadır (Searle 1971, Sahai and Ojeda 2005, Searle *et al.* 2006).

Dengeli verilerde, ML yöntemi hariç diğer yöntemlerin varyans bileşenlerine ilişkin aynı tahmini vermesi beklenen bir sonuçtur. Çünkü ML yöntemi, diğer yöntemlerden farklı olarak modeldeki etkilere ilişkin serbestlik derecelerini hesaba katmamaktadır (Searle *et al.* 2006). Patterson and Thompson (1971) REML yönteminin önemli bir özelliğinin, dengeli veriler için ANOVA (Henderson I, II, III) tahmin edicilerine eşit tahmin vermesi olduğunu bildirmiştir. Akbaş vd. (1993) tarafından yapılan bir çalışmada, yumurta verim dönemi sonunda her bireyin yumurtaya başlama yaşı, yumurta verimi, yumurta randımanı ve ortalama yumurta ağırlığı değerleri toplanmış ve varyans bileşenlerinin tahmin edilmesinde yaygın olarak kullanılan Henderson III, ML, REML ve MINQUE yöntemleri karşılaştırılmıştır. Araştırma sonucunda, varyans bileşenlerinin tahminine yönelik kullanılan yöntemler arasında genel olarak istatistiksel bir farklılık bulunmamış ve elde edilen bu sonuç verilerin dengeli bir desene sahip popülasyondan elde edilmiş olmasına bağlanmıştır.

Bu çalışmada, dengeli olmayan verilerde gerek etkileşimli model (Haugh birimi) ve gerekse etkileşimsiz model (yumurta ağırlığı) için ANOVA, Henderson III, REML ve MINQUE yöntemleri hata varyansında ML yöntemine göre daha düşük oranda tahmin vermiştir.

MINQUE tahmininde modeldeki hata terimlerinin veya rasgele etkilerin dağılımın hangi özelliklere sahip olduğu önemli değildir ancak, yöntem iterasyonlar yerine sadece doğrusal eşitliklerin çözümünü içermektedir. Diğer bir ifade ile MINQUE tarafından elde edilen tahmin ediciler, varyans bileşenleri tahmin aşamalarında kullanılan ilk değerlerin fonksiyonlarıdır. Bu durum MINQUE işleminin ciddi bir eksikliği olan “minimallik özelliğinin sadece bu ilk değerlere uygulanması” olarak dikkate alınmalıdır. İlk değerlerden elde edilen ardı ardına çözümler iteratif MINQUE tahmini olarak adlandırılır ve bunlar REML tahminleri ile aynıdır ve geniş örneklem teorisi altında normal dağılır. Diğer bir ifade ile MINQUE tahmini REML’in ilk iterasyonu ile aynıdır. Öncelikli değerleri kullanmak REML iterasyonu için, başlangıç değeri olarak MINQUE için de gereklidir. REML ve MINQUE’nin bu bağlantıları MINQUE’nin pratik bir varyans bileşenleri tahmin yöntemi olmadığını düşündürmektedir (Hocking and Kutner 1975, Brown 1976, Searle *et al.* 2006).

Khatree and Gill (1988) farklı deney düzenleri için bazı karşılaştırmalar yapmışlar ve σ_e^2 için en favori yöntemin ANOVA olduğunu bildirmişlerdir. Buna karşılık, σ_α^2 'yı tahmin etmek için REML'in en favori yöntem olduğu vurgulanmıştır. Diğer taraftan, Patterson and Thompson (1971) Henderson III yönteminin hesaplama açısından pratik olmaması ve ANOVA tahmin edicilerinin negatif tahmin vermesi açısından dengeli olmayan veriler için REML yönteminin iyi sonuç vereceğini bildirmişlerdir. Bununla birlikte, Henderson (1984), faktörlere ilişkin etkilere ait serbestlik dereceleri fazla olmadığı takdirde, dengeli verilerde REML ve ML; dengeli olmayan verilerde ise REML yönteminin iyi sonuçlar verdiğini bildirmiştir.

Canlı ağırlıklara ait varyans bileşenlerinin ve kalıtım derecelerinin tahmin edilmesi amaçlanan Yolcu vd. (2004) tarafından yapılan araştırmanın sonucunda; farklı yöntemlerle yapılan varyans bileşenleri tahminlerinde olabilirlik teorisine dayalı yöntemlerin (REML ve ML), ANOVA yöntemine göre daha tutarlı sonuçlar verdiği ve ANOVA'nın negatif tahmin problemini ortadan kaldırıldığı bildirilmiştir. Ayrıca REML yönteminin ML'den kaynaklanan yanlılığı giderdiği ve dengeli olmayan verilerle yapılan çalışmalarda REML yönteminin kullanılmasının daha isabetli tahmin yapılması açısından etkin olacağı bildirilmiştir.

Yukarıda belirtilen bilgi ve bulgular doğrultusunda, dengeli ve normal dağılım varsayımı gerçekleşmeyen verilerde ML hariç diğer yöntemlerin kullanılabileceği, bununla birlikte verinin yapısına bağlı olarak dengeli olmayan verilerde ve serbestlik derecesinin düşük olması durumunda REML yönteminden yararlanılması önerilebilir. Bununla birlikte, farklı deneme düzenlerinde ve farklı dağılımlara sahip veriler ile yapılacak çalışmalarda elde edilen sonuçların değerlendirilmesi ve bu araştırmanın sonuçları ile karşılaştırılmasının gerek istatistik literatürüne katkı sunacağı gerekse bu yöntemlere ihtiyaç duyan ve farklı alanlardaki araştırmacılara yol göstereceği düşünülmektedir.

6. KAYNAKLAR

- Akbaş, Y., Settar, P. ve Türkmüt, L. (1993). Kanatlılarda Yumurta Verimi Özellikleri İçin Dört Farklı Varyans Komponent Tahminleme Yönteminin Karşılaştırılması. Uluslararası Tavukçuluk Kongresi, İstanbul, 13-14 Mayıs, 459-466.
- Airy, G.B. (1861). On the Algebraical and Numerical Theory of Errors of Observations and the Combinations of Observations. MacMillan, London.
- Anderson R.D. (1978). Studies on the estimation of variance components. Ph.D. Thesis, Cornell University, Ithaca, New York.
- Anderson, R.L. and Bancroft, T.A. (1952). Statistical Theory in Research. McGraw-Hill, New York.
- Andrade, D.F. and Helms, R.W. (1984). Maximum likelihood estimates in the multivariate normal with patterned mean and covariance via the EM algorithm. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **13**: 2239-2251.
- Balcıoğlu, M.S., Yolcu, H.İ., Fırat, M.Z., Karabağ, K. ve Şahin, E. (2005). Japon bıldırcınlarında canlı ağırlık ve canlı ağırlık artışına ait genetik parametre tahminleri. *Akdeniz Üniversitesi Ziraat Fakültesi Dergisi*, **18(1)**: 35-39.
- Bennett, C.A. and Franklin, N.L. (1954). Statistical Analysis in Chemistry and the Chemical Industry. John Wiley & Sons, New York.
- Brown, K.G. (1976). Asymptotic behavior of MINQUE-type estimators of variance components. *The Annals of Statistics*, **4**: 146-154.
- Chauvenet, W. (1863). A Manual of Spherical and Practical Astronomy, 2: Theory and Use of Astronomical Instruments. Lippincott, Philadelphia.

- Corbeil, R.R. and Searle, S.R. (1976). A comparison of variance component estimators. *Biometrics*, **32**: 779-791
- Crump, S.L. (1946). The estimation of variance components in analysis of variance. *Biometrics*, **2(1)**: 7-11.
- Crump S.L. (1947). The estimation of variance in multiple classification. Ph.D. Thesis, Iowa State University, Ames, Iowa.
- Crump, S.L. (1951). The present status of variance components analysis. *Biometrics*, **7**: 1-16.
- Daniels, H.E. (1939). The estimation of components of variance. *Supplement to the Journal of the Royal Statistical Society*, **6**: 186-197.
- Doğan, İ., Özçelik, M. ve Doğan, N. (1999). Tekrarlı ölçüm düzenlerinde varyans analizi yöntemi ile Holştaynlarda süt veriminin kalıtım derecesinin tahmini. *Turkish Journal of Veterinary and Animal Sciences*, **23(2)**: 269-276.
- Doyon G, Bernier-Cardou M, Hamilton RMG, Castaigne F, Mac Lean H. (1985) Egg quality:1. Shell Strength of Eggs From Five Commercial Strains of White Leghorn Hens During Their First Laying Cycle. *Poultry Science*, **64**:1685-1695.
- Duru, S. ve Koyuncu, M. (2005). İmroz kuzuların doğum ağırlığına ait direkt ve anaya bağlı etkiler için varyans unsurları ve genetik parametre tahminleri. *Uludağ Üniversitesi Ziraat Fakültesi Dergisi*, **19(2)**: 13-21.
- Eisenhart, C. (1947). The assumptions underlying the analysis of variance. *Biometrics*, **3**: 1-21.

- Ekimler, F. (1997). Kahverengi yumurtacılarda yumurta kalite özellikleri ve bunlara yaşın etkisi. Yüksek Lisans Tezi, Akdeniz Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Antalya.
- Ekiz, B. (2005). Estimates of maternal effects for pre- and post- weaning daily gain in Turkish Merino lambs. *Turkish Journal of Veterinary and Animal Sciences*, **29**: 399-407.
- Esenbuğa, N. ve Dayıoğlu, H. (2002). İvesi ve morkaraman koyunlarında döl verimi ile kuzuların büyüme ve gelişme özellikleri için farklı metotlarla varyans bileşenlerinin tahmini. *Turkish Journal of Veterinary and Animal Sciences*, **26**: 161-169.
- Fisher, R.A. (1918). The correlation between relatives on the supposition of Mendelian inheritance. *Transactions of the Royal Society of Edinburg*, **52**: 399-433.
- Fisher, R.A. (1925). Statistical Methods for Research Workers.1. edition, Oliver & Boyd, Edinburgh and London.
- Fisher, R.A. (1935). Discussion of Neyman et al., 1935. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*, **2**: 154-155.
- Ganguli, M. (1941). A note on nested sampling. *The Indian Journal of Statistics*, **5**: 449-452.
- Gevrekçi, Y., Oğuz, İ., Akşit, M., Önenç, A., Özdemir, D. and Altan, Ö. (2009). Heritability and variance component estimates of meat quality in japanese quail (*coturnix coturnix japonica*). *Turkish Journal of Veterinary and Animal Sciences*, **33(2)**: 89-94.

- Gülbaba, G.A. (1999). Tohum bahçesine dönüştürülecek dl (Eucalyptus camaldulensis Dehn.) denemesinde kalıtım derecesi ve genetik kazancın belirlenmesi. *DOA Dergisi*, **5**: 1-25.
- Gülbaba, G.A. (1998). Bolkar dağları doğal karaamlarında (pinus nigra subsp. Pallasiana) genetik çeşitlilik ve gen koruma ve yönetim alanlarının belirlenmesi. *DOA Dergisi*, **4**: 99-130.
- Hartley, H.O. and Rao, J.N.K. (1967). Maximum likelihood estimation for the mixed analysis of variance model. *Biometrika*, **54**: 93-108.
- Hartley, H.O. and Searle, S.R. (1969). A discontinuity in mixed model analysis. *Biometrics*, **25**: 573-576.
- Harville, D.A. (1969). Quadratic unbiased estimation of variance components for the one-way classification. *Biometrika*, **56**: 313-326.
- Harville, D.A. (1977). Maximum-likelihood approaches to variance component estimation and to related problems. *Journal of the American Statistical Association*, **72**: 320-340.
- Hazel, L. N. and Terrill, C. E. (1945). Heritability of weaning weight and staple length in range Rambouillet lambs. *Journal of Animal Science*, **4**: 347-358.
- Henderson, C. R. (1953). Estimation of Variance and Covariance Components. *Biometrics*, **9**: 223–252.
- Henderson, C.R. (1984). Applications of Linear Models in Animal Breeding. University of Guelph, Guelph, Ontario.

- Herbach, L.H. (1959). Properties of Model II type analysis of variance tests, A: optimum nature of the F-test for Model II in the balanced case. *The Annals of Mathematical Statistics*, **30**: 939-959.
- Hocking, R.R. and Kutner, M.H. (1975). Some analytical and numerical comparisons of estimators for the mixed A.O.V. model. *Biometrics*, **31**: 19-28.
- Hurnic J F, Summer JD, Rcinhard BS, Swcirczcwks A (1997) Effects of age in the performance of laying hens during the first year of production. *Poultry Science*, **56**: 222-230.
- Kaps, W. and Lamberson, W.R. (2004). Biostatistics for Animal Science. CABI Publishing Company, 1. edition, Cambridge, USA.
- Kempthorne, O. (1977). Status of quantitative genetic theory. International Conference Quantitative Genetics, Iowa State University Press, Ames, Iowa, 719-760.
- Khattree, R. and Gill, D.S. (1988). Comparison of some estimates of variance components using Pitman's nearness criterion. *Proceedings, American Statistical Association, Statistical Computing Section*, 133- 136.
- Koyuncu, M. and Duru, S. (2009). Estimates of (co)variance components for direct and maternal effects on birth weight of Karacabey Merino lambs. *Turkish Journal of Veterinary and Animal Sciences*, **33(3)**: 235-240.
- Miller, J.J. (1973). Asymptotic properties and computation of maximum likelihood estimates in the mixed model of the analysis of variance. Technical Report No. 12, Department of Statistics, Stanford University, Stanford, California.
- Miller, J.J. (1977). Asymptotic properties of maximum likelihood estimates in the mixed model of the analysis of variance. *The Annals of Statistics*, **5**: 746-762.

- Neyman, J., Iwaszkiewicz, K. and Kolodziejczyk, S.T. (1935). Statistical problems in agricultural experimentation. *Supplement to the Journal of the Royal Statistical Society*, **2**: 107- 154.
- Orhan, H. ve Kaygısız, A. (2007). Esmer sığırlarda süt verim özelliklerine ilişkin varyans unsurlarının tahmini üzerine bir araştırma. *Süleyman Demirel Üniversitesi Ziraat Fakültesi Dergisi*, **2(1)**: 1-6.
- Patterson, H.D. and Thompson, R. (1971). Recovery of inter-block information when block sizes are unequal. *Biometrika*, **58**: 545-554.
- Rao, C.R. (1970). Estimation of heteroscedastic variances in linear models. *Journal of the American Statistical Association*, **65**: 161-172.
- Rao, C.R. (1971a). Estimation of variance and covariance components-MINQUE theory. *Journal of Multivariate Analysis*, **1**: 257-215.
- Rao, C.R. (1971b). Minimum variance quadratic unbiased estimation of variance components. *Journal of Multivariate Analysis*, **1**: 445-456.
- Rao, C.R. (1972). Estimation of variance and covariance components in linear models. *Journal of the American Statistical Association*, **67**: 112-115.
- Rao, C.R. and Kleffe, J. (1988). Estimation of Variance Components and Applications. North-Holland, Amsterdam.
- Saatçi, M., Dewi, I. and Ulutaş, Z. (2002). Effects of embryo-transfer, recipient-donor mother and environment on lamb weaning weight and variance components. *Turkish Journal of Veterinary and Animal Sciences*, **26**: 215-220.
- Sahai, H. and Ojeda, M.M. (2005). Analysis of Variance for Random Models, Volume II: Unbalanced Data. Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin.

- Scheffe, H. (1956). Alternative models for the analysis of variance. *The Annals of Mathematical Statistics*, **27**: 251 -271.
- Searle, S.R. (1970). Large sample variances of maximum likelihood estimators of variance components using unbalanced data. *Biometrics*, **26**: 505-524.
- Searle, S.R. and Fawcett, R.F. (1970). Expected mean squares in variance components models having finite populations. *Biometrics*, **26**: 243-254.
- Searle, S.R. (1971). Linear Models. A John Wiley & Sons, Inc., New York, USA.
- Searle, S.R. and Henderson, H.V. (1979). Dispersion matrices for variance components models. *Journal of the American Statistical Association*, **74**: 465-470.
- Searle, S. R., Casella, G. and McCulloch, C. E. (2006). Variance Components. A John Wiley & Sons, Inc., New Jersey, USA.
- Seifert, B. (1979). Optimal testing for fixed effects in general balanced mixed classifications models. *J. Math. Operations Forsch Statistics, Series Statistics*, **10**: 237-256.
- Silversides, F.G. (1994). The Haugh Unit correction for egg weight valid for eggs stored at room temperature. *Poultry Science*, **73**: 50-55.
- Smith, D.W. and Hocking, R.R. (1978). Maximum likelihood analyses of the mixed model: the balanced case. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **7**: 1253-1266.
- Swallow, W.H. and Monahan, J.F. (1984). Monte Carlo comparison of ANOVA, MIVQUE, REML and ML estimators of variance components. *Tecnometrics*, **26(1)**: 47-57.

- Şekeroğlu, A. (1994). Gerze (Hacıkadı) ve Denizli tavuk ırklarının yumurta verimi ve kalite özellikleri. Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun.
- Şenköylü, N. (2001). Modern Tavuk Üretimi. 3. Baskı. İstanbul: Anadolu Matbaası,
- Şenoğlu, B. ve Acıtaş, Ş. (2010). İstatistiksel Deney Tasarımı: Sabit Etkili Modeller. Nobel Yayın Dağıtım, 1. basım, Ankara, Türkiye.
- Tahan, M. (2009). Çörek otu (*Nigella sativa*) ve maydanozun (*Petroselinum crispum*) yumurtacı bıldırcın rasyonlarında kullanılmasının yumurta verimi, iç kalitesi ile kuluçka sonuçları üzerine etkisi. Yüksek Lisans Tezi, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Sağlık Bilimleri Enstitüsü, Afyonkarahisar.
- Thompson, W.A. (1962). The problem of negative estimates of variance components. *The Annals of Mathematical Statistics*, **33**: 273-289.
- Tippett, L.H.C. (1931). The Methods of Statistics. 1. edition, Williams and Norgate, London.
- Townsend E.C. (1968). Unbiased estimators of variance components in simple unbalanced designs. Ph.D. Thesis, Cornell University, Ithaca, New York.
- Townsend, E.C. and Searle, S.R. (1971). Best quadratic unbiased estimation of variance components from unbalanced data in the one-way classification. *Biometrics*, **27**: 643-657.
- Tunçer, P. (2006). İki farklı ticari yumurtacı tavuk genotipine ait yumurtalarda kalite kriterlerinin depolama süresine göre değişimi. Yüksek Lisans Tezi, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Sağlık Bilimleri Enstitüsü, Afyonkarahisar.

- Ulutaş, Z., Akman, N. ve Akbulut,  . (2004). Siyah-alaca ırkı sığırların 305 günlük süt verimi ve buzağılama aralığına ait genetik ve  evre varyansları tahmini. *Turkish Journal of Veterinary and Animal Sciences*, **28**: 101-105.
- Ulutaş, Z., Akman, N. ve Akbulut,  . (2004). Siyah-alaca ırkı sığırların 305 günlük süt verimi ve buzağılama aralığına ait genetik ve  evre varyansları tahmini. *Turkish Journal of Veterinary and Animal Sciences*, **28**: 101-105.
-  nalan, A. ve Cebeci, Z. (2004). Siyah alaca sığırlarda ilk üç laktasyon süt verimine ait genetik parametreler ve korelasyonların REML yöntemi ile tahmini. *Turkish Journal of Veterinary and Animal Sciences*, **28**: 1043-1049.
- Winsor, C.P. and Clarke, G.L. (1940). Statistical study of variation in the catch of plankton nets. *Sears Foundation Journal of Marine Research*, **3**: 1-34.
- Yates, F. and Zacopanay, I. (1935). The estimation of the efficiency of sampling with special reference to sampling for yield in cereal experiments. *Journal of Agricultural Science*, **25**: 545-577.
- Yılmaz, A.A. (2007). Stretch film ile paketlemenin sofralık yumurtalarda i  ve dış kalite özelliklerine etkisi. Yüksek Lisans Tezi, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Sağlık Bilimleri Enstitüsü, Afyonkarahisar.
- Yılmaz, A.A. ve Bozkurt, Z. (2008). Ana Yaşı, Depolama Süresi ve Streç Film İle Paketlemenin Sofralık Yumurtaların İ  ve Dış Kalite  zelliklerine Etkisi. *Lalahan Hayvancılık Araştırma Enstitüsü Dergisi*, **48 (2)**: 81 – 91
- Yılmaz, S.O. (1999). Yumurtacı tavuklarda değişik grup büyüklüğü ve yerleşim sıklığının yumurta verim ve kalite özelliklerine etkileri. Yüksek Lisans Tezi, Kahramanmaraş Sütü İmam Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kahramanmaraş

Yolcu,. H.İ., Balcıoğlu, M.S., Fırat, M.Z. ve Karabağ, K. (2004). Beyaz yeni zelandalı tavşanlarında canlı ağırlıklara ait varyans unsurlarının farklı yöntemlerle tahmini. *Akdeniz Üniversitesi Ziraat Fakültesi Dergisi*, **17(1)**: 81-85.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : İlkay DOĞAN

Doğum Yeri ve Tarihi : KIRŞEHİR/09.07.1989

Yabancı Dili : İNGİLİZCE

İletişim : 05337183899 / ilkay_dgn58@hotmail.com

Eğitim Durumu

Lise : Afyon Süleyman Demirel Fen Lisesi (2003 – 2006)

Lisans : Balıkesir Üniversitesi/Matematik (2006 – 2010)