

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

UZAY EĞRİLERİNİN ŞEKİLLERİ

Sabiha DODURGALI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2011**

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

UZAY EĞRİLERİNİN ŞEKİLLERİ

Sabiha DODURGALI

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç.Dr. Nejat EKMEKÇİ

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, temel tanımlar ve gerekli ön bilgiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Öklid uzayında eğrilerin eğilim çizgileri diğer adıyla helisler ele alınmıştır. Helislerin k_1 ve k_2 eğriliklerinin sabit oldukları tesbit edilen bir karakterizasyonu oluşturulmuştur. Daha sonra genel helis eğrisinin denkleminde bahsedilip, bu eğriler için $\frac{k_1}{k_2}$ oranının sabit olduğu keşfedilmiştir.

Dördüncü bölümde, teğetler göstergesine ait olan küresel eğrilerin tanımı ve özellikleri verilerek üzerindeki bir noktadaki Sabban çatısı incelenmiştir. Daha sonra bu çatı yardımı ile küresel eğrinin helis olma koşulları incelenmiştir.

Ocak 2011, 62 sayfa

Anahtar Kelimeler : Uzay eğrileri, Direkt benzerlikler.

ABSTRACT

Master Thesis

SHAPES OF SPACE CURVES

Sabiha DODURGALI

Ankara University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Supervisor: Doç.Dr. Nejat EKMEKÇİ

This thesis consists of four chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, some basic concepts and required informations are given.

In the third chapter, aptitude lines of curves (helices) in the Euclidian space are discussed. The values of k_1 and k_2 curves of helices are constant and their characterization has been formulated. Then, it has been mentioned about general equation for helix curve and the new formulation that the $\frac{k_1}{k_2}$ for these curves is constant has been made. At the fourth chapter, Sabban frame at any point on the curve has been analyzed by giving the definition of spherical curves belonging tangent indicatrix and their caharacteristics. Then, condition of curve for the spherical curve has been analyzed via this frame.

January 2011, 62 pages

Key Words: Space curves, Direct similarities

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu vererek, bana araştırma olanağı sağlayan ve araştırmalarımın her aşamasında yakın ilgi ve önerileriyle beni yönlendiren danışman hocam, Sayın Doç. Dr. Nejat EKMEKÇİ (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'ye ve çalışmalarım sırasında önemli katkılarda bulunan Araş. Gör. Elif YARDIMCI (Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi)'ya teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca çalışmalarım süresince beni destekleyen aileme en derin duygularıyla teşekkür ederim.

Sabiha DODURGALI

Ankara, Ocak 2011

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
SİMGELER DİZİNİ	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	2
2.1 n-Boyutlu Öklid Uzayı	2
2.2 E^n de Hareketler	13
2.3 Kuaterniyonlar	16
3. DİREKT BENZERLİK GRUPLARI ALTINDA UZAY EĞRİLERİNİN DİFERENSİYEL GEOMETRİK DEĞİŞMEZLİKLERİ	18
3.1 Eğrilik ve Torsiyon Şekilleri	18
3.2 Öklid Uzayının Karakterizasyonları	30
4. BİRİM KÜREDEKİ EĞRİLERİN ŞEKİLLERİ	37
4.1 Genel Helislerin Teğetler Göstergesi	37
4.2 Küresel Serret-Frenet Eğrileri	40
KAYNAKLAR	60
ÖZGEÇMİŞ	62

SİMGELER DİZİNİ

E^3	3 boyutlu Öklid uzayı
k_g	Geodezik eğrilik
k_n	Normal eğrilik
$\aleph$	Şekil eğriligi
$\Im$	Torsiyon
$\tilde{k}_1$	c eğrisinin birinci eğriligi
$\tilde{k}_2$	c eğrisinin ikinci eğriligi
$\gamma(\sigma)$	Sabban çatısının teğeti
$t(\sigma)$	Sabban çatısının normali
$s(\sigma)$	Sabban çatısının binormali
$D(s)$	Darboux gösterimi
$D^o(s)$	Normlandırılmış Darboux gösterimi
$\varepsilon_\gamma(\sigma)$	γ nın küresel evolutü

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1 Sabban çatısı	41
Şekil 4.2 Bertrand eğrisinin küresel Darboux gösterimi	53
Şekil 4.3 Silindirik helisin düzlemsel evolütü	54
Şekil 4.4 γ nın küresel Darboux gösterimi	55
Şekil 4.5 γ nın Darboux açılabilirinin parçası	55
Şekil 4.6 Dairesel helis	59
Şekil 4.7 Konik spiral	59

1. GİRİŞ

Öklid uzayında direkt hareketler yön ve açıları koruyan dönüşümlerdir. Hareketler, uzaklığı koruyan dönüşümlerle verilir. Homotetik hareketler ise açıları koruyan dönüşümlerle verilir.

Frenet uzay eğrisi , eğrilik ve torsiyon tarafından Öklid uzayının Öklid hareketinde tanımlanır. Öklid uzayında eğrilerin eğri çizgileri yani helisler ilk olarak bir dik dairesel silindir üzerine çizilmiş helisler ele alınmıştır. Bunlara dairesel helis adı verilir. Bunların k_1 ve k_2 eğriliklerinin sabit oldukları tespit edilebilen bir karakterizasyonu olmuştur. Daha sonra genel helis eğrisinin $\frac{k_1}{k_2}$ oranının sabit olduğu bulunmuştur. Bir koni yüzeyi hatta bir küre yüzeyi üzerine çizilebilen helisler üzerine çalışılmıştır. Ayrıca bu çalışmada Öklid uzayında alınan bir γ uzay eğrisi için genel helis karakterizasyonu verilmiştir.

Geometride Radostina Encheva ve Georgi Georgiev tarafından yazılan “Shapes of Space Curves” adlı makalede iki Frenet uzay eğrisi için eğri şekilleri ve torsiyon şekilleri hesaplanıp ve bu eğrilerin denk olduğu incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tez için gerekli olan bazı temel kavram ve teoremleri vereceğiz.

2.1 n-Boyutlu Öklid Uzayı

Tanım 2.1.1: (Öklid uzay)

$\mathbb{R}$, reel sayılar cismini göstermek üzere , $\mathbb{R}^n = \{(p_1, p_2, \dots, p_n)\}$ eşitliği ile belirli $\mathbb{R}^n$ kümesinde toplama işlemi ,

$$(p_1, p_2, \dots, p_n) + (q_1, q_2, \dots, q_n) = (p_1 + q_1, p_2 + q_2, \dots, p_n + q_n)$$

eşitliği ile tanımlanır. Skalerle çarpma işlemi , $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $(p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ için ,

$$\lambda(p_1, p_2, \dots, p_n) = (\lambda p_1, \lambda p_2, \dots, \lambda p_n)$$

eşitliğiyle tanımlanır. Bu işlemlere göre , $\mathbb{R}^n$ kümesi $\mathbb{R}$ cismi üstünde bir vektör uzayı olur. $\mathbb{R}^n$ vektör uzayında , $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ ve $(q_1, q_2, \dots, q_n)$ olmak üzere ,

$$\langle p, q \rangle = \sum_{i=1}^n p_i q_i$$

eşitliği ile tanımlanan ,

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} , (p, q) \rightarrow \langle p, q \rangle$$

fonksiyonu , $\mathbb{R}^n$ uzayında bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma , $\mathbb{R}^n$ uzayının doğal iç çarpımı veya Öklid iç çarpımı denir. (Sabuncuoğlu 2004).

$p \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere ,

$$\|p\| = \sqrt{\langle p, p \rangle}$$

diyelim.

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} , p \rightarrow \|p\|$$

fonksiyonu , $\mathbb{R}^n$ uzayında bir normdur. Buna göre , $\mathbb{R}^n$ vektör uzayı , normlu vektör uzayıdır.

$$d(p, q) = \|p - q\|$$

biçiminde tanımlanan ,

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu , $\mathbb{R}^n$ uzayında bir metriktir. Dolayısıyla $\mathbb{R}^n$ bir metrik uzaydır.

Her metrik uzay , bir topolojik uzay olduğundan , $\mathbb{R}^n$ uzayı bir topolojik uzaydır. Yukarıda belirtilen topolojisiyle birlikte $\mathbb{R}^n$ uzayına Öklid Uzayı denir. Bu uzay kimi zaman E^n ile gösterilir. (Sabuncuoğlu 2004).

Tanım 2.1.2: (Yay parametresi)

$\gamma : \begin{matrix} I \\ s \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \mathbb{R}^3 \\ \gamma(s) \end{matrix}$, $\|\gamma'(s)\| = 1$ ($\gamma'(s) = \frac{d\gamma}{ds}$) olacak şekilde bir eğri olsun. Bu durumda s ye γ eğrisinin yay parametresi adı verilir. (Hacısalıhoğlu 1993).

Tanım 2.1.3: (Yay uzunluğu)

M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. $a, b \in I$ olmak üzere , a 'dan b 'ye M eğrisinin yay uzunluğu diye eğrinin $\alpha(a)$ ve $\alpha(b)$ noktaları arasındaki uzunluğuna karşılık gelen

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\| dt , t \in I$$

reel sayısına denir. (Hacısalıhoğlu 1993).

Tanım 2.1.4: (Vektör alanı)

M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. M üzerinde bir vektör alanı diye

$$X : M \xrightarrow[\text{örten}]{\text{birebir}} \bigcup_{P \in M} T_M(P)$$

olarak tanımlanan X fonksiyonuna denir ve M üzerinde vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ ile gösterilir. (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.1.5: (Kovaryant türev)

M bir C^∞ manifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere ,

$$\begin{aligned} D : \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (X, Y) &\rightarrow D(X, Y) = D_X Y \end{aligned}$$

fonksiyonu için ,

- 1) $D_{fX+gY}Z = fD_X Z + gD_Y Z$, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$, $\forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$
- 2) $D_X(fY) = fD_X Y + (Xf)Y$, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$, $\forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$

özellikleri sağlanıyorsa D ye M manifoldu üzerinde bir afin konneksiyon ve D_X e de X e göre kovaryant türev operatörü denir. (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.1.6: (Serret-Frenet vektörleri)

E^n de M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $S' = \{\alpha'(t), \alpha''(t), \dots, \alpha^{(r)}(t)\}$ lineer bağımsız sisteminde elde edilen $\{V_1(t), V_2(t), \dots, V_r(t)\}$ sistemine Serret-Frenet r -ayaklısı veya r -ayaklı alanı ,buradaki her bir $V_i(t)$, $1 \leq i \leq r$ vektörlerine de Frenet vektörleri adı verilir. (Hacısalıhoğlu 1993).

Teorem 2.1.1

E^3 de M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere ;

$$\begin{aligned}\alpha : I &\rightarrow E^3 \\ s &\rightarrow \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))\end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda Frenet 3-ayaklısı $\{T(t), N(t), B(t)\}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}T(s) &= \alpha'(s) \\ N(s) &= \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} \\ B(s) &= \frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}\end{aligned}$$

dir. (Hacısalıhoğlu 1993).

Teorem 2.1.2

E^3 'de M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. t keyfi bir parametre olmak üzere ;

$$\begin{aligned}\alpha : I &\rightarrow E_3 \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))\end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda Frenet 3-ayaklısı $\{T(t), N(t), B(t)\}$ olmak üzere ;

$$\begin{aligned}T(t) &= \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \\ N(t) &= \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|} \\ B(t) &= T(t) \wedge N(t)\end{aligned}$$

dir. (Hacısalıhoğlu 1993).

Tanım 2.1.7: (i-yinci eğrilik)

$M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ 'ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$ olsun. Buna göre ;

$$\begin{aligned} k_i : I &\rightarrow \mathbb{R} , & 1 \leq i < r \\ s &\rightarrow k_i(s) = \langle V'_i(s), V_{i+1}(s) \rangle \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna M eğrisinin i -yinci eğrilik fonksiyonu ve $s \in I$ için $k_i(s)$ reel sayısına da $\alpha(s)$ noktasında M nin i -yinci eğriliği denir. (Hacısalihoglu 1993).

$$\begin{aligned} V'_1(s) &= \frac{dV_1}{ds} & k_1 &= \langle V'_1(s), V_2(s) \rangle \\ V'_2(s) &= \frac{dV_2}{ds} & k_2 &= \langle V'_2(s), V_3(s) \rangle \\ &\cdot & &\cdot \\ &\cdot & &\cdot \\ &\cdot & &\cdot \\ V'_r(s) &= \frac{dV_r}{ds} & k_{r-1} &= \langle V'_{r-1}(s), V_r(s) \rangle \end{aligned}$$

Teorem 2.1.3

$M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere $\alpha(s)$ noktasında i -yinci eğrilik $k_i(s)$ ve Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$ ise;

$$\begin{aligned} 1) V'_1(s) &= k_1(s) V_2(s) \\ 2) V'_i(s) &= -k_{i-1}(s) V_{i-1}(s) + k_i(s) V_{i+1}(s) , \quad 1 < i < r \\ 3) V'_r(s) &= -k_{r-1}(s) V_{r-1}(s) \end{aligned}$$

dir. (Hacısalihoglu 1993).

Teorem 2.1.4

Frenet k_1 eğriliği ve k_2 torsiyonu ;

$$k_1(s) = \|c''(s)\| \quad , \quad k_2 = \frac{\det(c'(s), c''(s), c'''(s))}{\|c''(s)\|^2}$$

şeklinde ifade edilir.(Hacısalihoglu 2000)

İspat Eğrilik tanımından $k_1 = \langle V'_1, V_2 \rangle$ dir.s yay parametresi olduğundan $\|c'(s)\| = 1$ dir. Ayrıca Frenet vektörleri tanımından

$$V_1(s) = c'(s) \quad V_2(s) = \frac{c''(s)}{\|c''(s)\|}$$

dir. $V'_1(s)$ ifadesinin s ye göre türevi alınırsa

$$V'_1(s) = c''(s)$$

dir. $k_1 = \langle V'_1, V_2 \rangle$ ifadesinde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} k_1 &= \left\langle c''(s), \frac{c''(s)}{\|c''(s)\|} \right\rangle \\ k_1 &= \frac{\|c''(s)\|^2}{\|c''(s)\|} \\ k_1 &= \|c''(s)\| \end{aligned}$$

elde edilir.

Frenet vektörleri ,tanımından

$$V_1(s) = c'(s) \quad V_2(s) = \frac{c''(s)}{\|c''(s)\|} \quad V_3(s) = V_1 \times V_2$$

dir. V_1 ve V_2 nin türevi alınırsa

$$V'_1(s) = c''(s) \quad V'_2 = \frac{c'''(s)}{\|c''(s)\|}$$

elde edilir. $k_2 = \langle V_2', V_3 \rangle$ eşitliğinde yerine yazılır ise;

$$\begin{aligned}
k_2 &= \langle V_2', V_3 \rangle \\
&= \langle V_2', V_1 \times V_2 \rangle \\
&= \left\langle \frac{c'''(s)}{\|c'''(s)\|}, c'(s) \times \frac{c''(s)}{\|c''(s)\|} \right\rangle \\
&= \frac{1}{\|c''(s)\|^2} \langle c'''(s), c'(s) \times c''(s) \rangle \\
&= \frac{1}{\|c''(s)\|^2} \det(c'''(s), c'(s), c''(s)) \\
&= \frac{1}{\|c''(s)\|^2} \det(c'(s), c''(s), c'''(s))
\end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma 2.1.1

- i) $\langle V_i'(s), V_i(s) \rangle = 0$, $1 \leq i \leq 3$
- ii) $\langle V_i', V_j \rangle = -\langle V_j', V_i \rangle$, $i \neq j$
- iii) $\frac{\langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle}{\|\alpha''(s)\|} = -k_1(s)$

dir. Frenet vektörlerinin türevlerini yine kendileri cinsinden ifade etmeye yarayan bu teorem yardımıyla matris formunda yazılabilir.

$$\begin{aligned}
V_1' &= k_1 V_2 \\
V_i' &= -k_{i-1} V_{i-1} + k_i V_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq 3 \\
V_3' &= -k_2 V_2
\end{aligned}$$

dir. Buradan Frenet vektörleri ortonormal olduğundan

$$\begin{aligned}
V_1' &= 0V_1 + k_1 V_2 + 0V_3 \\
V_2' &= -k_1 V_1 + 0V_2 + k_2 V_3 \\
V_3' &= 0V_1 - k_2 V_2 + 0V_3
\end{aligned}$$

dir. Böylece

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir

$$V_1 = T, \quad V_2 = N, \quad V_3 = B$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Bu şekilde yazılan k_1 eğrilğine 1. eğrilik adı verilir ve κ ile gösterilir. k_2 ' ya ise torsiyon (burulma) adı verilir ve τ ile gösterilir. Buradan

$$\begin{aligned} T' &= -\kappa N \\ N' &= \kappa T + \tau B \\ B' &= -\tau N \end{aligned}$$

yazılır. (Hacısalıhoğlu 1993).

Tanım 2.1.8: (Geodezik ve normal eğrilik)

S, E^3 de bir yüzey , $\gamma : I \rightarrow S$ birim hızlı bir eğri ve $\gamma''(s) = \gamma''(s)^\top + \gamma''(s)^\perp$ olsun. $\|\gamma''(s)^\top\| = k_g$ ve $\|\gamma''(s)^\perp\| = k_n$ ile gösterilen k_g ve k_n ye sırasıyla γ eğrisinin geodezik ve normal eğriliği denir. (Gray 1939).

Tanım 2.1.9: (Geodezik eğri)

$M, \mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey ve $\alpha : I \rightarrow M$ bir eğri olmak üzere M yüzeyinin birim normal vektör alanı N olsun. α'' vektör alanı, N vektör alanının lineer bileşimi ise α eğrisine, M yüzeyi içinde bir geodezik eğri denir. (Sabuncuoğlu 2004).

Tanım 2.1.10: (Geodezik eğrilik)

E^3 de s yay parametresi ile verilen bir α eğrisinin birim teğet vektörü , $T = (T_1, T_2, T_3)$ olmak üzere

$$k_g = \|D_T T\| = \left\| \frac{d^2 \alpha}{ds^2} \right\|$$

ifadesine α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasına karşılık gelen , E^3 deki geodezik eğriliği denir. (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.1.11: (Darboux vektör alanı)

Birim hızlı her $\gamma : I \rightarrow E^3$ eğrisi için , $D(s) = \tau(s)t(s) + k(s)b(s)$ vektör alanına, γ eğrisinin Darboux vektör alanı denir. (Hacısalıhoğlu 1993).

Tanım 2.1.12: (Genelleştirilmiş Darboux vektör alanı)

$k(s) \neq 0$ koşulu altında γ boyunca, $\tilde{D}(s) = (\frac{\tau}{k})(s)t(s) + b(s)$ olarak tanımlanan vektör alanına , γ nın genelleştirilmiş Darboux vektör alanı denir. (Izumiya ve Takeuchi 2002).

Tanım 2.1.13: (Eğilim çizgisi)

$M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\forall s \in I$ için $\alpha'(s)$ hız vektörü , bir U sabit vektörü ile sabit açı teşkil ediyorsa , M ye bir eğilim çizgisi ve $Sp\{U\}$ ya da M eğilim çizgisinin eğilim eksenidir. (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.1.14: (Helis)

γ nın tanjant doğruları , sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyorsa γ ya bir silindirik helis (genel helis) denir. $\gamma(s)$ nın bir silindirik helis olması için gerek ve yeter şart $(\frac{\tau}{k})(s)$ nın sabit olmasıdır. Eğer τ ve k sıfırdan farklı sabitler ise helise dairesel helis denir. (Izumiya ve Takeuchi 2002).

Tanım 2.1.15: (Düzlemsel eğri)

Eğer bir eğrinin bütün noktaları bir düzlem tarafından içeriliyorsa bu eğriye düzlemseldir denir. (Karger ve Novak 1985).

Tanım 2.1.16: (Küresel eğri)

Bir küre üzerinde yatan eğriye küresel eğri adı verilir. (Karger ve Novak 1985).

Tanım 2.1.17: (Teğetler göstergesi)

3-boyutlu Öklid uzayında , E^3 de bir α eğrisi $s \in I$ yay parametresi ile verilsin. α eğrisinin birim teğet vektörü T olmak üzere, $\vec{PQ} = T$ alındığında , P noktası α eğrisini çizerken, Q noktasının birim küre yüzeyi üzerine çizdiği eğriye α eğrisinin birinci küresel göstergesi veya teğetler göstergesi adı verilir. (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.1.18: (İnvolüt ve evolütü)

$M, N \subset E^n$ iki eğri olsun. M ve N sırasıyla $(I, \alpha), (I, \beta)$ koordinat komşulukları ile verilsin. $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ noktalarında M ve N in Frenet r -ayaklıları sırasıyla;

$$\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\} \text{ ve } \{V_1^*(s), V_2^*(s), \dots, V_r^*(s)\}$$

olmak üzere $\langle V_1(s), V_1^*(s) \rangle = 0$ ise N ye M nin involütü, M ye de N nin evolütü denir. (Hacısalıhoğlu 1993).

Teorem 2.1.5

α^* eğrisi α eğrisinin bir involütü olsun. α^* eğrisinin Frenet vektör alanları T^*, N^*, B^* olduğuna göre ,

$$\begin{aligned} T^* &= N \\ N^* &= \frac{-\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} T + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} B \\ B^* &= \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} T + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} B \end{aligned}$$

dir. (Sabuncuoğlu 2004).

Tanım 2.1.19: (Bertrand eğri çifti)

$M, N \subset E^n$ eğrileri sırasıyla $(I, \alpha), (I, \beta)$ koordinat komşulukları ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s) \in M$ ve $\beta(s) \in N$ noktalarında M ve N nin

$$\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\} \text{ ve } \{V_1^*(s), V_2^*(s), \dots, V_r^*(s)\}$$

Frenet r-ayaklıları verildiğinde $\forall s \in I$ için $\{V_2(s), V_2^*(s)\}$ lineer bağımlı ise (M, N) eğri ikilisine bir Bertrand çifti denir. (Hacısalihoglu 1993).

Tanım 2.1.20: (Ortogonal grup)

$\mathbb{R}^3$ de ortogonal matrislerin cümlesi

$$O(3) = \{A \in \mathbb{R}_3^3 : A^T A = A A^T = I\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu cümle matris çarpma işlemine göre bir gruptur. Bu gruba ortogonal grup denir. (Karger, Novak 1985).

Tanım 2.1.21: (Özel ortogonal grup)

$O(3)$ ortogonal grubunun bir alt grubu olan ve

$$SO(3) = \{A \in \mathbb{R}_3^3 : A^T A = A A^T = I, \det A = 1\}$$

şeklinde tanımlanan gruba özel ortogonal grup denir. (Karger, Novak 1985).

Tanım 2.1.22

V sonlu boyutlu bir iç çarpım uzayı ,

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle , x, y \in V$$

olduğu zaman $f : V \rightarrow V$ lineer dönüşümü ortoganaldır. (Hacısalıhoğlu 2000).

2.2 E^n de Hareketler**Tanım 2.2.1: (İzometri)**

E_1^n ve E_2^n sırasıyla n -boyutlu V_1 ve V_2 iç çarpım uzayları ile birleşen birer Öklid uzayı olsunlar. Bir $f : E_1^n \rightarrow E_2^n$ afin dönüşümü $\forall \alpha, \beta \in V_1$ için $\langle \Psi(\alpha), \Psi(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$ olacak şekilde bir $\Psi : V_1 \rightarrow V_2$ lineer dönüşümü ile birleşiyorsa f bir izometridir. (Hacısalıhoğlu 1983).

Tanım 2.2.2: (Hareket)

E^n , n -boyutlu Öklid uzayının izometrilерinden biri f olsun. E^n deki bir $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ dik koordinat sistemine göre f 'nin matrisel ifadesi , $A \in O(n)$ ve $C \in \mathbb{R}_1^n$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} Y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}$$

dir. f ye E^n de bir hareket adı verilir. $A \in O(n)$ olduğundan $\det A = \mp 1$ dir. Eğer $\det A = 1$ ise f hareketine direkt hareket , $\det A = -1$ ise f hareketine karşıt hareket denir. $Y = AX + C$ ile verilen harekette sabit bir $X \in E^n$ noktasının resmi Y dir. Burada AX kısmına hareketin dönme kısmı denir. Direkt hareketler de iki çeşit hareketin bileşimidir, bunlar; dönme ve ötelemedir. (Hacısalihoglu 1980).

Tanım 2.2.3: (Dönme)

E^n 'in bir f izometrisi için eğer $f(0) = 0$, $0 \in E^n$ olacak şekilde bir O noktası mevcut ise f ye O etrafında bir dönme denir. E^n de O etrafında dönmelerin cümlesi $R_0(n)$ ile gösterilirse bu cümle bileşke işlemine göre bir grup olup, $I(E^n)$ in bir alt grubudur. (Hacısalihoglu 1980).

Teorem 2.2.1

E^n ile eşleşen $\mathbb{R}^n$ n-boyutlu standart reel vektör uzayında,

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i , X = (x_1, x_2, \dots, x_n) , Y = (y_1, y, \dots, y_n)$$

Öklid iç çarpımını koruyan ortogonal grup $O(n)$ ile, $O = (0, 0, \dots, 0)$ noktasını sabit bırakan dönme grubu eşlenebilir. Yani herhangi bir $R_0 \in R_0(n)$ dönmesinin E^n deki bir X noktasının R_0 altındaki görüntüsü Y olmak üzere $Y = AX$, $A \in O(n)$ biçiminde ifade edilebilir. (Hacısalihoglu 1980).

Tanım 2.2.4: (Öteleme)

E^n 'in bir f izometrisi için eğer $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$ olmak üzere $f(X) = (x_1 + t_1, x_2 + t_2, \dots, x_n + t_n)$, $t_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$ ise f 'ye E^n de bir öteleme denir. E^n deki bütün ötelemelerin cümlesi $T(n)$ ile gösterilirse bu cümle dönüşümlerin bileşke işlemine göre bir değişimli grup olup, $I(E^n)$ 'in bir alt grubudur.

(Hacısalihoglu 1980).

Tanım 2.2.5: (Eğri)

n -boyutlu Öklid uzayı E^n ve $\mathbb{R}$ nin bir irtibatlı açık alt cümlesi I olmak üzere

$$\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E^n$$

dönüşümü diferensiyellenebilir ise $\alpha(I)$ cümlesine E^n de bir eğri denir. (Hacısalihoglu 1980).

Tanım 2.2.6

Sabit uzayı $\mathbb{R}$, hareketli uzayı $\mathbb{R}_0$ ile gösterirsek o zaman $\mathbb{R}_0$ 'ın $\mathbb{R}$ ' ye göre hareketi $\mathbb{R}_0/\mathbb{R}$ ile göstereceğiz. $\mathbb{R}_0/\mathbb{R}$ hareketi ;

$$\begin{aligned} \Psi : E^n &\rightarrow E^n \\ X &\rightarrow Y = AX + C \end{aligned}$$

şeklindeki Ψ izometrisi ile temsil edilir. Ψ 'nin matrisel ifadesi $A \in O(n)$, $C \in \mathbb{R}_1^n$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} Y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}$$

dir.

Tanım 2.2.7: (Homotetik hareket)

$$\begin{aligned} \Psi : E^n &\rightarrow E^n \\ X &\rightarrow Y = (hA)X + C \end{aligned}$$

ile belirli dönüşüme E^n de bir homotetik hareket denir.

2.3 Kuaterniyonlar

Bu bölümde reel kuaterniyonlar cebiri tanıtılacaktır. Kuaterniyonlar William Rowan Hamilton tarafından tanımlanmıştır. Hamilton kuaterniyonları tanımlamakla iki vektör için bölümün de mümkün olabileceği, yeni bir çarpım işlemini vektör cebirine dahil etmiş oldu. Böylece üç boyutlu uzayda hareketlerin tanımını kolaylaştırmış oldu.

Bir reel kuaterniyon, sıralı dört sayının $1, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ gibi dört birime eşlik etmesiyle tanımlanabilir. Burada birinci birim $+1$ bir reel sayıdır, diğer üç birim ise

$$\begin{aligned} \vec{e}_1^2 = \vec{e}_2^2 = \vec{e}_3^2 &= -1 \\ \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 &= \vec{e}_3, \quad \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_1, \quad \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \\ \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1 &= -\vec{e}_3, \quad \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_2 = -\vec{e}_1, \quad \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 = -\vec{e}_2 \end{aligned}$$

özelliklerine sahiptir. Böylece bir kuaterniyon

$$q = d + a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$$

biçiminde ifade edilir. Burada $d, a, b, c \in \mathbb{R}$ reel sayılara q kuaterniyonunun bileşenleri denir. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ birimleri 3-boyutlu reel vektör uzayının bir dik koordinat sisteminin baz vektörleri olarak alınabilir. Dolayısıyla q kuaterniyonu, S_q ile gösterilen skalar kısım ve $\vec{V}_q$ ile gösterilen vektörel kısım olmak üzere iki kısma ayrılabilir.

$$S_q = d, \quad \vec{V}_q = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$$

O halde $q = S_q + \vec{V}_q$ yazılabilir.

Reel kuaterniyonlar cümlesini H ile gösterecek olursak ;

$$\text{Re } H = d, \quad \text{Im } H = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$$

dir.

$$H = \left\{ q = d + a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 \mid d, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

cümlesinden birer özel hal olarak $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesi, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cümlesi ve $\mathbb{R}^3$ üç boyutlu vektörler cümlesi elde edilebilir. Bu cümle üzerinde tanımlanan toplama ve çarpma işlemleriyle beraber H bir vektör uzayıdır. (Hacısalıhoğlu,1983).

Teorem 2.3.1

$f : \text{Im } H \rightarrow \text{Im } H$ fonksiyonu tüm ortogonal dönüşümlerde aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $a \in S^3$ kuaterniyona karşılık gelir.

- 1) $f(u) = a.u.\bar{a}, \quad f \in O^+(\text{Im } H)$
- 2) $f(u) = -a.u.\bar{a}, \quad f \in O^-(\text{Im } H)$

3.DİREKT BENZERLİK GRUPLARI ALTINDA UZAY EĞRİLERİNİN DİFERENSİYEL GEOMETRİK DEĞİŞMEZLERİ

3.1. Eğrilik ve Torsiyon Şekilleri

$\mathbb{R}^3$ Öklid uzayının her direkt benzerlikleri yön koruyan homoteti ile ortogonal dönüşümün çarpımıdır. $\text{Sim}^+(\mathbb{R}^3)$ ile Öklid uzayının doğrudan benzerlikler grubu tanımlanır. g_2 'nin bir öteleme, g_1 'in orijini koruyan ortogonal bir dönüşüm, $\lambda \neq 0$ olmak üzere h orijinde merkezleyen bir homoteti olduğu yerde $f \in \text{Sim}^+(\mathbb{R}^3)$ bu ifadelerin bileşkesidir. H kuaterniyon cebiri olmak üzere $\mathbb{R}^3$ 'de $\text{Im } H$ olarak tanımlanır. Hamilton teoremine göre;

$$\text{Im } H \ni z \xrightarrow{g_1} n.z.n^{-1} \in \text{Im } H$$

dır. Buradan f fonksiyonu ;

$$f(z) = \lambda.n.z.n^{-1} + a, z \in \text{Im } H \cong \mathbb{R}^3$$

elde edilir. ($\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0, a \in \text{Im } H$)

$$c : (t_1, t_2) \ni t \rightarrow c(t) \in \mathbb{R}^3 \cong \text{Im } H$$

eğrisi C^3 sınıfından bir eğridir. c eğrisinin şeklini c_0 tarafından f direkt benzerlikler altında tanımlanır. $c_0 = f \circ c$ olmak üzere c_0 eğrisini

$$(t_1, t_2) \ni t \xrightarrow{c_0} \lambda.n.c(t).n^{-1} + a \in \text{Im } H$$

şeklinde ifade edebiliriz. $c_0 \in (t_1, t_2)$ den başlayan c, c_0 eğrilerinin yay uzunlukları ;

$$s(t) = \int_{t_0}^t \left\| \frac{dc(u)}{du} \right\| du \quad s_0(t) = \int_{t_0}^t \left\| \frac{dc_0(u)}{du} \right\| du = \lambda s(t)$$

dir.

Her iki eğride $c : (s_1, s_2) \rightarrow \mathbb{R}^3$ ve $c_0 : (\lambda s_1, \lambda s_2) \rightarrow \mathbb{R}^3$ yay parametreleri ile yeniden

parametrelendirilebilir.

c ve c_0 eğrilerinin yay uzunlukları sırasıyla s ve s_0 olmak üzere $s_0(t) = \lambda s(t)$ dir. Her iki tarafın s_0 'a göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} 1 &= 0.s(t) + \lambda \frac{ds}{ds_0} \\ \frac{ds}{ds_0} &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

elde edilir. $\frac{ds}{ds_0} = \frac{1}{\lambda}$ sabit olduğu görülür.

Sonuç 3.1.1:

c_0 eğrisinin eğriliği $k_{10}(s_0) = k_{10}(\lambda s)$ ve torsiyonu $k_{20}(s_0) = k_{20}(\lambda s)$ ifadeleri

$$k_{10} = \frac{1}{\lambda} k_1(s) \quad , \quad k_{20} = \frac{1}{\lambda} k_2(s) \quad (1)$$

olarak verilir.

İspat:

$$\begin{aligned} c : I &\rightarrow \mathbb{R}^3 & \|c'(s)\| &= 1 \\ t &\rightarrow c(t) \\ c_0 : I &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\rightarrow c_0(t) = \lambda.n.c(t).n^{-1} + a & \|c'_0(s_0)\| &= 1 \end{aligned}$$

c eğrisinin k_1 eğriliği $k_1 = \|c''(s)\|$ ve c_0 eğrisinin k_{10} eğriliği $k_{10} = \|c''(s_0)\|$ dir. $\frac{ds}{ds_0} = \frac{1}{\lambda}$ ise $ds_0 = \lambda.ds$ dir.

$$\begin{aligned} c_0(s_0) &= \lambda.n.c(t).n^{-1} + a \\ c_0(\lambda.s) &= \lambda.n.c(t).n^{-1} + a \end{aligned}$$

ifadesinin s ye göre türevi alınırsa;

$$\begin{aligned}\frac{dc_0}{ds_0} \cdot \frac{ds_0}{ds} &= \lambda \cdot n \cdot n^{-1} \cdot \frac{dc}{ds} \\ \frac{dc_0}{ds_0} &= \frac{dc}{ds}\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa

$$\begin{aligned}\frac{d^2c_0}{ds_0^2} \cdot \frac{ds_0}{ds} &= \frac{d^2c}{ds^2} \\ \frac{d^2c_0}{ds_0^2} \cdot \lambda &= \frac{d^2c}{ds^2}\end{aligned}$$

elde edilir ve normu alınırsa

$$\begin{aligned}\lambda \cdot \left\| \frac{d^2c_0}{ds_0^2} \right\| &= \left\| \frac{d^2c}{ds^2} \right\| \\ \lambda \cdot k_{10} &= k_1 \\ k_{10} &= \frac{1}{\lambda} \cdot k_1\end{aligned}$$

ifadesi elde edilmiş olunur. Aynı şekilde

$$\frac{dc_0}{ds_0} = \frac{dc}{ds}$$

ifadesinin türevi alınırsa

$$\frac{d^2c_0}{ds_0^2} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{d^2c}{ds^2}$$

elde edilir. Tekrar türevi alınırsa

$$\begin{aligned}\frac{d^3c_0}{ds_0^3} \cdot \frac{ds_0}{ds} &= \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{d^3c}{ds^3} \\ \frac{d^3c_0}{ds_0^3} &= \frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{d^3c}{ds^3}\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
k_{20} &= \frac{\det(c'_0(s_0), c''_0(s_0), c'''_0(s_0))}{\|c''_0(s_0)\|^2} \\
k_{20} &= \frac{\det(\frac{dc}{ds}, \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{d^2c}{ds^2}, \frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{d^3c}{ds^3})}{\frac{1}{\lambda^2} \|\frac{d^2c}{ds^2}\|^2} \\
k_{20} &= \frac{\frac{1}{\lambda} \det(c'(s), c''(s), c'''(s))}{\|c''(s)\|^2} \\
k_{20} &= \frac{1}{\lambda} \cdot k_2(s)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $k_{10}\lambda = k_1(s)$ ve $k_{20}\lambda = k_2(s)$ eşitliklerinden $k_1 ds = k_{10} ds_0$ ve $k_2 ds = k_{20} ds_0$ elde edilir. Öklid uzayında sıfırdan farklı bir eğri veya Frenet uzay eğrilerinin denklemlerini küresel şekillerin uzunluk parametresi ile yeniden parametrelendirilebilir. c ve c_0 eğrilerinin yay uzunluklarını σ ve σ_0 küresel parametreleri ile tanımlarsak

$$d\sigma = k_1 ds = k_{10} ds_0 = d\sigma \quad (2)$$

elde edilir. Bundan dolayı $d\sigma = k_1 ds$ $\mathbb{R}^3$ ün direkt benzerlik grupları altında invarianttır.

Teorem 3.1.1

σ küresel yay parametresi ile parametrelendirilen c eğrisinin Frenet çatısı e_1, e_2, e_3 olsun. O halde c eğrisinin denklemleri

$$\begin{aligned}
\frac{dc}{d\sigma} &= \frac{1}{k_1} e_1 \\
\frac{de_1}{d\sigma} &= e_2 \\
\frac{de_2}{d\sigma} &= -e_1 + \frac{k_2}{k_1} e_3 \\
\frac{de_3}{d\sigma} &= -\frac{k_2}{k_1} e_2
\end{aligned} \quad (3)$$

ile verilir.

İspat:

Frenet çatısı e_1, e_2, e_3 ve c nin küresel parametresi σ , c_0 nin küresel parametresi de σ_0 olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\frac{dc}{d\sigma} &= \frac{dc}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma} \\ \frac{dc}{d\sigma} &= e_1 \cdot \frac{1}{k_1}\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. e_1 in σ parametresine göre türevi alınır

$$\begin{aligned}\frac{de_1}{d\sigma} &= \frac{de_1}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma} \\ \frac{de_1}{d\sigma} &= k_1 e_2 \frac{1}{k_1} \\ \frac{de_1}{d\sigma} &= e_2\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. e_2 nin σ ya göre türevi alınır

$$\begin{aligned}\frac{de_2}{d\sigma} &= \frac{de_2}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma} \\ \frac{de_2}{d\sigma} &= (-k_1 e_1 + k_2 e_3) \cdot \frac{1}{k_1} \\ \frac{de_2}{d\sigma} &= -e_1 + \frac{k_2}{k_1} e_3\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. e_3 ün σ ya göre türevi alınır

$$\begin{aligned}\frac{de_3}{d\sigma} &= \frac{de_3}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma} \\ \frac{de_3}{d\sigma} &= -k_2 e_2 \frac{1}{k_1} \\ \frac{de_3}{d\sigma} &= -\frac{k_2}{k_1} e_2\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. $\frac{de_1}{d\sigma} = e'_1$, $\frac{de_2}{d\sigma} = e'_2$, $\frac{de_3}{d\sigma} = e'_3$ denilir ise

$$\begin{aligned} e'_1 &= e_2 \\ e'_2 &= -e_1 + \frac{k_2}{k_1}e_3 \\ e'_3 &= -\frac{k_2}{k_1}e_2 \end{aligned}$$

ifadeleri yazılır. Buradan;

$$\begin{bmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{k_2}{k_1} \\ 0 & -\frac{k_2}{k_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilmiş olunur. $\frac{dc}{d\sigma} = \frac{1}{k_1}e_1$ ifadesinin σ ya göre tekrar türevi alınır

$$\begin{aligned} \frac{d^2c}{d\sigma^2} &= \left(\frac{1}{k_1}\right)' \cdot e_1 + \frac{1}{k_1} \cdot e'_1 \\ \frac{d^2c}{d\sigma^2} &= -\frac{dk_1}{d\sigma} \frac{dc}{k_1^2} k_1 + e_2 \frac{1}{k_1} \\ \frac{d^2c}{d\sigma^2} &= -\frac{dk_1}{k_1 d\sigma} \frac{dc}{d\sigma} + \frac{1}{k_1} e_2 \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

Sonuç 3.1.2

c_0 eğrisinin Frenet çatısı e_{10}, e_{20}, e_{30} olsun. O halde c_0 ın denklemleri;

$$\begin{aligned} \frac{dc_0}{d\sigma_0} &= \frac{1}{k_{10}}e_{10} \\ \frac{dc_0}{d\sigma_0} &= e_{20} \\ \frac{dc_0}{d\sigma_0} &= -e_{10} + \frac{k_{20}}{k_{10}}e_{30} \\ \frac{dc_0}{d\sigma_0} &= -\frac{k_{20}}{k_{10}}e_{20} \end{aligned}$$

ile verilir.

İspat:

$$\begin{aligned}
\frac{dc_0}{d\sigma_0} &= \frac{dc_0}{ds_0} \cdot \frac{ds_0}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma_0} \\
\frac{dc_0}{d\sigma_0} &= \frac{dc_0}{ds_0} \cdot \lambda \cdot \frac{ds}{k_{10}ds_0} \\
\frac{dc_0}{d\sigma_0} &= \frac{dc_0}{ds_0} \lambda \frac{1}{k_{10}} \frac{1}{\lambda} \\
\frac{dc_0}{d\sigma_0} &= \frac{1}{k_{10}} e_{10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{de_{10}}{d\sigma_0} &= \frac{de_{10}}{ds_0} \cdot \frac{ds_0}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma_0} \\
\frac{de_{10}}{d\sigma_0} &= k_{10} \cdot e_{20} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{ds}{k_{10}ds_0} \\
\frac{de_{10}}{d\sigma_0} &= k_{10} \cdot e_{20} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{k_{10}} \cdot \lambda \\
\frac{de_{10}}{d\sigma_0} &= e_{20}
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

$$\begin{aligned}
\frac{de_{20}}{d\sigma_0} &= \frac{de_{20}}{ds_0} \cdot \frac{ds_0}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma_0} \\
\frac{de_{20}}{d\sigma_0} &= (-k_{10} \cdot e_{10} + k_{20} \cdot e_{30}) \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{ds}{k_{10}ds_0} \\
\frac{de_{20}}{d\sigma_0} &= (-k_{10} \cdot e_{10} + k_{20} \cdot e_{30}) \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{k_{10}} \cdot \lambda \\
\frac{de_{20}}{d\sigma_0} &= -e_{10} + \frac{k_{20}}{k_{10}} \cdot e_{30}
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

$$\begin{aligned}
\frac{de_{30}}{d\sigma_0} &= \frac{de_{30}}{ds_0} \cdot \frac{ds_0}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma_0} \\
\frac{de_{30}}{d\sigma_0} &= -k_{20} \cdot e_{20} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{ds}{k_{10}ds_0} \\
\frac{de_{30}}{d\sigma_0} &= -k_{20} \cdot e_{20} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{k_{10}} \cdot \lambda \\
\frac{de_{30}}{d\sigma_0} &= -\frac{k_{20}}{k_{10}} \cdot e_{20}
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. $\frac{de_{10}}{d\sigma_0} = e'_{10}$, $\frac{de_{20}}{d\sigma_0} = e'_{20}$, $\frac{de_{30}}{d\sigma_0} = e'_{30}$ denilirse

$$\begin{aligned} e'_{10} &= e_{20} \\ e'_{20} &= -e_{10} + \frac{k_{20}}{k_{10}}.e_{30} \\ e'_{30} &= -\frac{k_{20}}{k_{10}}.e_{20} \end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir. Buradan ;

$$\begin{bmatrix} e'_{10} \\ e'_{20} \\ e'_{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{k_{20}}{k_{10}} \\ 0 & -\frac{k_{20}}{k_{10}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{10} \\ e_{20} \\ e_{30} \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. Daha sonra $\frac{dc_0}{d\sigma_0} = \frac{1}{k_{10}}e_{10}$ ifadesinin σ_0 a göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{d^2c_0}{d\sigma_0^2} &= \left(\frac{1}{k_{10}} \right)' .e_{10} + (e_{10})' \frac{1}{k_{10}} \\ \frac{d^2c_0}{d\sigma_0^2} &= \frac{-\frac{dk_{10}}{ds_0} \cdot \frac{ds_0}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma_0}}{k_{10}^2} .e_{10} + \frac{de_{10}}{ds_0} \cdot \frac{ds_0}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma_0} \cdot \frac{1}{k_{10}} \\ \frac{d^2c_0}{d\sigma_0^2} &= \frac{-\frac{dk_{10}}{ds_0} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{ds}{k_{10}ds_0}}{k_{10}^2} .e_{10} + \frac{de_{10}}{ds_0} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{ds}{k_{10}ds_0} \cdot \frac{1}{k_{10}} \\ \frac{d^2c_0}{d\sigma_0^2} &= \frac{-dk_{10}}{ds_0k_{10}k_{10}} \cdot \frac{e_{10}}{k_{10}} + \frac{de_{10}}{ds_0} \cdot \frac{1}{k_{10}} \cdot \frac{1}{k_{10}} \\ \frac{d^2c_0}{d\sigma_0^2} &= -\frac{dk_{10}}{d\sigma_0k_{10}} \cdot \frac{dc_0}{d\sigma_0} + \frac{de_{10}}{ds_0 \cdot k_{10}} \cdot \frac{1}{k_{10}} \\ \frac{d^2c_0}{d\sigma_0^2} &= -\frac{dk_{10}}{d\sigma_0k_{10}} \cdot \frac{dc_0}{d\sigma_0} + \frac{de_{10}}{d\sigma_0} \cdot \frac{1}{k_{10}} \\ \frac{d^2c_0}{d\sigma_0^2} &= -\frac{dk_{10}}{k_{10}d\sigma_0} \cdot \frac{dc_0}{d\sigma_0} + \frac{1}{k_{10}} \cdot e_{20} \end{aligned}$$

elde edilir. (3.1) ve (3.2) denklemlerinden

$$\begin{aligned} \frac{k'_{10}}{k_{10}} &= -\frac{dk_{10}}{k_{10}d\sigma_0} = -\frac{d\frac{1}{\lambda}k_1}{d\sigma} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\lambda}k_1} = -\frac{dk_1}{k_1d\sigma} \\ \frac{k_{20}}{k_{10}} &= \frac{\frac{1}{\lambda} \cdot k_2}{\frac{1}{\lambda} \cdot k_1} = \frac{k_2}{k_1} \end{aligned}$$

sabitlikleri elde edilir.

Sonuç 3.1.3

Öklid uzayının direkt benzerlik grupları altında $\tilde{k}_1 = -\frac{dk_1}{k_1 d\sigma}$ ve $\tilde{k}_2 = \frac{k_2}{k_1}$ fonksiyonları invaryant kalır.

c eğrisinin temel denklemi ve (3.3) denklemlerini

$$\begin{aligned}\frac{d^2c}{d\sigma^2} &= \tilde{k}_1 \frac{dc}{d\sigma} + \frac{1}{k_1} e_2 \\ \frac{de_1}{d\sigma} &= e_2 \\ \frac{de_2}{d\sigma} &= -e_1 + \tilde{k}_2 e_3 \\ \frac{de_3}{d\sigma} &= -\tilde{k}_2 e_2\end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz.

Teorem 3.1.2

$\tilde{k}_1$ ve $\tilde{k}_2$ sabitliklerini

$$\begin{aligned}\tilde{k}_1(\sigma) &= \frac{\langle \frac{d^2c}{d\sigma^2}, \frac{dc}{d\sigma} \rangle}{\langle \frac{dc}{d\sigma}, \frac{dc}{d\sigma} \rangle} \\ \tilde{k}_2(\sigma) &= \det\left(\frac{dc}{d\sigma}, \frac{d^2c}{d\sigma^2}, \frac{d^3c}{d\sigma^3}\right) \cdot \left[\frac{\left(\frac{dc}{d\sigma}\right)^2}{\left(\frac{dc}{d\sigma}\right)^2 \cdot \left(\frac{d^2c}{d\sigma^2}\right)^2 - \langle \frac{dc}{d\sigma}, \frac{d^2c}{d\sigma^2} \rangle^2} \right]^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

şeklinde ifade edebiliriz.

İspat:

$\frac{dc}{d\sigma} = \frac{1}{k_1} e_1$ ifadesinin σ ya göre türevi alındığında

$$\frac{d^2c}{d\sigma^2} = -\frac{dk_1}{k_1 d\sigma} \frac{dc}{d\sigma} + \frac{1}{k_1} e_2$$

ifadesi elde edilmiştir. $\tilde{k}_1$ eşitliğini denklemde yerine yazılırsa

$$\frac{d^2c}{d\sigma^2} = \tilde{k}_1 \cdot \frac{dc}{d\sigma} + \frac{1}{k_1} \cdot e_2$$

ifadesi elde edilir. Denklemi $\frac{dc}{d\sigma}$ ile iç çarpım uygularsak

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d^2c}{d\sigma^2}, \frac{dc}{d\sigma} \right\rangle &= \tilde{k}_1 \left\langle \frac{dc}{d\sigma}, \frac{dc}{d\sigma} \right\rangle + \frac{1}{k_1} \left\langle e_2, \frac{dc}{d\sigma} \right\rangle \\ \tilde{k}_1 &= \frac{\left\langle \frac{d^2c}{d\sigma^2}, \frac{dc}{d\sigma} \right\rangle}{\left\langle \frac{dc}{d\sigma}, \frac{dc}{d\sigma} \right\rangle} \end{aligned}$$

elde edilir.

Açıklama 3.1.1

$$\begin{aligned} \frac{dc}{d\sigma} &= \frac{1}{k_1} \cdot e_1 \\ \frac{de_1}{d\sigma} &= e_2 \\ \frac{de_2}{d\sigma} &= -e_1 + \frac{k_2}{k_1} \cdot e_3 \\ \frac{de_3}{d\sigma} &= -\frac{k_2}{k_1} \cdot e_2 \end{aligned}$$

Buradan ;

$$\begin{bmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

ifadesini yazabiliriz.

Birim hızlı olmayan c eğrisi için

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{c'}{\|c'\|} \\ e_2 &= \frac{c' \wedge c''}{\|c' \wedge c''\|} \\ e_3 &= e_1 \wedge e_2 \end{aligned}$$

ve $k_1 = \frac{\|c' \wedge c''\|}{\|c'\|^3}$ ve $k_2 = \frac{\langle c' \wedge c'', c''' \rangle}{\|c' \wedge c''\|^2} \text{dir.}$ c eğrisi birim hızlı olduğunda

$$\begin{aligned} e_1 &= c' \\ e_2 &= \frac{c''}{\|c''\|} \\ e_3 &= e_1 \wedge e_2 \end{aligned}$$

ve $k_1 = \|c''\|^2$ ve $k_2 = \frac{\det(c', c'', c''')}{\|c''\|^2} \text{dir.}$

c eğrisinin Frenet vektörleri $\{e_1, e_2, e_3\}$, σ küresel yay parametresi olsun.

$$\begin{aligned} \frac{dc}{d\sigma} &= e_1 \cdot \frac{1}{k_1} \\ \frac{d^2c}{d\sigma^2} &= -\frac{dk_1}{k_1^2 d\sigma} \cdot e_1 + \frac{1}{k_1} \cdot e_2 \\ \frac{d^3c}{d\sigma^3} &= -\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{dk_1}{k_1^2 d\sigma} \right) e_1 - \frac{dk_1}{k_1^2 d\sigma} \cdot \frac{de_1}{d\sigma} + \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{k_1} \right) e_2 + \frac{1}{k_1} \frac{de_2}{d\sigma} \end{aligned}$$

ifadelerinde $\tilde{k}_1 = -\frac{dk_1}{k_1 d\sigma}$ ve $\tilde{k}_2 = \frac{k_2}{k_1}$ denilirse

$$\begin{aligned} \frac{d^2c}{d\sigma^2} &= -\frac{dk_1}{k_1^2 d\sigma} \cdot e_1 + \frac{1}{k_1} \cdot e_2 \\ \frac{d^2c}{d\sigma^2} &= \tilde{k}_1 \cdot \frac{dc}{d\sigma} + \frac{1}{k_1} \cdot e_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dc}{d\sigma} &= \frac{1}{k_1} e_1 \\ \frac{de_1}{d\sigma} &= e_2 \\ \frac{de_2}{d\sigma} &= -e_1 + \tilde{k}_1 e_3 \\ \frac{de_3}{d\sigma} &= -\tilde{k}_1 e_3 \end{aligned}$$

ifadelerini yazabiliriz. Böylece ;

$$\begin{bmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \tilde{k}_2 \\ 0 & -\tilde{k}_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilmiş olunur. Burada

$$\tilde{k}_1(\sigma) = \frac{\langle \frac{d^2c}{d\sigma^2}, \frac{dc}{d\sigma} \rangle}{\langle \frac{dc}{d\sigma}, \frac{dc}{d\sigma} \rangle} = \frac{\langle \frac{d^2c}{d\sigma^2}, \frac{dc}{d\sigma} \rangle}{\|\frac{dc}{d\sigma}\|^2}$$

dir. Gerçekten;

$$\frac{d^2c}{d\sigma^2} = \tilde{k}_1 \frac{dc}{d\sigma} + \frac{1}{\tilde{k}_1} . e_2$$

ifadesi $\frac{dc}{d\sigma}$ ile iç çarpım uygularsak

$$\langle \frac{d^2c}{d\sigma^2}, \frac{dc}{d\sigma} \rangle = \tilde{k}_1 \langle \frac{dc}{d\sigma}, \frac{dc}{d\sigma} \rangle + \frac{1}{\tilde{k}_1} \langle e_2, \frac{dc}{d\sigma} \rangle$$

elde edilir. Böylece;

$$\tilde{k}_1 = \frac{\langle \frac{d^2c}{d\sigma^2}, \frac{dc}{d\sigma} \rangle}{\|\frac{dc}{d\sigma}\|^2}$$

dir. Ayrıca c eğrisinin yeni küresel parametresi σ ve $k_1(\sigma)$, $k_2(\sigma)$ birinci ve ikinci eğrilikleri göstermek üzere;

$$\begin{aligned} k_1(\sigma) &= \frac{\|c' \wedge c''\|}{\|c'\|^3} \\ k_2(\sigma) &= \frac{\langle c' \wedge c'', c''' \rangle}{\|c' \wedge c''\|^2} \end{aligned}$$

dir. Burada;

$$\begin{aligned} \langle c' \wedge c'', c''' \rangle &= \det(c', c'', c''') \\ \|c' \wedge c''\|^2 &= \|c'\|^2 . \|c''\|^2 - (\langle c', c'' \rangle)^2 \end{aligned}$$

dır. $\tilde{k}_2 = \frac{k_2(\sigma)}{k_1(\sigma)}$ ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\tilde{k}_2 &= \frac{\langle c' \wedge c'', c''' \rangle}{\|c' \wedge c''\|^2} \cdot \frac{\|c'\|^3}{\|c' \wedge c''\|} \\ \tilde{k}_2 &= \det(c', c'', c''') \cdot \left(\frac{\|c'\|}{\|c' \wedge c''\|} \right)^3 \\ \tilde{k}_2 &= \det(c', c'', c''') \left[\frac{\|\frac{dc}{d\sigma}\|^2}{\|\frac{dc}{d\sigma}\|^2 \|\frac{d^2c}{d\sigma^2}\|^2 - \langle \frac{dc}{d\sigma}, \frac{d^2c}{d\sigma^2} \rangle^2} \right]^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

ifadesi elde edilmiştir. $\tilde{k}_1(\sigma), \tilde{k}_2(\sigma)$ fonksiyonlarına sırasıyla c eğrisinin şekil eğriliği ve şekil torsiyonu, $(\tilde{k}_1, \tilde{k}_2)$ sıralı çiftine c nin şekli adı verilir.

3.2 Öklid Uzayında Genel Helislerin Karakterizasyonları

M manifoldu üzerinde γ uzay eğrisinin k_1 eğriliği ve k_2 torsiyonu ile tanımlanan dairesel helisin denklemi ;

$$D_T^3 T + (k_1^2 - k_2^2) D_T T = 0$$

şeklinde gösterilir. T tanjant vektör alanının her noktası ile uzay eğrisi için karakterizasyonu

$$D_T^3 T + \frac{3k_1'}{k_1} D_T^2 T + \left\{ \frac{k_1''}{k_1} - \frac{3(k_1')^2}{k_1^2} + k_1^2 - k_2^2 \right\} D_T T = 0$$

şeklinde verilebilir. Vektör alanı N ve binormal vektör alanı B kullanılarak uzay eğrisinin genel helis olması için iki karakterizasyon verildi. Bu karakterizasyonlar dairesel helis için incelendi.

1. ve 2. eğriliği sabit k_1 ve k_2 olan E^3 deki bir uzay eğrisine dairesel helis denir. Eğer k_1 ve k_2 sabit olmayıp $\frac{k_1}{k_2}$ sabit ise eğri genel helistir. E^3 de bir γ uzay eğrisi ve

$\{T, N, B\}$ bir noktadaki Frenet çatısı olsun. $\gamma' = T$ denildiğinde ;

$$D_T T = k_1(t)N \quad (4)$$

$$D_T N = -k_1(t)T + k_2(t)B$$

$$D_T B = -k_2(t)N$$

dir.

Bu bölümde E^3 de γ uzay eğrisi için genel helisin karakterizasyonu verildi.

Teorem 3.2.1

N vektör alanı ile E^3 deki bir γ uzay eğrisinin bir noktadaki genel helis denklemi ;

$$D_T^2 N + \lambda_1 D_T N + \lambda_2 N = 0 \quad , (\lambda_1 = -\frac{k_1'}{k_1} , \lambda_2 = k_1^2 + k_2^2) \quad (5)$$

şeklinde verilir.

İspat:

γ uzay eğrisi helis eğrisi olsun. Göstereceğiz ki helis eğrisi (3.5) denklemini sağlar. (3.4)

denklemindeki $D_T N = -k_1(t)T + k_2(t)B$ ifadesinin türevi alınır ;

$$\begin{aligned} D_T^2 N &= D_T(D_T N) \\ &= D_T(-k_1 T + k_2 B) \\ &= -k_1' T - k_1 D_T T + k_2' B + k_2 D_T B \\ &= -k_1' T - k_1^2 N + k_2' B - k_2^2 N \\ &= -k_1' T - (k_1^2 + k_2^2)N + k_2' B \end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan bu ifadeler (3.5) denkleminde yerine yazılırsa

$$-k'_1T - (k_1^2 + k_2^2)N + k'_2B + \lambda_1(-k_1T + k_2B) + \lambda_2N = 0$$

ifadesi elde edilir. Denklemleri düzenlersek

$$(-k'_1 - \lambda_1 k_1)T + (-k_1^2 - k_2^2 + \lambda_2)N + (k'_2 + k_2 \lambda_1)B = 0$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\frac{k'_1}{k_1} \\ \lambda_2 &= k_1^2 + k_2^2\end{aligned}$$

olmalıdır. Bu da helis eğrisinin (3.5) denklemini sağladığını gösterir.

Bunun tersine (3.5) denklemini kabul edelim. Göstereceğiz ki γ uzay eğrisi genel helistir.(3.4) denkleminde

$$D_T N = -k_1 T + k_2 B$$

ifadesini ele alırsak, bu denkleminde T yalnız bırakılırsa ;

$$T = -\frac{1}{k_1} D_T N + \frac{k_2}{k_1} B$$

ifadesi elde edilir, türevi alınırsa ;

$$\begin{aligned}D_T T &= \left(-\frac{1}{k_1}\right)' D_T N + \left(-\frac{1}{k_1}\right) D_T^2 N + \left(\frac{k_2}{k_1}\right)' B + \frac{k_2}{k_1} D_T B \\ &= \frac{k'_1}{k_1^2} D_T N - \frac{1}{k_1} D_T^2 N + \left(\frac{k_2}{k_1}\right)' B - \frac{k_2}{k_1} k_2 N\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Düzenlendiğinde

$$D_T T = -\frac{1}{k_1} \left\{ D_T^2 N - \frac{k'_1}{k_1} D_T N + (k_1^2 + k_2^2) N \right\} + k_1 N + \left(\frac{k_2}{k_1}\right)' B$$

elde edilir.(3.4) ve (3.5) denklemi kullanılırsa ;

$$k_1 N = k_1 N - \left(\frac{k_2}{k_1}\right)' B$$

elde edilir. Böylece

$$\left(\frac{k_2}{k_1}\right)' B = 0$$

elde edilir ki bu ifade de $\frac{k_2}{k_1} = \text{sabit}$ olduğunu gösterir.Böylece γ uzay eğrisi bir genel helistir.

Teorem 3.2.2

B binormal vektör alanı ile E^3 deki bir γ uzay eğrisinin bir noktadaki genel helis denklemi ;

$$D_T^3 B + \beta_1 D_T^2 B + \beta_2 D_T B = 0 \quad , (\beta_1 = -\frac{3k_2'}{k_2} , \beta_2 = -\left\{ \frac{k_2''}{k_2} - \frac{3(k_2')^2}{k_2^2} - k_1^2 - k_2^2 \right\}) \quad (6)$$

şeklinde verilir.

İspat

γ uzay eğrisi helis eğrisi olsun.Göstereceğiz ki helis eğrisi (3.6) denklemini sağlar.

(3.4) denklemindeki $D_T B = -k_2 N$ ifadesinin türevi alınrsa

$$\begin{aligned} D_T^2 B &= D_T(D_T B) \\ &= D_T(-k_2 N) \\ &= (-k_2)' N + (-k_2) D_T N \\ &= (-k_2)' N - k_2(-k_1 T + k_2 B) \\ &= -k_2' N + k_2 k_1 T - k_2^2 B \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Tekrar türev alınırsa

$$\begin{aligned}
D_T^3 B &= D_T(D_T^2 B) \\
&= D_T(-k_2' N + k_2 k_1 T - k_2^2 B) \\
&= -k_2'' N + k_1 k_2' T - k_2' k_2 B + k_1' k_2 T + k_2' k_1 T + k_1^2 k_2 N - 2k_2' k_2 B + k_2^3 N
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadeleri (3.6) denkleminde yerine yazılır ve düzenlenirse

$$(k_1 k_2' + k_1' k_2 + k_2' k_1 + \beta_1 k_1 k_2) T + (-k_2'' + k_1^2 k_2 + k_2^3 - k_2' \beta_1 - k_2 \beta_2) N + (-k_2' k_2 - 2k_2' k_2 - k_2^2 \beta_1) B = 0$$

denklemini elde edilir. Denklemin sonucunun sıfır çıkması için ;

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= -\frac{3k_2'}{k_2} \\
\beta_2 &= -\left\{ \frac{k_2''}{k_2} - \frac{3(k_2')^2}{k_2^2} - k_1^2 - k_2^2 \right\}
\end{aligned}$$

olmalıdır. Bu da helis eğrisinin (3.6) denklemini sağladığını gösterir.

Bunun tersine (3.6) denklemini kabul edelim. Göstereceğiz ki γ uzay eğrisi genel helistir. (3.4) denkleminde

$$T = \frac{1}{k_1} D_T N - \frac{k_2}{k_1} B \quad (7)$$

denklemini elde edilir. Türevi alınırsa;

$$D_T T = \frac{1}{k_1} D_T^2 N - \frac{k_1'}{k_1^2} D_T N - \left(\frac{k_2}{k_1}\right)' B - \left(\frac{k_2}{k_1}\right) D_T B \quad (8)$$

ifadesi elde edilir. (3.4), (3.8) ve hipotez kullanılarak ;

$$D_T T = -\frac{1}{k_2^2} \left(\frac{k_2}{k_1}\right)' D_T^2 B + \frac{k_2'}{k_2^3} \left(\frac{k_2}{k_1}\right)' D_T B - \left(\frac{k_1}{k_2}\right) D_T B - \left(\frac{k_2}{k_1}\right)' B$$

elde edilir ki böylece

$$\left(\frac{k_2}{k_1}\right)' B = 0$$

elde edilir. Bu ifade de $\frac{k_2}{k_1} = \text{sabit}$ olduğunu gösterir.

Şimdi bu bölümde E^3 de γ uzay eğrisinin dairesel helis olması için karakterizasyonunu vereceğiz.

Sonuç 3.2.1

Bir noktadaki B vektör alanı ile E^3 de γ uzay eğrisinin dairesel helis olması için gerek ve yeter şart ;

$$D_T^2 N + (k_1^2 + k_2^2)N = 0$$

olmasıdır.

İspat

γ uzay eğrisi dairesel helis eğrisi olsun. Göstereceğiz ki dairesel helis eğrisi denklemi sağlar. Verilen denklemde $D_T^2 N = -k_1' T - (k_1^2 + k_2^2)N + k_2' B$ eşiti yazılırsa

$$\begin{aligned} -k_1' T - (k_1^2 + k_2^2)N + k_2' B + (k_1^2 + k_2^2)N &= 0 \\ -k_1' T + k_2' B &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. γ eğrisi dairesel helis olduğu için k_1 ve k_2 eğrilikleri sabittir ve türevleri sıfır olacaktır. Denklemde yerine yazılırsa sonuç sıfır elde edilir. Bunun tersine denklemi kabul edelim. Göstereceğiz ki γ uzay eğrisi dairesel helistir. Verilen denklemde $D_T^2 N = -k_1' T - (k_1^2 + k_2^2)N + k_2' B$ eşiti yazılırsa

$$\begin{aligned} -k_1' T - (k_1^2 + k_2^2)N + k_2' B + (k_1^2 + k_2^2)N &= 0 \\ -k_1' T + k_2' B &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Sonucun sıfır çıkması için $-k_1' = 0$ ve $k_2' = 0$ olmalı. Ancak sabit bir ifadenin türevi sıfır olacağından k_1 ve k_2 eğrilikleri sabittir. Sabit olması eğrinin dairesel helis olduğunu gösterir.

Sonuç 3.2.2

Bir noktadaki B binormal vektör alanı ile E^3 de γ uzay eğrisinin dairesel helis olması için gerek ve yeter şart ;

$$D_T^3 B + (k_1^2 - k_2^2) D_T B = 0$$

olmasıdır.

4. BİRİM KÜREDEKİ EĞRİLERİN ŞEKİLLERİ

4.1 Teğetler Göstergesi için Genel Helisler

3–boyutlu Öklid uzayında , E^3 de bir α eğrisi $s \in I$ yay parametresi ile verilsin. α eğrisinin birim teğet vektörü T olmak üzere , $\vec{PQ} = T$ alındığında , P noktası α eğrisini çizerken , Q noktasının birim küre yüzeyi üzerine çizdiği eğriye α eğrisinin birinci küresel göstergesi veya teğetler göstergesi adı verilir. (Hacısalıhoğlu 2000).

α eğrisinin teğetler göstergesi (T) olmak üzere (T) nin yay parametresi $\sigma = \int k_1 ds$ alınrsa ;

$$\begin{aligned}\alpha(\sigma) &= e_1(s) \\ \frac{d\alpha}{d\sigma} &= \frac{de_1}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma} \\ \frac{d\alpha}{d\sigma} &= k_1 N \cdot \frac{ds}{d\sigma}\end{aligned}$$

ifadesinin normu alınrsa ;

$$1 = k_1 \cdot \frac{ds}{d\sigma}$$

elde edilir. Bu ifade de

$$\begin{aligned}d\sigma &= k_1 \cdot ds \\ \sigma &= \int k_1 \cdot ds\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}\frac{dT}{d\sigma} &= \frac{dT}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma} \\ \frac{dT}{d\sigma} &= k_1 \cdot N \cdot \frac{1}{k_1}\end{aligned}$$

Buradanda

$$T'(\sigma) = N(\sigma) \tag{9}$$

ifadesi elde edilir.

$$\begin{aligned}\frac{dN}{d\sigma} &= \frac{dN}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma} \\ \frac{dN}{d\sigma} &= (-k_1 \cdot T + k_2 B) \cdot \frac{1}{k_2}\end{aligned}$$

elde edilir ki buradan

$$N'(\sigma) = -T(\sigma) + \frac{k_2}{k_1}B(\sigma) \quad (10)$$

ifadesi elde edilir.

$$\begin{aligned}\frac{dB}{d\sigma} &= \frac{dB}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma} \\ \frac{dB}{d\sigma} &= -k_2 N \cdot \frac{1}{k_1}\end{aligned}$$

elde edilir ki buradan

$$B'(\sigma) = -\frac{k_2}{k_1}N(\sigma) \quad (11)$$

ifadesi elde edilir. (4.1),(4.2) ve (4.3) denklemlerinden

$$\begin{bmatrix} T'(\sigma) \\ N'(\sigma) \\ B'(\sigma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & f(\sigma) \\ 0 & -f(\sigma) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T(\sigma) \\ N(\sigma) \\ B(\sigma) \end{bmatrix}$$

elde edilir. Burada $f(\sigma) = \frac{k_2}{k_1}(\sigma)$ dır.

$$(D_T T)(\sigma) = T'(\sigma) = N(\sigma)$$

ifadesinin türevi alınırsa

$$\begin{aligned}(D_T^2 T)(\sigma) &= D_T(N(\sigma)) = -T(\sigma) + f(\sigma)B(\sigma) \\ (D_T^2 T)(\sigma) &= -T(\sigma) + f(\sigma)B(\sigma)\end{aligned}$$

tekrar türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
(D_T^3 T)(\sigma) &= -(D_T T)(\sigma) + f'(\sigma)B(\sigma) + f(\sigma)D_T B(\sigma) \\
&= -N(\sigma) + f'(\sigma)B(\sigma) + f(\sigma)(-f'(\sigma)N(\sigma)) \\
&= -(1 + f^2(\sigma))N(\sigma) + f'(\sigma)B(\sigma)
\end{aligned}$$

$N(\sigma) = (D_T T)(\sigma)$ olduğundan , elde edilen denklemde yerine yazılırsa;

$$(D_T^3 T)(\sigma) + (1 + f^2(\sigma))D_T T = f'(\sigma)B(\sigma)$$

elde edilir. Şimdi de $B(\sigma)$ ifadesini hesaplamaya çalışalım.

$$\begin{aligned}
N'(\sigma) &= -T(\sigma) + f(\sigma)B(\sigma) \\
(D_T^2 T)(\sigma) + T(\sigma) &= f(\sigma)B(\sigma) \\
B(\sigma) &= \frac{1}{f(\sigma)} \cdot \{(D_T^2 T)(\sigma) + T(\sigma)\}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$(D_T^3 T)(\sigma) - \frac{f'(\sigma)}{f(\sigma)} \cdot (D_T^2 T)(\sigma) + (1 + f^2(\sigma))(D_T T)(\sigma) - \frac{f'(\sigma)}{f(\sigma)} T = 0$$

ifadesi yazılabilir. $\lambda_1 = -\frac{f'(\sigma)}{f(\sigma)}$; $\lambda_2 = (1 + f^2(\sigma))$ olmak üzere elde ettiğimiz denklemi ;

$$(D_T^3 T)(\sigma) + \lambda_1(D_T^2 T)(\sigma) + \lambda_2(D_T T)(\sigma) + \lambda_1 T = 0 \quad (12)$$

elde edilir. α eğrisi genel helis ise teğetler göstergesini (4.4) denklemi ile verebiliriz.

Ayrıca helis denkleminde $f(\sigma) = \frac{k_2(\sigma)}{k_1(\sigma)}$ olduğundan $f'(\sigma) = 0$ elde edilir. Böylece teğetler göstergesi için helis olma şartını

$$(D_T^3 T)(\sigma) + (1 + f^2(\sigma))(D_T T)(\sigma) = 0$$

şeklinde ifade edebiliriz.

4.2 Küresel Serret-Frenet Formülleri

Tanım 4.2.1: (Sabban çatısı)

$\gamma : I \rightarrow S^2$ birim kürede birim hızlı bir eğri olsun. σ ; γ 'nın uzunluk parametresi olarak tanımlansın. γ 'nın σ noktasındaki birim hızlı tanjant vektörü $t(\sigma) = \dot{\gamma}(\sigma)$ tanımlarsak $\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{d\sigma}$ dır. Böylece $s(\sigma) = \gamma(\sigma) \times t(\sigma)$ çatısını kurulum. Bu ortonormal çatı $\{\gamma(\sigma), t(\sigma), s(\sigma)\}$ dır. Bu çatıya ise γ 'nın Sabban çatısı denir. Böylece γ 'nın küresel Frenet-Serret formülüne sahibiz;

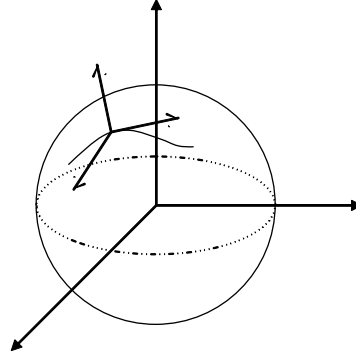
$$\begin{aligned}\dot{\gamma}(\sigma) &= t(\sigma) \\ \dot{t}(\sigma) &= -\gamma(\sigma) + k_g(\sigma)s(\sigma) \\ \dot{s}(\sigma) &= -k_g(\sigma)t(\sigma)\end{aligned}$$

Burada $k_g(\sigma)$, S^2 üzerindeki γ eğrisinin geodezik eğriliğidir. $k_g(\sigma) = \det(\gamma(\sigma), t(\sigma), \dot{t}(\sigma))$ ile verilir. Şimdi bir uzay eğrisi tanımlayalım;

$$\tilde{\gamma}(\sigma) = a \int_{\sigma_0}^{\sigma} \gamma(\zeta) d\zeta + a \cot \theta \int_{\sigma_0}^{\sigma} s(\zeta) d\zeta + c$$

Burada a, θ sabit sayılar ve c sabit bir vektördür. (Izumiya ve Takeuchi 2002).

$$\begin{aligned}c : I &\rightarrow S^2, \quad \sigma \text{ yay parametresi, } (\|c'(\sigma)\|) \\ \sigma &\rightarrow c(\sigma)\end{aligned}$$



Şekil 4.1 Sabban Çatısı

$$\begin{aligned} c'(\sigma) &= -t(\sigma) \\ s(\sigma) &= c(\sigma) \times t(\sigma) \\ \{c(\sigma), t(\sigma), s(\sigma)\} &\text{ Sabban çatısı} \end{aligned}$$

Teorem 4.2.1

$\gamma : I \rightarrow S^2$ birim kürede birim hızlı bir eğri olsun. γ nın küresel Frenet-Serret formülleri;

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma(\sigma)}{d\sigma} &= t(\sigma) \\ \frac{dt(\sigma)}{d\sigma} &= -\gamma(\sigma) + k_g(\sigma)\rho(\sigma) \\ \frac{d\rho(\sigma)}{d\sigma} &= -k_g(\sigma)t(\sigma) \end{aligned}$$

dir.

İspat

$\gamma'(\sigma) \in Sp\{\gamma(\sigma), t(\sigma), \rho(\sigma)\}$ dir. Buna göre ;

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma(\sigma)}{d\sigma} &= a_1\gamma(\sigma) + a_2t(\sigma) + a_3(\sigma)\rho(\sigma) \quad ; \quad a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \\ \left\langle \frac{d\gamma(\sigma)}{d\sigma}, \gamma(\sigma) \right\rangle &= a_1\langle \gamma(\sigma), \gamma(\sigma) \rangle + a_2\langle t(\sigma), \gamma(\sigma) \rangle + a_3\langle \rho(\sigma), \gamma(\sigma) \rangle \\ \langle \gamma(\sigma), \gamma(\sigma) \rangle &= 1\end{aligned}\tag{13}$$

dır. $\langle \gamma(\sigma), \gamma(\sigma) \rangle = 1$ ifadesinin türevi alınırsa;

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{d\gamma(\sigma)}{d\sigma}, \gamma(\sigma) \right\rangle + \left\langle \gamma(\sigma), \frac{d\gamma(\sigma)}{d\sigma} \right\rangle &= 0 \\ 2\left\langle \frac{d\gamma(\sigma)}{d\sigma}, \gamma(\sigma) \right\rangle &= 0 \\ \langle t(\sigma), \gamma(\sigma) \rangle &= 0\end{aligned}\tag{14}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{d\gamma(\sigma)}{d\sigma}, \gamma(\sigma) \right\rangle = 0 \text{ ifadesinde } \frac{d\gamma(\sigma)}{d\sigma} &= t(\sigma) \text{ olduğundan} \\ \langle t(\sigma), \gamma(\sigma) \rangle &= 0\end{aligned}\tag{15}$$

dır.

$$\begin{aligned}\langle \rho(\sigma), \gamma(\sigma) \rangle &= \langle \gamma(\sigma) \wedge t(\sigma), \gamma(\sigma) \rangle \\ \langle \rho(\sigma), \gamma(\sigma) \rangle &= \det(\gamma(\sigma), t(\sigma), \gamma(\sigma)) \\ \langle \rho(\sigma), \gamma(\sigma) \rangle &= 0\end{aligned}\tag{16}$$

ifadeleri elde edilir. (4.5), (4.6), (4.7) ve (4.8) ifadelerini yerine yazılırsa $a_1 = 0$ ifadesi elde edilir.

$$\left\langle \frac{d\gamma(\sigma)}{d\sigma}, t(\sigma) \right\rangle = a_1\langle \gamma(\sigma), t(\sigma) \rangle + a_2\langle t(\sigma), t(\sigma) \rangle + a_3\langle \rho(\sigma), t(\sigma) \rangle$$

$$\langle t(\sigma), t(\sigma) \rangle = 1 \quad (17)$$

$t(\sigma) = \frac{d\gamma(\sigma)}{d\sigma}$ olduğundan (4.9) denkleminde yerine yazılırsa

$$\langle \frac{d\gamma(\sigma)}{d\sigma}, t(\sigma) \rangle = 1 \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \langle \rho(\sigma), t(\sigma) \rangle &= \langle \gamma(\sigma) \wedge t(\sigma), t(\sigma) \rangle \\ \langle \rho(\sigma), t(\sigma) \rangle &= \det(\gamma(\sigma), t(\sigma), t(\sigma)) \end{aligned}$$

$$\langle \rho(\sigma), t(\sigma) \rangle = 0 \quad (19)$$

ifadeleri elde edilir.(4.7),(4.9),(4.10) ve (4.11) ifadeleri yerine yazılırsa $a_2 = 1$ elde edilir.

$$\langle \frac{d\gamma(\sigma)}{d\sigma}, \rho(\sigma) \rangle = a_1 \langle \gamma(\sigma), \rho(\sigma) \rangle + a_2 \langle t(\sigma), \rho(\sigma) \rangle + a_3 \langle \rho(\sigma), \rho(\sigma) \rangle$$

$t(\sigma) = \frac{d\gamma(\sigma)}{d\sigma}$ olduğundan (4.10) denkleminde yerine yazılırsa

$$\langle \rho(\sigma), \frac{d\gamma(\sigma)}{d\sigma} \rangle = 0 \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \langle \gamma(\sigma), \rho(\sigma) \rangle &= \langle \gamma(\sigma), \gamma(\sigma) \wedge t(\sigma) \rangle \\ \langle \gamma(\sigma), \rho(\sigma) \rangle &= \det(\gamma(\sigma), \gamma(\sigma), t(\sigma)) \end{aligned}$$

$$\langle \gamma(\sigma), \rho(\sigma) \rangle = 0 \quad (21)$$

$$\langle \rho(\sigma), \rho(\sigma) \rangle = 1 \quad (22)$$

ifadeleri elde edilir.(4.11),(4.12),(4.13),(4.14) ifadeleri yerine yazılırsa $a_3 = 0$ elde edilir.Böylece

$$\frac{d\gamma(\sigma)}{d\sigma} = t(\sigma)$$

ifadesi elde edilir.

$\gamma'(\sigma) \in Sp\{\gamma(\sigma), t(\sigma), \rho(\sigma)\}$ dır. Buna göre

$$\begin{aligned}\frac{dt(\sigma)}{d\sigma} &= a_1\gamma(\sigma) + a_2t(\sigma) + a_3(\sigma)\rho(\sigma) \quad ; \quad a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \\ \langle \frac{dt(\sigma)}{d\sigma}, \gamma(\sigma) \rangle &= a_1\langle \gamma(\sigma), \gamma(\sigma) \rangle + a_2\langle t(\sigma), \gamma(\sigma) \rangle + a_3\langle \rho(\sigma), \gamma(\sigma) \rangle\end{aligned}$$

(4.7) denkleminin türevi alınır

$$\langle \frac{dt(\sigma)}{d\sigma}, \gamma(\sigma) \rangle + \langle t(\sigma), \frac{d\gamma(\sigma)}{d\sigma} \rangle = 0$$

$$\langle \frac{dt(\sigma)}{d\sigma}, \gamma(\sigma) \rangle = -1 \quad (23)$$

$$\langle \gamma(\sigma), \gamma(\sigma) \rangle = 1 \quad (24)$$

ifadeleri elde edilir (4.7), (4.13), (4.15), ve (4.16) ifadeleri yerine yazılırsa $a_1 = -1$ elde edilir.

$$\langle \frac{dt(\sigma)}{d\sigma}, t(\sigma) \rangle = a_1\langle \gamma(\sigma), t(\sigma) \rangle + a_2\langle t(\sigma), t(\sigma) \rangle + a_3\langle \rho(\sigma), t(\sigma) \rangle$$

(4.9) denkleminin türevi alınır

$$\begin{aligned}\langle \frac{dt(\sigma)}{d\sigma}, t(\sigma) \rangle + \langle t(\sigma), \frac{dt(\sigma)}{d\sigma} \rangle &= 0 \\ 2 \cdot \langle \frac{dt(\sigma)}{d\sigma}, t(\sigma) \rangle &= 0\end{aligned}$$

$$\langle \frac{dt(\sigma)}{d\sigma}, t(\sigma) \rangle = 0 \quad (25)$$

ifadesi elde edilir. (4.7), (4.9), (4.11) ve (4.17) ifadeleri yerine yazılırsa $a_2 = 0$ elde edilir.

$$\begin{aligned}\langle \frac{dt(\sigma)}{d\sigma}, \rho(\sigma) \rangle &= a_1\langle \gamma(\sigma), \rho(\sigma) \rangle + a_2\langle t(\sigma), \rho(\sigma) \rangle + a_3\langle \rho(\sigma), \rho(\sigma) \rangle \\ \langle \frac{dt(\sigma)}{d\sigma}, \rho(\sigma) \rangle &= \langle \frac{dt(\sigma)}{d\sigma}, \gamma(\sigma) \wedge t(\sigma) \rangle \\ \langle \frac{dt(\sigma)}{d\sigma}, \rho(\sigma) \rangle &= \det(\gamma(\sigma), t(\sigma), \frac{dt(\sigma)}{d\sigma})\end{aligned}$$

$$\left\langle \frac{dt(\sigma)}{d\sigma}, \rho(\sigma) \right\rangle = k_g \quad (26)$$

ifadeleri elde edilir. (4.11),(4.13),(4.14) ve (4.18) ifadeleri yerine yazılırsa $a_3 = k_g$ elde edilir. Böylece

$$\frac{dt(\sigma)}{d\sigma} = -\gamma(\sigma) + k_g(\sigma)\rho(\sigma)$$

ifadesi elde edilir.

$\frac{d\rho(\sigma)}{d\sigma} \in Sp\{\gamma(\sigma), t(\sigma), \rho(\sigma)\}$ dır. Buna göre

$$\begin{aligned} \frac{d\rho(\sigma)}{d\sigma} &= a_1\gamma(\sigma) + a_2t(\sigma) + a_3(\sigma)\rho(\sigma) \quad ; \quad a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \\ \left\langle \frac{d\rho(\sigma)}{d\sigma}, \gamma(\sigma) \right\rangle &= a_1\langle\gamma(\sigma), \gamma(\sigma)\rangle + a_2\langle t(\sigma), \gamma(\sigma)\rangle + a_3\langle\rho(\sigma), \gamma(\sigma)\rangle \end{aligned}$$

(4.8) denkleminin türevi alınır

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d\rho(\sigma)}{d\sigma}, \gamma(\sigma) \right\rangle + \left\langle \rho(\sigma), \frac{d\gamma(\sigma)}{d\sigma} \right\rangle &= 0 \\ \left\langle \frac{d\rho(\sigma)}{d\sigma}, \gamma(\sigma) \right\rangle &= -\left\langle \rho(\sigma), \frac{d\gamma(\sigma)}{d\sigma} \right\rangle \\ \left\langle \frac{d\rho(\sigma)}{d\sigma}, \gamma(\sigma) \right\rangle &= -\left\langle \rho(\sigma), t(\sigma) \right\rangle \\ \left\langle \frac{d\rho(\sigma)}{d\sigma}, \gamma(\sigma) \right\rangle &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

ifadesi elde edilir. (4.5),(4.7),(4.8) ve (4.19) ifadeleri yerine yazılırsa $a_1 = 0$ elde edilir.

$$\left\langle \frac{d\rho(\sigma)}{d\sigma}, t(\sigma) \right\rangle = a_1\langle\gamma(\sigma), t(\sigma)\rangle + a_2\langle t(\sigma), t(\sigma)\rangle + a_3\langle\rho(\sigma), t(\sigma)\rangle$$

(4.11) denkleminin türevi alınır

$$\begin{aligned}
\langle \rho(\sigma), t(\sigma) \rangle &= 0 \\
\langle \frac{d\rho(\sigma)}{d\sigma}, t(\sigma) \rangle + \langle \rho(\sigma), \frac{dt}{d\sigma} \rangle &= 0 \\
\langle \frac{d\rho(\sigma)}{d\sigma}, t(\sigma) \rangle &= -\langle \rho(\sigma), \frac{dt(\sigma)}{d\sigma} \rangle \\
\langle \frac{d\rho(\sigma)}{d\sigma}, t(\sigma) \rangle &= -\langle \rho(\sigma), -\gamma(\sigma) + k_g \rho(\sigma) \rangle \\
\langle \frac{d\rho(\sigma)}{d\sigma}, t(\sigma) \rangle &= \langle \rho(\sigma), \gamma(\sigma) \rangle - k_g \langle \rho(\sigma), \rho(\sigma) \rangle \\
\langle \frac{d\rho(\sigma)}{d\sigma}, t(\sigma) \rangle &= -k_g
\end{aligned} \tag{28}$$

ifadesi elde edilir.(4.7),(4.9),(4.11) ve (4.20) ifadeleri yerine yazılırsa $a_2 = -k_g$ elde edilir.

$$\langle \frac{d\rho(\sigma)}{d\sigma}, \rho(\sigma) \rangle = a_1 \langle \gamma(\sigma), \rho(\sigma) \rangle + a_2 \langle t(\sigma), \rho(\sigma) \rangle + a_3 \langle \rho(\sigma), \rho(\sigma) \rangle$$

(4.14) denkleminin türevi alınır

$$\begin{aligned}
\langle \frac{d\rho(\sigma)}{d\sigma}, \rho(\sigma) \rangle + \langle \rho(\sigma), \frac{d\rho(\sigma)}{d\sigma} \rangle &= 0 \\
2 \cdot \langle \frac{d\rho(\sigma)}{d\sigma}, \rho(\sigma) \rangle &= 0 \\
\langle \frac{d\rho(\sigma)}{d\sigma}, \rho(\sigma) \rangle &= 0
\end{aligned} \tag{29}$$

ifadesi elde edilir.(4.8),(4.11),(4.14) ve (4.21) ifadeleri yerine yazılırsa $a_3 = 0$ elde edilir.Böylece

$$\frac{d\rho(\sigma)}{d\sigma} = -k_g(\sigma)t(\sigma)$$

ifadesi elde edilmiştir. Sabban çatısının elde edilen formüllerini matris formunda

$$\begin{bmatrix} \frac{d\gamma(\sigma)}{d\sigma} \\ \frac{dt(\sigma)}{d\sigma} \\ \frac{d\rho(\sigma)}{d\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & k_g \\ 0 & -k_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma(\sigma) \\ t(\sigma) \\ \rho(\sigma) \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir.

C^1 sınıfında $k : I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. a nın sabit vektör b nin bir reel sayı olduğu yerde, $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uzay eğrisini;

$$c(\sigma) = b \int e^{\int k(\sigma) d\sigma} \gamma(\sigma) d\sigma + a \quad (30)$$

şeklinde tanımlarız. σ ; c nin uzunluk yay parametresi olan bir küresel eğridir. Çünkü

$$\frac{dc}{d\sigma} : \left\| \frac{dc}{d\sigma} \right\| = \gamma(\sigma)$$

dir. Böylece $\mathbb{R}^3$ deki tüm Frenet eğrilerini bu yol ile tanımlayabiliriz.

Önerme 4.2.1

(4.22) denklemi ile tanımlanan c eğrisi $\tilde{k}_1(\sigma) = k(\sigma)$ şekil eğriligi ve $\tilde{k}_2(\sigma) = k_g(\sigma)$ torsiyonu ile bir Frenet eğrisidir. Tüm Frenet eğrileri bu yol ile tanımlanabilecektir.

İspat

(4.22) eşitliği ile tanımlanan c eğrisi bir Frenet eğrisi midir? Bunu göstermek için c eğrisinin eğrilik ve torsiyonunun hesaplanabildiğini gösterelim.

$$\begin{aligned} \frac{dc}{d\sigma} &= b e^{\int k(\sigma) d\sigma} \cdot \gamma(\sigma) \\ \frac{d^2c}{d\sigma^2} &= b e^{\int k(\sigma) d\sigma} \cdot \left\{ k(\sigma) \gamma(\sigma) + \frac{d\gamma}{d\sigma} \right\} \\ \frac{d^3c}{d\sigma^3} &= b e^{\int k(\sigma) d\sigma} \cdot \left\{ (k^2(\sigma) + \frac{dk}{d\sigma}) \gamma(\sigma) + 2k(\sigma) \frac{d\gamma}{d\sigma} + \frac{d^2\gamma}{d\sigma^2} \right\} \end{aligned}$$

ifadelerini biliyoruz.

$\|\gamma(\sigma)\| = 1$ ve $\|\frac{d\gamma}{d\sigma}\| = 1$ olduğu için $\langle \gamma(\sigma), \frac{d\gamma}{d\sigma} \rangle = 0$ dır. Her $\sigma \in I$ için $\gamma(\sigma) \times \frac{d\gamma}{d\sigma} \neq 0$ elde edilir. Böylece

$$\frac{dc}{d\sigma} \times \frac{d^2c}{d\sigma^2} = b^2 e^{2 \int k(\sigma) d\sigma} \cdot (\gamma(\sigma) \times \frac{d\gamma}{d\sigma}) \neq 0$$

elde edilir. Bu ifadenin anlamı c nin bir Frenet eğrisi olduğudur.

$$\begin{aligned} \tilde{k}_1(\sigma) &= \frac{\langle \frac{d^2c}{d\sigma^2}, \frac{dc}{d\sigma} \rangle}{\langle \frac{dc}{d\sigma}, \frac{dc}{d\sigma} \rangle} \\ \tilde{k}_2(\sigma) &= \det\left(\frac{dc}{d\sigma}, \frac{d^2c}{d\sigma^2}, \frac{d^3c}{d\sigma^3}\right) \cdot \left[\frac{\left(\frac{dc}{d\sigma}\right)^2}{\left(\frac{dc}{d\sigma}\right)^2 \cdot \left(\frac{d^2c}{d\sigma^2}\right)^2 - \langle \frac{dc}{d\sigma}, \frac{d^2c}{d\sigma^2} \rangle^2} \right]^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

denklemleri ile

$$\begin{aligned} \tilde{k}_1(\sigma) &= k(\sigma) \\ \tilde{k}_2(\sigma) &= \det\left(\gamma(\sigma), \frac{d\gamma}{d\sigma}, \frac{d^2\gamma}{d\sigma^2}\right) = k_g(\sigma) \end{aligned}$$

bulunur. $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ regüler bir eğri; küresel uzunluk parametresi olan σ ile parametrelendirilsin. c eğrisinin $k_1(\sigma)$ ve $k_2(\sigma)$ sini tanımlarsak ;

$$\tilde{k}_1(\sigma) = -\frac{dk_1(\sigma)}{k_1 d\sigma} \quad , \quad \tilde{k}_2(\sigma) = \frac{\tilde{k}_1(\sigma)}{\tilde{k}_2(\sigma)}$$

ile ifade edilir. $\gamma : I \rightarrow S^2$ eğrisi

$$\gamma(\sigma) = e_1 = \frac{\frac{dc}{d\sigma}}{\left\| \frac{dc}{d\sigma} \right\|} = k_1(\sigma) \cdot \frac{dc}{d\sigma}$$

ile ifade edilir. Bu kısımdan sonra silindirik helislerin düzlem eğrilerinden ve uzay eğrilerinin küresel eğrilerden inşa edilmesi üzerinde durulacaktır. Ayrıca eğrilerin tümü bu tip bir yol ile inşa edilebilir. Ayrıca bir silindirik helisin düzlemsel evolutü ve bir Bertrand eğrisinin küresel Darboux gösteriminden bahsedilip Bertrand eğrileri

ve silindirik helisler ile ilgili örnekler şekilleri ile verilecektir.

$$\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \dot{\tilde{\gamma}}(t) \neq 0 \ni \tilde{\gamma}'(t) = \frac{d\tilde{\gamma}}{dt}$$

eğrisini ele alalım. $s, \tilde{\gamma}$ nin yay parametresi olsun. Yani; $s, \|\tilde{\gamma}'(s)\| = 1$ ile ifade edilen bir parametredir. $(\tilde{\gamma}'(s) = \frac{d\tilde{\gamma}}{ds}).s$ uzay eğrilerinin yay parametresi olarak ifade edilecektir.

$\tilde{\gamma}$ nin Frenet-Serret vektörleri: $\{T(s), N(s), B(s)\}$

$\tilde{\gamma}$ nin eğriligi ve torsiyonu sırasıyla $k(s)$ ve $\tau(s)$

olmak üzere aşağıdaki Serret-Frenet formülleri elde edilir.

$$T'(s) = k(s)N(s)$$

$$N'(s) = -k(s).T(s) + \tau(s).B(s)$$

$$B'(s) = -\tau(s).N(s)$$

$\tilde{\gamma}$ nin Darboux vektörü $D(s) = \tau(s)T(s) + k(s)B(s)$ olmak üzere Darboux vektörünün normu alınır

$$d(s) = \frac{D(s)}{\|D(s)\|}$$

$d(s)$ e, $\tilde{\gamma}$ nin küresel Darboux gösterimi adı verilir. Bir uzay eğrisi olan $\tilde{\gamma}$ nin genel bir t parametresi için eğrilik ve torsiyonu

$$k(t) = \frac{\|\dot{\tilde{\gamma}}(t) \times \ddot{\tilde{\gamma}}(t)\|}{(\dot{\tilde{\gamma}}(t) \cdot \ddot{\tilde{\gamma}}(t))^{\frac{3}{2}}}, \quad \tau(t) = \frac{\det(\dot{\tilde{\gamma}}(t), \ddot{\tilde{\gamma}}(t), \ddot{\tilde{\gamma}}(t))}{\|\dot{\tilde{\gamma}}(t) \cdot \ddot{\tilde{\gamma}}(t)\|^2}$$

ile hesaplanır. (Hacısalıhoğlu 1993)

Düzlemsel bir eğriden bir silindirik helisin inşa edilebileceğini ve bir silindirik helis verildiğinde bu helisten düzlemsel eğrinin elde edilebileceğini göstereceğiz.

γ eğrisinin uzunluk parametresi σ ve $k_g(\sigma) = \det(\gamma(\sigma), t(\sigma), \frac{dt(\sigma)}{d\sigma}) = \tilde{k}_2(\sigma)$ ifadesi γ

nın geodezik eğriliğidir. Eğer $k(\sigma) = \tilde{k}_1(\sigma)$ olursa;

$$\begin{aligned}
\int e^{\int k(\sigma) d\sigma} \cdot \gamma(\sigma) d\sigma &= \int e^{\int \tilde{k}_1(\sigma) d\sigma} \cdot e_1(\sigma) d\sigma \\
&= \int e^{-\int \frac{dk_1}{k_1} d\sigma} \cdot e_1(\sigma) d\sigma \\
&= \int e^{-\int \frac{dk_1}{k_1}} \cdot e_1(\sigma) d\sigma \\
&= e^{b_0} \int \frac{1}{k_1} e_1(\sigma) d\sigma \\
&= e^{b_0} \int \frac{dc}{d\sigma} d\sigma \\
&= e^{b_0} \cdot c(\sigma) + c_0
\end{aligned}$$

elde edilir. (c_0 sabit bir vektör, b_0 reel sayı) Böylece

$$c(\sigma) = b \int e^{\int k(\sigma) d\sigma} \gamma(\sigma) d\sigma + a \quad (31)$$

elde edilir. Böylece tüm silindirik helisler için bu ifadeyi kullanabiliriz.

Teorem 4.2.2

Yukarıdaki koşullar altında $\tilde{\gamma}$ bir silindirik helistir. Ayrıca bütün silindirik helisler yukarıdaki metot ile inşa edilebilir.

İspat

İlk iddianın ispatı için, $\gamma(t)$ nin birim hızlı ve düzlemsel bir eğri olduğunu varsayalım. Bu durumda $\tilde{\gamma}$ eğrisinin bir silindirik helis olduğunu göstereceğiz. Bunu göstermek için $\tilde{\gamma}$ nin sırasıyla eğrilik ve torsiyonunu hesaplayalım. (4.23) denkleminin türevi

alınırsa;

$$\begin{aligned}\frac{dc}{d\sigma} &= be^{\int k(\sigma)d\sigma} \cdot \gamma(\sigma) \\ \frac{d^2c}{d\sigma^2} &= be^{\int k(\sigma)d\sigma} \cdot \left\{ k(\sigma)\gamma(\sigma) + \frac{d\gamma}{d\sigma} \right\} \\ \frac{d^3c}{d\sigma^3} &= be^{\int k(\sigma)d\sigma} \cdot \left\{ (k^2(\sigma) + \frac{dk}{d\sigma})\gamma(\sigma) + 2k(\sigma)\frac{d\gamma}{d\sigma} + \frac{d^2\gamma}{d\sigma^2} \right\}\end{aligned}$$

elde edilir. γ düzlemsel bir eğri olduğundan $\frac{d^2\gamma}{d\sigma^2} = 0$ dır. Bu durumda Genel bir parametre için torsiyon ve eğrilik formülünden $k(t)$ ile $\tau(t)$ elde edilirse $(\frac{\tau}{k})(t) = sbt$ elde edilir. Ohalde $\tilde{\gamma}$ bir silindirik helistir.

İkinci iddia için $\tilde{\gamma}(s)$ birim hızlı bir silindirik helis olsun. Bu durumda $d(s)$ küresel Darboux gösterimi sabittir. $d(s)$ nin sabit olması türevinin sıfıra eşit olması demektir. Öyleyse;

$$d(s) = \frac{D(s)}{\|D(s)\|} = \frac{B(s) + (\frac{\tau}{k})(s)T(s)}{\sqrt{1 + (\frac{\tau}{k})^2(s)}}$$

olduğundan her iki tarafın türevi alınırsa

$$d'(s) = \frac{B'(s) + (\frac{\tau}{k})(s)T'(s)}{\sqrt{1 + (\frac{\tau}{k})^2(s)}} = \frac{-\tau(s)N(s) + (\frac{\tau}{k})(s)k(s)N(s)}{\sqrt{1 + (\frac{\tau}{k})^2(s)}} = 0$$

elde edilir. O halde $d(s)$ sabittir. $a = d(s)$ olarak ifade edelim.

$$\begin{aligned}a &= d(s) = \frac{D(s)}{\|D(s)\|}, \quad a.a = d(s).d(s) = \frac{1}{\|D(s)\|} \|D(s)\| = 1 \\ a.a &= 1\end{aligned}$$

olur. $\gamma'(s).a = 0$ olduğundan $\gamma(s)$ bir düzlemsel eğridir.

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}'(s).a &= \|\tilde{\gamma}'(s)\| \|a\| \cos \theta \\ &= \cos \theta = sbt\end{aligned}$$

olur.

Sonuç 4.2.1

γ küresel eğrisi çemberdir gerek ve yeter şart karşılık gelen (4.23) denklemi ile tanımlanan uzay eğrileri silindirik helistir.

İspat

γ bir çemberdir $\iff k_g(\sigma) = \tilde{k}_2(\sigma) = \frac{k_2(\sigma)}{k_1(\sigma)}$ sabittir. O halde γ küresel eğrisi bir silindirik helistir. γ küresel eğrisi ve ona karşılık gelen uzay eğrisi

$$c(\sigma) = b \int e^{\int k(\sigma) d\sigma} \gamma(\sigma) d\sigma + a$$

şeklinde tanımlanır. Bir γ küresel eğrisinin eğrilik merkezinin geometrik yeri, γ nın küresel evolütü denir ve

$$\varepsilon_\gamma(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{k_g(\sigma)^2 + 1}} \cdot (k_g(\sigma)\gamma(\sigma) + \rho(\sigma))$$

ile verilir. $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi küresel uzunluk parametresi olan σ ile parametrelendirilsin. c Frenet çatısının vektörleri (e_1, e_2, e_3) ise c nin Darboux vektörü

$$D(\sigma) = k_2(\sigma)e_1 + k_1(\sigma)e_3$$

ile gösterilir. Darboux vektörünün normunu alınırsa;

$$D^\circ(\sigma) = \frac{D(\sigma)}{\|D(\sigma)\|} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{k}_2^2 + 1}} (\tilde{k}_2 e_1 + e_3)$$

elde edilir. Bu ifadeye küresel Darboux şekli denir.

Teorem 4.2.3

$\gamma : I \rightarrow S^2$ küresel eğri, $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ * denklemine karşılık gelen uzay eğrisi olsun. Bu durumda c eğrisinin küresel Darboux gösterimi, γ nın küresel evolütüne eşittir.

İspat

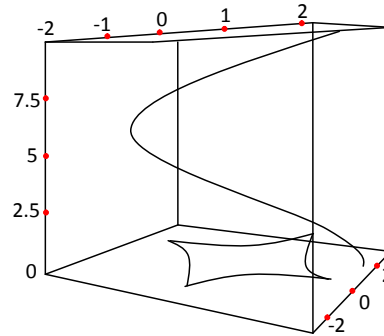
$$\begin{aligned} e_1(\sigma) &= \gamma(\sigma) \\ e_2(\sigma) &= \frac{d\gamma(\sigma)}{d\sigma} = t(\sigma) \\ e_3(\sigma) &= \gamma(\sigma) \times t(\sigma) = \rho(\sigma) \end{aligned}$$

idi. γ nın evolüt denklemi ile Darboux vektörünün normlandırılmış denklemi kullanılırsa;

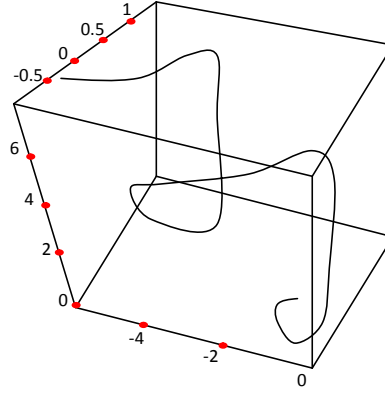
$$D^\circ(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{k_g^2 + 1}}(k_g \cdot \gamma(\sigma) + \rho(\sigma)) = \varepsilon_\gamma(\sigma)$$

elde edilir.

Yukarıdaki teoremlerde verilen metodlar kullanılarak Bertrand eğrileri ve silindirik helislerin örnekleri veriliyor. Ayrıca bir Bertrand eğrisinin küresel Darboux gösteriminin ve bir silindirik helisin düzlemsel evolütünün resimleri çiziliyor. (Şekil 4.2 ve Şekil 4.3)



**Şekil 4.2 Bertrand eğrisinin
Küresel Darboux Gösterimi**



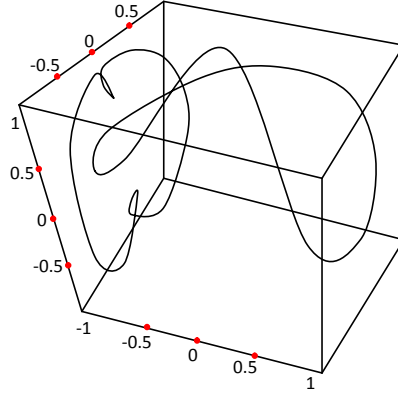
**Şekil 4.3 Silindir Helisin
Düzlemsel Evolütü**

Örnek 4.2.1

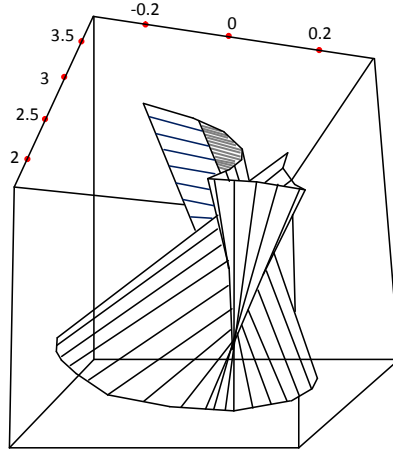
$\gamma(\theta) = (\sin \theta, \sin \theta \cos \theta, \cos^2 \theta)$ küresel eğrisini düşünelim. Önerme 4.2.1 deki metodun kullanımı ile aşağıdaki Bertrand eğrisine sahip oluyoruz. ($a = 1, \cot \theta = 1$)

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(\theta) = & \left(-\cos \theta + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{2} F\left(\theta, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(-4E\left(\theta, \frac{1}{2}\right) + 3F\left(\theta, \frac{1}{2}\right) \right) \right), \right. \\ & -2 \arctan \left(\frac{\sqrt{2} \sin \theta}{\sqrt{3 + \cos(2\theta)}} \right) - \frac{1}{4} \cos(2\theta) + \frac{\sqrt{3 + \cos(2\theta)} \sin \theta}{2\sqrt{2}}, \\ & \left. \frac{\theta}{2} - \frac{\cos \theta \sqrt{3 + \cos(2\theta)}}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{2} \log \left(\sqrt{2} \cos \theta + \sqrt{3 + \cos(2\theta)} \right) + \frac{1}{4} \sin(2\theta) \right) \end{aligned}$$

Burada $F(\tau, m) = \int_0^\tau \frac{d\theta}{1 - m \sin^2 \theta}$ dır. Eğrinin resimleri (Şekil 4.3) de veriliyor. Ayrıca, γ nın küresel Darboux gösteriminin resimleri (Şekil 4.4) de veriliyor. (Şekil 4.5), γ nın Darboux açılabilirinin bir parçasıdır.



Şekil 4.4 γ nın Küresel Darboux Gösterimi



Şekil 4.5 γ nın Darboux Açılabilirinin Parçası

Örnek 4.2.2

$\gamma(t)$ düzlem eğrisi $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), 0)$ ve $a = (0, 0, 1)$ olsun. O halde, sabit bir c sayısı için karşılık gelen silindirik helis;

$$\tilde{\gamma}(t) = (x_1(t), x_2(t), c \int \sqrt{\dot{x}_1(t)^2 + \dot{x}_2(t)^2} dt)$$

dir. Şimdi bir $\gamma(\theta) = (2 \cos \theta, \sin \theta, 0)$ düzlem eğrisini ele alalım. Bu durumda, $\tilde{\gamma}(\theta) = (2 \cos \theta, \sin \theta, E(\theta, -3))$ silindirik helisi elde edilir. Burada $E(\tau, m) = \int_0^\tau \sqrt{1 - m \sin^2 \theta} d\theta$ dır. Ayrıca $\tilde{\gamma}$ nın düzlemsel evolutü

$$E_\gamma(\theta) = \left(\left(\frac{3}{2}\right) \cos \theta (1 - 3 \sin^2 \theta), -3 \sin \theta, 0\right)$$

dır. Bu eğri (Şekil 4.2)de veriliyor.

Varlık Teoremi

C^1 sınıfından $f_i : I \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2$ iki fonksiyon alalım. $\mathbb{R}^3$ Öklid uzayında c_0 noktasında e_1^0, e_2^0, e_3^0 ortonormal üç vektörünü alalım. Aşağıdaki özellikleri sağlayan c_0 merkezinde uzaklığı koruyan homoteti ile bir tek $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ Frenet eğrisi vardır.

1) $c(\sigma_0) = c_0$ ve c_0 noktasında c nin Frenet çatısı $\{e_1^0, e_2^0, e_3^0\}$ olacak şekilde $\sigma_0 \in I$ vardır.

2) Her $\sigma \in I$ için, $\tilde{k}_1(\sigma) = f_1(\sigma)$ ve $\tilde{k}_2(\sigma) = f_2(\sigma)$ dir.

İspat

$\gamma(\sigma), t(\sigma)$ ve $\rho(\sigma)$ vektörleri ile diferensiyel denklemleri ;

$$\frac{d\gamma}{d\sigma} = t(\sigma) \quad , \quad \frac{dt}{d\sigma} = -\gamma(\sigma) + f_2(\sigma)\rho(\sigma) \quad , \quad \frac{d\rho}{d\sigma} = -f_2(\sigma)t(\sigma)$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Bu vektörel fonksiyonları matris formunda yazılırsa;

$$M(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & f_2(\sigma) \\ 0 & -f_2(\sigma) & 0 \end{pmatrix}$$

ifadesi elde edilir ki bunu $\frac{dX}{d\sigma}(\sigma) = M(\sigma)X(\sigma)$ şeklinde yazılabilir. Elde edilen bu denklemin bir tek çözümü vardır.

$X^t(\sigma)$ ifadesi ile $X(\sigma)$ matrisinin transpozunu ve E ile de birim matrisi gösterecek olursak;

$$\frac{d}{d\sigma}(X^t(\sigma)) = X^t(\sigma)M^t(\sigma)$$

elde edilir. Böylece;

$$\frac{d}{d\sigma}(X^t(\sigma)X(\sigma)) = X^t(\sigma)(M^t(\sigma) + M(\sigma))X(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. ($M(\sigma)$ ters simetrik matris) e_1^0, e_2^0, e_3^0 ortonormal olduğundan $X^t(\sigma)X(\sigma) = E$ dir. (Her $\sigma \in I$ için) Böylece $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uzay eğrisini

$$c(\sigma) = c_0 + b \int_{\sigma_0}^{\sigma} e^{\int_{\sigma_0}^{\sigma} f_1(\sigma) d\sigma} \gamma(\sigma) d\sigma \quad , \quad \sigma \in I, b > 0$$

şeklinde yazılabilir.

c eğrisinin Frenet çatısı $\{e_1 = \gamma(\sigma), e_2 = t(\sigma), e_3 = \rho(\sigma)\}$ ve $c_0 = c(\sigma_0)$ da Frenet çatısı $\{e_1^0 = \gamma(\sigma_0), e_2^0 = t(\sigma_0), e_3^0 = \rho(\sigma_0)\}$ dir. c eğrisinin eğriligi ve torsiyonu f_1 ve f_2 dir.

Örnek 4.2.3

α sıfırdan farklı reel bir sabit. $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ $(0, a)$ şekli ile bir uzay eğrisi olsun. c dairesel helistir. $\forall \sigma \in I$ için $\mu(\sigma) = 0$ dır.

Başlangıç koşullarını seçelim.

$$\begin{aligned} e_1^0 &= (0, -\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}, \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}) \\ e_2^0 &= (1, 0, 0) \\ e_3^0 &= (0, \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}) \end{aligned}$$

$\gamma(0) = e_1^0$ ile

$$\gamma = \gamma(\sigma) = (\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \cdot \sin(\sqrt{1+a^2} \cdot \sigma), -\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \cdot \cos(\sqrt{1+a^2} \cdot \sigma), \frac{a}{\sqrt{1+a^2}})$$

eğrisi Sabban çatısının formülleri ile bir küresel eğri tanımlar. c eğrisinin denklemi çözüldür ise

$$c(\sigma) = (-\frac{1}{1+a^2} \cdot \cos q, -\frac{1}{1+a^2} \cdot \sin q, \frac{a}{1+a^2} \cdot q)$$

elde edilir. ($q = \sigma\sqrt{1+a^2}, \sigma \in I$) (Şekil 4.6)

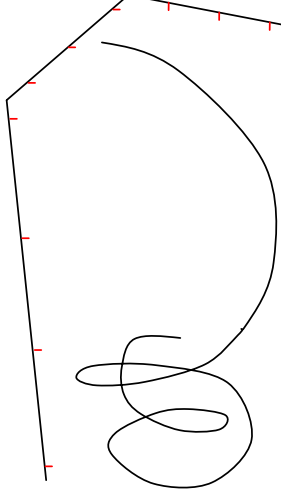
Örnek 4.2.4

$a \neq 0, b \neq 0$ reel sabit sayılar olmak üzere (b, a) şekli ile $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir uzay eğrisi olsun. $c, \mathbb{R}^3$ de bir konik spiraldir. $\forall \sigma \in I$ için $\mu(\sigma) = \int_0^\sigma b d\sigma = b\sigma$ eğrisini ele alalım. Örnek 4.2.3 de olduğu gibi aynı başlangıç koşullarını seçelim. Yarıçapı $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ olan bir dairenin aynı küresel eğrisi $\gamma = \gamma(\sigma)$ alalım. Eğrinin denklemi çözüldüğünde

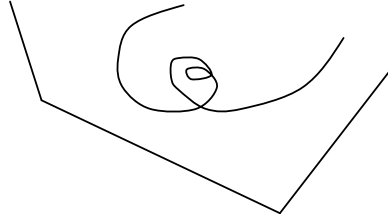
$$c(\sigma) = (\frac{e^{mq} \sin(q-n)}{(1+a^2)\sqrt{1+m^2}}, -\frac{e^{mq} \cos(q-n)}{(1+a^2)\sqrt{1+m^2}}, \frac{a \cdot e^{mq}}{m \cdot (1+a^2)})$$

elde edilir. ($m = \frac{b}{\sqrt{1+a^2}}, n = \arccos(\frac{b}{\sqrt{1+a^2+b^2}})$) (Şekil 4.7)

Örnek 4.2.3 ve 4.2.4 bir sabit şekil ile sadece uzay eğrilerinin dairesel helis ve spiral konik olduğunu gösterir.



Şekil 4.6 Dairesel Helis



Şekil 4.7 Konik Spiral

KAYNAKLAR

Ali, A. 2010. Position vectors of slant helices in Euclidean 3-space.

Berger, M. 1998. Geometry I. Springer New York.

Conway, J.H. and Smith, D.A. 2003. On Quaternions and Octonions, A.K.Peters

Ekmekci, N. and Ilarslan,K. 2000. On Characterization of General Helices in

Lorentzian Space. Ankara University, Ankara

Ekmekci, N. 1991. Lorentz Manifoldlar Üzerinde Eğilim Çizgileri Doktora Tezi.

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Encheva,R. and Georgiev,G. 2003. Shapes of Space Curves. Shumen University

Gray,A. 1939. Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with

Mathematica. CRC Press LLC.

Hacısalıhoğlu, H.H. 1983. Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi.

Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları Mat.No:2

Hacısalıhoğlu, H.H. 1980.Yüksek Diferansiyel Geometriye Giriş.

Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları.

Hacısalıhoğlu,H.H.1993.Diferansiyel Geometri.Fen Fakültesi,Beşevler-Ankara.

Hacısalihoğlu, H.H. 2000. Diferansiyel Geometri. Fen Fakültesi, Beşevler-Ankara.

Izumiya, S., Takeuchi, N. 2002. Generic properties of helices and Bertrand curves.

J. Geometry.

Karger, A., Novak, J. 1985. Space Kinematics and Lie Groups. Gordon and

Breach Science Publishers.

Kuipers, J.B. 1998. Quaternions and rotation sequences. Princeton University Press

, Princeton/New Jersey

Kühnel, W. 2002. Differential Geometry: Curves-Surfaces-Manifolds

Sabuncuoğlu, A. 2004. Diferansiyel Geometri. Nobel Basımevi, Ankara

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Sabiha DODURGALI

Doğum Yeri : Boyabat/SİNOP

Doğum Tarihi : 01.01.1983

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

EĞİTİM DURUMU

Lise : Şehit Ersoy Gürsu Anadolu Lisesi (2000)

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi
Matematik Bölümü (2004)

Tezsiz Yüksek Lisans : Selçuk Üniversitesi (2006)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi (2011)