

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FOURIER-BESSEL (HANKEL) DÖNÜŞÜMÜNE KARŞILIK GELEN
BAZI FONKSİYON UZAYLARI

Fatih DERİNGÖZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2011

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

FOURIER-BESSEL (HANKEL) DÖNÜŞÜMÜNE KARŞILIK GELEN BAZI FONKSİYON UZAYLARI

Fatih DERİNGÖZ

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ

Bu çalışmada, Hankel dönüşümü yardımı ile tanımlanan geliştirilmiş öteleme operatörü ve konvolüsyon operatörünün temel özellikleri incelenmiş ve daha sonra Hankel dönüşümüne karşılık gelen Besov ve Lizorkin-Triebel uzayları tanıtılmıştır.

Tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, temel tanım, teorem ve lemmalar verilmiştir. Üçüncü bölümde, klasik Besov ve Lizorkin-Triebel uzayları tanımlanarak temel özellikleri verilmiştir. Dördüncü bölümde, Hankel dönüşümüne karşılık gelen Besov ve Lizorkin-Triebel uzayları tanıtılmış ve Hankel dönüşümüne karşılık gelen Besov uzaylarının genel karakterizasyonunu veren teorem ispatlanmıştır.

Haziran 2011, 54 sayfa

Anahtar Kelimeler: Fourier-Bessel (Hankel) dönüşümü, Besov uzayları, Lizorkin-Triebel uzayları, geliştirilmiş öteleme operatörü, konvolüsyon operatörü.

ABSTRACT

Master Thesis

SOME FUNCTION SPACES ASSOCIATED WITH THE FOURIER-BESSEL (HANKEL) TRANSFORM

Fatih DERİNGÖZ

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ

In this study, the fundamental properties of generalized shift and convolution operator which are defined for the help of Hankel transform are investigated and then Besov and Lizorkin-Triebel spaces associated with the Hankel transform are introduced.

This thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, basic definitions, theorems and lemmas are given. In the third chapter, classic Besov and Lizorkin-Triebel spaces are introduced and their fundamental properties are given. In the fourth chapter, Besov and Lizorkin-Triebel spaces associated with the Hankel transform are introduced and the theorem giving the general characterization of Besov spaces associated with the Hankel transform is proved.

June 2011, 54 pages

Key Words: Fourier-Bessel (Hankel) transforms, Besov spaces, Lizorkin-Triebel spaces, generalized shift operator, convolution operator.

TEŞEKKÜR

Çalıőmamn her aőamasında gürüő ve önerileriyle beni yönlendiren ve bana her konuda yardımcı ve destek olan sayın hocam Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ'ye (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü), engin fikirleriyle gelişmeme katkıda bulunan sayın Prof. Dr. Vagif GULİYEV'e, çalıőmalarım sırasında destek ve anlayıőını esirgemeyen sevgili aileme en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Fatih DERİNGÖZ

Ankara, Haziran 2011

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
SİMGELER DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1 Genel Bilgiler.....	3
2.2 Hankel Dönüşümü, Hankel Ötelemesi, Hankel Konvolüsyonu ve Özellikleri.....	11
3. IR^n DE BESOV VE LIZORKIN-TRIEBEL UZAYLARI	23
4. HANKEL DÖNÜŞÜMÜNE KARŞILIK GELEN BESOV VE LIZORKIN-TRIEBEL UZAYLARI.....	36
KAYNAKLAR	52
ÖZGEÇMİŞ.....	54

SİMGELER DİZİNİ

\mathbb{R}^n	n -boyutlu Öklid uzayı
$B(x, r)$	x merkezli r yarıçaplı yuvar
$S(\mathbb{R}^n)$	Schwartz uzayı
$S_e(\mathbb{R})$	Çift Schwartz fonksiyonlar uzayı
F	Fourier dönüşümü
F^{-1}	Ters Fourier dönüşümü
$B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$	Besov uzayı
$F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$	Lizorkin-Triebel uzayı
$L_p(X, d\nu)$	Lebesgue uzayı
h_μ	Fourier-Bessel (Hankel) dönüşümü
Δ_μ	Bessel diferensiyel operatörü
τ_x	Hankel öteleme operatörü
$f \# g$	f ve g fonksiyonlarının Hankel konvolüsyonu
$B_{p,q,\mu}^s$	Besov tipi uzay
$F_{p,q,\mu}^s$	Lizorkin-Triebel tipi uzay
$BH_{p,q}^{\alpha,\mu}$	Besov-Hankel uzayı
Mf	Maksimal fonksiyon
$\gamma_\mu(A)$	$\int_A x^{2\mu+1} dx$
$\mathcal{M}_\mu f$	γ_μ ölçüsüne karşılık gelen maksimal fonksiyon
$\phi_a^* f$	Peetre maksimal fonksiyonu
$\phi_{a,\mu}^* f$	Hankel dönüşümüne karşılık gelen Peetre maksimal fonksiyonu

1. GİRİŞ

Harmonik analizde, fonksiyon uzayları teorisi önemli yer tutar. Fonksiyon uzayları teorisinin analizin diğer alanlarında, özellikle kısmi türevli denklemler teorisinde önemli uygulamaları vardır.

$0 < s < 1$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$ için klasik Besov uzayları \mathbb{R}^n de

$$B_{p,q}^s = \left\{ f : f \in L_p(\mathbb{R}^n), \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{\|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^s} \right]^q \frac{dh}{|h|^n} \right)^{1/q} < \infty \right\}$$

ile; $0 < s < 1$, $1 < p < \infty$, $q = \infty$ durumu için ise

$$B_{p,\infty}^s = \left\{ f : f \in L_p(\mathbb{R}^n), \sup_{0 \neq h \in \mathbb{R}^n} |h|^{-s} \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\}$$

olarak tanımlanır. Eğer $f(x+h) - f(x)$ farkı daha yüksek farklarla veya türevlerin farklarıyla yer değiştirilirse s nin bütün pozitif değerlerine karşılık gelen tanım elde edilir.

1967 yılında Peetre tarafından Besov uzaylarının Fourier analizi yardımıyla da tanımlanabileceği bulunmuştur. Bu tanım şu şekildedir:

$S(\mathbb{R}^n)$ Schwartz uzayı, $S'(\mathbb{R}^n)$ tempered dağılımların dual uzayı olmak üzere ve F , F^{-1} sırasıyla $S'(\mathbb{R}^n)$ de Fourier dönüşümü ve tersini göstermek üzere $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^{\infty} \subset S(\mathbb{R}^n)$,

(a) $\text{supp } \varphi_0 \subset \{y : |y| \leq 2\}$; $\text{supp } \varphi_j \subset \{y : 2^{j-1} \leq |y| \leq 2^{j+1}\}$, $j = 1, 2, \dots$

(b) Her multi-indeks γ için bir c_γ pozitif sabiti var olsun öyle ki her $x \in \mathbb{R}^n$ ve her $j = 0, 1, 2, \dots$ için $|D^\gamma \varphi_j(x)| \leq c_\gamma 2^{-j|\gamma|}$

(c) Her $x \in \mathbb{R}^n$ için $\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(x) = 1$,

koşullarını sağlayan bir dizi olsun. Bu durumda

$$B_{p,q}^s = \left\{ f : f \in S'(\mathbb{R}^n), \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left[2^{js} \|F^{-1}[\varphi_j F f]\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \right]^q \right)^{1/q} < \infty \right\}$$

ile verilir. Bu tanım $0 < p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$, $-\infty < s < \infty$ olacak şekildeki bütün p, q, s ler için anlamlıdır.

Günümüzde Lizorkin-Triebel uzayı olarak adlandırılan ve

$$F_{p,q}^s = \left\{ f : f \in S'(\mathbb{R}^n), \left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq} |F^{-1}\varphi_j F f(\cdot)|^q \right)^{1/q} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanan $F_{p,q}^s$ fonksiyon uzayı Lizorkin (1972,1974) ve Triebel (1973) tarafından araştırılmıştır. Burada $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^{\infty} \subset S(\mathbb{R}^n)$ yukarıdaki (a), (b), (c) koşullarını sağlayan bir fonksiyon dizisidir. Bu tanım $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$, $-\infty < s < \infty$ olacak şekildeki bütün p, q, s ler için anlamlıdır.

Besov uzayı $B_{p,q}^s$ ve Lizorkin-Triebel uzayı $F_{p,q}^s$ birçok iyi bilinen herbirinin kendine ait ayrı ayrı tanımları olan uzayları özel halleri olarak içerirler. Bu uzaylara örnek olarak Besov-Lipschitz, Hölder, Zygmund, Sobolev, Lebesgue, Bessel potansiyel, Hardy, BMO uzayları verilebilir. Bu durumun avantajı, görünüşte oldukça çeşitlendirilmiş bu uzaylara ortak bir bakış açısı sağlamasıdır. Dezavantajı ise ilk bakışta $B_{p,q}^s$ ve $F_{p,q}^s$ uzaylarının tanımının biraz karmaşık olmasıdır.

Hankel dönüşümüne karşılık gelen Sobolev uzayları Pathak ve Pandey (1997), Besov uzayları Altenburg (1982, 1984), Assal ve Abdallah (2006), Betancor ve Rodriguez-Mesa (1998, 2006) ve Cruz-Baez ve Rodriguez (2001) tarafından geliştirilmiştir.

Bu tezin amacı Hankel dönüşümü yardımı ile tanımlanan genelleştirilmiş öteleme operatörü ve konvolüsyon operatörünün temel özelliklerini incelemek ve daha sonra Hankel dönüşümüne karşılık gelen fonksiyon uzaylarını tanımlamak, ayrıca bu uzaylarda gömme teoremlerini araştırmaktır. Böylece harmonik analizde çok önem taşıyan Hankel dönüşümüne karşılık gelen fonksiyon uzayları hakkında daha ileri seviyede araştırmalar yapılabilmesi için temel oluşturulmuş olacaktır.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde daha sonraki bölümlerde gerekli olan temel tanım, teorem ve lemmalara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde n-boyutlu \mathbb{R}^n Öklid uzayında Besov ve Lizorkin-Triebel uzaylarının tanımları ve temel özellikleri verilerek bu uzayların genel karakterizasyonunu veren önemli bir teorem ispatlanmıştır. Dördüncü bölümde Hankel dönüşümüne karşılık gelen Besov ve Lizorkin-Triebel uzayları tanımlanmış ve bu uzaylar için bir gömme teoremi verilmiş ardından üçüncü bölümde verilen n-boyutlu \mathbb{R}^n Öklid uzayında Besov uzayını karakterize eden teorem Hankel dönüşümüne karşılık gelen Besov uzayları için uyarlanarak ispat edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Genel Bilgiler

Bu bölümde çalışmamızda bize yardımcı olacak temel tanımlar ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1.1 X bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R} \quad x \rightarrow \|x\|$$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in K$ için

$$(N_1) \quad \|x\| \geq 0 \quad \text{ve} \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$(N_2) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

$$(N_3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

özelliklerini sağlıyorsa bu dönüşüme X üzerinde bir norm adı verilir. $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine bir normlu vektör uzayı denir. $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayı kısaca X ile gösterilir.

Tanım 2.1.2 (N_3) eşitsizliğinde $\|x + y\| \leq C(\|x\| + \|y\|)$, $C > 1$ olması durumunda bu dönüşüme quasi-norm adı verilir.

Tanım 2.1.3 Bir T lineer operatörü aşağıdaki özellikleri gerçekleyen operatördür:

(i) T nin $D(T)$ tanım bölgesi bir vektör uzayı olup $R(T)$ değer bölgesi, aynı cisim üzerinde bir vektör uzayıdır.

(ii) Her $x, y \in D(T)$ ve α skaleri için,

$$T(x + y) = Tx + Ty$$

$$T(\alpha x) = \alpha Tx$$

gerçeklenir.

Tanım 2.1.4 X ve Y normlu uzaylar ve $D(T) \subset X$ olmak üzere, $T : D(T) \rightarrow Y$ lineer operatör olsun. Eğer her $x \in D(T)$ için, $\|Tx\| \leq A\|x\|$ olacak şekilde bir A reel sayısı varsa, T operatörüne sınırlıdır denir. Bir T operatörünün normu

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq \theta}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.1.5 X ve Y normlu uzaylar ve $D(T) \subset X$ olmak üzere $T : D(T) \rightarrow Y$ bir operatör ve $x_0 \in D(T)$ olsun. Eğer verilen her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık, $\|x - x_0\| < \delta$ şartını sağlayan her $x \in D(T)$ için $\|Tx - Tx_0\| < \epsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa T ye x_0 noktasında süreklidir denir.

Tanım 2.1.6 X ve Y normlu uzaylar ve $D(T) \subset X$ olmak üzere $T : D(T) \rightarrow Y$ lineer operatör olsun. Bu durumda T nin sürekli olması için gerek ve yeter şart T nin sınırlı olmasıdır (Kreyszig 1989).

Tanım 2.1.7 X bir küme olsun. Eğer X in altkümelerinin bir Σ sınıfı için aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa bu durumda Σ sınıfına X kümesi üzerinde bir cebirdir denir:

- (i) $X \in \Sigma$
- (ii) Her $E \in \Sigma$ için $E^c = X \setminus E \in \Sigma$
- (iii) $k = 1, 2, \dots, n$ için $E_k \in \Sigma$ ise $\bigcup_{k=1}^n E_k \in \Sigma$

Eğer (iii) şartı yerine

$$\text{”her } n \in \mathbb{N} \text{ için } E_n \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \Sigma \text{”}$$

şartı konulursa Σ cebirine bir σ - cebir adı verilir.

Tanım 2.1.8 Bir \mathcal{K} sınıfını kapsayan σ -cebirlerinin en küçüğüne \mathcal{K} nin ürettiği σ -ceberi denir. \mathbb{R}^n deki bütün açık (a, b) aralıklarının doğurduğu σ -cebirine Borel cebiri denir ve $B(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. $n = 1$ olması halinde $B(\mathbb{R}^1)$ Borel cebiri $B(\mathbb{R})$ ile gösterilir. $B(\mathbb{R})$ nin her bir elamanına Borel kümesi denir.

Tanım 2.1.9 X bir küme ve Σ , X üzerinde bir σ -ceberi olsun. Bu durumda (X, Σ) ikilisine bir ölçülebilir uzay, Σ daki her bir kümeye de Σ - ölçülebilir küme veya kısaca ölçülebilir küme adı verilir.

Tanım 2.1.10 (X, Σ) bir ölçülebilir uzay olsun. Σ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ fonksiyonu

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$
- (ii) Her $A \in \Sigma$ için $\mu(A) \geq 0$

(iii) Her ayrık (A_n) dizisi için

$$\mu \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

şartlarını sağlarsa bu μ fonksiyonuna ölçü fonksiyonu veya ölçü adı verilir.

Tanım 2.1.11 Bir X kümesi, X in altkümelerinin bir Σ σ -cebiri ve Σ üzerinde tanımlı bir μ ölçüsünden oluşan (X, Σ, μ) üçlüsüne bir ölçü uzayı denir.

Tanım 2.1.12 (X, Σ) bir ölçülebilir uzay ve $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$f^{-1}((\alpha, +\infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \Sigma$$

oluyorsa f ye ölçülebilir fonksiyon denir. X üzerindeki ölçülebilir fonksiyonların ailesi $\mathcal{M}(X, \Sigma)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.13 X bir küme ve $P(X)$, X in kuvvet kümesi olsun. $P(X)$ üzerinde tanımlı , genişletilmiş reel değerli bir μ^* fonksiyonu

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$

(ii) Her $E \in P(X)$ için $\mu^*(E) \geq 0$

(iii) $A \subset B \subset X$ için $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

(iv) Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \in P(X)$ ise $\mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$

şartlarını sağlarsa μ^* fonksiyonuna X üzerinde bir dış ölçüdür denir.

Tanım 2.1.14 (I_k) , \mathbb{R} nin sınırlı ve açık aralıklarının bir dizisi,

$$\tau_A = \left\{ (I_k) : A \subset \bigcup_k I_k \right\}$$

olsun. $P(\mathbb{R})$ üzerinde

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) : (I_k) \in \tau_A \right\}$$

biçiminde Tanımlanan m^* bir dış ölçüdür. Bu dış ölçüye Lebesgue dış ölçüsü denir. Lebesgue dış ölçüsü \mathbb{R} nin her bir alt aralığına onun uzunluğunu karşılık getirir.

n -boyutlu \mathbb{R}^n uzayında Lebesgue dış ölçüsünü tanımlamak için

$$I = \{x : a_i \leq x_i \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n\}$$

n -boyutlu kapalı aralıklarını göz önüne alalım. Bu aralıkların hacimleri

$$v(I) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

biçimindedir. Keyfi bir $E \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin Lebesgue dış ölçüsü

$$m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} v(I_k) : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, I_k \text{ bir aralık} \right\}$$

ile tanımlanır. $\forall A \subset \mathbb{R}^n$ için Eğer

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap (\mathbb{R}^n - E))$$

ise E kümesine Lebesgue ölçülebilirdir denir.

Tanım 2.1.15 $\mathcal{M}(\mathbb{R}, m^*)$, m^* dış ölçüsüne göre ölçülebilen \mathbb{R} nin alt kümelerinin sınıfı olsun. m^* Lebesgue dış ölçüsünün $\mathcal{M}(\mathbb{R}, m^*)$ sınıfına da $B(\mathbb{R})$ sınıfına da olan kısıtlanmasına Lebesgue ölçüsü denir, m ile gösterilir.

Tanım 2.1.16 (X, Σ, μ) bir ölçü uzayı olsun. Eğer bir önerme, ölçüsü sıfır olan bir küme dışında doğru ise, o önerme hemen hemen her yerde doğrudur denir.

Tanım 2.1.17 (X, Σ, μ) bir ölçü uzayı olsun. $0 < p < \infty$ olmak üzere

$$L_p(X, d\mu) = \left\{ f \in \mathcal{M}(X, \Sigma) : \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

kümesine p -inci kuvvetten integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı denir. L_p uzayında bir f fonksiyonunun normu

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty \\ \text{ess sup}_{x \in X} |f(x)|, & p = \infty \end{cases}$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.1.18 f ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere her kompakt K kümesi üzerinde

$$\int_K |f| d\mu < \infty$$

ise f fonksiyonuna lokal integrallenebilirdir denir.

Tanım 2.1.19 $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $f \in L_p$, $g \in L_q$ olsun. Bu durumda $fg \in L_1$ ve

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

sağlanır. Bu eşitsizliğe Hölder eşitsizliği denir.

Tanım 2.1.20 $p \geq 1$ için Eğer $f, g \in L_p$ ise $(f + g) \in L_p$ ve

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

dir. Bu eşitsizliğe Minkowski eşitsizliği denir.

Tanım 2.1.21 (X, \mathcal{X}, μ) ve (X, \mathcal{Y}, ν) iki ölçü uzayı, $1 \leq p, q \leq \infty$ ve T bir altlineer operatör olsun. Eğer herhangi $f \in L_p(X, d\mu)$ ve $\alpha > 0$ için

$$\nu \{x \in X : |Tf(x)| > \alpha\} \leq \left(\frac{A \|f\|_p}{\alpha} \right)^q$$

olacak biçimde A sabiti varsa T dönüşümüne zayıf (p, q) tipindedir denir.

Tanım 2.1.22 (X, \mathcal{X}, μ) ve (X, \mathcal{Y}, ν) iki ölçü uzayı, $1 \leq p, q \leq \infty$ ve T bir altlineer operatör olsun. Eğer herhangi $f \in L_p(X, d\mu)$ için

$$\|Tf\|_q \leq A \|f\|_p$$

olacak biçimde bir $A > 0$ sabiti varsa T operatörüne (p, q) tipindedir denir.

Teorem 2.1.1 (Marcinkiewicz İnterpolasyon Teoremi) (X, \mathcal{X}, μ) ve (X, \mathcal{Y}, ν) iki ölçü uzayı ve T altlineer operatörü $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$ için zayıf (p_0, p_0) ve zayıf (p_1, p_1) tipinden olsun. Bu durumda her p , $p_0 < p < p_1$ için T operatörü (p, p) tipli operatördür.

Teorem 2.1.2 (Lebesgue Yakınsaklık Teoremi) (X, Σ, μ) bir ölçü uzayı, $g : X \rightarrow [0, \infty]$ integrallenebilen bir fonksiyon ve $f, f_1, f_2 \dots$ de X üzerinde Σ -ölçülebilir reel

değerli fonksiyonlar olsun. Eğer h.h.x için

(i)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

(ii)

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ için } |f_n(x)| \leq g(x)$$

ise bu durumda f ve f_n integrallenebilir ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

dır.

Tanım 2.1.23 Bir f fonksiyonunun desteği $f(x) \neq 0$ şartını sağlayan x noktalarının kümesinin kapanışdır ve

$$\text{supp } f = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$$

olarak gösterilir .

Tanım 2.1.24 $\rho : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. ρ fonksiyonu

(i) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(ii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$

(iii) $L > 0$ öyle ki $\rho(x, z) \leq L(\rho(x, y) + \rho(y, z))$

özelliklerini sağlıyorsa ρ ya psedo metrik denir.

Tanım 2.1.25 $0 < p \leq \infty$ ve $0 < q \leq \infty$ olsun. $\{f_k\}_{k=0}^\infty, \mathbb{R}^n$ üzerinde Borel ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olmak üzere, $l_q(L_p) = l_q(L_p(\mathbb{R}^n))$ ve $L_p(l_q) = L_p(\mathbb{R}^n, l_q)$ uzayları sırasıyla

$$\|\{f_k\}_{k=0}^\infty\|_{l_q(L_p)} = \|\|f_k(\cdot)\|_p\|_{l_q} = \left(\sum_{k=0}^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_k(x)|^p dx \right)^{q/p} \right)^{1/q} < \infty$$

$$\|\{f_k\}\|_{L_p(l_q)} = \|\|f_k(\cdot)\|_{l_q}\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{k=0}^\infty |f_k(x)|^q \right)^{p/q} dx \right)^{1/p} < \infty$$

olacak şekilde bütün $\{f_k\}_{k=0}^\infty$ dizilerinin uzayıdır.

$l_q(L_p)$ ve $L_p(l_q)$ uzayları quasi-Banach ($p \geq 1$ ve $q \geq 1$ için Banach) uzaylarıdır (Triebel 1983).

Tanım 2.1.26 $S = S(\mathbb{R}^n)$ Schwartz uzayı, istenilen α ve β katlı indisleri için (yani $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ ve $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ise)

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)|$$

sonlu olacak şekildeki \mathbb{R}^n de her mertebeden sürekli türevlere sahip fonksiyonların sınıflarının cümlesidir. Burada

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

$$D^\beta = \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1^{\beta_1}} \frac{\partial^{\beta_2}}{\partial x_2^{\beta_2}} \dots \frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}}$$

eşitlikleri ile tanımlanmaktadır.

Tanım 2.1.27 $L_1(\mathbb{R}^n)$ uzayındaki bir f fonksiyonunun Fourier dönüşümü \widehat{f} ya da Ff ile gösterilir ve

$$(Ff)(x) = \widehat{f}(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x \cdot \xi)} f(\xi) d\xi$$

şeklinde tanımlanır. Burada $(x \cdot \xi) = x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n$ şeklinde tanımlıdır.

Teorem 2.1.3

- (i) Fourier dönüşümü S Schwartz uzayı üzerinde bir otomorfizmdir.
- (ii) $S \subset L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$
- (iii) S' , S Schwartz uzayının dual uzayını göstermek üzere, $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, ($1 \leq p \leq \infty$) fonksiyonu S' nin bir elamanını tanımlar öyle ki

$$L_f(\varphi) = \langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in S$$

dır (Duoandikoetxea 2001).

Uyarı 2.1.1 $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ise o zaman \widehat{f} mevcuttur ve

$$\widehat{f}(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x \cdot \xi)} f(\xi) d\xi$$

olarak tanımlanır, \widehat{f} fonksiyonu $L_1(\mathbb{R}^n)$ de olmayabilir.

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)} \widehat{f}(\xi) d\xi$$

integrali genellikle iraksaktır. Fakat $\varphi \in S$ olduğunda

$$(F^{-1}\widehat{\varphi})(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)} \widehat{\varphi}(\xi) d\xi$$

integrali her zaman yakınsaktır, çünkü $\widehat{\varphi} \in S$ dir. Genellikle

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)} g(\xi) d\xi$$

operatörüne ters Fourier dönüşümü denir ve F^{-1} ile gösterilir. Yani,

$$(F^{-1}g)(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)} g(\xi) d\xi$$

dir.

Tanım 2.1.28 Bir $f \in S'$ fonksiyoneli verilsin. Eğer

$$(\tau, \varphi) = (f, \widehat{\varphi}), \quad \forall \varphi \in S$$

sağlanacak biçimde bir $\tau \in S'$ fonksiyoneli varsa, o zaman bu fonksiyonele f in genelleştirilmiş anlamda Fourier dönüşümü denir ve $\tau = \widehat{f}$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.29 (Maksimal Fonksiyon) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ lokal integrallenebilir bir fonksiyon olsun. f nin maksimal fonksiyonu;

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

biçiminde tanımlanır. Burada

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\}$$

x merkezli r yarıçaplı açık yuvardır. Maksimal fonksiyon \mathbb{R}^n nin standart kümelerinde $n = 1$ için Hardy Littlewood tarafından tanımlanmış ve Wiener tarafından n -boyutlu \mathbb{R}^n Öklid uzayına genişletilmiştir.

Teorem 2.1.4 (Hardy-Littlewood-Wiener) \mathbb{R}^n üzerinde tanımlanan f fonksiyonu için

- (i) $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq \infty$ ise Mf maksimal fonksiyonu hemen her yerde sonludur.
- (ii) Eğer $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ise $\forall \alpha > 0$ için

$$m \{x : Mf(x) > \alpha\} \leq \frac{A}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx$$

sağlanır, burada A sadece boyuta bağlı bir sabittir ve m Lebesgue ölçüsüdür.

- (iii) $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq \infty$ ise $Mf \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ve

$$\|Mf\|_p \leq A_p \|f\|_p$$

eşitsizliği gerçekleşir (Stein 1970).

Teorem 2.1.5 (Fefferman-Stein) $1 < p < \infty$ ve $1 < q < \infty$ olsun. Bu durumda öyle bir C sabiti vardır ki her $\{f_n\}_{n=0}^{\infty} \in L_p(l_q)$ dizisi için

$$\|\{Mf_n\}\|_{L_p(l_q)} \leq C \|\{f_n\}\|_{L_p(l_q)}$$

eşitsizliği gerçekleşir (Triebel 1983).

Tanım 2.1.30 ($L_{p,\mu}$ Lebesgue Uzayı) $L_{p,\mu}$ ile göstereceğimiz $L_p((0, \infty), x^{2\mu+1} dx)$ Lebesgue uzayı, $1 \leq p \leq \infty$ ve $\mu > -1/2$ olmak üzere $(0, \infty)$ üzerinde tanımlı, kompleks değerli, ölçülebilir ve

$$\|f\|_{p,\mu} = \begin{cases} \left(\int_0^{\infty} |f(x)|^p x^{2\mu+1} dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty & , \quad 1 \leq p < \infty \\ \text{ess sup}_{0 < x < \infty} |f(x)| < \infty & , \quad p = \infty \end{cases}$$

normuna sahip fonksiyonların uzayı olarak tanımlanır.

2.2 Hankel Dönüşümü, Hankel Ötelemesi, Hankel Konvolüsyonu ve Özellikleri

Tanım 2.2.1 Bir $f \in L_{1,\mu}$ fonksiyonunun Hankel dönüşümü

$$h_{\mu}(f)(y) = \int_0^{\infty} j_{\mu}(xy) f(x) d\sigma_{\mu}(x), \quad y \in [0, \infty)$$

şeklinde tanımlanır. Burada j_μ ,

$$j_\mu(x) = \Gamma(\mu + 1) \left(\frac{x}{2}\right)^{-\mu} J_\mu(x) = \Gamma(\mu + 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{2n}}{n! \Gamma(n + \mu + 1)}, \quad x \in [0, \infty)$$

ile tanımlanan birinci çeşit ve mertebesi μ olan normalleştirilmiş Bessel fonksiyonu, J_μ birinci çeşit ve mertebesi μ olan Bessel fonksiyonu ve σ_μ , $d\sigma_\mu(x) = (2^\mu \Gamma(\mu + 1))^{-1} x^{2\mu+1} dx$ ile verilen ağırlıklı Lebesgue ölçüsüdür. Ayrıca j_μ , Δ_μ

$$\Delta_\mu = x^{-2\mu-1} D x^{2\mu+1} D, \quad \mu > -1/2, x > 0$$

biçiminde tanımlanan Bessel diferensiyel operatörü olmak üzere

$$\Delta_\mu u = -u, \quad u(0) = 1, u'(0) = 0$$

diferensiyel denkleminin çözümüdür.

Uyarı 2.2.1 Her $x \in [0, \infty)$ için $|j_\mu(x)| \leq 1$ (Hirschman 1960) olduğundan Hankel dönüşümü anlamlıdır.

Lemma 2.2.1 $f \in L_{1,\mu}$ olsun. Bu durumda $h_\mu(f)(x)$, $[0, \infty)$ üzerinde sınırlı ve süreklidir.

İspat.

$$|h_\mu(f)(x)| \leq \int_0^\infty |j_\mu(xt)| |f(t)| d\sigma_\mu(t) \leq C_\mu \|f\|_{1,\mu}, \quad C_\mu = (2^\mu \Gamma(\mu + 1))^{-1}$$

olduğundan

$$\sup_{0 \leq x < \infty} |h_\mu(f)(x)| \leq C_\mu \|f\|_{1,\mu}$$

elde edilir. Buradan $h_\mu(f)(x)$ fonksiyonunun $[0, \infty)$ üzerinde sınırlı olduğunu görülür. Şimdi $h_\mu(f)(x)$ fonksiyonunun $[0, \infty)$ üzerinde sürekli olduğunu gösterelim. Herhangi reel x ve h , $0 \leq x < \infty$ için

$$|h_\mu(f)(x+h) - h_\mu(f)(x)| \leq \int_0^\infty |j_\mu((x+h)t) - j_\mu(xt)| |f(t)| d\sigma_\mu(t)$$

eşitsizliği vardır. Ayrıca $|j_\mu((x+h)t) - j_\mu(xt)| \leq |f(t)|$ ve $\lim_{h \rightarrow 0} |j_\mu((x+h)t) - j_\mu(xt)| = 0$, $0 \leq t < \infty$ olduğundan Lebesgue yakınsaklık teoremi uygulanabilir ve istenen sonuç buradan elde edilir.

Sonuç 2.2.1 Hankel dönüşümü $L_{1,\mu}$ fonksiyon uzayından $L_{\infty,\mu}$ fonksiyon uzayına tanımlı lineer sınırlı bir dönüşümdür.

Uyarı 2.2.2 Hankel dönüşümü $1 \leq p \leq 2$, $\mu > -1/2$, $1/p + 1/p' = 1$ olmak üzere $L_{p,\mu}$ uzayından $L_{p',\mu}$ uzayına tanımlı lineer sınırlı bir dönüşüm olarak $L_{p,\mu}$ uzayına genişletilebilir (Herz 1954).

Hirschman (1961), Haimo (1965) ve Cholewinski (1965) Hankel dönüşümüne karşılık gelen bir konvolüsyon işlemi araştırmışlardır. Bu işlem Hankel konvolüsyonu olarak adlandırılır. Besov ve Lizorkin-Triebel tipi uzaylar hakkında çalışmalar yapılmasında Hankel konvolüsyonu önemli bir rol oynar.

Hankel konvolüsyonunu tanımlamak için Hankel ötelemesi olarak adlandırılan özel bir çeşit ötelemeye ihtiyaç vardır.

Tanım 2.2.2 Her $x \in [0, \infty)$ için $f \in L_{p,\mu}$, $1 \leq p \leq \infty$ fonksiyonunun Hankel ötelemesi $\tau_x f$,

$$\tau_x(f)(y) = \int_0^\infty D_\mu(x, y, z) f(z) d\sigma_\mu(z), \quad x, y \in (0, \infty)$$

ve $\tau_0(f) = f$ şeklinde tanımlanır. Burada

$$\begin{aligned} D_\mu(x, y, z) &= \int_0^\infty j_\mu(xt) j_\mu(yt) j_\mu(zt) d\sigma_\mu(t) \\ &= \frac{2^{3\mu-1} \Gamma(\mu+1)^2}{\sqrt{\pi} \Gamma(1/2 + \mu)} (xyz)^{-2\mu} A(x, y, z)^{2\mu-1}, \quad x, y, z \in (0, \infty) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı fonksiyondur. $A(x, y, z)$ kenarları x, y, z olan üçgenin alanını göstermektedir. Eğer böyle bir üçgen yoksa $A(x, y, z) = 0$ dır.

Özellik 2.2.1 $0 < x, y, z < \infty$ için $D_\mu(x, y, z)$ fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir (Hirschman 1960):

- (i) $D_\mu(x, y, z) \geq 0$
- (ii) $D_\mu(x, y, z) = D_\mu(y, x, z) = D_\mu(x, z, y) = \dots$
- (iii) $\int_0^\infty j_\mu(zt) D_\mu(x, y, z) d\sigma_\mu(z) = j_\mu(xt) j_\mu(yt), \quad 0 \leq t < \infty$
- (iv) $\int_0^\infty D_\mu(x, y, z) d\sigma_\mu(z) = 1$

Lemma 2.2.2 Eğer $f \in L_{p,\mu}$, $1 \leq p \leq \infty$ ise, o halde her $x \in [0, \infty)$ için $\tau_x f \in L_{p,\mu}$ olup

$$\|\tau_x f(\cdot)\|_{p,\mu} \leq \|f\|_{p,\mu}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Eşitsizliği önce $p = 1$ durumu için ispatlayalım.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |\tau_x f(y)| d\sigma_\mu(y) &= \int_0^\infty \left| \int_0^\infty D_\mu(x, y, u) f(u) d\sigma_\mu(u) \right| d\sigma_\mu(y) \\ &\leq \int_0^\infty d\sigma_\mu(y) \int_0^\infty D_\mu(x, y, u) |f(u)| d\sigma_\mu(u) \\ &= \int_0^\infty |f(u)| d\sigma_\mu(u) \int_0^\infty D_\mu(x, y, u) d\sigma_\mu(y) \end{aligned}$$

integrasyon sırasının değişimi Fubini teoreminden faydalanılarak yapılmıştır. Böylece Özellik 2.2.1 (iv) ten

$$\|\tau_x f(\cdot)\|_{1,\mu} \leq \|f\|_{1,\mu}$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi de $p = \infty$ için $\|\tau_x f(\cdot)\|_{\infty,\mu} \leq \|f\|_{\infty,\mu}$ olduğunu gösterelim. $\tau_x f(\cdot)$ operatörünün $L_{\infty,\mu}$ normu

$$\|\tau_x f(\cdot)\|_{\infty,\mu} = \operatorname{ess\,sup}_{y \in (0, \infty)} |\tau_x f(y)|$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned} |\tau_x f(y)| &= \left| \int_0^\infty D_\mu(x, y, z) f(z) d\sigma_\mu(z) \right| \\ &\leq \int_0^\infty D_\mu(x, y, z) |f(z)| d\sigma_\mu(z) \\ &\leq \int_0^\infty D_\mu(x, y, z) \|f\|_{\infty,\mu} d\sigma_\mu(z) \\ &= \|f\|_{\infty,\mu} \int_0^\infty D_\mu(x, y, z) d\sigma_\mu(z) \\ &= \|f\|_{\infty,\mu} \end{aligned}$$

$p = 1$ için

$$\|\tau_x f(\cdot)\|_{1,\mu} \leq \|f\|_{1,\mu}$$

ve $p = \infty$ için

$$\|\tau_x f(\cdot)\|_{\infty,\mu} \leq \|f\|_{\infty,\mu}$$

sağlandığından, Marcinkiewicz interpolasyon teoreminden $1 \leq p \leq \infty$ için

$$\|\tau_x f(\cdot)\|_{p,\mu} \leq \|f\|_{p,\mu}$$

elde edilir.

Tanım 2.2.3 $f, g \in L_{1,\mu}$ olmak üzere f ve g fonksiyonlarının Hankel konvolüsyonu

$$(f \# g)(x) = \int_0^\infty f(y) \tau_x g(y) d\sigma_\mu(y), \quad x \in (0, \infty)$$

şeklinde tanımlanır.

Lemma 2.2.3 $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L_{1,\mu}$, $g \in L_{p,\mu}$ ise

$$\|f \# g\|_{p,\mu} \leq C_\mu \|f\|_{1,\mu} \|g\|_{p,\mu}, \quad C_\mu = (2^\mu \Gamma(\mu + 1))^{-1}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

İspat. $p = 1$ için

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |f \# g(x)| d\gamma_\mu(x) &= \int_0^\infty d\gamma_\mu(x) \left| \int_0^\infty \tau_x(f)(t) g(t) d\sigma_\mu(t) \right| \\ &= \int_0^\infty d\gamma_\mu(x) \left| \int_0^\infty g(t) d\sigma_\mu(t) \int_0^\infty D_\mu(x, t, u) f(u) d\sigma_\mu(u) \right| \\ &\leq \int_0^\infty d\gamma_\mu(x) \int_0^\infty |g(t)| d\sigma_\mu(t) \int_0^\infty D_\mu(x, t, u) |f(u)| d\sigma_\mu(u) \\ &= \int_0^\infty |g(t)| d\sigma_\mu(t) \int_0^\infty |f(u)| d\sigma_\mu(u) \int_0^\infty D_\mu(x, t, u) d\gamma_\mu(x) \end{aligned}$$

Özellik 2.2.1 (iv) ten

$$\|f \# g\|_{1,\mu} \leq C_\mu \|f\|_{1,\mu} \|g\|_{1,\mu}$$

eşitsizliği sağlanır.

$p = \infty$ için Lemma 2.2.2 den

$$\begin{aligned} |f \# g(x)| &\leq \int_0^\infty |(\tau_x(f))(y)| |g(y)| d\sigma_\mu(y) \\ &\leq \|g\|_{\infty,\mu} \int_0^\infty |(\tau_x(f))(y)| d\sigma_\mu(y) \\ &= C_\mu \|g\|_{\infty,\mu} \|\tau_x f(\cdot)\|_{1,\mu} \\ &\leq C_\mu \|g\|_{\infty,\mu} \|f\|_{1,\mu} \end{aligned}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Buradan

$$\operatorname{ess\,sup}_{0 < x < \infty} |f \# g(x)| \leq \sup_{0 < x < \infty} |f \# g(x)| \leq C_\mu \|g\|_{\infty, \mu} \|f\|_{1, \mu}$$

olduğundan

$$\|f \# g\|_{\infty, \mu} \leq C_\mu \|f\|_{1, \mu} \|g\|_{\infty, \mu}$$

eşitsizliğinin gerçekleştiği görülür.

$1 < p < \infty$ için Hölder eşitsizliği uygulayarak

$$\begin{aligned} |f \# g(x)| &\leq \left(\int_0^\infty |(\tau_x(f)(y))^{1/p} g(y)|^p d\sigma_\mu(y) \right)^{1/p} \\ &\quad \times \left(\int_0^\infty |(\tau_x(f)(y))^{1/q}|^q d\sigma_\mu(y) \right)^{1/q} \\ &\leq \left(\int_0^\infty |\tau_x(f)(y)| |g(y)|^p d\sigma_\mu(y) \right)^{1/p} \left(\int_0^\infty |\tau_x(f)(y)| d\sigma_\mu(y) \right)^{1/q} \end{aligned}$$

elde edilir buradan her iki tarafın p . kuvveti alınır ve Lemma 2.2.2 kullanılırsa

$$\begin{aligned} |f \# g(x)|^p &\leq \left(\int_0^\infty |\tau_x(f)(y)| |g(y)|^p d\sigma_\mu(y) \right) \left(\int_0^\infty |\tau_x(f)(y)| d\sigma_\mu(y) \right)^{p/q} \\ &= \left(\int_0^\infty |\tau_x(f)(y)| |g(y)|^p d\sigma_\mu(y) \right) C_\mu^{p/q} \|\tau_x(f)(\cdot)\|_{1, \mu}^{p/q} \\ &\leq C_\mu^{p/q} \|f\|_{1, \mu}^{p/q} \int_0^\infty |\tau_x(f)(y)| |g(y)|^p d\sigma_\mu(y) \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi her iki tarafın integralini alalım.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |f \# g(x)|^p d\gamma_\mu(x) &\leq C_\mu^{p/q} \|f\|_{1, \mu}^{p/q} \int_0^\infty d\gamma_\mu(x) \int_0^\infty |\tau_x(f)(y)| |g(y)|^p d\sigma_\mu(y) \\ &= C_\mu^{p/q} \|f\|_{1, \mu}^{p/q} \int_0^\infty |g(y)|^p d\sigma_\mu(y) \int_0^\infty |\tau_x(f)(y)| d\gamma_\mu(x) \\ &= C_\mu^{p/q} \|f\|_{1, \mu}^{p/q} \|\tau_x(f)(\cdot)\|_{1, \mu} \int_0^\infty |g(y)|^p d\sigma_\mu(y) \\ &\leq C_\mu^{p/q} \|f\|_{1, \mu}^{p/q} \|f\|_{1, \mu} \int_0^\infty |g(y)|^p d\sigma_\mu(y) \end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned} \left(\int_0^\infty |f \# g(x)|^p d\gamma_\mu(x) \right)^{1/p} &\leq C_\mu^{1/q} \|f\|_{1,\mu}^{1/q} \|f\|_{1,\mu}^{1/p} \\ &\quad \times \left(\int_0^\infty |g(y)|^p d\sigma_\mu(y) \right)^{1/p} \\ &\leq C_\mu^{1/q} C_\mu^{1/p} \|f\|_{1,\mu}^{1/p+1/q} \|g\|_{p,\mu} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\|f \# g\|_{p,\mu} \leq C_\mu \|f\|_{1,\mu} \|g\|_{p,\mu}$$

eşitsizliğinin gerçekleştiği görülür.

Lemma 2.2.4 $1 \leq p, q, r \leq \infty$, $\frac{1}{q} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$ olsun. $f \in L_{p,\mu}$, $g \in L_{r,\mu}$ ise $f \# g \in L_{q,\mu}$ olup

$$\|f \# g\|_{q,\mu} \leq C_\mu \|g\|_{r,\mu} \|f\|_{p,\mu}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat.

$p, r < \infty$ olmak üzere indisler üzerindeki hipotez

$$\frac{1}{r'} + \frac{1}{q} + \frac{1}{p'} = 1, \quad \frac{p}{r'} + \frac{p}{q} = 1 \quad \frac{r}{p'} + \frac{r}{q} = 1$$

olmasını gerektirir.

r', q, p' kuvvetlerine göre Hölder eşitsizliği uygulanması ile

$$\begin{aligned} |f \# g(x)| &\leq \int_0^\infty |f(y)| |\tau_x(g)(y)| d\sigma_\mu(y) \\ &\leq \int_0^\infty |f(y)|^{\frac{p}{r'}} \left(|f(y)|^{\frac{p}{q}} |\tau_x(g)(y)|^{\frac{r}{q}} \right) |\tau_x(g)(y)|^{\frac{r}{p'}} d\sigma_\mu(y) \\ &\leq \left(\int_0^\infty |f(y)|^p d\sigma_\mu(y) \right)^{\frac{1}{r'}} \left(\int_0^\infty |f(y)|^p |\tau_x(g)(y)|^r d\sigma_\mu(y) \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\quad \times \left(\int_0^\infty |\tau_x(g)(y)|^r d\sigma_\mu(y) \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= C_\mu^{\frac{1}{r'}} \|f\|_{p,\mu}^{\frac{p}{r'}} \left(\int_0^\infty |f(y)|^p |\tau_x(g)(y)|^r d\sigma_\mu(y) \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\quad \times \left(\int_0^\infty |\tau_x(g)(y)|^r d\sigma_\mu(y) \right)^{\frac{1}{p'}} \end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 2.2.2 den

$$\begin{aligned} \left(\int_0^\infty |\tau_x(g)(y)|^r d\sigma_\mu(y) \right)^{\frac{1}{p'}} &= C_\mu^{\frac{1}{p'}} \|\tau_x(g)(\cdot)\|_{r,\mu}^{\frac{r}{p'}} \\ &\leq C_\mu^{\frac{1}{p'}} \|g\|_{r,\mu}^{\frac{r}{p'}} \end{aligned}$$

olduğundan

$$|f\#g(x)| \leq C_\mu^{\frac{1}{r'}} C_\mu^{\frac{1}{p'}} \|f\|_{p,\mu}^{\frac{p}{r'}} \|g\|_{r,\mu}^{\frac{r}{p'}} \left(\int_0^\infty |f(y)|^p |\tau_x(g)(y)|^r d\sigma_\mu(y) \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği sağlanmış olur. Eşitsizliğin her iki yanının $L_{q,\mu}$ normunu alırsak

$$\begin{aligned} \left(\int_0^\infty |f\#g(x)|^q d\gamma_\mu(x) \right)^{1/q} &\leq C_\mu^{\frac{1}{r'}} C_\mu^{\frac{1}{p'}} \|f\|_{p,\mu}^{\frac{p}{r'}} \|g\|_{r,\mu}^{\frac{r}{p'}} \\ &\quad \times \left(\int_0^\infty d\gamma_\mu(x) \int_0^\infty |f(y)|^p |\tau_x(g)(y)|^r d\sigma_\mu(y) \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= C_\mu^{\frac{1}{r'}} C_\mu^{\frac{1}{p'}} \|f\|_{p,\mu}^{\frac{p}{r'}} \|g\|_{r,\mu}^{\frac{r}{p'}} \\ &\quad \times \left(\int_0^\infty |f(y)|^p d\sigma_\mu(y) \int_0^\infty |\tau_x(g)(y)|^r d\gamma_\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= C_\mu^{\frac{1}{r'}} C_\mu^{\frac{1}{p'}} \|f\|_{p,\mu}^{\frac{p}{r'}} \|g\|_{r,\mu}^{\frac{r}{p'}} \|f\|_{p,\mu}^{\frac{p}{q}} \left(\int_0^\infty |\tau_x(g)(y)|^r d\gamma_\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= C_\mu^{\frac{1}{r'}} C_\mu^{\frac{1}{p'}} \|f\|_{p,\mu}^{\frac{p}{r'}} \|g\|_{r,\mu}^{\frac{r}{p'}} \|f\|_{p,\mu}^{\frac{p}{q}} \|\tau_x(g)(\cdot)\|_{r,\mu}^{\frac{r}{q}} \\ &\leq C_\mu \|f\|_{p,\mu} \|g\|_{r,\mu} \end{aligned}$$

olur. Yani

$$\|f\#g\|_{q,\mu} \leq C_\mu \|g\|_{r,\mu} \|f\|_{p,\mu}$$

eşitsizliği sağlanmış olur.

$r = \infty (p = \infty)$ için p, q üzerindeki kabullerden dolayı $p = 1, q = \infty (r = 1, q = \infty)$ olur. Bu durumda da istenilen eşitsizlik Lemma 2.2.3 den alınır.

Uyarı 2.2.3 $p, r, s \in [1, \infty)$ ve $1/p = 1/r + 1/s - 1$ olmak koşuluyla Hankel konvolüsyonu $\#$, $L_{r,\mu} \times L_{s,\mu}$ uzayından $L_{p,\mu}$ uzayı içine bilineer sınırlı bir dönüşüm tanımlar (Hirschman 1960).

Lemma 2.2.5 $f, g \in L_{1,\mu}$ olmak üzere

$$h_\mu(\tau_x f)(y) = j_\mu(xy) h_\mu(f)(y), \quad x, y \in (0, \infty)$$

eşitliği sağlanır.

İspat.

$$\begin{aligned}
h_\mu(\tau_x f)(y) &= \int_0^\infty j_\mu(zy)(\tau_x f)(z) d\sigma_\mu(z) \\
&= \int_0^\infty j_\mu(zy) d\sigma_\mu(z) \int_0^\infty D_\mu(x, z, u) f(u) d\sigma_\mu(u) \\
&= \int_0^\infty j_\mu(zy) D_\mu(x, z, u) d\sigma_\mu(z) \int_0^\infty f(u) d\sigma_\mu(u)
\end{aligned}$$

Özellik 2.2.1 (iii) ten

$$\begin{aligned}
h_\mu(\tau_x f)(y) &= j_\mu(xy) \int_0^\infty j_\mu(uy) f(u) d\sigma_\mu(u) \\
&= j_\mu(xy) h_\mu(f)(y)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Lemma 2.2.6 $f, g \in L_{1,\mu}$ olmak üzere

$$h_\mu(f \# g)(x) = h_\mu(f)(x) h_\mu(g)(x), \quad 0 < x < \infty$$

dır.

İspat.

$$\begin{aligned}
h_\mu(f \# g)(x) &= \int_0^\infty j_\mu(xt)(f \# g)(t) d\sigma_\mu(t) \\
&= \int_0^\infty j_\mu(xt) d\sigma_\mu(t) \int_0^\infty f(u) \tau_t g(u) d\sigma_\mu(u) \\
&= \int_0^\infty j_\mu(xt) d\sigma_\mu(t) \int_0^\infty f(u) d\sigma_\mu(u) \int_0^\infty D_\mu(t, u, v) g(v) d\sigma_\mu(v) \\
&= \int_0^\infty f(u) d\sigma_\mu(u) \int_0^\infty g(v) d\sigma_\mu(v) \int_0^\infty j_\mu(xt) D_\mu(t, u, v) d\sigma_\mu(t)
\end{aligned}$$

Böylece Özellik 2.2.1 (iii) ten

$$\begin{aligned}
h_\mu(f \# g)(x) &= \int_0^\infty j_\mu(xu) f(u) d\sigma_\mu(u) \int_0^\infty j_\mu(xv) g(v) d\sigma_\mu(v) \\
&= h_\mu(f)(x) h_\mu(g)(x)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Genelleştirilmiş fonksiyonlar anlamında Hankel dönüşümü çalışmaları Zemanian (1968) ile başlamıştır. Zemanian Hankel dönüşümünün bir türü olan $H_\mu(\varphi)(x) = \int_0^\infty (xy)^{1/2} J_\mu(xy) \varphi(y) dy$ şeklinde tanımlanan dönüşümü ele almıştır. Daha sonra Altenburg, Zemanian'ın sonuçlarını h_μ dönüşümü için uyarlamıştır (Altenburg 1982). Altenburg, h_μ Hankel dönüşümünün bir otomorfizma olarak davrandığı test fonksiyonları uzayını araştırmış ve

$$\mathcal{H} = \left\{ \varphi \in C^\infty(0, \infty) : \gamma_{n,k}(\varphi) = \sup_{x>0} \left| x^n \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^k \varphi(x) \right| < \infty, \quad n, k = 0, 1, \dots \right\}$$

uzayını tanımlamış ve göstermiştir ki $\{\gamma_{n,k}\}_{n,k \in \mathbb{N}_0}$ yarı normlar ailesinin ürettiği topoloji ile birlikte \mathcal{H} bir Frechet uzayıdır ve h_μ , \mathcal{H} in bir otomorfizmasıdır.

Özellik 2.2.2 $1 \leq p \leq \infty$, $\mu > -1/2$ olmak üzere $\mathcal{H} \subset L_{p,\mu}$ dır (Altenburg 1982).

Özellik 2.2.3 \mathcal{H}' , \mathcal{H} nin dual uzayını göstermek üzere, $f \in L_{p,\mu}$, ($1 \leq p \leq \infty$) fonksiyonu \mathcal{H}' nin bir elamanını tanımlar öyle ki

$$L_f(\varphi) = \langle f, \varphi \rangle = \int_0^\infty f(x) \varphi(x) x^{2\mu+1} dx$$

dır (Altenburg 1982).

Lemma 2.2.7 $S_e(\mathbb{R})$, \mathbb{R} üzerindeki tüm çift Schwartz fonksiyonlarının uzayını göstermek üzere, $\varphi \in C^\infty(0, \infty)$ fonksiyonun $S_e(\mathbb{R})$ uzayına ait olması için gerek ve yeter şart

$$\gamma_{n,k}(\varphi) = \sup_{x>0} \left| x^n \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^k \varphi(x) \right| < \infty, \quad \forall n, k = 0, 1, 2, \dots$$

olmasıdır (Stempak 1997).

Uyarı 2.2.4 Lemma 2.2.5, \mathcal{H} uzayı ile $S_e(\mathbb{R})$ uzayının çakıştığını göstermektedir.

Lemma 2.2.8 h_μ dönüşümü $(S_e(\mathbb{R}), \tau)$ üzerinde bir otomorfizmdir. Burada τ ,

$$\gamma_{n,k}(\varphi) = \sup_{x>0} \left| x^n \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^k \varphi(x) \right|, \quad n, k = 0, 1, 2, \dots \text{ ve } \varphi \in C^\infty((0, \infty))$$

şeklinde tanımlı yarı normların ailesi tarafından üretilen topolojidir ve $(S_e(\mathbb{R}), \tau)$ bir Frechet uzayıdır (Stempak 1997).

Tanım 2.2.4 S'_e , \mathbb{R} üzerindeki çift Schwartz fonksiyonlarının uzayı S_e nin dual uzayını

göstermek üzere, genelleştirilmiş fonksiyonlar anlamında Hankel dönüşümü h_μ , S_e üzerinde Hankel dönüşümünün transpozu olarak tanımlanır. Yani $f \in S'_e$ olmak üzere

$$\langle h_\mu f, \phi \rangle = \langle f, h_\mu \phi \rangle, \quad \phi \in S_e$$

şeklinde tanımlanan $h_\mu f$, S'_e dual uzayının elemanıdır.

Tanım 2.2.5 $f \in S'_e$ ve $\phi \in S_e$, olmak üzere genelleştirilmiş fonksiyonlar anlamında Hankel konvolüsyonu

$$(f \# \phi)(x) = \langle f, \tau_x \phi \rangle, \quad x \in (0, \infty)$$

olarak tanımlanır (Betancor ve Marrero 1992).

Özellik 2.2.4 Genelleştirilmiş fonksiyonlar anlamında Hankel konvolüsyonu istenilen $f \in S'_e$ ve $\phi, \psi \in S_e$ için aşağıdaki özelliklere sahiptir (Betancor ve Marrero 1992).

$$(f \# \phi) \# \psi = f \# (\phi \# \psi)$$

$$h_\mu(f \# \phi) = h_\mu(f) h_\mu(\phi)$$

Uyarı 2.2.5 $f \in S'_e$ ve $\phi \in S_e$ olmak üzere $f \# \phi$, S_e uzayının bir noktasal çarpanıdır. Yani $\psi \rightarrow (f \# \phi)\psi$ dönüşümü $S_e \rightarrow S_e$ tanımlı lineer sınırlı bir dönüşümdür. S_e uzayının bütün noktasal çarpanlarının kümesi O_e ile gösterilmek üzere Betancor ve Marrero (1992) O_e nin, S Schwartz uzayının çift çarpanlarının uzayı olarak karakterize edildiğini ve bir $\psi \in C^\infty(0, \infty)$ fonksiyonun O_e uzayına ait olması için gerek ve yeter şartın

$$\forall k \in \mathbb{N}_0, \exists n \in \mathbb{N}_0, \sup_{x \in (0, \infty)} (1+x)^{-n} \left| \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^k \psi(x) \right| < \infty$$

olduğunu göstermişlerdir.

O_e uzayı $\{p_{n,k;B} : n, k \in \mathbb{N}_0, B \in \mathcal{B}\}$ yarı normlar ailesinin ürettiği topoloji ile donatılmıştır. Burada

$$p_{n,k;B}(\theta) = \sup_{\varphi \in B} \gamma_{n,k}(\theta\varphi) \quad (\theta \in O_e)$$

ve \mathcal{B} , S_e nin bütün sınırlı altkümelerinin sınıfını göstermektedir.

Ayrıca Betancor ve Marrero (1995), her $\phi \in S_e$ için $f \# \phi \in S_e$ olacak şekildeki

$f \in S'_e$ fonksiyonlarının uzayı $\mathcal{O}'_{\#}$ uzayını karakterize etmiş, $\mathcal{O}'_{\#} = h_{\mu}(O_e)$ olduğunu ispatlamışlardır. $\mathcal{O}'_{\#}$ uzayının topolojisi h_{μ} tarafından O_e uzayından tanımlanır.

3. \mathbb{R}^n DE BESOV VE LIZORKIN-TRIEBEL UZAYLARI

Tanım 3.1 $\Phi(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{cases} \text{supp } \varphi_0 \subset \{x : |x| \leq 2\} \\ \text{supp } \varphi_j \subset \{x : 2^{j-1} \leq |x| \leq 2^{j+1}\} \quad , j = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Her multi-indeks α için bir c_α pozitif sabiti vardır öyle ki her $x \in \mathbb{R}^n$ ve her $j = 0, 1, 2, \dots$ için

$$2^{j|\alpha|} |D^\alpha \varphi_j(x)| \leq c_\alpha$$

ve her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(x) = 1$$

koşullarını sağlayan bütün $\varphi = \{\varphi_j(x)\}_{j=0}^{\infty} \subset S(\mathbb{R}^n)$ sistemlerinin bir koleksiyonu olarak tanımlansın ve $-\infty < s < \infty$, $0 < q \leq \infty$, $\varphi = \{\varphi_j(x)\}_{j=0}^{\infty} \in \Phi(\mathbb{R}^n)$ olsun.

Eğer $0 < p \leq \infty$ ise Besov uzayları $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$,

$$B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : f \in S'(\mathbb{R}^n), \|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}^\varphi = \|2^{sj} F^{-1} \varphi_j F f\|_{l_q(L_p(\mathbb{R}^n))} < \infty \right\} \quad (3.1)$$

olarak; eğer $0 < p < \infty$ ise Lizorkin-Triebel uzayları $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$,

$$F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : f \in S'(\mathbb{R}^n), \|f\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}^\varphi = \|2^{sj} F^{-1} \varphi_j F f\|_{(L_p(\mathbb{R}^n), l_q)} < \infty \right\} \quad (3.2)$$

olarak tanımlanır.

Özellik 3.1 $\varphi = \{\varphi_j(x)\}_{j=0}^{\infty} \in \Phi(\mathbb{R}^n)$ ve $\psi = \{\psi_j(x)\}_{j=0}^{\infty} \in \Phi(\mathbb{R}^n)$ olsun.

(i) Eğer $s \in \mathbb{R}$, $0 < p \leq \infty$ ve $0 < q \leq \infty$ ise $\|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}^\varphi$ ve $\|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}^\psi$ quasi-normları $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ üzerinde denktir.

(ii) Eğer $s \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$ ve $0 < q \leq \infty$ ise $\|f\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}^\varphi$ ve $\|f\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}^\psi$ quasi-normları $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ üzerinde denktir (Triebel 1983).

Şimdi vereceğimiz özellikte $A_1 \subset A_2$ gösterimi quasi-normlu uzay A_1 , quasi-normlu

uzay A_2 içinde sürekli gömülmüştür anlamına gelmektedir. Yani öyle bir c sabiti vardır ki her $a \in A_1$ için $\|a\|_{A_2} \leq c\|a\|_{A_1}$ eşitsizliği gerçekleşir.

Özellik 3.2 (i) $0 < q_0 \leq q_1 \leq \infty$ ve $-\infty < s < \infty$ olsun. Bu durumda

$$B_{p,q_0}^s(\mathbb{R}^n) \subset B_{p,q_1}^s(\mathbb{R}^n), \quad 0 < p \leq \infty \quad (3.3)$$

ve

$$F_{p,q_0}^s(\mathbb{R}^n) \subset F_{p,q_1}^s(\mathbb{R}^n), \quad 0 < p < \infty \quad (3.4)$$

(ii) $0 < q_0 \leq \infty$, $0 < q_1 \leq \infty$, $-\infty < s < \infty$ ve $\epsilon > 0$ olsun. Bu durumda

$$B_{p,q_0}^{s+\epsilon}(\mathbb{R}^n) \subset B_{p,q_1}^s(\mathbb{R}^n), \quad 0 < p \leq \infty \quad (3.5)$$

ve

$$F_{p,q_0}^{s+\epsilon}(\mathbb{R}^n) \subset B_{p,q_1}^s(\mathbb{R}^n), \quad 0 < p < \infty \quad (3.6)$$

(iii) Eğer $0 < q \leq \infty$, $0 < p < \infty$ ve $-\infty < s < \infty$ ise

$$B_{p,\min(p,q)}^s(\mathbb{R}^n) \subset F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \subset B_{p,\max(p,q)}^s(\mathbb{R}^n) \quad (3.7)$$

sürekli gömmeleri vardır (Triebel 1983).

Teorem 3.1

(i) Eğer $0 < p, q \leq \infty$ ve $-\infty < s < \infty$ ise $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ quasi-Banach uzayıdır (eğer $1 \leq p, q \leq \infty$ ise Banach uzayıdır). Bundan başka $0 < p, q \leq \infty$ ve $-\infty < s < \infty$ için

$$S(\mathbb{R}^n) \subset B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \subset S'(\mathbb{R}^n)$$

sürekli gömmeleri vardır ve eğer $0 < p, q < \infty$, $-\infty < s < \infty$ ise $S(\mathbb{R}^n)$, $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ de yoğunur.

(ii) Eğer $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$ ve $-\infty < s < \infty$ ise $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ quasi-Banach uzayıdır (eğer $1 < p < \infty$, $1 < q \leq \infty$ ise Banach uzayıdır). Bundan başka $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$ ve $-\infty < s < \infty$ için

$$S(\mathbb{R}^n) \subset F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \subset S'(\mathbb{R}^n)$$

sürekli gömmeleri vardır ve eğer $0 < p, q < \infty$, $-\infty < s < \infty$ ise $S(\mathbb{R}^n)$, $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ de yoğunudur (Triebel 1983).

Besov ve Triebel-Lizorkin uzaylarının tanımı şu şekilde de verilebilir.

Tanım 3.2 Herhangi $t > 0$ ve $j \in \mathbb{N}$ için

$$\varphi_t(x) = t^{-n}\varphi(x/t), \quad \varphi_j(x) = \varphi_{\{2^{-j}\}}(x) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

şeklinde tanımlanmış olsun. $A, \alpha \in S$ fonksiyonları

$$\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| < 2\} \text{ kümesinde } |\widehat{A}(\xi)| > 0, \quad \text{supp } \widehat{A} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| < 4\}$$

$$\{\xi \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2} < |\xi| < 2\} \text{ kümesinde } |\widehat{\alpha}(\xi)| > 0, \quad \text{supp } \widehat{\alpha} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{4} < |\xi| < 4\}$$

koşullarını sağlayan fonksiyonlar olmak üzere $s \in \mathbb{R}$ ve $0 < p, q \leq \infty$ için Besov uzayları,

$$B_{p,q}^s = \{f \in S' : \|f\|_{B_{p,q}^s} = \|A * f\|_{L_p} + \|\{2^{js}\alpha_j * f\}_{j=1}^\infty\|_{l_q(L_p)} < \infty\}$$

$s \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$ ve $0 < q \leq \infty$ için Lizorkin-Triebel uzayları

$$F_{p,q}^s = \{f \in S' : \|f\|_{F_{p,q}^s} = \|A * f\|_{L_p} + \|\{2^{js}\alpha_j * f\}_{j=1}^\infty\|_{L_p(l_q)} < \infty\}$$

olarak tanımlanır (Rychkov 1999).

Lemma 3.1 $\mu, \nu \in S$, $M \in \mathbb{Z}$, $M \geq 1$ olsun ve

$$\text{Her } |\alpha| \leq M \text{ için } D^\alpha \widehat{\mu}(0) = 0 \tag{3.8}$$

eşitliği gerçekleştirilsin. Bu durumda herhangi $N > 0$ için bir C_N sabiti vardır öyle ki

$$\sup_{z \in \mathbb{R}^n} |\mu_t * \nu(z)|(1 + |z|)^N \leq C_N t^{M+1} \tag{3.9}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Fourier dönüşümünün temel özelliklerinden

$$\sup_{z \in \mathbb{R}^n} |\mu_t * \nu(z)|(1 + |z|)^N \leq c_N \max_{|\alpha| \leq N+1} \|D^\alpha[\widehat{(\mu_t * \nu)}]\|_{L_1} \tag{3.10}$$

Leibniz formülünden

$$|D^\alpha(\widehat{\mu}(t\xi)\widehat{\nu}(\xi))| \leq C_\alpha \sum_{\beta \leq \alpha} t^{|\beta|} |(D^\beta \widehat{\mu})(t\xi) D^{\alpha-\beta} \widehat{\nu}(\xi)| = (*)$$

yazabiliriz. (3.8) den

$$|(D^\beta \widehat{\mu})(t\xi)| \leq c(t|\xi|)^{M-|\beta|+1}, \quad |\beta| \leq M$$

eşitsizliği gerçekleşir. Bu eşitsizlikten ve $|\beta| > M$ için $|D^\beta \widehat{\mu}| \leq c_\beta$ olmasından

$$(*) \leq c'_\alpha t^{M+1} (1 + |\xi|^{M+1}) \sum_{\beta \leq \alpha} |D^{\alpha-\beta} \widehat{\nu}(\xi)|$$

elde edilir. Bu elde ettiğimizi (3.10) da kullanırsak (3.9) elde edilir.

Lemma 3.2 $0 < p, q \leq \infty$ ve $\delta > 0$ olsun. \mathbb{R}^n üzerinde negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonların herhangi bir $\{g_j\}_{j=0}^\infty$ dizisi için

$$G_j(x) = \sum_{k=0}^\infty 2^{-|k-j|\delta} g_k(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (3.11)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $C_1 = C_1(p, q, \delta)$ ve $C_2 = C_2(q, \delta)$ sabitler olmak üzere

$$\|\{G_j\}_{j=0}^\infty\|_{l_q(L_p)} \leq C_1 \|\{g_j\}_{j=0}^\infty\|_{l_q(L_p)} \quad (3.12)$$

$$\|\{G_j\}_{j=0}^\infty\|_{L_p(l_q)} \leq C_2 \|\{g_j\}_{j=0}^\infty\|_{L_p(l_q)} \quad (3.13)$$

eşitsizlikleri gerçekleşir (Rychkov 1999).

İspat. İlk önce

$$\|\{G_j(x)\}_{j=0}^\infty\|_{l_q} \leq C(q, \delta) \|\{g_j\}_{j=0}^\infty\|_{l_q}, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (3.14)$$

olduğunu gösterelim. $q \geq 1$ için bu Minkowski eşitsizliğinden çıkar ve $C = \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{-|k|\delta}$ dır. $0 < q < 1$ için (3.11) ın q . kuvvetini alıp $(|u| + |v|)^q \leq |u|^q + |v|^q$ temel eşitsizliğini kullanır ve j üzerinden toplam alıp $1/q$. kuvvetini alırsak (3.14) elde edilir ve $C = (\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{-|k|\delta q})^{1/q}$ olur. (3.13), (3.14) den $C_2 = C$ yazılarak hemen alınır. Şimdi (3.12) nin doğruluğunu ispatlayalım. İlk önce $p \geq 1$ olsun. Minkowski eşitsizliğinden

$$\|G_j\|_{L_p} = \sum_{k=0}^\infty 2^{-|k-j|\delta} \|g_k\|_{L_p}$$

eşitliği gerçekleşir. Bundan dolayı $C_2 = C$ yazılarak (3.12), (3.14) den alınır.

Şimdi $p < 1$ durumuna bakalım. (3.11) in p . kuvvetini alıp $(|u| + |v|)^p \leq |u|^p + |v|^p$ eşitizliğini kullanır ve integre edersek

$$\int_{\mathbb{R}^n} |G_j|^p = 2^{-|k-j|\delta p} \int_{\mathbb{R}^n} |g_k|^p$$

eşitliğini elde ederiz. Bundan dolayı (3.14) den

$$\left\| \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |G_j|^p \right\}_{j=0}^{\infty} \right\|_{l_{q/p}} \leq C\left(\frac{q}{p}, \delta p\right) \left\| \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |g_k|^p \right\}_{k=0}^{\infty} \right\|_{l_{q/p}}$$

eşitsizliği sağlanır. p . kuvvetini alınarak (3.12) elde edilir.

Lemma 3.3 $0 < r \leq 1$ ve $\{b_j\}_{j=0}^{\infty}$, $\{d_j\}_{j=0}^{\infty}$ sırasıyla $(0, \infty]$ ve $(0, \infty)$ da değerler alan iki dizi olsun. Kabul edelim ki bir $N_0 > 0$ için

$$d_j = O(2^{jN_0}), \quad j \rightarrow \infty \quad (3.15)$$

ve herhangi $N > 0$ için

$$d_j \leq C_N \sum_{k=j}^{\infty} 2^{(j-k)N} b_k d_k^{1-r}, \quad j \in \mathbb{N}_0 \quad (C_N < \infty) \quad (3.16)$$

olsun. Bu durumda herhangi $N > 0$ için

$$d_j^r \leq C_N \sum_{k=j}^{\infty} 2^{(j-k)Nr} b_k, \quad j \in \mathbb{N}_0 \quad (3.17)$$

eşitsizliği aynı C_N sabitleri ile gerçekleşir.

İspat. $j \in \mathbb{N}_0$ için $D_{j,N} = \sup_{k \geq j} 2^{(j-k)N} d_k$ olarak tanımlayalım. (3.16) dan

$$\begin{aligned} D_{j,N} &\leq C_N \sup_{k \geq j} \sum_{l=k}^{\infty} 2^{(j-l)N} b_l d_l^{1-r} \\ &= C_N \sum_{l=j}^{\infty} 2^{(j-l)N} b_l d_l^{1-r} \\ &= C_N \sum_{l=j}^{\infty} 2^{(j-l)Nr} b_l [D_{j,N}]^{1-r} \end{aligned}$$

olup, buradan $D_{j,N} < \infty$ olması koşuluyla

$$d_j^r \leq [D_{j,N}]^r \leq C_N \sum_{l=j}^{\infty} 2^{(j-l)Nr} b_l \quad (3.18)$$

elde edilir. $D_{j,N} < \infty$ olma koşulu en azından $N \geq N_0$ için (3.15) den sağlanır. Böylece (3.17) eşitsizliğini $N \geq N_0$ için ispatlamış olduk ve bu nedenle C_{N_0} sabiti ile $N < N_0$ için de ispatlanabilir. Çünkü (3.17) eşitsizliğinin sağ tarafı N artarken azalmaktadır.

Şimdi $N < N_0$ olsun ve kabul edelim ki (3.17) eşitsizliğinin sağ tarafı sonlu (aksi halde ispatlayacak birşey yoktur) olsun. C_{N_0} sabiti ile (3.17) eşitsizliğinden $k \geq j$ için

$$\begin{aligned} 2^{(j-k)N} d_k &\leq 2^{(j-k)N} C_{N_0}^{1/r} \left[\sum_{l=k}^{\infty} 2^{(k-l)Nr} b_l \right]^{1/r} \\ &= C_{N_0}^{1/r} \left[\sum_{l=k}^{\infty} 2^{(j-l)Nr} b_l \right]^{1/r} \end{aligned}$$

olup, buradan $D_{j,N} < \infty$ dur. (3.18) eşitsizliği kullanılarak istenilen elde edilir.

Tanım 3.3 $\Psi, \psi \in S$ ve $l \in \mathbb{Z}, l \geq -1$ olsun. Eğer aşağıda verilen (a) ve (b) koşulları sağlanıyorsa (Ψ, ψ) ikilisi F_l kümesindedir denir.

(a) Belli bir $\epsilon > 0$ için, $\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| < 2\epsilon\}$ kümesi üzerinde $|\widehat{\Psi}(\xi)| > 0$ ve $\{\xi \in \mathbb{R}^n : \frac{\epsilon}{2} < |\xi| < 2\epsilon\}$ kümesi üzerinde $|\widehat{\psi}(\xi)| > 0$ dır.

(b) Her $|\alpha| \leq l$ için $D^\alpha \widehat{\psi}(0) = 0$ dır.

Tanım 3.4 (Peetre maksimal fonksiyonları) $a > 0, f \in S'$ ve $\phi \in S$ olsun. ϕ_a^* ve $\phi_{j,a}^*$ maksimal fonksiyonları

$$\phi_a^* f(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{|(\phi * f)(y)|}{(1 + |x - y|)^a}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

ve

$$\phi_{j,a}^* f(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{|(\phi_j * f)(y)|}{(1 + 2^j |x - y|)^a}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

şeklinde tanımlanır.

Bui vd. (1996, 1997), Peetre (1975) ve Triebel (1983) in daha önce elde ettiği

sonuçları tamamlayarak Besov ve Triebel-Lizorkin uzaylarının genel karakterizasyonları hakkındaki sonucu ispatlamışlardır. Bu teorem Besov ve Triebel-Lizorkin uzaylarının tanımındaki fonksiyonlardan daha genel fonksiyonlarla konvolüsyon işlemi yolu ile Besov ve Triebel-Lizorkin uzaylarının denk bir karakterizasyonunu vermektedir. Aşağıda bu teorem ifade ve ispat edilecektir. Bu teoremdeki $A_1 \ll A_2$ gösterimi $A_1 \leq CA_2$ eşitsizliğinin gerçekleştiği bir C sabitinin var olduğu anlamına gelmektedir.

Teorem 3.2

(a) $(\Psi, \psi) \in F_l$, $s < l + 1$, $0 < p, q \leq \infty$, $a > \frac{n}{p}$ olsun. Bu durumda her $f \in S'$ için

$$\begin{aligned} \|\Psi_a^* f\|_{L_p} + \|\{2^{js}\psi_{j,a}^* f\}_{j=1}^\infty\|_{l_q(L_p)} &\ll \|f\|_{B_{p,q}^s} \\ &\ll \|\Psi * f\|_{L_p} + \|\{2^{js}\psi_j * f\}_{j=1}^\infty\|_{l_q(L_p)} \end{aligned} \quad (3.19)$$

dır.

(b) $(\Psi, \psi) \in F_l$, $s < l + 1$, $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$, $a > \frac{n}{\min(p,q)}$ olsun. Bu durumda her $f \in S'$ için

$$\begin{aligned} \|\Psi_a^* f\|_{L_p} + \|\{2^{js}\psi_{j,a}^* f\}_{j=1}^\infty\|_{L_p(l_q)} &\ll \|f\|_{F_{p,q}^s} \\ &\ll \|\Psi * f\|_{L_p} + \|\{2^{js}\psi_j * f\}_{j=1}^\infty\|_{L_p(l_q)} \end{aligned} \quad (3.20)$$

dır.

İspat.

1.Adım: Herhangi iki $\Phi, \varphi \in S$ fonksiyon çifti alalım öyle ki bir $\epsilon' > 0$ için

$$\begin{aligned} \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| < 2\epsilon'\} \text{ kümesi üzerinde } |\widehat{\Phi}(\xi)| &> 0 \\ \{\xi \in \mathbb{R}^n : \frac{\epsilon'}{2} < |\xi| < 2\epsilon'\} \text{ kümesi üzerinde } |\widehat{\varphi}(\xi)| &> 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

koşulları sağlansın.

Herhangi $a > 0$, $s < l + 1$, $0 < p, q \leq \infty$ sayılarını sabitleyelim. Bu adımda her $f \in S'$ için

$$\|\Psi_a^* f\|_{L_p} + \|\{2^{js}\psi_{j,a}^* f\}_{j=1}^\infty\|_{l_q(L_p)} \ll \|\Phi_a^* f\|_{L_p} + \|\{2^{js}\varphi_{j,a}^* f\}_{j=1}^\infty\|_{l_q(L_p)} \quad (3.22)$$

ve

$$\|\Psi_a^* f\|_{L_p} + \|\{2^{js}\psi_{j,a}^* f\}_{j=1}^\infty\|_{L_p(l_q)} \ll \|\Phi_a^* f\|_{L_p} + \|\{2^{js}\varphi_{j,a}^* f\}_{j=1}^\infty\|_{L_p(l_q)} \quad (3.23)$$

eşitsizliklerinin sağlandığını göstereceğiz.

(3.21) den

$$\begin{aligned} \text{supp } \widehat{\Lambda} &\subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| < 2\epsilon'\} \\ \text{supp } \widehat{\lambda} &\subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : \frac{\epsilon'}{2} < |\xi| < 2\epsilon'\} \\ \widehat{\Lambda}(\xi)\widehat{\Phi}(\xi) + \sum_{j=1}^{\infty} \widehat{\lambda}(2^{-j}\xi)\widehat{\varphi}(2^{-j}\xi) &\equiv 1, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (3.24)$$

olacak şekilde $\Lambda, \lambda \in S$ fonksiyonları vardır. Özel olarak her $f \in S'$ için

$$f = \Lambda * \Phi * f + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k * \varphi_k * f \quad (3.25)$$

özdeşliği doğrudur. Buradan

$$\psi_j * f = \psi_j * \Lambda * \Phi * f + \sum_{k=1}^{\infty} \psi_j * \lambda_k * \varphi_k * f \quad (3.26)$$

eşitliği vardır. Ayrıca

$$\begin{aligned} |\psi_j * \lambda_k * \varphi_k * f| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\psi_j * \lambda_k(z)| |\varphi_k * f(z-y)| dz \\ &\leq \varphi_{k,a}^* f(y) \int_{\mathbb{R}^n} |\psi_j * \lambda_k(z)| (1 + 2^k |z|)^a dz \\ &\equiv \varphi_{k,a}^* f(y) I_{jk} \end{aligned} \quad (3.27)$$

yazabiliriz.

$$I_{jk} \leq C(\lambda, \varphi) \begin{cases} 2^{(k-j)(l+1)}, & k \leq j \\ 2^{(j-k)(a+s+1)}, & k \geq j \end{cases} \quad (3.28)$$

olduğunu iddia ediyoruz. Gerçekten $k \leq j$ için $2^k z \rightarrow z$ değişken değiştirmesi yapılır ve Lemma 3.1 kullanılırsa

$$\begin{aligned} I_{jk} &= \int_{\mathbb{R}^n} |\psi_{2^{k-j}} * \lambda(z)| (1 + |z|)^a dz \\ &\leq c \sup_{z \in \mathbb{R}^n} |\psi_{2^{k-j}} * \lambda(z)| (1 + |z|)^{a+n+1} \\ &\leq C 2^{(k-j)(l+1)} \end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer olarak $k \geq j$ için

$$\begin{aligned} I_{jk} &\leq 2^{(k-j)a} \int_{\mathbb{R}^n} |\psi * \lambda_{2^{j-k}}(z)|(1+|z|)^a dz \\ &\leq c_M 2^{(k-j)a} 2^{(k-j)(M+1)} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada, (3.24) den her α için $D^\alpha \widehat{\lambda}(0) = 0$ olduğundan M istenildiği kadar büyük alınabilir. $M, \geq 2a + s$ olacak şekilde herhangi bir tamsayı olarak alınırsa istenilen eşitsizlik elde edilmiş olur. Böylece (3.28) ispatlanmış oldu.

Buna ilaveten her $x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$$\begin{aligned} \varphi_{k,a}^* f(y) &\leq \varphi_{k,a}^* f(x)(1 + 2^k|x - y|)^a \\ &\leq \varphi_{k,a}^* f(x) \max(1, 2^{(k-j)a})(1 + 2^j|x - y|)^a \end{aligned}$$

olduğuna dikkat edilir ve bu (3.27) de yerine yazılır ve (3.28) kullanılırsa

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{|\psi_j * \lambda_k * \varphi_k * f(y)|}{(1 + 2^j|x - y|)^a} \ll \varphi_{k,a}^* f(x) \times \begin{cases} 2^{(k-j)(l+1)}, & k \leq j \\ 2^{(j-k)(s+1)}, & k \geq j \end{cases}$$

elde edilir.

Bu eşitsizliğin yukarıdaki ispatında $k = 1$ için $D^\alpha \widehat{\lambda}(0) = 0$ özelliğinin kullanılmadığına dikkat edilmelidir. Bu yüzden λ_1 ve φ_1 , Λ ve Φ fonksiyonları ile yer değiştirilerek

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{|\psi_j * \Lambda * \Phi * f(y)|}{(1 + 2^j|x - y|)^a} \ll \Phi_a^* f(x) 2^{-j}(l + 1)$$

benzer eşitsizliği elde edilir. Son iki eşitsizliği (3.26) de yazarak

$$\psi_{j,a}^* f(x) \ll \Phi_a^* f(x) 2^{-j(l+1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{k,a}^* f(x) \times \begin{cases} 2^{(k-j)(l+1)}, & k \leq j, \\ 2^{(j-k)(s+1)}, & k > j. \end{cases}$$

olmasını elde ederiz. Elde edilen son üç eşitsizlikteki sabitler $f \in S'$, $x \in \mathbb{R}^n$, $j, k \in \mathbb{N}$ den bağımsızdırlar.

Buradan, $\delta = \min\{1, l + 1 - s\} > 0$ olmak üzere her $f \in S'$, $x \in \mathbb{R}^n$, $j \in \mathbb{N}$ için

$$2^{js} \psi_{j,a}^* f(x) \ll \Phi_a^* f(x) 2^{-j\delta} + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{ks} \varphi_{k,a}^* f(x) 2^{-|j-k|\delta} \quad (3.29)$$

eşitsizliği gerçekleşir. Tekrar $j = 1$ için bu eşitsizliği türetirken $D^\alpha \widehat{\psi}(0) = 0$ özelliğini kullanmadık, bundan dolayı ψ_1 fonksiyonu yerine Ψ fonksiyonunu yazabiliriz. Bu-

radan

$$\Psi_a^* f(x) \ll \Phi_a^* f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{ks} \varphi_{k,a}^* f(x) 2^{-k\delta} \quad (3.30)$$

eşitsizliğini elde ederiz. (3.29), (3.30) ve Lemma 3.2 kullanılarak, (3.22), (3.23) eşitsizliklerinin gerçekleştiği görülür.

2.Adım Bu adımda (3.19) un koşulları altında her $f \in S'$ için

$$\|\Psi_a^* f\|_{L_p} + \|\{2^{js} \psi_{j,a}^* f\}_{j=1}^{\infty}\|_{l_q(L_p)} \ll \|\Psi * f\|_{L_p} + \|\{2^{js} \varphi_j * f\}_{j=1}^{\infty}\|_{l_q(L_p)} \quad (3.31)$$

ve (3.20) koşulları altında her $f \in S'$ için

$$\|\Psi_a^* f\|_{L_p} + \|\{2^{js} \psi_{j,a}^* f\}_{j=1}^{\infty}\|_{L_p(l_q)} \ll \|\Psi * f\|_{L_p} + \|\{2^{js} \varphi_j * f\}_{j=1}^{\infty}\|_{L_p(l_q)} \quad (3.32)$$

eşitsizliklerinin gerçekleştiği ispatlanacaktır.

(3.24) ve (3.25) e benzer olarak

$$\text{supp } \widehat{\lambda} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : \frac{\epsilon}{2} < |\xi| < 2\epsilon\}$$

ve her $f \in S'$ için

$$f = \Lambda * \Psi * f + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k * \psi_k * f$$

olacak şekilde $\Lambda, \lambda \in S$ bulabiliriz.

f fonksiyonunun yerine $f(2^{-j}\cdot)$, $j \in \mathbb{N}$ yazıp, genişletirsek

$$f = \Lambda_j * \Psi_j * f + \sum_{k=j+1}^{\infty} \lambda_k * \psi_k * f \quad (3.33)$$

elde ederiz. Bundan dolayı

$$\psi_j * f = (\Lambda_j * \Psi_j)(\psi_j * f) + \sum_{k=j+1}^{\infty} (\psi_j * \lambda_k) * (\psi_k * f) \quad (3.34)$$

eşitliği elde edilir.

Lemma 3.1 den

$$|\psi_j * \lambda_k(z)| \leq C_N \frac{2^{jn} 2^{(j-k)N}}{(1 + 2^j |z|)^a}, \quad z \in \mathbb{R}^n$$

eşitsizliği keyfi büyük $N > 0$ ile $k \geq j$ için doğrudur.

Benzer olarak

$$|\Lambda_j * \Psi_j(z)| \leq C \frac{2^{jn}}{(1 + 2^j|z|)^a}, \quad z \in \mathbb{R}^n$$

eşitsizliğinin sağlandığı açıktır.

Son iki eşitsizliği (3.34) de kullanırsak her $f \in S'$ ve $j \in \mathbb{N}$ için

$$|\psi_j * f(y)| \leq C_N \sum_{k=j}^{\infty} 2^{jn} 2^{(j-k)N} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\psi_k * f(z)|}{(1 + 2^j|y - z|)^a} dz \quad (3.35)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Herhangi $r \in (0, 1]$ sayısını sabitleyelim. (3.35) eşitsizliğinin her iki tarafını $(1 + 2^j|x - y|)^a$ ile bölüp, $y \in \mathbb{R}^n$ üzerinden supremum alınır ve sağ tarafta

$$(1 + 2^j|x - y|)(1 + 2^j|y - z|) \geq (1 + 2^j|x - z|) \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} |\psi_k * f(z)| &\leq |\psi_k * f(z)|^r [\psi_{k,a}^* f(x)]^{1-r} (1 + 2^k|x - z|)^{a(1-r)} \\ \frac{(1 + 2^k|x - z|)^{a(1-r)}}{(1 + 2^j|x - z|)^a} &\leq \frac{2^{(k-j)a}}{(1 + 2^k|x - z|)^{ar}} \end{aligned}$$

eşitsizlikleri kullanılırsa her $f \in S'$ ve $j \in \mathbb{N}$ için

$$\psi_{j,a}^* f(x) \leq C_N \sum_{k=j}^{\infty} 2^{(j-k)N'} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2^{kn} |\psi_k * f(z)|^r}{(1 + 2^k|x - z|)^{ar}} dz [\psi_{k,a}^* f(x)]^{1-r} \quad (3.37)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $N' = N - a + n$ hala istenildiği kadar büyük alınabilir.

Oldukça benzer olarak her $f \in S'$ için

$$\begin{aligned} \Psi_a^* f(x) &\leq C_N \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Psi * f(z)|^r}{(1 + |x - z|)^{ar}} dz [\Psi_a^* f(x)]^{1-r} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-kN'} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2^{kn} |\psi_k * f(z)|^r}{(1 + 2^k|x - z|)^{ar}} dz [\psi_{k,a}^* f(x)]^{1-r} \right) \end{aligned} \quad (3.38)$$

eşitsizliği ispatlanır.

Şimdi herhangi $x \in \mathbb{R}^n$ sabitleyelim ve

$$d_j = \psi_{j,a}^* f(x), \quad j \in \mathbb{N}, \quad d_0 = \Psi_a^* f(x) \quad (3.39)$$

$$b_j = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2^{kn} |\psi_k * f(z)|^r}{(1 + 2^k |x - z|)^{ar}} dz, \quad j \in \mathbb{N}, \quad b_0 = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Psi * f(z)|^r}{(1 + |x - z|)^{ar}} dz \quad (3.40)$$

olmak üzere Lemma 3.3 ü uygulayalım. N_0 , $f \in S'$ dağılımının (distribution) mertebesine eşit olmak üzere (3.15) şartı sağlanır. N yerine N' alınarak (3.37) ve (3.38) eşitsizlikleri (3.16) tipini alır. (3.17) nin doğru olduğu sonucuna vardık yani her bir $N > 0$ için

$$[\psi_{j,a}^* f(x)]^r \leq C_{N'} \sum_{k=j}^{\infty} 2^{(j-k)Nr} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2^{kn} |\psi_k * f(z)|^r}{(1 + 2^k |x - z|)^{ar}} dz \quad (3.41)$$

eşitliği gerçekleşir. Burada $\Psi_a^* f(x)$ için karşılık gelen eşitsizlikle beraber $C_{N'} = C_{N+a-n}$ dir. Burada (3.41) eşitsizliğindeki $C_{N'}$; $f \in S'$, $x \in \mathbb{R}^n$, $j \in \mathbb{N}$ ve $r \in (0, 1]$ den bağımsızdır çünkü C_N , (3.37), (3.38) eşitsizliklerindeki C_N dir.

Ayrıca daha basit bir ispatla (3.41) eşitsizliğinin $r > 1$ için doğru olduğu ispatlanabilir. Bunun için (3.35) de a yerine $a + n$ alınması ve k ve z de son olarak (3.16) eşitsizliğinde Hölder eşitsizliği uygulanması yeterlidir.

(3.32) ve (3.31) in koşullarında r yi sırasıyla $\frac{n}{a} < r < p$ ve $\frac{n}{a} < r < \min(p, q)$ olacak şekilde seçmek uygundur. İspatın geri kalanında böyle bir seçim yapıp r yi sabitleyeceğiz.

$\frac{1}{(1+|z|)^{ar}} \in L_1$ olduğundan Hardy-Littlewood maksimal operatörü M in majorant özelliği (3.41) de uygulanırsa

$$[\psi_{j,a}^* f(x)]^r \leq C_{N'} \sum_{k=j}^{\infty} 2^{(j-k)Nr} M(|\psi_k * f(z)|^r)(x) \quad (3.42)$$

eşitsizliği $\Psi_a^* f(x)$ için karşılık gelen eşitsizlikle beraber sağlanır.

Şimdi $N > \max(-s, 0)$ seçer ve sabitleyip

$$g_j = 2^{jsr} [\psi_{j,a}^* f]^r, \quad j \in \mathbb{N} \quad g_0 = \Psi_a^* f$$

olmak üzere $l_{q/r}(L_{p/r})$ ve $L_{p/r}(l_{q/r})$ uzaylarında Lemma 3.2 uygulanırsa (3.42) den her $f \in S'$ için

$$\|\Psi_a^* f\|_{L_p} + \|\{2^{js} \psi_{j,a}^* f\}_{j=1}^{\infty}\|_{l_q(L_p)} \ll \|M_r(\Psi * f)\|_{L_p} + \|\{2^{js} M_r(\varphi_j * f)\}_{j=1}^{\infty}\|_{l_q(L_p)} \quad (3.43)$$

ve

$$\|\Psi_a^* f\|_{L_p} + \|\{2^{js} \psi_{j,a}^* f\}_{j=1}^\infty\|_{L_p(l_q)} \ll \|M_r(\Psi * f)\|_{L_p} + \|\{2^{js} M(\varphi_j * f)\}_{j=1}^\infty\|_{L_p(l_q)} \quad (3.44)$$

eşitsizlikleri elde edilir. Burada $M_r(g) = (M(|g|^r))^{1/r}$ notasyonu kullanılmıştır.

Hardy-Littlewood-Wiener ve Fefferman-Stein maksimal teoremlerinden

$$M_r : l_q(L_p) \rightarrow l_q(L_p), \quad r < p \leq \infty, 0 < q \leq \infty \quad (3.45)$$

$$M_r : L_p(l_q) \rightarrow L_p(l_q), \quad r < p < \infty, r < q \leq \infty \quad (3.46)$$

olduğunu biliyoruz. r sayısını seçimimiz (3.45) ve (3.46) özelliğini sırasıyla (3.43) ve (3.44) eşitsizliklerinin sağ taraflarına uygulama imkanı vermektedir. Böylece ispatlanmak istenen (3.31) ve (3.32) eşitsizlikleri ispatlanmış oldu.

Son Adım. Geriye (3.19), (3.20) eşitsizliklerinin (3.22), (3.23), (3.31), (3.32) eşitsizliklerinden alınabileceğini göstermek kaldı. Bunu (3.19) eşitsizliği için yapalım.

$$\begin{aligned} \|\Psi_a^* f\|_{L_p} + \|\{2^{js} \psi_{j,a}^* f\}_{j=1}^\infty\|_{l_q(L_p)} &\ll \|A_a^* f\|_{L_p} + \|\{2^{js} \alpha_{j,a}^* f\}_{j=1}^\infty\|_{l_q(L_p)} \\ &\ll \|f\|_{B_{p,q}^s} \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada ilk önce $\Phi = A, \varphi = \alpha$ olarak (3.22) yi daha sonra $\Psi = A, \psi = \alpha$ olarak (3.31) i uyguladık. S fonksiyonlarının $(A, \alpha), (\Psi, \psi), (\Phi, \varphi)$ çiftleri üzerine konulan şartların verilen sırada zayıflatıldığına dikkat edilmelidir. Devam edersek

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_{p,q}^s} &\leq \|A_a^* f\|_{L_p} + \|\{2^{js} \alpha_{j,a}^* f\}_{j=1}^\infty\|_{l_q(L_p)} \\ &\ll \|\Psi_a^* f\|_{L_p} + \|\{2^{js} \psi_{j,a}^* f\}_{j=1}^\infty\|_{l_q(L_p)} \\ &\ll \|\Psi * f\|_{L_p} + \|\{2^{js} \psi_j * f\}_{j=1}^\infty\|_{l_q(L_p)} \end{aligned}$$

eşitsizliği gerçekleşir. Burada ilk eşitsizlik açıktır ikinci için ise (3.22) eşitsizliği sol tarafında Ψ ve ψ nin yerine A ve α alınarak ve de $\Phi = \Psi, \varphi = \psi$ ile kullanılmıştır. Üçüncü eşitsizlik ise (3.31) kullanılarak elde edilmiştir.

Buradan (3.19) un doğruluğu görülmüş olur. Benzer şekilde (3.20) nin de doğruluğu görülebilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

4. HANKEL DÖNÜŞÜMÜNE KARŞILIK GELEN BESOV VE LIZORKIN-TRIEBEL UZAYLARI

Tanım 4.1 $s \in \mathbb{R}$ olsun. Dizi uzayı l_p^s , $1 \leq p < \infty$ için

$$l_p^s = \left\{ \xi : \xi = (\xi_j)_j^\infty, \xi_j \in \mathbb{C}, \|\xi\|_{l_p^s} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} (2^{j s p} |\xi_j|^p) \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

ve $p = \infty$ için

$$l_\infty^s = \left\{ \xi : \xi = (\xi_j)_j^\infty, \xi_j \in \mathbb{C}, \|\xi\|_{l_\infty^s} = \sup_j 2^{j s} |\xi_j| < \infty \right\}$$

olarak tanımlanır. $s = 0$ durumunda l_p^0 uzayını l_p ile göstereceğiz.

Tanım 4.2 Φ , aşağıdaki özelliklere sahip bütün $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^\infty \subset \mathcal{H}$ sistemlerinin bir koleksiyonu olsun.

- (i) $\varphi_j(x) \in \mathcal{H}$, $h_\mu \varphi_j(x) \geq 0$ for $0, 1, 2, 3, \dots$
- (ii) $\text{supp } h_\mu \varphi_j \subset \{x : \sqrt{2^{j-1} - 1} \leq x \leq \sqrt{2^{j+1} - 1}\}$, $j = 1, 2, 3, \dots$ ve $\text{supp } h_\mu \varphi_0 \subset \{x : x \leq 1\}$.
- (iii) Pozitif bir c_1 sayısı vardır öyle ki

$$|(x^{-1}D)^k h_\mu \varphi_j(x)| \leq c_1 x^{-k}$$

eşitsizliği, $j = 1, 2, \dots; 0 \leq k \leq [\mu] + 2$ ve $x \in (0, \infty)$ için sağlanır.

- (iv) Her $x \in (0, \infty)$ için $\sum_{j=0}^\infty h_\mu \varphi_j(x) = 1$ dir.

Tanım 4.3 $1 < p < \infty, 1 \leq q \leq \infty, \mu \geq -1/2$ ve $s \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda fonksiyonların herhangi bir $\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty \in \Phi$ sistemi için Besov tipi uzaylar

$$B_{p,q,\mu}^s = \left\{ f \in \mathcal{H}' : \|f\|_{B_{p,q,\mu}^s} = \|\{\varphi_j \# f\}\|_{l_q^s(L_{p,\mu})} < \infty \right\}$$

olarak tanımlanır. Burada

$$\|\cdot\|_{l_q^s(L_{p,\mu})} = \|\|\cdot\|_{L_{p,\mu}}\|_{l_q^s} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} (2^{s j} \|\cdot\|_{L_{p,\mu}})^q \right)^{1/q}$$

dir (Altenburg 1984).

Tanım 4.4 $1 < p < \infty, 1 \leq q \leq \infty, \mu \geq -1/2$ ve $s \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda fonksiyonların herhangi bir $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty} \in \Phi$ sistemi için Triebel-Lizorkin tipi uzaylar

$$F_{p,q,\mu}^s = \left\{ f \in \mathcal{H}' : \|f\|_{F_{p,q,\mu}^s} = \|\{\varphi_j \# f\}\|_{L_{p,\mu}(l_q^s)} < \infty \right\}$$

olarak tanımlanır. Burada

$$\|\cdot\|_{L_{p,\mu}(l_q^s)} = \|\|\cdot\|_{l_q^s}\|_{L_{p,\mu}} = \left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} (2^{sj}(\cdot))^q \right)^{1/q} \right\|_{L_{p,\mu}}$$

dır (Cruz-Baez ve Rodriguez 2001).

Teorem 4.1 $1 < p, q < \infty, \mu \geq -1/2$ ve $s \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

$$B_{p,\min\{p,q\},\mu}^s \subset F_{p,q,\mu}^s \subset B_{p,\max\{p,q\},\mu}^s$$

dır. Burada \subset sürekli gömme anlamına gelmektedir.

İspat. $p \leq q$ için

$$B_{p,p,\mu}^s \subset F_{p,q,\mu}^s \subset B_{p,q,\mu}^s \tag{4.1}$$

ve $q \leq p$ için

$$B_{p,q,\mu}^s \subset F_{p,q,\mu}^s \subset B_{p,p,\mu}^s \tag{4.2}$$

olduğunu göstermeliyiz. l_q^s uzaylarının monotonluğunu ve aşıkâr eşitlik $B_{p,p,\mu}^s \equiv F_{p,p,\mu}^s$ olmasını kullanacağız.

İlk olarak (4.1) ifadesini ispatlayalım. $f \in F_{p,q,\mu}^s$ ve $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty} \in \Phi$ olsun,

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_{p,q,\mu}^s} &= \|\{\varphi_j \# f\}\|_{l_q^s(L_{p,\mu})} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} (2^{sj} \|\{\varphi_j \# f\}\|_{L_{p,\mu}})^q \right)^{1/q} \\ &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{sjq} \left(\int_0^{\infty} |\varphi_j \# f|^p x^{2\mu+1} dx \right)^{q/p} \right)^{1/q} \\ &= \left\| \left\{ \int_0^{\infty} 2^{sjp} |\varphi_j \# f(x)|^p x^{2\mu+1} dx \right\} \right\|_{l_{q/p}^s}^{1/p} \end{aligned}$$

Buradan Minkowski eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
\|f\|_{B_{p,q,\mu}^s} &\leq \left(\int_0^\infty \|\{2^{sjp}|\varphi_j \# f(x)|^p\}\|_{l_{q/p}^s} d\gamma(x) \right)^{1/p} \\
&= \left\| \left(\sum_{j=0}^\infty (2^{sj}|\varphi_j \# f|)^q \right)^{1/q} \right\|_{L_{p,\mu}} \\
&= \|\{\varphi_j \# f\}\|_{L_{p,\mu}(l_q^s)} = \|f\|_{F_{p,q,\mu}^s} \leq \|\{\varphi_j \# f\}\|_{L_{p,\mu}(l_p^s)} \\
&= \|\{\varphi_j \# f\}\|_{l_p^s(L_{p,\mu})} = \|f\|_{B_{p,p,\mu}^s}
\end{aligned}$$

Şimdi (4.2) ifadesini ispatlayalım. $f \in B_{p,q,\mu}^s$ için,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{B_{p,p,\mu}^s} &= \|\{\varphi_j \# f\}\|_{l_p^s(L_{p,\mu})} = \|\{\varphi_j \# f\}\|_{l_p^s(L_{p,\mu})} \\
&= \|\{\varphi_j \# f\}\|_{L_{p,\mu}(l_p^s)} \leq \|\{\varphi_j \# f\}\|_{L_{p,\mu}(l_q^s)} \\
&= \left\| \sum_{j=0}^\infty (2^{sj}|\varphi_j \# f|)^q \right\|_{L_{p/q,\mu}}^{1/q} \leq \left(\sum_{j=0}^\infty 2^{sjq} \|\varphi_j \# f(x)\|_{L_{p/q,\mu}}^q \right)^{1/p} \\
&= \|\{\varphi_j \# f\}\|_{l_q^s(L_{p,\mu})} = \|f\|_{B_{p,q,\mu}^s}.
\end{aligned}$$

Yeni bir Besov tipi uzay olan $BH_{p,q}^{\alpha,\mu}$ J.J.Betancor ve L.Rodriguez-Mesa tarafından 1998 yılında tanıtılmış ve Besov-Hankel uzayı olarak adlandırılmıştır. Bu uzaya bu ismin verilmesinin sebebi Besov uzaylarındaki klasik ötelemenin oynadığı rolü bu uzaylarda Hankel ötelemesinin oynamasıdır. Bu uzayın tanımı şu şekildedir.

Tanım 4.5 $1 \leq p, q \leq \infty$ ve $\alpha > 0$ olmak üzere Besov-Hankel uzayı $BH_{p,q}^{\alpha,\mu}$

$$A_{p,q}^{\alpha,\mu}(f) = \left\{ \int_0^\infty \left(\frac{\|\tau_t f - f\|_{p,\mu}}{t^\alpha} \right)^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q} < \infty$$

olacak şekildeki $f \in L_{p,\mu}$ fonksiyonlarının oluşturduğu uzaydır.

$BH_{p,q}^{\alpha,\mu}$ uzayının Littlewood-Paley tipi karakterizasyonunu veren teoremi ifade edelim.

Teorem 4.2 $1 \leq p, q < \infty$, $0 < \alpha < 1$ ve $f \in L_{p,\mu}$ olsun. Kabul edelimki $\psi = (\psi_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ \mathbb{R} üzerinde sürekli ve çift fonksiyonların

- (a) $\psi_0(x) = 0$, $|x| \geq 2$, ve $\psi_k(x) = 0$, $|x| \leq 2^{k-1}$ ve $|x| \geq 2^{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$,
- (b) $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|h_\mu(\psi_k)\|_{1,\mu} < \infty$,
- (c) Her $x \in \mathbb{R}$ için $\sum_{k=0}^\infty \psi_k(x) = 1$.

koşullarını sağlayan bir dizisi olsun.

Bu durumda $f \in BH_{p,q}^{\alpha,\mu}$ olması için gerek ve yeter koşul

$$E_{p,q}^{\alpha,\mu,\psi}(f) = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (2^{k\alpha} \|h_{\mu}(\psi_k) \#_{\mu} f\|_{p,\mu})^q \right\}^{1/q} < \infty$$

olmasıdır. Bundan başka $A_{p,q}^{\alpha,\mu}$ ve $E_{p,q}^{\alpha,\mu,\psi}$, $BH_{p,q}^{\alpha,\mu}$ uzayında aynı topolojiyi üretir (Betancor vd. 2001).

Bu teorem Besov-Hankel uzayının tanımının S'_e de genelleşmiş fonksiyonlara genişletilebileceğini göstermektedir. Böylece aşağıdaki tanımları verebiliriz.

Tanım 4.6 $1 \leq p, q < \infty$ ve $\alpha > 0$ olmak üzere Besov-Hankel uzayı $\mathbf{BH}_{p,q}^{\alpha,\mu}$

$$E_{p,q}^{\alpha,\mu,\psi}(f) = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (2^{k\alpha} \|h_{\mu}(\psi_k) \#_{\mu} f\|_{p,\mu})^q \right\}^{1/q} < \infty$$

olacak şekildeki $f \in S'_e$ lerin oluşturduğu uzaydır. Burada $\psi = (\psi_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, S_e deki fonksiyonların aşağıdaki şartları sağlayan bir dizisidir.

- (a) $\psi_0(x) = 0$, $|x| \geq 2$, $\psi_k(x) = 0$, $|x| \leq 2^{k-1}$ ve $|x| \geq 2^{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$,
- (b) $\sup_{k \in \mathbb{N}_0} \|h_{\mu}(\psi_k)\|_{1,\mu} < \infty$
- (c) $\forall x \in \mathbb{R}$ için $\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(x) = 1$ (Betancor ve Rodriguez-Mesa 2006).

Uyarı 4.1 $\mathbf{BH}_{p,q}^{\alpha,\mu}$ uzayının tanımı S_e deki fonksiyonların $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ dizisi (a), (b), (c) şartlarını sağlamak koşuluyla $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ dizisine bağlı değildir. Bundan başka $\psi = (\psi_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ ve $\phi = (\phi_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, S_e deki fonksiyonların (a), (b), (c) şartlarını sağlayan iki dizisi olmak üzere, öyle bir $C > 0$ sabiti vardır ki

$$\frac{1}{C} E_{p,q}^{\alpha,\mu,\psi}(f) \leq E_{p,q}^{\alpha,\mu,\phi}(f) \leq C E_{p,q}^{\alpha,\mu,\psi}(f), \quad f \in \mathbf{BH}_{p,q}^{\alpha,\mu}$$

dır.

Besov-Hankel uzayının tanımı aşağıdaki şekilde de verilebilir.

Tanım 4.7 $1 \leq p, q < \infty$ ve $\alpha > 0$ olmak üzere $\phi \in S_e$, $t > 0$ ve $j \in \mathbb{N}$ olsun.

$$\phi_{\{t\}}(x) = t^{-2(\mu+1)} \phi(x/t), \quad x \in (0, \infty)$$

ve $\phi_j = \phi_{\{2^{-j}\}}$ şeklinde tanımlanmış olsun.

Kabul edelim ki $|h_\mu(\phi)(x)| > 0$, $\frac{1}{2} < x < 2$ ve $\text{supp}h_\mu(\phi) \subset [1/4, 4]$ olsun. Aynı zamanda $|h_\mu(\Phi)(x)| > 0$, $x \in [0, 2]$ ve $\text{supp}h_\mu(\Phi) \subset [-4, 4]$ koşullarını sağlayan $\Phi \in S_e$ fonksiyonları göz önüne alınsın. $\mathbf{BH}_{p,q}^{\alpha,\mu}$ uzayı

$$\|f\|_{\mathbf{BH}_{p,q}^{\alpha,\mu}} = \|f\#\Phi\|_{p,\mu} + \|\{2^{k\alpha}\phi_k\#f\}_{k=1}^\infty\|_{l_q(L_{p,\mu})} < \infty$$

olacak şekildeki $f \in S'_e$ lerin oluşturduğu uzaydır.

$\mathbf{BH}_{p,q}^{\alpha,\mu}$ uzayının topolojisi $\|\cdot\|_{\mathbf{BH}_{p,q}^{\alpha,\mu}}$ tarafından tanımlanır (Betancor ve Rodriguez-Mesa 2006).

Tanım 4.8 E_* , \mathbb{R} üzerinde tanımlı çift ve düzgün fonksiyonların uzayıdır.

Tanım 4.9 D_* , E_* uzayında kompakt desteğe sahip bütün fonksiyonların uzayıdır.

Tanım 4.10 $(0, \infty)$ aralığının ölçülebilir her A altkümesi için

$\gamma_\mu(A) = \int_A x^{2\mu+1}dx$ olarak tanımlı γ_μ ölçüsüne karşılık gelen maksimal fonksiyonlar

$$\mathcal{M}_\mu(f)(x) = \sup_{x \in I} \frac{1}{\gamma_\mu(I)} \int_I |f(y)|y^{2\mu+1}dy, \quad x \in (0, \infty)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 4.3 f , $(0, \infty)$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer $f \in L_{p,\mu}$, $1 < p \leq \infty$ ise bu durumda $\mathcal{M}_\mu f \in L_{p,\mu}$ dür ve

$$\|\mathcal{M}_\mu f\|_{p,\mu} \leq C\|f\|_{p,\mu}$$

eşitsizliğinin sağlandığı f den bağımsız bir C sabiti vardır (Stempak 1985).

Tanım 4.11 $\{g_j\}_{j=1}^\infty$, $(0, \infty)$ üzerinde Lebesgue ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olmak üzere, $l_q(L_{p,\mu})$ ve $L_{p,\mu}(l_q)$ uzayları sırasıyla

$$\|\{g_j\}_{j=1}^\infty\|_{l_q(L_{p,\mu})} = \|\|g_j(\cdot)\|_{p,\mu}\|_{l_q} = \left(\sum_{j=1}^\infty \left(\int_0^\infty |g_j(x)|^p x^{2\mu+1} dx \right)^{q/p} \right)^{1/q} < \infty$$

$$\|\{g_j\}\|_{L_{p,\mu}(l_q)} = \|\|g_j(\cdot)\|_{l_q}\|_{p,\mu} = \left(\int_0^\infty \left(\sum_{j=1}^\infty |g_j(x)|^q \right)^{p/q} x^{2\mu+1} dx \right)^{1/p} < \infty$$

olacak şekildeki bütün $\{g_j\}_{j=1}^\infty$ dizilerinin uzayıdır.

Lemma 4.1 $1 \leq p, q \leq \infty$ ve $\sigma > 0$ olsun. $(0, \infty)$ üzerinde negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonların herhangi bir $\{g_j\}_{j=0}^{\infty}$ dizisi için

$$G_j(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-|k-j|\sigma} g_k(x), \quad x \in (0, \infty)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda C_1 ve C_2 sabitler olmak üzere

$$\|\{G_j\}_{j=0}^{\infty}\|_{l_q(L_{p,\mu})} \leq C_1 \|\{g_j\}_{j=0}^{\infty}\|_{l_q(L_{p,\mu})}$$

$$\|\{G_j\}_{j=0}^{\infty}\|_{L_{p,\mu}(l_q)} \leq C_2 \|\{g_j\}_{j=0}^{\infty}\|_{L_{p,\mu}(l_q)}$$

eşitsizlikleri gerçekleşir (Rychkov 1999).

Tanım 4.12 $j \in \mathbb{N}_0$, $a > 0$, $f \in S'_e$ ve $\phi \in S_e$ olsun. $\phi_{a,\mu}^*$ ve $\phi_{j,a,\mu}^*$ maksimal fonksiyonları

$$\phi_{a,\mu}^* f(x) = \sup_{y \in [0, \infty)} \frac{|\tau_x(f \# \phi)(y)|}{(1+y)^a}, \quad x \in [0, \infty)$$

ve

$$\phi_{j,a,\mu}^* f(x) = \sup_{y \in [0, \infty)} \frac{|\tau_x(f \# \phi_j)(y)|}{(1+2^j y)^a}, \quad x \in [0, \infty)$$

şeklinde tanımlanır (Betancor ve Rodriguez-Mesa 2006).

Uyarı 4.2 Bu maksimal fonksiyonlar Peetre maksimal fonksiyonlarının Hankel versiyonu olarak görülebilir.

Tanım 4.13 $\phi, \psi \in S_e$ ve $l \in \mathbb{N}_0$ olsun. Eğer aşağıda verilen (a) ve (b) koşulları sağlanıyorsa (ϕ, ψ) ikilisi $F_{l,\mu}$ kümesindedir denir.

(a) Belli bir $\epsilon > 0$ için, $h_\mu(\phi)(x) \neq 0, |x| < 2\epsilon$ ve $h_\mu(\psi)(x) \neq 0, \epsilon/2 < |x| < 2\epsilon$;

(b) $\Delta_\mu^k h_\mu(\psi)(0) = 0, k \in \mathbb{N}_0, 0 \leq k \leq l$ burada $\Delta_\mu, \Delta_\mu = x^{-2\mu-1} D x^{2\mu+1} D$ şeklinde tanımlı Bessel diferensiyel operatörünü göstermektedir.

Uyarı 4.3 Tanım 4.13 (b) koşulu bir sıfır moment koşuludur.

Özellik 4.1 $\mu > -1/2$ ve $\varphi \in S_e$ olmak üzere

$$(i) \quad h_\mu(x^{2k} \varphi) = (-1)^k \Delta_\mu^k (h_\mu \varphi), \quad k \in \mathbb{N}_0$$

$$(ii) \quad y^{2k} (h_\mu \varphi) = (-1)^k h_\mu(\Delta_\mu^k \varphi), \quad k \in \mathbb{N}_0$$

eşitlikleri sağlanır (Altenburg 1982).

Uyarı 4.4 Özellik (4.1) (i) kullanılarak Tanım 4.13 (b) koşulu

$$\Delta_\mu^k h_\mu(\psi)(0) = (-1)^k h_\mu(y^{2k}\psi)(0) = \frac{(-1)^k}{2^\mu \Gamma(\mu + 1)} \int_0^\infty y^{2k+2\mu+1} \psi(y) dy$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Özellik 4.2 $l \in \mathbb{N}_0$ olsun. $(\phi, \psi) \in F_{l,\mu}$ olacak şekilde $\phi, \psi \in D_*$ vardır.

İspat. $h_\mu(\Phi)(0) \neq 0 \neq h_\mu(\Psi)(0)$ olacak şekilde $\Phi, \Psi \in D_*$ ve $N > l$ olacak şekilde $N \in \mathbb{N}_0$ seçelim. $\phi = \Phi$ ve $\psi = \Delta_\mu^N \Psi$ tanımlarını yapalım. $\phi, \psi \in D_*$ olduğu açıktır. Ayrıca belli bir $\epsilon > 0$ için, $h_\mu(\phi)(x) \neq 0, |x| < 2\epsilon$ ve Özellik (4.1) (ii) kullanılarak da

$$h_\mu(\psi)(x) = (-x^2)^N h_\mu(\Psi)(x) \neq 0, \quad \epsilon/2 < |x| < 2\epsilon$$

eşitliklerinin varlığı görülür. Özellik (4.1) (ii), $k < N$ olmak koşuluyla

$$\Delta_\mu^k h_\mu(\psi)(0) = \Delta_\mu^k [(-x^2)^N h_\mu(\Psi)(x)]|_{x=0} = 0$$

olmasını gerektirir. Böylece $(\phi, \psi) \in F_{l,\mu}$ dır.

Lemma 4.2 $g, G \in S_e$ ve $M \geq 0$ olsun. Kabul edelim ki

$$\int_0^\infty x^{2k+2\mu+1} g(x) dx = 0, \quad k = 0, 1, \dots, M.$$

olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$\sup_{z \in (0, \infty)} |g_{\{t\}} \# G(z)| (1+z)^n \leq C_n t^{2(M+1)}, \quad t > 0.$$

olacak şekilde $C_n > 0$ vardır.

İspat. $n \in \mathbb{N}_0$ ve $a > 0$ olsun. Lemma 2.2.4 ve Özellik (4.1) (ii) yardımıyla

$$\begin{aligned} (1+z^2)^n (g_{\{t\}} \# G)(z) &= (1+z^2)^n h_\mu(h_\mu(g_{\{t\}} \# G))(z) \\ &= h_\mu[(1-\Delta_\mu)^n (h_\mu(g_{\{t\}}) h_\mu(G))](z) \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j h_\mu[\Delta_\mu^j (h_\mu(g_{\{t\}}) h_\mu(G))](z), \quad t, z \in (0, \infty) \end{aligned}$$

yazabiliriz. Kolay bir hesaplama ile her $j \in \mathbb{N}_0$ için,

$$\Delta_\mu^j = \sum_{r=j}^{2j} p_{r,j}(x) \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^r$$

olduğunu elde ederiz. Burada $p_{r,j}$, $r = j, \dots, 2j$ çift polinomdur. Bundan başka, her $r \in \mathbb{N}_0$ için,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^r [h_\mu(g_{\{t\}})(x) h_\mu(G)(x)] \\ &= \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^k [h_\mu(g)(tx)] \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^{r-k} [h_\mu(G)(x)] \\ &= \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} t^{2k} \left(\frac{1}{u} \frac{d}{du} \right)^k h_\mu(g)(u) \Big|_{u=xt} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^{r-k} [h_\mu(G)(x)], \quad x, t \in (0, \infty) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Hipotez bize

$$\left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^k h_\mu(g)(x) \Big|_{x=0} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, M$$

olduğunu söylemektedir. Böylece, Lemma 2.2.6 ve (Zemanian 1972) den, her $k \in \mathbb{N}_0$ için

$$\left| \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^k h_\mu(g)(x) \right| \leq C x^{2(M+1-k)}, \quad x > 0$$

olacak şekilde $C > 0$ olduğu sonucunu çıkarırız. Elde edilen sonuçlar birleştirilerek istenen sonuca ulaşılır.

Şimdi $\mathbf{BH}_{p,q}^{\alpha,\mu}$ uzaylarının elemanlarının yeni bir karakterizasyonu verilecektir. Bu sonuç Bui vd. (1996, 1997) çalışmalarındaki sonucunun bir Hankel uyarlaması olarak görülebilir. Verilecek olan teoremdaki $A \sim B$ gösterimi $\frac{1}{C}A \leq B \leq CA$ olacak biçimde $C > 0$ sabitinin var olduğu anlamına gelmektedir.

Teorem 4.4 $l \in \mathbb{N}_0$, $\alpha < 2(l+1)$ ve $\phi, \psi \in S_e$ öyle ki $(\phi, \psi) \in F_{l,\mu}$ olsun. Bu durumda her $f \in S'_e$ için

$$\|f\|_{\mathbf{BH}_{p,q}^{\alpha,\mu}} \sim \|\phi_{a,\mu}^* f\|_{p,\mu} + \|\{2^{j\alpha} \psi_{j,a,\mu}^* f\}_{j=0}^\infty\|_{l_q(L_{p,\mu})} \quad (4.3)$$

dır (Betancor ve Rodriguez-Mesa 2006).

İspat. Belli bir $\eta > 0$ için, $h_\mu(\Phi)(y) \neq 0$, $|y| < 2\eta$ ve $h_\mu(\varphi)(y) \neq 0$, $y \in (\eta/2, 2\eta)$ olacak şekilde $\Phi, \varphi \in S_e$ seçelim. Öyle iki $\Lambda, \lambda \in S_e$ fonksiyonları bulabiliriz ki

$h_\mu(\Lambda)(x) = 0$, $|x| > 2\eta$, $h_\mu(\lambda)(x) = 0$, $x \in (0, \infty) \setminus (\eta/2, 2\eta)$ ve

$$h_\mu(\Lambda)(x)h_\mu(\Phi)(x) + \sum_{k=1}^{\infty} h_\mu(\lambda)(2^{-k}x)h_\mu(\varphi)(2^{-k}x) = 1, \quad x \in (0, \infty) \quad (4.4)$$

Burada (4.4) deki yakınsama S_e uzayının noktasal çarpanlarının uzayı O_e uzayında anlaşılmalıdır. Gerçekten, $h_\mu(\lambda)(x) = 0$, $x \in (0, \eta/2)$ ve $\lambda \in S_e$ olduğundan her $k \in \mathbb{N}_0$ için

$$\left| \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^k h_\mu(\lambda)(x) \right| \leq Cx, \quad x \in (0, \infty)$$

olacak şekilde $C > 0$ vardır. Bundan dolayı, her $l \in \mathbb{N}_0$ için,

$$\begin{aligned} & \left| \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \left(h_\mu(\Lambda)(x)h_\mu(\Phi)(x) + \sum_{k=1}^n h_\mu(\lambda)(2^{-k}x)h_\mu(\varphi)(2^{-k}x) \right) \right| \\ & \leq C \left(1 + \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^l \left| \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^j (h_\mu(\lambda)(2^{-k}x)) \right| \left| \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^{l-j} (h_\mu(\varphi)(2^{-k}x)) \right| \right) \\ & \leq C \left(1 + \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^l 2^{-2kl} \left| \left(\frac{1}{u} \frac{d}{du} \right)^j (h_\mu(\lambda)(u)) \Big|_{u=2^{-k}x} \right| \right) \\ & \leq C \left(1 + x \sum_{k=1}^n 2^{-k} \right) \leq C(1+x), \quad x \in (0, \infty) \text{ ve } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

elde edilir.

$w \in S_e$ ve $\epsilon > 0$ olsun. Her $l \in \mathbb{N}_0$ ve belli bir $x_0 \in (0, \infty)$ için

$$\begin{aligned} & \left| \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \left(h_\mu(\Lambda)(x)h_\mu(\Phi)(x) + \sum_{k=1}^n h_\mu(\lambda)(2^{-k}x)h_\mu(\varphi)(2^{-k}x) - 1 \right) w(x) \right| \\ & \leq C \frac{1}{1+x^2} \left| \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l (h_\mu(\Lambda)(x)h_\mu(\Phi)(x) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \sum_{k=1}^n h_\mu(\lambda)(2^{-k}x)h_\mu(\varphi)(2^{-k}x) - 1 \right) \right| \\ & \leq C \frac{1+x}{1+x^2} < \epsilon, \quad x \geq x_0 \quad \text{ve } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Diğer yandan eğer $x \in (0, x_0)$ ise

$$\begin{aligned} & h_\mu(\Lambda)(x)h_\mu(\Phi)(x) + \sum_{k=1}^{\infty} h_\mu(\lambda)(2^{-k}x)h_\mu(\varphi)(2^{-k}x) \\ &= h_\mu(\Lambda)(x)h_\mu(\Phi)(x) + \sum_{k=1}^n h_\mu(\lambda)(2^{-k}x)h_\mu(\varphi)(2^{-k}x) = 1, \quad n \geq n_0 \end{aligned}$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}_0$ vardır.

Yukarıda elde edilen sonuçlardan $n \rightarrow \infty$ iken ve her $l \in \mathbb{N}_0$ için

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in (0, \infty)} \left| \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l (h_\mu(\Lambda)(x)h_\mu(\Phi)(x) \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^n h_\mu(\lambda)(2^{-k}x)h_\mu(\varphi)(2^{-k}x) - 1 \right) w(x) \Big| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

olduğu sonucunu çıkarırız. Böylece O_e uzayındaki yakınsaklık anlamında

$$h_\mu(\Lambda)(x)h_\mu(\Phi)(x) + \sum_{k=1}^{\infty} h_\mu(\lambda)(2^{-k}x)h_\mu(\varphi)(2^{-k}x) = 1$$

olduğunu kanıtlamış oluruz.

δ Dirac fonksiyoneli göstermek üzere (4.4), $\mathcal{O}'_{\#}$ deki yakınsaklık anlamında

$$\Lambda \# \Phi + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \# \varphi_k = \delta, \tag{4.5}$$

ifadesine denktir.

(4.5) den her $f \in S'_e$ için

$$f = f \# \Lambda \# \Phi + \sum_{k=1}^{\infty} f \# \lambda_k \# \varphi_k$$

eşitliğinin sağlandığını görürüz. Böylece her $j \in \mathbb{N}_0$ için,

$$f \# \psi_j = f \# \psi_j \# \Lambda \# \Phi + \sum_{k=1}^{\infty} f \# \psi_j \# \lambda_k \# \varphi_k$$

olduğunu yazabiliriz.

$k, j \in \mathbb{N}$ ve $a > 0$ olsun. Hankel ötelemesi $\tau_x, x \in (0, \infty)$ ve Hankel konvolüsyonunun yer değiştirmesinden,

$$\begin{aligned} |\tau_x(f \# \psi_j \# \lambda_k \# \varphi_k)(y)| &= |\lambda_k \# \psi_j \# \tau_x(f \# \varphi_k)(y)| \\ &\leq \int_0^\infty |(\lambda_k \# \psi_j)(z)| |\tau_y(\tau_x(f \# \varphi_k))(z)| \frac{z^{2\mu+1}}{2^\mu \Gamma(\mu+1)} dz \end{aligned}$$

gerçeklenir. Bundan başka, Özellik 2.2.1 (iv) ten,

$$\begin{aligned} |\tau_y(\tau_x(f \# \varphi_k))(z)| &\leq \int_{|y-z|}^{y+z} D(y, z, w) |\tau_x(f \# \varphi_k)(w)| \frac{w^{2\mu+1}}{2^\mu \Gamma(\mu+1)} dw \\ &= \int_{|y-z|}^{y+z} (1+2^k w)^a D(y, z, w) \frac{|\tau_x(f \# \varphi_k)(w)|}{(1+2^k w)^a} \frac{w^{2\mu+1}}{2^\mu \Gamma(\mu+1)} dw \\ &\leq (1+2^k(y+z))^a \varphi_{k,a,\mu}^* f(x) \\ &\leq (1+2^k y)^a (1+2^k z)^a \varphi_{k,a,\mu}^* f(x), \quad x, z, y \in (0, \infty) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} &|\tau_x(f \# \psi_j \# \lambda_k \# \varphi_k)(y)| \\ &\leq (1+2^k y)^a \varphi_{k,a,\mu}^* f(x) \int_0^\infty |(\lambda_k \# \psi_j)(z)| (1+2^k z)^a \frac{z^{2\mu+1}}{2^\mu \Gamma(\mu+1)} dz \\ &\leq (1+2^j y)^a \varphi_{k,a,\mu}^* f(x) \max\{1, 2^{(k-j)a}\} I_{j,k}, \quad x, y \in (0, \infty) \end{aligned}$$

eşitsizliklerinin sağlandığı görülür. Burada

$$I_{j,k} = \int_0^\infty |(\lambda_k \# \psi_j)(z)| (1+2^k z)^a \frac{z^{2\mu+1}}{2^\mu \Gamma(\mu+1)} dz$$

integralidir. Böylece

$$\begin{aligned} &\sup_{y \in (0, \infty)} \frac{|\tau_x(f \# \psi_j \# \lambda_k \# \varphi_k)(y)|}{(1+2^j y)^a} \\ &\leq \varphi_{k,a,\mu}^* f(x) \max\{1, 2^{(k-j)a}\} I_{j,k}, \quad x \in (0, \infty) \end{aligned}$$

olduğu sonucu çıkarılır.

Şimdi $I_{j,k}$ integralini hesaplayalım. Kabul edelim ki $k \leq j$ olsun.

$$(\lambda_k \# \psi_j)(2^{-k}t) = \int_0^\infty \psi_j(y) (\tau_{2^{-k}t} \lambda_k)(y) \frac{y^{2\mu+1}}{2^\mu \Gamma(\mu+1)} dy$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \psi_j(y) \int_0^\infty D(2^{-k}t, y, x) \lambda_k(x) \frac{x^{2\mu+1}}{2^\mu \Gamma(\mu+1)} dx \frac{y^{2\mu+1}}{2^\mu \Gamma(\mu+1)} dy \\
&= \int_0^\infty \psi_j(y) \int_0^\infty D(2^{-k}t, y, 2^{-k}u) \lambda(u) \frac{u^{2\mu+1}}{2^\mu \Gamma(\mu+1)} du \frac{y^{2\mu+1}}{2^\mu \Gamma(\mu+1)} dy \\
&= 2^{2k(\mu+1)} \int_0^\infty \psi_j(y) \int_0^\infty D(t, 2^k y, u) \lambda(u) \frac{u^{2\mu+1}}{2^\mu \Gamma(\mu+1)} du \frac{y^{2\mu+1}}{2^\mu \Gamma(\mu+1)} dy \\
&= \int_0^\infty \psi(2^{j-k}y) 2^{2j(\mu+1)} \int_0^\infty D(t, y, u) \lambda(u) \frac{u^{2\mu+1}}{2^\mu \Gamma(\mu+1)} du \frac{y^{2\mu+1}}{2^\mu \Gamma(\mu+1)} dy \\
&= 2^{2k(\mu+1)} (\psi_{j-k} \# \lambda)(t), \quad t \in (0, \infty)
\end{aligned}$$

eşitlikleri gerçekleşir. Böylece eğer $s > 2(\mu+1)$ ise Lemma 4.2 den

$$\begin{aligned}
I_{j,k} &= \int_0^\infty |(\lambda_k \# \psi_j)(z)| (1+2^k z)^a \frac{z^{2\mu+1}}{2^\mu \Gamma(\mu+1)} dz \\
&= \int_0^\infty |(\psi_{j-k} \# \lambda)(t)| (1+t)^a \frac{t^{2\mu+1}}{2^\mu \Gamma(\mu+1)} dt \\
&\leq C \sup_{t \in (0, \infty)} |(\psi_{j-k} \# \lambda)(t)| (1+t)^{a+s} \leq C 2^{(k-j)(l+1)}
\end{aligned}$$

yazabiliriz çünkü $\int_0^\infty \psi(x) x^{2n+2\mu+1} dx = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots, l$ dır.

Diğer yandan eğer $k \geq j$ ise

$$\begin{aligned}
I_{j,k} &\leq \int_0^\infty |(\psi \# \lambda_{k-j})(t)| (1+2^{k-j}t)^a \frac{t^{2\mu+1}}{2^\mu \Gamma(\mu+1)} dt \\
&\leq 2^{(k-j)a} \int_0^\infty |(\psi \# \lambda_{k-j})(t)| (1+t)^a \frac{t^{2\mu+1}}{2^\mu \Gamma(\mu+1)} dt \\
&\leq C 2^{(k-j)a} 2^{-2(k-j)(a+\alpha+1)} = C 2^{(j-k)(2\alpha+2+a)}
\end{aligned}$$

yazabiliriz çünkü her $m \in \mathbb{N}_0$ için $\int_0^\infty \lambda(t) t^{2m+2\mu+1} dt = 0$ dır. Buradan,

$$\sup_{y \in (0, \infty)} \frac{|\tau_x(f \# \psi_j \# \lambda_k \# \varphi_k)(y)|}{(1+2^j y)^a} \leq \varphi_{k,a,\mu}^* f(x) \begin{cases} 2^{(k-j)(l+1)}, & k \leq j, \\ 2^{(j-k)(\alpha+1)}, & k > j. \end{cases}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

$k = 1$ ise $k \leq j$, $j \in \mathbb{N}_0$ olduğundan λ fonksiyonu için sıfır moment özelliğinin kullanılmadığına, $j = 1$ için de ψ fonksiyonunun sıfır moment özelliğine ihtiyaç duyulmadığına dikkat edilmelidir.

Benzer bir yolla

$$\sup_{y \in (0, \infty)} \frac{|\tau_x(f \# \psi_j \# \Lambda \# \Phi)(y)|}{(1 + 2^j y)^a} \leq \Phi_{a, \mu}^* f(x) 2^{-j(l+1)}$$

olduğu görülebilir. Buradan her $x \in (0, \infty)$ için,

$$\psi_{j, a, \mu}^* f(x) \leq C \left(\Phi_{a, \mu}^* f(x) 2^{-j(l+1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{k, a, \mu}^* f(x) \begin{cases} 2^{(k-j)(l+1)}, & k \leq j, \\ 2^{(j-k)(\alpha+1)}, & k > j. \end{cases} \right)$$

ve $\sigma = \min\{1, l + 1 - \alpha\}$ alınarak

$$2^{j\alpha} \psi_{j, a, \mu}^* f(x) \leq C \left(\Phi_{a, \mu}^* f(x) 2^{-j\sigma} + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k\alpha} \varphi_{k, a, \mu}^* f(x) 2^{-|j-k|\sigma} \right)$$

eşitsizliklerinin gerçekleştiği görülür. Benzer şekilde her $x \in (0, \infty)$ için,

$$\phi_{a, \mu}^* f(x) \leq C \left(\Phi_{a, \mu}^* f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k\alpha} \varphi_{k, a, \mu}^* f(x) 2^{-k\sigma} \right)$$

eşitsizliği elde edilir. Lemma 4.1 den

$$\begin{aligned} \|\phi_{a, \mu}^* f\|_{p, \mu} + \|\{2^{j\alpha} \psi_{j, a, \mu}^* f\}_{j=1}^{\infty}\|_{l_q(L_{p, \mu})} & \quad (4.6) \\ & \leq C (\|\Phi_{a, \mu}^* f\|_{p, \mu} + \|\{2^{j\alpha} \varphi_{j, a, \mu}^* f\}_{j=1}^{\infty}\|_{l_q(L_{p, \mu})}) \end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

Yukarıdaki gibi $h_{\mu}(\Lambda)(x) = 0$, $|x| > 2\eta$, $h_{\mu}(\lambda)(x) = 0$, $x \in (0, \infty) \setminus (\eta/2, 2\eta)$ olacak şekilde ve her $f \in S'_e$ için

$$f = \Lambda \# \phi \# f + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \# \psi_k \# f$$

eşitliğini sağlayacak şekilde $\Lambda, \lambda \in S_e$ bulunabilir. Kolay bir hesaplama ile her $f \in S'_e$ için

$$f = \Lambda_j \# \phi_j \# f + \sum_{k=j+1}^{\infty} \lambda_k \# \psi_k \# f, \quad j \in \mathbb{N}_0$$

olduğu görülebilir. Buradan her $j \in \mathbb{N}$ için

$$\psi_j \# f = (\Lambda_j \# \phi_j) \# (\psi_j \# f) + \sum_{k=j+1}^{\infty} (\psi_j \# \lambda_k) \# (\psi_k \# f)$$

eşitliği elde edilir.

$j \in \mathbb{N}$ olsun. Lemma 4.2 kullanılarak eğer $k \geq j$ ise her $m, n \in \mathbb{N}_0$ için

$$|(\psi_j \# \lambda_k)(z)| = |2^{2j(\mu+1)}(\psi \# \lambda_{k-j})(2^j z)| \leq C_n \frac{2^{2j(\mu+1)} 2^{(j-k)n}}{(1+2^j z)^m}, \quad z \in (0, \infty)$$

olduğu elde edilir çünkü her $n \in \mathbb{N}_0$ için $\int_0^\infty \lambda(t) t^{2n+2\mu+1} dt = 0$ dir.

$\Lambda \# \phi \in S_e$ olduğundan da her $m \in \mathbb{N}_0$ için

$$|(\Lambda_j \# \phi_j)(z)| = |2^{2j(\mu+1)}(\Lambda \# \phi)(2^j z)| \leq C \frac{2^{2j(\mu+1)}}{(1+2^j z)^m}, \quad z \in (0, \infty)$$

elde edilir. Buradan her $s, n \in \mathbb{N}_0$ ve $x, y \in (0, \infty)$ için

$$\begin{aligned} |\tau_x(\psi_j \# f)(y)| &= |(\Lambda_j \# \phi_j) \# (\tau_x(\psi_j \# f))(y)| \\ &\quad + \sum_{k=j+1}^{\infty} |(\psi_j \# \lambda_k) \# (\tau_x(\psi_k \# f))(y)| \\ &\leq C \sum_{k=j}^{\infty} 2^{2j(\mu+1)} 2^{(j-k)n} \int_0^\infty |(\tau_x(\psi_k \# f))(y)| \\ &\quad \cdot \int_{|z-y|}^{z+y} D(y, z, u) \frac{u^{2\mu+1}}{(1+2^j u)^{a+s}} du z^{2\mu+1} dz \\ &\leq C \sum_{k=j}^{\infty} 2^{2j(\mu+1)} 2^{(j-k)n} \int_0^\infty \frac{|(\tau_x(\psi_k \# f))(y)|}{(1+2^j |z-y|)^a} \\ &\quad \cdot \int_{|z-y|}^{z+y} D(y, z, u) \frac{u^{2\mu+1}}{(1+2^j u)^s} du z^{2\mu+1} dz \end{aligned}$$

gerçeklenir.

$r > \max\{1, 2(\mu+1)/a\}$ ve r' , r nin eşleniği olmak üzere $sr' > 2\mu+2$ olacak şekilde $n, s \in \mathbb{N}_0$ olsun. Hölder eşitsizliği her $x, y \in (0, \infty)$ için

$$\begin{aligned} &\sum_{k=j}^{\infty} 2^{(j-k)(n+a+1)} \int_0^\infty \frac{|(\tau_x(\psi_k \# f))(y)|}{(1+2^j |z-y|)^a} z^{2\mu+1} \int_0^\infty D(y, z, u) \frac{u^{2\mu+1}}{(1+2^j u)^s} du dz \\ &\leq \left(\sum_{k=j}^{\infty} 2^{(j-k)r'} \right)^{1/r'} \left(\sum_{k=j}^{\infty} 2^{(j-k)(n+a)r} \left[\int_0^\infty \frac{|(\tau_x(\psi_k \# f))(y)|}{(1+2^j |z-y|)^a} z^{2\mu+1} \right] \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left[\int_0^\infty D(y, z, u) \frac{u^{2\mu+1}}{(1+2^j u)^s} du dz \right]^r \Big)^{1/r} \\
& \leq C \left(\sum_{k=j}^\infty 2^{(j-k)(n+a)r} \int_0^\infty \frac{|(\tau_x(\psi_k \# f))(y)|}{(1+2^j|z-y|)^{ar}} z^{2\mu+1} dz \right. \\
& \quad \left. \cdot \left\{ \int_0^\infty z^{2\mu+1} \left(\int_0^\infty D(y, z, u) \frac{u^{2\mu+1}}{(1+2^j u)^s} du \right)^{r'} dz \right\}^{r/r'} \right)^{1/r}
\end{aligned}$$

olmasını gerektirir.

Özellik 2.2.1 (iv) ve Jensen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=j}^\infty 2^{(j-k)(n+a+1)r} \int_0^\infty \frac{|(\tau_x(\psi_k \# f))(y)|}{(1+2^j|z-y|)^a} z^{2\mu+1} \int_0^\infty D(y, z, u) \frac{u^{2\mu+1}}{(1+2^j u)^s} du dz \\
& \leq C \left\{ \sum_{k=j}^\infty 2^{(j-k)(n+a)r} \int_0^\infty \frac{\tau_x(|\psi_k \# f|^r)(z)}{(1+2^j|z-y|)^{ar}} z^{2\mu+1} dz \right. \\
& \quad \left. \cdot \left(\int_0^\infty \frac{u^{2\mu+1}}{(1+2^j u)^{sr'}} du \right)^{r/r'} \right\}^{1/r} \\
& \leq C 2^{-2(\mu+1)j/r'} \left\{ \sum_{k=j}^\infty 2^{(j-k)(n+a)r} \int_0^\infty \frac{\tau_x(|\psi_k \# f|^r)(z)}{(1+2^j|z-y|)^{ar}} z^{2\mu+1} dz \right\}^{1/r}, \\
& \quad x, y \in (0, \infty)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$x, y, z \in (0, \infty)$ ve $k \geq j$ için $(1+2^j y)(1+2^j|y-z|) \geq 1+2^j z$ ve $1+2^k z \leq 2^{k-j}(1+2^j z)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
& \frac{|\tau_x(\psi_j \# f)(y)|}{(1+2^j y)^a} \\
& \leq C 2^{2(\mu+1)j/r} \left\{ \sum_{k=j}^\infty 2^{(j-k)(n+a)r} \int_0^\infty \frac{\tau_x(|\psi_k \# f|^r)(z)}{(1+2^j|z-y|)^{ar}(1+2^j y)^{ar}} z^{2\mu+1} dz \right\}^{1/r} \\
& \leq C \left\{ \sum_{k=j}^\infty 2^{(j-k)nr} \int_0^\infty \frac{2^{2(\mu+1)k} \tau_x(|\psi_k \# f|^r)(z)}{(1+2^k z)^{ar}} z^{2\mu+1} dz \right\}^{1/r}, \quad x, y \in (0, \infty)
\end{aligned}$$

gerçeklenir. Böylece

$$[\psi_{j,a,\mu}^* f(x)]^r \leq C \sum_{k=j}^\infty 2^{(j-k)nr} \int_0^\infty \frac{2^{2(\mu+1)k} \tau_x(|\psi_k \# f|^r)(z)}{(1+2^k z)^{ar}} z^{2\mu+1} dz,$$

$$x \in (0, \infty)$$

eşitsizliği gerçekleşir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\tau_x(|\psi_k \# f|^r)(z)}{(1+2^k z)^{ar}} z^{2\mu+1} dz &= \sum_{m=0}^\infty \int_{2^m}^{2^{m+1}} \frac{\tau_x(|\psi_k \# f|^r)(z)}{(1+2^k z)^{ar}} z^{2\mu+1} dz \\ &\quad + \int_0^1 \frac{\tau_x(|\psi_k \# f|^r)(z)}{(1+2^k z)^{ar}} z^{2\mu+1} dz \\ &= \sum_{m=0}^\infty \frac{1}{(1+2^{k+m})^{ar}} \int_0^{2^{m+1}} \tau_x(|\psi_k \# f|^r)(z) z^{2\mu+1} dz \\ &\quad + \int_0^1 \tau_x(|\psi_k \# f|^r)(z) z^{2\mu+1} dz \\ &\leq C \sum_{m=0}^\infty \frac{2^{2(\mu+1)(m+1)}}{2^{kar} 2^{mar}} \mathcal{M}_\mu(|\psi_k \# f|^r)(x) + \mathcal{M}_\mu(|\psi_k \# f|^r)(x), \quad x \in (0, \infty) \end{aligned}$$

yazılabilir. $ar > 2(\mu + 1)$ olduğundan

$$[\psi_{j,a,\mu}^* f(x)]^r \leq C \sum_{k=j}^\infty 2^{(j-k)nr} \mathcal{M}_\mu(|\psi_k \# f|^r)(x), \quad x \in (0, \infty)$$

sonucu elde edilir.

Benzer bir yolla

$$[\phi_{a,\mu}^* f(x)]^r \leq C \left(\sum_{k=1}^\infty 2^{-knr} \mathcal{M}_\mu(|\psi_k \# f|^r)(x) + \mathcal{M}_\mu(|\phi \# f|^r)(x) \right), \quad x \in (0, \infty)$$

olduğu görülebilir. Minkowski eşitsizliği iki defa uygulanarak

$$\begin{aligned} \|\phi_{a,\mu}^* f\|_{p,\mu} + \|\{2^{j\alpha} \psi_{j,a,\mu}^* f\}_{j=1}^\infty\|_{l_q(L_{p,\mu})} \\ \leq C (\|\mathcal{M}_{\mu,r}(|\phi \# f|)\|_{p,\mu} + \|\{2^{j\alpha} \mathcal{M}_{\mu,r}(|\psi_j \# f|)\}_{j=1}^\infty\|_{l_q(L_{p,\mu})}) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Teorem 4.3 den

$$\begin{aligned} \|\phi_{a,\mu}^* f\|_{p,\mu} + \|\{2^{j\alpha} \psi_{j,a,\mu}^* f\}_{j=1}^\infty\|_{l_q(L_{p,\mu})} \\ \leq C (\|\phi \# f\|_{p,\mu} + \|\{2^{j\alpha} |\psi_j \# f|\}_{j=1}^\infty\|_{l_q(L_{p,\mu})}) \end{aligned} \tag{4.7}$$

elde edilir.

(4.6) ve (4.7) ele alınır ve Teorem 3.2 ispatı son adımdaki işlemler tekrarlanırsa istenen sonuç elde edilmiş olur.

KAYNAKLAR

- Altenburg, G. 1982. Bessel-Transformationen in Räumen von Grundfunktionen über dem Intervall $\Omega = (0, \infty)$ und deren Dualräumen. *Math. Nachr.*, Vol. 108, pp. 197-218.
- Altenburg, G. 1984. Eine Realisierung der Theorie der abstrakten Besov-Räume $B_q^s(A)$, ($s > 0, 1 \leq q \leq \infty$) und der Lebesgue-Räume $H_{p,\mu}^s$ auf der Grundlage Besselscher Differentialoperatoren. *Z. Anal. Anwendungen*, Vol. 3, pp. 43-63
- Assal, M. and Abdallah, H. Ben. 2006. Generalized weighted Besov spaces on the Bessel hypergroup. *J. Funct. Spaces Appl.* 4, no. 1, pp. 91-111.
- Betancor, J. J. and Marrero, I. 1992. Multipliers of Hankel transformable generalized functions. *Comment. Math. Univ. Carolinae*, Vol. 33, pp. 389-401.
- Betancor, J. J., Méndez, J. M. and Rodríguez-Mesa, L. 2001. Besov spaces associated with the Hankel transform. *Margarita Mathematica*, Univ. La Rioja, Logrono, pp. 661-675.
- Betancor, J. J. and Rodríguez-Mesa, L. 1998. On the Besov-Hankel spaces. *J. Math. Soc. Japan*, Vol. 50, pp. 781-788.
- Betancor, J. J. and Rodríguez-Mesa, L. 2006. On Besov spaces in the Hankel setting. *Acta Math. Hungar.* 111, 3, pp. 237-262.
- Bui, H.-Q., Paluszynski, M. and Taibleson, M. 1996. A maximal function characterization of weighted Besov-Lipschitz and Triebel-Lizorkin spaces. *Studia Math.*, Vol. 119, pp. 219-246.
- Bui, H.-Q., Paluszynski, M. and Taibleson, M. 1997. Characterization of Besov-Lipschitz and Triebel-Lizorkin spaces. The case $q < 1$. *J. Fourier Anal. Appl.*, Vol. 3, pp. 837-846.
- Cholewinski, F. M. and Haimo, D. T. 1966. The Weierstrass-Hankel convolution transform. *J. Analyse Math.*, Vol. 13, pp. 1-58.
- Cruz-Báez, I. and Rodriguez, J. 2001. Spaces of Distributions of Besov and Triebel-Lizorkin Type for the Fourier-Bessel Transform. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 259, pp. 51-63.
- Duoandikoetxea, J. 2001, *Fourier analysis*, Graduate Studies in Mathematics, 297, American Mathematical Society, Providence.
- Haimo, D. T. 1965. Integral equations associated with Hankel convolutions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 116, pp. 330-375.
- Herz, C. S. 1954. On the mean inversion of Fourier and Hankel transforms. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 40, 996-999.
- Hirschman, I. I. Jr. 1960/61. Variation diminishing Hankel transforms. *J. Analyse Math.*, Vol. 8, pp. 307-336.
- Marrero, I. and Betancor, J. J. 1995. Hankel convolution of generalized functions.

- Rend. Mat.Appl., Vol. 15, pp. 351-380.
- Pathak, R. S. and Pandey, P. K. 1997. Sobolev type spaces associated with Bessel operators. *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 215, pp. 95-111
- Peetre, J. 1975. On spaces of Triebel-Lizorkin type. *Ark. Mat.*, Vol. 13, pp. 123-130.
- Peetre, J. 1975. Correction to the paper On spaces of Triebel-Lizorkin type. *Ark. Mat.*, Vol. 14, 299.
- Rychkov, V. S. 1999. On a theorem of Bui, Paluszyński and Taibleson (in Russian). *Tr. Mat. Inst. Steklova*, 227, 286-298; translation in *Proc. Steklov Inst. Math.*, Vol. 227, pp. 280-292.
- Stein, E. M. 1970. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ.
- Stempak, K. 1985. The Littlewood-Paley theory for the Fourier-Bessel transform. preprint No. 45, Math. Inst. Univ. Wrocław.
- Stempak, K. 1997. A Note on Zemanian Spaces. *Extracta Mathematicae* Vol. 12, Núm 1, 33-40
- Triebel, H. 1983. *Theory of Function Spaces*, Monographs in Math. 78, Birkhäuser, 284p, Boston.
- Zemanian, A. H. 1968. *Generalized Integral Transformations*, Interscience Publishers, New York.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Fatih DERİNGÖZ
Doğum Yeri : Ankara
Doğum Tarihi : 31.01.1986
Medeni Hali : Bekar
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Ankara Kalaba Anadolu Lisesi (2004)
Lisans : Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü (2008)
Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı (Eylül 2009 - Haziran 2011)