

T.C.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DÖNÜŞÜMSEL YÜKSEK BOYUTLU MODEL
GÖSTERİLİM YÖNTEMİNDE KONİK DÖNÜŞÜMLERİN
TEMEL ÖZELLİKLERİ

Zeynep GÜNDOĞAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN

Doç. Dr. N. Abdülbaki BAYKARA

II. DANIŞMAN

Prof. Dr. Metin DEMİRALP

İSTANBUL 2011

T.C.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DÖNÜŞÜMSEL YÜKSEK BOYUTLU MODEL
GÖSTERİLİM YÖNTEMİNDE KONİK DÖNÜŞÜMLERİN
TEMEL ÖZELLİKLERİ

Zeynep GÜNDOĞAR

(521109002)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN

Doç. Dr. N. Abdülbaki BAYKARA

II. DANIŞMAN

Prof. Dr. Metin DEMİRALP

İSTANBUL 2011

TEŞEKKÜR

Öncelikle lisanstan beri kendisini tanıma fırsatına eriştiğim, yüksek lisansa başlamama karar vermemde ve bilim yolunda ilerlemem konusunda benim için öncü olan, tanıdığım günden bu yana bilgi ve deneyimini, desteğini benden esirgemeyen, çok değerli tez danışman hocam Doç. Dr. N. Abdülbaki BAYKARA'ya emeklerinden ötürü sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tezin her aşamasında yol gösterimleri ile ufkumu açan, beni Bilişim Enstitüsü Bilişim Bilimleri ve Yöntemleri Topluluğu(BEBBYT)'ye kabul ederek bilim yolunda ilerlememe katkıda bulunan, değerli eş danışman hocam Prof. Dr. Metin DEMİRALP'e çok çok teşekkür ederim.

Tezimi hazırlarken deneyimlerini ve manevi desteğini benden esirgemeyen Ercan GÜRVİT'e, bu süreçte desteği, yardımları ve yönlendirmeleri ile tezime çok büyük katkısı olan Süha TUNA'ya, gerek ders alma sürecinde gerekse tez aşamasında aynı sıkıntıları paylaştığım ve beni en iyi anlayan ve motive eden, her zaman yanımda olan sevgili arkadaşım, yoldaşım Ayla OKAN'a, sabrımı ve manevi desteğini benden esirgemeyen ev arkadaşım Özlem ŞEN'e sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Canım ailem bu tezi size adıyorum.

ARALIK 2011

Zeynep Gündoğar

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	i
İÇİNDEKİLER.....	iii
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
KISALTMALAR.....	vi
ŞEKİLLER.....	vii
TABLolar.....	viii
I GİRİŞ VE AMAÇ.....	1
II GENEL BİLGİLER.....	4
II.1 YÜKSEK BOYUTLU MODEL GÖSTERİLİM YÖNTEMLERİ	4
II.1.1 Yalın YBMG (Plain HDMR).....	4
II.1.2 Çarpımsal YBMG (Factorized HDMR).....	9
II.1.3 Melez YBMG (Hybrid HDMR).....	11
II.1.4 Logaritmik YBMG (Logarithmic HDMR).....	13
II.1.5 Dönüşümsel YBMG (Transformational HDMR).....	15
II.1.6 Diğer YBMG Çesitleri.....	17
II.2 HERMİTE-PADÉ YAKLAŞTIRIMI	20
III KONİK DÖNÜŞÜMSEL YBMG’NİN TEMEL ÖZELLİKLERİ.....	25
III.1 Giriş.....	25
III.2 Afın DYBMG Yönteminin Genel Yapısı.....	25
III.3 Konik DYBMG Yönteminin Genel Yapısının Oluşturumu.....	30
V UYGULAMALAR.....	40
V.1 Örnek 1.....	42

V.2 Örnek 2	46
V.3 Örnek 3	48
V.4 Örnek 4	50
V.5 Örnek 5	52
VI SONUÇ	53
KAYNAKLAR	56
EKLER	61
A. DOĞRUSAL BİRLEŞİME u_1 İŞLEVİNİN DIŞLANMASININ GEREKLİLİĞİ	61
B. A DİZEYİNİN ARTI TANIMLILIĞININ GÖSTERİLMESİ	63

ÖZET

Dönüşümsel Yüksek Boyutlu Model Gösterilim Yönteminde Konik Dönüşümlerin Temel Özellikleri

Yüksek Boyutlu Model Gösterilim (YBMG), bir çok değişkenli işlevi, kendinden daha az değişkene sahip ve daha basit yapıli işlevler türünden yazabilme mantığına dayanır. Bu mantık işlerken ilgilenilen fonksiyonun yapısı önem kazanır. İlgilenilen çok değişkenli işlevin yapısına göre, birçok YBMG yöntemi geliştirilmiştir. Bunlardan biri de Dönüşümsel YBMG yöntemidir. Daha önceden sunulmuş olan İrem Yaman'ın doktora tezinde afin dönüşüm kullanılmıştır. Bu tez çalışmasında ise bir işleve konik dönüşüm uygulanıp, bu dönüşüm altında elde edilen yeni işlevin YBMG etkinliği incelenmiştir. Bu dönüşüm uygulanırken eniyilenmiş parametreleri bulup gerçek işleve en iyi yaklaştıran işlev elde edilmeye çalışılmıştır. Daha sonra elde edilen yaklaştırım yapısının Hermite-Padé yaklaştırım yapısına benzediği gözlemlenmiş ve iki yöntem arasında karşılaştırmalar ve uygulamalar gerçekleştirilmiştir.

Aralık 2011

Zeynep Gündoğar

ABSTRACT

BASIC FEATURES OF CONIC TRANSFORMATIONAL HIGH DIMENSIONAL MODEL REPRESENTATION

High Dimensional Model Representation (HDMR) is a method that enables to express a multivariate function in terms of the functions which are less complicated and having less independent variables. HDMR has many different types according to the multivariate function under interest. Transformational High Dimensional Model Representation (THDMR) is one of them. The basic philosophy behind the Transformational High Dimensional Model Representation is to transform a multivariate function to another multivariate function such that the High Dimensional Model Representation (HDMR) truncations of the new function is much more efficient. A previous work using affine transformation forms milestone to this work where a conic (affine plus quadratic) transformation is considered with an attempt to optimize its coefficients. Fundamental formulation has been completely based on that work although the derived formulae and the corresponding approximants in literature (Hermite-Padé) are completely different because of the branch points. Thus what we try to develop here is competitor not for Padé but Hermite-Padé approximants with capabilities superior to the ones in both of them.

December 2011

Zeynep Gündoğar

KISALTMALAR

- YBMG** : Yüksek Boyutlu Model Gösterilim
- HDMR** : High Dimensional Model Representation
- ÇYBMG** : Çarpımsal Yüksek Boyutlu Model Gösterilim
- MYBMG** : Melez Yüksek Boyutlu Model Gösterilim
- HHDMR** : Hybrid High Dimensional Model Representation
- LYBMG** : Logaritmik Yüksek Boyutlu Model Gösterilim
- LHDMR** : Logarithmic High Dimensional Model Representation
- DYBMG** : Dönüşümsel Yüksek Boyutlu Model Gösterilim
- THDMR** : Transformational High Dimensional Model Representation
- GYBMG** : Genelleştirilmiş Yüksek Boyutlu Model Gösterilim
- GHDMR** : Generalized High Dimensional Model Representation
- ÇYÇG** : Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımsal Gösterilim
- EMPR** : Enhanced Multivariance Product Representation

Şekil Listesi

IV.1[0.1, 1] aralığında $Sin(x)$ işlevi ve Afin DYBMG yaklaşımı	43
IV.2[0.1, 1] aralığında $Sin(x)$ işlevi ve Konik DYBMG yaklaşımı	44
IV.3[0.1, 1] aralığında $Sin(x)$ işlevi ve Hermite-Padé yaklaşımı	44
IV.4[0.1, 1] aralığında $Sin(x)$ işlevi ve yaklaşıranları	44
IV.5[0.1, π] aralığında $Sin(x)$ işlevi ve yaklaşıranları	45
IV.6[0, 1] aralığında $Log(1 + x)$ işlevi ve yaklaşıranları	47
IV.7[0, 1] aralığında $\sqrt[3]{1 - x^2}$ işlevi ve yaklaşıranları	48
IV.8[0, 1] aralığında $Exp(x)$ işlevi ve yaklaşıranları	50
IV.9[0, 3] aralığında $Exp(x)$ işlevi ve yaklaşıranları	51
IV.10[0, $\pi - 1$] aralığında $Cos(x)$ işlevi ve yaklaşıranları	52

Tablo Listesi

IV.1 $[0.1, 1]$ aralığında $Sin(x)$ işlevi için mutlak fark alınarak elde edilen Hata Tablosu	43
IV.2 $[0, 1]$ aralığında $Log(1 + x)$ işlevi için mutlak fark alınarak elde edilen Hata Tablosu	47
IV.3 $[0, 1]$ aralığında $\sqrt[3]{1 - x^2}$ işlevi için mutlak fark alınarak elde edilen Hata Tablosu	49
IV.4 $[0, 1]$ aralığında $Exp(x)$ işlevi için mutlak fark alınarak elde edilen Hata Tablosu	51

I GİRİŞ VE AMAÇ

Çok değişkenli işlevler aracılığıyla doğadaki birçok problem tanımlanabilir. Ancak çok değişkenli işleve bağlı bir problemi çözmek, hesaplaması zor bir uğraş olmanın yanısıra oldukça maliyetli bir uğraştır. Bunun sebebi değişken sayısı arttıkça problemi çözenin zorlaşması ve değişkenlerin birbirleri ile etkileşimleri de gözönüne alınırsa problem yapısındaki karmaşıklık artmasıdır. Bu yüzden bilimsel çalışmalarda daha az değişkenle bir problemi çözmek ve sonuç üretmek esastır.

Yüksek Boyutlu Model Gösterilim(YBMG) yöntemi çok değişkenli bir işlevi, kendinden daha az değişkenli işlevler cinsinden yazmaya dayanır. Bu doğrultuda atılan ilk adım 1957 yılında A.N. Kolmogorov tarafından yazılan " On The Representation of Continuous Functions of Many Variables by Superposition of Continuos of One Variable and Addition"[1] adlı makaledir. Bu makalesinde Kolmogorov sürekli çok değişkenli bir işlevi tek değişkenli işlevlerin toplamı olarak ifade edilebileceğini kanıtlamıştır. YBMG yöntemi 1993 yılında Rus matematikçi Sobol tarafından "Sensitivity Estimates for Nonlinear Mathematical Models" adlı makalesinde[2] ilk olarak ortaya atılmıştır. Sobol ilk olarak bu yöntemi istatistiksel çalışmalarda kullanmıştır. İstatistiksel gereksinimler nedeniyle YBMG bileşenlerin belirlenmesinde kullanılan sıfırlanma koşulları $[0,1]$ aralığında, ağırlık 1 alınarak kullanılmıştır. Daha sonra Rabitz makalelerinde[3-6,16,17] bu aralık ve ağırlığı genel kullanıp yöntemin uygulama alanını genişletmiştir. Demiralp[7,8,21] ise YBMG bileşenlerinin diklik koşulunu kanıtlamış ve bu koşul sayesinde bir takım ölçenler tanımlayıp hata terimlerini ortaya koymuştur.

YBMG yöntemi bir çok alanda uygulamaya girmiştir. Bunlardan bazıları şöyledir:

- Kimyasal tepkimelerin modellenmesinde
- CMOS (Complementary Metal Oxide Semiconductor) teknolojisinde çipler üzerindeki mantık kapılarının gecikme sürelerinin incelenmesinde

- Mekaniksel sistemlerin bileşen güvenilirliği tahmini ve bu tür sistemlerin arıza olasılığının tahmin edilmesi konularında
- İstatistikte güvenilirlik analizlerinde
- Veri bölüntülendirilmesi ve sınıflandırılmasında
- Diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerinin bulunmasında
- Karmaşık düzlemde Korteks üzerinde EEG işaretlerinin faz geçişi dinamiklerinin belirlenmesinde

ve daha birçok kimya ve fizik problemlerinde kullanılmıştır. Ayrıca yöntem çeşitli mühendislik problemlerinde yeni çözüm önerileri getiren matematik tabanlı güçlü algoritmalar olarak da bilimsel yazına girmiştir.

YBMG, çok değişkenli bir işlevin birbirine dik ve bağımsız değişken sayısı giderek artan işlevler türünden açılımıdır. Bu yöntem böl ve yönet düşüncesi ile çalışır. Bu yöntem geliştirilirken işlevin yapısı önem kazanmıştır. Çünkü işlevin yapısı değişip karmaşıklaştıkça yeni yöntemler ortaya çıkmıştır. Tezin II. Bölümünde YBMG yönteminin temel tanım ve teoremleri verilmiştir. YBMG bileşenlerinin hesaplanması gösterilmiştir. Devamında işlevin yapısı değiştikçe gelişen yöntemler olan YBMG çeşitleri hakkında bilgiler verilmiştir. İşlevin yapısı, toplamsal yapıda ise YBMG, çarpımsal yapıda ise Çarpımsal YBMG[7,9,13], hem çarpımsal hem de toplamsal yapıda ise Melez YBMG[10,14,18,23] konularına değinilmiştir. Bununla birlikte Dönüşümsel YBMG'nin temelini oluşturan Logaritmik YBMG[15,20] ve diğer YBMG[11,16,17,19,24,25,32-35] çeşitleri verilmiştir.

III. Bölümde ise tezin kaynağını oluşturan Dönüşümsel YBMG[19,31,33] yöntemi incelenmiştir. Bu bölümde dönüşüm ikinci dereceden bir çok terimli kullanılarak yeni bir YBMG yöntemi olan Konik DYBMG yöntemi[28,29] geliştirilmiştir. Bu yöntem geliştirilirken Yaman'ın doktora tezinden[33] faydalanılmıştır. IV. Bölümde ise bilimsel

yazında çok bilinen bir yöntem olan Hermite-Padé yaklaştırım yöntemi[26,27] incelenmiş olup özgün bir anlatım ile yeniden verilmiştir. Bunun sebebi tezde elde edilen yöntemin yaklaştırım yapısı ile Hermite-Padé yaklaştırım yapısının benzerliğidir. V. Bölümde ise yöntemin etkinliğini tartışabilmek amacıyla Mathematica programı kullanılarak elde edilen uygulamalar verilmiştir. Konik DYBMG yöntemi ile Afın DYBMG ve Hermite-Padé yöntemi ile karşılaştırılmalar verilmiştir.

II GENEL BİLGİLER

II.1 YÜKSEK BOYUTLU MODEL GÖSTERİLİM YÖNTEMLERİ

II.1.1 Yalın YBMG (Plain HDMR)

Yalın YBMG[2-17,32,34], YBMG yöntemi ile ilgili temel tanımların, özelliklerin ve YBMG terimlerinin verildiği yöntemdir. Bu nedenle bilimsel yazında Yalın YBMG yerine genellikle yalnızca YBMG kullanılır. Bu yöntem bilgisayar teknolojilerinde çok değişkenli bir işlev ile çalışmanın hesaplama zorluğundan dolayı ortaya çıkmıştır. Bu nedenle işlevin yapısını yalınlaştırmak ve daha hızlı iş yapabilmek amacı ile işlevin ayrıştırımı gündeme gelir. Bir ayrıştırım ve yaklaştırım tekniği olan bu yöntem böl ve yönet temel düşüncesine uygun olarak çalışır.

Matematiksel olarak YBMG nedir? sorusuna en genel olarak şu yanıt verilebilir. YBMG yöntemi çok değişkenli bir işlevin kendisinden daha az değişken içeren işlevlerin sonlu toplamı olarak ayrıştırılmasıdır. Bu tanıma dayanarak YBMG açılımı aşağıdaki gibi verilir.

$$f(x_1, \dots, x_N) = f_0 + \sum_{i_1=1}^N f_{i_1}(x_{i_1}) + \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) + \dots + f_{12\dots N}(x_1, \dots, x_N) \quad (\text{II.1})$$

Bu açılımda da görüldüğü gibi bu sonlu toplam f_0 ile gösterilen bir değişmez(ing:constant) terim; $f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_N(x_N)$ ile gösterilen tek değişkenli(univariate) N sayıda terim; $f_{12}(x_1, x_2), \dots, f_{1N}(x_1, x_N), f_{23}(x_2, x_3), \dots, f_{2N}(x_2, x_N), \dots, f_{N-1N}(x_{N-1}, x_N)$ ile gösterilen iki değişkenli(ing:bivariate) $\frac{N(N-1)}{2}$ sayıda terim ve diğer bileşenlerin de benzer biçimde, gittikçe artan sayıda değişken içeren işlevlerin sonlu toplamı olduğu görülür. Bu toplamın yapısı incelendiğinde terimlerin binom katsayısı şeklinde arttığı ve toplamda 2^N tane terim olduğu açık bir şekilde görülür. N sayısı arttıkça hesaplama zorluğu

artacağı için bu yöntemde kesme uygulayarak yaklaştırım yapılır. Bu da bize YBMG yönteminin aslında bir yaklaştırım tekniği olarak çalıştığını gösterir. (II.1) denklemindeki işleve sağ yandan istenilen derecede kesme uygulanarak yaklaştırım yapmak olanaklı olacaktır. Ancak bilimsel yazında en fazla 2. kereden kesme uygulanmıştır. Eğer (II.1) denkleminin sağ yanında sadece f_0 ile yani YBMG açılımına değişmez terim ile yaklaştırım yapılırsa yaklaştırım 0. kereden yaklaştırım olur. İşlevin yapısı değişmez olduğunda sıfırıncı kereden yaklaştırım uygulamanın kesin sonucu vereceği açıktır. Benzer mantıkla sağ yanda iki ve ikiden fazla tüm işlevler kesme yapılarak atılırsa elde edilen yaklaştırım birinci kereden yaklaştırım olacaktır. Bu olgu benzer şekilde sürdürülerek daha yüksek kereden yaklaştırmalar elde edilebilir. Kaçıncı kereden yaklaştırım yapıldığında kesin sonuca ulaşabileceğimiz konusu gündeme geldiği zaman işlevin yapısının bize ipucu verebileceği söylenebilir. İşlevin yapısı değiştikçe iyi sonuçlar elde edebilmek amacı ile yaklaştırımın mertebesi arttırılabilir ya da YBMG yönteminin ileride sözedilecek olan diğer çeşitlerine başvurulabilir.

Yaklaştırımın gerçekleştirilebilmesini başka bir deyişle yöntemin çalışmasını sağlatabilmek için YBMG bileşenlerinin her birinin belirlenmesi gerekir. YBMG bileşenleri kesme sonucunda elde kalan terimlerdir. Bu bileşenlerin belirlenmesi için bazı tanım ve koşulların verilmesi gerekir. Bu tanım ve koşullar aşağıda verilmiştir.

Normalizasyon (Birim Tümleme) koşulu: $\forall x_i \in [a_i, b_i], i = 1, 2, \dots, N$ olmak üzere tek değişkenli ağırlık işlevlerinin ilgili aralık üzerinde ve ilgili bağımsız değişken altındaki tümlevi 1 olarak öngörülür.

$$\int_{a_i}^{b_i} dx_i w_i(x_i) = 1 \quad (\text{II.2})$$

Bu koşula dayanarak ağırlık işlevi her bir ilgili aralık üzerinde normalizasyon koşulunu sağlayan ağırlıkların çarpımı olarak aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$W(x_1, \dots, x_N) = \prod_{i=1}^N w_i(x_i) \quad (\text{II.3})$$

Sobol'un önermiş olduğu bu yöntemde $[0, 1]$ aralığı ve ağırlık olarak da birim ağırlık kullanılmış, daha sonra aralık ve ağırlık Rabitz tarafından yukarıdaki gibi genelleştirilmiştir.

Sıfırlanma koşulu: Sobol tarafından ortaya atılan bu koşul YBMG bileşenlerinden değişmez terim dışındakilerden herhangi birinin, bağımsız değişkenlerden biri üzerinde ve ağırlık altında ilgili aralıkta tümlevinin sıfır olması gerektiğini söyler ve aşağıdaki gibi verilir:

$$\int_{a_i}^{b_i} w_i(x_i) f_{i_1 i_2 \dots i_k}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}) dx_i = 0; \quad i \in \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \quad (\text{II.4})$$

Bu koşula "integral altında sıfırlanma koşulu" denir. Bu koşul YBMG bileşenlerinin eşsiz olarak belirlenebilmesi için yeter koşuldur.

Diklik koşulu: Sıfırlanma koşulu kullanılarak YBMG bileşenlerinin birbirine dik olduğu gösterilebilir. Prof. Dr. Metin Demiralp ve Prof. Dr. Herschel Rabitz tarafından ortaya çıkarılan diklik koşulu, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq N$, $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_l \leq N$ ve $1 \leq k < l \leq N$, olmak üzere

$$\int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_N}^{b_N} \prod_{k=1}^N w_k(x_k) f_{i_1 i_2 \dots i_k}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}) f_{j_1 j_2 \dots j_l}(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_l}) dx = 0 \quad (\text{II.5})$$

biçiminde verilir. Buradan da anlaşılacağı gibi YBMG bileşenlerinin birbirine dik olduğu söylenebilir ve diklik koşulu aynı zamanda iççarpım tanımını da getirir. Bu iç çarpım

$$(f_{i_1 i_2 \dots i_k}, f_{j_1 j_2 \dots j_l}) = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_N}^{b_N} \prod_{k=1}^N w_k(x_k) f_{i_1 i_2 \dots i_k}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}) \times f_{j_1 j_2 \dots j_l}(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_l}) dx \quad (\text{II.6})$$

olarak verilir. Verilen tüm bu koşullar altında YBMG bileşenlerini belirlemek oldukça

kolaylaşır ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned}
f_0 &= \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_N}^{b_N} \prod_{k=1}^N w_k(x_k) dx \\
f_i(x_i) &= \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} \int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}} \dots \int_{a_N}^{b_N} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N w_k(x_k) f(x_1, \dots, x_N) dx^i - f_0 \\
f_{ij}(x_i, x_j) &= \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} \int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}} \dots \int_{a_{j-1}}^{b_{j-1}} \int_{a_{j+1}}^{b_{j+1}} \dots \int_{a_N}^{b_N} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i, j}}^N w_k(x_k) \\
&\quad \times f(x_1, \dots, x_N) dx^{ij} - f_0 - f_i(x_i) - f_j(x_j)
\end{aligned} \tag{II.7}$$

Burada kullanılan sonsuz küçük değişim(diferansiyel) alma işleçleri,

$$dx = dx_1 \dots dx_N$$

$$dx^i = dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_N$$

$$dx^{ij} = dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_N$$

biçimindedir. Yukarıdaki işleçler incelendiğinde dx 'in tüm bağımsız değişkenlere göre, dx^i 'nin x_i dışındaki tüm değişkenlere göre ve dx^{ij} 'nin x_i ve x_j dışındaki tüm değişkenlere göre sonsuz küçük değişim alma işleçleri olarak tanımlandığı açıktır.

Daha önce de sözedildiği gibi YBMG yöntemi belirli kertelerden yapılan kesmelere dayanan yaklaşımdır. YBMG bileşenlerinin hesaplanmasından sonra eğer değişmezterimden sonra kesme yapılırsa bu yaklaşımın adına "Değişmez Yaklaşım" denir ve s_0 ile gösterilir. Sabit ve birli terimlerden sonra kesme yapılırsa "1. Kerteden Yaklaşım" denir ve s_1 olarak gösterilir. Benzer biçimde istenilen kereden yaklaşım

istenilen kereden kesmeler yapılarak elde edilir. Bu yaklaşımlar,

$$\begin{aligned}
s_0 &= f_0 \\
s_1 &= s_0 + \sum_{i=1}^N f_i(x_i) \\
&\vdots \\
s_k &= s_{k-1} + \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_k=1 \\ i_1 < i_2 < \dots < i_k}}^N f_{i_1 i_2 \dots i_k}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})
\end{aligned} \tag{II.8}$$

biçimindeki matematiksel anlatım ile verilir.

Yapılan yaklaşımın ne kadar iyi olduğunu ölçebilmek için bir takım ölçenlere gereksinim vardır. Bu ölçenleri tanımlayabilmek için boy(ing:norm) tanımlamamız gerekir. Boy tanımı iççarpım tanımı ile verilir. $f(x_1, \dots, x_N)$ karesi tümlemlenebilir bir işlev olsun. Bu işlevin normu:

$$\|f_{i_1 i_2 \dots i_k}\|^2 = (f_{i_1 i_2 \dots i_k}, f_{i_1 i_2 \dots i_k}) \tag{II.9}$$

olarak tanımlanır. Bu tanımı kullanarak (II.1) ile verilen YBMG denkleminin her iki yanını ilgili aralıklar üzerinde ve ilgili ağırlıklar altında tüm değişkenlere göre tümlevi alınırsa diklik koşulundan gelen sıfırlanmalar sonucu

$$\|f\|^2 = \|f_0\|^2 + \sum_{i=1}^N \|f_i\|^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N \|f_{ij}\|^2 + \dots + \|f_{12\dots N}\|^2 \tag{II.10}$$

elde edilir. Buradan işlevin boyunun karesinin, bileşenlerinin ayrı ayrı boylarının karelerinin toplamı olarak tanımlandığı görülür. Yukarıdaki denklemin her iki yanını $\|f\|^2$ ile bölünürse,

$$1 = \frac{1}{\|f\|^2} \|f_0\|^2 + \frac{1}{\|f\|^2} \sum_{i=1}^N \|f_i\|^2 + \frac{1}{\|f\|^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N \|f_{ij}\|^2 + \dots + \frac{1}{\|f\|^2} \|f_{12\dots N}\|^2 \tag{II.11}$$

olduğu görülür ve istenilen kereden kesmeler uygulanarak ölçenler bulunur. Bu ölçen-

lere "Toplamsallık Ölçenleri" denir.

$$\begin{aligned}
\sigma_0 &= \frac{1}{\|f\|^2} \|f_0\|^2 \\
\sigma_1 &= \frac{1}{\|f\|^2} \sum_{i=1}^N \|f_i\|^2 + \sigma_0 \\
&\vdots \\
\sigma_N &= \frac{1}{\|f\|^2} \|f_{12\dots N}\|^2 + \sigma_{N-1}
\end{aligned} \tag{II.12}$$

Burada "0. Kerteden Toplamsallık Ölçeni" olan σ_0 'a "Değişmezlik Ölçeni", σ_1 'e ise "1inci Kerteden Toplamsallık ölçeni" denir. En genel yapısı ile σ_k 'ya ise "k. Kerteden Toplamsallık ölçeni" denir. Bu ölçenlerin iyi sıralı olarak 0'dan 1'e doğru artan sonlu bir dizi oluşturduğu açıktır.

$$0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \dots \leq \sigma_N = 1 \tag{II.13}$$

Ölçenlerin bu biçimde sıralı olması ne düzeyde yüksek kerteden yaklaşıtırm yapılırsa işlevin o düzeyde iyi anlatılabileceğini gösterir.

II.1.2 Çarpımsal YBMG (Factorized HDMR)

İncelenen çok değişkenli işlevin yapısı değıştikçe kullanılan YBMG yöntemi de gelişmiştir. İşlevin yapısı toplamsal iken yalın YBMG yöntemi iyi çalışmaktadır. İşlevin yapısı çarpımsal olduğu durumlarda yaklaşıtırmın iyi olması için yüksek kerteden yaklaşıtırm yapmak gerekecek ve yalın YBMG ile sonuç almak güçleşecektir. Bu nedenden dolayı geliştirilen Çarpımsal YBMG yöntemi[7,9,13] şu biçimde verilir:

$$\begin{aligned}
f(x_1, \dots, x_N) &= r_0 \left[\prod_{i=1}^N (1 + r_i(x_i)) \right] \left[\prod_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N (1 + r_{ij}(x_i, x_j)) \right] \times \\
&\quad \times \dots \times (1 + r_{12\dots N}(x_1, \dots, x_N))
\end{aligned} \tag{II.14}$$

Şimdi Yalın YBMG'deki benzer düşünceyle bu açılımın bileşenlerini elde etmeye çalışalım.

Öncelikle işlevin yapısını tek değişkenli işlevlerin çarpımı olarak öngörelim.

$$f(x_1, \dots, x_N) = \prod_{j=1}^N u_j(x_j) \quad (\text{II.15})$$

Bu biçimde anlatılan işlevin YBMG bileşenleri

$$\bar{u}_i = \int_{a_i}^{b_i} u_i(x_i) dx_i, \quad 1 \leq i \leq N \quad (\text{II.16})$$

olmak üzere bu terimler aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned} f_0 &= \prod_{k=1}^N \bar{u}_k \\ f_i(x_i) &= f_0 \left[\frac{u_i(x_i)}{\bar{u}_i} - 1 \right] \\ f_{ij}(x_{ij}) &= f_0 \left[\frac{u_i(x_i)}{\bar{u}_i} - 1 \right] \left[\frac{u_j(x_j)}{\bar{u}_j} - 1 \right] \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

Bu denklemlerden k. değişkenli YBMG bileşeni genelleştirildiğinde

$$f_{i_1 \dots i_k}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) = \frac{1}{f_0^{k-1}} f_{i_1}(x_{i_1}) \cdots f_{i_k}(x_{i_k}) \quad (\text{II.18})$$

olacaktır. Bu anlatımlar Çarpımsal YBMG denkleminde yerine yazılıp düzenlenirse

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_N) &= f_0 + \sum_{i=1}^N f_i(x_i) + \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) + \cdots + f_{12 \dots N}(x_1, \dots, x_N) \\ &= f_0 + \sum_{i=1}^N f_i(x_i) + \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N \frac{f_{i_1}(x_{i_1}) f_{i_2}(x_{i_2})}{f_0} + \cdots + \frac{f_1(x_1) \cdots f_N(x_N)}{f_0^{N-1}} \\ &= f_0 \left[1 + \sum_{i=1}^N \frac{f_i(x_i)}{f_0} + \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N \frac{f_{i_1}(x_{i_1}) f_{i_2}(x_{i_2})}{f_0^2} + \cdots + \frac{f_1(x_1) \cdots f_N(x_N)}{f_0^N} \right] \\ &= f_0 \prod_{i=1}^N \left(1 + \frac{f_i(x_i)}{f_0} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.19})$$

anlatımı yazılır. Burada bileşenler

$$\begin{aligned} r_0 &= f_0 \\ r_i(x_i) &= \frac{f_i(x_i)}{f_0} \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

olarak tanımlanırsa Çarpımsal YBMG denklemi aşağıdaki gibi yazılır.

$$f(x_1, \dots, x_N) = r_0 \prod_{i=1}^N (1 + r_i(x_i)) \quad (\text{II.21})$$

Şimdi YBMG'nin temel düşüncesi ile ilerleyecek olursak istenilen kereden kesmeler yapılarak istenilen kereden yaklaşımlar elde edilir. Burada Çarpımsal YBMG yaklaşımları

$$\begin{aligned} p_0 &= r_0 \\ p_1 &= r_0 \prod_{i=1}^N (1 + r_i(x_i)) = p_0 \prod_{i=1}^N (1 + r_i(x_i)) \\ &\vdots \\ p_k &= p_{k-1} \left[\prod_{\substack{i_1, \dots, i_k \\ i_1 < \dots < i_k = 1}}^N (1 + r_{i_1 \dots i_k}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

ile verilir. Yine benzer düşünceyle ölçenler tanımlanır ve bunlara "**Çarpımsallık Ölçenleri**" denir.

$$\pi_k = \frac{\|p_k\|^2}{\|f\|^2}; \quad k = 1, \dots, N \quad (\text{II.23})$$

Bu ölçenler toplamsallık ölçenleri gibi iyi sıralı değildir. Bunun nedeni yaklaşımın kertesini arttıkça açılıma yeni işlevlerin çarpan olarak katılmasıdır. ÇYBMG'nin uygulamadaki güçlüğü, yöntemin yaygın kullanılabilirliğini azaltmıştır.

Yukarıda Yalın YBMG'nin toplamsal yapıdaki işlevler için, ÇYBMG'nin ise çarpımsal yapıdaki işlevler için iyi çalıştığını söyledik. Ancak işlev hem çarpımsal hem de toplamsal yapıyı birarada barındırabilir. Bu tip işlevler melez işlevler olarak adlandırılır ve bu tip işlevler için "Melez Yüksek Boyutlu Model Gösterim Yöntemi" (MYBMG) geliştirilmiştir.

II.1.3 Melez YBMG (Hybrid HDMR)

İşlevin yapısı ne bütünüyle toplamsal ne de bütünüyle çarpımsal ise kullanılması önerilen yeni YBMG yöntemi "Melez Yüksek Boyutlu Model Gösterim" (MYBMG)

yöntemidir[10,14,18,23] ve Prof. Dr. Metin Demiralp tarafından geliştirilmiştir. Bu yöntemin temel amacı işlevi bir α parametresi ile ikiye ayırıp, ayrılan işlevin bir parçasına YBMG ve diğer parçasına ÇYBMG yöntemini uygulamaya dayanır. Bu amaçla,

$$f(x_1, \dots, x_N) = \alpha f(x_1, \dots, x_N) + (1 - \alpha)f(x_1, \dots, x_N) \quad (\text{II.24})$$

biçiminde yazılır. Bu denklem YBMG yaklaşımını kullanılarak aşağıdaki biçimde verilir.

$$f(x_1, \dots, x_N) = \alpha \left[f_0 + \sum_{i_1=1}^N f_{i_1}(x_{i_1}) + \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) + \dots \right] + (1 - \alpha) \left[r_0 \left[\prod_{i=1}^N (1 + r_i(x_i)) \right] \left[\prod_{\substack{i, j=1 \\ i < j}}^N (1 + r_{ij}(x_i, x_j)) \right] \dots \right] \quad (\text{II.25})$$

Buradaki α parametresine **melezlik parametresi** denir ve genellikle $[0, 1]$ arasında değer alır. Burada α değerleri değiştikçe melezliklerde değişen sonuçlara neden olacaktır. Başka bir deyişle α parametresinin seçimi YBMG ve ÇYBMG'nin sonuca katkısını belirler. α 0 değerini alırsa MYBMG, ÇYBMG yöntemine dönüşür. Diğer taraftan α 1 değerini alırsa MYBMG, YBMG yöntemine dönüşür.

YBMG yaklaşımını s_j ve ÇYBMG yaklaşımını için p_k anlatımı kullanarak

$$f(x_1 \dots x_N) \approx h_{jk}(x_1, \dots, x_N; \alpha) = \alpha s_j(x_1, \dots, x_N) + (1 - \alpha)p_k(x_1, \dots, x_N) \quad (\text{II.26})$$

olarak yazılır. Bu anlatım YBMG'nin j. kereden ve ÇYBMG'nin k. kereden katkısını ifade eder. Burada ölçenler "**Melezlik Ölçenleri**" olarak adlandırılır ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$q_{jk} = \frac{\|f - h_{jk}\|^2}{\|f\|^2}, \quad j, k = 1, \dots, n \quad (\text{II.27})$$

Burada ölçenlerin içerisinde ÇYBMG barındırdığından dolayı iyi sıralı olması beklenemez. Yukarıdaki denklemden anlaşılacağı gibi melezlik ölçenleri sıfıra yaklaştıkça yaklaşım iyileşir.

II.1.4 Logaritmik YBMG (Logarithmic HDMR)

ÇYBMG yönteminde yaklaşırtırımın kertesı arttıktıa açılıma katılan çarpan sayısının fazlalaşması bileşenlerin belirlenmesinde zorluklara neden olur. Bu da yöntemin yaygın kullanılabilirliğini azaltır. Dolayısıyla hem ÇYBMG yönteminin kullanılabilirliğini arttırmak hem de YBMG ile çalışacak bir algoritma oluşturmak daha akılcı bir çözüml olacaktır. Bu amaçla Demiralp ve grubu tarafından yeni bir YBMG türü olan Logaritmik YBMG[15,20] geliştirilmiştir.

Çarpımsal yapıdaki bir işlevin toplamsal bir yapıya nasıl dönüştürülebileceğı sorusu sonucu ortaya çıkarılan Logaritmik Yüksek Boyutlu Model Gösterim(LYBMG) yöntemi eksi olmayan çok değışkenli bir işlevin kendisinin yerine doğal logaritmasının YBMG'ye açılması düşüncesine dayanmaktadır. LYBMG denkleml aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\ln [f(x_1, \dots, x_N) - \phi(x_1, \dots, x_N)] = \varphi_0 + \sum_{i=1}^N \varphi_i(x_i) + \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N \varphi_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) + \dots \quad (\text{II.29})$$

Burada $\phi(x_1, \dots, x_N)$, tümlev aralığında her zaman $f(x_1, \dots, x_N)$ 'e eşit veya daha küçük olan işlevdir. Bu işleve alttan sınırlayıcı işlev (ing:minorant function) denir ve buradaki görevi asıl işlevin pozitif olmasını sağlamaktır. Bu nedenden dolayı $\phi(x_1, \dots, x_N)$ 'nin seçimi işlevin yapısına göre değışir. Eğer işlevin ilgili tümlev aralığında tekıllığı yoksa $\phi(x_1, \dots, x_N)$ işlevi değışmez olarak alınır. Esas işlevin tümlev aralığında artı tanımlılığı güvence altındaysa ve tekıllığı yoksa $\phi(x_1, \dots, x_N)$ işlevi sıfır olarak alınabilir. Burada özen gösterilmesi gereken konu ağırlık işlevinin seçimine bağılı olarak tümlev aralığında tekıllığın oluşup oluşmadığıdır. Bu da yöntemde ağırlık seçiminin ne kadar önemli olduğunu vurgulamaktadır.

LYBMG bileşenleri, YBMG'deki benzer mantık ile bulunabilir. Burada da bileşen-

ler birbirine diktir. LYBMG açılımı aşağıdaki gibi verilir.

$$f(x_1, \dots, x_N) = \phi(x_1, \dots, x_N) + e^{\varphi_0} \left[\prod_{i_1=1}^N e^{\varphi_{i_1}(x_{i_1})} \right] \left[\prod_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N e^{\varphi_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2})} \right] \dots \quad (\text{II.30})$$

Bu gösterilim çok değişkenli bir öteleme işlevine bağlı çarpımsal bir yapı tanımlar ve bu yapının LYBMG yaklaşımlarını tanımlayacak olursak,

$$\begin{aligned} l_0 &= \phi(x_1, \dots, x_N) + e^{\varphi_0} \\ l_1 &= \phi(x_1, \dots, x_N) + e^{\varphi_0} \left[\prod_{i_1=1}^N e^{\varphi_{i_1}(x_{i_1})} \right] \\ l_2 &= \phi(x_1, \dots, x_N) + e^{\varphi_0} \left[\prod_{i_1=1}^N e^{\varphi_{i_1}(x_{i_1})} \right] \left[\prod_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N e^{\varphi_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2})} \right] \\ &\vdots \end{aligned} \quad (\text{II.31})$$

biçiminde elde edilir. Logaritma işlevi yardımı ile çarpımsal yapıdaki işlev toplamsal yapıya dönüştürüldüğü için YBMG yöntemindeki ölçenlere benzer ölçenler ile yaklaşımın niteliği ölçülebilir. Bu ölçenlere "**Nitelik Ölçenleri**" denir. Bu ölçenlerin açık anlatımları,

$$\begin{aligned} \nu_0 &= \frac{\|\varphi_0\|^2}{\|\ln(f - \varphi)\|^2} \\ \nu_1 &= \nu_0 + \sum_{i_1=1}^N \frac{\|\varphi_{i_1}\|^2}{\|\ln(f - \varphi)\|^2} \end{aligned} \quad (\text{II.32})$$

$$\begin{aligned} \nu_2 &= \nu_1 + \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N \frac{\|\varphi_{i_1 i_2}\|^2}{\|\ln(f - \varphi)\|^2} \\ \dots &= \dots \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

biçimindedir ve bu ölçenler düzgün sıralıdır.

$$0 \leq \nu_0 \leq \nu_1 \leq \dots \leq \nu_N = 1 \quad (\text{II.34})$$

Burada değinilmesi gereken konu ÇYBMG'deki düzgün sıralı olmayan ölçenlerin LYBMG ile düzgün sıralı duruma dönüşmüş olmasıdır. Bu açıdan LYBMG yöntemi ÇYBMG yönteminden daha iyidir denilebilir. Ayrıca MYBMG'de kullanılan yapıdaki ÇYBMG yerine LYBMG yöntemi kullanılarak ikinci bir benzer MYBMG yönteminin kullanılabileceğini vurgulamak gerekir.

II.1.5 Dönüşümsel YBMG (Transformational HDMR)

Dönüşümsel Yüksek Boyutlu Model Gösterilim(DYBMG) yöntemi[19,31,33], çarpımsallıktan toplamsallığa dönüşüm düşüncesine dayanan LYBMG yönteminin bir genelleştirilmesi olarak ortaya çıkmıştır. LYBMG de kullanılan logaritma dönüşümü yerine farklı dönüşümler kullanılabileceği düşüncesi bu yöntemin gelişmesine olanak sağlamıştır. DYBMG yöntemi, nasıl bir dönüşüm kullanılarak dönüşüm altında elde edilecek yeni işlevin YBMG etkinliğinin ne düzeyde arttırılabileceği sorusu ile ilgilenir. Dolayısıyla yöntemde dönüşümün nasıl seçileceği sorusu önem kazanır.

Şimdi en genel durumu ile çok değişkenli bir $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ işlevinin \mathbf{T} ile gösterilen bir dönüşüm altındaki görüntüsü olan yeni çok değişkenli işlevin $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_N)$ olduğunu düşünelim.

$$\mathbf{T}f(x_1, x_2, \dots, x_N) \equiv \varphi(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (\text{II.35})$$

İlgilenilen işlev, artık işlevin kendisi değil dönüşüm altındaki görüntüsü olacaktır. Elde edilen bu yeni işlevin YBMG açılımı,

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_N) = \varphi_0 + \sum_{i=1}^N \varphi_i(x_i) + \dots + \varphi_{12\dots N}(x_1, \dots, x_N) \quad (\text{II.36})$$

olarak elde edilir. Burada YBMG yönteminin temel düşüncesi ile DYBMG bileşenleri

aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &= \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} W(x_1, x_2, \dots, x_N) \varphi(x_1, x_2, \dots, x_N) \\
\varphi_i(x_i) &= \int_{\mathcal{V}^{(i)}} d\mathcal{V}^{(i)} W(x_1, x_2, \dots, x_N) \varphi(x_1, x_2, \dots, x_N) - \varphi_0 \\
\varphi_{ij}(x_i, x_j) &= \int_{\mathcal{V}^{(ij)}} d\mathcal{V}^{(ij)} W(x_1, x_2, \dots, x_N) \varphi(x_1, x_2, \dots, x_N) - \varphi_0 - \varphi_i(x_i) - \varphi_j(x_j) \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{II.37}$$

Burada $\mathcal{V} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_N, b_N]$, YBMG'nin ilgili bölgesi olan bir aşkınçokyüzlüdür(ing:hyperprism). $d\mathcal{V}$ ise herbir ilgili aralıktaki $dx_1 dx_2 \dots dx_N$ sonsuz küçük değişimlerin çarpımı olarak tanımlanır. $\mathcal{V}^{(i)} = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_{i-1}, b_{i-1}] \times [a_{i+1}, b_{i+1}] \times \dots \times [a_N, b_N]$ ve $d\mathcal{V}^{(i)} = dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_N$ biçiminde tanımlanmıştır. Diğer bileşenler de aynı yolla hesaplanabilir.

Şimdi bu yeni işlevin toplamsallık ölçenleri aşağıdaki gibi verilir.

$$\begin{aligned}
\sigma_0(\varphi) &= \frac{\|\varphi_0\|^2}{\|\varphi\|^2}, \\
\sigma_1(\varphi) &= \sigma_0(\varphi) + \sum_{i_1=1}^N \frac{\|\varphi_{i_1}\|^2}{\|\varphi\|^2} \\
\sigma_2(\varphi) &= \sigma_1(\varphi) + \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N \frac{\|\varphi_{i_1 i_2}\|^2}{\|\varphi\|^2} \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{II.39}$$

Bu yeni ölçenlerin f için elde edilen toplamsallık ölçenlerinden farklı olacağı açıktır. Bu farklılık seçilen dönüşümün yapısına bağlı olarak değişecektir. Ayrıca DYBMG yönteminin yapısındaki dönüşümün kendisine ait parametreleri olduğundan dolayı yaklaşıtırmı iyileştirme esnekliği olarak YBMG yönteminden üstündür. Fakat buradaki asıl soru bu dönüşümün nasıl seçilmesi gerektiğidir. Dönüşüm seçilirken iki konuyu vurgulamak gerekir. İlk olarak dönüşümün tersinin alınabilir olması, ikinci olarak da dönüşümün eniyileme yapabilecek parametrelere sahip olması gerekir.

Daha önce yapılan çalışmalarda logaritma, trigonometrik, ters trigonometrik, hiperbolik ve ters hiperbolik işlevler gibi dönüşümlerin seçildiği görülür. Bu dönüşümlerden farklı olarak en son, İrem Yaman doktora tezinde dönüşüm olarak 1.dereceden dönüşüm kullanmıştır. Bu tez çalışmasında ise bir işlevin 2. dereceden dönüşüm altındaki görünüşüne YBMG uygulanmış ve YBMG etkinliği incelenmiştir.

II.1.6 Diğer YBMG Türleri

Yukarıda verilen YBMG türleri tezin temel kaynaklarını oluşturmaktadır. Ancak yukarıda sözedilmeyen YBMG türleri de bulunmaktadır. Bunlara bu bölümde kısaca değinilecektir. Bu YBMG türleri daha çok verilerin ayrıştırılması konusunda etkin olan yöntemlerdir. YBMG türleri maddeler halinde aşağıda sıralanmıştır.

- Genelleştirilmiş YBMG(GYBMG) (Generalized HDMR)
- Kesme YBMG (Cut HDMR)
- Çoklu Kesme YBMG (Multicut HDMR)
- Seçkisiz Örneklemeli YBMG (Random Sampling HDMR)
- Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımsal Gösterilim(ÇYÇG) (Enhanced Multivariate Product Representation-EMPR)

Genelleştirilmiş YBMG yöntemi, diğer YBMG türlerindeki tek değişkenli işlevlerin çarpımı biçiminde tanımlanan çarpımsal yapıdaki ağırlık işlevi yerine daha genel olan çok değişkenli bir ağırlık işlevi kullanmaya yönelik bir yöntemdir. Bu yöntemin çıkış noktası verilerin çözümlemesi ve modellemesi yapılırken tamamen çarpımsal yapıdaki bir ağırlık işlevinin kullanılmasının ilgili probleme nitelikli bir yaklaşım sunmacağı düşüncesidir. Bu amaçla çok değişkenli bir ağırlık işlevi alınarak bu ağırlık işlevi YBMG'ye açılmış ve yöntem genelleştirilmiştir. Bu yöntem M. Demiralp ve M.A. Tunga

tarafından "Data Partition Via Generalized High Dimensional Model Representation and Multivariate Interpolative Applications" adlı yazıda[11] verilerin ayrıştırılmasında kullanılmıştır.

Diğer bir YBMG türü Kesme YBMG(Cut HDMR) yöntemidir. Temel bilim ve mühendisliklerde ortaya çıkan problemler girdi sayısı yüksek olan problemlerdir. YBMG bu tür girdi-çıkı sistemlerinin çözümlemesi için de kullanılan bir yöntemdir. Bu gibi sistemlerde çıktı tek değişkene bağlı olsa da girdi genelde pek çok değişkene bağlıdır. Yani girdi her zaman çıktı üzerinde etkili olmayabilir. Bu yöntemde sistemin çıktısı, N tane girdi değişkeni türünden düşünülerek YBMG açılımı ile verilir. Kesme YBMG girdi değişken uzayının düzgün bir şekilde dağıldığı veya girdi üzerine etki edilebilen modelleri çözmek için uygun bir yöntemdir. Bu yöntemde YBMG bileşenleri, ilgilenilen uzayda kesim merkezi (ing:cut center) adı verilen bir $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N)$ başlangıç konumuna bağlı girdi-çıkı tepkisi incelenerek belirlenir. Kesme YBMG açılımı $f(x)$ işlevinin kesim merkezinden geçen doğrular, düzlemler ve aşkındüzlemlerdeki değerlerinin doğrusal birleşimidir. Bu yöntem başlangıç konumu dolaylarında iyi sonuçlar verir. Kesme YBMG yöntemi ile ilgili "Efficient Input-Output Model Representation" adlı yazıda[4] örnekler verilmektedir.

Bazı problemlerin tanım kümesi, tek bir kesim noktası ile ifade edilemediğinden dolayı Çoklu Kesme YBMG(Multicut HDMR) yöntemi, Kesme YBMG yöntemine alternatif olarak geliştirilmiştir. Bu yöntemde de Kesme YBMG'de olduğu gibi verilerin düzgün saçılmış olması gerekir. Çoklu Kesme yönteminde tanım kümesi üzerinde birden çok başlangıç konumu alınarak işlem yapıldığı için tüm tanım bölgesi üzerinde iyi sonuç verir. Bu tür problemler için tanım kümesi, tek bir başlangıç konumunu içerecek biçimde alt bölgelere ayrılarak Kesme YBMG yöntemi de kullanılabilir. Bu konu ile ilgili "Multicut HDMR with an Application to an Ionospheric Model" adlı yazıda[17] İyonosferik problem , hem Kesme YBMG ile hem de Çoklu Kesme YBMG yöntemi le

çözümüştür.

Diğer bir YBMG yöntemi olan Seçkisiz Örneklemeli YBMG(Random Sampling HDMR)[16] girdilerinin örneklem uzayının düzgün olması gerekmediğinden dolayı Kesme YBMG'ye göre daha genel bir yapıdadır. Bu nedenden dolayı Kesme ve Çoklu Kesme YBMG yönteminde kullanılan bağıntılandırmalar burada kullanılamaz. Bu yöntemdeki bileşenlerin belirlenebilmesi düğüm noktalarındaki girdi çıktı değerleri tarafından YBMG açılımının sağlanması gerekliliğine dayanır.

Yukarıda sözedilen GYBMG, Kesme YBMG, Çoklu Kesme YBMG, Seçkisiz Örneklemeli YBMG yöntemlerinin ortak özellikleri veri çözümlemesi konusunda gelişen yöntemler olmasıdır. Bu yöntemler tezde kullanılmayacağı için kısaca anlatılmakla yetinilmiştir.

Son olarak bu dört yöntemin yanısıra YBMG yöntemine alternatif olarak geliştirilen Çokdeğişkenliliği Yükseltilmiş Çarpımsal Gösterim(ÇYÇG) (Enhanced Multivariate Product Representation-EMPR)[24,25,35] yönteminden kısaca bahsedelim. Bu yöntem destek işlevleri kullanılarak oluşturulan YBMG yöntemidir. Bu yöntem YBMG'in güçsüz kaldığı birçok durumda YBMG yönteminden daha iyi çalışmaktadır. Özellikle çarpımsal yapıdaki işlevler için şimdiye kadar geliştirilmiş olan tüm yöntemlerden daha iyi çalışmaktadır. Bu yöntemde destek işlevi özel olarak 1 değerini alırsa yöntem Yalın YBMG yöntemine dönüşür.

II.2 HERMİTE-PADÉ YAKLAŞTIRIMI

Bu bölümde bilimsel yazında çok bilinen yöntem olan Hermite-Padé yöntemine yer verilmiştir. Burada yöntemin çıkarımları özgün bir şekilde derlenip yeniden ele alınmıştır. Bilimsel yazında bilindiği gibi Hermite-Padé yaklaşımı[26,27] Taylor açılımına dayanan bir yaklaşım tekniğidir. Bu nedenle bu yaklaşım tekniğinin noktasal olduğu söylenebilir ve Taylor serisine açıldığı nokta civarında yaklaşımın iyi sonuçlar vermesi beklenir.

Bir $f(x)$ işlevi alalım. Bu işlevi $x = 0$ 'da Taylor serisine açalım.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i x^i \quad (\text{II.40})$$

f_i ler açılımdaki katsayılarıdır ve işlevin i . türevinin $x = 0$ 'daki değerinin $i!$ ile bölümü olarak tanımlanır.

Taylor açılımı verilen işlev için Hermite-Padé yaklaşımı aşağıdaki konik yapı oluşturularak elde edilir.

$$P_m(x) + Q_n(x) f(x) + R_p(x) f(x)^2 = 0 \quad (\text{II.41})$$

Burada P, Q ve R sırasıyla m., n. ve p. dereceden çokterimliler olarak tanımlanır. Hermite-Padé yaklaşımı, işlevin $m + n + p$. dereceden Taylor açılımı alınarak elde edilir.

$$f(x) \approx H_{[m,n,p]}(x) \quad (\text{II.42})$$

f yerine $m + n + p$. dereceden Taylor açılımı $H_{[m,n,p]}(x)$ yazıldığında,

$$P_m(x) + Q_n(x) f H_{[m,n,p]}(x) + R_p(x) H_{[m,n,p]}(x)^2 \approx 0 \quad (\text{IV.43})$$

elde edilir. Denklemden $H_{[m,n,p]}$ çekildiğinde,

$$H_{[m,n,p]} \approx \frac{-Q_n(x)}{2R_p(x)} \pm \sqrt{\frac{Q_n(x)^2}{4R_p(x)^2} - \frac{P_m(x)}{R_p(x)}} \quad (\text{II.44})$$

yaklaşımı elde edilmiş olur.

Şimdi yaklaşım denklemindeki P, Q ve R çokterimlerinin belirlenmesi ile ilgileneceğiz. Bunun için bu çokterimlileri aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

$$\begin{aligned}
P_m(x) &= \sum_{j=0}^m a_j x^j = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j; & a_j &\equiv 0, j > m \\
Q_n(x) &= \sum_{k=0}^n b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k; & b_k &\equiv 0, k > n \\
R_p(x) &= \sum_{\ell=0}^p c_\ell x^\ell = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell x^\ell; & c_\ell &\equiv 0, \ell > p
\end{aligned} \tag{II.45}$$

P, Q ve R çok terimlilerinin dereceleri sırasıyla m, n ve p den büyük olduğu durumlarda katsayıları özdeş olarak sıfır olmak koşulu altında sonsuz toplam olarak yazılmasında bir sakınca yoktur. Bu şekilde yazımın nedeni Cauchy çarpımından yararlanabilmektir. Çokterimlilerin yukarıdaki tanımlamalarını Hermite-Padé yaklaşımını için yazdığımız konik yapıda yerine yazarsak,

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j + \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} f_i x^i \right) + \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell x^\ell \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} f_i x^i \right)^2 = 0 \tag{II.46}$$

bağıntısı elde edilir. Buradaki çarpımlar düzenlendiğinde

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} f_i x^i \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} b_k f_i x^{i+k} \tag{II.47}$$

olup bu toplamda i yerine $i - k$ yazıp Cauchy çarpımı kullanıldığında,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=k}^{\infty} b_k f_{i-k} x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^i b_k f_{i-k} \right) x^i \tag{II.48}$$

elde edilir. Benzer biçimde,

$$\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell x^\ell \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} f_i x^i \right)^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell=0}^i c_\ell f_{i-\ell} \right) x^i \sum_{s=0}^{\infty} f_s x^s = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{i=0}^s d_i f_{s-i} x^s \tag{II.49}$$

biçiminde yazılabilir. Buradan

$$d_i = \sum_{\ell=0}^i c_\ell f_{i-\ell} \tag{II.50}$$

ve

$$\sum_{i=0}^s d_i f_{s-i} = \sum_{i=0}^s \sum_{\ell=0}^i c_\ell f_{i-\ell} f_{s-i} \tag{II.51}$$

biçimindedir. Denklem elde edilen (II.48) ve (II.51) bağıntıları yardımı ile (II.46)

denklemini düzenlenip aynı altsırasayı altında yazıldığında

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i + \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^i b_k f_{i-k} \right) x^i + \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell=0}^s \sum_{\ell=0}^i c_{\ell} f_{i-\ell} f_{i-s} \right) x^i = 0 \quad (\text{II.52})$$

olup

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left[a_i + \sum_{k=0}^i b_k f_{i-k} + \sum_{\ell=0}^s \sum_{\ell=0}^i c_{\ell} f_{i-\ell} f_{i-s} \right] x^i = 0 \quad (\text{II.53})$$

elde edilir. Bu toplamın sıfır olması ancak $i = 0, 1, 2, \dots$ için tüm katsayıların sıfır olması durumunda gerçekleşir.

$$a_i + \sum_{k=0}^i b_k f_{i-k} + \sum_{\ell=0}^s \sum_{\ell=0}^i c_{\ell} f_{i-\ell} f_{i-s} = 0, \quad i = 0, 1, \dots \quad (\text{II.54})$$

Çokterimlilerin belirlenebilmesi, bu denklem takımlarının çözülüp katsayıların bulunmasına bağlıdır. Bunun için kaç tane denklem ile ilgilenmemiz gerektiğine karar vermemiz gerekir. İlgilenilmesi gereken denklem sayısı çokterimlilerin dereceleri toplamından iki fazla yani $m + n + p + 2$ tane olmalıdır. Nedeni ise çokterimlilerin katsayılarının belirlenebilmesi için, bilinmeyen katsayı sayısından bir eksik denkleme gereksinim olmasıdır. Aksi takdirde katsayılar belirlenemez. Açık olarak $m = n = p = 0$ için bağıntılandırım elde etmek istersek çözüm için 2 tane denklem gerekir. Bu denklemler aşağıdaki gibidir

$$\begin{aligned} i = 0, a_0 + b_0 f_0 + c_0 f_0 f_0 &= 0 \\ i = 1, a_1 + b_0 f_1 + b_1 f_0 + c_0 f_0 f_1 + c_0 f_1 f_0 + c_1 f_0 f_1 + c_1 f_1 f_0 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.55})$$

$i = 1$ den büyük değerler için apaçık çözüm elde edileceğinden (II.55)'de verilen

denklemler çözüm için yeterli olacaktır. Bu denklemlerle birlikte ayrıca 3 katsayı daha denkleme eklenmiş olur. Bu katsayılar $a_1 = b_1 = c_1 = 0$ alınıp ve bu koşul altında denklem çözüldüğünde,

$$b_0 f_1 + c_0 f_0 f_1 + c_0 f_1 f_0 = 0 \quad (\text{II.56})$$

$$b_0 f_1 + 2c_0 f_0 f_1 = 0 \quad (\text{II.57})$$

olup,

$$\begin{aligned} b_0 &= -2c_0f_0 \\ a_0 &= c_0f_0^2 \end{aligned} \quad (\text{II.58})$$

olarak bulunur. Elde edilen bu katsayılar ile P, Q ve R çokterimlileri yeniden yazıldığında,

$$\begin{aligned} P_0(x) &= a_0 = c_0f_0^2 \\ Q_0(x) &= b_0 = -2c_0f_0 \\ R_0(x) &= c_0 \end{aligned} \quad (\text{II.59})$$

çokterimlileri elde edilmiş olur. Bulunan bu çokterimliler ile Hermite-Padé yaklaşımı,

$$H_{[0,0,0]} = -\frac{-2c_0f_0}{2c_0} \pm \sqrt{\frac{(-2c_0f_0)^2}{4c_0^2} - \frac{c_0f_0^2}{c_0}} = f_0 \quad (\text{II.60})$$

olur. Bu beklenen bir sonuçtur.

Benzer işlemlerle $m = 1, n = p = 0$ için $H_{[1,0,0]}$ hesaplanmak istenirse yapılması gereken tek şey denklem sayısını 1 arttırıp elde edilen denklemi çözmek olacaktır. Bu durumda sırasıyla $i = 0, 1, 2$ için denklemler,

$$\begin{aligned} a_0 + b_0f_0 + c_0f_0f_0 &= 0 \\ a_1 + b_0f_1 + b_1f_0 + c_0f_0f_1 + c_0f_1f_0 + c_1f_0f_1 + c_1f_1f_0 &= 0 \\ a_2 + b_0f_2 + b_1f_1 + b_2f_0 + c_0f_0f_2 + c_0f_1^2 + c_1f_0f_1 + c_0f_2f_0 + c_1f_1f_0 + c_2f_0^2 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.61})$$

biçiminde elde edilir. Burada benzer düşünceyle $a_2 = b_1 = b_2 = c_1 = c_2 = 0$ alınıp denklemler yeniden düzenlenirse,

$$\begin{aligned} a_0 + b_0f_0 + c_0f_0^2 &= 0 \\ a_1 + b_0f_1 + 2c_0f_0f_1 &= 0 \\ b_0f_2 + c_0(2f_0f_2 + f_1^2) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.62})$$

biçiminde elde edilir. Bu denklemler çözümlürse,

$$\begin{aligned}
a_0 &= c_0 \frac{(f_0^2 f_2 + f_0 f_1^2)}{f_2} \\
a_1 &= c_0 \frac{f_1^3}{f_2} \\
b_0 &= -c_0 \frac{(2f_0 f_2 + f_0 f_1^2)}{f_2} \\
c_0 &= c_0
\end{aligned} \tag{II.63}$$

katsayıları elde edilir. Elde edilen bu katsayılar ile çokterimliler aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned}
P_1(x) &= a_0 + a_1 x = \frac{c_0(f_0^2 f_2 + f_1^2 f_0 + f_1^3 x)}{f_2} \\
Q_0(x) &= b_0 = \frac{-c_0(2(f_0 f_2 + f_1^2))}{f_2} \\
R_0(x) &= c_0
\end{aligned} \tag{II.64}$$

Dolayısıyla, yaklaştırım denkleminiz $m = 1, n = p = 0$ için,

$$H_{[1,0,0]} = f_0 + \frac{f_1^2 \pm \sqrt{f_1^4 - 4f_1^3 f_2 x}}{2f_2} \tag{II.65}$$

biçiminde elde edilir. Benzer yol izlenerek farklı $[m, n, p]$ değerleri için bu örnekler çoğaltılabilir.

Burada Hermite-Padé yaklaştırım denkleminin yapısının tezin kaynağı olan Konik DYBMG'de elde edilen yaklaştırım denkleminin yapısına benzerliğinden dolayı verilmiş olup bu tez çalışmasında Hermite-Padé yöntemi ile karşılaştırma yoluna gidilmiştir. Karşılaştırmalar ile ilgili ayrıntılı bilgi uygulamalar kesiminde verilecektir.

III KONİK DÖNÜŞÜMSSEL YBMG'NİN TEMEL ÖZELLİKLERİ

III.1 Giriş

DYBMG'nin temel düşüncesi, daha önce de sözedildiği gibi çok değişkenli bir işleve bir dönüşüm uygulayarak bu dönüşüm altındaki görüntüsünün YBMG açılımının daha etkin olmasını sağlamaktır. Daha önce yapılmış olan İrem Yaman'ın doktora tezinde afin dönüşüm ele alınarak DYBMG yöntemi kullanılmıştır. Tezin bu bölümünde, II. Bölümde verilen bilgiler doğrultusunda DYBMG yönteminin konik dönüşüm ile nasıl etkin hale getirileceği konusunda ilgilenecektir. Bu amaçla en iyi yaklaşımlar için eniyelenmiş parametreleri konik dönüşüm altında bulmaya çalışacağız. Bu parametreler değiştikçe yaklaşımın niteliği de değişecektir. İrem Yaman'ın doktora tezinde yapılan cebirsel işlemler ve kavramsal yapılar burada da benzer biçimde varlığını sürdürecektir. Çünkü her iki dönüşüm de çokterimli yapıdadır. Ancak konik ve afin dönüşüm farkından dolayı yaklaşımlar birbirinden oldukça farklı olacaktır. Bu amaçla önce Afin DYBMG yapısından kısaca sözedilecek daha sonra da Konik DYBMG yönteminin genel yapısı türetilenektir.

III.2 Afin DYBMG Yönteminin Genel Yapısı

Bu bölümde Afin DYBMG[31,33] yöntemine değineceğiz. Bu konunun burada verilmesindeki amaç tezde kullanılan konik dönüşüm yapısının afin dönüşüm yapısındaki gibi çokterimli olmasıdır.

Şimdi T , f işlevi üzerinde tanımlanmış 1. dereceden dönüşüm olsun, φ de bu dönüşüm altındaki görüntüsü olan yeni bir işlev olsun,

$$Tf(x_1, x_2, \dots, x_N) \equiv \varphi(x_1, x_2, \dots, x_N) \equiv a_0 + a_1 f \quad (\text{III.1})$$

Bu dönüşüm katsayıları a_0 ve a_1 eniyileme parametreleri olup çok değişkenli işlevler

olarak tanımlanır. Elde edilen bu yeni işlevin YBMG açılımı,

$$\varphi(x_1, \dots, x_N) = \varphi_0 + \sum_{i_1=1}^N \varphi_{i_1}(x_{i_1}) + \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N \varphi_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) + \dots + \varphi_{12\dots N}(x_1, \dots, x_N) \quad (\text{III.2})$$

biçimindedir. Bu işleve değişmez terim φ_0 ile yaklaştırım yapılırsa

$$\varphi = a_0 + a_1 f \approx \varphi_0 \quad (\text{III.3})$$

elde edilir. Buradan f çekilirse,

$$f \approx \frac{\varphi_0 - a_0}{a_1} \quad (\text{III.4})$$

yaklaştırımı elde edilir. Bu oransal yaklaştırım bilimsel yazındaki Padé oranları ile benzerlik gösterir. Bu konu ile ilgili ayrıntılı bilgi ve çalışmalar İrem Yaman'ın tezinde verilmiştir. Biz yalnızca dönüşüm yapısıyla ilgileneceğiz.

Yöntemin değişmezlik ölçeni aşağıdaki gibi verilir:

$$\sigma_0(\varphi) = \frac{\|\varphi_0\|^2}{\|\varphi\|^2} \quad (\text{III.5})$$

σ_0 değişmezlik ölçeni a_0 ve a_1 'e bağlıdır. Yaklaştırımın niteliğini arttırabilmek için değişmezlik ölçenini enbüyükleyecek (1'e yakın olacak şekilde) katsayılar seçilmesi gerekir. Bunun için a_0 ve a_1 karesi tümlemlenebilir N-değişkenli katsayılar olarak alınır. Bu katsayıları Hilbert uzayının taban işlevleri türünden yazabiliriz. Burada a_0 ve a_1 ,

$$\begin{aligned} a_0(x_1, \dots, x_N) &= \sum_{j=2}^m a_j^{(0)} u_j, \\ a_1(x_1, \dots, x_N) &= \sum_{k=1}^n a_k^{(1)} u_k, \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

biçiminde yazılabilir. Burada Hilbert uzayının farklı taban takım ailelerini kullanmak yaklaştırıma esneklik katacaktır. Ayrıca a_0 'ın tanımında ilk taban işlevi olan u_1 doğrusal birleşime alınmamıştır. Bunun sebebi a_1 'in sıfır değerini alması sonucu dönüşümün doğallıktan ödün vermesidir. Elde edilen bu anlatımlara dayanarak $\sigma_0(\varphi)$ değişmezlik ölçeni $a_j^{(0)}$ ($2 \leq j \leq m$) ve $a_k^{(1)}$ ($1 \leq k \leq n$) parametrelerine bağlı bir işlev olacaktır.

$$\sigma_0(\varphi) = \sigma_0\left(a_2^{(0)}, \dots, a_m^{(0)}, a_1^{(1)}, \dots, a_n^{(1)}\right) \quad (\text{III.7})$$

(III.6) da verilen anlatımlar kullanılarak φ ,

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_N) = \left(\sum_{j=2}^m a_j^{(0)} u_j \right) + \left(\sum_{k=1}^n a_k^{(1)} u_k \right) f \quad (\text{III.8})$$

biçiminde yazılır. YBMG bileşenlerinden değişmez terimi hesaplayabilmek için (III.2) denkleminin her iki yanını W ağırlık fonksiyonu altında değişkenlerin tümü üzerinde N -katlı tümlevi alınarak elde edilir.

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \sum_{j=2}^m a_j^{(0)} \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} \left(\prod_{i=1}^N W_i(x_i) \right) u_j(x_1, \dots, x_N) \\ &+ \sum_{k=1}^n a_k^{(1)} \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} \left(\prod_{i=1}^N W_i(x_i) \right) u_k(x_1, \dots, x_N) f(x_1, \dots, x_N) \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

Elde edilen bu φ_0 'ın yapısı incelendiğinde değişmez terimin iç çarpım olarak yazılabileceği görülür. Bu amaçla (III.9) denkleminin yapısındaki tümlevler $\boldsymbol{\alpha}$ 'ın bileşenlerini ve tümlevlerin önündeki katsayılar da \mathbf{a} yöneyinin bileşenlerini oluşturur.

$$\varphi_0 = \mathbf{a}^T \boldsymbol{\alpha} = \left(a_2^{(0)}, \dots, a_m^{(0)}, a_1^{(1)}, \dots, a_n^{(1)} \right) \left(\alpha_2^{(0)}, \dots, \alpha_m^{(0)}, \alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_n^{(1)} \right)^T \quad (\text{III.10})$$

Burada $\boldsymbol{\alpha}$ yöneyinin öğeleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \alpha_j^{(0)} &= \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} \left(\prod_{i=1}^N W_i(x_i) \right) u_j(x_1, \dots, x_N) = (u_j, h), & 2 \leq j \leq m \\ \alpha_k^{(1)} &= \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} \left(\prod_{i=1}^N W_i(x_i) \right) u_k(x_1, \dots, x_N) f = (u_k, f), & 1 \leq k \leq n \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

$\alpha_j^{(0)}$ 'ın yapısındaki h işlevi, her x_i değişkeni için tanımlanan ve $[a_i, b_i]$ aralıkları boyunca 1 değerini alan değişmez bir işlevdir.

Değişmezlik ölçeninin payını hesaplamak için φ_0 'ın boyunun karesini hesaplamamız gerekir. O halde

$$\|\varphi_0\|^2 = (\mathbf{a}^T \boldsymbol{\alpha}) (\mathbf{a}^T \boldsymbol{\alpha})^T = \mathbf{a}^T \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{a} \quad (\text{III.12})$$

şeklinde elde edilir. Benzer biçimde değişmezlik ölçeninin paydasını hesaplayabilmek için φ 'ın boyunu da hesaplamamız gerekir. Bunun için boy tanımından yararlanılırsa,

$$\|\varphi\|^2 = (\varphi, \varphi) = \int_{\mathcal{V}} dV \left(\prod_{i=1}^N W_i(x_i) \right) \varphi(x_1, \dots, x_N)^2 \quad (\text{III.13})$$

$\|\varphi\|^2$ yukarıdaki gibi elde edilir. Burada φ yerine (III.8) da verilen tanımı kullanılır ve cebirsel işlemler yapılırsa $\|\varphi\|^2$ 'ın yapısında benzer iç çarpımlar olduğu görülür. Bu iççarpımlar dizey ve yöneylerle ifade edilir

$$\|\varphi\|^2 = \mathbf{a}^T \mathbf{A} \mathbf{a} \quad (\text{III.14})$$

Burada \mathbf{A} , bloklardan oluşan simetrik ve artı tanımlı bir dizeydir ve bileşenleri iç çarpımlar olan dizey aşağıdaki gibidir.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M}^T & \mathbf{N} \end{bmatrix} \quad (\text{III.15})$$

Dizeyin bloklarının açık yapısı,

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{jk} &= (u_j, u_k), & 2 \leq j, k \leq m \\ \mathbf{M}_{jk} &= (u_j, f u_k), & 2 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n \\ \mathbf{N}_{jk} &= (u_j, f^2 u_k), & 1 \leq j, k \leq n \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

biçimindedir.

Değişmezlik ölçeni, elde edilen bu yeni tanımlamalarla yeniden yazılırsa

$$\sigma_0 = \frac{\|\varphi_0\|^2}{\|\varphi\|^2} = \frac{\mathbf{a}^T \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{a}}{\mathbf{a}^T \mathbf{A} \mathbf{a}} \quad (\text{III.17})$$

elde edilmiş olur. Burada amaç değişmezlik ölçenini enbüyüklemektir. Yani değişmezlik ölçenimiz 1'e ne kadar yakın olursa yaklaştırım o kadar iyi olacaktır. Bunun için burada Rayleigh oranlarından faydalanılmıştır. σ_0 , değişmezlik ölçenini Rayleigh oranı biçiminde aşağıdaki gibi yazmak olanaklıdır.

$$\sigma_0 = \frac{\mathbf{y}^T \mathbf{A}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{A}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{y}}{\mathbf{y}^T \mathbf{y}} \quad (\text{III.18})$$

Burada $\mathbf{y} = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \mathbf{a}$ olarak tanımlanmıştır. \mathbf{A} dizeyinin artı tanımlılığının sonucu olarak, karekökü eşsiz bir biçimde elde edilir. \mathbf{A} dizeyinin bakışık olduğu da gözönüne alınır

$(\mathbf{A}^{-\frac{1}{2}})^T = (\mathbf{A}^T)^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{A}^{-\frac{1}{2}}$ yazılır. Rayleigh oranı en büyük değerini, içerdiği çekirdek matrisin $(\mathbf{A}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{A}^{-\frac{1}{2}})$ en büyük özdeğerinde alır. Bu en büyük özdeğer -değişmezlik ölçeninin en büyük değeri- ve karşılık gelen özyöneyle

$$\begin{aligned}\sigma_{0max} &= \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{A}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\alpha}\end{aligned}\tag{III.19}$$

ile verilir. Bu verilerle değişmezlik ölçenini enbüyükleyecek \mathbf{a} yöneyi $\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\alpha}$ olarak elde edilir. \mathbf{a} yöneyinin bu tanımı, $m + n - 1$ boyutlu $\mathbf{u} = [u_2, \dots, u_m, u_1, \dots, u_n]^T$ yöneyi ve $\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{m-1} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T$ izdüşüm dizeyi yardımı ile a_0 ve a_1 katsayıları aşağıdaki gibi yeniden tanımlanır:

$$\begin{aligned}a_0 &\approx \mathbf{a}^T \mathbf{P} \mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{u} \\ a_1 &\approx \mathbf{a}^T (\mathbf{I} - \mathbf{P}) \mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{P}) \mathbf{u}\end{aligned}\tag{III.20}$$

Bu katsayılar yardımıyla yaklaşıım eşitliği aşağıdaki gibi yazılır.

$$f \approx \frac{\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{A}^{-1} (\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{P} \mathbf{u})}{\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{P}) \mathbf{u}}\tag{III.21}$$

Elde edilen yaklaşıım eşitliği fonksiyon için, yaklaşıımdan kaynaklanan hatayı en küçük yapacak şekilde oluşturulmuş bir oransal yaklaşıımdır. Bilimsel yazında oransal yaklaşıım uygulamalarında çoğunlukla çokterimlilerin oranı kullanıldığı görülür ki, bunlardan en çok bilineni Padé oranlarıdır. İrem Yaman'ın doktora tezinde elde ettiği bu yeni oransal yaklaşıım ile Padé oranlarının ayrıntılı olarak karşılaştırılması incelenmiştir. Ayrıca yaklaşıım denklemindeki dizeyin evriğinin hesaplanması boyut arttıkça zorlaşmaktadır. Bu sebeple bu tez çalışmasında dizeyin evriği izgesel gösterilimi kullanılarak dizey evriği için ederi düşürecek şekilde yaklaşıım yöntemi geliştirilmiştir. Bu konu ile ilgili ayrıntılar bu tezde bulunabilir.

III.3 Konik DYBMG Yönteminin Genel Yapısının Oluşturumu

Bu bölümde tezin ana konusu olan Konik DYBMG yönteminin genel yapısının oluşturumu ve bu yöntemin temel özellikleri ile ilgileneceğiz. Bu amaçla DYBMG yönteminin yapısındaki dönüşümü 2. dereceden bir çokterimli olarak alalım ve bu çokterimlinin katsayılarını N değişkenli işlevler olarak tanımlayalım. T , f işlevi üzerinde tanımlanmış 2. dereceden dönüşüm olsun, φ de bu dönüşüm altındaki görüntüsü olan yeni bir işlev olsun,

$$\begin{aligned} Tf(x_1, x_2, \dots, x_N) &\equiv \varphi(x_1, x_2, \dots, x_N) \\ &\equiv a_0 + a_1 f + a_2 f^2 \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$

Bu dönüşüm yapısında eniyileme parametreleri içerir. Bu dönüşümün parametreleri a_0 , a_1 ve a_2 , çok değişkenli işlevler olarak tanımlanmışlardır. Şimdi yapılacak olan işlem, dönüşümü kullandıktan sonra elde edilen bu yeni işlevin YBMG açılımı ile ilgilenmek olacaktır. Yeni işlevin YBMG açılımı,

$$\varphi(x_1, \dots, x_N) = \varphi_0 + \sum_{i_1=1}^N \varphi_{i_1}(x_{i_1}) + \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N \varphi_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) + \dots + \varphi_{12\dots N}(x_1, \dots, x_N) \quad (\text{III.23})$$

biçimindedir. YBMG yöntemindeki benzer düşünce burada da işleyecektir. Bu yeni işlevin YBMG bileşenlerini Bölüm II de verilen DYBMG yönteminde olduğu gibi hesaplayabiliriz. Bundan sonraki adım kesmeler yaparak yaklaştırmı elde etmektir. Bu amaçla işleve değişmez terim φ_0 ile yaklaştırmı yapalım.

$$\varphi = a_0 + a_1 f + a_2 f^2 \approx \varphi_0 \quad (\text{III.24})$$

Bu çalışmada yalnızca değişmez yaklaştırmı kullanılmıştır. Daha yüksek kereden yaklaştırmalar yapmak bir takım karmaşık yapıları beraberinde getirir. Bu da istenilen bir durum değildir.

Şimdi değişmez yaklaştırım ile elde edilen denklemde bir takım cebirsel işlemlerle f yalnız bırakılırsa,

$$f \approx -\frac{a_1}{2a_2} \pm \sqrt{\frac{4\varphi_0 a_2 - 4a_2 a_0 + a_1^2}{4a_2^2}} \quad (\text{III.25})$$

biçiminde f için bir yaklaştırım denklemi elde edilmiş olur. Burada iki farklı yaklaştırım denklemi elde edilmesi konik dönüşümün doğal sonucudur. Ancak hangi yaklaştırımı seçeceğimiz, çalıştığımız işleve göre değişecektir. Burada a_2 'nin sıfırdan farklı olduğunu dönüşümümüz garantiliyor. Çünkü a_2 'nin sıfır olması demek dönüşümün konik dönüşüm değil afin dönüşüm olması demektir.

Yöntemin nasıl çalıştığını ölçebilmek amacı ile tanımlanan değişmezlik ölçeni aşağıdaki gibi verilir:

$$\sigma_0(\varphi) = \frac{\|\varphi_0\|^2}{\|\varphi\|^2} \quad (\text{III.26})$$

Elde edilen bu denklemde en uygun a_0 , a_1 ve a_2 katsayılarını bulmak önem kazanır. Çünkü değişmezlik ölçeni bu katsayılara bağlı bir ölçendir. Yaklaştırımın niteliğini arttırabilmek için değişmezlik ölçenini enbüyükleyecek (1'e yakın olacak şekilde) katsayılar seçilmesi gerekir. Bunun için a_0 , a_1 ve a_2 karesi tümlemlenebilir N-değişkenli katsayılar olarak alınır. Bu katsayıları Hilbert uzayının taban işlevleri cinsinden yazabiliriz. Bu amaçla Hilbert uzayında dik ve birimboylu(ing:orthonormal) bir taban kümesi ele alalım:

$$\mathcal{U} = \{u_i(x_1, x_2, \dots, x_N)\}_{i=1}^{\infty} \quad (\text{III.27})$$

Hilbert uzayında dik ve birimboyluluk iç çarpım tanımı ile verilir.

$$(u_i, u_j) = \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} W(x_1, x_2, \dots, x_N) u_i(x_1, \dots, x_N) u_j(x_1, \dots, x_N) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j < \infty \quad (\text{III.28})$$

Burada çalıştığımız YBMG bölgesi

$$\mathcal{V} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_N, b_N] \quad (\text{III.29})$$

biçiminde bir aşkınçokyüzlüdür ve $d\mathcal{V} = dx_1 dx_2 \dots dx_N$ biçimindedir. Hilbert uzayında ağırlık ise,

$$W(x_1, x_2, \dots, x_N) = \prod_{i=1}^N W_i(x_i) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{(b_i - a_i)} \quad (\text{III.30})$$

ile verilir. Yukarıda sözünü ettiğimiz taban takımı kümesi sonsuz boyutlu olmakla birlikte bu çalışmada sonlu boyuttaki taban takımı gözönüne alınacaktır. Burada Hilbert uzayının m , n ve p boyutlu farklı üç alt kümesi ile çalışacağız. Bu, yapılan yaklaşıma esneklik katacaktır. Bu taban takımları yardımıyla a_0 , a_1 ve a_2 katsayıları,

$$\begin{aligned} a_0(x_1, \dots, x_N) &= \sum_{j=2}^m a_j^{(0)} u_j, \\ a_1(x_1, \dots, x_N) &= \sum_{k=1}^n a_k^{(1)} u_k, \\ a_2(x_1, \dots, x_N) &= \sum_{l=1}^p a_l^{(2)} u_l \end{aligned} \quad (\text{III.31})$$

biçiminde yazılabilir. Burada dikkat edilmesi gereken nokta a_0 taban takımları yardımıyla doğrusal birleşim olarak yazılırken u_1 bileşeninin bu doğrusal birleşime katılmamasıdır. Bunun nedeni u_1 'in doğrusal birleşime katılması durumunda $a_0 = 1$ ve $a_1 = a_2 = 0$ olarak elde edilmesidir ki bu da f 'i devre dışı bırakmak yani eniyilemeden yararlı sonuç almamak demektir. (Bununla ilgili ayrıntılı inceleme Ek-A'da verilmektedir. İrem Yaman'ın tezinden[33] yararlanılarak konik dönüşüm için yapı elde edilmiştir.) Bu yüzden genellikle birşey yitirmeksizin, u_1 'in dışlanması gerekir.

Elde edilen bu anlatımlara dayanarak $\sigma_0(\varphi)$ değişmezlik ölçeni $a_j^{(0)} (2 \leq j \leq m)$, $a_k^{(1)} (1 \leq k \leq n)$ ve $a_l^{(2)} (1 \leq l \leq p)$ parametrelerine bağlı bir işlev olacaktır.

$$\sigma_0(\varphi) = \sigma_0\left(a_2^{(0)}, \dots, a_m^{(0)}, a_1^{(1)}, \dots, a_n^{(1)}, a_1^{(2)}, \dots, a_p^{(2)}\right) \quad (\text{III.32})$$

(III.31) de verilen a_0 , a_1 ve a_2 ifadeleri kullanılarak φ ,

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_N) = \left(\sum_{j=2}^m a_j^{(0)} u_j\right) + \left(\sum_{k=1}^n a_k^{(1)} u_k\right) f + \left(\sum_{l=1}^p a_l^{(2)} u_l\right) f^2 \quad (\text{III.33})$$

biçiminde yazılır. YBMG açılımındaki değişmez terimi hesaplayabilmek için yukarıdaki denklemin her iki yanının W ağırlık fonksiyonu altında N-katlı tümlevini alırsak,

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= \sum_{j=2}^m a_j^{(0)} \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} \left(\prod_{i=1}^N W_i(x_i) \right) u_j(x_1, \dots, x_N) \\ &+ \sum_{k=1}^n a_k^{(1)} \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} \left(\prod_{i=1}^N W_i(x_i) \right) u_k(x_1, \dots, x_N) f(x_1, \dots, x_N) \\ &+ \sum_{l=1}^p a_l^{(2)} \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} \left(\prod_{i=1}^N W_i(x_i) \right) u_l(x_1, \dots, x_N) f^2(x_1, \dots, x_N)\end{aligned}\quad (\text{III.34})$$

olur. Cebirsel işlemler ve gösterilim kolaylığı açısından aşağıdaki yöneyleri tanımlayalım:

$$\mathbf{a} = \left(a_2^{(0)}, \dots, a_m^{(0)}, a_1^{(1)}, \dots, a_n^{(1)}, a_1^{(2)}, \dots, a_p^{(2)} \right)^T \quad (\text{III.35})$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \left(\alpha_2^{(0)}, \dots, \alpha_m^{(0)}, \alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_n^{(1)}, \alpha_1^{(2)}, \dots, \alpha_p^{(2)} \right)^T \quad (\text{III.36})$$

\mathbf{a} yöneyinin bileşenleri (III.31) eşitliğindeki $a_j^{(0)}$, $a_k^{(1)}$ ve $a_l^{(2)}$ katsayılarından, $\boldsymbol{\alpha}$ yöneyinin bileşenleri ise (III.34) eşitliğindeki tümlevlerden oluşur ve bu tümlevler aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}\alpha_j^{(0)} &= \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} \left(\prod_{i=1}^N W_i(x_i) \right) u_j(x_1, \dots, x_N) = (u_j, h), & 2 \leq j \leq m \\ \alpha_k^{(1)} &= \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} \left(\prod_{i=1}^N W_i(x_i) \right) u_k(x_1, \dots, x_N) f = (u_k, f), & 1 \leq k \leq n \\ \alpha_l^{(2)} &= \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} \left(\prod_{i=1}^N W_i(x_i) \right) u_l(x_1, \dots, x_N) f^2 = (u_l, f^2), & 1 \leq l \leq p\end{aligned}\quad (\text{III.37})$$

Yukarıda verilen eşitliklerde h işlevi ilgili aralıkta ilgili değişken için tanımlanmış 1 değerini alan değişmez işlemdir ve aşağıdaki anlatımla verilir.

$$h(x_1, \dots, x_N) \equiv 1, \quad \forall x_i \in [a_i, b_i], \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{III.38})$$

\mathbf{a} ve $\boldsymbol{\alpha}$ yöneyleri yardımı ile φ_0 iç çarpım olarak yazılabilir.

$$\varphi_0 = \mathbf{a}^T \boldsymbol{\alpha} \quad (\text{III.39})$$

Değişmezlik ölçeninin payını hesaplamak için φ_0 'ın boyunun karesini hesaplamamız gerekir. φ_0 değişmez bir işlev olduğundan boy karesi, işlevin karesine eşit olur. O halde

φ_0 ,

$$\|\varphi_0\|^2 = (\mathbf{a}^T \boldsymbol{\alpha}) (\mathbf{a}^T \boldsymbol{\alpha})^T = \mathbf{a}^T \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{a} \quad (\text{III.40})$$

biçiminde elde edilir. Benzer biçimde değişmezlik ölçeninin paydasını hesaplayabilmek için φ 'nin de boy karesini hesaplamamız gerekir. Bunun için boy tanımından yararlanırsa,

$$\|\varphi\|^2 = (\varphi, \varphi) = \int_V dV \left(\prod_{i=1}^N W_i(x_i) \right) \varphi(x_1, \dots, x_N)^2 \quad (\text{III.41})$$

$\|\varphi\|^2$ yukarıdaki gibi elde edilir. Burada φ yerine (III.33) de verilen tanımı kullanalım.

$$\|\varphi\|^2 = \int_V dV \left(\prod_{i=1}^N W_i(x_i) \right) \left(\sum_{j=2}^m a_j^{(0)} u_j + \left(\sum_{k=1}^n a_k^{(1)} u_k \right) f + \left(\sum_{l=1}^p a_l^{(2)} u_l \right) f^2 \right)^2 \quad (\text{III.42})$$

Burada kare alma işlemi yapıp tümlev toplamın içine dağıtılsa, toplamların içinde iç çarpımlar oluşur. Gerekli düzenlemeler yapıp (III.42) anlatımı yeniden yazılırsa,

$$\begin{aligned} \|\varphi\|^2 &= \sum_{j_1=2}^m \sum_{j_2=2}^m a_{j_1}^{(0)} a_{j_2}^{(0)} (u_{j_1}, u_{j_2}) + \sum_{j=2}^m \sum_{k=1}^n a_j^{(0)} a_k^{(1)} (u_j, f u_k) \\ &+ \sum_{k=1}^n \sum_{j=2}^m a_k^{(1)} a_j^{(0)} (u_k, f u_j) + \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n a_{k_1}^{(1)} a_{k_2}^{(1)} (u_{k_1}, f^2 u_{k_2}) \\ &+ \sum_{j=2}^m \sum_{\ell=1}^p a_j^{(0)} a_\ell^{(2)} (u_j, f^2 u_\ell) + \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^p a_k^{(1)} a_\ell^{(2)} (u_k, f^3 u_\ell) \\ &+ \sum_{\ell=1}^p \sum_{j=2}^m a_\ell^{(2)} a_j^{(0)} (u_\ell, f^2 u_j) + \sum_{\ell=1}^p \sum_{k=1}^n a_\ell^{(2)} a_k^{(1)} (u_\ell, f^3 u_k) \\ &+ \sum_{\ell_1=2}^p \sum_{\ell_2=2}^p a_{\ell_1}^{(2)} a_{\ell_2}^{(2)} (u_{\ell_1}, f^4 u_{\ell_2}) \end{aligned} \quad (\text{III.43})$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafı incelendiğinde toplamların içerisinde \mathbf{a} vektörünün bileşenlerinden ve iç çarpımlardan oluştuğu gözlemlenir. Bu yapıdan faydalanarak $\|\varphi\|^2$ 'yi bir matris yardımıyla dördül biçimde yazabiliriz.

$$\|\varphi\|^2 = \mathbf{a}^T \mathbf{A} \mathbf{a} \quad (\text{III.44})$$

Burada \mathbf{A} , bloklardan oluşan, bakışık ve artı tanımlı (ing:positive definite) bir dizey-

dir. (\mathbf{A} dizeyinin artı tanımlılığı ile ilgili ayrıntılı bilgi Ek-B'dedir[33].)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{L} & \mathbf{N} \\ \mathbf{L}^T & \mathbf{M} & \mathbf{P} \\ \mathbf{N}^T & \mathbf{P}^T & \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (\text{III.45})$$

Ve bu blok dizeylerin yapısı,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{jk} &= (u_j, u_k), & 2 \leq j, k \leq m \\ \mathbf{L}_{jk} &= (u_j, f u_k), & 2 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n \\ \mathbf{M}_{jk} &= (u_j, f^2 u_k), & 1 \leq j, k \leq n \\ \mathbf{N}_{jk} &= (u_j, f^2 u_k), & 2 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq p \\ \mathbf{P}_{jk} &= (u_j, f^3 u_k), & 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq p \\ \mathbf{R}_{jk} &= (u_j, f^4 u_k), & 1 \leq j, k \leq p \end{aligned} \quad (\text{III.46})$$

biçimindedir. Burada \mathbf{K} öğeleri, taban takımı öğelerinin iççarpımından oluşur. Burada \mathbf{K} dizeyinin $m - 1$ boyutlu birim dizey \mathbf{I} olduğu açıktır.

Değişmezlik ölçenini elde ettiğimiz bu eşitliklerle yeniden düzenlersek,

$$\sigma_0 = \frac{\|\varphi_0\|^2}{\|\varphi\|^2} = \frac{\mathbf{a}^T \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{a}}{\mathbf{a}^T \mathbf{A} \mathbf{a}} \quad (\text{III.47})$$

elde edilmiş olur. Daha öncede sözettiğimiz gibi bu çalışmamızda amaç değişmezlik ölçenini enbüyüklemektir. Yani değişmezlik ölçenimiz 1'e ne kadar yakın olursa yaklaştırım o kadar iyi olacaktır. Bunun için,

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\alpha} \quad (\text{III.48})$$

olarak tanımlayalım ve σ_0 'ı Rayleigh oranı[30] şeklinde yazalım:

$$\sigma_0 = \frac{\mathbf{y}^T \mathbf{A}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{A}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{y}}{\mathbf{y}^T \mathbf{y}} \quad (\text{III.49})$$

\mathbf{A} artı tanımlı bir dizey olduğundan dolayı karekökü eşsiz bir şekilde elde edilebilir. Bunun yanısıra \mathbf{A} dizeyinin bakışık olması aşağıdaki özelliği yazabilmemize olanak

sağlar.

$$\left(\mathbf{A}^{-\frac{1}{2}}\right)^T = \left(\mathbf{A}^T\right)^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{A}^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{III.50})$$

Rayleigh oranının içerdiği çekirdek dizey,

$$\mathbf{A}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T\mathbf{A}^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{III.51})$$

dışçarpım yapısında olup, en büyük değerini bu dışçarpım dizeyinin en büyük özdeğerinde alır ve bu özdeğer sıfırdan farklı tek özdeğerdir ki dışçarpımı oluşturan yöneyin boy karesidir. Dışçarpımı oluşturan yöney ve bu yöneye karşılık gelen en büyük özdeğer (σ_0 'ın alacağı en büyük değer) sırasıyla,

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{A}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\alpha} \\ \sigma_{0max} &= \boldsymbol{\alpha}^T\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha} \end{aligned} \quad (\text{III.52})$$

biçimindedir. Dolayısıyla σ_0 , değişmezlik ölçenini enbüyükleyecek \mathbf{a} yöneyi

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha} \quad (\text{III.53})$$

şeklinde elde edilir. Elde edilen bu \mathbf{a} yöneyi (III.39)'da yerine yazılıp yeniden düzenleme yapılırsa σ_0 ,

$$\sigma_0 = \mathbf{a}^T\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^T\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha} \quad (\text{III.54})$$

olur. \mathbf{a} yöneyinin (III.35)'deki tanımından yola çıkarak yaklaşırtım denklemimizdeki a_0 , a_1 ve a_2 katsayılarını belirleyebiliriz. Bu amaçla,

$$\mathbf{u} = [u_2, \dots, u_m, u_1, \dots, u_n, u_1, \dots, u_p]^T \quad (\text{III.55})$$

$m + n + p - 1$ boyutlu yöneyini tanımlayalım. \mathbf{u} yöneyi ve \mathbf{a} yöneyini kullanarak a_0 , a_1 ve a_2 'yi aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\begin{aligned} a_0 &= \mathbf{a}^{(0)T}\mathbf{u}^{(0)} \\ a_1 &= \mathbf{a}^{(1)T}\mathbf{u}^{(1)} \\ a_2 &= \mathbf{a}^{(2)T}\mathbf{u}^{(2)} \end{aligned} \quad (\text{III.56})$$

Buradaki $\mathbf{a}^{(0)}, \mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{a}^{(2)}$ ve $u^{(0)}, u^{(1)}, u^{(2)}$ yöneylerinin açık yapıları sırasıyla,

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}^{(0)} &= [a_2^{(0)}, \dots, a_m^{(0)}]^T \\
\mathbf{a}^{(1)} &= [a_1^{(1)}, \dots, a_n^{(1)}]^T \\
\mathbf{a}^{(2)} &= [a_1^{(2)}, \dots, a_p^{(2)}]^T \\
\mathbf{u}^{(0)} &= [u_2, \dots, u_m]^T \\
\mathbf{u}^{(1)} &= [u_1, \dots, u_n]^T \\
\mathbf{u}^{(2)} &= [u_1, \dots, u_p]^T
\end{aligned} \tag{III.57}$$

olarak tanımlanır.

Gösterilim kolaylığı açısından aşağıdaki $m + n + p - 1$ boyutlu izdüşüm dizeyleri tanımlayalım:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_1 &= \sum_{i=1}^{m-1} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T \\
\mathbf{P}_2 &= \sum_{i=m}^{m+n-1} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T \\
\mathbf{P}_3 &= \sum_{i=m+n}^{m+n+p-1} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T
\end{aligned} \tag{III.58}$$

Burada \mathbf{I} , $m + n + p - 1$ boyutlu birim dizey ve \mathbf{e}_i , $m + n + p - 1$ boyutlu i . birim yöneyi göstermektedir. Ayrıca \mathbf{P}_3 'ün tanımı $\mathbf{I} - \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2$ olarak da verilebilir. Bu izdüşüm dizeyleri yardımıyla a_0 , a_1 ve a_2 'yi yeniden düzenlersek,

$$\begin{aligned}
a_0 &\approx \mathbf{a}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{P}_1 \mathbf{u} \\
a_1 &\approx \mathbf{a}^T \mathbf{P}_2 \mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{P}_2 \mathbf{u} \\
a_2 &\approx \mathbf{a}^T \mathbf{P}_3 \mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{P}_3 \mathbf{u}
\end{aligned} \tag{III.59}$$

elde edilir. a_0 , a_1 ve a_2 katsayılarının elde edilen bu yeni tanımlamalarını (III.25) yak-

laştırım denkleminde yerine yazarsak,

$$f \approx -\frac{\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{P}_2 \mathbf{u}}{2\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{P}_3 \mathbf{u}} \pm \sqrt{\frac{4\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{P}_3 \mathbf{u} - 4\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{P}_3 \mathbf{u} \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{P}_1 \mathbf{u} + (\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{P}_2 \mathbf{u})^2}{4(\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{P}_3 \mathbf{u})^2}} \quad (\text{III.60})$$

yaklaştırım eşitliği elde edilir.

Bu yaklaştırım eşitliğinin afin dönüşümde elde edilen yaklaştırım eşitliğinden farklı olduğundan söz etmiştik. Afin dönüşümün yapısında oransal yaklaştırım söz konusu idi. Burada ise oransal yaklaştırımın yanısıra kareköklü bir yapı görülür. Asıl fonksiyon için elde edilen yaklaştırımlardan hangisinin hatayı en küçük yapacak bir yaklaştırım olduğu sonucuna çalışmanın başlangıç aşamasında deneyerek karar verildi. Ancak tezin ilerleyen aşamalarında yaklaştırım denkleminin literatürdeki Hermite-Padé yaklaştırım denklemleri ile benzer olduğu görüldü. Bu benzerlikten yola çıkılarak \pm seçimi daha da kolaylaştı. Bu konu üzerindeki tartışmalar Hermite-Padé yaklaştırımı ile ilgili anlatımdan sonra uygulamalarda verilecektir.

Yaklaştırım denkleminin yapısı incelendiğinde, $\boldsymbol{\alpha}$ yöneyi ile \mathbf{A}^{-1} , \mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_2 , \mathbf{P}_3 ve \mathbf{I} dizeylerinin değişken içermediği (değişmez) olduğu görülür. Bu durumda yaklaştırım-daki değişkene bağımlılığın, dik ve birim boylu taban işlevlerinden oluşan \mathbf{u} yöneyinden geldiği açıktır. Burada kullanılan taban takımının çokterimliler olarak alınmasının sebebi afin dönüşümün sonuçları ile karşılaştırma yapılmasıdır. Ancak buradaki önemli nokta, yöntemin farklı taban takımları ile çalışabilme esnekliğinin olmasıdır.

(III.60) yaklaştırım eşitliği için, dizey evriğinin hesaplanması gerekir. Dizey evriği alma işlemi, sayısal yöntemlerde çalışırken hesaplama karmaşıklılığı yüksek olan problemlerden biridir. Özellikle de durum sayısı (ing:condition number) artıkça bu işlem daha da zorlaşacaktır. Bu durum yaklaştırımın niteliğini düşürmektedir. Bu amaçla İrem Yaman'ın da doktora tezinde kullandığı yöntem gibi dizey evriği hesaplanırken dizeyin izgesel gösteriliminden[31,33] yararlanılacaktır.

\mathbf{A} dizeyi artı tanımlı (ing:pozitif definite) ve bakışık olduğu için tüm özdeğerleri artıdır. Bu yüzden \mathbf{A}^{-1} dizeyinin izgesel gösterilimi (ing:spectral representation), \mathbf{A} 'nın özdeğer ve karşılık gelen özyöneyleleri kullanılarak aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\mathbf{A}^{-1} = \sum_{i=1}^{m+n+p-1} \frac{1}{\lambda_i} \boldsymbol{\xi}_i \boldsymbol{\xi}_i^T \quad (\text{III.61})$$

Burada özdeğerler iyi sıralıdır. Bu yüzden λ_1 , \mathbf{A} 'nın en küçük özdeğeri ve bu özdeğere karşılık gelen birim boylulaştırılmış özyöney $\boldsymbol{\xi}_1$ 'dir. \mathbf{A} dizeyinin kötü koşullu bir dizey olması nedeniyle sayısal sonuçlardan λ_{min} 'nın sifıra çok yakın bir değer olduğu gözlemlenmiştir. Dolayısıyla $1/\lambda_{min}$ sonsuza gider. \mathbf{A} dizeyinin tersi için iyi bir yaklaşım aşağıdaki gibi elde edilir ve bu yaklaşım dışçarpım şeklindedir.

$$\mathbf{A}^{-1} \approx \frac{1}{\lambda_{min}} \boldsymbol{\xi}_{min} \boldsymbol{\xi}_{min}^T \quad (\text{III.62})$$

\mathbf{A}^{-1} 'in yaklaşım denklemi kullanılarak ilgili parametreler yeniden yazılırsa,

$$\begin{aligned} a_0 &\approx \boldsymbol{\alpha}^T \frac{1}{\lambda_i} \boldsymbol{\xi}_i \boldsymbol{\xi}_i^T \mathbf{P}_1 \mathbf{u} \\ a_1 &\approx \boldsymbol{\alpha}^T \frac{1}{\lambda_i} \boldsymbol{\xi}_i \boldsymbol{\xi}_i^T \mathbf{P}_2 \mathbf{u} \\ a_2 &\approx \boldsymbol{\alpha}^T \frac{1}{\lambda_i} \boldsymbol{\xi}_i \boldsymbol{\xi}_i^T \mathbf{P}_3 \mathbf{u} \\ \varphi_0 &\approx \boldsymbol{\alpha}^T \frac{1}{\lambda_i} \boldsymbol{\xi}_i \boldsymbol{\xi}_i^T \boldsymbol{\alpha} \end{aligned} \quad (\text{III.64})$$

elde edilir. İşlev için yaklaşım eşitliği aşağıdaki gibi verilir:

$$f \approx -\frac{\boldsymbol{\xi}_i^T \mathbf{P}_2 \mathbf{u}}{2\boldsymbol{\xi}_i^T \mathbf{P}_3 \mathbf{u}} + \sqrt{\frac{4\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\xi}_i \boldsymbol{\xi}_i^T \mathbf{P}_3 \mathbf{u} - 4\boldsymbol{\xi}_i^T \mathbf{P}_3 \mathbf{u} \boldsymbol{\xi}_i^T \mathbf{P}_1 \mathbf{u} + (\boldsymbol{\xi}_i^T \mathbf{P}_2 \mathbf{u})^2}{4(\boldsymbol{\xi}_i^T \mathbf{P}_3 \mathbf{u})^2}} \quad (\text{III.65})$$

IV UYGULAMALAR

Bu bölümde, elde edilen yeni yöntem ile ilgili ayrıntılı olarak uygulamalara yer verilecektir. Tüm uygulamalarda tek değişkenli işlevler kullanılacaktır. Herbir işlev için Konik DYBMG yöntemi ile elde edilen yaklaşımlar oluşturulmuştur. Bu yaklaşımlar asıl işlevin yanısıra tezin dayanağı olan Afin DYBMG yöntemi ve bilimsel yazında çok bilinen bir yöntem olan Hermite-Padé yaklaşım yöntemi ile karşılaştırılmıştır.

Bilimsel yazında çok bilinen bir yöntem olan Hermite-Padé yaklaşımını ile karşılaştırmalar yoluna gidilmesinin sebebi yaklaşımların yapısının benzerliğinden kaynaklanmaktadır. Bölüm II.2’de bahsedildiği gibi Hermite-Padé yaklaşımını işlevin $x = 0$ ’daki Taylor açılımına dayanmaktadır. Bu nedenle uygulamalarda Hermite-Padé yaklaşımının $x = 0$ civarında iyi sonuçlar vermesi beklenir. Örneklerde bu açıkça görülmektedir. Konik DYBMG yöntemi ise, Hermite-Padé yaklaşım yöntemine göre daha iyi sonuçlar vermektedir. Bunun sebebi Hermite-Padé yaklaşımını noktasal çalışırken, Konik YBMG yöntemi ağırlıklandırma nedeniyle aralık üzerinde daha evrensel olarak çalışabilmektedir.

Konik DYBMG yöntemindeki yaklaşım ile Hermite-Padé yöntemindeki yaklaşım denklemleri için \pm ’li olmak üzere 2 durum sözkonusudur. Hangisini seçmemiz gerektiği sorusuna elde edilen sonuçlar gözlemlenerek cevap verilmiştir. Bu gözlemler sonucunda iki yöntemin de işaretlerinin aynı seçildiği görülmüştür.

Yöntem genel bir $[a, b]$ aralığı üzerinde kurulmuş olup genelde $[0, 1]$ aralığı kullanılmıştır. Daha sonra daha geniş aralıklarda uygulamalar yapılmıştır. Ayrıca kullanılan ağırlık işlevi keyfi işlevler olup optimize edilmemiştir. Ağırlık işlevi genel olarak aşağıdaki yapıda kullanılmıştır:

$$W(x) = (b - x)^\alpha (x - a)^\beta \quad (\text{IV.1})$$

Farklı α ve β değerleri için gözlemlere dayalı sonuçlar verilmiştir. Burada dikkat edilmesi

gereken seçilen ağırlık işlevinin yapısından dolayı kullanılan α ve β değerlerine bağlı olarak aralık üzerinde sonuçların iyileştirilmesinde esneklik sağladığı gerçeğidir.

Uygulamalar Mathematica programlama dili kullanılarak elde edilmiş olup burada kısaca yöntemin algoritma aşamalarından bahsedilecektir.

Uygulama Algoritmasının Aşamaları:

- 1) İlk aşama olarak algoritma için gerekli tanımlamalar yapılır. Bunlar; işlev, ağırlık işlevi, çokterimli dereceleri ile üzerinde çalışılan aralık vb. gibi tanımlamalardır.
- 2) İkinci aşamada, üzerinde çalışılacak olan uzay ve bu uzayda oluşturulan bir taban takımının tanımlanması gerekir. Bu taban takımı belirlenirken Cholesky ayrıştırım tekniği kullanılmıştır. Ancak dizeyin tekilliğe yatkın olması, Cholesky ayrıştırım tekniğinde zorluklara yol açmaktadır.
- 3) Belirlenen taban takımı yardımı ile \mathbf{A} dizeyi oluşturulur. Burada oluşturulan \mathbf{A} dizeyi simetrik ve artı tanımlıdır. Uygulama sırasında bunun doğruluğunun kontrolü yapılır.
- 4) Yaklaşım işlevinin yapısındaki bileşenler olan α ve \mathbf{u} yöneyleri ile \mathbf{A} dizeyinin tersi ve izdüşüm dizeyleri bulunup, yaklaşım işlevi oluşturulur.
- 5) Tüm sonuçların karşılaştırılması için tablolar oluşturulup, grafik komutları ile sonuçlar görsel olarak verilmiştir. Hata analizi ise, ilgili işlev ile yaklaşım işlevinin farkının karesinin ilgili aralıkta tümlevi oluşturularak verilmiştir.

Bu uygulama algoritmasının benzeri Hermite-Padé yaklaşımını için de programlanmıştır. Kısaca algoritma mantığından sözedersek, öncelikle işlev Hermite-Padé yaklaşımının dayanağı olan sıfır noktasında Taylor serisine açılır. Bu açılımda istenilen mertebeden kesme yapılarak işlev için bir yaklaşım oluşturulur. Yaklaşımında yer alacak olan P, Q, R çokterimlileri tanımlanır. Bu çokterimliler ve işlevin Taylor açılımı ele alınarak Hermite-Padé için genel yaklaşım formülü oluşturulur. Bu yaklaşımında oluşan çokterimlinin katsayıları, tüm değişkenlere göre çözüldüğünde P, Q ve R çok-

terimlerinin bilinmeyen katsayıları elde edilir. Katsayıları bilinen bu çokterimliler, genel yaklaştırım formülünde yerine yazılarak sonuç bulunur.

Tüm bu algoritmalar oluşturulduktan yöntemin kendi içinde barındırdığı gerek düzey tersi alma işlemi gerekse tümlevlerin sendelenimli yapısından dolayı 80 haneli duyarlılıkta çalışılmıştır.

IV.1 Örnek 1

$f = \text{Sin}(x)$ tek değişkenli işlevini gözönüne alalım. Aralık olarak $[0.1, 1]$ aralığı seçilmiş olup, tekillik dolayısı ile $x = 0$ noktası aralıktan dışlanmıştır. Ağırlık işlevi olarak $w(x) = (x - 0.1)^{1/2}$ kullanılmıştır.

İşlevimiz için yaklaştırım denklemi $m = 3$, $n = 2$ ve $p = 2$ için aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$f \approx f_{konik} = 2.5368 + 5.6244 \times 10^{57} \sqrt{\frac{-x}{7.9613 \times 10^{114} - x} - \frac{7.0393}{1.2154 + x}} \quad (\text{IV.2})$$

$m = n = p = 2$ için elde edilen Hermite-Padé yaklaştırımı ise,

$$H_{[2,2,2]} \approx \frac{36x + \sqrt{x}\sqrt{15x^2 - 7x^4}}{51 + 5x^2} \quad (\text{IV.3})$$

NOT: Burada verilen m, n ve p değerleri Konik DYBMG yöntemi için (III.31)'deki katsayıların tanımındaki toplamların üst sınırlarını; Hermite-Padé yöntemi için (II.41)'deki çokterimlilerin derecelerini belirtmektedir. Konik DYBMG yöntemindeki m değeri Hermite-Padé yönteminde kullanılan m değerinden 1 fazladır. Bu durum yöntemde u_1 'in dışlanmasından kaynaklanmaktadır.

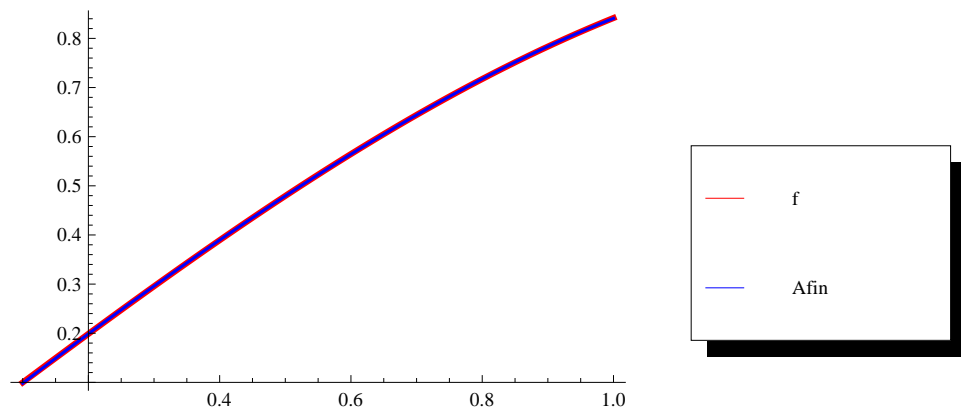
Tablo1 de $\text{Sin}(x)$ işlevi için gözlenen değerler, ilgili aralıkta ilgili ağırlık işlevi altında gerçek değer ile sırasıyla Hermite-Padé, Afin ve Konik DYBMG değerleri arasındaki mutlak farklar olarak verilmiştir.

x	Hermite-Padé	Afin DYBMG	Konik DYBMG
0.1	2.4896×10^{-10}	1.4066×10^{-3}	1.9267×10^{-5}
0.2	3.1979×10^{-8}	1.0658×10^{-5}	4.4180×10^{-6}
0.3	5.4972×10^{-7}	3.5127×10^{-4}	7.9878×10^{-7}
0.4	4.1555×10^{-6}	1.5606×10^{-4}	2.6193×10^{-6}
0.5	2.0063×10^{-5}	1.4685×10^{-4}	7.9245×10^{-7}
0.6	7.3097×10^{-5}	2.7280×10^{-4}	2.2733×10^{-6}
0.7	2.1981×10^{-4}	1.1773×10^{-4}	5.5318×10^{-7}
0.8	5.7606×10^{-4}	1.9537×10^{-4}	2.1505×10^{-6}
0.9	1.3643×10^{-3}	2.5688×10^{-4}	1.9465×10^{-6}
1.0	2.9986×10^{-3}	7.0844×10^{-4}	6.3458×10^{-6}

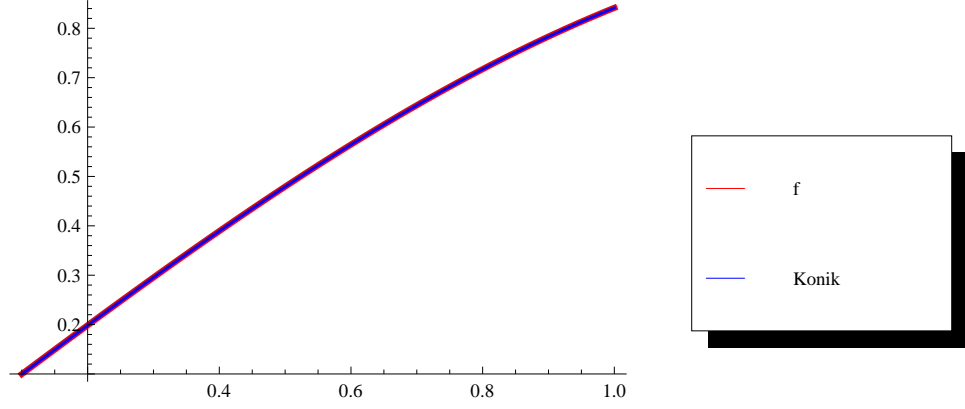
Tablo IV.1: $[0.1, 1]$ aralığında $Sin(x)$ işlevi için mutlak fark alınarak elde edilen Hata Tablosu

Daha sözedildiği gibi tablodaki değerler incelendiğinde Hermite-Padé yaklaşım yönteminin sıfır civarında iyi çalıştığı görülür.

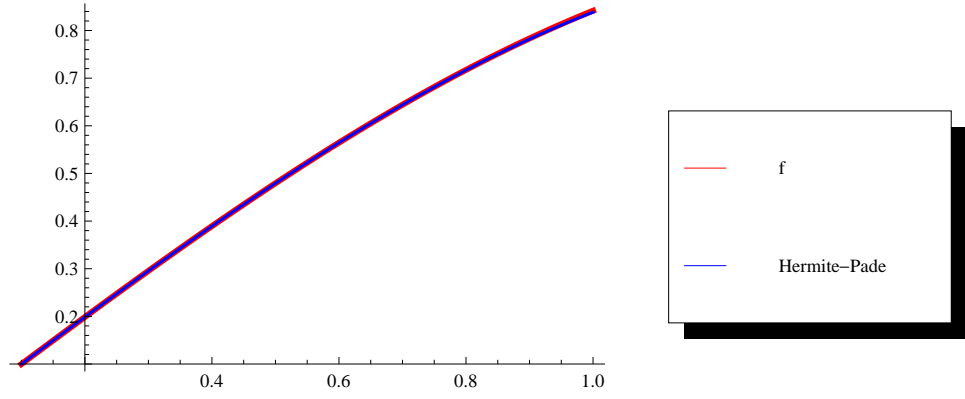
$Sin(x)$ işlevi için elde edilen sonuçlar aşağıdaki grafiklerde verilmiştir.



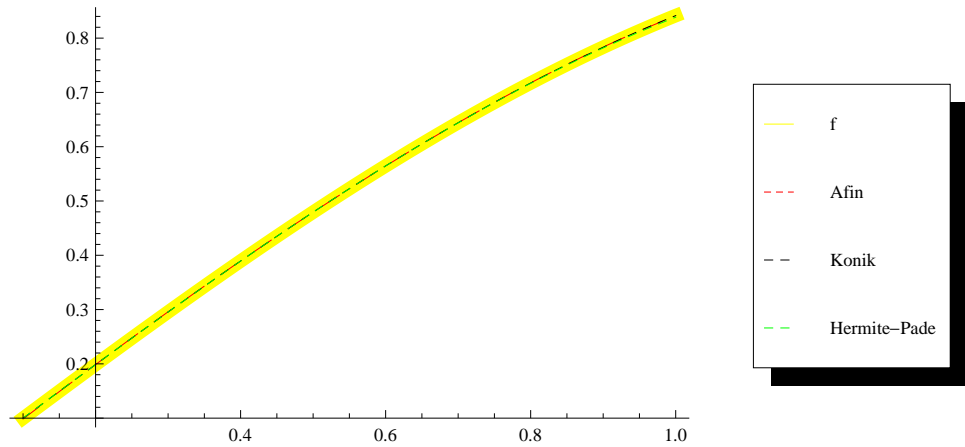
Şekil IV.1: $[0.1, 1]$ aralığında $Sin(x)$ işlevi ve Afin DYBMG yaklaşımını



Şekil IV.2: $[0.1, 1]$ aralığında $\sin(x)$ işlevi ve Konik DYBMG yaklaşımı



Şekil IV.3: $[0.1, 1]$ aralığında $\sin(x)$ işlevi ve Hermite-Padé yaklaşımı



Şekil IV.4: $[0.1, 1]$ aralığında $\sin(x)$ işlevi ve yaklaşımları

$Sin(x)$ işlevi için hata analizi yapılacak olursa, Konik DYBMG yöntemi için hata,

$$\int_{0.1}^1 (f - f_{konik})^2 dx = 8.5472 \times 10^{-12} \quad (IV.4)$$

olarak bulunur. Afin DYBMG yöntemi için elde edilen hata miktarı aşağıdaki gibidir:

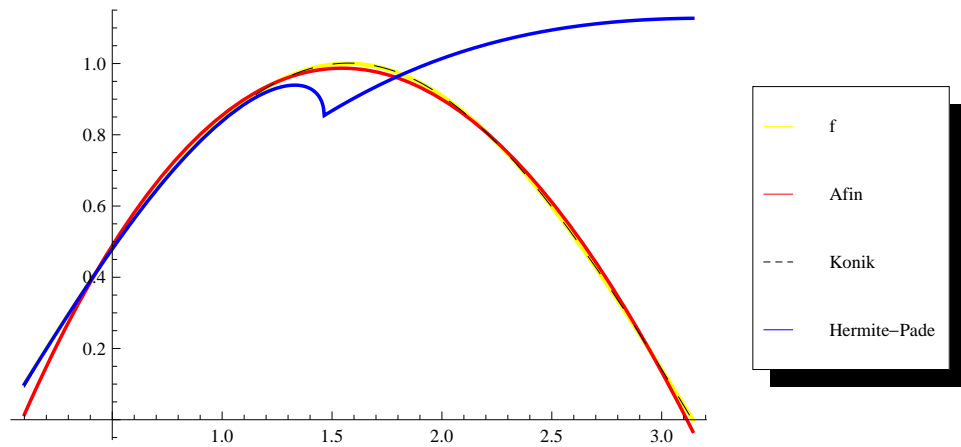
$$\int_{0.1}^1 (f - f_{Afin})^2 dx = 9.4478 \times 10^{-8} \quad (IV.5)$$

Hermite-Padé yaklaşımını için elde edilen hata ise,

$$\int_{0.1}^1 (f - f_{Hermite-Padé})^2 dx = 5.6440 \times 10^{-7} \quad (IV.6)$$

şeklinindedir. Burada, Konik DYBMG yönteminin Hermite-Padé yaklaşım yönteminden daha iyi çalıştığı açıkça görülen bir sonuçtur. Hermite-Padé yaklaşım yöntemi $x = 0$ 'a yakın yerlerde daha iyi çalıştığı söylenebilsede yöntemimiz Hermite-Padé yaklaşım yönteminden daha etkilidir. Konik DYBMG yönteminde elde edilen sonuç eniyelenmiş ağırlık belirlenerek daha da etkin hale getirilebileceği söylenebilir. Bu tez çalışmasında ağırlık eniyemesi konusu ele alınmamıştır.

Şimdi Konik DYBMG yönteminin geniş çapta nasıl sonuçlar vereceğini gözlemlemek için üzerinde çalıştığımız ilgili aralığı genişletelim. $Sin(x)$ işlevini $[0.1, \pi]$ aralığında aynı ağırlık işlevi $w(x) = (x - 0.1)^{1/2}$ altında inceleyelim.



Şekil IV.5: $[0.1, \pi]$ aralığında $Sin(x)$ işlevi ve yaklaşıranları

$[0.1, \pi]$ aralığında işlev için sırasıyla Konik DYBMG, Afin DYBMG ve Hermite-Padé yaklaştırım yöntemi için hatalar aşağıdaki gibidir:

$$\int_{0.1}^{\pi} (f - f_{Konik})^2 dx = 0.000006 \quad (IV.7)$$

$$\int_{0.1}^{\pi} (f - f_{Afin})^2 dx = 0.001041 \quad (IV.8)$$

$$\int_{0.1}^{\pi} (f - f_{Hermite-Padé})^2 dx = 0.490496 \quad (IV.9)$$

Yukarıda hatalar analiz edildiğinde görülüyor ki Konik DYBMG etkinliği geniş bir aralıktada sözkonusudur. Ancak Hermite-Padé için aynı durum söz konusu değildir. Bu beklenen bir sonuçtur. Çünkü Taylor açılımına dayanan yöntem $x = 0$ civarından uzaklaştıkça etkinliğinin azalmasını beklenen bir durumdur.

IV.2 Örnek 2

$[0, 1]$ aralığı üzerinde $f = \text{Log}(1 + x)$ işlevini gözönüne alalım. Ağırlık işlevi olarak $w(x) = \sqrt{x}$ kullanılmak üzere Konik DYBMG yönteminin yaklaştırım işlevi $m = 3$ ve $n = p = 2$ için aşağıdaki gibi elde edilir:

$$f \approx f_{konik} = 2.3771 + \frac{3.9966}{0.2747 + x} - 1.0341 \times 10^{57} \sqrt{\frac{x}{6.2695 \times 10^{114} + x}} \quad (IV.10)$$

$m = n = p = 2$ için Hermite-Padé yaklaştırımı,

$$H_{[2,2,2]} \approx \frac{8x + 9x^2 - \sqrt{15}\sqrt{-x^2(-60 - 60x + x^2)}}{2(-6 - 6x + x^2)} \quad (IV.11)$$

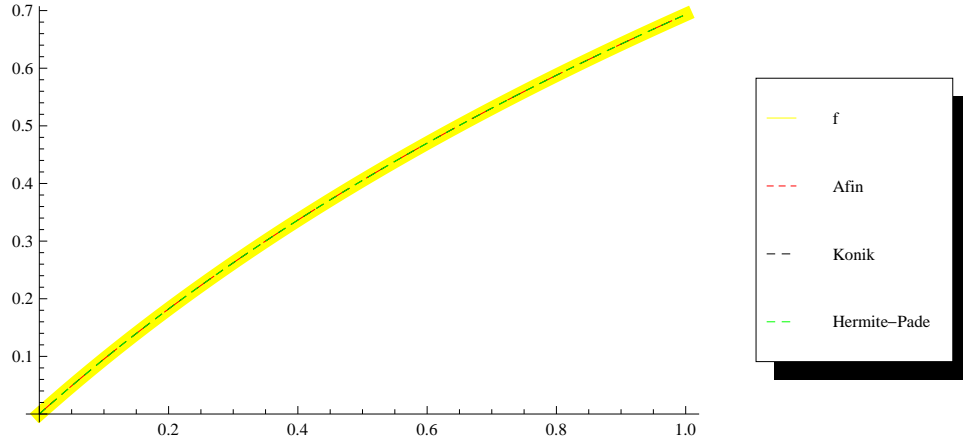
olarak elde edilir.

Tablo2 de $\text{Log}(1 + x)$ işlevi için ilgili aralıkta ilgili ağırlık işlevi altında gerçek değer ile Hermite-Padé, Afin ve Konik DYBMG değerleri arasındaki mutlak farklar verilmiştir.

$\text{Log}(1 + x)$ işlevi için hata payları sırasıyla,

x	Hermite-Padé	Afin DYBMG	Konik DYBMG
0.0	0.0000×10^{-15}	2.2890×10^{-3}	1.2706×10^{-7}
0.1	9.4496×10^{-13}	8.8927×10^{-6}	2.5377×10^{-7}
0.2	8.8581×10^{-11}	1.4513×10^{-5}	9.5277×10^{-8}
0.3	1.1319×10^{-9}	1.5754×10^{-5}	1.1170×10^{-8}
0.4	6.4584×10^{-9}	1.5679×10^{-5}	5.8818×10^{-8}
0.5	2.3832×10^{-9}	2.6169×10^{-5}	1.0168×10^{-9}
0.6	6.7020×10^{-8}	1.5084×10^{-5}	6.0738×10^{-8}
0.7	2.5032×10^{-8}	1.0524×10^{-5}	2.1631×10^{-10}
0.8	1.5669×10^{-7}	6.3848×10^{-6}	9.3178×10^{-9}
0.9	3.2068×10^{-7}	2.1361×10^{-5}	2.1644×10^{-9}
1.0	5.9376×10^{-7}	1.0837×10^{-5}	1.0159×10^{-8}

Tablo IV.2: $[0, 1]$ aralığında $\text{Log}(1+x)$ işlevi için mutlak fark alınarak elde edilen Hata Tablosu



Şekil IV.6: $[0, 1]$ aralığında $\text{Log}(1+x)$ işlevi ve yaklaşıtları

$$\int_0^1 (f - f_{Afin})^2 dx = 1.6655 \times 10^{-9} \quad (\text{IV.12})$$

$$\int_0^1 (f - f_{Konik})^2 dx = 2.7415 \times 10^{-16} \quad (\text{IV.13})$$

$$\int_0^1 (f - f_{Hermite-Padé})^2 dx = 9.1619 \times 10^{-14} \quad (IV.14)$$

şeklindedir.

IV.3 Örnek 3

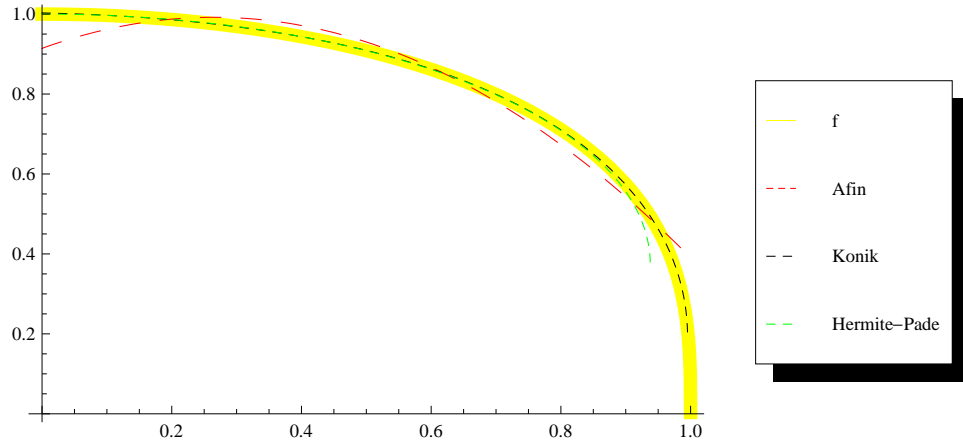
Bu örnekte ele alınan işlev, $[0, 1]$ aralığı üzerinde $f = \sqrt[3]{1 - x^2}$ işlevidir. Kullanılan ağırlık işlevi ise $w(x) = \sqrt{x}$ şeklindedir. Bu koşullar altında $m = 3, n = 1$ ve $p = 2$ için elde edilen yaklaşıtımmız,

$$f \approx f_{konik} = 2.6465 \times 10^{57} \sqrt{\frac{x}{6.2695 \times 10^{114} + x} - \frac{2.3670 \times 10^{114}}{-1.8518 \times 10^{115} + x(6.2695 \times 10^{114} + x)}} \quad (IV.13)$$

olarak elde edilir ve $m = 2, n = 1$ ve $p = 2$ için Hermite-Padé yaklaşımı

$$H_{[2,1,2]} \approx \frac{15 + \sqrt{729 - 864x^2 + 40x^4}}{42 - 2x^2} \quad (IV.15)$$

Sonuçlar grafik olarak çizildiğinde aşağıdaki gibi elde edilir.



Şekil IV.7: $[0, 1]$ aralığında $\sqrt[3]{1 - x^2}$ işlevi ve yaklaşıtımları

elde edilir ve yöntem için hata payları aşağıdaki gibidir:

$$\int_0^1 (f - f_{Afin})^2 dx = 0.001429 \quad (IV.16)$$

$$\int_0^1 (f - f_{Konik})^2 dx = 0.000018 \quad (IV.17)$$

$$\int_0^1 (f - f_{Hermite-Padé})^2 dx = 0.000658 \quad (IV.18)$$

Tablo3 de $\sqrt[3]{1-x^2}$ işlevi için gözlenen değerler, ilgili aralıkta ilgili $w(x) = \sqrt{x}$ ağırlık işlevi altında gerçek değer ile sırasıyla Hermite-Padé, Afin ve Konik DYBMG değerleri arasındaki mutlak farklar olarak verilmiştir.

x	Hermite-Padé	Afin DYBMG	Konik DYBMG
0.0	0.0000000000	8.5744×10^{-2}	2.8456×10^{-3}
0.1	2.3293×10^{-11}	3.4727×10^{-2}	3.1292×10^{-4}
0.2	6.3131×10^{-9}	8.8206×10^{-3}	7.0086×10^{-4}
0.3	1.7857×10^{-7}	2.1519×10^{-2}	6.8799×10^{-4}
0.4	2.0651×10^{-6}	2.8003×10^{-2}	1.1448×10^{-4}
0.5	1.5113×10^{-5}	2.1718×10^{-2}	5.5764×10^{-4}
0.6	8.6272×10^{-4}	5.0075×10^{-2}	8.6336×10^{-4}
0.7	4.4132×10^{-4}	3.2963×10^{-2}	3.7521×10^{-4}
0.8	1.2696×10^{-3}	3.8294×10^{-2}	1.0498×10^{-3}
0.9	1.9085×10^{-2}	3.2005×10^{-2}	1.7082×10^{-3}
1.0	4.4721×10^{-1}	3.9045×10^{-1}	1.9324×10^{-1}

Tablo IV.3: $[0, 1]$ aralığında $\sqrt[3]{1-x^2}$ işlevi için mutlak fark alınarak elde edilen Hata Tablosu

Konik DYBMG yöntemi, bu işlev için Hermite-Padé yönteminden daha iyi çalışmaktadır ki aralık genişlediği takdirde bu durumun korunması söz konusudur.

IV.4 Örnek 4

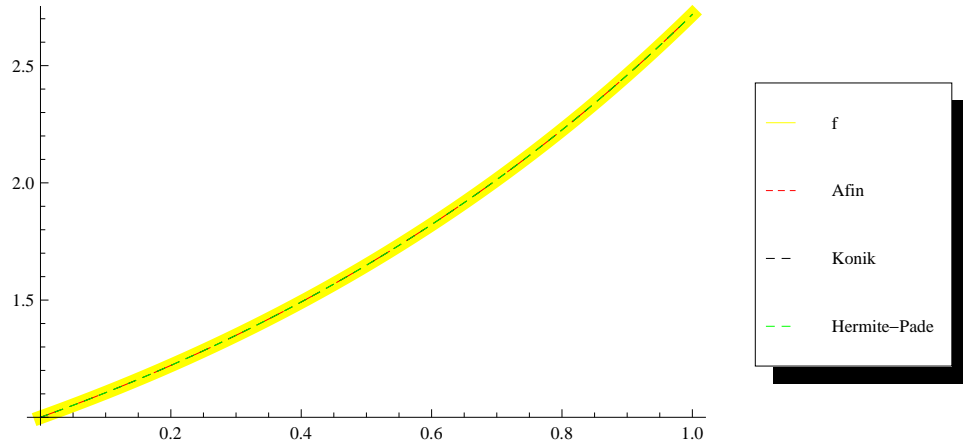
Şimdi işlev olarak $f = Exp(x)$ gözönüne alalım. Aralık olarak $[0, 1]$ aralığı ve ağırlık işlevi olarak $w(x) = \sqrt{x}$ seçelim. $m = 3$ ve $n = p = 2$ için elde edilen Konik DYBMG yöntemi ile elde edilen yaklaşıtırmımız aşağıdaki gibidir:

$$f \approx f_{konik} = -6.9486 + \frac{17.5189}{4.0628 - x} + 4.3032 \times 10^{57} \sqrt{\frac{-x}{6.2695 \times 10^{114} + x}} \quad (IV.19)$$

Hermite-Padé yaklaşıtırımı $m = n = p = 2$ için

$$H_{[2,2,2]} \approx \frac{24 + 4x^2 + \sqrt{15}\sqrt{x^2(15 + x^2)}}{24 - 9x + x^2} \quad (IV.20)$$

Şekil IV.8'de işlev için gözlenen sonuçlar verilmiştir. $[0, 1]$ aralığında işlev için sırasıyla



Şekil IV.8: $[0, 1]$ aralığında $Exp(x)$ işlevi ve yaklaşıtıranları

Afin DYBMG, Konik DYBMG ve Hermite-Padé yaklaşıtırımı yöntemi için hata payları aşağıdaki gibidir:

$$\int_0^1 (f - f_{Afin})^2 dx = 1.4327 \times 10^{-8} \quad (IV.21)$$

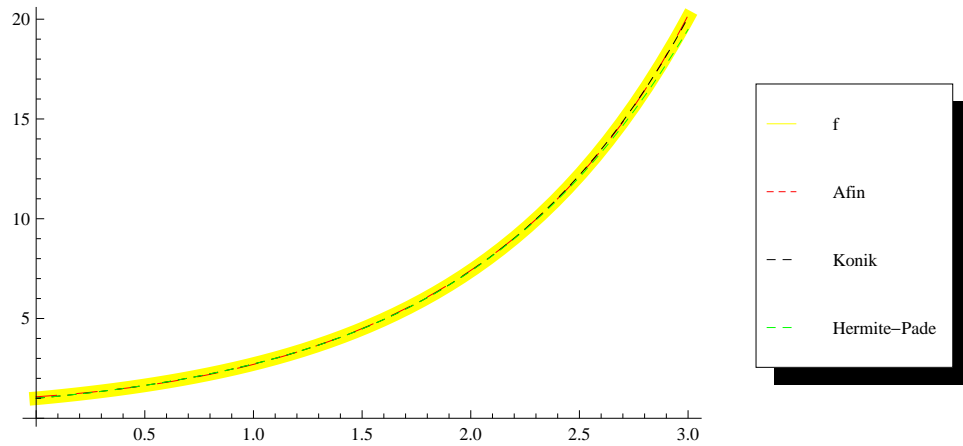
$$\int_0^1 (f - f_{Konik})^2 dx = 1.7222 \times 10^{-13} \quad (IV.22)$$

$$\int_0^1 (f - f_{Hermite-Pade})^2 dx = 7.6679 \times 10^{-11} \quad (IV.23)$$

x	Hermite-Padé	Afin DYBMG	Konik DYBMG
0.0	0.0000000	4.8612×10^{-4}	2.3572×10^{-6}
0.1	1.4621×10^{-12}	3.2918×10^{-5}	5.0343×10^{-7}
0.2	2.0679×10^{-10}	1.2111×10^{-4}	1.6484×10^{-7}
0.3	3.9049×10^{-9}	9.4047×10^{-5}	3.6400×10^{-7}
0.4	3.2331×10^{-8}	5.9964×10^{-6}	2.0778×10^{-7}
0.5	1.7039×10^{-7}	8.9567×10^{-5}	2.3728×10^{-7}
0.6	6.7479×10^{-6}	1.6960×10^{-6}	2.9398×10^{-7}
0.7	2.1942×10^{-6}	17481×10^{-5}	1.4055×10^{-7}
0.8	6.1762×10^{-6}	9.6729×10^{-5}	3.2428×10^{-7}
0.9	1.5571×10^{-5}	9.5903×10^{-5}	3.2364×10^{-7}
1.0	3.5991×10^{-5}	3.0049×10^{-4}	1.0535×10^{-6}

Tablo IV.4: $[0, 1]$ aralığında $Exp(x)$ işlevi için mutlak fark alınarak elde edilen Hata Tablosu

İşlevin aralığı aynı ağırlık altında $[0, 3]$ olarak ele alınırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir:



Şekil IV.9: $[0, 3]$ aralığında $Exp(x)$ işlevi ve yaklaşıtları

$$\int_0^3 (f - f_{Afin})^2 dx = 0.002154 \quad (IV.24)$$

$$\int_0^3 (f - f_{Konik})^2 dx = 0.000001 \quad (IV.25)$$

$$\int_0^3 (f - f_{Hermite-Padé})^2 dx = 0.051802 \quad (IV.26)$$

IV.5 Örnek 5

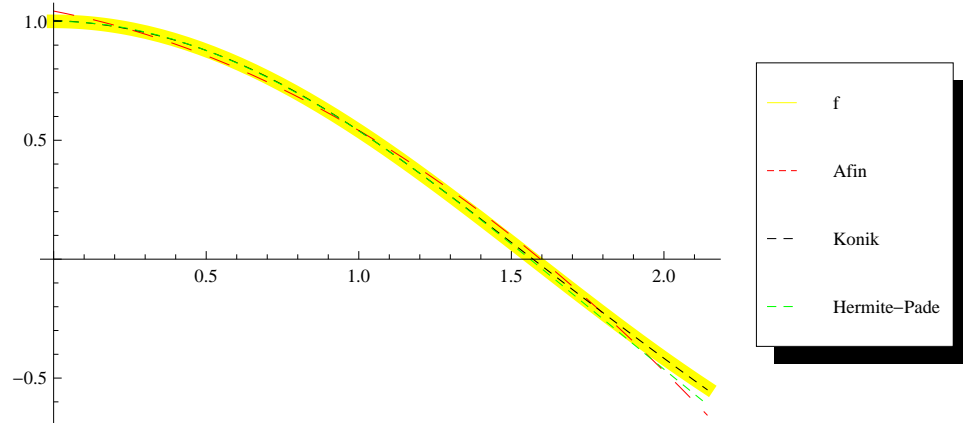
Bir başka örnek olarak $Cosx$ işlevi, $[0, \pi - 1]$ aralığı üzerinde ve $w = \sqrt{1-x}$ ağırlık işlevi altında ele alalım. Burada $m = 3$, $n = 1$ vep $= 2$ olarak kullanılmıştır. Sırasıyla tablo değerleri ve hata payları aşağıdaki gibi gözlemlenmiştir:

$$\int_0^{\pi-1} (f - f_{Afin})^2 dx = 0.001847 \quad (IV.27)$$

$$\int_0^{\pi-1} (f - f_{Konik})^2 dx = 0.000006 \quad (IV.28)$$

$$\int_0^{\pi-1} (f - f_{Hermite-Padé})^2 dx = 0.000803 \quad (IV.29)$$

Bu sonuçlar grafik ile aşağıdaki gibi verilir:



Şekil IV.10: $[0, \pi - 1]$ aralığında $Cos(x)$ işlevi ve yaklaşıranları

V SONUÇ

Dönüşümsel Yüksek Boyutlu Model Gösterilim yöntemi Yüksek Boyutlu Model Gösterilim yönteminin daha genel bir çeşididir. Bunun sebebi DYBMG yönteminin yapısındaki esnekliklerdir. DYBMG'nin temel felsefesi incelendiğinde yöntemin işlevin kendisine değil, dönüşüm altındaki görüntüsü olan işleve yaklaştırım üretmeye dayandığı görülür. Dönüşümün nasıl seçildiği önemlidir. Dönüşüm yapısında eniyileme yapabilecek parametreler barındırmalıdır. Bu parametreler yaklaştırmaya esneklik kazandırır. Bu tez çalışmasında DYBMG yöntemindeki dönüşüm ikinci dereceden bir çokterimli olarak seçilmiş olup, bu dönüşüm altında yeni bir yaklaştırmı yöntemi ortaya konulmuştur.

DYBMG yönteminde kullanılan dönüşümün ikinci dereceden bir dönüşüm olması nedeniyle bu DYBMG yöntemi Konik Dönüşümsel Yüksek Boyutlu Model Gösterilim yöntemi olarak adlandırılır. Daha önce yapılmış olan Doktora tezinde kullanılan dönüşüm birinci dereceden çok terimli olduğu için Afin DYBMG olarak adlandırılmıştır. Konik DYBMG yönteminin çıkarımı, yapısal olarak Afin DYBMG yöntemine benzerdir. Ancak dönüşümün ikinci dereceden olması nedeniyle yaklaştırmı yapıları tamamen farklılaşır. Bu çalışmada kullanılan dönüşümün ikinci dereceden çokterimli olması nedeniyle yaklaştırmı için iki farklı sonuç elde edilir. Burada hangisinin seçileceğine gözlemler sonucu karar verilir.

Bu çalışmada yöntem geliştirilirken kullanılan taban takımı işlevleri, çok değişkenli taban çokterimlileri olarak seçilmiştir. Bu çokterimliler Cholesky dikleştirme yöntemi kullanılarak dik bir taban takımına dönüştürülmüştür. Burada yöntemin özelliği, her türlü çok değişkenli taban işlevleri ile çalışma esnekliğine sahip olmasıdır. Bu nedenle yöntem oldukça genel bir yapıdadır.

Yöntemin bir başka esnekliği Konik DYBMG yöntemi geliştirilirken kullanılan ağırlık işlevleridir. Ağırlık işlevinin nasıl seçildiği yaklaştırmıdaki hatayı değiştirmektedir. Dolayısıyla hatayı enküçük yapacak bir ağırlık işlevi seçme sorusu gündeme

gelmiştir. Yani yöntem için ağırlık eniyilemesi konusunun geliştirilebileceği düşüncesi ortaya çıkmıştır. Ancak bu konu ile bu tez çalışmasında ilgilenilmemiştir. Bu konularıda yürütülebilecek bilimsel bir çalışmadır.

Konik DYBMG yöntemi ile üretilen yaklaşıran yapısında, elemanları yaklaştırılacak işlevlerin tümlevlerinden oluşan dizey tersini barındırmaktadır. Dizey tersini hesaplamak dizeyin boyutu arttıkça hesaplama maliyeti oldukça yüksek bir işlemdir. Yöntemin maliyetini azaltmak amacı ile İrem Yaman'ın doktora tezinde geliştirdiği yöntem kullanılabilir. Burada dizey çok yüksek boyutlarda kullanılmadığı için bu yöntem kullanılmamıştır. Ancak bu çalışmada dizeyin tersi tekilliğe çok yakın bir dizeydir. Bunun sebebi Cholesky yöntemi kullanılarak dikleştirilen taban işlevlerinin tümlevlerde kullanılmış olması, bir ağırlık işlevi ile esas işlevin çarpımından gelebilecek tekilliklerin olmasıdır. Bu çalışmada yöntem geliştirilirken karşılaşılan zorluktur. Yaklaşımın yapısı incelendiğinde, bilimsel yazında çok bilinen bir yöntem olan Hermite-Padé yaklaşımın yapısı ile benzer olduğu görülmüştür. Bu nedenle Hermite-Padé yaklaşım yöntemi ile, Konik DYBMG yöntemi karşılaştırılmıştır. Hermite-Padé yöntemi incelendiğinde, yöntemin sıfır noktasında Taylor açılımına dayandığı görülür. Bu nedenle yöntem, noktasal yakınsama özelliğine sahiptir. Diğer taraftan Konik DYBMG yöntemi YBMG yönteminin yapısı gereği tümlevler aracılığıyla işlevden bilgi üretir. Dolayısıyla yöntem Hermite-Padé yöntemine göre daha evrensel çalışır. Yöntemin evrensel çalışması nedeniyle üzerinde çalışılan aralık hatayı enküçükleyecek şekilde seçilir. Bu da yönteme esneklik sağlar.

Bu tez çalışmasında özgün olarak üretilen çalışmaları maddeler halinde özetlersek:

- Bilimsel yazında farklı farklı dönüşümler kullanılarak DYBMG yöntemleri geliştirilmiştir. Bu çalışmada ise katsayıları çok değişkenli işlevler olan ikinci dereceden bir dönüşüm kullanılmış olup esas işlev için bir yaklaşım oluşturulmuştur.
- Oluşturulan bu yeni yaklaşım yöntemi ile bilimsel yazında çok bilinen bir

yöntem olan Hermite-Padé yaklaşım yöntemi ile karşılaştırılmıştır. Hermite-Padé yönteminin sağladığı özelliklerin elde edilen yeni yöntemde de olup olmadığı araştırılmış ve çeşitli örnekler ile denenmiştir.

- Çeşitli uygulamalar sonrasında Konik DYBMG yönteminin literatürde çok bilinen yaklaşım tekniği olan Hermite-Padé yönteminden daha iyi çalıştığı gözlemlenmiştir

KAYNAKLAR

- [1] Kolmogorov, A. N.: "On the Representation of Continuous Functions of Many Variables by Superposition of One Variable and Addition", English Translation: *American Math. Soc.*, 2, 28 (1963), pp.55-59
- [2] Sobol, I. M.: "Sensitivity Estimates for Nonlinear Mathematical Models", English Translation: *MMCE*, Vol.1, No.4 (1993), pp.407-414
- [3] Alış, Ö. F. ; Rabitz, H.: "General Foundations of High Dimensional Model Representation", *Journal of Mathematical Chemistry*, 25 (1999), pp.197-233
- [4] Alış, Ö. F.; Shorter, J.; Shim K.; Rabitz, H.: "Efficient Input-Output Model Representation", *Computer Physics Communications*, 117 (1999), pp.11-20
- [5] Alış, Ö. F. ; Rabitz, H.: "Efficient Implementation of HDMR", *Journal of Mathematical Chemistry*, 29-2 (2001), pp.127-142
- [6] Li, G. ; Rosenthal, C. ; Rabitz, H. : "High Dimensional Model Representation", *Journal of Physical Chemistry A*, 105-33 (2001) pp.7765-7777
- [7] Demiralp, M.; "Çarpımsallaştırılmış Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi; Gösterilim Çarpanlarının Belirlenmesi", 12. *Ulusal Mekanik Kongresi*, Konya,(2001).
- [8] Demiralp, M.: "High Dimensional Model Representation and Its Application Varieties", *The Fourth International Conference on Tools for Mathematical Modelling*, St. Petersburg, Russia, June 23-28 (2003)

- [9] Kurşunlu, A.; Demiralp, M.: “Additive and Factorized HDMR Applications to the Multivariate Diffusion Equation Under Vanishing Derivative Boundary Conditions”, *The Fourth International Conference on Tools for Mathematical Modelling*, St. Petersburg, Russia, June 23-28 (2003)
- [10] Tunga, B.; Demiralp, M.: “Hybrid HDMR Approximants and Their Utilization in Applications”, *The Fourth International Conference on Tools for Mathematical Modelling*, St. Petersburg, Russia, June 23-28 (2003)
- [11] Tunga, M. A.; Demiralp, M.: “Data Partitioning Via Generalized HDMR and Multivariate Interpolative Applications”, *The Fourth International Conference on Tools for Mathematical Modelling*, St. Petersburg, Russia, June 23-28 (2003)
- [12] Yaman, İ.; Demiralp, M.: “HDMR Approximation of an Evolution Operator with a First Order Partial Differential Operator Argument”, *App. Num. Anal. And Comp. Math.*, Wiley CHV, I (2003) pp.287-296
- [13] Tunga, M. A.; Demiralp, M.: “A Factorized High Dimensional Model Representation on the Nodes of a Finite Hyperprismatic Regular Grid”, *Applied Mathematics and Computation*, Vol.164, Issue 3 (2005), pp. 865-883
- [14] Tunga, B.; Demiralp, M.: “A Novel Hybrid High Dimensional Model Representation (HDMR) Based on the Combination of Plain and Logarithmic High Dimensional Model Representations”, *WSEAS-2007 Proceedings, WSEAS 12-th International Conference on Applied Mathematics for Science and Engineering*, Vol.1 (2007), pp.157-161
- [15] Demiralp, M.: “Plain and Logarithmic High Dimensional Model Representation and the Effect on Their Types on Univariate Level”, *WSEAS Transaction on Mathematics*, Vol.5 (2006), pp.582-588

- [16] Li, G.; Wang, S.; Rabitz, H.: “Practical Approaches to Construct RS-HDMR Component Functions”, *Journal of Physical Chemistry A*, 106 (2002), pp.8721-8733
- [17] Li, G.; Schoendorf, J.; Ho, T.; Rabitz, H.: “Multicut-HDMR with an Application to an Ionospheric Model”, *Journal of Computational Chemistry*, 25-9 (2004) 1149-1156
- [18] Tuna, S.; Tunga, B.; Baykara N. A.; Demiralp, M.: “Fluctuation Free Matrix Representation Based Univariate Integration in Hybrid High Dimensional Model Representation (HDMR) Over Plain and Factorized HDMR”, *WSEAS Transactions on Mathematics*, Issue 6, Vol.8 (2009), pp.225-230, ISSN:1109-2769
- [19] Demiralp, M.: “Transformational High Dimensional Model Representation”, *International Conference of Computational Methods in Sciences And Engineering (ICCMSE)*, Crete, Greece, (2006).
- [20] Demiralp, M.: “Illustrative Implementations to Show How Logarithm Based High Dimensional Model Representation Works for Various Function Structures”, *WSEAS (The World Scientific and Engineering Academy and Society) Transaction on Mathematics*, Vol.5 (2006), pp.1333-1338
- [21] Demiralp, M.: “Weight Parameters Optimization to Get Maksimum Constancy in High Dimensional Model Representation”, *WSEAS (The World Scientific and Engineering Society) Transaction on Mathematics*, Vol.5 (2008), pp.1177-1181
- [22] Yaman, İ.; Demiralp, M.: “An Integration Free Universal Approximation Method on Orthogonal Polynomials”, *Int. Conf. On Numer. Anal. And Appl. Math. (AIP)*, Kos, Greece, Sept. 15-20 (2008), pp.601-604

- [23] Tunga, B.; Demiralp, M.: “Fluctuationlessness Approximation Based Multivariate Integration in Hybrid High Dimensional Model Representation”, *Int. Conf. On Numer. Anal. And Appl. Math. (AIP)*, Kos, Greece, Sept. 15-20 (2008), pp.562-565
- [24] Okan, A.; Baykara, N. A.; Demiralp, M.: “Weight optimization in Enhanced Multivariate Product Representation (EMPR) Method”, *Int. Conf. On Numer. Anal. And Appl. Math., AIP Conference Proceedings*, Rhodes, Greece, Vol. 1281 (2010), pp.1935-1938
- [25] Okan, A.; Baykara, N. A.; Demiralp, M.: “Weight optimization in Enhanced Multivariate Product Representation (EMPR) for Given Supports at the Fluctuation Free Integration Limit”, *AICT'11 Proceedings of the 2nd international conference on Applied informatics and computing theory, WSEAS*, (2011), pp.52-57
- [26] Burden, R. L.; Faires, J.D.: *Numerical Analysis*, Thomson Brooks/Cole (2011)
- [27] Paszkowski, S.: “Hermite-Padé Approximation, Basic Notions and Theorems”, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 32 (1990), pp.229-236.
- [28] Gündoğar, Z.; Baykara, N. A.; Demiralp, M.: “Basic Features of Conic Transformational High Dimensional Model Representation”, *Int. Conf. On Numer. Anal. And Appl. Math., AIP Conference Proceedings*, Rhodes, Greece, Vol. 1281 (2010), pp.1930-1934
- [29] Gündoğar, Z.; Baykara, N. A.; Demiralp, M.: “Conic Transformational High Dimensional Model Representation In Comparison With Hermite-Padé Approximants”, *AICT'11 Proceedings of the 2nd international conference on Applied informatics and computing theory, WSEAS*, (2011), pp.45-51

- [30] Yaman, İ.; Demiralp, M.: “Rayleigh Quotient Maximization Via Matrix Direct Product Based Factorization”, *WSEAS Transactions on Math.*, (2008)
- [31] Yaman, İ.; Demiralp, M.: “A New Rational Approximation Technique Based on Transformational High Dimensional Model Representation”, *Numerical Algorithms* , Vol. 52 (2009), pp. 385-407, DOI: 10.1007/s11075-009-9279-y
- [32] Gülpınar, C.: “Yüksek Boyutlu Model Gösterilim Yöntemleri ve Tanım Bölgesi Geometrisi”, *Yüksek Lisans Tezi*, Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, Türkiye (2007)
- [33] Yaman, İ.: “Dönüşümsel Yüksek Boyutlu Model Gösterilim Tabanlı Yeni Oransal Yaklaşımların Oluşturumu ve Sendelenimsizlik Yaklaşımını ile Etkin Biçimde Kullanımı”, *Doktora Tezi*, İstanbul Teknik Üniversitesi Bilişim Enstitüsü, İstanbul, Türkiye (2008)
- [34] Tuna, S.: “Melez Yüksek Boyutlu Model Gösteriliminde Çok değişkenli İntegrallerin Sendelenimsizlik Yaklaşımını ile Hesaplanması”, *Yüksek Lisans Tezi*, Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, Türkiye (2010)
- [35] Tunga, B.: “Yüksek Boyutlu Model Gösteriliminde Sendelenimsiz Matris Gösterilimi Tabanlı Ağırlık Eniyilemesi”, *Doktora Tezi*, İstanbul Teknik Üniversitesi Bilişim Enstitüsü, İstanbul, Türkiye (2010)

A. DOĞRUSAL BİRLEŞİME u_1 İŞLEVINİN DIŞLAN- MASININ GEREKLİLİĞİ

Bölüm 3’de konik dönüşümün yapısındaki a_0 işlevinin (III.31) ile verilen eşitliğini, u_1 işlevini dışlamadan yazalım. Bu durumda a_0 işlevi,

$$a_0(x_1, \dots, x_N) = \sum_{j=1}^m a_j^{(0)} u_j \quad (1.1)$$

eşitliği ile verilir. a_0 işlevinin bu yeni eşitliği ile (III.36)’da verilen α yöneyi aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\alpha = \left(\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \dots, \alpha_m^{(0)}, \alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_n^{(1)}, \alpha_1^{(2)}, \dots, \alpha_p^{(2)} \right)^T \quad (1.2)$$

Bu durumda α yöneyinin elemanları tanımlanırken kullanılan $2 \leq j \leq m$ ifadesi yerini $1 \leq j \leq m$ ifadesine bırakacaktır. a_0 ’ın bu şekildeki seçimi ilgili tüm elemanları değiştirecektir. Dolayısıyla \mathbf{A} dizeyinin elemanları da değişecektir. Dizeyin yapısında bulunan bloklardaki j ile ilgili tüm aralıklar 1’den başlayacaktır ve \mathbf{A} dizeyi, $m + n + p$ boyutlu olacaktır.

Tezde kullanılan dik taban takımı işlevleri, $1, x, x^2, \dots$ çokterimlilerin dikleştirilmesi yoluyla elde edilmişlerdir. Bu şekilde oluşturulan dik taban işlevlerinden $u_1 = 1$ olacaktır. Bu durumda α yöneyinin ve \mathbf{A} dizeyinin açık yapıları incelendiğinde,

$$\alpha = \mathbf{A} \mathbf{e}_1 \quad (1.3)$$

olduğu açıkça görülecektir. Değişmezlik ölçeninin eniyilenmesi sonucu (III.53)’de elde edilen \mathbf{a} yöneyi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1} \alpha = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 \quad (1.4)$$

\mathbf{a} yöneyinin elemanları ikinci dereceden dönüşümün katsayıları olan a_0, a_1 ve a_2 işlevlerinin doğrusal birleşim katsayılarından oluşmaktadır. Bu nedenle \mathbf{a} yöneyinin \mathbf{e}_1 ’e eşit olması, a_0 işlevinin 1’e eşit olup a_1 ve a_2 işlevlerinin sıfır olması anlamına gelir.

Bu durumda φ sabit bir işlev olur ki bu istenilen bir durum değildir. Çünkü böyle bir durumda yapılan eniyileme anlamını yitirir.

B. A DİZEYİNİN ARTI TANIMLILIĞININ GÖSTERİLMESİ

Tezin ana bölümü olan Bölüm 3’de tanımlanan bileşenleri dik taban işlevleri türünden iç çarpım şeklinde verilen \mathbf{A} dizeyinin açık yapısı aşağıdaki gibidir.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (u_2, u_2) & \cdots & (u_2, u_m) & (u_2, fu_1) & \cdots & (u_2, fu_n) & (u_2, f^2u_1) & \cdots & (u_2, f^2u_p) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (u_m, u_2) & \cdots & (u_m, u_m) & (u_m, fu_1) & \cdots & (u_m, fu_n) & (u_m, f^2u_1) & \cdots & (u_m, f^2u_p) \\ (u_1, fu_2) & \cdots & (u_1, fu_m) & (u_1, f^2u_1) & \cdots & (u_1, f^2u_n) & (u_1, f^3u_1) & \cdots & (u_1, f^3u_p) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (u_n, fu_2) & \cdots & (u_n, fu_m) & (u_n, f^2u_1) & \cdots & (u_n, f^2u_n) & (u_n, f^3u_1) & \cdots & (u_n, f^3u_p) \\ (u_1, f^2u_2) & \cdots & (u_1, f^2u_m) & (u_1, f^3u_1) & \cdots & (u_1, f^3u_n) & (u_1, f^4u_1) & \cdots & (u_1, f^4u_p) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (u_p, f^2u_2) & \cdots & (u_p, f^2u_m) & (u_p, f^3u_1) & \cdots & (u_p, f^3u_n) & (u_p, f^4u_1) & \cdots & (u_p, f^4u_p) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Öncelikle bir tanım verelim:

Tanım:Sıfırdan farklı m boyutlu her \mathbf{x} yöneyi ve herhangi bir m boyutlu, simetrik, kare \mathbf{A} dizeyi için $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ eşitsizliği sağlanıyorsa , \mathbf{A} dizeyi artı tanımlıdır denir. Eğer $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ ifadesini sıfır yapan, sıfırdan farklı en az bir tane \mathbf{x} yöneyi bulunabiliyorsa, $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$ eşitsizliği sağlanır, bu durumda \mathbf{A} dizeyine yarı artı tanımlı(ing:positive semi definite) dizey denir.

Şimdi \mathbf{A} dizeyinin artı tanımlılığını göstermek için bileşenleri x_i 'ler olan $m + n + p - 1$ boyutlu bir \mathbf{x} yöneyi ele alalım ve bu yöneyin devriği ile \mathbf{A} dizeyini soldan

çarparsak,

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} (\sum_{i=1}^{m-1} x_i u_{i+1} + \sum_{i=m}^{m+n-1} x_i u_{i-m+1} f + \sum_{i=m+n}^{m+n+p-1} x_i u_{i-m-n+1} f^2, u_2) \\ \vdots \\ (\sum_{i=1}^{m-1} x_i u_{i+1} + \sum_{i=m}^{m+n-1} x_i u_{i-m+1} f + \sum_{i=m+n}^{m+n+p-1} x_i u_{i-m-n+1} f^2, u_m) \\ (\sum_{i=1}^{m-1} x_i u_{i+1} + \sum_{i=m}^{m+n-1} x_i u_{i-m+1} f + \sum_{i=m+n}^{m+n+p-1} x_i u_{i-m-n+1} f^2, f u_1) \\ \vdots \\ (\sum_{i=1}^{m-1} x_i u_{i+1} + \sum_{i=m}^{m+n-1} x_i u_{i-m+1} f + \sum_{i=m+n}^{m+n+p-1} x_i u_{i-m-n+1} f^2, f u_n) \\ (\sum_{i=1}^{m-1} x_i u_{i+1} + \sum_{i=m}^{m+n-1} x_i u_{i-m+1} f + \sum_{i=m+n}^{m+n+p-1} x_i u_{i-m-n+1} f^2, f^2 u_1) \\ \vdots \\ (\sum_{i=1}^{m-1} x_i u_{i+1} + \sum_{i=m}^{m+n-1} x_i u_{i-m+1} f + \sum_{i=m+n}^{m+n+p-1} x_i u_{i-m-n+1} f^2, f^2 u_p) \end{bmatrix}^T \quad (2.2)$$

elde edilir. Elde edilen bu yöneyi sağdan \mathbf{x} yöneyi ile çarparsak,

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = (y, y) \quad (2.3)$$

iç çarpım yapısı elde edilir. Burada,

$$y = \sum_{i=1}^{m-1} x_i u_{i+1} + \sum_{i=m}^{m+n-1} x_i u_{i-m+1} f + \sum_{i=m+n}^{m+n+p-1} x_i u_{i-m-n+1} f^2 \quad (2.4)$$

şeklindedir.

Yukarıdaki (VII.8) eşitliğini incelediğimizde sonuc bir iç çarpım olduğu için y işlevinin boy karesine eşittir. Dolayısıyla bu büyüklük sıfırdan büyük veya eşit olmalıdır. Sıfıra eşit olması durumunda y 'nin özdeş olarak sıfıra eşit olması gerekir. Bu ise \mathbf{A} dizeyinin tekil olmasına karşılık gelir. Ancak \mathbf{A} tekil bir dizey değildir. Sonuç olarak $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$ elde edilir ki \mathbf{A} dizeyi artı tanımlıdır.

ÖZGEÇMİŞ

Zeynep GÜNDOĞAR 30.04.1986 tarihinde Kayseri’de doğdu. 2004 yılında Mersin Dumlupınar Lisesi’nden 2009 yılında Marmara Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nden mezun olup aynı yıl içinde Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı’nda yüksek lisans eğitimine başladı. Halen matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.