ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KOROVKIN ŞARTLARINI GERÇEKLEYEN GENEL BİR LİNEER POZİTİF OPERATÖRLER DİZİSİ

Serap KAYA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2011

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KOROVKIN ŞARTLARINI GERÇEKLEYEN GENEL BİR LİNEER POZİTİF OPERATÖRLER DİZİSİ

Serap KAYA

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ertan İBİKLİ

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.
İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.
İkinci bölümde, tez içinde kullanılacak temel kavramlar verilmiştir.
Üçüncü bölümde, C$[a, b]$ uzayında Korovkin teoreminin ifadesi ve ispatı verilmiştir. Daha sonra bazı toplam biçimindeki lineer pozitif operatörlerin yaklaşım özellikleri ve yaklaşım hızları incelenmiştir.
Dördüncü bölümde lineer pozitif operatörler dizisi üzerine bir makale (Gadjiev ve Ibragimov 1970) ele alınmıştır.

Aralık 2011, 106 sayfa

Anahtar Kelimeler : Bernstein polinomları, Bernstein-Chlodowsky polinomları, Szasz operatörü, Bleimann Butzer ve Hahn operatörü, Meyer-König ve Zeller operatörü, Baskakov operatörü, Balasz operatörü, Korovkin teoremi, lineer pozitif operatörler, süreklilik modülü

ABSTRACT

Master Thesis

A General Linear Positive Operator Sequence Satisfying Korovkin 's Conditions

Serap KAYA

Ankara University
Graduate School of Natural And Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ertan İBİKLİ

This thesis consists of four chapters.

The first chapter is devoted to introduction.

In the second chapter, basic concepts which will be used in the next chapters are given.

In the third chapter, the proof of Korovkin' s Theorem in C$[a, b]$ is given. Moreover, the approximation properties and the speed of some linear positive operators are investigated.

In the fourth chapter the paper on the sequence of linear positive operators by Gadjiev and Ibragimov 1970 is studied.

December 2011, 106 pages

Key Words : Bernstein polynomials, Bernstein-Chlodowsky polynomials, Szasz operator, Bleimann Butzer and Hahn operator, Meyer-König and Zeller operator, Baskakov operator, Balasz operator, Korovkin theorem, linear positive operators, modulus of continuity

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana veren ve araştırmalarımın her aşamasında en yakın ilgi ve önerileriyle beni yönlendiren danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Ertan İBİKLİ (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Anabilim Dalı)' ye, tezimle ilgili çalışma fırsatı bulduğum arkadaşım Yeşim DÖNE' ye ve bana her zaman destek olan aileme en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Serap KAYA

Ankara, Kasım 2011

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$C\left[a,b\right]$	$\left[a,b\right]$ aralığında tanımlı sürekli ve reel değerli fonksiyonların uzayı
$C^2\left[a,b\right]$	$g,\ g',\ g'' \in C\left[a,b\right]$ olan fonksiyon uzayı
$C_B[0,\infty)$	$[0,\infty)$ aralığındaki sınırlı, sürekli reel değerli fonksiyonların uzayı
C_n^k	n' nin k' lı kombinasyonu, yani $C_n^k = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$
$K(f;\delta)$	f fonksiyonunun Peetre-K fonksiyoneli
$Lip_M\left(\alpha\right)$	Lipschitz Sınıfı fonksiyonlar
$L_n\left(f;x\right) \rightrightarrows f\left(x\right)$	L_n operatör dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsaklığı
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\omega(\delta) = \omega(f;\delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü
$\left\Vert \cdot \right\Vert_{C[a,b]}$	$C\left[a,b\right]$ uzayında $\left\Vert . \right\Vert = \max\limits_{a\leq x\leq b} \left\vert . \right\vert$ ile tanımlı norm
$\left\Vert \cdot \right\Vert_{C^2[a,b]}$	$\left\Vert g \right\Vert_{C^2[a,b]} = \left\Vert g \right\Vert_{C[a,b]} + \left\Vert g' \right\Vert_{C[a,b]} + \left\Vert g'' \right\Vert_{C[a,b]}$ ile tanımlı norm

1. GİRİŞ

Yaklaşımlar teorisi, verilen bir uzaydaki bir fonksiyona iyi özellikleri olan aynı uzaya ait fonksiyonlar ailesi ile yaklaşım yapılıp yapılamayacağını araştırır.

Yaklaşımlar teorisinin temel teoremi olarak nitelendirilen teorem; kapalı $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı reel değerli sürekli bir f fonksiyonu için her $\epsilon > 0$ ve her $x \in [a, b]$ olmak üzere

$$|P_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $P_n(x)$ polinomunun varlığı, ilk kez 1885 yılında Alman Matematikçi Weierstrass tarafından ifade ve ispat edilmiştir.

1912 yılında Rus Matematikçi S. N. Bernstein tarafından $[0, 1]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı reel değerli sürekli bir f fonksiyonuna yaklaşan polinomların tipi hakkında bir teorem ispatlanmıştır. S. N. Bernstein,

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1 - x)^{n-k}$$

tipinde polinomlar dizisi tanımlamış ve bu polinomlar dizisi için keyfi $\epsilon > 0$ verildiğinde her $x \in [0, 1]$ ve her $n \geq n_0$ için

$$|B_n(f; x) - f(x)| < \epsilon$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermiştir.

Bu çalışmada; Bernstein polinomları yardımıyla genel bir lineer pozitif operatörler dizisi incelenmiş ve bu operatörün özel hallerinde Bernstein polinomları ve bazı genelleşmeleri elde edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışma içinde gerekli olan tanımlar verilecektir.

2.1 Sonlu Aralıkta Sürekli Fonksiyonlar Uzayı

Tanım 2.1.1 Kapalı ve sonlu $[a,b]$ aralığında tanımlı ve sürekli fonksiyonlar uzayını $C[a,b]$ ile gösterelim. $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli bir f fonksiyonu Weierstrass teoremine göre maksimum ve minimum değerler alacağı için $C[a,b]$ üzerinde bir norm

$$\|f\|_C = \max_{a\leq x\leq b} |f(x)|$$

biçiminde tanımlanabilir.

$f \in C[a,b]$ ve (f_n), $C[a,b]$ deki fonksiyonların bir dizisi olmak üzere, f_n dizisinin f fonksiyonuna yaklaşması için gerek ve yeter koşul $[a,b]$ aralığındaki tüm x noktaları için

$$|f_n(x) - f(x)| < M\epsilon_n$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Burada ϵ_n sıfıra yakınsayan bir dizi, M pozitif bir sayıdır. $\{f_n(x)\}$ dizisinin $C[a,b]$ normunda f fonksiyonuna yakınsaması düzgün yakınsamadır. Bu yakınsama $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ ile gösterilir (Rudin 1921).

2.2 Lineer Pozitif Operatörler

Tanım 2.2.1 $L : X \to Y$ bir operatör olsun. $f_1(x)$ ve $f_2(x)$, X uzayında herhangi iki fonksiyon, a_1 ve a_2 keyfi iki reel sayı olmak üzere L operatörü

$$L(a_1 f_1 + a_2 f_2; x) = a_1 L(f_1; x) + a_2 L(f_2; x)$$

koşulunu gerçekliyor ise, o taktirde L operatörüne lineer operatör denir.

Lineer operatörler kümesi içinde çok önemli bir alt sınıf vardır ki; o da lineer pozitif operatörler sınıfıdır.

Tanım 2.2.2 $X^+ = \{f \in X : \ f \geq 0\}$ ve $Y^+ = \{g \in Y : \ g \geq 0\}$ olsun. Eğer $L : X^+ \subset X \to Y^+ \subset Y$ ise o taktirde bu lineer operatöre "Lineer Pozitif Operatör" denir.

Şimdi lineer pozitif operatörlerin önemli bazı özelliklerini verelim.

Özellik 2.2.1 Lineer pozitif operatörler monotondur.

Gerçekten; $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) \geq g(x)$ ise $f(x) - g(x) \geq 0$ dır. L operatörü pozitif olduğundan

$$L(f - g; x) \geq 0$$

olur ve L operatörünün lineerlik özelliğinden

$$L(f; x) - L(g; x) \geq 0$$

elde edilir. Bu da istenendir.

Özellik 2.2.2 L lineer pozitif operatör olsun. Bu durumda

$$|L(f; x)| \leq L(|f|; x)$$

eşitsizliği gerçeklenir.

Gerçekten; $\forall t \in [a, b]$ için

$$-|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)|$$

eşitsizliği sağlanır. L operatörünün monoton olma özelliğinden

$$-L(|f|; x) \leq L(f; x) \leq L(|f|; x)$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$|L(f;x)| \leq L(|f|;x)$$

elde edilir.

Tanım 2.2.5 f fonksiyonu x_0 noktasını ihtiva eden bir aralıkta her mertebeden türevlenebilir olsun.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

serisine f fonksiyonu tarafından x_0 noktasında üretilen Taylor serisi adı verilir.

Taylor açılımında, özel olarak $x_0 = 0$ alınırsa

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

serisi elde edilir ki bu seriye Maclaurin serisi adı verilir.

Tanım 2.2.6 (Hölder Eşitsizliği): $p > 0$ ve $q > 0$ reel sayıları $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ şartını sağlasın. Bu durumda $\forall (a_k), (b_k) \in l_p$ dizileri için

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k.b_k| \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik $p = q = 2$ için Cauchy-Schwarz eşitsizliği olarak bilinir (Lorentz 1953).

2.3 Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yaklaşım Hızı

Yaklaşımlar teorisinin önemli bir problemi de yaklaşım hızıdır. Yaklaşım hızı, $\alpha_n \to 0$ $(n \to \infty)$ olmak üzere

$$|L_n(f;x) - f(x)| \leq c\alpha_n$$

eşitsizliğini sağlayan (α_n) dizisinin bulunmasıyla belirlenir.

Yaklaşımlar teorisinde, yaklaşım hızı problemi olarak adlandırılan bu hesaplamayı yapmak için bir çok araç kullanılır. Bu nedenle önce süreklilik modülünün tanımını ve bazı özelliklerini ispatlarıyla birlikte verelim.

Tanım 2.3.1 (Süreklilik Modülü): $f \in C[a,b]$ olsun. $\delta > 0$ için

$$\omega(f;\delta) = \omega(\delta) = \sup_{\substack{x,t \in [a,b] \\ |t-x| \leq \delta}} |f(t) - f(x)|$$

şeklinde tanımlanan $\omega(\delta)$ fonksiyonuna, f fonksiyonunun süreklilik modülü denir (Altomare and Campiti 1993).

Süreklilik modülü aşağıdaki özellikleri gerçekler.

i. $\omega(f;\delta) \geq 0$

ii. $\delta_1 \leq \delta_2$ ise $\omega(f;\delta_1) \leq \omega(f;\delta_2)$

iii. $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega(f;\delta) = 0$

iv. $m \in \mathbb{N}$ için $\omega(f;m\delta) \leq m\omega(f;\delta)$

v. $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $\omega(f;\lambda\delta) \leq (\lambda+1)\,\omega(f;\delta)$

vi. $|f(t) - f(x)| \leq \omega(f;|t-x|)$

vii. $|f(t) - f(x)| \leq \left(\dfrac{|t-x|}{\delta} + 1\right)\omega(f;\delta)$

İspat :

i. Süreklilik modülü tanımı gereğince bir mutlak değerin supremumu olduğundan ispat açıktır.

ii. $\delta_1 \leq \delta_2$ için $|t-x| \leq \delta_2$ bölgesinin $|t-x| \leq \delta_1$ bölgesinden daha büyük olduğu açıktır. Bölge büyüdükçe alınan supremum büyüyeceğinden ispat açıktır.

iii. f sürekli olduğundan $\forall \epsilon > 0$ için $|x_1 - x_2| < \eta$ olduğunda

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$$

$$\sup |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$$

eşitsizliğini sağlayan en az bir $\eta > 0$ var olup, $\omega(f;\eta)$ nın tanımından

$$\omega(f;\eta) < \epsilon$$

olur. (ii) den $\delta < \eta$ için

$$\omega(f;\delta) < \epsilon$$

yazılabiir. Bu da istenen ifadeyi verir.

iv. Süreklilik modülünün tanımından dolayı $m \in \mathbb{N}$ için

$$\omega(f;m\delta) = \sup_{\substack{x,t\in[a,b] \\ |t-x|\leq m\delta}} |f(t) - f(x)|$$

yazılabilir.

$$|t-x| \leq m\delta$$

ise

$$x - m\delta \leq t \leq x + m\delta$$

olup, $t=x+mh$ seçimiyle $|h|\leq\delta$ için

$$\omega\left(f;m\delta\right)=\sup_{\substack{x,t\in[a,b]\\|h|\leq\delta}}\left|f\left(x+mh\right)-f\left(x\right)\right|$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$\sup_{\substack{x,t\in[a,b]\\|h|\leq\delta}}\left|f\left(x+mh\right)-f\left(x\right)\right|=\sup_{\substack{x,t\in[a,b]\\|h|\leq\delta}}\left|\sum_{k=0}^{n}\left[f\left(x+\left(k+1\right)h\right)-f\left(x+kh\right)\right]\right|$$

olup eşitliğin sağ tarafına üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}\sup_{\substack{x,t\in[a,b]\\|h|\leq\delta}}\left|f\left(x+mh\right)-f\left(x\right)\right| &\leq \sum_{k=0}^{m-1}\sup_{\substack{x,t\in[a,b]\\|h|\leq\delta}}\left|f\left(x+\left(k+1\right)h\right)-f\left(x+kh\right)\right| \\ &\leq \omega\left(f;\delta\right)+\omega\left(f;\delta\right)+...+\omega\left(f;\delta\right) \\ &= m\omega\left(f;\delta\right)\end{aligned}$$

elde edilir.

v. $\lambda\in\mathbb{R}^{+}$ sayısının tam kısmı $[|\lambda|]$ ile gösterilirse tam değer fonksiyonunun tanımı gereği

$$[|\lambda|]<\lambda<[|\lambda|]+1$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizlik ve $\omega\left(f;\delta\right)$ fonksiyonunun monoton artan özelliği gözönünde bulundurulursa,

$$\omega\left(f;\lambda\delta\right)\leq\omega\left(f;\left([|\lambda|]+1\right)\delta\right) \tag{2.3.1}$$

eşitsizliği elde edilir. $[|\lambda|]$ pozitif bir tamsayı olduğundan üstteki eşitsizliğin sağ tarafına (iv) özelliği uygulanırsa

$$\omega\left(f;\left([|\lambda|]+1\right)\delta\right)\leq\left([|\lambda|]+1\right)\omega\left(f;\delta\right)$$

elde edilir. Diğer yandan $\forall\lambda \in \mathbb{R}^{+}$ için

$$[|\lambda|] + 1 < \lambda + 1$$

olduğundan

$$\omega\left(f; ([|\lambda|] + 1)\,\delta\right) \leq (\lambda + 1)\,\omega\left(f; \delta\right)$$

olur. Buradan (2.3.1) yardımıyla

$$\omega\left(f; \lambda\delta\right) \leq (\lambda + 1)\,\omega\left(f; \delta\right)$$

yazılabilir ki bu da istenendir.

vi. $\omega\left(f; \delta\right)$ ifadesinde $\delta = |t - x|$ seçersek,

$$\omega\left(f; |t - x|\right) = \sup_{x \in [a,b]} \left|f\left(t\right) - f\left(x\right)\right|$$

elde edilir. Bu durumda $\left|f\left(t\right) - f\left(x\right)\right|$ ifadesinin supremumu $\omega\left(f; |t - x|\right)$ olacağından ispat açıktır.

vii. (vi) den

$$\left|f\left(t\right) - f\left(x\right)\right| \leq \omega\left(f; \frac{|t - x|}{\delta}\delta\right)$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikte (v) özelliği gereği

$$\left|f\left(t\right) - f\left(x\right)\right| \leq \left(\frac{|t - x|}{\delta} + 1\right)\omega\left(f; \delta\right)$$

olacağından ispat tamamlanır.

Tanım 2.3.2 (Lipschitz Sınıfı): $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere

$$\left|f\left(t\right) - f\left(x\right)\right| \leq M\left|t - x\right|^{\alpha} \tag{2.3.2}$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlara Lipschitz sınıfından olan fonksiyonlar denir. M sabitine de Lipschitz sabiti denir. Lipschitz sınıfından olan fonksiyonlar $f \in Lip_M(\alpha)$ ile gösterilir (Korovkin 1960).

Tanım 2.3.3 (Peetre-K Fonksiyoneli): $f \in C[a,b]$ ve $\delta \geq 0$ olmak üzere,

$$K(f;\delta) = \inf_{g \in C^2[a,b]} \left\{ \|f-g\|_{C[a,b]} + \delta \|g\|_{C^2[a,b]} \right\}$$

şeklinde tanımlanan ifadeye Peetre-K fonksiyoneli denir. Burada $C^2[a,b]$ ikinci basamaktan sürekli türevlenebilir fonksiyon uzayı olmak üzere

$$\|g\|_{C^2[a,b]} = \|g\|_{C[a,b]} + \|g'\|_{C[a,b]} + \left\|g''\right\|_{C[a,b]}$$

ile verilir.

Lemma 2.3.1 (İntegral Bağıntısı): $g \in C^2[a,b]$ olsun. Bu durumda

$$g(t) - g(x) = g'(x)(t-x) + \int_x^t g''(s)(t-s)\,ds \tag{2.3.3}$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

$$\int_x^t g''(s)(t-s)\,ds \tag{2.3.4}$$

integraline kısmi integrasyon uygulayalım;

$$t - s = u \text{ ise } -ds = du$$

olup,

$$g''(s)\,ds = dv \text{ ise } g'(s) = v$$

bulunur. Bunun (2.3.4) de yerine konulmasıyla;

$$\begin{aligned}
\int_x^t g''(s)(t-s)\,ds &= (t-s)\,g'(s)\big|_x^t + \int_x^t g'(s)\,ds \\
&= (t-s)\,g'(s)\big|_x^t + g(s)\big|_x^t \\
&= -(t-x)\,g'(x) + g(t) - g(x)
\end{aligned}$$

olup buradan

$$g(t) - g(x) = g'(x)(t-x) + \int_x^t g''(s)(t-s)\,ds$$

yazabiliriz. Bu ise ispatı tamamlar.

3. LİNEER POZİTİF OPERATÖRLER İLE FONKSİYONLARA YAKLAŞIM VE KOROVKIN TEOREMİ

1952 yılında H. Bohman, toplam şeklindeki lineer pozitif operatörler dizisinin $[0,1]$ kapalı aralığında sürekli f fonksiyonuna yaklaşması problemini incelemiştir.
H. Bohman göstermiştir ki; $x \in [0,1]$ ve $0 \leq \alpha_{k,n} \leq 1$ olduğunda

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(\alpha_{k,n}) P_{k,n}(x), \ \ P_{k,n}(x) \geq 0$$

lineer pozitif operatörler dizisinin, $n \to \infty$ için $[0,1]$ aralığında f fonksiyonuna düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter koşullar

$$L_n(1;x) \rightrightarrows 1 \tag{3.0.1}$$

$$L_n(t;x) \rightrightarrows x \tag{3.0.2}$$

$$L_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2 \tag{3.0.3}$$

olmak üzere üç tanedir.

H. Bohman' ın araştırdığı operatörlerin değeri, f fonksiyonunun $[0,1]$ aralığının dışındaki değerlerinden bağımsızdır.

1953 yılında P. P. Korovkin genel bir teorem ispatlamış ve Bohman' ın ifade ettiği koşulların genel halde de geçerli olduğunu göstermiştir. Şimdi yaklaşımlar teorisinde önemli bir yer tutan Korovkin teoremini verelim.

Teorem 3.0.1 (L_n) lineer pozitif operatörler dizisi, $[a,b]$ kapalı aralığında $n \to \infty$ iken (3.0.1), (3.0.2) ve (3.0.3) koşullarını gerçekliyor ise o taktirde, $[a,b]$ aralığında sürekli ve tüm reel eksende sınırlı herhangi bir f fonksiyonu için $n \to \infty$ iken,

$$L_n(f;x) \rightrightarrows f(x), \ \ a \leq x \leq b$$

olur (Korovkin 1960).

İspat: $f \in C[a,b]$ olduğundan $\forall \epsilon > 0$ sayısına karşılık öyle bir $\delta > 0$ sayısı vardır ki $t \in \mathbb{R}$ ve $x \in [a,b]$ için $|t-x| < \delta$ olduğunda

$$|f(t) - f(x)| < \epsilon \tag{3.0.4}$$

kalır. Diğer taraftan f sınırlı olduğundan $\forall x \in \mathbb{R}$ için $|f(x)| \leq M$ olacak şekilde $M > 0$ sayısı vardır.

$|t-x| \geq \delta$ olduğunda ise f sınırlı olduğundan ve üçgen eşitsizliğinden, M pozitif bir sabit olmak üzere

$$|f(t) - f(x)| \leq |f(t)| + |f(x)| \leq 2M$$

yazılabilir. Ayrıca $|t-x| \geq \delta \Longrightarrow \sqrt{(t-x)^2} \geq \delta \Longrightarrow (t-x)^2 \geq \delta^2$ olup

$$\frac{(t-x)^2}{\delta^2} \geq 1 \;\Rightarrow\; \frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2 \geq 2M \tag{3.0.5}$$

sağlanır. O halde (3.0.4) ve (3.0.5) eşitsizliklerinden $\forall \epsilon > 0$ için

$$|f(t) - f(x)| < \frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2 + \epsilon \tag{3.0.6}$$

bulunur.

Lineer pozitif operatörlerin özelliklerinden

$$\begin{aligned}
\|L_n(f;x) - f(x)\|_{C[a,b]} &= \|L_n(f(t) - f(x);x) + f(x)(L_n(f;1) - 1)\|_{C[a,b]} \\
&\leq \|L_n(f(t) - f(x);x)\|_{C[a,b]} + \|f\|_{C[a,b]} \|L_n(1;x) - 1\|_{C[a,b]} \\
&\leq \|L_n(|f(t) - f(x)|;x)\|_{C[a,b]} + \|f\|_{C[a,b]} \|L_n(1;x) - 1\|_{C[a,b]}
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizliğin ikinci terimi (3.0.1) ifadesinden dolayı sıfıra yakınsar. Yani

$$\|f\|_{C[a,b]} \|L_n(1;x) - 1\|_{C[a,b]} \leq \epsilon_n$$

eşitsizliğini sağlayan ve $n \to \infty$ iken $\epsilon_n \to 0$ olacak şekilde bir (ϵ_n) dizisi vardır.

Bu durumda

$$\|L_n(f;x) - f(x)\|_{C[a,b]} \leq \|L_n(|f(t) - f(x)|;x)\|_{C[a,b]} + \epsilon_n \tag{3.0.7}$$

gerçeklenir.

(3.0.7) eşitsizliğinin sağındaki ilk terimi gözönüne alalım. (3.0.6) eşitsizliği ve lineer pozitif operatörlerin özellikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
L_n(|f(t) - f(x)|;x) &\leq L_n\left(\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2 + \epsilon; x\right) \\
&= \epsilon L_n(1;x) + \frac{2M}{\delta^2} L_n\left((t-x)^2;x\right) \\
&= \epsilon L_n(1;x) + \frac{2M}{\delta^2}\left[L_n\left(t^2;x\right) - 2xL_n(t;x) + x^2 L_n(1;x)\right] \\
&= \epsilon\left[L_n(1;x) - 1\right] + \epsilon + \frac{2M}{\delta^2}\{\left[L_n\left(t^2;x\right) - x^2\right] \\
&\quad -2x\left[L_n(t;x) - x\right] + x^2\left[L_n(1;x) - 1\right]\} \\
&= \epsilon + \left(\epsilon + \frac{2M}{\delta^2}x^2\right)\left[L_n(1;x) - 1\right] + \frac{2M}{\delta^2}\left[L_n\left(t^2;x\right) - x^2\right] \\
&\quad -\frac{4M}{\delta^2}x\left[L_n(t;x) - x\right]
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\epsilon + \frac{2M}{\delta^2}x^2 = g(x) \text{ ve } -\frac{4M}{\delta^2}x = h(x)$$

olsun. $\forall x \in [a,b]$ için $g(x) \leq \sup\limits_{x\in[a,b]} |g(x)| = b$ ve $h(x) \leq \sup\limits_{x\in[a,b]} |h(x)| = c$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
L_n(|f(t) - f(x)|;x) &\leq \epsilon + b\left[L_n(1;x) - 1\right] + \frac{2M}{\delta^2}\left[L_n\left(t^2;x\right) - x^2\right] \\
&\quad +c\left[L_n(t;x) - x\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\|L_n\left(\left|f\left(t\right)-f\left(x\right)\right|;x\right)\right\|_{C[a,b]} &\leq \epsilon+b\left\|L_n\left(1;x\right)-1\right\|_{C[a,b]} \\ &+\frac{2M}{\delta^2}\left\|L_n\left(t^2;x\right)-x^2\right\|_{C[a,b]}+c\left\|L_n\left(t;x\right)-x\right\|_{C[a,b]}\end{aligned}$$

elde edilir.

(3.0.1), (3.0.2) ve (3.0.3) ifadelerinden dolayı

$$\lim_{n\to\infty}\left\|L_n\left(\left|f\left(t\right)-f\left(x\right)\right|;x\right)\right\|_{C[a,b]}=0$$

olur. Bu durumda (3.0.7) ifadesinin

$$\lim_{n\to\infty}\left\|L_n\left(f\left(t\right);x\right)-f\left(x\right)\right\|_{C[a,b]}=0$$

olduğu görülür. Bu da ispatı tamamlar.

1962 yılında Baskakov, M_f sabiti, $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli f fonksiyonuna bağlı bir sabit olmak üzere

$$\left|f\left(x\right)\right|\leq M_f\left(1+x^2\right) \tag{3.0.8}$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonu için Korovkin teoreminin gerçeklendiğini ispatlamıştır.

Gerçekten; $f\in C\left[a,b\right]$ olduğundan her $\epsilon>0$ sayısına karşılık öyle bir $\delta>0$ sayısı vardır ki $t\in\mathbb{R}$ ve $x\in[a,b]$ için $|t-x|<\delta$ olduğunda

$$\left|f\left(t\right)-f\left(x\right)\right|<\epsilon$$

kalır.

Diğer yandan $|t-x|\geq\delta$ olduğunda $x\in[a,b]$ için f fonksiyonu (3.0.8) koşulunu sağladığından

$$
\begin{aligned}
|f(t)-f(x)| &\leq M_f\left(1+x^2\right)+M_f\left(1+t^2\right) \\
&= M_f\left(1+t^2+x^2\right) \\
&= M_f\left(2+(t-x+x)^2+x^2\right) \\
&= 2\left(\frac{(t-x)^2}{\delta^2}+(t-x)^2+2x\frac{(t-x)^2}{\delta}+2x^2\frac{(t-x)^2}{\delta^2}\right) \\
&= M_f\,(t-x)^2\left(\frac{2}{\delta^2}+1+\frac{2x}{\delta}+\frac{2x^2}{\delta^2}\right) \\
&\leq M_f\,(t-x)^2\left(\frac{2}{\delta^2}+1+\sup_{x\epsilon[a,b]}\frac{2x}{\delta}+\sup_{x\epsilon[a,b]}\frac{2x^2}{\delta^2}\right)
\end{aligned}
$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitsizlikte

$$
c=M_f\left(\frac{2}{\delta^2}+1+\sup_{x\epsilon[a,b]}\frac{2x}{\delta}+\sup_{x\epsilon[a,b]}\frac{2x^2}{\delta^2}\right)
$$

alınırsa

$$
|f(t)-f(x)|\leq c\,(t-x)^2
$$

elde edilir.

Bu durumda $\forall x\in[a,b]$ ve $\forall t\in\mathbb{R}$ için

$$
|f(t)-f(x)|\leq \epsilon+c\,(t-x)^2
$$

yazılabilir. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
L_n\left(|f(t)-f(x)|\,;x\right) &\leq L_n\left(\epsilon+c\,(t-x)^2\,;x\right) \\
&= \epsilon L_n\,(1;x)+c\left[L_n\left(t^2;x\right)-2xL_n\,(t;x)+x^2L_n\,(1;x)\right] \\
&= \epsilon\left[L_n\,(1;x)-1\right]+\epsilon+c\{\left[L_n\left(t^2;x\right)-x^2\right] \\
&\quad -2x\left[L_n\,(t;x)-x\right]+x^2\left[L_n\,(1;x)-1\right]\}
\end{aligned}
$$

olup, $k = \sup\limits_{x \epsilon [a,b]} |-2x|$ ve $l = \sup\limits_{x \epsilon [a,b]} |x^2|$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \|L_n(|f(t) - f(x)|;x)\|_{C[a,b]} &\leq \epsilon + (\epsilon + l)\|L_n(1;x) - 1\|_{C[a,b]} + k\|L_n(t;x) - x\|_{C[a,b]} \\ &\quad + c\left\|L_n\left(t^2;x\right) - x^2\right\|_{C[a,b]} \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

(3.0.1), (3.0.2) ve (3.0.3) ifadelerinden dolayı

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(|f(t) - f(x)|;x)\|_{C[a,b]} = 0$$

olur. Bu durumda (3.0.7) eşitsizliğinden istenen

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f;x) - f(x)\|_{C[a,b]} = 0$$

elde edilir. O halde Korovkin teoremi sağlanmış olur.

3.1 Bernstein Polinomları ve Yaklaşım Özellikleri

1912 yılında S. Bernstein, Weierstrass' ın yaklaşım teoreminde bahsettiği $P(x)$ polinomunu aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

$0 \leq x \leq 1$ olmak üzere bu polinom,

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \tag{3.1.1}$$

biçimindedir (Bernstein 1912). Burada

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

dir.

Bu polinomların temel yapısı; a ve b pozitif sayılar ve n bir doğal sayı olmak üzere;

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

binom formülüne bağlıdır. Bu formülde $x \in [0,1]$ olmak üzere $a = x$ ve $b = 1 - x$ alınırsa;

$$(x+1-x)^n = (1)^n = 1 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 3.1.1 (3.1.1) ile tanımlanan Bernstein polinomları, $[0,1]$ kapalı aralığında sürekli ve tüm pozitif yarı eksende sınırlı olan f fonksiyonuna $n \to \infty$ iken $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsar. Yani $f \in C[0,1]$ ise

$$B_n(f;x) \rightrightarrows f(x), \ \ x \in [0,1]$$

gerçeklenir (Lorentz 1953).

İspat: İspatı Korovkin teoremini kullanarak yapacağız. Bunun için öncelikle $B_n(f;x)$ operatörünün lineer ve pozitif olduğunu gösterelim.

$\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ ve $\forall f_1, f_2 \in C[0,1]$ için

$$\begin{aligned} B_n(a_1 f_1 + a_2 f_2; x) &= \sum_{k=0}^{n} (a_1 f_1 + a_2 f_2)\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\ &= a_1 \sum_{k=0}^{n} f_1\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\ &\quad + a_2 \sum_{k=0}^{n} f_2\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\ &= a_1 B_n(f_1;x) + a_2 B_n(f_2;x) \end{aligned}$$

olduğundan B_n lineerdir.

$x \in [0,1]$ için $x^k (1-x)^{n-k} \geq 0$ olduğundan $f \geq 0$ için $B_n (f; x) \geq 0$ olur. Bundan dolayı B_n pozitiftir.

Şimdi Korovkin teoreminin koşullarını araştıralım.

$$\begin{aligned} B_n (1; x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= (1-x+x)^n \\ &= 1 \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

$$\begin{aligned} B_n (t; x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= x \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\ &= x \sum_{k=o}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{(n-1)-k} \\ &= x (1-x+x)^{n-1} \\ &= x \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

$$\begin{aligned} B_n \left(t^2; x\right) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= x \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\ &= x \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\ &\quad + \frac{x}{n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\ &= x^2 \frac{n-1}{n} \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} x^{k-2} (1-x)^{n-k} \\ &\quad + \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{(n-1)-k} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= x^2 \frac{n-1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} x^k (1-x)^{(n-2)-k} \\
&\quad + \frac{x}{n} (1-x+x)^{n-1} \\
&= x^2 \frac{n-1}{n} (1-x+x)^{n-2} + \frac{x}{n} \\
&= x^2 + \frac{x-x^2}{n} \qquad (3.1.4)
\end{aligned}
$$

olur. Sonuç olarak

$$B_n(1;x) = 1$$

$$B_n(t;x) = x$$

$$B_n\left(t^2;x\right) = x^2 + \frac{x-x^2}{n}$$

eşitliklerinden

$$\lim_{n\to\infty} \|B_n(1;x) - 1\|_{C[0,1]} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \|B_n(t;x) - x\|_{C[0,1]} = 0$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left\|B_n\left(t^2;x\right) - x^2\right\|_{C[0,1]} &= \lim_{n\to\infty} \left\| x^2 + \frac{x-x^2}{n} - x^2 \right\|_{C[0,1]} \\
&= \lim_{n\to\infty} \max_{0\le x\le 1} \left| \frac{x-x^2}{n} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

sağlanır. Korovkin teoremine göre $f \in C[0,1]$ için

$$\|B_n(f;x) - f(x)\|_{C[0,1]} \to 0$$

gerçeklenir.

Bernstein polinomlarının $f \in C[0,1]$ fonksiyonuna yaklaşma hızını Tanım 2.3.1 de tanımlanan süreklilik modülü yardımıyla aşağıdaki teorem ile verebiliriz.

Teorem 3.1.2 $B_n(f;x)$, (3.1.1) 'de olduğu gibi tanımlanmış olsun. $[0,1]$ aralığında sürekli f fonksiyonu için

$$|B_n(f;x) - f(x)| \leq \frac{3}{2}\omega\left(f; n^{-\frac{1}{2}}\right)$$

eşitsizliği gerçeklenir (Lorentz 1953).

İspat: $P_{k,n}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ olmak üzere (3.1.2) eşitliği ve Bernstein polinomlarının lineerliğinden

$$\begin{aligned} |B_n(f;x) - f(x)| &= \left|\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) P_{k,n}(x) - f(x)\right| \\ &= \left|\sum_{k=0}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) P_{k,n}(x)\right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| P_{k,n}(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Süreklilik modülünün (vii) özelliğinde $t = \frac{k}{n}$ seçimiyle;

$$\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \leq \left(\frac{\left|\frac{k}{n} - x\right|}{\delta_n} + 1\right)\omega(f;\delta_n)$$

yazılabilir. Bunu yukarıdaki eşitsizlikte yerine yazarsak;

$$\begin{aligned} |B_n(f;x) - f(x)| &\leq \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\left|\frac{k}{n} - x\right|}{\delta_n} + 1\right)\omega(f;\delta_n) P_{k,n}(x) \\ &= \omega(f;\delta_n)\left[\sum_{k=0}^{n} P_{k,n}(x) + \frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n} - x\right| P_{k,n}(x)\right] \end{aligned}$$

bulunur. Toplamın ikinci kısmına Cauchy-Schwarz eşitsizliğini uygulayıp ayrıca (3.1.2) eşitliğini kullanacak olursak

$$|B_n(f;x)-f(x)|\leq\omega(f;\delta_n)\left[1+\frac{1}{\delta_n}\left(\sum_{k=0}^{n}P_{k,n}(x)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2P_{k,n}(x)\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

elde ederiz. Tekrar (3.1.2) eşitliğini uygulayalım. Bu durumda

$$|B_n(f;x)-f(x)|\leq\omega(f;\delta_n)\left[1+\frac{1}{\delta_n}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2P_{k,n}(x)\right)^{\frac{1}{2}}\right]\tag{3.1.5}$$

olur. $\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2P_{k,n}(x)=B_n\left((t-x)^2;x\right)$ dir. B_n lineer olduğundan,

$$\begin{aligned}B_n\left((t-x)^2;x\right)&=B_n\left(t^2;x\right)-2xB_n(t;x)+x^2B_n(1;x)\\&=x^2+\frac{x(1-x)}{n}-2x^2+x^2\\&=\frac{x(1-x)}{n}\end{aligned}$$

olup bunu (3.1.5) de yerine yazarsak

$$|B_n(f;x)-f(x)|\leq\omega(f;\delta_n)\left[1+\frac{1}{\delta_n}\frac{\sqrt{x(1-x)}}{\sqrt{n}}\right]$$

elde ederiz. $\forall x\in[0,1]$ için

$$\sqrt{x(1-x)}\leq\max_{0\leq x\leq 1}\sqrt{x(1-x)}=\frac{1}{2}$$

olduğundan ifademiz

$$|B_n(f;x)-f(x)|\leq\omega(f;\delta_n)\left[1+\frac{1}{\delta_n}\frac{1}{2n^{\frac{1}{2}}}\right]$$

şeklini alır. $\delta_n=n^{-\frac{1}{2}}$ seçilirse;

$$\begin{aligned}|B_n(f;x)-f(x)|&\leq\omega\left(f;n^{-\frac{1}{2}}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\\&=\frac{3}{2}\omega\left(f;n^{-\frac{1}{2}}\right)\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizlik bize; $x \in [0,1]$ olmak üzere $B_n(f;x)$ operatörünün f fonksiyonuna yaklaşım hızının, $n^{-\frac{1}{2}}$ nin 0' a yaklaşım hızından daha küçük olduğunu gösterir.

3.2 Bernstein-Chlodowsky Polinomları ve Bir Genelleşmesinin Yaklaşım Özellikleri

Chlodowsky (1937) tarafından sınırsız bir aralık üzerinde Bernstein polinomları genelleştirilmiş ve bu polinomların bazı yaklaşım özellikleri araştırılmıştır. Bernstein-Chlodowsky polinomları olarak adlandırılan bu polinomlar;

$$B_n^*(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}b_n\right) C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}, \ 0 \le x \le b_n \qquad (3.2.1)$$

biçimindedir. Burada (b_n) dizisi

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty \text{ ve } \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0$$

koşullarını sağlayan monoton artan reel terimli pozitif bir sayı dizisidir.

Bernstein-Chlodowsky polinomları tanımlı olduğu $[0,b_n]$ aralığının $n \to \infty$ iken $[0,\infty)$ aralığına dönüşmesinden dolayı Korovkin teoremi sağlamaz.

Gerçekten;

$$\begin{aligned} B_n^*(1;x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\ &= \left(1-\frac{x}{b_n}+\frac{x}{b_n}\right)^n \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
B_n^*(t;x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} b_n \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&= x \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1} \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&= x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k} \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{(n-1)-k} \\
&= x \left(1-\frac{x}{b_n}+\frac{x}{b_n}\right)^{n-1} \\
&= x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B_n^*(t^2;x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} b_n^2 \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&= x \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} b_n \binom{n-1}{k-1} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1} \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&= x \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n} b_n \binom{n-1}{k-1} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1} \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&\quad + \frac{x}{n} b_n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1} \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&= x^2 \frac{n-1}{n} \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-2} \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&\quad + \frac{x}{n} b_n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k} \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{(n-1)-k} \\
&= x^2 \frac{n-1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k} \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{(n-2)-k} \\
&\quad + \frac{x}{n} b_n \left(1-\frac{x}{b_n}+\frac{x}{b_n}\right)^{n-1} \\
&= x^2 \frac{n-1}{n} \left(1-\frac{x}{b_n}+\frac{x}{b_n}\right)^{n-2} + \frac{x}{n} b_n \\
&= x^2 + x\frac{(b_n-x)}{n}
\end{aligned}
$$

şeklinde olup sınırsız aralık üzerinde örneğin $f(x) = x^2 \in C(0,\infty)$ seçtiğimiz taktirde

$$
\left\| B_n^*(t^2;x) - x^2 \right\|_{C(0,b_n)} = \frac{b_n^2}{4n}
$$

elde edilir. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} \left\| B_n^* \left(t^2; x\right) - x^2 \right\|_{C(0,b_n)} = \infty$$

bulunur. Bu ise yakınsamanın gerçeklenmediğini gösterir.

1995 yılında Bernstein-Chlodowsky polinomlarının E. İbikli ve E. Gadjiev tarafından $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$ olmak üzere

$$B_n^{\alpha,\beta}(f; x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\alpha x + \beta \frac{k b_n}{n}\right) C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}, \quad 0 \leq x \leq b_n \qquad (3.2.2)$$

şeklinde bir genelleşmesi ele alınmıştır. Burada (b_n) dizisi;

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty \text{ ve } \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0$$

koşullarını sağlayan monoton artan reel terimli pozitif sayı dizisidir.

$B_n^{\alpha,\beta}(f, x)$ operatörleri f özel olarak bir polinomsa polinomdur aksi halde polinom değildir.

(3.2.2) operatörlerinin Bernstein-Chlodowsky polinomlarının bir genelleşmesi olduğu kolayca görülebilir.

Gerçekten, (3.2.2) de $\alpha = 0$, $\beta = 1$ yazıldığı taktirde

$$B_n^{0,1}(f; x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n} b_n\right) C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

(3.2.1) polinomlar dizisi elde edilir.

$B_n^{\alpha,\beta}(f, x)$ in lineer pozitif operatör olduğu kolayca görülebilir. Gerçekten;

$\forall a_1,\ a_2 \in \mathbb{R}$ ve $\forall f_1,\ f_2 \in C\left[0,\infty\right)$ için

$$\begin{aligned} B_n^{\alpha,\beta}\left(a_1 f_1 + a_2 f_2; x\right) &= \sum_{k=0}^{n} \left(a_1 f_1 + a_2 f_2\right)\left(\alpha x + \beta \frac{k b_n}{n}\right) C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\ &= a_1 \sum_{k=0}^{n} f_1\left(\alpha x + \beta \frac{k b_n}{n}\right) C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\ &\quad + a_2 \sum_{k=0}^{n} f_2\left(\alpha x + \beta \frac{k b_n}{n}\right) C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\ &= a_1 B_n^{\alpha,\beta}\left(f_1; x\right) + a_2 B_n^{\alpha,\beta}\left(f_2; x\right) \end{aligned}$$

olduğundan $B_n^{\alpha,\beta}$ lineerdir.

$0 \leq x \leq b_n$ olduğundan $\dfrac{x}{b_n} \geq 0$ ve $1 - \dfrac{x}{b_n} \geq 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla $f \geq 0$ için $B_n^{\alpha,\beta}\left(f; x\right) \geq 0$ olur. Bundan dolayı $B_n^{\alpha,\beta}$ pozitiftir.

Teorem 3.2.1 $[0,\infty)$ aralığında tanımlı sürekli ve $f\left(x\right) = O\left(1 + x^2\right)$ koşulunu sağlayan her f fonksiyonu için, herhangi bir $[0, A]$ sonlu aralığında

$$B_n^{\alpha,\beta}\left(f; x\right) \rightrightarrows f\left(x\right)$$

gerçeklenir (İbikli ve Gadjiev 1995).

İspat: $\alpha + \beta = 1$ eşitliğini dikkate alarak Korovkin teoreminin koşullarını araştıralım.

$$\begin{aligned} B_n^{\alpha,\beta}\left(1; x\right) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\ &= \left(1 - \frac{x}{b_n} + \frac{x}{b_n}\right)^n \\ &= 1 \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

$$\begin{aligned} B_n^{\alpha,\beta}\left(t; x\right) &= \sum_{k=0}^{n} \left(\alpha x + \beta \frac{k}{n} b_n\right) \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\ &= \alpha x + \beta \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} b_n \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \alpha x+\beta x\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&= \alpha x+\beta x\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{(n-1)-k} \\
&= \alpha x+\beta x\left(1-\frac{x}{b_n}+\frac{x}{b_n}\right)^{n-1} \\
&= (\alpha+\beta)\,x \\
&= x \qquad (3.2.4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B_n^{\alpha,\beta}\left(t^2;x\right) &= \sum_{k=0}^{n}(\alpha x+\beta\frac{k}{n}b_n)^2\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&= \alpha^2x^2+2\alpha\beta x\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}b_n\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&\quad +\beta^2\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}b_n^2\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&= \alpha^2x^2+2\alpha\beta x^2\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&\quad +\beta^2x\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}b_n\binom{n-1}{k-1}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&= \alpha^2x^2+2\alpha\beta x^2\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{(n-1)-k} \\
&\quad +\beta^2x\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{n}b_n\binom{n-1}{k-1}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&\quad +\beta^2\frac{x}{n}b_n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&= \alpha^2x^2+2\alpha\beta x^2+\beta^2\frac{n-1}{n}x^2+\beta^2\frac{x}{n}b_n \\
&= (\alpha+\beta)^2x^2+\frac{\beta^2x\left(b_n-x\right)}{n} \\
&= x^2+\frac{\beta^2x\left(b_n-x\right)}{n} \qquad (3.2.5)
\end{aligned}
$$

olur. Sonuç olarak

$$B_n^{\alpha,\beta}\left(1;x\right)=1$$

$$B_n^{\alpha,\beta}(t;x) = x$$

$$B_n^{\alpha,\beta}\left(t^2;x\right) = x^2 + \frac{\beta^2 x\left(b_n - x\right)}{n}$$

eşitliklerinden $n \to \infty$ için

$$\left\|B_n^{\alpha,\beta}(1;x) - 1\right\|_{C[0,A]} \to 0$$

$$\left\|B_n^{\alpha,\beta}(t;x) - x\right\|_{C[0,A]} \to 0$$

$$\begin{aligned}\left\|B_n^{\alpha,\beta}\left(t^2;x\right) - x^2\right\|_{C[0,A]} &= \max_{0\leq x\leq A}\left|x^2 + \frac{\beta^2 x\left(b_n - x\right)}{n} - x^2\right| \\ &\leq \frac{\beta^2 A b_n}{n} \to 0\end{aligned}$$

sağlanır. Korovkin teoremine göre $f \in C[0,A]$ için

$$B_n^{\alpha,\beta}(f;x) \rightrightarrows f(x)$$

gerçeklenir. $[0,A]$ aralığında $B_n^{\alpha,\beta}(f;x)$ operatörünün f fonksiyonuna yakınsaklığını elde ettik.

Yaklaşım hızını elde etmek için aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.2.2 f fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığında

$$f(x) = O\left(1 + x^2\right) \tag{3.2.6}$$

koşulunu sağlayan sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda herhangi bir sınırlı $[0,A]$ aralığı üzerinde

$$\left|B_n^{\alpha,\beta}(f;x) - f(x)\right| \leq C\omega_{1+A}\left(f, \sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada C, n' den bağımsız bir sabittir, ω_{1+A} ise f fonksiyonunun $[0,1+A]$ aralığındaki süreklilik modülüdür (İbikli ve Gadjiev 1995).

İspat: $x \in [0, A]$ için

$$E_k^{'} = \left\{ k: \ \alpha x + \beta \frac{k}{n} b_n \geq 1 + A \right\}$$

$$E_k^{''} = \left\{ k: \ \alpha x + \beta \frac{k}{n} b_n \leq 1 + A \right\}$$

kümelerini tanımlayalım. (3.2.3) den dolayı

$$\begin{aligned}
\left| B_n^{\alpha,\beta}(f; x) - f(x) \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n} \left[f(\alpha x + \beta \frac{k}{n} b_n) - f(x) \right] \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n} \right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n} \right)^{n-k} \right| \\
&\leq \sum_{k \in E_k^{'}}^{n} \left| f(\alpha x + \beta \frac{k}{n} b_n) - f(x) \right| \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n} \right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n} \right)^{n-k} \\
&\quad + \sum_{k \in E_k^{''}}^{n} \left| f(\alpha x + \beta \frac{k}{n} b_n) - f(x) \right| \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n} \right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n} \right)^{n-k} \\
&= I_n^{'} + I_n^{''} \qquad (3.2.7)
\end{aligned}$$

yazılabilir.

Şimdi $I_n^{'}$ ve $I_n^{''}$ ifadelerini hesaplayalım.

f fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında sürekli bir fonksiyon olduğundan $C_1 \geq 1$ sayısı vardır öyle ki

$$|f(x)| \leq C_1, \ x \in [0, A]$$

yazılabilir. (3.2.6) dan dolayı

$$\left| f(\alpha x + \beta \frac{k}{n} b_n) - f(x) \right| \leq C_2 \left[1 + (\alpha x + \beta \frac{k}{n} b_n)^2 \right]$$

olacak şekilde bir $C_2 \geq 1$ sayısı vardır. Bu iki eşitsizlikten;

$$\begin{aligned}\left|f(\alpha x+\beta\frac{k}{n}b_n)-f\left(x\right)\right| &\leq \left|f(\alpha x+\beta\frac{k}{n}b_n)\right|+\left|f\left(x\right)\right| \\ &\leq C_2\left[1+(\alpha x+\beta\frac{k}{n}b_n)^2\right]+C_1 \\ &\leq C_3\left[(\alpha x+\beta\frac{k}{n}b_n)^2+2\right]\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $C_3=\max\{C_1,C_2\}$ alınmıştır.

$k\in E_k^{'}$ ve $x\in[0,A]$ için

$$\left|\alpha x+\beta\frac{k}{n}b_n-x\right|\geq 1$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}\left|f(\alpha x+\beta\frac{k}{n}b_n)-f\left(x\right)\right| &\leq C_3\left[\left(\alpha-1\right)x+\beta\frac{k}{n}b_n\right]^2\left(4+4x+x^2\right) \\ &\leq C_3\left[\left(\alpha-1\right)x+\beta\frac{k}{n}b_n\right]^2\left(A+2\right)^2 \\ &= C_4\left[\left(\alpha-1\right)x+\beta\frac{k}{n}b_n\right]^2 \qquad (3.2.8)\end{aligned}$$

bulunur. Burada $C_4=C_3\left(A+2\right)^2$ olup (3.2.3), (3.2.4) ve (3.2.5) ifadelerinden;

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}\left[\left(\alpha-1\right)x+\beta\frac{k}{n}b_n\right]^2\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}k\right)\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\left[(\alpha x+\beta\frac{k}{n}b_n)^2-2x(\alpha x+\beta\frac{k}{n}b_n)+x^2\right] \\ &= B_n^{\alpha,\beta}\left(t^2;x\right)-2xB_n^{\alpha,\beta}\left(t;x\right)+x^2B_n^{\alpha,\beta}\left(1;x\right) \\ &= x^2+\frac{\beta^2x\left(b_n-x\right)}{n}-2x^2+x^2 \\ &= \frac{\beta^2x\left(b_n-x\right)}{n} \qquad (3.2.9)\end{aligned}$$

bulunur. Böylece (3.2.8) ve (3.2.9) dan

$$
\begin{aligned}
I_n' &\leq C_4 \sum_{k=0}^{n} \left[(\alpha - 1)\, x + \beta \frac{k}{n} b_n \right]^2 \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n} \right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n} \right)^{n-k} \\
&= C_4 \frac{\beta^2 x \,(b_n - x)}{n} \\
&\leq C_4 \frac{\beta^2 A b_n}{n}
\end{aligned}
$$

elde edilir. $C_5 = C_4 \beta^2 A$ alınırsa,

$$
I_n' \leq C_5 \frac{b_n}{n} \tag{3.2.10}
$$

olur.

Şimdi de I_n'' ifadesini hesaplayalım. Süreklilik modülünün özelliklerinden $x \in [0, A]$ için

$$
\begin{aligned}
I_n'' &= \sum_{k \in E_k''}^{n} \left| f(\alpha x + \beta \frac{k}{n} b_n) - f\,(x) \right| \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n} \right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n} \right)^{n-k} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \omega_{1+A} \left(f; \left| (\alpha - 1)\, x + \beta \frac{k}{n} b_n \right| \right) \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n} \right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n} \right)^{n-k} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{\left| (\alpha - 1)\, x + \beta \frac{k}{n} b_n \right|}{\delta_n} \right) \omega_{1+A}\,(f; \delta_n) \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n} \right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n} \right)^{n-k} \\
&\leq \omega_{1+A}\,(f; \delta_n) \left[1 + \frac{1}{\delta_n} \sum_{k=0}^{n} \left| (\alpha - 1)\, x + \beta \frac{k}{n} b_n \right| \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n} \right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n} \right)^{n-k} \right]
\end{aligned}
$$

yazılabilir. Böylece (3.2.9) eşitliği ve Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky eşitsizliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
I_n'' &\leq \omega_{1+A}\,(f; \delta_n) \left[1 + \frac{1}{\delta_n} \sum_{k=0}^{n} \left| (\alpha - 1)\, x + \beta \frac{k}{n} b_n \right| \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n} \right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n} \right)^{n-k} \right] \\
&\leq \omega_{1+A}\,(f; \delta_n) \left[1 + \frac{1}{\delta_n} \sqrt{ \sum_{k=0}^{n} \left[(\alpha - 1)\, x + \beta \frac{k}{n} b_n \right]^2 \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n} \right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n} \right)^{n-k} } \right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\le \omega_{1+A}\left(f;\delta_n\right)\left[1+\frac{1}{\delta_n}\sqrt{\frac{\beta^2 x\left(b_n-x\right)}{n}}\right] \\
&\le \omega_{1+A}\left(f;\delta_n\right)\left[1+\frac{1}{\delta_n}\frac{\beta\sqrt{x\left(b_n-x\right)}}{\sqrt{n}}\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$x\in[0,A]$ için $x\left(b_n-x\right)\le b_nA$ dır. $\delta_n=\sqrt{\dfrac{b_n}{n}}$ alınırsa

$$
\begin{aligned}
I_n'' &\le \omega_{1+A}\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)\left[1+\frac{1}{\sqrt{\frac{b_n}{n}}}\frac{\beta\sqrt{b_nA}}{\sqrt{n}}\right] \\
&= \omega_{1+A}\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)\left(1+\beta\sqrt{A}\right) \qquad (3.2.11)
\end{aligned}
$$

bulunur. (3.2.10) ve (3.2.11) in (3.2.7) de yerine yazılmasıyla

$$
\begin{aligned}
\left|B_n^{\alpha,\beta}\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right| &\le C_5\frac{b_n}{n}+\omega_{1+A}\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)\left(1+\beta\sqrt{A}\right) \\
&\le C_6\left[\omega_{1+A}\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)+\frac{b_n}{n}\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada $C_6=\max\{C_5,1+\beta\sqrt{A}\}$ ile verilir.

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{n}=0$ olduğundan yeterince büyük n ler için $\dfrac{b_n}{n}\le\sqrt{\dfrac{b_n}{n}}$ dir. Ayrıca süreklilik modülünün özelliklerinden

$$
C_f\sqrt{\frac{b_n}{n}}\le\omega_{1+A}\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)
$$

olacak şekilde f fonksiyonuna bağlı sabit bir C_f sayısı bulabiliriz. $C=C_6\left(1+\dfrac{1}{C_f}\right)$ alınırsa;

$$\left|B_n^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right|\leq C\omega_{1+A}\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)$$

elde edilir.

Eğer f fonksiyonu aynı zamanda türevlenebilir bir fonksiyon ise yaklaşım hızını aşağıdaki teoremle verebiliriz.

Teorem 3.2.3 $f(x)$, $f'(x)=O(x)$ $(x\to\infty)$ koşulunu sağlayan bir sürekli türeve sahip fonksiyon olsun. $\omega_1(\delta)$, $f'(x)$ fonksiyonunun $[0,1+A]$ aralığındaki süreklilik modülü olmak üzere,

$$\left|B_n^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right|\leq M\sqrt{\frac{b_n}{n}}\omega_1\left(\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)$$

gerçeklenir. Burada M, n den bağımsız bir sabittir (İbikli ve Gadjiev 1995).

İspat: Ortalama değer teoremine göre ξ, x ve $\alpha x+\beta\frac{k}{n}b_n$ arasında bir nokta olmak üzere

$$\begin{aligned}
f\left(\alpha x+\beta\frac{k}{n}b_n\right)-f(x) &= \left[(\alpha-1)x+\beta\frac{k}{n}b_n\right]f'(\xi)\\
&= \left[(\alpha-1)x+\beta\frac{k}{n}b_n\right]f'(x)\\
&\quad+\left[(\alpha-1)x+\beta\frac{k}{n}b_n\right]\left(f'(\xi)-f'(x)\right)
\end{aligned}$$

gerçeklenir. Bu eşitlikten

$$\begin{aligned}
B_n^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x) &= \sum_{k=0}^{n}\left[f\left(\alpha x+\beta\frac{k}{n}b_n\right)-f(x)\right]\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\\
&= f'(x)\sum_{k=0}^{n}\left[(\alpha-1)x+\beta\frac{k}{n}b_n\right]\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\\
&\quad+\sum_{k=0}^{n}\left[(\alpha-1)x+\beta\frac{k}{n}b_n\right]\left(f'(\xi)-f'(x)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\times\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\\
=\;& f'(x)\left[(\alpha-1)\,xB_n^{\alpha,\beta}(1;x)+\beta B_n^{\alpha,\beta}(t;x)\right]\\
&+\sum_{k=0}^{n}\left[(\alpha-1)\,x+\beta\frac{k}{n}b_n\right]\Big(f'(\xi)-f'(x)\Big)\\
&\times\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.2.3) ve (3.2.4) den ilk terim sıfırdır. Ayrıca

$$|\xi-x|\le\left|(\alpha-1)\,x+\beta\frac{k}{n}b_n\right|$$

olup, Teorem 3.2.2 de olduğu gibi aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$\begin{aligned}
\left|B_n^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right| \;\le\;& \omega_1(\delta_n)\left[\sum_{k=0}^{n}\left|(\alpha-1)\,x+\beta\frac{k}{n}b_n\right|\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\right.\\
&\left.+\frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n}\left[(\alpha-1)\,x+\beta\frac{k}{n}b_n\right]^2\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\right]\\
&+C_6\frac{b_n}{n} \qquad (3.2.12)
\end{aligned}$$

İkinci toplam ifadesi (3.2.9) eşitliğinden,

$$\frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n}\left[(\alpha-1)\,x+\beta\frac{k}{n}b_n\right]^2\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}=\frac{1}{\delta_n}\frac{\beta^2x\,(b_n-x)}{n}$$

olduğu görülür.

Ayrıca $x\in[0,A\,]$ için

$$\frac{1}{\delta_n}\frac{\beta^2x\,(b_n-x)}{n}\le\frac{1}{\delta_n}\frac{\beta^2b_nA}{n}$$

gerçeklenir.

İlk terim ise Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky eşitsizliğinden

$$\sum_{k=0}^{n}\left|(\alpha-1)x+\beta\frac{k}{n}b_n\right|\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\sum_{k=0}^{n}\left[(\alpha-1)x+\beta\frac{k}{n}b_n\right]^2\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \frac{\beta\sqrt{x(b_n-x)}}{\sqrt{n}}\leq\frac{\beta\sqrt{Ab_n}}{\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bulduğumuz bu iki eşitsizliği (3.2.12) de yerine yazarsak

$$\left|B_n^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right|\leq\omega_1(\delta_n)\left(\frac{\beta\sqrt{Ab_n}}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\delta_n}\frac{\beta^2 b_n A}{n}\right)+C_6\frac{b_n}{n}$$

elde edilir. $\delta_n=\sqrt{\frac{b_n}{n}}$ alırsak

$$\begin{aligned}
\left|B_n^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right| &\leq \omega_1\left(\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)\left(\frac{\beta\sqrt{Ab_n}}{\sqrt{n}}+\sqrt{\frac{n}{b_n}}\frac{\beta^2 b_n A}{n}\right)+C_6\frac{b_n}{n}\\
&= \omega_1\left(\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)\left(\beta\sqrt{A}\sqrt{\frac{b_n}{n}}+\beta^2 A\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)+C_6\frac{b_n}{n}\\
&= \omega_1\left(\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)\left(\beta\sqrt{A}+\beta^2 A\right)\sqrt{\frac{b_n}{n}}+C_6\frac{b_n}{n}
\end{aligned}$$

olur. Yeterince büyük n ler için

$$\frac{b_n}{n}\leq\sqrt{\frac{b_n}{n}}\leq\omega_1\left(\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\left|B_n^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right| &\leq \omega_1\left(\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)\left(\beta\sqrt{A}+\beta^2 A\right)\sqrt{\frac{b_n}{n}}+C_6\sqrt{\frac{b_n}{n}}\omega_1\left(\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)\\
&= M\sqrt{\frac{b_n}{n}}\omega_1\left(\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

3.3 Szász Operatörleri ve Yaklaşım Özellikleri

Bernstein polinomlarının sınırsız bir aralık üzerinde genelleştirilmesi olan Szász operatörleri, 1950 yılında Otto Szász tarafından

$$S_n(f;x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!} \tag{3.3.1}$$

şeklinde tanımlanmıştır (Szász 1950).

$S_n(f;x)$ lineer pozitif operatördür.

Gerçekten; $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ ve $\forall f_1, f_2 \in C[0,A]$ için

$$\begin{aligned} S_n(a_1 f_1 + a_2 f_2; x) &= e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} (a_1 f_1 + a_2 f_2)\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!} \\ &= e^{-nx} a_1 \sum_{k=0}^{\infty} f_1\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!} + e^{-nx} a_2 \sum_{k=0}^{\infty} f_2\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!} \\ &= a_1 S_n(f_1;x) + a_2 S_n(f_2;x) \end{aligned}$$

olduğundan $S_n(f;x)$ lineerdir.

$k \in \mathbb{N}$ ve $x \in [0,A]$ için $e^{-nx}\dfrac{(nx)^k}{k!} \geq 0$ olduğundan $f \geq 0$ için $S_n(f;x) \geq 0$ olur. Bundan dolayı $S_n(f;x)$ pozitiftir.

Teorem 3.3.1 (3.3.1) ile tanımlanan Szász operatörleri $A \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $[0,A]$ kapalı aralığında sürekli ve tüm pozitif yarı eksende sınırlı olan f fonksiyonuna $[0,A]$ aralığında düzgün yakınsar. Yani $f \in C[0,A]$ ise

$$S_n(f;x) \rightrightarrows f(x), \; x \in [0,A]$$

gerçeklenir.

İspat: $S_n(f;x)$ lineer pozitif operatör olduğundan Korovkin teoreminin koşullarını göstermek yeterlidir.

$$\begin{aligned} S_n(1;x) &= e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!} \\ &= e^{-nx}e^{nx} \\ &= 1 \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

$$\begin{aligned} S_n(t;x) &= e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{n}\frac{(nx)^k}{k!} \\ &= e^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n^{k-1}x^{k-1}x}{(k-1)!} \\ &= xe^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!} \\ &= xe^{-nx}e^{nx} \\ &= x \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

$$\begin{aligned} S_n\left(t^2;x\right) &= e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2}{n^2}\frac{(nx)^k}{k!} \\ &= e^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{n}\frac{n^{k-1}x^{k-1}x}{(k-1)!} \\ &= xe^{-nx}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k-1}{n}\frac{(nx)^{k-1}}{(k-1)!}+\frac{x}{n}e^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(nx)^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= x^2e^{-nx}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(nx)^{k-2}}{(k-2)!}+\frac{x}{n}e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!} \\ &= x^2e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}+\frac{x}{n} \\ &= x^2+\frac{x}{n} \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

olur. Sonuç olarak

$$S_n(1;x)=1$$

$$S_n(t;x)=x$$

$$S_n\left(t^2;x\right)=x^2+\frac{x}{n}$$

eşitliklerinden

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n(1;x)-1\|_{C[0,A]} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n(t;x)-x\|_{C[0,A]} = 0$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left\|S_n\left(t^2;x\right)-x^2\right\|_{C[0,A]} &= \lim_{n\to\infty} \max_{0\le x\le A} \left\|x^2+\frac{x}{n}-x^2\right\|_{C[0,A]} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{A}{n} \\
&= 0
\end{aligned}$$

sağlanır. Dolayısıyla Korovkin teoremi gereğince $\forall f \in C[0,A]$ için

$$S_n(f;x) \rightrightarrows f(x), \; x \in [0,A]$$

gerçeklenir.

Şimdi Szász operatörlerinin yaklaşım hızını süreklilik modülü yardımıyla hesaplayalım.

Teorem 3.3.2 Eğer $f \in C[0,A]$ ise

$$\|S_n(f;x)-f(x)\|_{C[0,A]} \le \left(1+\sqrt{A}\right)\omega\left(f;\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat: (3.3.2) eşitliği ve Szász operatörlerinin lineerliğinden

$$\begin{aligned}
|S_n(f;x)-f(x)| &= \left|e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!} - f(x)\,e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}\right| \\
&= \left|e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)\frac{(nx)^k}{k!}\right| \\
&\le e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\frac{(nx)^k}{k!}
\end{aligned}$$

elde edilir. Süreklilik modülünün (vii) özelliğinde $t = \dfrac{k}{n}$ seçimiyle;

$$\left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \leq \left(\frac{\left|\frac{k}{n} - x\right|}{\delta_n} + 1 \right) \omega(f; \delta_n)$$

yazılabilir. Bunu yukarıdaki eşitsizlikte yerine yazarsak

$$\begin{aligned} |S_n(f;x) - f(x)| &\leq e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\left|\frac{k}{n} - x\right|}{\delta_n} + 1 \right) \omega(f;\delta_n) \frac{(nx)^k}{k!} \\ &= \omega(f;\delta_n) \left[e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} + \frac{e^{-nx}}{\delta_n} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{k}{n} - x \right| \frac{(nx)^k}{k!} \right] \end{aligned}$$

bulunur. Toplamın ikinci kısmına Cauchy-Schwarz eşitsizliğini uygulayıp ayrıca (3.3.2) eşitliğini kullanacak olursak

$$|S_n(f;x) - f(x)| \leq \omega(f;\delta_n) \left[1 + \frac{1}{\delta_n} \left(e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 \frac{(nx)^k}{k!} \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

elde ederiz. Tekrar (3.3.2) eşitliğini uygulayalım. Bu durumda

$$|S_n(f;x) - f(x)| \leq \omega(f;\delta_n) \left[1 + \frac{1}{\delta_n} \left(e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 \frac{(nx)^k}{k!} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \qquad (3.3.5)$$

olur. $e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 \frac{(nx)^k}{k!} = S_n\left((t-x)^2; x\right)$ dir. S_n lineer olduğundan

$$\begin{aligned} S_n\left((t-x)^2; x\right) &= S_n\left(t^2; x\right) - 2x S_n(t;x) + x^2 S_n(1;x) \\ &= x^2 + \frac{x}{n} - 2x^2 + x^2 \\ &= \frac{x}{n} \end{aligned}$$

olup bunu (3.3.5) de yerine yazarsak

$$|S_n(f;x) - f(x)| \leq \omega(f;\delta_n) \left[1 + \frac{1}{\delta_n} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{n}} \right]$$

elde ederiz. $\forall x\in[0,A]$ için

$$\sqrt{x}\leq\max_{0\leq x\leq A}\sqrt{x}=\sqrt{A}$$

olduğundan ifademiz

$$|S_n(f;x)-f(x)|\leq\omega(f;\delta_n)\left[1+\frac{1}{\delta_n}\frac{\sqrt{A}}{n^{\frac{1}{2}}}\right]$$

şeklini alır. $\delta_n=n^{-\frac{1}{2}}$ seçilirse

$$|S_n(f;x)-f(x)|\leq\left(1+\sqrt{A}\right)\omega\left(f;\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizlik bize, $x\in[0,A]$ olmak üzere $S_n(f;x)$' in f fonksiyonuna yaklaşım hızının, $n^{-\frac{1}{2}}$ nin sıfıra yaklaşım hızından daha küçük olduğunu gösterir.

Şimdi de Szász operatörlerinin yaklaşım hızını Peetre-K fonksiyoneli yardımıyla hesaplayalım.

Teorem 3.3.3 Eğer $f\in C^2[0,A]$ ise

$$\|S_n(f;x)-f(x)\|_{C^2[0,A]}\leq 2K\left(f;\frac{A}{4n}\right)$$

gerçeklenir. Burada $K\left(f;\frac{A}{4n}\right)$ Peetre-K fonksiyonelidir.

İspat: (2.3.3) eşitliği ile verilen integral bağıntısının kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}S_n(g(t)-g(x);x) &= S_n\left(g'(x)(t-x)+\int_x^t g''(s)(t-s)\,ds;x\right)\\ &= S_n\left(g'(x)(t-x);x\right)+S_n\left(\int_x^t g''(s)(t-s)\,ds;x\right)\end{aligned}$$

olur. Son eşitsizliğin her iki yanının mutlak değerini alır ve üçgen eşitsizliğini kullanırsak

$$|S_n(g(t)-g(x);x)| \leq \left|S_n\left(g^{'}(x)(t-x);x\right)\right| + \left|S_n\left(\int\limits_x^t g^{''}(s)(t-s)\,ds;x\right)\right|$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} |S_n(g(t)-g(x);x)| &\leq \|g'\|_{C[0,A]}\,|S_n((t-x);x)| \\ &\quad + \left\|g^{''}\right\|_{C[0,A]}\left|S_n\left(\int\limits_x^t (t-s)\,ds;x\right)\right| \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

bulunur. Öte yandan

$$\int\limits_x^t (t-s)\,ds = -\frac{(t-s)^2}{2}\Big|_x^t = \frac{(t-x)^2}{2}$$

olup bu ifade (3.3.6) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} |S_n(g(t)-g(x);x)| &\leq \|g'\|_{C[0,A]}\,|S_n((t-x);x)| + \\ &\quad \frac{1}{2}\left\|g^{''}\right\|_{C[0,A]}\left|S_n\left((t-x)^2;x\right)\right| \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

olur. (3.3.2), (3.3.3) ve (3.3.4) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} S_n((t-x);x) &= S_n(t;x) - xS_n(1;x) \\ &= x-x \\ &= 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} S_n\left((t-x)^2;x\right) &= S_n\left(t^2;x\right) - 2xS_n(t;x) + x^2S_n(1;x) \\ &= x^2+\frac{x}{n}-2x^2+x^2 \\ &= \frac{x}{n} \end{aligned}$$

bulunur. Bu sonuçlar (3.3.7) de kullanılırsa

$$|S_n(g(t)-g(x);x)| \leq \frac{1}{2}\frac{x}{n}\left\|g''\right\|_{C[0,A]}$$

elde edilir.

$$\|g\|_{C^2[0,A]} = \|g\|_{C[0,A]} + \|g'\|_{C[0,A]} + \left\|g''\right\|_{C[0,A]}$$

olduğundan

$$|S_n(g(t)-g(x);x)| \leq \frac{1}{2}\frac{x}{n}\|g\|_{C^2[0,A]} \tag{3.3.8}$$

yazılabilir. Diğer taraftan;

$$|S_n(f;x)-f(x)| = |S_n(f;x)-f(x)+S_n(g;x)-S_n(g;x)+g(x)-g(x)|$$

şeklinde yazılabilir.

$$|S_n(f;x)-f(x)| = |(S_n(f;x)-S_n(g;x))+(-f(x)+g(x))+(S_n(g;x)-g(x))|$$

diyebiliriz. Üçgen eşitsizliğinin uygulanmasıyla

$$|S_n(f;x)-f(x)| \leq |S_n((f-g);x)| + |f(x)-g(x)| + |S_n(g;x)-g(x)|$$

olacaktır. S_n lineer operatör olduğundan

$$|S_n(f;x)-f(x)| \leq \|f-g\|_{C[0,A]}|S_n(1;x)| + \|f-g\|_{C[0,A]} + |S_n(g;x)-g(x)|$$

olur. Bu eşitsizlikte (3.3.2) ve (3.3.8) in kullanılmasıyla

$$|S_n(f;x)-f(x)| \leq 2\|f-g\|_{C[0,A]} + \frac{x}{2n}\|g\|_{C^2[0,A]}$$

elde edilir. O halde,

$$\|S_n(f;x)-f(x)\|_{C[0,A]} \leq 2\|f-g\|_{C[0,A]} + \frac{A}{2n}\|g\|_{C^2[0,A]}$$

bulunur. Her iki tarafın $g \in C^2[0,A]$ üzerinden infimumu alınırsa sol taraf g den bağımsız olduğundan

$$\|S_n(f;x) - f(x)\|_{C^2[0,A]} \leq 2K\left(f; \frac{A}{4n}\right)$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Şimdi Lipschitz sınıfındaki fonksiyonlar için Szász operatörlerinin f fonksiyonlarına yaklaşım hızını hesaplayalım.

Teorem 3.3.4 $f \in Lip_M(\alpha)$, $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere;

$$\|S_n(f;x) - f(x)\|_{C[0,A]} = O\left(\left(\frac{A}{n}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

gerçeklenir.

İspat: (3.3.2) eşitliği ve Szász operatörlerinin lineerliğinden,

$$\begin{aligned} |S_n(f;x) - f(x)| &= \left| e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!} - f(x) e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} \right| \\ &= \left| e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \frac{(nx)^k}{k!} \right| \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca $e^{-nx} \geq 0$ ve $\dfrac{(nx)^k}{k!} \geq 0$ olduğu ve üçgen eşitsizliği dikkate alındığında,

$$|S_n(f;x) - f(x)| \leq e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \frac{(nx)^k}{k!} \tag{3.3.9}$$

olur. Diğer taraftan (2.3.2) de $t = \dfrac{k}{n}$ seçimiyle

$$\left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \leq M \left| \frac{k}{n} - x \right|^{\alpha}$$

yazabiliriz. Bu eşitsizliği (3.3.9) da kullanacak olursak

$$\left|S_n(f;x) - f(x)\right| \leq M \sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{k}{n} - x\right|^{\alpha} \frac{(nx)^k}{k!} e^{-nx} \tag{3.3.10}$$

elde ederiz. Ayrıca $\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{2-\alpha}{2} = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{k}{n} - x\right|^{\alpha} \frac{(nx)^k}{k!} e^{-nx} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{k}{n} - x\right|^{\alpha} \left(\frac{(nx)^k}{k!} e^{-nx}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{(nx)^k}{k!} e^{-nx}\right)^{\frac{2-\alpha}{2}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \frac{(nx)^k}{k!} e^{-nx}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{(nx)^k}{k!} e^{-nx}\right)^{\frac{2-\alpha}{2}} \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitlik (3.3.10) da kullanılırsa

$$\left|S_n(f;x) - f(x)\right| \leq M \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \frac{(nx)^k}{k!} e^{-nx}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{(nx)^k}{k!} e^{-nx}\right)^{\frac{2-\alpha}{2}}$$

bulunur. $p = \dfrac{2}{\alpha}$ ve $q = \dfrac{2}{2-\alpha}$ için $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ olur. Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \left|S_n(f;x) - f(x)\right| &\leq M \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \frac{(nx)^k}{k!} e^{-nx}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} e^{-nx}\right)^{\frac{2-\alpha}{2}} \\ &= M \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \frac{(nx)^k}{k!} e^{-nx}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \left(S_n(1;x)\right)^{\frac{2-\alpha}{2}} \end{aligned}$$

bulunur. (3.3.2) ve $e^{-nx} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \frac{(nx)^k}{k!} = S_n\left((t-x)^2; x\right)$ eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \left|S_n(f;x) - f(x)\right| &\leq M S_n\left((t-x)^2; x\right)^{\frac{\alpha}{2}} \\ &= M(S_n\left(t^2; x\right) - 2x S_n(t;x) + x^2 S_n(1;x))^{\frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla (3.3.2), (3.3.3) ve (3.3.4) den

$$
\begin{aligned}
\left|S_n(f;x)-f(x)\right| &\leq M\left(x^2+\frac{x}{n}-2x^2+x^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} \\
&= M\left(\frac{x}{n}\right)^{\frac{\alpha}{2}}
\end{aligned}
$$

elde edilir. $x\in[0,A]$ olduğundan $\max\limits_{0\leq x\leq A} x=A$ olduğu açıktır. O halde

$$
\left\|S_n(f;x)-f(x)\right\|_{C[0,A]}\leq M\left(\frac{A}{n}\right)^{\frac{\alpha}{2}}
$$

olur. Yani,

$$
\left\|S_n(f;x)-f(x)\right\|_{C[0,A]}=O\left(\left(\frac{A}{n}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right)
$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

3.4 Baskakov Operatörü ve Yaklaşım Özellikleri

1957 yılında V. A. Baskakov, bir diskte analitik fonksiyonun Taylor açılımından yararlanarak $x\in[0,\infty)$ ve $f\in C\,[0,\infty)$, olmak üzere

$$
K_n(f;x)=\sum_{k=0}^{\infty}f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} \tag{3.4.1}
$$

biçiminde $K_n(f;x)$ operatörünü tanımlamıştır (Baskakov 1957).

Baskakov operatörü lineer pozitif operatördür.

Gerçekten; $\forall a_1,a_2\in\mathbb{R}$ ve $\forall f_1,f_2\in C[0,\infty)$ için

$$
K_n(a_1f_1+a_2f_2;x)=\sum_{k=0}^{\infty}(a_1f_1+a_2f_2)\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}
$$

$$\begin{aligned}
&= a_1 \sum_{k=0}^{\infty} f_1\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} \\
&\quad +a_2 \sum_{k=0}^{\infty} f_2\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} \\
&= a_1 K_n\left(f_1;x\right)+a_2 K_n\left(f_2;x\right)
\end{aligned}$$

olduğundan K_n lineerdir.

$x \in [0,\infty]$ olduğundan $\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} \geq 0$ olur. Dolayısıyla $f \geq 0$ için $K_n\left(f;x\right) \geq 0$ olduğundan K_n lineer pozitif operatördür.

Teorem 3.4.1 $A \in \mathbb{R}^+$, $x \in [0,A]$ ve $f \in C[0,\infty)$ olmak üzere (3.4.1) ile tanımlanan Baskakov operatörü için

$$K_n\left(f;x\right) \rightrightarrows f\left(x\right),\ 0 \leq x \leq A$$

gerçeklenir.

İspat: $f\left(t\right)=\left(1+x-xt\right)^{-n}$ fonksiyonunun $t=0$ noktasında ürettiği Taylor serisi;

$$f\left(t\right)=\left(1+x-xt\right)^{-n} \Longrightarrow f\left(0\right)=\left(1+x\right)^{-n}$$

$$f^{'}\left(t\right)=nx\left(1+x-xt\right)^{-n-1} \Longrightarrow f^{'}\left(0\right)=nx(1+x)^{-n-1}$$

$$f^{''}\left(t\right)=n\left(n+1\right)x^2\left(1+x-xt\right)^{-n-2} \Longrightarrow f^{''}\left(0\right)=n\left(n+1\right)x^2(1+x)^{-n-2}$$

ve böylece devam edilirse,

$$f^{(k)}\left(t\right)=n\left(n+1\right)...\left(n+k-1\right)x^k\left(1+x-xt\right)^{-n-k}$$

olup

$$f^{(k)}\left(0\right)=n\left(n+1\right)...\left(n+k-1\right)x^k(1+x)^{-n-k}$$

olacaktır. O halde

$$\begin{aligned}
(1+x-xt)^{-n} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{k!} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} t^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} t^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} t^k
\end{aligned}$$

bulunur. $t = 1$ seçersek;

$$(1+x-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} \tag{3.4.2}$$

elde ederiz.

Şimdi (3.4.2) eşitliğinden faydalanarak Korovkin teoreminin koşullarını araştıralım.

$$\begin{aligned}
K_n(1;x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} \\
&= (1+x-x)^{-n} \\
&= 1 \qquad (3.4.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_n(t;x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n} \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!} x^k (1+x)^{-(n+k)} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!} x^k (1+x)^{-(n+k)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!k!} x^{k+1} (1+x)^{-(n+k+1)} \\
&= x \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k (1+x)^{-(n+k+1)} \\
&= x(1+x-x)^{-(n+1)} \\
&= x \qquad (3.4.4)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
K_n\left(t^2;x\right) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2}{n^2}\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}x^k(1+x)^{-(n+k)} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{n}\frac{(n+k-1)!}{n!\,(k-1)!}x^k(1+x)^{-(n+k)} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k-1}{n}\frac{(n+k-1)!}{n!\,(k-1)!}x^k(1+x)^{-(n+k)} \\
&\quad+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{(n+k-1)!}{n!\,(k-1)!}x^k(1+x)^{-(n+k)} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(n+k-1)!}{n!\,(k-2)!}x^k(1+x)^{-(n+k)} \\
&\quad+\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k)!}{n!k!}x^{k+1}(1+x)^{-(n+k+1)} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k+1)!}{n!k!}x^{k+2}(1+x)^{-(n+k+2)}+\frac{x}{n}(1+x-x)^{-(n+1)} \\
&= \frac{n+1}{n}x^2\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k+1}{k}x^k(1+x)^{-(n+k+2)}+\frac{x}{n} \\
&= \frac{n+1}{n}x^2(1+x-x)^{-(n+2)}+\frac{x}{n} \\
&= \frac{n+1}{n}x^2+\frac{x}{n} \\
&= x^2+\frac{x^2+x}{n} \qquad (3.4.5)
\end{aligned}
$$

olur. Sonuç olarak

$$K_n(1;x)=1$$

$$K_n(t;x)=x$$

$$K_n\left(t^2;x\right)=x^2+\frac{x^2+x}{n}$$

eşitliklerinden

$$\lim_{n\to\infty}\|K_n(1;x)-1\|_{C[0,A]}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\|K_n(t;x)-x\|_{C[0,A]}=0$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left\|K_n\left(t^2;x\right)-x^2\right\|_{C[0,A]} &= \lim_{n\to\infty}\max_{0\le x\le A}\left\|x^2+\frac{x^2+x}{n}-x^2\right\|_{C[0,A]} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{A^2+A}{n} \\
&= 0
\end{aligned}$$

sağlanır. Dolayısıyla Korovkin teoremi gereğince $\forall f\in C[0,\infty)$ için

$$K_n\left(f;x\right)\rightrightarrows f\left(x\right),\ 0\le x\le A$$

gerçeklenir.

Baskakov Operatörü için yaklaşım hızını veren bir teorem verelim.

Teorem 3.4.2 $K_n\left(f;x\right)$, (3.4.1) de olduğu gibi tanımlanmış olsun. $x\in[0,A]$ için $f\in C\left[0,A\right]$ ise

$$\left|K_n\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right|\le\left(1+\sqrt{A^2+A}\right)\omega\left(f;\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat: $f\in C\left[0,A\right]$ olmak üzere $K_n\left(f;x\right)$ operatörünün lineerliğinden,

$$\left|K_n\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right|=\left|\sum_{k=0}^{\infty}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(x\right)\right]\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{\left(1+x\right)^{n+k}}\right|$$

olur. Burada $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{\left(1+x\right)^{n+k}}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}P_{k,n}\left(x\right)=1$ ifadesinden ve üçgen eşitsizliğinden,

$$\left|K_n\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right|\le\sum_{k=0}^{\infty}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(x\right)\right|P_{k,n}\left(x\right)$$

elde edilir. Süreklilik modülünün (vii) özelliğinde $t=\dfrac{k}{n}$ seçimiyle;

$$
\begin{aligned}
|K_n(f;x)-f(x)| &\leq \sum_{k=0}^{\infty}\left(1+\frac{\left|\frac{k}{n}-x\right|}{\delta_n}\right)\omega(f;\delta_n)P_{k,n}(x)\\
&= \omega(f;\delta_n)\left[\sum_{k=0}^{\infty}P_{k,n}(x)+\frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{k}{n}-x\right|P_{k,n}(x)\right]
\end{aligned}
$$

bulunur. Toplamın ikinci kısmına Cauchy-Schwarz eşitsizliğini uygulayıp ayrıca $\sum\limits_{k=0}^{\infty}P_{k,n}(x)=1$ eşitliğini kullanacak olursak,

$$
|K_n(f;x)-f(x)|\leq\omega(f;\delta_n)\left[1+\frac{1}{\delta_n}\left(\sum_{k=0}^{\infty}P_{k,n}(x)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k}{n}-x\right)^{2}P_{k,n}(x)\right)^{\frac{1}{2}}\right]
$$

elde ederiz. Tekrar $\sum\limits_{k=0}^{\infty}P_{k,n}(x)=1$ eşitliğini uygulayalım. Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
&\leq \omega(f;\delta_n)\left[1+\frac{1}{\delta_n}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k}{n}-x\right)^{2}P_{k,n}(x)\right)^{\frac{1}{2}}\right]\\
&= \omega(f;\delta_n)\left[1+\frac{1}{\delta_n}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2}{n^2}P_{k,n}(x)-2x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{n}P_{k,n}(x)+x^2\sum_{k=0}^{\infty}P_{k,n}(x)\right)^{\frac{1}{2}}\right]\\
&= \omega(f;\delta_n)\left[1+\frac{1}{\delta_n}\left(K_n\left(t^2;x\right)-2xK_n(t;x)+x^2K_n(1;x)\right)^{\frac{1}{2}}\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte (3.4.3), (3.4.4) ve (3.4.5) ifadelerinin kullanılmasıyla

$$
\begin{aligned}
|K_n(f;x)-f(x)| &\leq \omega(f;\delta_n)\left[1+\frac{1}{\delta_n}\frac{\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{n}}\right]\\
&\leq \omega(f;\delta_n)\left[1+\frac{1}{\delta_n}\frac{\sqrt{A^2+A}}{\sqrt{n}}\right],\ x\in[0,A]
\end{aligned}
$$

olur. $\delta_n=n^{-\frac{1}{2}}$ seçelim. Böylece

$$
|K_n(f;x)-f(x)|\leq\left(1+\sqrt{A^2+A}\right)\omega\left(f;\frac{1}{\sqrt{n}}\right)
$$

elde ederiz.

Şimdi Baskakov operatörünün yaklaşım hızını Peetre-K fonksiyoneli yardımıyla hesaplayalım.

Teorem 3.4.3 Eğer $f \in C^2[0,A]$ ise

$$\left\| K_n(f;x) - f(x) \right\|_{C^2[0,A]} \leq 2K\left(f; \frac{A^2+A}{4n}\right)$$

gerçeklenir. Burada $K\left(f; \dfrac{A^2+A}{4n}\right)$ Peetre-K fonksiyonelidir.

İspat: (2.3.3) ile verilen integral bağıntısının uygulanmasıyla;

$$\begin{aligned} K_n(g(t) - g(x); x) &= K_n\left(g'(x)(t-x) + \int_x^t g''(s)(t-s)\,ds; x\right) \\ &= K_n\left(g'(x)(t-x); x\right) + K_n\left(\int_x^t g''(s)(t-s)\,ds; x\right) \end{aligned}$$

olur. Son eşitsizliğin her iki yanının mutlak değerini alır ve üçgen eşitsizliğini kullanırsak

$$|K_n(g(t) - g(x); x)| \leq \left|K_n\left(g'(x)(t-x); x\right)\right| + \left|K_n\left(\int_x^t g''(s)(t-s)\,ds; x\right)\right|$$

ve dolayısıyla da,

$$\begin{aligned} |K_n(g(t) - g(x); x)| &\leq \|g'\|_{C[0,A]} |K_n((t-x); x)| \\ &\quad + \left\|g''\right\|_{C[0,A]} \left|K_n\left(\int_x^t (t-s)\,ds; x\right)\right| \end{aligned} \qquad (3.4.6)$$

bulunur. Öte yandan

$$\int_x^t (t-s)\,ds = -\frac{(t-s)^2}{2}\Big|_x^t = \frac{(t-x)^2}{2}$$

olup bu ifade (3.4.6) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} |K_n(g(t)-g(x);x)| &\leq \|g'\|_{C[0,A]} |K_n((t-x);x)| \\ &\quad + \frac{1}{2}\left\|g''\right\|_{C[0,A]} \left|K_n\left((t-x)^2;x\right)\right| \end{aligned} \tag{3.4.7}$$

olur. (3.4.3), (3.4.4) ve (3.4.5) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned} K_n((t-x);x) &= K_n(t;x) - xK_n(1;x) \\ &= x - x \\ &= 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} K_n\left((t-x)^2;x\right) &= K_n\left(t^2;x\right) - 2xK_n(t;x) + x^2 K_n(1;x) \\ &= x^2 + \frac{x^2+x}{n} - 2x^2 + x^2 \\ &= \frac{x^2+x}{n} \end{aligned}$$

bulunur. Bu sonuçlar (3.4.7) de yerine yazılırsa

$$|K_n(g(t)-g(x);x)| \leq \frac{1}{2}\frac{x^2+x}{n}\left\|g''\right\|_{C[0,A]}$$

elde edilir.

$$\|g\|_{C^2[0,A]} = \|g\|_{C[0,A]} + \|g'\|_{C[0,A]} + \left\|g''\right\|_{C[0,A]}$$

olduğundan

$$|K_n(g(t)-g(x);x)| \leq \frac{1}{2}\frac{x^2+x}{n}\|g\|_{C^2[0,A]} \tag{3.4.8}$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} |K_n(f;x) - f(x)| &= |K_n(f;x) - f(x) + K_n(g;x) - K_n(g;x) + g(x) - g(x)| \\ &= |(K_n(f;x) - K_n(g;x)) + (-f(x) + g(x)) \\ &\quad + (K_n(g;x) - g(x))| \end{aligned}$$

diyebiliriz. Üçgen eşitsizliğinin uygulanmasıyla

$$|K_n(f;x) - f(x)| \leq |K_n((f-g);x)| + |f(x) - g(x)| + |K_n(g;x) - g(x)|$$

olacaktır. K_n lineer operatör olduğundan

$$|K_n(f;x) - f(x)| \leq \|f-g\|_{C[0,A]} |K_n(1;x)| + \|f-g\|_{C[0,A]} + |K_n(g;x) - g(x)|$$

olur. Bu eşitsizlikte (3.4.3) ve (3.4.8) in kullanılmasıyla

$$|K_n(f;x) - f(x)| \leq 2\|f-g\|_{C[0,A]} + \frac{x^2+x}{2n}\|g\|_{C^2[0,A]}$$

elde edilir. O halde

$$\|K_n(f;x) - f(x)\|_{C[0,A]} \leq 2\|f-g\|_{C[0,A]} + \frac{A^2+A}{2n}\|g\|_{C^2[0,A]}$$

bulunur. Her iki tarafın $g \in C^2[0,A]$ üzerinden infimumu alınırsa sol taraf g den bağımsız olduğundan

$$\|K_n(f;x) - f(x)\|_{C^2[0,A]} \leq 2K\left(f; \frac{A^2+A}{4n}\right)$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.4.4 $f \in Lip_M(\alpha)$, $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere;

$$\|K_n(f;x) - f(x)\|_{C[0,A]} = O\left(\left(\frac{A^2+A}{n}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

gerçeklenir.

İspat: $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\dfrac{x^k}{(1+x)^{n+k}} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}P_{k,n}(x) = 1$ ifadesinden ve operatörün lineerliğinden,

$$\begin{aligned}
\left|K_n(f;x)-f(x)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{\infty}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right]P_{k,n}(x)\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|P_{k,n}(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. (2.3.2) de $t=\dfrac{k}{n}$ seçimiyle

$$\left|K_n(f;x)-f(x)\right|\leq M\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{k}{n}-x\right|^{\alpha}P_{k,n}(x)$$

bulunur. $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ olacağından

$$\left|K_n(f;x)-f(x)\right|\leq M\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{k}{n}-x\right|^{\alpha}\left(P_{k,n}(x)\right)^{\frac{1}{p}}\left(P_{k,n}(x)\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. $p=\dfrac{2}{\alpha}$ ve $q=\dfrac{2}{2-\alpha}$ için Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\left|K_n(f;x)-f(x)\right| &\leq M\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{k}{n}-x\right|^{2}P_{k,n}(x)\right]^{\frac{\alpha}{2}}\left[\sum_{k=0}^{\infty}P_{k,n}(x)\right]^{\frac{2-\alpha}{2}} \\
&\leq M\left[K_n\left(t^2;x\right)-2xK_n(t;x)+x^2K_n(1;x)\right]^{\frac{\alpha}{2}}
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla (3.4.3), (3.4.4) ve (3.4.5) den,

$$\begin{aligned}
\left|K_n(f;x)-f(x)\right| &\leq M\left(x^2+\frac{x^2+x}{n}-2x^2+x^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} \\
&= M\left(\frac{x^2+x}{n}\right)^{\frac{\alpha}{2}}
\end{aligned}$$

elde edilir. $x\in[0,A]$ olduğundan $\max\limits_{0\leq x\leq A}\left(x^2+x\right)=A^2+A$ dır. O halde

$$\left\|K_n(f;x)-f(x)\right\|_{C[0,A]}\leq M\left(\frac{A^2+A}{n}\right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

olur. Yani,

$$\|K_n(f;x) - f(x)\|_{C[0,A]} = O\left(\left(\frac{A^2+A}{n}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

3.5 Genelleştirilmiş Baskakov Operatörü ve Yaklaşım Özellikleri

Bu kısımda Baskakov operatörünün bir genelleştirilmesi verilip bazı yaklaşım özellikleri incelenecektir.

$C^k[a,b]$, $(0 \leq k < \infty)$ ile reel eksenin $[a,b]$ $(b > a)$ aralığı üzerinde tanımlı ve bu aralıkta k kere sürekli türevlenebilir tüm reel değerli fonksiyonların kümesini gösterelim. Bu aralık kapalı, yarı açık ve açık olarak düşünülebilir.

$C^k[a,\infty)$ $(0 \leq k, m < \infty)$ ile

$$f^{(k)}(x) = O(x^m), \quad (x \to \infty)$$

olmak üzere, tüm $f \in C^k[a,\infty)$ fonksiyonlarının kümesini gösterelim.

$$V_n : C^{0,0}[0,\infty) \to C^0[a,b]$$

olmak üzere

$$V_n(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)(-1)^k \frac{x^k}{k!}\varphi_n^{(k)}(x) \tag{3.5.1}$$

şeklinde tanımlı lineer pozitif operatörler dizisi genelleştirilmiş Baskakov operatörü olarak adlandırılır. Burada $\varphi_n : C \to C$ olup aşağıdaki koşulları sağlayan fonksiyonlar dizisidir.

i) φ_n $(n = 1, 2, ...)$, $B = \{z \in C : |z - b| \leq b\}$ diskini içeren bir D bölgesinde analitiktir.

ii) $\varphi_n(0) = 1,\ (n = 1, 2, ...)$

iii) $\forall n \in \mathbb{N},\ x \in [0, b]$ ve $k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$(-1)^k \varphi_n^{(k)}(x) \geq 0$$

olur. Yani $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ katlı monotondur.

iv) $\varphi_n^{(k)}(x) = -n\varphi_{n(m)}^{(k-1)}(x)(1 + \alpha_{k,n}(x)),\ x \in [0, b],\ (n, k = 1, 2, ...)$ olacak biçimde bir $m(n)$ pozitif tamsayısı vardır, burada $n \to \infty$ iken $\alpha_{k,n}(x),\ [0, b]$ aralığında sıfıra düzgün olarak yakınsar ve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{m(n)} = 1$$

gerçeklenir.

Teorem 3.5.1 Eğer $\{\varphi_n\}$ dizisi (i) ve (iv) koşullarını sağlıyorsa, o taktirde (3.5.1) ile tanımlanmış lineer pozitif operatörler dizisi $[0, b]$ aralığında sürekli ve tüm reel eksende

$$|f(x)| \leq M_f\left(1 + x^2\right)$$

eşitsizliğini sağlayan her bir f fonksiyonuna aynı aralıkta düzgün yakınsar. Yani, $n \to \infty$ iken

$$V_n(f; x) \rightrightarrows f(x);\ 0 \leq x \leq b$$

gerçeklenir.

İspat: φ_n bir analitik fonksiyon olduğundan,

$$\varphi_n(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(k)}(x)}{k!}(y - x)^k \tag{3.5.2}$$

şeklinde Taylor açılımına sahiptir. Dolayısıyla

$$\varphi_n'(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(k)}(x)}{k!}k(y - x)^{k-1} \tag{3.5.3}$$

ve

$$\varphi_n^{''}(y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi_n^{(k)}(x)}{k!}k(k-1)(y-x)^{k-2} \tag{3.5.4}$$

bulunur. (3.5.2), (3.5.3) ve (3.5.4) ifadelerinde $y=0$ alırsak,

$$\varphi_n(0)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k!}\varphi_n^{(k)}(x) \tag{3.5.5}$$

$$\varphi_n^{'}(0)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^{k-1}}{k!}k\varphi_n^{(k)}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-x)^{k-1}}{(k-1)!}\varphi_n^{(k)}(x) \tag{3.5.6}$$

$$\varphi_n^{''}(0)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^{k-2}}{k!}k(k-1)\varphi_n^{(k)}(x)=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-x)^{k-2}}{(k-2)!}\varphi_n^{(k)}(x) \tag{3.5.7}$$

eşitliklerini buluruz.

Şimdi bu eşitliklerden faydalanarak Korovkin teoreminin koşullarını araştıralım.

(ii) den $\varphi_n(0)=1$ olduğundan

$$\begin{aligned} V_n(f;x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k!}\varphi_n^{(k)}(x) \\ &= \varphi_n(0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$V_n(1;x)\rightrightarrows 1$$

olur.

$$\begin{aligned} V_n(t;x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{n}\frac{(-x)^k}{k!}\varphi_n^{(k)}(x) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-x)^k}{(k-1)!}\varphi_n^{(k)}(x) \\ &= -\frac{x}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k!}\varphi_n^{(k+1)}(x) \end{aligned}$$

(3.5.6) dan dolayı eşitliğin sağ tarafındaki toplam $\varphi_n^{'}(0)$ a eşittir. O halde

$$V_n(t;x) = -\frac{x}{n}\varphi_n^{'}(0) \tag{3.5.8}$$

bulunur. (iv) den dolayı $\varphi_n^{'}(0) = -n\varphi_{m(n)}(0)(1+\alpha_{1,n}(x))$ olup,

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_{1,n}(x) = 0$$

bulunur. Bu sonuçları (3.5.8) de kullanırsak,

$$\begin{aligned} V_n(t;x) &= -\frac{x}{n}\left[-n\varphi_{m(n)}(0)(1+\alpha_{1,n}(x))\right] \\ &= x\left(\frac{n}{n}\right)\varphi_{m(n)}(0)(1+\alpha_{1,n}(x)) \end{aligned}$$

$\varphi_{m(n)}(0) = 1$ ve $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n} = 1$ olup buradan

$$V_n(t;x) \rightrightarrows x$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} V_n(t^2;x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{(-x)^k}{k!}\varphi_n^{(k)}(x) \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k!}k^2\varphi_n^{(k)}(x) \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-x)^k}{(k-1)!}k\varphi_n^{(k)}(x) \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-x)^k}{(k-1)!}(k-1)\varphi_n^{(k)}(x) + \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-x)^k}{(k-1)!}\varphi_n^{(k)}(x) \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-x)^k}{(k-2)!}\varphi_n^{(k)}(x) + \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-x)^k}{(k-1)!}\varphi_n^{(k)}(x) \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^{k+2}}{k!}\varphi_n^{(k+2)}(x) + \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^{k+1}}{k!}\varphi_n^{(k+1)}(x) \\ &= \frac{x^2}{n^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k!}\varphi_n^{(k+2)}(x) - \frac{x}{n^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k!}\varphi_n^{(k+1)}(x) \end{aligned}$$

(3.5.6) ve (3.5.7) den dolayı eşitliğin sağ tarafındaki ilk toplam $\varphi_n^{''}(0)$ a, ikinci toplam $\varphi_n^{'}(0)$ a eşittir. Bunları yukarıda yazarsak,

$$V_n\left(t^2;x\right)=\frac{x^2}{n^2}\varphi_n^{''}(0)-\frac{x}{n^2}\varphi_n^{'}(0) \tag{3.5.9}$$

ifadesi elde edilir. (iv) den dolayı

$$\varphi_n^{'}(0)=-n\varphi_{m(n)}(0)\left(1+\alpha_{1,n}(x)\right)$$

ve $k(n)=m(m(n))$ olmak üzere,

$$\varphi_n^{''}(0)=-nm(n)\,\varphi_{k(n)}(0)\left(1+\alpha_{1,m(n)}(x)\right)\left(1+\alpha_{2,n}(x)\right)$$

olup,

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_{1,m(n)}(x)=0,\ \ \lim_{n\to\infty}\alpha_{2,n}(x)=0,\ \ \lim_{n\to\infty}\alpha_{1,n}(x)=0$$

dır. Bu sonuçları (3.5.9) da yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}V_n\left(t^2;x\right) &= \frac{x^2}{n^2}[nm(n)\,\varphi_{k(n)}(0)\left(1+\alpha_{1,m(n)}(x)\right)\left(1+\alpha_{2,n}(x)\right)]\\ &\quad -\frac{x}{n^2}\left[-n\varphi_{m(n)}(0)\left(1+\alpha_{1,n}(x)\right)\right]\end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$\lim_{n\to\infty}\frac{nm(n)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{m(n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{n}{m(n)}}=1,\ \ \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

olup, dolayısıyla

$$V_n\left(t^2;x\right)\rightrightarrows x^2$$

buluruz.

Böylece Korovkin teoreminin şartları sağlanır. Dolayısıyla $[0,b]$ aralığında sürekli ve tüm reel eksende ,

$$|f(x)|\leq M_f\left(1+x^2\right)$$

eşitsizliğini sağlayan her f fonksiyonu için $n \to \infty$ iken

$$V_n(f;x) \rightrightarrows f(x)\,;\ 0 \le x \le b$$

sağlanır.

3.6 Bleimann, Butzer ve Hahn Operatörleri ve Yaklaşım Özellikleri

1980 yılında, Bleimann, Butzer ve Hahn $[0,\infty)$ aralığında tanımlı reel değerli herhangi bir fonksiyon için

$$H_n(f;x) = \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n-k+1}\right)\binom{n}{k} x^k,\ \ x \in [0,\infty) \tag{3.6.1}$$

şeklinde lineer pozitif operatörler tanımlamışlar ve bazı yaklaşım özelliklerini incelemişlerdir (Bleimann, Butzer ve Hahn 1980).

Tanım 3.6.1 ($\boldsymbol{\omega_\alpha}$ Uzayı): Bu kısımda, $0 < \alpha \le 1$ olmak üzere;

$$|f(t) - f(x)| \le M \left|\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x}\right|^{\alpha}$$

şeklindeki Lipschitz sınıfı fonksiyonları kullanacağız ve bu fonksiyonların oluşturduğu uzayı ω_α ile göstereceğiz. Yani;

$$\omega_\alpha = \left\{ f : |f(t) - f(x)| \le M \left|\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x}\right|^{\alpha} \right\}$$

ile verilir (Gadjiev ve Çakar 1999).

Teorem 3.6.1 $x \in [0,b]$ için f fonksiyonu tüm reel eksende sınırlı ve $f \in \omega_\alpha$ olsun. Eğer (3.6.1) ile verilen lineer pozitif operatörler dizisi için,

$$H_n(1;x) \rightrightarrows 1 \tag{3.6.2}$$

$$H_n(t;x) \rightrightarrows \frac{x}{1+x} \tag{3.6.3}$$

$$H_n(t^2;x) \rightrightarrows \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 \tag{3.6.4}$$

koşulları sağlanıyorsa o taktirde,

$$\lim_{n\to\infty} \|H_n(f;x) - f(x)\|_{C[0,b]} = 0$$

gerçeklenir (Gadjiev ve Çakar 1999).

İspat: $f \in \omega_\alpha$ olsun. Bu durumda $\forall\epsilon > 0$ için $\exists\delta > 0$ vardır öyle ki

$$\left|\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x}\right| < \delta$$

olduğunda

$$|f(t) - f(x)| < \epsilon$$

kalır. Diğer taraftan

$$\left|\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x}\right| \geq \delta \text{ ise } \left|\frac{\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x}}{\delta}\right| \geq 1 \text{ olacağından,}$$

$$\frac{\left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x}\right)^2}{\delta^2} \geq 1 \tag{3.6.5}$$

sağlanır. Ayrıca f sınırlı olduğundan;

$$|f(t) - f(x)| \leq |f(t)| + |f(x)| \leq 2M_f \tag{3.6.6}$$

eşitsizliği vardır. Böylece (3.6.5) ve (3.6.6) dan

$$|f(t) - f(x)| < \frac{2M_f}{\delta^2}\left[\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x}\right]^2$$

olur. Bu durumda $\forall\ x \in [0,b]$ ve $t \in \mathbb{R}$ için

$$\left|f(t) - f(x)\right| < \epsilon + \frac{2M_f}{\delta^2}\left[\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x}\right]^2$$

eşitsizliği yazılabilir. O halde

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,b]} \left|H_n(f(t);x) - f(x)\right| = 0$$

olduğunu gösterirsek ispat tamamlanır.

$$\begin{aligned}
\left|H_n(f(t);x) - f(x)\right| &= \left|H_n(f(t);x) - H_n(f(x);x) + H_n(f(x);x) - f(x)\right| \\
&= \left|(H_n(f(t);x) - H_n(f(x);x)) + (H_n(f(x);x) - f(x))\right|
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Üçgen eşitsizliğinden ve H_n lineer olduğundan

$$\left|H_n(f(t);x) - f(x)\right| \leq \left|H_n(f(t) - f(x);x)\right| + \left|H_n(f(x);x) - f(x)\right|$$

ve ayrıca özellik 2.2.2 den,

$$\left|H_n(f(t);x) - f(x)\right| \leq H_n(\left|f(t) - f(x)\right|;x) + \left|f(x)\right|\left|H_n(1;x)\right|$$

bulunur.

f sınırlı olduğundan $\forall t \in [a,b]$ için $|f(t)| \leq M_f$ olur. Ayrıca (3.6.2) den $|H_n(1;x) - 1| \to 0$ gerçeklenir. O halde operatörün lineerliğinden ve monotonluğundan;

$$\begin{aligned}
H_n(\left|f(t) - f(x)\right|;x) &\leq H_n\left(\epsilon + \frac{2M_f}{\delta^2}\left[\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x}\right]^2;x\right) \\
&= \epsilon H_n(1;x) + \frac{2M_f}{\delta^2} H_n\left(\left(\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x}\right)^2;x\right)
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Diğer taraftan H_n lineer olduğundan

$$H_n\left(\left(\frac{t}{1+t}-\frac{x}{1+x}\right)^2;x\right) = H_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right)^2;x\right)-2\frac{x}{1+x}H_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right);x\right) + \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 H_n(1;x) \tag{3.6.8}$$

şeklinde yazılabilir.

(3.6.8) de $2\left(\frac{x}{1+x}\right)^2$ ekleyip çıkartalım H_n lineer pozitif operatör olduğundan ve üçgen eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} H_n\left(\left(\frac{t}{1+t}-\frac{x}{1+x}\right)^2;x\right) &= H_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right)^2;x\right)-\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 \\ &-2\frac{x}{1+x}\left(H_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right);x\right)-\left(\frac{x}{1+x}\right)\right) \\ &+\left(\frac{x}{1+x}\right)^2\left(H_n(1;x)-1\right) \end{aligned}$$

bulunur. O halde (3.6.2), (3.6.3) ve (3.6.4) den $n\to\infty$ için

$$H_n\left(\left|f(t)-f(x)\right|;x\right)\leq\epsilon$$

olur. Dolayısıyla buradan $n\to\infty$ için

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,b]}\left|H_n\left(f(t);x\right)-f(x)\right|=0$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.6.1 'i kullanarak Bleimann, Butzer ve Hahn operatör dizisinin yakınsaklığını elde edebiliriz

Teorem 3.6.2 $x\in[0,b]$ için f fonksiyonu tüm reel eksende sınırlı ve $f\in\omega_\alpha$ olsun.

Bu durumda (3.6.1) ile tanımlanan H_n operatörü için

$$\lim_{n\to\infty} \left\| H_n(f) - f \right\|_{C[0,b]} = 0$$

gerçeklenir (Gadjiev ve Çakar 1999).

İspat: Teorem 3.6.1 'in koşullarının sağlandığını göstermek yeterli olacaktır.

$(1+x)^n$ in Binom açılımından

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \tag{3.6.9}$$

bulunur. Böylece (3.6.9) dan

$$\begin{aligned} H_n(1;x) &= \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \\ &= \frac{1}{(1+x)^n} (1+x)^n \\ &= 1 \end{aligned} \tag{3.6.10}$$

olur, dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty} \left\| H_n(1;x) - 1 \right\|_{C[0,b]} = 0$$

gerçeklenir.

$$\begin{aligned} H_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right);x\right) &= \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{\frac{k}{n-k+1}}{1+\frac{k}{n-k+1}} \binom{n}{k} x^k \\ &= \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n+1} \frac{n!}{(n-k)!k!} x^k \\ &= \frac{n}{n+1} \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} x^k \\ &= \frac{n}{n+1} \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!} x^{k+1} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{1+x}\right)\frac{1}{(1+x)^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k \\
&= \frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{1+x}\right)\frac{1}{(1+x)^{n-1}}(1+x)^{n-1} \\
&= \frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{1+x}\right) \qquad (3.6.11)
\end{aligned}
$$

bulunur. $\forall x \in [0,b]$ için

$$
\frac{x}{1+x} < 1 \qquad (3.6.12)
$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu göz önünde bulunduralım.

$$
\begin{aligned}
\left\| H_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right);x\right) - \frac{x}{1+x}\right\|_{C[0,b]} &= \sup_{x\in[0,b]}\left|\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{1+x}\right) - \frac{x}{1+x}\right| \\
&= \sup_{x\in[0,b]}\left|\left(\frac{x}{1+x}\right)\left(-\frac{1}{n+1}\right)\right|
\end{aligned}
$$

bulunur. (3.6.12) den

$$
\left\| H_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right);x\right) - \frac{x}{1+x}\right\|_{C[0,b]} \leq \frac{1}{n+1}
$$

olduğundan

$$
\lim_{n\to\infty}\left\| H_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right);x\right) - \frac{x}{1+x}\right\|_{C[0,b]} = 0
$$

gerçeklenir.

Son olarak $k^2 = k(k-1) + k$ eşitliğini göz önünde bulundurarak (3.6.4) koşulunu inceleyelim.

$$
\begin{aligned}
H_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right)^2;x\right) &= \frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{(n+1)^2}\frac{n!}{(n-k)!k!}x^k \\
&= \frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=2}^{n}\frac{k(k-1)}{(n+1)^2}\frac{n!}{(n-k)!k!}x^k \\
&\quad + \frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(n+1)^2}\frac{n!}{(n-k)!k!}x^k
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n(n-1)}{(n+1)^2}\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(n-k)!\,(k-2)!}x^k \\
&\quad+\frac{n}{(n+1)^2}\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!}x^k \\
&= \frac{n(n-1)}{(n+1)^2}\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{(n-k-2)!k!}x^{k+2} \\
&\quad+\frac{n}{(n+1)^2}\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!}x^{k+1} \\
&= \frac{n(n-1)}{(n+1)^2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2\frac{1}{(1+x)^{n-2}}\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}x^k \\
&\quad+\frac{n}{(n+1)^2}\left(\frac{x}{1+x}\right)\frac{1}{(1+x)^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k \\
&= \frac{n(n-1)}{(n+1)^2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+\frac{n}{(n+1)^2}\left(\frac{x}{1+x}\right) \qquad (3.6.13)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\left\|H_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right)^2;x\right)-\left(\frac{x}{1+x}\right)^2\right\|_{C[0,b]} &= \sup_{x\in[0,b]}\left|\frac{n(n-1)}{(n+1)^2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2\right. \\
&\quad\left.+\frac{n}{(n+1)^2}\left(\frac{x}{1+x}\right)-\left(\frac{x}{1+x}\right)^2\right|
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\left|\frac{n(n-1)}{(n+1)^2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+\frac{n}{(n+1)^2}\left(\frac{x}{1+x}\right)-\left(\frac{x}{1+x}\right)^2\right| &\le \left(\frac{x}{1+x}\right)^2\left|\frac{-(3n+1)}{(n+1)^2}\right| \\
&\quad+\frac{n}{(n+1)^2}\left(\frac{x}{1+x}\right)
\end{aligned}$$

bulunur. (3.6.12) den

$$\begin{aligned}
\left|\frac{n(n-1)}{(n+1)^2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+\frac{n}{(n+1)^2}\left(\frac{x}{1+x}\right)-\left(\frac{x}{1+x}\right)^2\right| &\le \frac{3n+1}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+1)^2} \\
&= \frac{4n+1}{(n+1)^2}
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Böylece

$$\left\| H_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right)^2;x\right)-\left(\frac{x}{1+x}\right)^2\right\|_{C[0,b]}\leq\frac{4n+1}{(n+1)^2}$$

bulunur. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty}\left\| H_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right)^2;x\right)-\left(\frac{x}{1+x}\right)^2\right\|_{C[0,b]}=0$$

gerçeklenir. Dolayısıyla (3.6.2), (3.6.3), (3.6.4) koşulları sağlanır ve Teorem 3.6.1 den ispat tamamlanır.

Tanım 3.6.2 $f\in\omega_\alpha$ olmak üzere

$$\tilde{\omega}\left(f;\delta_n\right)=\sup_{\substack{x,t\geq 0\\ \left|\frac{t}{1+t}-\frac{x}{1+x}\right|\leq\delta_n}}\left|f\left(t\right)-f\left(x\right)\right|$$

şeklinde bir süreklilik modülü tanımlayalım. Bu durumda süreklilik modülünün (vii) özelliğinden faydalanarak,

$$\left|f\left(t\right)-f\left(x\right)\right|\leq\left(1+\frac{\left|\frac{t}{1+t}-\frac{x}{1+x}\right|}{\delta_n}\right)\tilde{\omega}\left(f;\delta_n\right)\tag{3.6.14}$$

olduğunu söyleyebiliriz.

Şimdi BBH operatörlerinin yaklaşım hızını (3.6.14) de tanımlanan süreklilik modülü yardımıyla hesaplayalım.

Teorem 3.6.3 Eğer $f\in\omega_\alpha$ ise

$$\left\|H_n\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right\|_{C[0,b]}\leq 2\tilde{\omega}\left(f;\delta_n\right)$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat: $\dfrac{1}{(1+x)^n}\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = \sum\limits_{k=0}^{n}P_{k,n}(x) = 1$ eşitliği ve BBH operatörlerinin lineerliğinden;

$$\begin{aligned}
|H_n(f;x)-f(x)| &= \left|\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n-k+1}\right)\binom{n}{k}x^k - f(x)\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n-k+1}\right)-f(x)\right)P_{k,n}(x)\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n}\left|f\left(\frac{k}{n-k+1}\right)-f(x)\right|P_{k,n}(x)
\end{aligned}$$

olur. (3.6.14) ifadesinde $t=\dfrac{k}{n-k+1}$ alırsak

$$\begin{aligned}
\left|f\left(\frac{k}{n-k+1}\right)-f(x)\right| &\leq \left(1+\frac{\left|\dfrac{\frac{k}{n-k+1}}{1+\frac{k}{n-k+1}}-\dfrac{x}{1+x}\right|}{\delta_n}\right)\tilde{\omega}(f;\delta_n) \\
&= \left(1+\frac{\left|\frac{k}{n+1}-\frac{x}{1+x}\right|}{\delta_n}\right)\tilde{\omega}(f;\delta_n)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bunu (3.6.15) yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
|H_n(f;x)-f(x)| &\leq \sum_{k=0}^{n}\left(\left(1+\frac{\left|\frac{k}{n+1}-\frac{x}{1+x}\right|}{\delta_n}\right)\tilde{\omega}(f;\delta_n)\right)P_{k,n}(x) \\
&= \tilde{\omega}(f;\delta_n)\left[\sum_{k=0}^{n}P_{k,n}(x)+\frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n+1}-\frac{x}{1+x}\right|P_{k,n}(x)\right]
\end{aligned}$$

bulunur. Toplamın ikinci kısmına Cauchy-Schwarz eşitsizliğini uygulayıp ayrıca (3.6.10) eşitliğini kullanacak olursak

$$\leq \tilde{\omega}(f;\delta_n)\left[1+\frac{1}{\delta_n}\left(\sum_{k=0}^{n}P_{k,n}(x)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n+1}-\frac{x}{1+x}\right)^2 P_{k,n}(x)\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

elde ederiz. Tekrar (3.6.10) eşitliğini uygulayalım. Bu durumda

$$|H_n(f;x)-f(x)| \leq \tilde{\omega}(f;\delta_n)\left[1+\frac{1}{\delta_n}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n+1}-\frac{x}{1+x}\right)^2 P_{k,n}(x)\right)^{\frac{1}{2}}\right] \tag{3.6.16}$$

olur. H_n lineer olduğundan;

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n+1}-\frac{x}{1+x}\right)^2 P_{k,n}(x) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{(n+1)^2}P_{k,n}(x)-2\frac{x}{1+x}\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n+1}P_{k,n}(x)\\&+\left(\frac{x}{1+x}\right)^2\sum_{k=0}^{n}P_{k,n}(x)\\&= H_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right)^2;x\right)-2\frac{x}{1+x}H_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right);x\right)\\&+\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 H_n(1;x)\end{aligned}$$

olup (3.6.10), (3.6.11) ve (3.6.12) den

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n+1}-\frac{x}{1+x}\right)^2 P_{k,n}(x) &= \frac{n(n-1)}{(n+1)^2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+\frac{n}{(n+1)^2}\left(\frac{x}{1+x}\right)\\&-\frac{2n}{n+1}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+\left(\frac{x}{1+x}\right)^2\\&= \left(\frac{x}{1+x}\right)^2\left(\frac{n^2}{(n+1)^2}-\frac{n}{(n+1)^2}-\frac{2n}{n+1}+1\right)\\&+\frac{n}{(n+1)^2}\left(\frac{x}{1+x}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Bunu (3.6.16) da yerine yazarsak

$$\begin{aligned}&\leq \tilde{\omega}(f;\delta_n)\left\{1+\frac{1}{\delta_n}\left[\left(\frac{x}{1+x}\right)^2\left(\frac{n^2}{(n+1)^2}-\frac{n}{(n+1)^2}-\frac{2n}{n+1}+1\right)\right.\right.\\&\left.\left.+\frac{n}{(n+1)^2}\left(\frac{x}{1+x}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right\}\end{aligned}$$

olur. Burada;

$$\delta_{n,x}(x) = \left[\left(\frac{x}{1+x} \right)^2 \left(\frac{n^2}{(n+1)^2} - \frac{n}{(n+1)^2} - \frac{2n}{n+1} + 1 \right) + \frac{n}{(n+1)^2} \left(\frac{x}{1+x} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

seçimiyle,

$$\delta_n = \sup_{x\in[0,b]} \delta_{n,x} = \left\{ \left| \frac{n(n-1)}{(n+1)^2} - \frac{2n}{n+1} + 1 + \frac{n}{(n+1)^2} \right| \right\}^{\frac{1}{2}} = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n}$$

olup,

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$$

bulunur. O halde ;

$$\begin{aligned} |H_n(f;x) - f(x)| &\leq \tilde{\omega}(f;\delta_n) \left[1 + \frac{1}{\delta_n} \delta_n \right] \\ &= 2\tilde{\omega}(f;\delta_n) \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

3.7 Balász Operatörleri ve Yaklaşım Özellikleri

Balász operatörleri 1975 yılında Katalin Balász tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

f fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığında tanımlı sürekli ve reel bir fonksiyon olmak üzere

$$R_n(f;x) = \frac{1}{(1+a_n x)^n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{b_n} \right) \binom{n}{k} (a_n x)^k \tag{3.7.1}$$

şeklinde tanımlanır. Burada a_n ve b_n, x' den bağımsız olarak seçilmiş reel sayılar olmak üzere $n\to\infty$ iken

$$\frac{na_n}{b_n} \to 1,\ a_n \to 0 \text{ ve } b_n \to \infty \tag{3.7.2}$$

koşulları sağlanmalıdır (Balász 1975).

$R_n(f;x)$ lineer pozitif operatördür.

Gerçekten; $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ ve $\forall f_1, f_2 \in C[0,A]$ için

$$\begin{aligned} R_n(a_1f_1 + a_2f_2; x) &= \frac{1}{(1+a_nx)^n}\sum_{k=0}^{n}(a_1f_1 + a_2f_2)\left(\frac{k}{b_n}\right)\binom{n}{k}(a_nx)^k \\ &= \frac{1}{(1+a_nx)^n}a_1\sum_{k=0}^{n}f_1\left(\frac{k}{b_n}\right)\binom{n}{k}(a_nx)^k \\ &\quad+\frac{1}{(1+a_nx)^n}a_2\sum_{k=0}^{n}f_2\left(\frac{k}{b_n}\right)\binom{n}{k}(a_nx)^k \\ &= a_1R_n(f_1;x) + a_2R_n(f_2;x) \end{aligned}$$

olduğundan $R_n(f;x)$ operatörü lineerdir.

$x \in [0,\infty)$ için $\binom{n}{k}(a_nx)^k \geq 0$ olduğundan $f \geq 0$ için $R_n(f;x) \geq 0$ olur. Bundan dolayı R_n pozitiftir.

Teorem 3.7.1 f, $[0,\infty)$ aralığında sürekli ve $x \in [0,\infty)$ için $f(x) = O(1+x^2)$ olsun. Bu durumda $[0,A] \subset [0,\infty)$ her kompakt alt aralığında

$$R_n(f;x) \rightrightarrows f(x)$$

gerçeklenir.

İspat: $(1+a_nx)^n$ in Binom açılımından

$$(1+a_nx)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a_nx)^k$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned} R_n(1;x) &= \frac{1}{(1+a_nx)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a_nx)^k \\ &= \frac{1}{(1+a_nx)^n}(1+a_nx)^n \\ &= 1 \end{aligned} \tag{3.7.3}$$

olur. Dolayısıyla

$$R_n(1;x) \rightrightarrows 1$$

bulunur.

$$\begin{aligned} R_n(t;x) &= \frac{1}{(1+a_nx)^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{b_n}\frac{n!}{(n-k)!k!}(a_nx)^k \\ &= \frac{n}{b_n}\frac{1}{(1+a_nx)^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}(a_nx)^k \\ &= \frac{n}{b_n}\frac{1}{(1+a_nx)^n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!}(a_nx)^{k+1} \\ &= \frac{na_nx}{b_n}\frac{1}{(1+a_nx)^n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(a_nx)^k \\ &= \frac{na_nx}{b_n}\frac{1}{(1+a_nx)^n}(1+a_nx)^{n-1} \\ &= \frac{na_nx}{b_n}\frac{1}{1+a_nx} \end{aligned} \tag{3.7.4}$$

bulunur. O halde (3.7.2) den

$$R_n(t;x) \rightrightarrows x$$

olduğu görülür.

$$\begin{aligned} R_n\left(t^2;x\right) &= \frac{1}{(1+a_nx)^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{b_n^2}\frac{n!}{(n-k)!k!}(a_nx)^k \\ &= \frac{1}{(1+a_nx)^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{b_n^2}\frac{n!}{(n-k)!(k-1)!}(a_nx)^k \\ &= \frac{1}{(1+a_nx)^n}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{b_n^2}\frac{n!}{(n-k)!(k-2)!}(a_nx)^k \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +\frac{1}{(1+a_n x)^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_n^2}\frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}(a_n x)^k \\
= \; & \frac{(a_n x)^2}{b_n^2}\frac{n(n-1)}{(1+a_n x)^n}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{(n-k-2)!k!}(a_n x)^k \\
& +\frac{n a_n x}{b_n^2}\frac{1}{(1+a_n x)^n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!}(a_n x)^k \\
= \; & \frac{(a_n x)^2}{b_n^2}\frac{n(n-1)}{(1+a_n x)^n}(1+a_n x)^{n-2} \\
& +\frac{n a_n x}{b_n^2}\frac{1}{(1+a_n x)^n}(1+a_n x)^{n-1} \\
= \; & \left(\frac{n a_n}{b_n}\right)^2\frac{x^2}{(1+a_n x)^2}-\frac{n}{b_n^2}\left(\frac{a_n x}{1+a_n x}\right)^2+\frac{n}{b_n^2}\frac{a_n x}{1+a_n x}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu durumda (3.7.2) den

$$R_n\left(t^2;x\right)\rightrightarrows x^2$$

olur. Dolayısıyla Korovkin teoremi gereğince $\forall f\in C[0,A]$ için

$$R_n(f;x)\rightrightarrows f(x),\ \ x\in[0,A]$$

gerçeklenir.

Teorem 3.7.2 Eğer $f\in C[0,A]$ ise Balász operatörlerinin Peetre-K fonksiyoneli ile yaklaşım hızı

$$\left|R_n(f;x)-f(x)\right|_{C[0,A]}\le 2K(f;\delta_n)$$

olarak hesaplanır.

İspat: (2.3.3) ile verilen integral bağıntısını kullanırsak,

$$R_n(g(t)-g(x);x)=R_n\left(g'(x)(t-x)+\int_x^t g''(s)(t-s)\,ds;x\right)$$

$$= R_n\left(g^{'}(x)(t-x);x\right) + R_n\left(\int_x^t g^{''}(s)(t-s)\,ds;x\right)$$

olur. Son eşitliğin her iki yanının mutlak değerini alır ve üçgen eşitsizliğini kullanırsak;

$$|R_n(g(t)-g(x);x)| \leq \left|R_n\left(g^{'}(x)(t-x);x\right)\right| + \left|R_n\left(\int_x^t g^{''}(s)(t-s)\,ds;x\right)\right|$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} |R_n(g(t)-g(x);x)| &\leq \|g'\|_{C[0,A]}\,|R_n((t-x);x)| \\ &\quad + \left\|g^{''}\right\|_{C[0,A]}\left|R_n\left(\int_x^t (t-s)\,ds;x\right)\right| \end{aligned} \tag{3.7.6}$$

bulunur. Öte yandan

$$\int_x^t (t-s)\,ds = -\frac{(t-s)^2}{2}\Big|_x^t = \frac{(t-x)^2}{2}$$

olup bu ifade (3.7.6) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} |R_n(g(t)-g(x);x)| &\leq \|g'\|_{C[0,A]}\,|R_n((t-x);x)| \\ &\quad + \frac{1}{2}\left\|g^{''}\right\|_{C[0,A]}\left|R_n\left((t-x)^2;x\right)\right| \end{aligned}$$

olur.

$$\|g\|_{C^2[0,A]} = \|g\|_{C[0,A]} + \|g'\|_{C[0,A]} + \left\|g^{''}\right\|_{C[0,A]}$$

olduğundan (3.7.6) eşitsizliği

$$|R_n(g(t)-g(x);x)| \leq \left\{|R_n((t-x);x)| + \frac{1}{2}\left|R_n\left((t-x)^2;x\right)\right|\right\}\|g\|_{C^2[0,A]} \tag{3.7.7}$$

şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
|R_n(f;x) - f(x)| &= |R_n(f;x) - f(x) + R_n(g;x) - R_n(g;x) + g(x) - g(x)| \\
&= |(R_n(f;x) - R_n(g;x)) + (-f(x) + g(x)) \\
&\quad + (R_n(g;x) - g(x))|
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Üçgen eşitsizliğinin uygulanmasıyla

$$|R_n(f;x) - f(x)| \leq |R_n(f;x) - R_n(g;x)| + |f(x) - g(x)| + |R_n(g;x) - g(x)|$$

olur. (R_n) operatörü lineer olduğundan

$$|R_n(f;x) - f(x)| \leq \|f - g\|_{C[0,A]} |R_n(1;x)| + \|f - g\|_{C[0,A]} |R_n(g;x) - g(x)|$$

olur. Bu eşitsizlikte (3.7.3) ve (3.7.7) nin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
|R_n(f;x) - f(x)| \leq\ & 2\|f - g\|_{C[0,A]} \{|R_n((t-x);x)| \\
& + \frac{1}{2} \left|R_n\left((t-x)^2;x\right)\right| \Big\} \|g\|_{C^2[0,A]}
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\delta_n = \sup_{x\in[0,A]} \delta_n(x) = \sup_{x\in[0,A]} \left\{ |R_n((t-x);x)| + \frac{1}{2}\left|R_n\left((t-x)^2;x\right)\right| \right\}$$

seçersek; (3.7.3), (3.7.4) ve (3.7.5) den $n \to \infty$ için $\delta_n \to 0$ elde edilir.

Bu durumda eşitsizliğimiz;

$$|R_n(f;x) - f(x)| \leq 2\|f - g\|_{C[0,A]} + \delta_n \|g\|_{C^2[0,A]}$$

şeklini alır.

Son eşitsizlikte $g \in C^2[0,A]$ üzerinden infimum alırsak, sol taraf g den bağımsız olduğundan

$$\left\| R_n(f;x) - f(x) \right\|_{C^2[0,A]} \leq 2K(f;\delta_n)$$

elde edilir.

3.8 Meyer-König ve Zeller Operatörleri ve Yaklaşım Özellikleri

1960 yılında Alman matematikçiler W. Meyer-König ve K. Zeller $f(x) = (1-x)^{-(n+1)}$ fonksiyonunun $x = 0$ daki Taylor seri açılımından faydalanarak $f \in C[0,1]$ olmak üzere

$$M_n(f;x) = (1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n+k}\right) \binom{n+k}{k} x^k, \; 0 \leq x \leq 1 \qquad (3.8.1)$$

biçiminde $M_n(f;x)$ operatörünü tanımlamışlardır (Meyer-König ve Zeller 1960).

$M_n(f;x)$ lineer pozitif operatördür.

Gerçekten; $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ ve $\forall f_1, f_2 \in C[0,1]$ için

$$\begin{aligned} M_n(a_1 f_1 + a_2 f_2; x) &= (1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} (a_1 f_1 + a_2 f_2)\left(\frac{k}{n+k}\right) \binom{n+k}{k} x^k \\ &= (1-x)^{n+1} a_1 \sum_{k=0}^{\infty} f_1\left(\frac{k}{n+k}\right) \binom{n+k}{k} x^k \\ &\quad + (1-x)^{n+1} a_2 \sum_{k=0}^{\infty} f_2\left(\frac{k}{n+k}\right) \binom{n+k}{k} x^k \\ &= a_1 M_n(f_1;x) + a_2 M_n(f_2;x) \end{aligned}$$

olduğundan $M_n(f;x)$ operatörü lineerdir.

$x \in [0,1]$ için $(1-x)^{n+1} \binom{n+k}{k} x^k \geq 0$ olduğundan $f \geq 0$ iken $M_n(f;x) \geq 0$ olur. Bundan dolayı $M_n(f;x)$ pozitiftir.

Teorem 3.8.1 Meyer-König ve Zeller operatörü $[0,1]$ kapalı aralığında sürekli ve tüm pozitif yarı eksende sınırlı olan f fonksiyonuna $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsar. Yani $f \in C[0,1]$ ise $n \to \infty$ iken

$$M_n(f;x) \rightrightarrows f(x), \; 0 \leq x \leq 1$$

gerçeklenir.

İspat: $\dfrac{1}{(1-x)^{n+1}}$ fonksiyonunun Maclaurin açılımı;

$$f(x) = (1-x)^{-(n+1)} \Longrightarrow f(0) = 1$$

$$f'(x) = (n+1)(1-x)^{-(n+2)} = f'(0) = n+1$$

$$f''(x) = (n+1)(n+2)(1-x)^{-(n+3)} \Longrightarrow f''(0)(n+1)(n+2)$$

ve böylece devam edersek;

$$f^{(k)}(x) = (n+1)(n+2)\ldots(n+k)(1-x)^{-(n+k+1)}$$

olup,

$$f^{(k)}(0) = (n+1)(n+2)\ldots(n+k)$$

olur. O halde

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^{n+1}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}{k!} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k \qquad (3.8.2) \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi (3.8.2) eşitliğinden faydalanarak Korovkin teoreminin koşullarını araştıralım.

$$\begin{aligned} M_n(1;x) &= (1-x)^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}x^k \\ &= (1-x)^{n+1}\frac{1}{(1-x)^{n+1}} \\ &= 1 \end{aligned} \tag{3.8.3}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$M_n(1;x) \rightrightarrows 1$$

olur.

$$\begin{aligned} M_n(t;x) &= (1-x)^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{n+k}\binom{n+k}{k}x^k \\ &= (1-x)^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{n+k}\frac{(n+k)!}{n!k!}x^k \\ &= (1-x)^{n+1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}x^k \\ &= x(1-x)^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k)!}{n!k!}x^k \\ &= x(1-x)^{n+1}\frac{1}{(1-x)^{n+1}} \\ &= x \end{aligned} \tag{3.8.4}$$

olup,

$$M_n(t;x) \rightrightarrows x$$

gerçeklenir.

$$\begin{aligned} M_n\left(t^2;x\right) &= (1-x)^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2}{(n+k)^2}\binom{n+k}{k}x^k \\ &= (1-x)^{n+1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{n+k}\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}x^k \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (1-x)^{n+1}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k-1}{n+k}\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}x^k \\
&\quad + (1-x)^{n+1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n+k}\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}x^k \\
&= (1-x)^{n+1}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{n+k}\frac{(n+k-1)!}{n!(k-2)!}x^k \\
&\quad + x(1-x)^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n+k+1}\frac{(n+k)!}{n!k!}x^k \\
&= x^2(1-x)^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n+k+1}{n+k+2}\frac{(n+k)!}{n!k!}x^k \\
&\quad + x(1-x)^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n+k+1}\frac{(n+k)!}{n!k!}x^k
\end{aligned}
$$

elde edilir. $\dfrac{n+k+1}{n+k+2}\leq 1$ ve $\dfrac{1}{n+k+1}\leq\dfrac{1}{n}$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
M_n\left(t^2;x\right) &\leq x^2(1-x)^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}x^k+\frac{x}{n}(1-x)^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}x^k \\
&= x^2+\frac{x}{n} \qquad (3.8.5)
\end{aligned}
$$

yazılabilir. Buradan

$$
M_n\left(t^2;x\right)-x^2\leq\frac{x}{n} \qquad (3.8.6)
$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$
\begin{aligned}
M_n\left(t^2;x\right) &= x^2(1-x)^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n+k+1}{n+k+2}\binom{n+k}{k}x^k \\
&\quad + x(1-x)^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n+k+1}\binom{n+k}{k}x^k \\
&\geq x^2(1-x)^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n+k+1}{n+k+2}\binom{n+k}{k}x^k \\
&\quad + x(1-x)^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n+k+2}\binom{n+k}{k}x^k
\end{aligned}
$$

dır. $0 \leq x < 1$ için $x \geq x^2$ olduğundan

$$M_n\left(t^2; x\right) \geq x^2 (1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k$$

yazılabilir. Buradan

$$M_n\left(t^2; x\right) - x^2 \geq 0 \tag{3.8.7}$$

elde ederiz.

(3.8.6) ve (3.8.7) den

$$0 \leq M_n\left(t^2; x\right) - x^2 \leq \frac{x}{n}$$

yazılır. Dolayısıyla $n \to \infty$ iken istenen elde edilir.

Teorem 3.8.2 $M_n(f; x)$ (3.8.1) de olduğu gibi tanımlanmış olsun. $[0,1]$ aralığında sürekli f fonksiyonu için

$$\|M_n(f; x) - f(x)\|_{C[0,1]} \leq 2\omega\left(f; n^{-\frac{1}{2}}\right)$$

sağlanır.

İspat: $f \in C[0,1]$ olmak üzere $M_n(f; x)$ operatörünün lineerliğinden,

$$|M_n(f; x) - f(x)| = \left|(1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \left[f\left(\frac{k}{n+k}\right) - f(x)\right] \binom{n+k}{k} x^k\right|$$

yazılabilir. Burada $(1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} P_{k,n}(x) = 1$ ifadesini kullanırsak,

$$|M_n(f; x) - f(x)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left|f\left(\frac{k}{n+k}\right) - f(x)\right| P_{k,n}(x)$$

olur. Süreklilik modülünün (vii) özelliğinde $t = \dfrac{k}{n+k}$ alırsak;

$$
\begin{aligned}
|M_n(f;x)-f(x)| &\leq \sum_{k=0}^{\infty}\left(1+\frac{\left|\frac{k}{n+k}-x\right|}{\delta_n}\right)\omega(f;\delta_n)P_{k,n}(x)\\
&= \omega(f;\delta_n)\left[\sum_{k=0}^{\infty}P_{k,n}(x)+\frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{k}{n+k}-x\right|P_{k,n}(x)\right]
\end{aligned}
$$

toplamın ikinci kısmında Cauchy-Schwarz eşitsizliğini uygulayıp ardından $\sum_{k=0}^{\infty}P_{k,n}(x)=1$ eşitliğini kullanırsak

$$
\begin{aligned}
&\leq \omega(f;\delta_n)\left[1+\frac{1}{\delta_n}\left(\sum_{k=0}^{\infty}P_{k,n}(x)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k}{n+k}-x\right)^2P_{k,n}(x)\right)^{\frac{1}{2}}\right]\\
&= \omega(f;\delta_n)\,1+\left[\frac{1}{\delta_n}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2}{(n+k)^2}P_{k,n}(x)-2x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{n+k}P_{k,n}(x)+x^2\sum_{k=0}^{\infty}P_{k,n}(x)\right)^{\frac{1}{2}}\right]\\
&= \omega(f;\delta_n)\left[1+\frac{1}{\delta_n}\left(M_n\left(t^2;x\right)-2xM_n(t;x)+x^2M_n(1;x)\right)^{\frac{1}{2}}\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte (3.8.3), (3.8.4) ve (3.8.5) ifadelerinin kullanılmasıyla

$$
\begin{aligned}
|M_n(f;x)-f(x)| &\leq \omega(f;\delta_n)\left[1+\frac{1}{\delta_n}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{n}}\right]\\
&\leq \omega(f;\delta_n)\left[1+\frac{1}{\delta_n}\frac{1}{\sqrt{n}}\right],\ x\in[0,1]
\end{aligned}
$$

olur. $\delta_n=n^{-\frac{1}{2}}$ seçelim. Böylece

$$
|M_n(f;x)-f(x)|\leq 2\omega\left(f;n^{-\frac{1}{2}}\right)
$$

elde ederiz.

4. KOROVKIN ŞARTLARINI GERÇEKLEYEN GENEL BİR LİNEER POZİTİF OPERATÖRLER DİZİSİ

Üçüncü kısımda belirttiğimiz gibi Korovkin, Bohman' ın (1952) ifade ettiği teoremin genel halde de geçerli olduğunu göstermiştir. Bu teoremden sonra Baskakov, Stancu, Hacıyev-İbrahimov, Meyer-König ve Zeller gibi birçok matematikçi Korovkin teoreminin koşullarını sağlayan lineer pozitif operatörler dizilerini oluşturmuşlardır.

Bu kısımda Hacıyev-İbrahimov' un çalışması incelenecektir (Gadjiev ve Ibragimov 1970).

$A > 0$ keyfi bir sayı olmak üzere $C[0,A]$ uzayında $\{\varphi_n(t)\}$ ve $\{\Psi_n(t)\}$ fonksiyon dizilerini alalım. $\{\alpha_n\}$ ise pozitif sayılar dizisi olsun ve aşağıdaki koşullar sağlansın.

$$0 \leq t \leq A,\ n = 1, 2, ... \text{ için } \varphi_n(0) = 0,\ \Psi_n(0) \neq 0 \text{ ve } \Psi_n(t) > 0 \tag{4.0.1}$$

olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{n} = 1,\ \ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2 \Psi_n(0)} = 0 \tag{4.0.2}$$

$K_n(x,t,u)$ dizisi ise $x, t \in [0,A]\,,\ -\infty < u < \infty$ olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlayan üç değişkenli fonksiyonlar dizisi olsun.

1^o) Bu dizinin her elemanı x ve t' nin $[0,A]$ aralığındaki her belirli değerine karşılık u ya göre analitik fonksiyondur.

2^o) $\forall x \in [0,A]$ için $K_n(x,0,0) = 1$, $n = 1, 2, ...$

3^o) $\left\{(-1)^\nu \left[\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_n(x,t,u)\right]_{\substack{u=u_1 \\ t=0}}\right\} \geq 0,\ x, t\epsilon\,[0,A]\,,\ \nu, n = 1, 2, ...$

4^o) $m + n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ olacak biçimde öyle bir $m \in \mathbb{Z}$ vardır ki;

$$-\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_n(x,t,u)\,|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t) \\ t=0}} = nx\left[\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}} K_{n+m}(x,t,u)\,|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t) \\ t=0}}\right] \tag{4.0.3}$$

eşitliği sağlanır.

Şimdi $L_n : C[0,A] \to C[0,A]$, (L_n) operatörler dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$L_n(f;x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n^2\Psi_n(0)}\right)\left[\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(x,t,u)\,|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}}\right]\frac{(-\alpha_n\Psi_n(0))^\nu}{\nu!} \qquad (4.0.4)$$

$L_n(f;x)$ operatörünün çekirdeğinde bulunan $K_n(x,t,u)$ fonksiyonuna (4^o) özelliğini ν defa uygularsak;

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(x,t,u)\,|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}} &= -nx\left[\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}}K_{n+m}(x,t,u)\,|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}}\right] \\
&= (-1)^2 x^2 n(n+m)\left[\frac{\partial^{\nu-2}}{\partial u^{\nu-2}}K_{n+2m}(x,t,u)\,|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}}\right] \\
&= (-1)^3 x^3 n(n+m)(n+2m) \\
&\quad \times\left[\frac{\partial^{\nu-3}}{\partial u^{\nu-3}}K_{n+3m}(x,t,u)\,|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}}\right] \\
&\quad . \\
&\quad . \\
&\quad . \\
&= (-1)^\nu x^\nu n(n+m)(n+2m)\ldots[n+(\nu-1)m] \\
&\quad \times K_{n+\nu m}(x,t,u)\,|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}}
\end{aligned}$$

(4.0.4) operatörü $\forall n$ için;

$$\begin{aligned}
L_n(f;x) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n^2\Psi_n(0)}\right)\frac{n(n+m)(n+2m)\ldots[n+(\nu-1)m]}{\nu!} \\
&\quad \times(x\alpha_n\Psi_n(0))^\nu K_{n+\nu m}(x,t,u)\,|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}} \qquad (4.0.5)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. (3^o) özelliğinden $L_n(f;x)$ pozitiftir ve lineer olduğu açıktır.

Bu operatörler dizisinin yakınsaklık durumunu Haciyev ve İbragimov, Korovkin teoremi yardımıyla aşağıdaki gibi ispatlamışlardır.

Teorem 4.0.1 Eğer [0,∞) yarı ekseninde tanımlanmış bir f fonksiyonu

$$|f(x)| \leq M_f\left(1+x^2\right)$$

eşitsizliğini sağlıyor ve $f \in C[0,A]$ ise o taktirde $[0,A]$ aralığında, $n \to \infty$ için

$$L_n(f;x) \rightrightarrows f(x)$$

olur (Gadjiev ve Ibragimov 1970).

İspat: Açıktır ki Korovkin teoreminin koşullarını göstermek yeterlidir.

$K_n(x,t,u)$ bir analitik fonksiyon olduğundan $(u-u_1)$ in kuvvetlerine göre Taylor serisine açılabilir.

$$u=\varphi_n(t)\,,\ u_1=\alpha_n\Psi_n(t)$$

olduğunu kabul edersek,

$$K_n(x,t,\varphi_n(t))=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(x,t,u)\,|_{u=\alpha_n\Psi_n(t)}\frac{(\varphi_n(t)-\alpha_n\Psi_n(t))^\nu}{\nu!}$$

Taylor serisi elde edilir. Bu eşitlikte $t=0$ alırsak (4.0.1) şartından ve (2^o) özelliğinden;

$$\begin{aligned}K_n(x,0,0) &= \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(x,0,\alpha_n\Psi_n(0))\frac{(-\alpha_n\Psi_n(0))^\nu}{\nu!}\\ &= 1\end{aligned}$$

elde ederiz.

Şimdi

$$L_n(f;x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}f\left(\frac{\nu}{n^2\Psi_n(0)}\right)\left[\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(x,t,u)\,|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}}\right]\frac{(-\alpha_n\Psi_n(0))^\nu}{\nu!}$$

dizisini gözönüne alıp Korovkin teoreminin koşullarını araştıralım.

$$
\begin{aligned}
L_n(1;x) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_n(x,t,u)\left|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}}\right. \frac{(-\alpha_n\Psi_n(0))^\nu}{\nu!} \\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_n(x,0,\alpha_n\Psi_n(0)) \frac{(-\alpha_n\Psi_n(0))^\nu}{\nu!} \\
&= K_n(x,0,0) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

bulunur. Dolayısıyla

$$
L_n(1;x) \rightrightarrows 1
$$

olur.

$$
\begin{aligned}
L_n(t;x) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\nu}{n^2\Psi_n(0)} \frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_n(x,t,u)\left|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}}\right. \frac{(-\alpha_n\Psi_n(0))^\nu}{\nu!} \\
&= -\frac{\alpha_n}{n^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_n(x,t,u)\left|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}}\right. \frac{(-\alpha_n\Psi_n(0))^{\nu-1}}{(\nu-1)!},
\end{aligned}
$$

(4.0.3) ile verilen (4^o) özelliğinden

$$
\begin{aligned}
L_n(t;x) &= \frac{\alpha_n x}{n} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}} K_{n+m}(x,t,u)\left|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}}\right. \right] \frac{(-\alpha_n\Psi_n(0))^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \\
&= \frac{\alpha_n x}{n} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}} K_{n+m}(x,t,u)\left|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}}\right. \right] \frac{(-\alpha_n\Psi_n(0))^{\nu}}{\nu!} \\
&= \frac{\alpha_n x}{n} K_{n+m}(x,0,0) \\
&= \frac{\alpha_n x}{n}
\end{aligned}
$$

olup (4.0.2) şartından $[0,A]$ aralığında $n \to \infty$ için

$$
L_n(t;x) \rightrightarrows x
$$

sağlanır.

$$
\begin{aligned}
L_n\left(t^2;x\right) &= \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\nu^2}{n^4\Psi_n^2(0)}\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(x,t,u)\left.\right|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}}\frac{(-\alpha_n\Psi_n(0))^\nu}{\nu!}\\
&= -\frac{\alpha_n}{n^4}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu}{\Psi_n(0)}\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(x,t,u)\left.\right|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}}\frac{(-\alpha_n\Psi_n(0))^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\\
&= -\frac{\alpha_n}{n^4}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu-1}{\Psi_n(0)}\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(x,t,u)\left.\right|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}}\frac{(-\alpha_n\Psi_n(0))^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\\
&\quad -\frac{\alpha_n}{n^4}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\Psi_n(0)}\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(x,t,u)\left.\right|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}}\frac{(-\alpha_n\Psi_n(0))^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\\
&= \frac{\alpha_n^2}{n^4}\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(x,t,u)\left.\right|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}}\frac{(-\alpha_n\Psi_n(0))^{\nu-2}}{(\nu-2)!}\\
&\quad -\frac{\alpha_n}{n^4}\frac{1}{\Psi_n(0)}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(x,t,u)\left.\right|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}}\frac{(-\alpha_n\Psi_n(0))^{\nu-1}}{(\nu-1)!}
\end{aligned}
$$

Yukarıdaki ifadede (4^o) özelliği kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
L_n\left(t^2;x\right) &= -\frac{\alpha_n^2}{n^3}x\sum_{\nu=2}^{\infty}\left[\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}}K_{n+m}(x,t,u)\left.\right|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}}\right]\frac{(-\alpha_n\Psi_n(0))^{\nu-2}}{(\nu-2)!}\\
&\quad +\frac{\alpha_n}{n^3\Psi_n(0)}x\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}}K_{n+m}(x,t,u)\left.\right|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}}\right]\frac{(-\alpha_n\Psi_n(0))^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\\
&= -\frac{\alpha_n^2}{n^3}x\sum_{\nu=2}^{\infty}\left[\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}}K_{n+m}(x,t,u)\left.\right|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}}\right]\frac{(-\alpha_n\Psi_n(0))^{\nu-2}}{(\nu-2)!}\\
&\quad +\frac{\alpha_n}{n^3\Psi_n(0)}xK_{n+m}(x,0,0),
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu ifadede tekrar (4^o) özelliği kullanıldığında

$$
\begin{aligned}
L_n\left(t^2;x\right) &= \frac{\alpha_n^2}{n^3}(n+m)x^2\sum_{\nu=2}^{\infty}\left[\frac{\partial^{\nu-2}}{\partial u^{\nu-2}}K_{n+2m}(x,t,u)\left.\right|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}}\right]\frac{(-\alpha_n\Psi_n(0))^{\nu-2}}{(\nu-2)!}\\
&\quad +\frac{\alpha_n}{n^3\Psi_n(0)}x\\
&= \frac{\alpha_n^2}{n^3}(n+m)x^2\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}}K_{n+2m}(x,t,u)\left.\right|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}}\right]\frac{(-\alpha_n\Psi_n(0))^{\nu}}{\nu!}\\
&\quad +\frac{\alpha_n}{n^3\Psi_n(0)}x
\end{aligned}
$$

$$= \frac{\alpha_n^2}{n^3}(n+m)\,x^2 K_{n+2m}(x,0,0) + \frac{\alpha_n}{n^3\Psi_n(0)}x$$
$$= \left(\frac{\alpha_n x}{n}\right)^2\left(\frac{n+m}{n}\right) + \left(\frac{\alpha_n x}{n}\right)\left(\frac{1}{n^2\Psi_n(0)}\right)$$

bulunur. Bu ise (4.0.2) den $n \to \infty$ için

$$L_n\left(t^2;x\right) \rightrightarrows x^2$$

olduğunu gösterir.

Şu halde Korovkin teoreminin koşullarını göstermiş olduk. Bu ise ispatı tamamlar.

(4^o) şartı yerine başka bir şart vererek bu operatörün yakınsaklığı hakkında genel bir teorem ispatlayabiliriz.

Teorem 4.0.2 Eğer $K_n(x,t,u)$ fonksiyonu (1^o) ve (3^o) şartlarından dolayı,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial u}K_n(x,0,0) = -x \tag{4.0.6}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\frac{\partial^2}{\partial u^2}K_n(x,0,0) = x^2 \tag{4.0.7}$$

şartlarını sağlıyorsa, o taktirde Teorem 4.0.1' in sonucu geçerlidir. Yani

$$L_n(f;x) \rightrightarrows f(x)$$

gerçeklenir (Gadjiev ve Ibragimov 1970).

İspat: $K_n(x,t,u)$ bir tam fonksiyon olduğundan,

$$K_n(x,t,u) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(x,t,u)\,\Big|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}}\frac{(u-u_1)^\nu}{\nu!}$$

olacak şekilde Taylor serisi yazılabilir. u' ya göre türevlerini alırsak,

$$\frac{\partial}{\partial u}K_n(x,t,u)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}}K_n(x,t,u)\left|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}}\right.\frac{\nu(u-u_1)^{\nu-1}}{\nu!}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}K_n(x,t,u)=\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}}K_n(x,t,u)\left|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}}\right.\frac{\nu(\nu-1)(u-u_1)^{\nu-2}}{\nu!}$$

olup, $t=0$ için $u=\varphi_n(t)$, $u_1=\alpha_n\Psi_n(t)$ alırsak, (4.0.1) şartından

$$\frac{\partial}{\partial u}K_n(x,0,0)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}}K_n(x,t,u)\left|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}}\right.\frac{(-\alpha_n\Psi_n(0))^{\nu-1}}{(\upsilon-1)!}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}K_n(x,0,0)=\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}}K_n(x,t,u)\left|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}}\right.\frac{(-\alpha_n\Psi_n(0))^{\nu-2}}{(\nu-2)!}$$

elde ederiz. Şimdi bu eşitlikleri gözönüne alıp Korovkin teoreminin koşullarını araştıralım.

$$\begin{aligned}
L_n(1;x) &= \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}}K_n(x,t,u)\left|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}}\right.\frac{(-\alpha_n\Psi_n(0))^{\nu}}{\nu!}\\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}}K_n(x,0,\alpha_n\Psi_n(0))\frac{(-\alpha_n\Psi_n(0))^{\nu}}{\nu!}\\
&= K_n(x,0,0)\\
&= 1
\end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda $[0,A]$ aralığında $n\to\infty$ iken

$$L_n(1;x)\rightrightarrows 1$$

olduğu açıktır.

$$\begin{aligned}
L_n(t;x) &= \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\nu}{n^2\Psi_n(0)}\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}}K_n(x,t,u)\left|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}}\right.\frac{(-\alpha_n\Psi_n(0))^{\nu}}{\nu!}\\
&= -\frac{\alpha_n}{n^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}}K_n(x,t,u)\left|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}}\right.\frac{(-\alpha_n\Psi_n(0))^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\\
&= -\frac{\alpha_n}{n}\frac{1}{n}K_n(x,0,0)
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla (4.0.2) ve (4.0.6) dan $n \to \infty$ için

$$L_n(t;x) \rightrightarrows x$$

gerçeklenir.

$$\begin{aligned}
L_n\left(t^2;x\right) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\nu^2}{n^4 \Psi_n^2(0)} \frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_n(x,t,u)\left|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}}\right. \frac{(-\alpha_n \Psi_n(0))^\nu}{\nu!} \\
&= -\frac{\alpha_n}{n^4} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu}{\Psi_n(0)} \frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_n(x,t,u)\left|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}}\right. \frac{(-\alpha_n \Psi_n(0))^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \\
&= -\frac{\alpha_n}{n^4} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu-1}{\Psi_n(0)} \frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_n(x,t,u)\left|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}}\right. \frac{(-\alpha_n \Psi_n(0))^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \\
&\quad -\frac{\alpha_n}{n^4} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\Psi_n(0)} \frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_n(x,t,u)\left|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}}\right. \frac{(-\alpha_n \Psi_n(0))^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \\
&= \frac{\alpha_n^2}{n^4} \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_n(x,t,u)\left|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}}\right. \frac{(-\alpha_n \Psi_n(0))^{\nu-2}}{(\nu-2)!} \\
&\quad -\frac{\alpha_n}{n^4} \frac{1}{\Psi_n(0)} \sum_{\upsilon=1}^{\infty} \frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_n(x,t,u)\left|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}}\right. \frac{(-\alpha_n \Psi_n(0))^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \\
&= \left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^2 \frac{1}{n^2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} K_n(x,0,0) - \frac{\alpha_n}{n} \frac{1}{n^2 \Psi_n(0)} \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial u} K_n(x,0,0)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece (4.0.2), (4.0.6) ve (4.0.7) den

$$L_n\left(t^2;x\right) \rightrightarrows x^2$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

4.1 Toplam Biçimindeki Bazı Operatörlerin Elde edilmesi

Belirtelim ki (4.0.4) operatörünün özel durumları birçok belirli lineer pozitif operatörler dizisini içerir. Şimdi bu operatörden yararlanarak yaklaşımlar teorisinde sıklıkla kullanılanılan bazı operatörleri elde edelim.

1) Bernstein Polinomları:

$K_n(x,t,u) = \left(1 - \frac{ux}{1+t}\right)^n$ olsun. Bu durumda

$$\frac{\partial}{\partial u} K_n(x,t,u)\,|_{\substack{u=u_1\\ t=0}} = n(1-u_1x)^{n-1}.(-x)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} K_n(x,t,u)\,|_{\substack{u=u_1\\ t=0}} = n(n-1)(1-u_1x)^{n-2}.(-x)^2$$

ve bu şekilde devam ederek $K_n(x,t,u)$ fonksiyonunun ν defa türevini aldığımızda;

$$\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_n(x,t,u)\,|_{\substack{u=u_1\\ t=0}} = n(n-1)\ldots[n-(\nu-1)](1-u_1x)^{n-\nu}.(-x)^\nu$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}} K_{n+m}(x,t,u)\,|_{\substack{u=u_1\\ t=0}} &= (n+m)(n+m-1)\ldots[n+m-(\nu-2)]\\ &\quad\times(1-u_1x)^{n+m-(\nu-1)}.(-x)^{\nu-1}\end{aligned}$$

olup (4.0.3) ile verilen (4^o) özelliğini dikkate alırsak,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_{n+m}(x,t,u)\,|_{\substack{u=u_1\\ t=0}} &= n(n-1)\ldots[n-(\nu-1)](1-u_1x)^{n-\nu}.(-x)^\nu\\ &= -nx(n+m)(n+m-1)\ldots[n+m-(\upsilon-2)]\\ &\quad\times(1-u_1x)^{n+m-(\upsilon-1)}.(-x)^{\nu-1}\\ &= -nx\left[\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}} K_{n+m}(x,t,u)\,|_{\substack{u=u_1\\ t=0}}\right]\end{aligned}$$

eşitliğinden $m=-1$ bulunur. Bunu (4.0.5) de yerine yazarsak (4.0.4) operatörü;

$$\begin{aligned}L_n^{\langle 1\rangle}(f;x) &= \sum_{\nu=0}^{n} f\left(\frac{\nu}{n^2\Psi_n(0)}\right)\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-\nu+1)}{\nu!}\\ &\quad\times(x\alpha_n\Psi_n(0))^\nu K_{n-\upsilon}(x,t,u)\,\Big|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}}\\ &= \sum_{\nu=0}^{n} f\left(\frac{\nu}{n^2\Psi_n(0)}\right)\binom{n}{\nu}(x\alpha_n\Psi_n(0))^\nu(1-\alpha_n\Psi_n(0)x)^{n-\nu}\end{aligned} \quad (4.1.1)$$

şeklinde olup (1^o) ve (2^o) şartları sağlanır. Burada $\frac{\partial^{n+1}}{\partial u^{n+1}} K_n(x,t,u)\left.\right|_{\substack{u=u_1\\t=0}} = 0$ dır.

Eğer (4.1.1) de

$$\alpha_n = n,\ \Psi_n(0) = \frac{1}{n}$$

seçersek

$$L_n^{\langle 1\rangle}(f;x) = \sum_{\nu=0}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}\right)\binom{n}{\nu} x^{\nu}(1-x)^{n-\nu}$$

(3.0.1) ile ifade ettiğimiz Bernstein polinomlarını elde ederiz.

2) Bernstein-Chlodowsky Polinomları:

(4.1.1) ifadesinde

$$\alpha_n = n,\ \Psi_n(0) = \frac{1}{nb_n},\ \ \lim_{n\to\infty} b_n = \infty,\ \ \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0$$

seçtiğimizde ise;

$$L_n^{\langle 1\rangle}(f;x) = \sum_{\nu=0}^{n} f\left(\frac{\nu b_n}{n}\right)\binom{n}{\nu}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{\nu}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-\nu}$$

(3.2.1) ile tanımladığımız Bernstein-Chlodowsky polinomlarını elde ederiz.

3) Genelleştirilmiş Bernstein-Chlodowsky Polinomları:

$\alpha \geq 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$ olmak üzere (4.0.4) operatörünü

$$L_n^{\alpha,\beta}(f;x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\alpha x + \beta\frac{\nu}{n^2\Psi_n(0)}\right)\left[\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}} K_n(x,t,u)\left.\right|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\t=0}}\right]\frac{(-\alpha_n\Psi_n(0))^{\nu}}{\nu!}$$

olarak kabul edelim. Bu durumda $L_n^{\alpha,\beta}(f;x)$ operatörünün çekirdeğinde bulunan $K_n(x,t,u)$ fonksiyonuna (4.0.3) ile verilen (4^o) özelliğini ν defa uyguladığımızda $L_n^{\alpha,\beta}(f;x)$ ope-ratörü her n için;

$$
\begin{aligned}
L_n^{\alpha,\beta}(f;x) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\alpha x+\beta\frac{\nu}{n^2\Psi_n(0)}\right)\frac{n(n+m)(n+2m)\ldots[n+(\nu-1)m]}{\nu!} \\
&\quad \times (x\alpha_n\Psi_n(0))^{\nu} K_{n+\nu m}(x,t,u)\,|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}} \qquad (4.1.2)
\end{aligned}
$$

şeklinde elde edilir.

$K_n(x,t,u)=\left(1-\dfrac{ux}{1+t}\right)^n$ için $m=-1$ bulmuştuk. O halde bu değeri (4.1.2) de yerine yazarsak;

$$
\begin{aligned}
L_n^{\alpha,\beta}(f;x) &= \sum_{\nu=0}^{n} f\left(\alpha x+\beta\frac{\nu}{n^2\Psi_n(0)}\right)\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-\nu+1)}{\nu!} \\
&\quad \times (x\alpha_n\Psi_n(0))^{\nu} K_{n-v}(x,t,u)\,|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}} \\
&= \sum_{\nu=0}^{n} f\left(\alpha x+\beta\frac{\nu}{n^2\Psi_n(0)}\right)\binom{n}{\nu}(x\alpha_n\Psi_n(0))^{\nu}(1-\alpha_n\Psi_n(0)\,x)^{n-\nu}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Eğer bu operatörde

$$
\alpha_n=n,\ \Psi_n(0)=\frac{1}{nb_n},\ \lim_{n\to\infty}b_n=\infty,\ \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=0
$$

seçersek

$$
L_n^{\alpha,\beta}(f;x)=\sum_{\nu=0}^{n} f\left(\alpha x+\beta\frac{\nu b_n}{n}\right)\binom{n}{\nu}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{\nu}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-\nu}
$$

genelleştirilmiş Bernstein-Chlodowsky polinomları elde edilir.

4) Szász Operatörleri:

$K_n(x,t,u)=e^{-n(t+ux)}$olsun. Bu durumda

$$
\frac{\partial}{\partial u}K_n(x,t,u)\,|_{\substack{u=u_1\\ t=0}}=(-1)(nx)\,e^{-nu_1x}
$$

$$
\frac{\partial^2}{\partial u^2}K_n(x,t,u)\,|_{\substack{u=u_1\\ t=0}}=(-1)^2(nx)^2\,e^{-nu_1x}
$$

bu şekilde devam ederek $K_n(x,t,u)$ fonksiyonunun ν defa türevini aldığımızda;

$$\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}} K_n(x,t,u)\Big|_{\substack{u=u_1\\t=0}} = (-1)^{\nu} (nx)^{\nu} e^{-nu_1 x}$$

elde ederiz. Buradan

$$\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}} K_{n+m}(x,t,u)\Big|_{\substack{u=u_1\\t=0}} = (-1)^{\nu-1} \left[(m+n)x\right]^{\nu-1} e^{-(m+n)u_1 x}$$

olup (4.0.3) ile verilen (4^o) özelliğini dikkate alırsak,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}} K_n(x,t,u)\Big|_{\substack{u=u_1\\t=0}} &= (-1)^{\nu} (nx)^{\nu} e^{-nu_1 x} \\
&= -nx(-1)^{\nu-1} \left[(m+n)x\right]^{\nu-1} e^{-(m+n)u_1 x} \\
&= -nx\left[\frac{\partial^{\upsilon-1}}{\partial u^{\upsilon-1}} K_{n+m}(x,t,u)\Big|_{\substack{u=u_1\\t=0}}\right]
\end{aligned}$$

eşitliğinden $m=0$ buluruz. Bunu (4.0.5) de yerine yazarsak (4.0.4) operatörü

$$\begin{aligned}
L_n^{\langle 2\rangle}(f;x) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n^2\Psi_n(0)}\right) \frac{n.n...n}{\nu!} (x\alpha_n\Psi_n(0))^{\nu} K_n(x,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\t=0}} \\
&= e^{-n(\alpha_n\Psi_n(0)x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n^2\Psi_n(0)}\right) \frac{(nx)^{\nu}}{\nu!} (\alpha_n\Psi_n(0))^{\nu}
\end{aligned}$$

şeklini alır. Eğer bu operatörde

$$\alpha_n = n,\ \ \Psi_n(0) = \frac{1}{n}$$

seçersek

$$L_n^{\langle 2\rangle}(f;x) = e^{-nx} \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n}\right) \frac{(nx)^{\nu}}{\nu!}$$

Szász operatörlerini elde ederiz.

5) Baskakov Operatörü:

$K_n(x,t,u) = (1+ux)^{-n(t+1)}$ olsun. Bu durumda

$$\frac{\partial}{\partial u} K_n\left(x,t,u\right)|_{\substack{u=u_1\\t=0}} = \left(-1\right) nx(1+u_1x)^{-(n+1)}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} K_n\left(x,t,u\right)|_{\substack{u=u_1\\t=0}} = \left(-1\right)^2 n\left(n+1\right) x^2(1+u_1x)^{-(n+2)}$$

bu şekilde devam edildiğinde $K_n\left(x,t,u\right)$ fonksiyonunun ν. türevi

$$\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_n\left(x,t,u\right)|_{\substack{u=u_1\\t=0}} = \left(-1\right)^\nu n\left(n+1\right)...\left(n+\nu-1\right) x^\nu(1+u_1x)^{-(n+\nu)}$$

olarak elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}} K_{n+m}\left(x,t,u\right)|_{\substack{u=u_1\\t=0}} &= \left(-1\right)^{\nu-1}\left(n+m\right)\left(n+m+1\right)...\left(n+m+\nu-2\right)\\ &\quad \times x^{\nu-1}(1+u_1x)^{-(n+m+\nu-1)}\end{aligned}$$

olup (4.0.3) ile verilen (4^o) şartından

$$\begin{aligned}\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_n\left(x,t,u\right)|_{\substack{u=u_1\\t=0}} &= \left(-1\right)^\nu n\left(n+1\right)...\left(n+\nu-1\right) x^\nu(1+u_1x)^{-(n+\nu)}\\ &= -nx\left(-1\right)^{\nu-1}\left(n+m\right)\left(n+m+1\right)...\left(n+m+\nu-2\right)\\ &\quad \times x^{\nu-1}(1+u_1x)^{-(n+m+\nu-1)}\\ &= -nx\left[\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}} K_{n+m}\left(x,t,u\right)|_{\substack{u=u_1\\t=0}}\right]\end{aligned}$$

$m=1$ bulunur. Bunu (4.0.5) de yerine yazarsak (4.0.4) operatörü

$$\begin{aligned}L_n^{\langle 3\rangle}\left(f;x\right) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n^2\Psi_n\left(0\right)}\right)\frac{n\left(n+1\right)\left(n+2\right)...(n+\nu-1)}{\nu!}\\ &\quad \times(x\alpha_n\Psi_n\left(0\right))^\nu K_{n+\nu}\left(x,t,u\right)|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\t=0}}\\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n^2\Psi_n\left(0\right)}\right)\binom{n+\nu-1}{\nu}(x\alpha_n\Psi_n\left(0\right))^\nu\\ &\quad \times\left(1+\alpha_n\Psi_n\left(0\right)x\right)^{-(n+\nu)} \qquad (4.1.3)\end{aligned}$$

şeklini alır.

Eğer (4.1.3) de

$$\alpha_n = n, \;\; \Psi_n(0) = \frac{1}{n}$$

seçersek

$$L_n^{\langle 3 \rangle}(f;x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n}\right) \binom{n+\nu-1}{\nu} \frac{x^{\nu}}{(1+x)^{n+\nu}}$$

operatörü elde edilir. Bu operatör Baskakov operatörü olarak bilinir.

6) Genelleştirilmiş Baskakov Operatörü:

(4.0.4) genel operatöründe $K_n(z)$ bir analitik fonksiyon olsun ve (4^o) şartı sağlansın.

$$K_n(x,t,u) = K_n(t+ux)$$

alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}} K_n(x,t,u)\left|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}}\right. &= \frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}} K_n(t+ux)\left|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}}\right. \\ &= x^{\nu} K_n^{(\nu)}(\alpha_n \Psi_n(0)\, x) \end{aligned}$$

olduğundan (4.0.4) operatörü

$$L_n^{\langle 4 \rangle}(f;x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n^2 \Psi_n(0)}\right) K_n^{(\nu)}(\alpha_n \Psi_n(0)\, x) \frac{(-x\alpha_n \Psi_n(0))^{\nu}}{\nu!} \tag{4.1.4}$$

şeklini alır.

Eğer (4.1.4) de

$$\alpha_n = n, \;\; \Psi_n(0) = \frac{1}{n}$$

seçersek

$$L_n^{\langle 4 \rangle}(f;x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n}\right) K_n^{(\nu)}(x) \frac{(-x)^{\nu}}{\nu!}$$

olup $K_n^{(\nu)}(x) = \phi_n^{(\nu)}(x)$ dersek,

$$L_n^{\langle 4\rangle}(f;x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n}\right)\phi_n^{(\nu)}(x)\frac{(-x)^{\nu}}{\nu!}$$

genelleştirilmiş Baskakov operatörünü elde ederiz.

7) Bleimann, Butzer ve Hahn Operatörleri:

(4.0.3) ile verilen (4^0) şartını

$$-\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}}K_n(x,t,u)\big|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}}=\frac{nx}{1+x}\left[\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}}K_{n+m}(x,t,u)\big|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}}\right] \tag{4.1.5}$$

olarak kabul edelim. (4.0.4) ile verilen $L_n(f;x)$ genel operatörünün çekirdeğinde bulunan $K_n(x,t,u)$ fonksiyonuna bu özelliği ν defa uygularsak

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}}K_n(x,t,u)\big|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}} &= (-1)\left(\frac{x}{1+x}\right)n\left[\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}}K_{n+m}(x,t,u)\big|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}}\right]\\
&= (-1)^2\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 n(n+m)\\
&\quad\times\left[\frac{\partial^{\nu-2}}{\partial u^{\nu-2}}K_{n+2m}(x,t,u)\big|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}}\right]\\
&= (-1)^3\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 n(n+m)(n+2m)\\
&\quad\times\left[\frac{\partial^{\nu-3}}{\partial u^{\nu-3}}K_{n+3m}(x,t,u)\big|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}}\right]\\
&\quad .\\
&\quad .\\
&\quad .\\
&= (-1)^{\nu}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{\nu} n(n+m)\ldots[n+(\nu-1)m]\\
&\quad\times K_{n+\nu m}(x,t,u)\big|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}}
\end{aligned}$$

(4.0.4) operatörü $\forall n$ için;

$$\begin{aligned} L_n(f;x) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n^2\Psi_n(0)}\right)\frac{n(n+m)\ldots[n+(\nu-1)m]}{\nu!} \\ &\quad\times\frac{(\alpha_n\Psi_n(0)x)^{\nu}}{(1+x)^{\nu}}K_{n+\nu m}(x,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}} \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

şeklinde elde edilir.

$K_n(x,t,u)=\left(1-\frac{ux}{1+x}\right)^{n(t+1)}$ olsun. Bu durumda

$$\frac{\partial}{\partial u}K_n(x,t,u)\Big|_{\substack{u=u_1\\ t=0}}=(-1)\,n\left(\frac{x}{1+x}\right)\left(1-\frac{u_1x}{1+x}\right)^{n-1}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}K_n(x,t,u)\Big|_{\substack{u=u_1\\ t=0}}=(-1)^2\,n(n-1)\left(\frac{x}{1+x}\right)^2\left(1-\frac{u_1x}{1+x}\right)^{n-2}$$

bu şekilde devam ederek $K_n(x,t,u)$ fonksiyonunun ν defa türevini aldığımızda

$$\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}}K_n(x,t,u)\Big|_{\substack{u=u_1\\ t=0}}=(-1)^{\nu}\,n(n-1)\ldots[n-(\nu-1)]\left(\frac{x}{1+x}\right)^{\nu}\left(1-\frac{u_1x}{1+x}\right)^{n-\nu}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}}K_{n+m}(x,t,u)\Big|_{\substack{u=u_1\\ t=0}} &= (-1)^{\nu-1}(n+m)(n+m-1)\ldots[n+m-(\nu-2)] \\ &\quad\times\left(\frac{x}{1+x}\right)^{\nu-1}\left(1-\frac{u_1x}{1+x}\right)^{n+m-\nu+1} \end{aligned}$$

olup (4.1.5) ile ifade ettiğimiz özellikten

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}}K_n(x,t,u)\Big|_{\substack{u=u_1\\ t=0}} &= (-1)^{\nu}\,n(n-1)\ldots[n-(\nu-1)]\left(\frac{x}{1+x}\right)^{\nu}\left(1-\frac{u_1x}{1+x}\right)^{n-\nu} \\ &= -\frac{nx}{x+1}(-1)^{\nu-1}(n+m)(n+m-1)\ldots[n+m-(\nu-2)] \\ &\quad\times\left(\frac{x}{1+x}\right)^{\nu-1}\left(1-\frac{u_1x}{1+x}\right)^{n+m-\nu+1} \\ &= -\frac{nx}{1+x}\left[\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}}K_{n+m}(x,t,u)\Big|_{\substack{u=u_1\\ t=0}}\right] \end{aligned}$$

$m=-1$ bulunur. Bunu (4.1.6) da yerine yazarsak (4.0.4) operatörü;

$$\begin{aligned} L_n^{\langle 5\rangle}(f;x) &= \sum_{\nu=0}^{n} f\left(\frac{\nu}{n^2\Psi_n(0)}\right)\frac{n(n-1)(n-2)...(n-\nu+1)}{\nu!} \\ &\times \frac{(\alpha_n\Psi_n(0)x)^{\nu}}{(1+x)^{\nu}}K_{n-\nu}(x,t,u)\left|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}}\right. \\ &= \sum_{\nu=0}^{n} f\left(\frac{\nu}{n^2\Psi_n(0)}\right)\binom{n}{\nu}\frac{(\alpha_n\Psi_n(0)x)^{\nu}}{(1+x)^{\nu}}\left(1-\frac{\alpha_n\Psi_n(0)x}{1+x}\right)^{n-\nu} \end{aligned}$$

şeklini alır. Burada $\dfrac{\partial^{n+1}}{\partial u^{n+1}}K_n(x,t,u)\left|_{\substack{u=u_1\\ t=0}}\right. = 0$ dır.

Eğer $L_n^{\langle 5\rangle}(f;x)$ de

$$\alpha_n=\frac{n^2}{n-\nu+1},\ \Psi_n(0)=\frac{1}{n^2}(n-\nu+1)$$

seçersek

$$\begin{aligned} L_n^{\langle 5\rangle}(f;x) &= \sum_{\nu=0}^{n} f\left(\frac{\nu}{n-\nu+1}\right)\binom{n}{\nu}\frac{x^{\nu}}{(1+x)^{\nu}}\left(\frac{1}{1+x}\right)^{n-\nu} \\ &= \frac{1}{(1+x)^n}\sum_{\nu=0}^{n} f\left(\frac{\nu}{n-\nu+1}\right)\binom{n}{\nu}x^{\nu} \end{aligned}$$

operatörlerini elde ederiz. Bu da (3.6.1) de tanımlanan Bleimann, Butzer ve Hahn operatörüdür.

8) Balász Operatörleri:

(4.0.3) ile verilen (4^0) şartını;

$$-\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}}K_n(x,t,u)\left|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}}\right. = \frac{na_nx}{1+a_nx}\left[\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}}K_{n+m}(x,t,u)\left|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}}\right.\right] \qquad (4.1.7)$$

olarak kabul edelim. (4.0.4) de tanımlanan $L_n(f;x)$ genel operatörünün içinde bulunan $K_n(x,t,u)$ fonksiyonuna bu özelliği ν defa uygulayalım

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}}K_n(x,t,u)\left.\right|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}} &= (-1)\left(\frac{a_nx}{1+a_nx}\right)n\left[\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}}K_{n+m}(x,t,u)\left.\right|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}}\right]\\
&= (-1)^2\left(\frac{a_nx}{1+a_nx}\right)^2 n(n+m)\\
&\quad\times\left[\frac{\partial^{\nu-2}}{\partial u^{\nu-2}}K_{n+2m}(x,t,u)\left.\right|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}}\right]\\
&= (-1)^3\left(\frac{a_nx}{1+a_nx}\right)^3 n(n+m)(n+2m)\\
&\quad\times\left[\frac{\partial^{\nu-3}}{\partial u^{\nu-3}}K_{n+3m}(x,t,u)\left.\right|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}}\right]\\
&\quad.\\
&\quad.\\
&\quad.\\
&= (-1)^{\nu}\left(\frac{a_nx}{1+a_nx}\right)^{\nu} n(n+m)\ldots[n+(\nu-1)m]\\
&\quad\times K_{n+\nu m}(x,t,u)\left.\right|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}}
\end{aligned}$$

O halde (4.0.4) operatörü $\forall n$ için;

$$\begin{aligned}
L_n(f;x) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n^2\Psi_n(0)}\right)\frac{n(n+m)\ldots[n+(\nu-1)m]}{\nu!}\\
&\quad\times\frac{(\alpha_n\Psi_n(0)a_nx)^{\nu}}{(1+a_nx)^{\nu}}K_{n+\nu m}(x,t,u)\left.\right|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\ t=0}} \qquad (4.1.8)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

$K_n(x,t,u)=\left(1-\frac{ua_nx}{1+a_nx}\right)^{n(t+1)}$ olsun. Bu durumda

$$\frac{\partial}{\partial u}K_n(x,t,u)\left.\right|_{\substack{u=u_1\\ t=0}}=(-1)\,n\left(\frac{a_nx}{1+a_nx}\right)\left(1-\frac{u_1a_nx}{1+a_nx}\right)^{n-1}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}K_n(x,t,u)\left.\right|_{\substack{u=u_1\\ t=0}}=(-1)^2\,n(n-1)\left(\frac{a_nx}{1+a_nx}\right)^2\left(1-\frac{u_1a_nx}{1+a_nx}\right)^{n-2}$$

bulunur. Bu şekilde devam ederek $K_n(x,t,u)$ fonksiyonunun ν defa türevini aldığımızda;

$$\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_n(x,t,u)\,|_{\substack{u=u_1\\t=0}} = (-1)^\nu\, n(n-1)\ldots[n-(\nu-1)]\left(\frac{a_n x}{1+a_n x}\right)^\nu \left(1-\frac{u_1 a_n x}{1+a_n x}\right)^{n-\nu}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}} K_{n+m}(x,t,u)\,|_{\substack{u=u_1\\t=0}} &= (-1)^{\nu-1}(n+m)(n+m-1)\ldots[n+m-(\nu-2)]\\ &\quad\times\left(\frac{a_n x}{1+a_n x}\right)^{\nu-1}\left(1-\frac{u_1 a_n x}{1+a_n x}\right)^{n+m-\nu+1}\end{aligned}$$

olup (4.1.7) den

$$\begin{aligned}\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_n(x,t,u)\,|_{\substack{u=u_1\\t=0}} &= (-1)^\nu\, n(n-1)\ldots[n-(\nu-1)]\\ &\quad\times\left(\frac{a_n x}{1+a_n x}\right)^\nu\left(1-\frac{u_1 a_n x}{1+a_n x}\right)^{n-\nu}\\ &= -\frac{n a_n x}{1+a_n x}(-1)^{\nu-1}(n+m)(n+m-1)\ldots[n+m-(\nu-2)]\\ &\quad\times\left(\frac{a_n x}{1+a_n x}\right)^{\nu-1}\left(1-\frac{u_1 a_n x}{1+a_n x}\right)^{n+m-\nu+1}\\ &= -\frac{n a_n x}{1+a_n x}\left[\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}} K_{n+m}(x,t,u)\,|_{\substack{u=u_1\\t=0}}\right]\end{aligned}$$

$m=-1$ bulunur. Bunu (4.1.8) de yerine yazarsak (4.0.4) operatörü;

$$\begin{aligned}L_n^{\langle 6\rangle}(f;x) &= \sum_{\nu=0}^{n} f\left(\frac{\nu}{n^2\Psi_n(0)}\right)\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-\nu+1)}{\nu!}\\ &\quad\times\frac{(\alpha_n\Psi_n(0)\,a_n x)^\nu}{(1+a_n x)^\nu} K_{n-\nu}(x,t,u)\,|_{\substack{u=\alpha_n\Psi_n(t)\\t=0}}\\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n^2\Psi_n(0)}\right)\binom{n}{\nu}\frac{(\alpha_n\Psi_n(0)\,a_n x)^\nu}{(1+a_n x)^\nu}\left(1-\frac{\alpha_n\Psi_n(0)\,a_n x}{1+a_n x}\right)^{n-\nu}\end{aligned}$$

şeklini alır. Burada $\frac{\partial^{n+1}}{\partial u^{n+1}} K_n(x,t,u)\,|_{\substack{u=u_1\\t=0}} = 0$ dır. Eğer bu operatörde

$$\alpha_n = \frac{n^2}{b_n},\ \ \Psi_n(0) = \frac{b_n}{n^2}$$

seçersek

$$
\begin{aligned}
L_n^{\langle 6\rangle}(f;x) &= \sum_{\nu=0}^{n} f\left(\frac{\nu}{b_n}\right)\binom{n}{\nu}\frac{(a_n x)^{\nu}}{(1+a_n x)^{\nu}}\frac{1}{(1+a_n x)^{n-\nu}} \\
&= \frac{1}{(1+a_n x)^{n}}\sum_{\nu=0}^{n} f\left(\frac{\nu}{b_n}\right)\binom{n}{\nu}(a_n x)^{\nu}
\end{aligned}
$$

elde edilir ki bu da (3.7.1) ile tanımlanan Balász operatörüdür.

9) Meyer-König ve Zeller Operatörleri:

(4.0.4) genel operatöründe n yerine $n+1$ yazılmasıyla elde edilen ifadeye $L_n^{\langle 7\rangle}(f;x)$ diyelim

$$
\begin{aligned}
L_n^{\langle 7\rangle}(f;x) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{(n+1)^2\Psi_{n+1}(0)}\right)\left[\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}}K_{n+1}(x,t,u)\,|_{\substack{u=\alpha_{n+1}\Psi_{n+1}(t)\\ t=0}}\right] \\
&\quad \times\frac{(-\alpha_{n+1}\Psi_{n+1}(0))^{\nu}}{\nu!}
\end{aligned}
\tag{4.1.9}
$$

(4.0.3) ile verilen (4^0) şartını ise

$$
-\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}}K_{n+1}(x,t,u)\,|_{\substack{u=\alpha_{n+1}\Psi_{n+1}(t)\\ t=0}} = \frac{(n+1)x}{1-x}\left[\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}}K_{n+1+m}(x,t,u)\,|_{\substack{u=\alpha_{n+1}\Psi_{n+1}(t)\\ t=0}}\right]
\tag{4.1.10}
$$

olarak kabul edelim.$L_n^{\langle 7\rangle}(f;x)$ operatörünün çekirdeğinde bulunan $K_{n+1}(x,t,u)$ fonksiyonuna (4.1.10) özelliğini ν defa uygularsak;

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}}K_{n+1}(x,t,u)\,|_{\substack{u=\alpha_{n+1}\Psi_{n+1}(t)\\ t=0}} &= -\frac{(n+1)x}{1-x}\left[\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}}K_{n+1+m}(x,t,u)\,|_{\substack{u=\alpha_{n+1}\Psi_{n+1}(t)\\ t=0}}\right] \\
&= (-1)^2\left(\frac{x}{1-x}\right)^2(n+1)(n+1+m) \\
&\quad \times\left[\frac{\partial^{\nu-2}}{\partial u^{\nu-2}}K_{n+1+2m}(x,t,u)\,|_{\substack{u=\alpha_{n+1}\Psi_{n+1}(t)\\ t=0}}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^3\left(\frac{x}{1-x}\right)^3 (n+1)(n+1+m)(n+1+2m) \\
&\quad \times \left[\frac{\partial^{\nu-3}}{\partial u^{\nu-3}} K_{n+1+3m}(x,t,u)\,|_{\substack{u=\alpha_{n+1}\Psi_{n+1}(t)\\ t=0}}\right] \\
&\quad . \\
&\quad . \\
&\quad . \\
&= (-1)^\nu\left(\frac{x}{1-x}\right)^\nu (n+1)\ldots[n+1+(\nu-1)m] \\
&\quad \times K_{n+1+\nu m}(x,t,u)\,|_{\substack{u=\alpha_{n+1}\Psi_{n+1}(t)\\ t=0}}
\end{aligned}
$$

$L_n^{\langle 7\rangle}(f;x)$ operatörü $\forall n$ için,

$$
\begin{aligned}
L_n^{\langle 7\rangle}(f;x) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{(n+1)^2\Psi_{n+1}(0)}\right)\frac{(n+1)\ldots[n+1+(\nu-1)m]}{\nu!} \\
&\quad \times \frac{x^\nu}{(1-x)^\nu} K_{n+1+\nu m}(x,t,u)\,|_{\substack{u=\alpha_{n+1}\Psi_{n+1}(t)\\ t=0}} \qquad (4.1.11)
\end{aligned}
$$

şeklinde elde edilir.

$K_{n+1}(x,t,u) = \left(1+\frac{ux}{1-x}\right)^{-(n+1)(t+1)}$ olsun. Bu durumda

$$
\frac{\partial}{\partial u} K_{n+1}(x,t,u)\,|_{\substack{u=u_1\\ t=0}} = (-1)\left(\frac{x}{1-x}\right)(n+1)\left(1+\frac{u_1 x}{1-x}\right)^{-(n+2)}
$$

$$
\frac{\partial^2}{\partial u^2} K_{n+1}(x,t,u)\,|_{\substack{u=u_1\\ t=0}} = (-1)^2\left(\frac{x}{1-x}\right)^2 (n+1)(n+2)\left(1+\frac{u_1 x}{1-x}\right)^{-(n+2)}
$$

bulunur. Böylece $K_{n+1}(x,t,u)$ fonksiyonunun ν. türevi

$$
\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_{n+1}(x,t,u)\,|_{\substack{u=u_1\\ t=0}} = (-1)^\nu\left(\frac{x}{1-x}\right)^\nu (n+1)\ldots(n+\nu)\left(1+\frac{u_1 x}{1-x}\right)^{-(n+\nu)}
$$

olarak elde edilir. Buradan

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}} K_{n+1+m}(x,t,u)\left.\right|_{\substack{u=u_1\\ t=0}} &= (-1)^{\nu-1}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\nu-1}(n+m+1)...(n+m+\nu-1) \\
&\quad \times\left(1+\frac{u_1 x}{1-x}\right)^{-(n+m+\nu-1)}
\end{aligned}
$$

bulunur. (4.1.10) dan

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}} K_{n+1}(x,t,u)\left.\right|_{\substack{u=u_1\\ t=0}} &= (-1)^{\nu}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\nu}(n+1)...(n+\nu)\left(1+\frac{u_1 x}{1-x}\right)^{-(n+\nu)} \\
&= -\frac{(n+1)x}{1-x}(-1)^{\nu-1}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\nu-1}(n+m+1)...(n+m+\nu-1) \\
&\quad \times\left(1+\frac{u_1 x}{1-x}\right)^{-(n+m+\nu-1)} \\
&= -\frac{(n+1)x}{1-x}\left[\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}} K_{n+1+m}(x,t,u)\left.\right|_{\substack{u=u_1\\ t=0}}\right]
\end{aligned}
$$

$m=1$ bulunur. Bunu (4.1.1) de yerine yazarsak

$$
\begin{aligned}
L_n^{\langle 7\rangle}(f;x) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{(n+1)^2\Psi_{n+1}(0)}\right)\frac{(n+1)(n+2)(n+3)...(n+\nu)}{\nu!} \\
&\quad \times\frac{x^{\nu}}{(1-x)^{\nu}} K_{n+1+\nu}(x,t,u)\left.\right|_{\substack{u=\alpha_{n+1}\Psi_{n+1}(t)\\ t=0}} \\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{(n+1)^2\Psi_{n+1}(0)}\right)\binom{n+\nu}{\nu}\frac{x^{\nu}}{(1-x)^{\nu}} \\
&\quad \times\left(1+\frac{\alpha_{n+1}\Psi_{n+1}(0)\,x}{1-x}\right)^{-(n+1+\nu)}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Eğer bu operatörde

$$
\alpha_{n+1}=\frac{(n+1)^2}{n+\nu},\ \ \Psi_{n+1}(0)=\frac{n+\nu}{(n+1)^2}
$$

seçersek

$$
\begin{aligned}
L_n^{\langle 7\rangle}(f;x) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n+\nu}\right)\binom{n+\nu}{\nu}\frac{x^{\nu}}{(1-x)^{\nu}}(1-x)^{n+1+\nu} \\
&= (1-x)^{n+1}\sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n+\nu}\right)\binom{n+\nu}{\nu}x^{\nu}
\end{aligned}
$$

Meyer-König ve Zeller operatörlerini elde ederiz.

KAYNAKLAR

Altomare, F. and Campiti, M. 1993. Korovkin-type approximation theory and its applications. Walter de Gruyter, 627 p., New York.

Balász, C. 1975. Approximation by Bernstein type rational functions. Acta Math. Acad. Sci. Hungar, Vol. 26, pp. 123-134.

Baskakov, V. A. 1957. An example of a sequence of linear positive operators in space of continuous functions. Dokl. Akad. Nauk. SSSR (in Russian) Vol. 113, pp. 249-251.

Bernstein, S. 1912. Démonstration du théorème de Weierstrass fondeé sur le calcul des probabilités. Commun. Soc. Math. Kharkow (2), Vol. 13, pp. 1-2.

Bleimann, G. , Butzer, P.L. , Hahn L. 1980. A Bernstein-type operator approximating continuous functions on the semi axis. Proc. Netherl. Acad. Sci. A83 Indag. Math, 42; pp. 255-262.

Gadjiev, A. D. and Ibragimov, I. I. 1970. On a sequence of linear positive operators, Soviet Math. Dovl., Vol. 11, pp. 1092-1095.

E. A. Gadjiev and E. İbikli 1995. On Generalization of Bernstein-Chlodowsky polynomials, H. Ü. Fen ve Müh. Bilimleri Dergisi, Vol. 24. Series B

Gadjiev, A. D. and Çakar, Ö. 1999. On uniform approximations by Bleimann, Butzer and Hahn operators on all positive semi-axis. Trans. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys. Tech. Math. Sci, Vol. 19; No. 5, pp. 21-26.

Hacıyev, A. ve Hacısalihoğlu, H.H. 1995. Lineer pozitif operatör dizilerinin yakınsaklığı. A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, 100 s, Ankara.

Korovkin, P. P. 1953. On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions. Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S), Vol. 90, pp. 961-964.

Korovkin, P. P. 1960. Linear operators and approximation theory. Russian Monographs and Texts on advanced Math., III, 1-63p., Gordon&Breach.

Lorentz, G. G. 1953. Bernstein polynomials. University of Toronto Press. 36 p., Toronto.

Meyer, W-Konig and Zeller, K. 1960. Bernsteinsche Potenzreiheni Studia Math., Vol. 19, pp. 89-94.

Rudin, W. 1921. Functional analysis. Kingsport Press, Inc. 6p., United States of America.

Szász, O. 1950. Generalization of S. Bernstein's polynomials to the infinite interval. Journ. of Research of the Nat. Bureau of Stand. 45; 239-245.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Serap KAYA
Doğum Yeri	:	Salihli/ Manisa
Doğum Tarihi	:	07. 09. 1984
Medeni Hali	:	Bekar
Yabancı Dili	:	İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	:	Sekine Evren Anadolu Lisesi (2002)
Lisans	:	Gazi Üniversitesi Kırşehir Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (2009)