

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GEÇİKMELİ SABİT KATSAYILI LİNEER
DİFERENSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİN
İKİ NOKTALI SINIR DEĞER PROBLEMİ
Yavuz YAZICI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK

ŞUBAT-2012
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL VE ONAYI

Yavuz YAZICI tarafından hazırlanan “GECİKMELİ SABİT KATSAYILI LİNEER DİFERENSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİN İKİ NOKTALI SINIR DEĞER PROBLEMİ” adlı tez çalışması 17/02/2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü MATEMATİK Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan

Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL

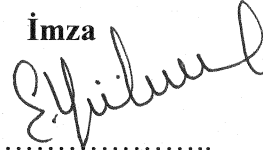
Danışman

Prof. Dr. Haydar BULGAK

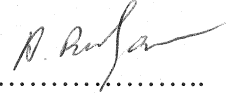
Üye

Yrd. Doç. Dr. Ali Osman ÇIBIKDİKEN

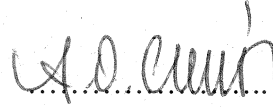
İmza



.....



.....



Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Doç. Dr. Aşır GENÇ
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all materials and results that are not original to this work.



Yavuz YAZICI
17.02.2012

ÖZET**YÜKSEK LİSANS TEZİ****GEÇİKMELİ SABİT KATSAYILI LİNEER DİFERENSİYEL DENKLEM
SİSTEMLERİN İKİ NOKTALI SINIR DEĞER PROBLEMİ****Yavuz YAZICI****Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı****Danışman: Prof. Dr. Haydar BULGAK****2012, 44 Sayfa****Jüri****Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL****Prof. Dr. Haydar BULGAK****Yrd. Doç. Dr. Ali Osman ÇIBIKDİKEN**

Bu çalışmada Gecikmeli Diferensiyel Denklemlerin kullanıldığı alanlar, çözüm yöntemleri ve iki noktalı sınır değer problemi incelenmiştir. Ayrıca “Cauchy Solver” bilgisayar yazılımı Gecikmeli Diferensiyel Denklemlerin çözümlerinin grafiklerini oluşturmada kullanıldı.

Anahtar Kelimeler: Adımlar Metodu, Cauchy Solver, Gecikmeli Diferensiyel Denklemler, İki Noktalı Sınır Değer Problemi.

ABSTRACT**MS THESIS****TWO POINT BOUNDARY VALUE PROBLEM
FOR DELAY LINEAR DIFFERENTIAL SYSTEMS
WITH CONSTANT COEFFICIENTS****Yavuz YAZICI****THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE
OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
IN MATHEMATICS****Advisor: Prof. Dr. Haydar BULGAK****2012, 44 Pages****Jury****Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL****Prof. Dr. Haydar BULGAK****Assist. Prof. Dr. Ali Osman ÇIBIKDİKEN**

In this study, the applications of delay differential equations, solution methods and two point boundary value problems were investigated. In addition, "The Cauchy Solver" computer software used in the graphics which solutions of delay differential equations.

Keywords: Cauchy Solver, Delay Differential Equations, Method of Steps, Two Point Boundary Value Problem.

ÖNSÖZ

Yüksek Lisans eğitimim boyunca ve tez çalışmalarım süresince benden yardımını, bilgisini ve tecrübelerini esirgemeyen değerli danışman hocam Prof. Dr. Haydar BULGAK' a saygılarımı sunar ve teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca hayatım boyunca manevi ve maddi desteğini hep yanımda hissettiğim değerli aileme sonsuz şükranlarımı sunarım.

Yavuz YAZICI

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
1. GİRİŞ VE KAYNAK ARAŞTIRMASI.....	8
2. GECİKMELİ DİFERENSİYEL DENKLEMLER.....	10
2.1. Diferensiyel Denklemlerin Sınıflandırılması.....	10
2.2. DDE ile ODE Arasındaki Farklılıklar	10
2.3. DDE'nin Uygulamaları.....	23
2.3.1 Trafik Akışı Problemi	23
2.3.2 Kontrol Mühendisliği.....	23
3. GECİKMELİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ	25
3.1. Çözümlerin Varlık ve Tekliği.....	25
3.2. Adımlar Metodu	26
3.3. Üstel Çözüm	31
3.3.1. Karakteristik Denklem	31
3.4. Lambert-W Fonksiyonu ile Çözüm	34
4. GECİKMELİ DİFERENSİYEL DENKLEMİN İKİ NOKTALI SINIR DEĞER PROBLEMİ.....	36
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	41
6. KAYNAKLAR.....	42
ÖZGEÇMİŞ	44

1. GİRİŞ VE KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bilindiği üzere adi diferensiyel denklemler ile yapılan modellemelerde değişim miktarı sadece içinde bulunduğu zamana bağlı olup geçmişteki değişim miktarından bağımsızdır. Ancak yapılan modellemenin gerçeğe daha yakın olması için söz konusu sistemin o andaki değişiminin geçmişteki durumdan bağımsız olarak düşünülmemesi gerektiği açıktır. Bu şekilde bir matematiksel modelleme yapıldığı zaman içinde olduğumuz olayları daha doğru değerlendirerek gelecek zamanda gelişecek durumlar hakkında bilgi sahibi olabiliriz.

Aslında birçok uygulama fiziksel sistemlerdeki değişim miktarının sadece bugünkü zaman ve duruma değil aynı zamanda geçmişteki durumlara da bağlı olduğunu göstermektedir.

Matematiksel modelleme yapılırken sistemde meydana gelen gecikmeler de göz önünde bulundurularak hesaplamalara katılırsa bu modelleme adi diferensiyel denklemlerden farklı olup “delay, neutral ve advanced” şeklinde sınıflandırılan diferensiyel denklemler karşımıza çıkar.

Delay tipli denklemler diferensiyel denklemler teorisinde oldukça önemli bir yere sahiptir. Bu tip denklemler dinamik sistemlerin önemli ve büyük bir sınıfıdır. Bu denklemler doğal ya da teknolojik kontrol problemlerinde sık sık karşımıza çıkar. Bu sistemlerde bir denetleyici sistemin durumunu gözlemler ve gözlemlerine dayanan ayarlamalar yapar. Bu ayarlamalar asla ani olmadığı için gözlemlene ve ayarlama eylemi arasında küçük de olsa bir gecikme meydana gelir.

Şimdi bu denklem üzerine yapılan çalışmalar hakkında bilgiler verelim.

Son yıllarda yapılan bilimsel çalışmalarda Gecikmeli Diferensiyel Denklemler (Delay Differential Equations- DDE) denklem tipi üzerine yapılan araştırmalar giderek artmaktadır.

Örneğin (Bellman ve Cooke, 1963) kitabında Gecikmeli Diferensiyel Denklemlerin çözümü için “Adımlar Yöntemi” (Method of Steps) ve “Laplace Dönüşümü” yöntemleri tanıtılmıştır. Ayrıca bu denklem tiplerinin bazı fiziksel olayların modellenmesi ve uygulama alanlarını inceleyen kitaplar yazılmıştır (Kuang, 1993), (Erneux, 2009), (Gopalsamy, 1992), (Arino ve ark., 2006), (Smith, 2010). Bunların yanı sıra (Bai ve Xu, 2005) çalışmada ikinci mertebeden DDE’ nin sınır değer probleminin pozitif çözümlerinin varlığı incelenmiştir.

Ayrıca (Glusering ve Luerksen, 2002) kitabında Gecikmeli Lineer Diferensiyel Denklem Sistemleri cebirsel olarak birçok değişik şekilde incelenmiştir. Son yıllarda bu alandaki yeni gelişmeleri ve bu denklem tipi üzerine yeni yönelimleri de içeren (Balachandran ve ark., 2009) kitabı da Gecikmeli Diferensiyel Denklemler üzerine yapılan çalışmalara ışık tutmuştur. Zaman gecikmeli denklem sistemlerinin Lambert- W fonksiyonu yardımıyla çözümleri (Sun Yi ve ark., 2010; Ulsoy ve Asl, 2003; Ulsoy ve Yi, 2006) çalışmalarında incelenmiştir.

Gecikmeli Diferensiyel Denklemlerinin; sınır değer problemi (Boundary Value Problem- BVP), (Jankowski, 2003; 2005; 2007; Boichuk ve ark., 2010) çalışmalarında, çözümlerin salınımlılığı (Oscillation) ve kararlılığı (Stability), (Zhang ve Chen, 2010) çalışmasında incelenmiştir.

Bu çalışmada ise bu denklem tipinin çözüm yöntemleri başlangıç ve sınır değer problemleri üzerinde duracağız.

Ayrıca Cauchy Solver (Bulgak ve Eminov, 2003) yazılımının kullanımında x-ekseni denklemdeki t- değişkeni, y- eksenini ise çözüm fonksiyonu olarak düşünülmüştür.

2. GECİKMELİ DİFERENSİYEL DENKLEMLER

2.1. Diferensiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

Farklı tipte diferensiyel denklemler vardır. Bunların bir sınıfı Gecikmeli, Nötral ve İleri tip denklemlerdir. Bu gibi denklemlerin basit bir sınıflandırılması (Bellman ve Cooke, 1963) kitabında aşağıdaki şekilde verilmiştir.

a_0, a_1, b_0, b_1, w Reel sayılar, f sürekli fonksiyon olsun ve t bir açık aralığı tarasın.

$$a_0 u'(t) + a_1 u'(t - w) + b_0 u(t) + b_1 u(t - w) = f(t) \quad (2.1)$$

genel diferensiyel denklem formu için;

$a_0, b_1 \neq 0, a_1 = 0$ ise Gecikmeli Diferensiyel Denklem,

$a_0 \neq 0, a_1 \neq 0$ ise Nötral Diferensiyel Denklem,

$a_0 = 0, a_1 \neq 0$ ise İleri Diferensiyel Denklem'dir.

2.2. DDE ile ODE Arasındaki Farklılıklar

DDE ile ODE denklemleri arasındaki en büyük fark giriş bölümünde de söylediğimiz gibi ODE denklemlerinin kullanıldığı fiziksel olayların matematiksel modellerinde sistemin herhangi andaki durumunun önceki durumlara bağlı olmadığı ve sistemde herhangi bir gecikme olmadığının varsayılmasıdır. Bu çoğu zaman işe yaramaktadır. Ancak DDE denklemleri ile yapılan modellemelerde bu gecikmeler hesaba katılarak matematiksel model oluşturulur.

Burada t zaman olarak algılandığı için gecikme kavramı kullanılmıştır. Bu nedenle elde edilen diferensiyel denklem zaman gecikme miktarı içerdiği için bu denklemleri analitik olarak çözmek de zordur. Bu denklemlerin çözüm yöntemlerine ilerleyen bölümlerde yer verilmiştir.

Bilindiği üzere bir DDE denklemin başlangıç değer problemini çözmenin temel yöntemi onu bir ODE denklem dizisine dönüştürmektir. Bu teknik ilk olarak Adımlar Yöntemi olarak (Bellman ve Cooke, 1963) kitabında incelenmiştir. Ayrıca DDE üzerinde yapılan (Ulsoy ve Yi, 2006; Smith, 2010) çalışmalarda da üzerinde durulmuştur.

Sabit katsayılı ve sabit gecikmeli homojen DDE hakkındaki gözlemler bu denklemin çözümlerinin ODE' nin çözümlerinin davranışından oldukça farklı olduğunu göstermektedir. Bunu bir örnekle gösterelim;

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda x(t) + \mu x(t-1), & \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ x(t) = \varphi(t), & -1 < t \leq 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

denklem sisteminin λ, μ değerlerinin değişimine göre çözümlerini inceleyelim.

Burada,

$\lambda = 2, \mu = 1, \varphi(t) = 1 - t$ için Örnek 2.1,

$\lambda = 1, \mu = 1, \varphi(t) = t^2$ için Örnek 2.2 çözülmüştür.

Örnek 2.1

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + x(t-1), & 0 < t \\ x(s) = 1 - s, & -1 < s < 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

Gecikmeli Cauchy problemini çözelim.

Başlangıç fonksiyonunu denklemde yerine yazarsak,

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 2 - t, & 0 < t \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad (2.4)$$

Adi diferensiyel denklemin Cauchy problemini elde ederiz. Buradaki adi diferensiyel denklemin çözümü,

$$x(t) = \frac{7}{4}e^{2t} + \frac{1}{2}t - \frac{3}{4}, \quad 0 < t < 1 \quad (2.5)$$

dır.

Şimdi Cauchy problemini çözelim,

$$v(t) = -t, \quad v'(t) = -1 \quad (2.6)$$

$$w(t) = 2, \quad w'(t) = 0 \quad (2.7)$$

$$v'(t) = -\frac{1}{2}w(t) \quad (2.8)$$

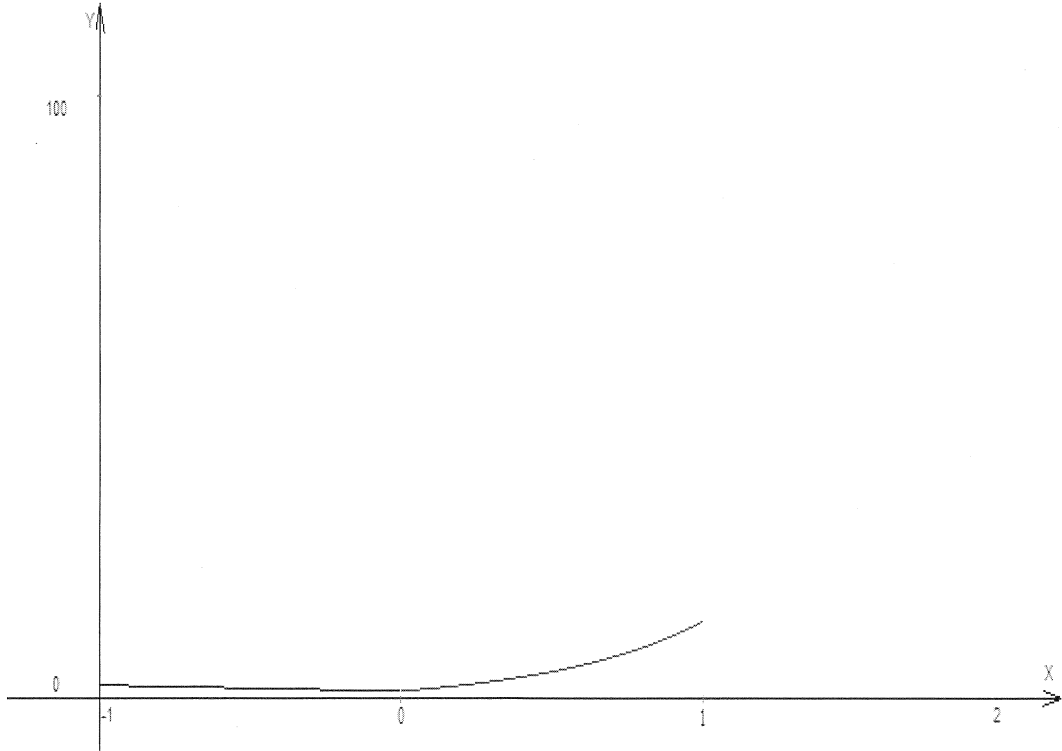
diyelim. Bu durumda aşağıdaki denklemi elde ederiz,

$$u'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}, \quad 0 < t < 1$$

(2.9)

$$u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bu Cauchy Probleminin Cauchy Solver yazılımı (Bulgak ve Eminov, 2003) ile grafiğini çizelim. $-1 < t < 0$ aralığındaki başlangıç fonksiyonu ile bulunan çözümün $0 < t < 1$ aralığındaki grafiği Şekil 2.1' de verilmiştir.



Şekil 2.1

Şimdi $1 < t < 2$ aralığındaki çözümü bulalım.

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + x(t-1), & 0 < t \\ x(s) = \frac{7}{4}e^{2s} + \frac{1}{2}s - \frac{3}{4}, & 0 < s < 1 \end{cases}$$

(2.10)

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + \frac{7}{4}e^{2(t-1)} + \frac{1}{2}t - \frac{5}{4}, & 1 < t < 2 \\ x(1) = \frac{7}{4}e^2 - \frac{1}{4} = 12,6808 \end{cases} \quad (2.11)$$

Homojen olmayan adi diferensiyel denklemin çözümü,

$$x(t) = \frac{7}{4}te^{2(t-1)} - \frac{1}{4}t + \frac{1}{2}, \quad 1 < t < 2 \quad (2.12)$$

dır. Şimdi Cauchy problemini çözelim,

$$v(t) = \frac{7}{4}e^{2(t-1)}, \quad v'(t) = \frac{7}{2}e^{2(t-1)} \quad (2.13)$$

$$w(t) = \frac{1}{2}t, \quad w'(t) = \frac{1}{2} \quad (2.14)$$

$$z(t) = -\frac{5}{4}, \quad z'(t) = 0 \quad (2.15)$$

$$w'(t) = -\frac{2}{5}z(t) \quad (2.16)$$

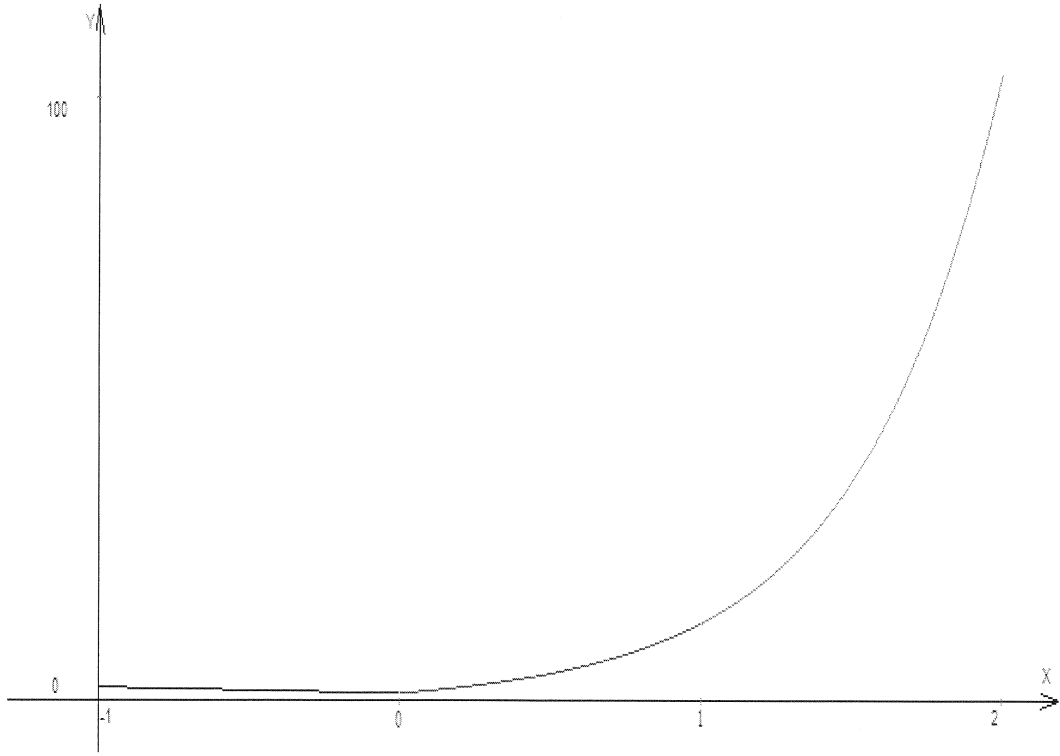
$$v'(t) = 2v(t) \quad (2.17)$$

diyelim. Bu durumda aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$u'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \\ w(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad 1 < t < 2 \quad (2.18)$$

$$u(1) = \begin{pmatrix} 12,6808 \\ 1,75 \\ 0,5 \\ -1,25 \end{pmatrix}$$

Elde edilen çözümün $1 < t < 2$ aralığındaki grafiği Şekil 2.2’de verilmiştir.



Şekil 2.2

Örnek 2.2

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 3x(t-1), & 0 < t \\ x(s) = s^2, & -1 < s < 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

Gecikmeli Cauchy problemini çözelim.

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 3t^2 - 6t + 3, & 0 < t < 1 \\ x(0) = 0, & -1 < s < 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

Homojen olmayan adi diferensiyel denklemin çözümü;

$$x(t) = \frac{3}{4}e^{2t} - \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{3}{4} \quad (2.21)$$

dır.

Şimdi (2.20) problemini çözelim.

$$v(t) = 3t^2, \quad v'(t) = 6t \quad (2.22)$$

$$w(t) = -6t, \quad w'(t) = -6 \quad (2.23)$$

$$z(t) = 3, \quad z'(t) = 0 \quad (2.24)$$

$$v'(t) = -w(t), \quad w'(t) = -2z(t) \quad (2.25)$$

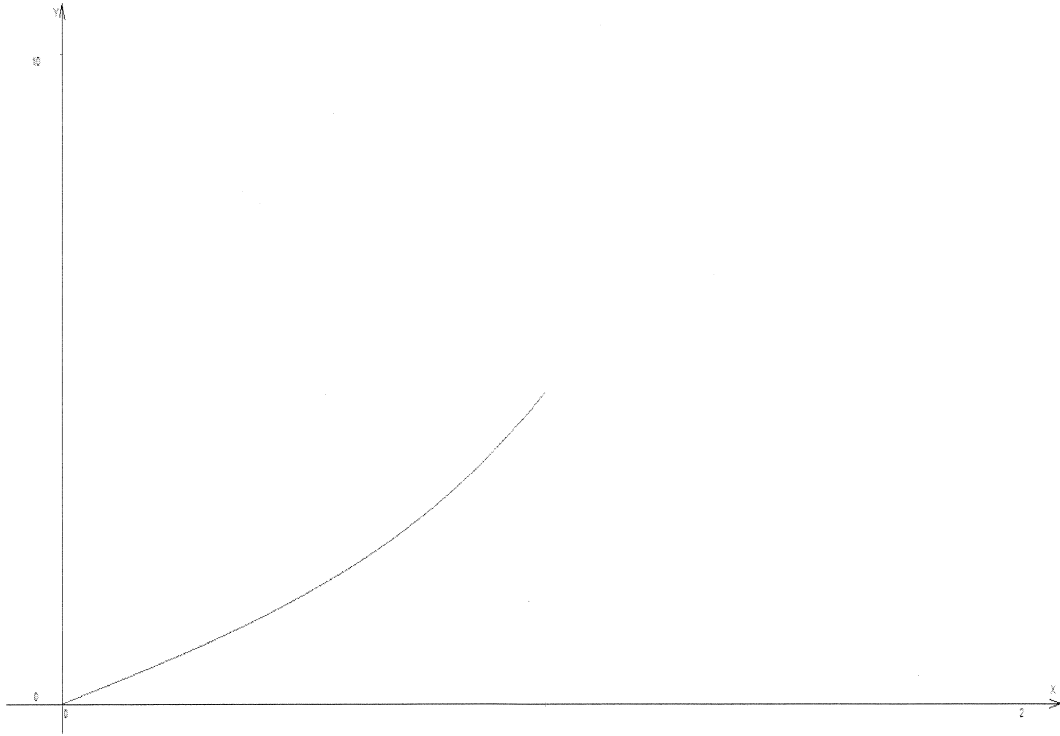
diyelim bu durumda denklemimiz aşağıdaki forma dönüşür.

$$u'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \\ w(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad 0 < t < 1 \quad (2.26)$$

$$u(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Bu Cauchy probleminin Cauchy Solver yazılımı (Bulgak ve Eminov, 2003) ile grafiğini çizelim.

Elde edilen çözümün $0 < t < 1$ aralığındaki grafiği Şekil 2.3’de verilmiştir.



Şekil 2.3

Şimdi $1 < t < 2$ aralığındaki çözümü bulalım.

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 3x(t-1), & 0 < t \\ x(s) = \frac{3}{4}e^{2s} - \frac{3}{2}s^2 + \frac{3}{2}s - \frac{3}{4}, & 0 < s < 1 \end{cases} \quad (2.27)$$

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + \frac{9}{4}e^{2(t-1)} - \frac{9}{2}t^2 + \frac{27}{2}t - \frac{39}{4}, & 1 < t < 2 \\ x(1) = \frac{3}{4}(e^2 - 1) \end{cases} \quad (2.28)$$

Homojen olmayan adi diferensiyel denklemin çözümü,

$$x(t) = \frac{9}{4}te^{2(t-1)} + \frac{9}{4}t^2 - \frac{9}{2}t + \frac{21}{8} \quad (2.29)$$

dır. Şimdi (2.28) Cauchy problemini çözelim.

$$v(t) = \frac{9}{4}te^{2(t-1)}, \quad v'(t) = \frac{9}{2}te^{2(t-1)} \quad (2.30)$$

$$w(t) = -\frac{9}{2}t^2, \quad w'(t) = -9t \quad (2.31)$$

$$z(t) = \frac{27}{2}t, \quad z'(t) = \frac{27}{2} \quad (2.32)$$

$$k(t) = -\frac{39}{4}, \quad k'(t) = 0 \quad (2.33)$$

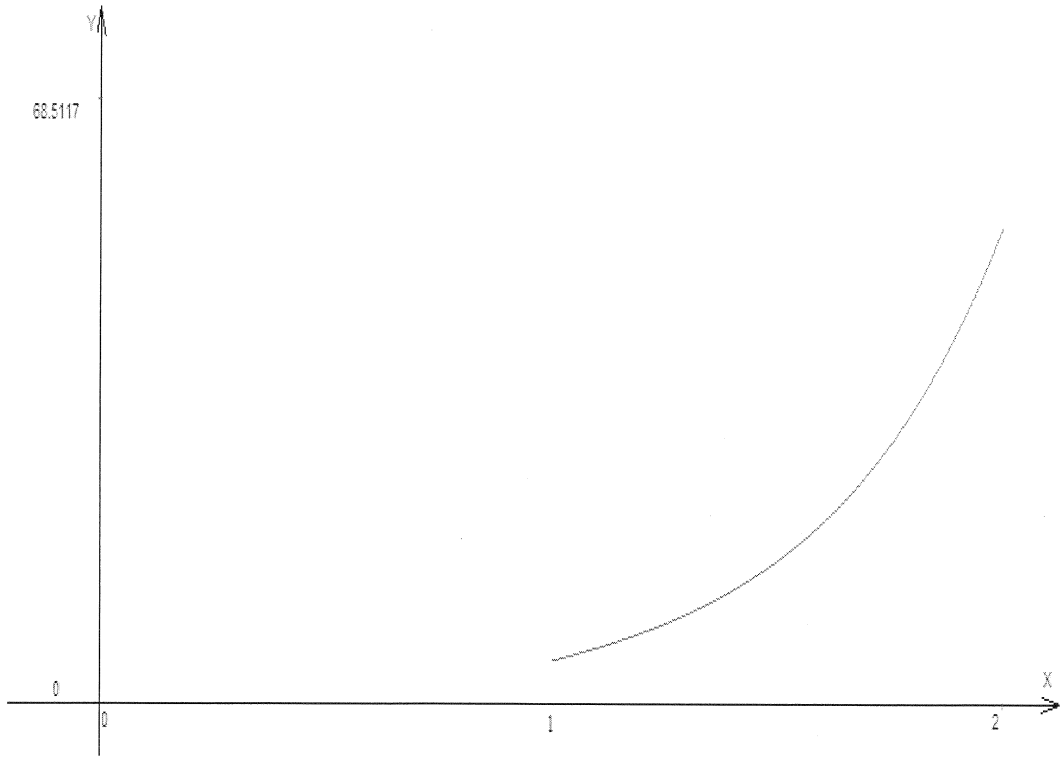
$$v'(t) = 2v(t), \quad w'(t) = \frac{-2}{3}z(t), \quad z'(t) = -\frac{18}{13}k(t) \quad (2.34)$$

diyelim bu durumda denklemimiz aşağıdaki forma dönüşür.

$$u'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{18}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \\ w(t) \\ z(t) \\ k(t) \end{pmatrix}, \quad 1 < t < 2 \quad (2.35)$$

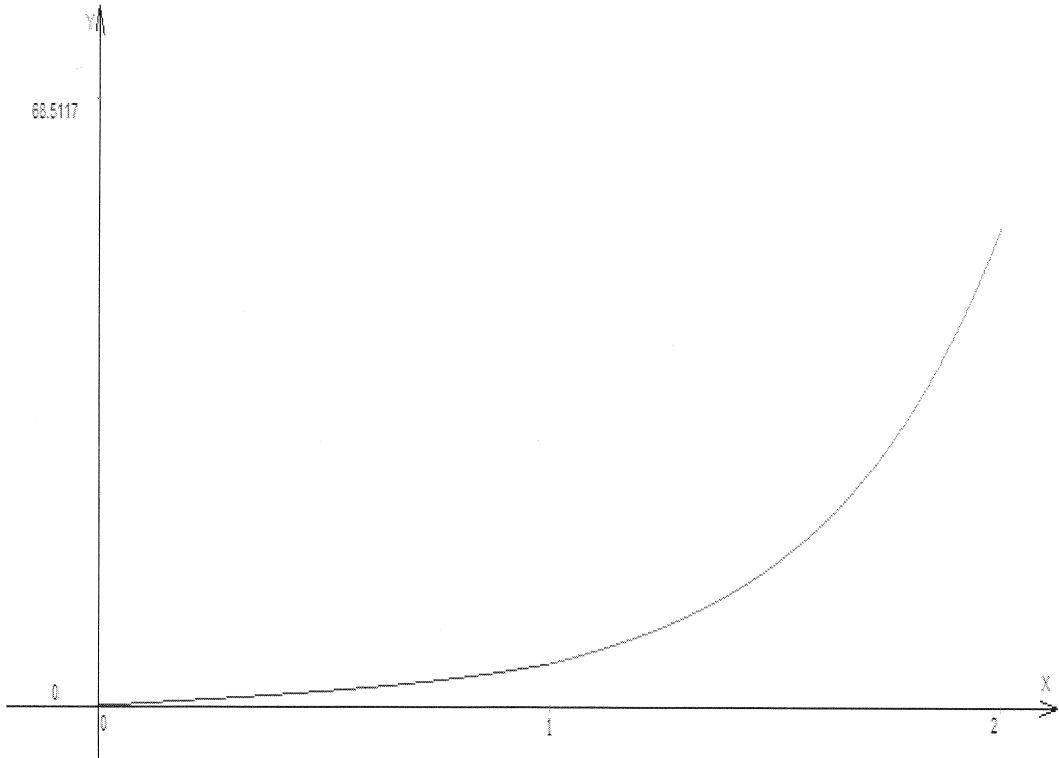
$$u(1) = \begin{pmatrix} 4,7918 \\ 4,5 \\ -4,5 \\ 13,5 \\ -9,75 \end{pmatrix}$$

Elde edilen çözümün $1 < t < 2$ aralığındaki grafiği Şekil 2.4’de verilmiştir.



Şekil 2.4

Bulunan iki sonucun birlikteki grafiği Şekil 2.5'te verilmiştir.



Şekil 2.5

Örnek 2.3

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + x(t - \pi), & 0 < t \\ x(s) = \sin s, & -\pi < s < 0 \end{cases} \quad (2.36)$$

Gecikmeli Cauchy problemini çözelim

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - \sin(t - \pi), & 0 < t < \pi \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad (2.37)$$

$-\sin(t - \pi)$ açılımını yapıp düzenlersek

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + \sin t, & 0 < t < \pi \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad (2.38)$$

elde ederiz.

Homojen olmayan diferensiyel denklemin çözümü,

$$x(t) = \frac{1}{2}(e^t - \sin t - \cos t) \quad (2.39)$$

dır.

Şimdi Cauchy problemini çözelim.

$$v(t) = \sin t, \quad v'(t) = \cos t \quad (2.40)$$

$$w(t) = \cos t, \quad w'(t) = -\sin t \quad (2.41)$$

$$v'(t) = w(t), \quad w'(t) = -v(t) \quad (2.42)$$

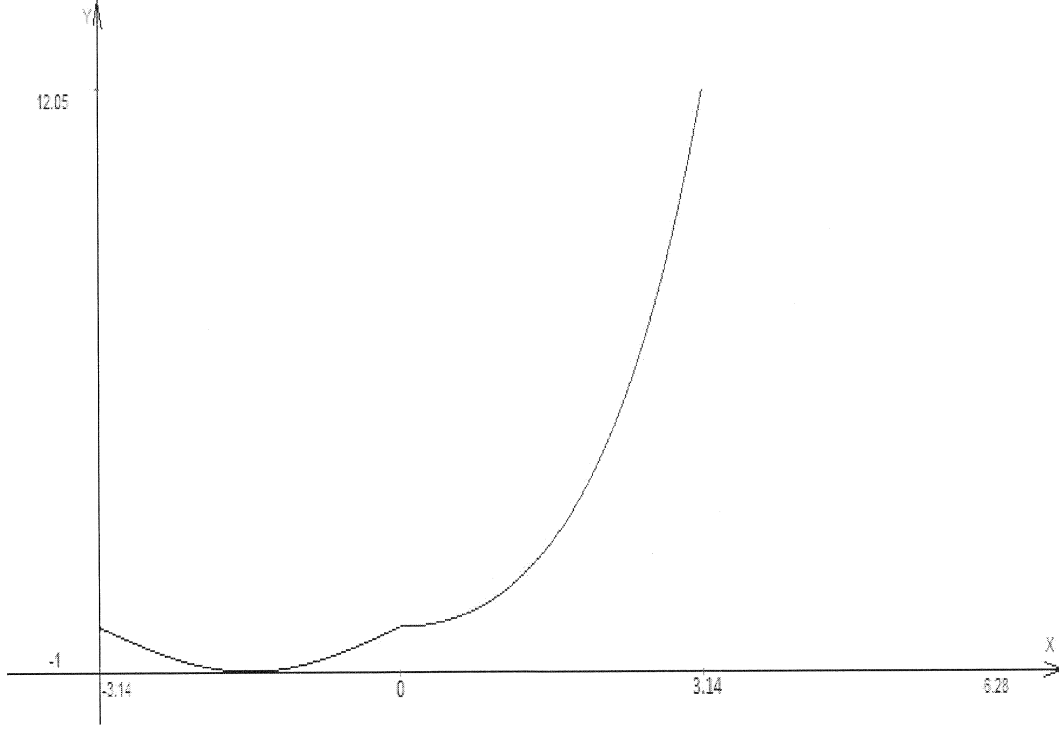
diyelim. Bu durumda denkleminiz aşağıdaki forma dönüşür.

$$u'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}, \quad 0 < t < \pi \quad (2.43)$$

$$u(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bu Cauchy probleminin Cauchy Solver yazılımı (Bulgak ve Eminov, 2003) ile grafiğini çizelim.

$-\pi < t < 0$ aralığındaki başlangıç fonksiyonu ile bulunan çözümün $0 < t < \pi$ aralığındaki grafiği Şekil 2.6' da verilmiştir.



Şekil 2.6

Şimdi $\pi < t < 2\pi$ aralığındaki çözümü bulalım.

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + x(t - \pi), & 0 < t \\ x(s) = \frac{1}{2}(e^s - \sin s - \cos s), & 0 < s < \pi \end{cases} \quad (2.44)$$

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + \frac{1}{2}(e^{(t-\pi)} + \sin t + \cos t), & \pi < t < 2\pi \\ x(\pi) = \frac{1}{2}(e^\pi - \sin \pi - \cos \pi) = 12,0519334 \end{cases} \quad (2.45)$$

Homojen olmayan adi diferensiyel denklemin çözümü,

$$x(t) = \frac{1}{2}te^{(t-\pi)} - \frac{1}{2}\cos t \quad (2.46)$$

dır.

Şimdi Cauchy problemini çözelim.

$$v(t) = \frac{1}{2}e^{(t-\pi)}, \quad v'(t) = \frac{1}{2}e^{(t-\pi)} \quad (2.47)$$

$$w(t) = \frac{1}{2}\cos t, \quad w'(t) = -\frac{1}{2}\sin t \quad (2.48)$$

$$z(t) = \frac{1}{2}\sin t, \quad z'(t) = \frac{1}{2}\cos t \quad (2.49)$$

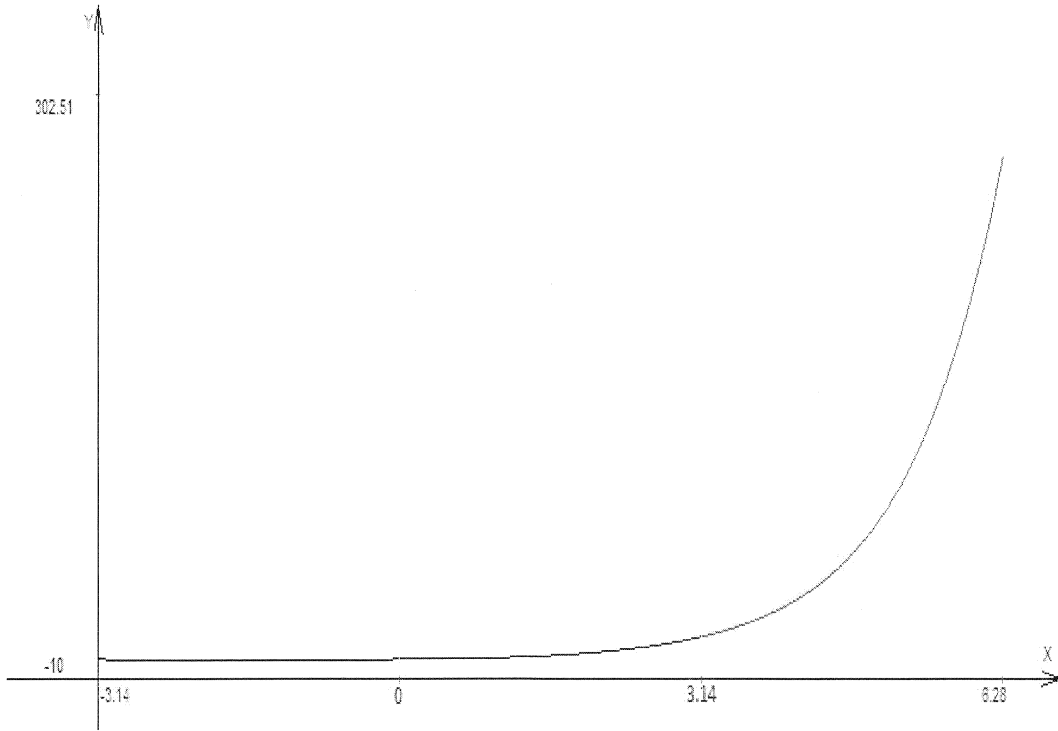
$$v'(t) = v(t), \quad w'(t) = -z(t), \quad z'(t) = w(t) \quad (2.50)$$

diyelim bu durumda denklemimiz aşağıdaki forma dönüşür.

$$u'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \\ w(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad \pi < t < 2\pi \quad (2.51)$$

$$u(\pi) = \begin{pmatrix} 12,0519334 \\ 0,5 \\ -0,5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Elde edilen çözümün $\pi < t < 2\pi$ aralığındaki grafiği Şekil 2.7'de verilmiştir.



Şekil 2.7

Bu grafikler (Wolfram Mathematica 8.0, Copyright 1988-2010 Wolfram Research) kullanılarak da elde edilebilir. Ancak konuyu daha derinlemesine inceleyebilmek için çalışmalarımızda “Cauchy Solver” yazılımını kullandık. Bu sayede “Cauchy Solver” yazılımı ile Gecikmeli Diferensiyel Denklemlerin de çözülüp grafiğinin çizilebileceğini göstermiş olduk.

“Cauchy Solver” programı

$$x'(t) = Ax(t), \quad x(\tau) = a \quad (2.52)$$

Cauchy Probleminin grafiklerini verir.

Ancak homojen olmayan özel sağ taraflı;

$$x'(t) = Ax(t) + f(t), \quad x(\tau) = a \quad (2.53)$$

problemleri için de sistemin boyutu artırılarak homojen hale getirilebilir. Bunu 2006 yılında Selçuk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümünün mezuniyet çalışmasında Nigar Bulgak göstermiştir.

2.3. DDE'nin Uygulamaları

DDE; tıp, biyoloji, mühendislik alanlarında birçok sistemin matematiksel modellemesinde sıkça kullanılmaktadır. Biz bu bölümde literatürde geçen fiziksel problemten iki tanesine yer vereceğiz.

2.3.1 Trafik Akışı Problemi

Trafikteki tıkanıklık probleminin kontrolü toplumumuz için çok önemli bir konudur. Bu problemin başında trafik ışıklarının ya da uyarı levhalarının yerleştirileceği yerler, yeni bir otoyol yapılırken kaç şeritli olması gerektiği ve alternatif taşımacılık geliştirmek için faydalı fikirler üretmektir.

Yavaş seyreden trafikte her araç önündeki aracı oldukça yakın takip eder. Bu yüzden araçların hızlanması ve yavaşlamasında düzensizlikler meydana gelir. Bu düzensizlik aslında yolculuk süresince hızın korunması, yavaşlama ve hızlanmada yaşanan düzensizliktir. Bu yaşanan düzensizlikler sonucu günlük hayatta birçok trafik kazası yaşanmaktadır.

Normalde birbirini takip eden araçların hızlanma ve yavaşlaması modellenirken bu hızlanma ve yavaşlamanın aynı anda olduğu kabul edilir. Ancak günlük hayatta bu hızlanma ve yavaşlama ani olmaz ve bir miktar gecikme meydana gelir.

Bu şekilde sistemdeki gecikme göz önüne alınarak yapılan modellemelerde Gecikmeli Diferensiyel Denklemler kullanılır. Daha kapsamlı bilgi için bak (Erneux 2009, syf:40).

2.3.2 Kontrol Mühendisliği

Gecikmeli Diferensiyel Denklem problemleri kontrol mühendisliğinde çok sık kullanılmaktadır. Feedback kontrol içeren bütün sistemlerde genellikle zaman gecikmesi vardır. Bu gecikme alınan bilgi ile o bilginin uygulamaya konulması arasında geçen sonlu bir zaman farkından kaynaklanmaktadır.

Örneğin bir sistemin hareketini tanımlayan aşağıdaki ikinci mertebeden lineer denklemi düşünelim.

$$y''(t) + ay'(t) + y(t) = 0 \quad (2.54)$$

Bu denklemin çözümü keyfi başlangıç koşulları altında çözümü üstel olarak sifıra yaklaşan bir fonksiyondur.

Bizim burada göz önüne aldığımız sistem bir geminin her iki tarafında bulunan iki tane içi su ile dolu tanktan oluşan denge tankı sistemidir. Bu sistemde geminin su yüzeyinde dengede kalabilmesi için bir tanktan diğerine su pompalanır.

Bu mekanizma ayrıca geminin dönüşü sırasında devrilmeden dengede kalabilmesi için bir tanktan diğerine su pompalamak için tasarlanmıştır.

Denkleminizdeki y geminin konumunun normal dik pozisyon ile yaptığı açıdır. y' ile orantılı bir by' şeklinde bir terim tanımlarsak;

$$y''(t) + ay'(t) + by'(t) + y(t) = 0 \quad (2.55)$$

denklemini elde ederiz.

Fakat bu mekanizmalar ayarlamalara ani cevap vermezler. Bu yüzden bir zaman gecikmesi meydana gelir. Bu gecikmeyi göz önüne aldığımızda denklemimiz;

$$y''(t) + ay'(t) + by'(t - \tau) + y(t) = 0, \quad \tau > 0 \quad (2.56)$$

haline dönüşür.

Bu modelleme ile ilgili daha detaylı bilgi için bak (Erneux 2009, syf:109)

3. GECİKMELİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ

DDE denklem sistemlerinin analitik çözümleri genellikle çok karmaşıktır. Ancak sabit katsayılı DDE' nin analitik çözümleri için çeşitli yöntemler vardır.

Bunlar;

- i. Bellman tarafından geliştirilen “Adımlar Metodu” (Method of Steps),
- ii. “Üstel Çözüm” (Exponential Solutions) formunda çözümleri bulma,
- iii. Lambert W Fonksiyonu kullanarak çözüm bulma.

dır.

3.1. Çözümlerin Varlık ve Tekliği

Burada DDE denklemlerinin çözümlerinin varlık ve tekliği ile ilgili literatürde geçen bazı teoremleri vereceğiz.

$$a_0 u'(t) + b_0 u(t) + b_1 u(t - w) = f(t) \quad (3.1)$$

$$u(t) = g(t), \quad 0 \leq t \leq w \quad (3.2)$$

Burada a_0, b_0, b_1, w Reel sayılar, $g(t)$ verilen aralıkta sürekli başlangıç fonksiyonu, $f(t)$ ise sürekli bir fonksiyondur.

Teorem 3.1(Bellman ve Cooke,1963)

$f \in C^1[0, \infty)$, $g \in C^0[0, w]$ olsun. Bu durumda $t \geq 0$ için (3.1) ve $t > w$ için (3.2) denklemini sağlayan tek bir $u(t)$ çözüm fonksiyonu vardır.

Teorem 3.2(Smith, 2010)

$f(t, x, y)$, $f_x(t, x, y)$ $\mathbb{R}^3$ üzerinde sürekli fonksiyonlar, $s, r \in \mathbb{R}$, $\Phi: [s - r, s] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon olsun. Bu durumda;

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - r)) \quad (3.3)$$

$$x(t) = \Phi(t), \quad s - r \leq t \leq s \quad (3.4)$$

başlangıç değer probleminin $\sigma > s$ için $[s - r, \sigma]$ aralığında çözümü var ve tektir.

3.2. Adımlar Metodu

Gecikmeli diferensiyel denklemleri (DDE) çözümedeki en temel yöntem Richard Bellman tarafından geliştirilen “Adımlar Metodu” dur. Bu metod ile genişletilmiş çözümler elde edilir.

Şimdi “Adımlar Metodu” nu açıklayalım.

Öncelikle,

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)), \quad t_0 < t < t_1 \quad (3.5)$$

$$x(t) = \Phi(t), \quad t_0 - \tau < t < t_0 \quad (3.6)$$

DDE’yi göz önüne alalım. $[t_0 - \tau, t_0]$ için verilen başlangıç fonksiyonunu denklemde yerine yazıp DDE’yi $[t_0, t_0 + \tau]$ aralığında ODE’ ye dönüştürerek çözüm fonksiyonunu elde ederiz. Ardından $[t_0, t_0 + \tau]$ aralığındaki çözüm fonksiyonunu $[t_0 + \tau, t_0 + 2\tau]$ aralığı için başlangıç fonksiyonu olarak düşünerek $[t_0 + \tau, t_0 + 2\tau]$ aralığı için çözümü elde ederiz. Böylece adım adım ilerleyerek her aralık için ayrı bir çözüm elde ederiz.

Bu metod ile $[t_0 - \tau, \infty)$ aralığında geçerli olan çözümler elde ederiz. “Adımlar Metodu” (Bellman ve Cooke, 1963)’de ayrıntılı olarak açıklanmıştır.

Daha anlaşılır olması açısından bu yöntemi bazı örnekler üzerinde uygulayalım.

Örnek 3.1

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t-1), & 0 < t < 3 \\ x(t) = t^2, & -1 < t < 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

Başlangıç değer problemini çözelim.

Verilen denklemde başlangıç fonksiyonunu yerine yazarsak $0 < t < 1$ aralığı için $x'(t) = -(t-1)^2$, $x(0) = 0$ olur.

Burada integral alma işlemi uygulanırsa,

$$x(t) = \frac{-t^3}{3} + t^2 - t + c \quad (3.8)$$

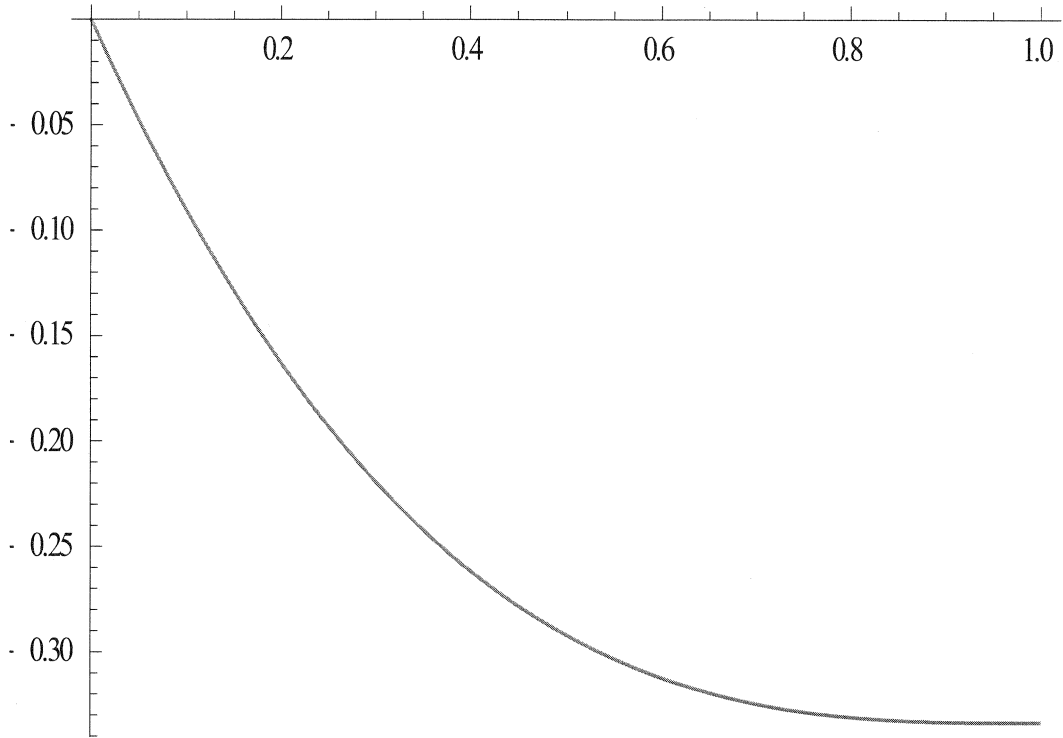
denklemini elde edilir.

$x(0) = 0$ olduğundan $c = 0$ elde edilir.

Buna göre çözüm fonksiyonu,

$$x(t) = \frac{-t^3}{3} + t^2 - t \text{ olur.}$$

Elde edilen çözümün grafiği Şekil 3.1’de verilmiştir.



Şekil 3.1

Şimdi $1 < t < 2$ aralığı için aynı işlemleri uygulayalım

$$x'(t) = \frac{(t-1)^3}{3} - (t-1)^2 - (t-1), \quad x(1) = -\frac{1}{3}$$

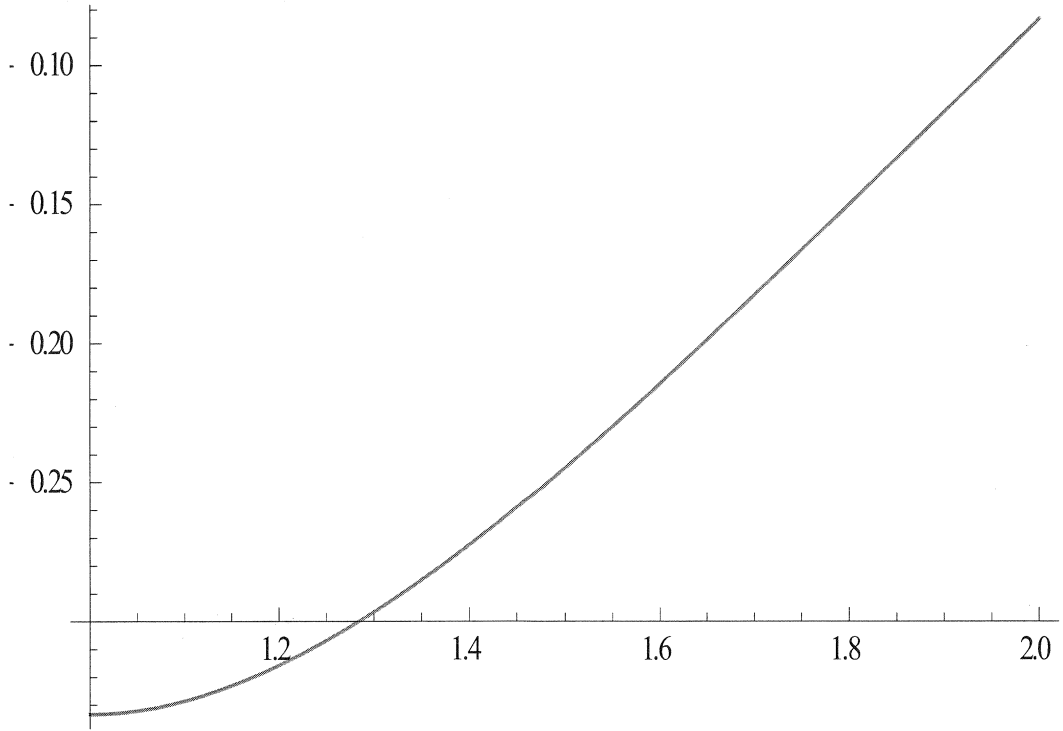
integral alma işlemi uygulanırsa,

$$x(t) = \frac{t^4}{12} - \frac{2t^3}{3} + 2t^2 - \frac{7}{3}t + c \quad (3.9)$$

denklemleri elde edilir. Burada $x(1) = -\frac{1}{3}$ olduğu için $c = \frac{7}{12}$ bulunur.

Dolayısıyla çözüm fonksiyonu, $x(t) = \frac{t^4}{12} - \frac{2t^3}{3} + 2t^2 - \frac{7}{3}t + \frac{7}{12}$ olur.

Elde edilen çözümün grafiği Şekil 3.2'de verilmiştir.



Şekil 3.2

$2 < t < 3$ aralığı için çözümü elde edelim.

$$x'(t) = -\frac{(t-1)^4}{12} + \frac{2(t-1)^3}{3} - 2(t-1)^2 + \frac{7}{3}(t-1) - \frac{7}{12}, \quad x(2) = -\frac{1}{12} \quad (3.10)$$

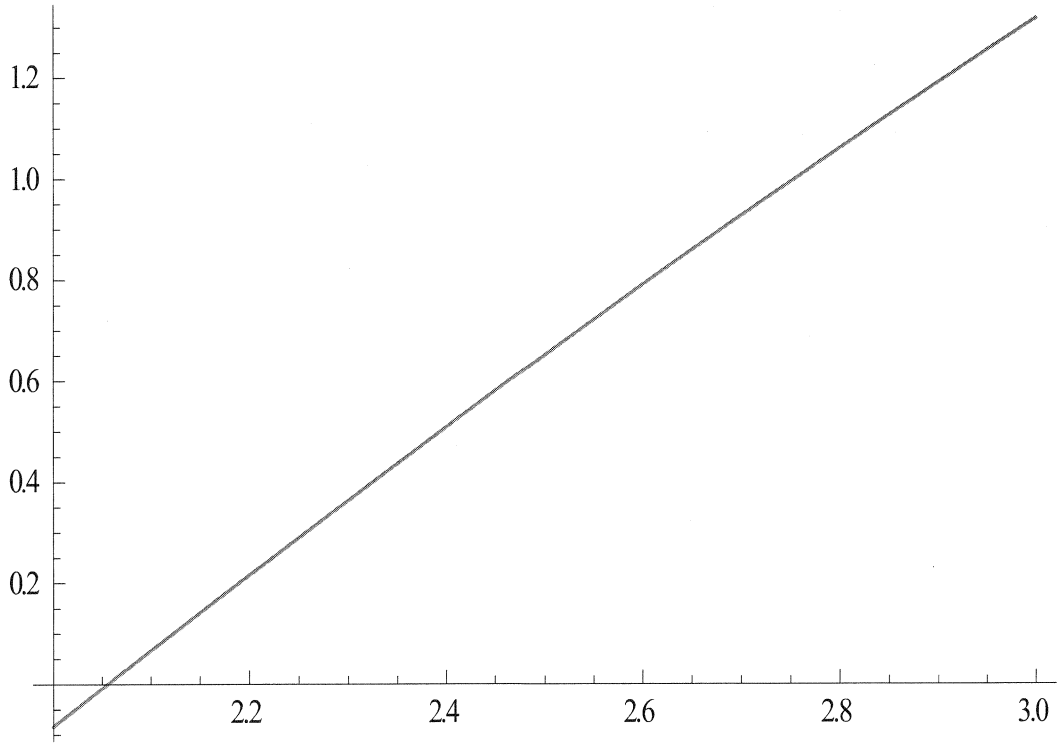
denklemine integral alma işlemi uygulanırsa,

$$x(t) = -\frac{t^5}{60} + \frac{t^4}{4} + \frac{-3t^3}{2} + \frac{13t^2}{3} - \frac{9t}{2} + c \quad (3.11)$$

denklemini elde edilir. Burada $x(2) = -\frac{1}{12}$ olduğu için $c = \frac{7}{60}$ bulunur.

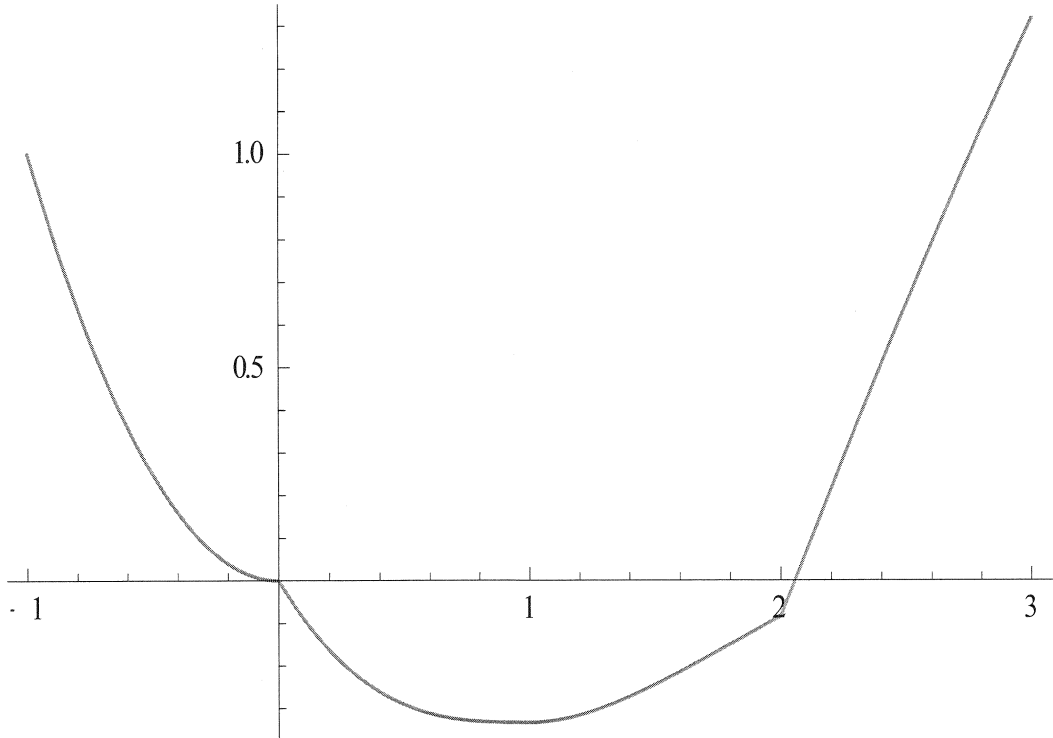
Dolayısıyla çözüm fonksiyonu, $x(t) = -\frac{t^5}{60} + \frac{t^4}{4} + \frac{-3t^3}{2} + \frac{13t^2}{3} - \frac{9t}{2} + \frac{7}{60}$ olur.

Elde edilen çözüm fonksiyonunun grafiği Şekil 3.3'de verilmiştir.



Şekil 3.3

Çözümler her aralıkta farklıdır. Bunu daha iyi görebilmek için Şekil 3.4'ü verelim.



Şekil3.4

Örnek 3.2

$$\begin{cases} x'(t) = x(t - \tau), & 0 < t; \\ x(t) = \sin t, & -\pi < t < 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

başlangıç değer problemini çözelim.

Örnek 3.1 de uyguladığımız adımlar metodunu uygulayacağız.

Verilen denkleme başlangıç fonksiyonunu yerine yazdığımızda,

$$\begin{aligned} x'(t) &= \sin t - \sin(t - \tau), & 0 < t < \tau; \\ x(0) &= 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

elde ederiz. Bu başlangıç değer probleminin çözümünü,

$$x(t) = 1 + \cos t, \quad 0 < t < \pi \quad (3.14)$$

şeklinde elde ederiz.

Aynı işlemleri $\pi < t < 2\pi$ aralığındaki çözümü elde etmek için uygulayalım. Öncelikle $0 < t < \pi$ aralığı için bulduğumuz çözümü bu aralık için başlangıç fonksiyonu olarak düşüneceğiz.

$$\begin{aligned} x'(t) &= 1 + \cos(t - \pi) = 1 - \cos t, & \pi < t < 2\pi \\ x(\pi) &= 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Başlangıç değer probleminin çözümü,

$$x(t) = t - \sin t - \pi, \quad \pi < t < 2\pi \quad (3.16)$$

dır.

Son olarak $2\pi < t < 3\pi$ aralığındaki çözümü bulalım.

$$\begin{aligned} x'(t) &= (t - \pi) - \sin(t - \pi) - \pi = t - 2\pi + \sin t, & \pi < t < 2\pi \\ x(2\pi) &= \pi \end{aligned}$$

Başlangıç değer probleminin çözümü,

$$x(t) = \frac{t^2}{2} - 2\pi t - \cos t + 2\pi^2 + \pi + 1, \quad 2\pi < t < 3\pi$$

şeklinde elde edilebilir.

bu işlemi istediğimiz kadar devam ettirebiliriz.

Buradan görülüyor ki başlangıç fonksiyonu verilen bir DDE “Adımlar Metodu” kullanılarak her aralıkta farklı, o aralıkta sürekli ve türevlenebilir çözümleri elde edilebilir.

3.3. Üstel Çözüm

DDE denklemlerinin çözümü ODE denklem teorisinde olduğu gibi başlangıç fonksiyonu olmadan düşünerek üstel fonksiyon şeklinde aranabilir. Ancak DDE'nin çözümlerinde karşımıza karakteristik kökleri elde etmede karmaşık durumlar çıkmaktadır. Şimdi DDE için üstel fonksiyon şeklinde çözüm arayacağız.

3.3.1. Karakteristik Denklem

$\alpha, \beta, \tau \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$x'(t) = \alpha x(t) + \beta x(t - \tau) \quad (3.17)$$

DDE denklemini göz önüne alalım. $\tau = 0$ için bu denklem bir adi diferensiyel denklem ifade eder.

$$x'(t) = \alpha x(t) \quad (3.18)$$

Sabit katsayılı lineer adi diferensiyel denkleminin bir çözümünün;

$$x(t) = e^{\lambda t} \quad (3.19)$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi bu üstel çözümü yukarıdaki DDE denkleminde yerine yazalım.

$$\begin{cases} \lambda e^{\lambda t} = \alpha e^{\lambda t} + \beta e^{\lambda(t-\tau)} \\ \lambda = \alpha + \beta e^{-\lambda \tau} \end{cases} \quad (3.20)$$

$$\Delta(\lambda) = \lambda - \alpha - \beta e^{-\lambda \tau} = 0 \quad (3.21)$$

Burada elde ettiğimiz $\Delta(\lambda)$ denkleminde (3.17) DDE denkleminin karakteristik denkleminin ve bu denklemin köklerine ise karakteristik kökler denir. (Smith, 2010, syf:17)

Örnek 3.3

$$x'(t) = -\beta x(t-1) \quad (3.22)$$

DDE denklemini göz önüne alalım. Bu denklemin karakteristik denkleminin

$$\Delta(\lambda) = e^{\lambda t} [\lambda + \beta e^{-\lambda}] = 0 \quad (3.23)$$

$$\Delta(\lambda) = \lambda + \beta e^{-\lambda} \quad (3.24)$$

Şimdi $\Delta(\lambda) \equiv 0$ denkleminin kökleri olan λ değerlerini inceleyelim.

Eğer;

$$\Delta(\lambda) = \Delta'(\lambda) = \Delta''(\lambda) = \dots = \Delta^{(n-1)}(\lambda) = 0, \Delta^{(n)}(\lambda) \neq 0 \quad (3.25)$$

sağlanıyorsa $\lambda \in \mathbb{C}$ 'ler (3.24) denkleminin $1 \leq n$ olmak üzere n mertebeli kökleridir.

(Smith, 2010)' e göre;

(3.24) karakteristik denklemi aşağıdaki durumları sağlar.

1. $0 < \beta < \pi/2$ ise öyle $\delta > 0$ vardır ki $\text{Re}(\lambda) \leq -\delta$ 'dır.
2. $\beta = \pi/2$ ise $\lambda = \pm i\pi/2$ şeklinde iki kök vardır.
3. $\beta > \pi/2$ ise $\lambda = x \pm iy$, $x > 0$, $y \in (\pi/2, \pi)$ şeklinde kökler vardır.

Şimdi (3.17) denkleminin karakteristik denklemi olan

$$\Delta(\lambda) = -\lambda + \alpha + \beta e^{-\lambda\tau} \quad (3.26)$$

denklemini düşünelim.

$\alpha = -\beta$ için $\lambda = 0$ bir karakteristik köktür. Bu kökün yanı sıra kompleks kökler de mevcuttur. Bunlar;

$$\lambda = \pm iw, w > 0 \quad (3.27)$$

için,

$$-iw + \alpha + \beta e^{-i\omega\tau} = 0 \quad (3.28)$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta \cos w\tau = 0 \\ w + \beta \sin w\tau = 0 \end{cases} \quad (3.29)$$

$$\begin{cases} \beta \cos w\tau = -\alpha \\ \beta \sin w\tau = -w \end{cases} \quad (3.30)$$

$$w = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} \quad (3.31)$$

elde edilir.

(3.28) denklemini τ için düzenlersek,

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} \left[\arccos\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right) \right], \quad |\alpha| < |\beta| \quad (3.32)$$

buluruz.

Aslında buraya kadar gösterdiğimiz durumlar ODE teorisi ile çok benzerlik gösterir. Ancak çok önemli bir fark vardır. Bu fark; ODE'nin sonlu sayıda karakteristik kök içerirken DDE denkleminin sonsuz sayıda karakteristik kök içerebilmesidir. Bu ise çözümün elde edilmesinde kompleks durumların karşımıza neden olur.

3.4. Lambert-W Fonksiyonu ile Çözüm

DDE' nin sonsuz sayıda karakteristik kökünün olabileceğinden ve bu köklerin bulunmasındaki zorluklardan bahsetmiştik. Burada DDE'nin karakteristik köklerini hesaplayabilmek için (Ulsoy ve Asl, 2003) çalışmasında geliştirilen yöntemi ana hatları ile açıklayacağız.

$$\begin{cases} y'(t) + \alpha y(t - T) + \beta y(t) = 0, & 0 < t < T \\ y(t) = \Phi(t), & t \in [0, T] \end{cases} \quad (3.33)$$

DDE denkleminin başlangıç değer problemini düşünelim. Burada α, β, T sabit sayılar, $[0, T]$ başlangıç aralığı ve $\Phi(t)$ başlangıç fonksiyonudur.

Bu problemin çözümünü,

$$y(t) = ce^{st} \quad (3.34)$$

formunda olduğunu varsayalım. Bu durumda aşağıdaki karakteristik denklemi elde ederiz.

$$F(s) = (s + \beta)e^{sT} + \alpha = 0 \quad (3.35)$$

Aslında DDE denklemlerinin analizini zorlaştıran husus bu karakteristik denklemin çözümünün analitik metodunu bulmadaki zorluktur. Bu (3.35) karakteristik denklemini çözmek için Lambert-W fonksiyonu diye adlandırılan ve $W(s)$ fonksiyonuna dayanan yöntemi tanıtacağız.

Tanım 3.4.1 (Ulsoy ve Asl, 2003)

Lambert-W fonksiyonu $W(z)$ ile gösterilir ve $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = ze^z$ kompleks değerli fonksiyonunun tersidir ayrıca bu fonksiyon, $\forall z \in \mathbb{C}$, $W(z)e^{W(z)} = z$ eşitliğini sağlar.

Şimdi (3.35) karakteristik denklemini,

$$(s + \beta)e^{sT} = -\alpha \quad (3.36)$$

biçiminde yazabiliriz. Bu denklemin her iki tarafını, $Te^{\beta T}$ ile çarparsak;

$$T(s + \beta)e^{(s+\beta)T} = -\alpha Te^{\beta T} \quad (3.37)$$

elde ederiz.

Burada Lambert fonksiyonunun tanımını kullanırsak,

$$W(-\alpha Te^{\beta T})e^{W(-\alpha Te^{\beta T})} = -\alpha Te^{\beta T} \quad (3.38)$$

eşitliğini elde ederiz. (3.37) ve (3.38) denklemlerini birlikte düşündüğümüzde,

$$T(s + \beta) = W(-\alpha T e^{\beta T}) \quad (3.39)$$

eşitliğini elde ederiz.

Böylece karakteristik denklemin çözümü olan s 'yi,

$$s = \frac{1}{T} W(-\alpha T e^{\beta T}) - \beta \quad (3.40)$$

şeklinde yazabiliriz.

Benzer şekilde $\beta = 0$ için karakteristik denklemin çözümü,

$$s = \frac{1}{T} W(-\alpha T) \quad (3.41)$$

olur.

Lambert fonksiyonunun seri açılımı, (Ulsoy ve Asl, 2003)'de aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$$W_0(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} s^n \quad (3.42)$$

ve

$$W_k(s) = \ln_k(s) - \ln(\ln_k(s)) + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{lm} \frac{(\ln(\ln_k(s)))^m}{(\ln_k(s))^{l+m}} \quad (3.43)$$

dır. Burada,

$$\ln_k(s) = \ln(s) + 2\pi i k \quad (3.44)$$

ve

$$C_{lm} = \frac{1}{m!} (-1)^l \begin{bmatrix} l+m \\ l+1 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

dır.

(3.43) denkleminin homojen çözümleri (3.40) denklemi kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{(\frac{1}{T} W_k(-\alpha T e^{\beta T}) - \beta)t} \quad (3.46)$$

Bu çözümde c_k katsayıları başlangıç fonksiyonu kullanılarak, $W_k(s)$ değerleri ise (3.42) ve (3.43) açılımları kullanılarak hesaplanır.

Buradan da açıkça görülüyor ki bir DDE denkleminin çözümünü üstel fonksiyon olarak aramak diğer yöntemlere göre daha zahmetlidir.

4. GECİKMELİ DİFERENSİYEL DENKLEMİN İKİ NOKTALI SINIR DEĞER PROBLEMİ

$$\begin{cases} y''(t) + ay'(t) + by'(t - \tau) = 0, & 0 \leq t \leq T \\ y(s) = \varphi(s), & -\tau < s < 0, \quad y(T) = g \end{cases} \quad (4.1)$$

İkinci mertebeden gecikmeli iki noktalı sınır değer problemini ele alalım. Burada a, b, t, T, τ, s, g Reel sayılar ve $\varphi(s)$ verilen aralıkta sürekli bir fonksiyondur.

Bu problemin çözümünü birkaç örnek üzerinde gösterelim. Bu örneklerdeki grafikler (Wolfram Mathematica 8.0, Copyright 1988-2010 Wolfram Research) ile elde edilmiştir.

Örnek 4.1

$$\begin{cases} y''(t) + y'(t - \pi) = 0 \\ y(s) = \cos s, & -\pi < s < 0, \quad y(\pi) = 1 \end{cases} \quad (4.2)$$

Gecikmeli iki noktalı sınır değer problemini çözelim.

$$\begin{cases} y''(t) + [\cos(t - \pi)]' = 0, & 0 < t < \pi \\ y(0) = 1, \quad y(\pi) = 1 \end{cases} \quad (4.3)$$

Verilen başlangıç fonksiyonunu denklemde yerine yazdığımızda

$$\begin{cases} y''(t) + \sin t = 0, & 0 < t < \pi \\ y(0) = 1, \quad y(\pi) = 1 \end{cases} \quad (4.4)$$

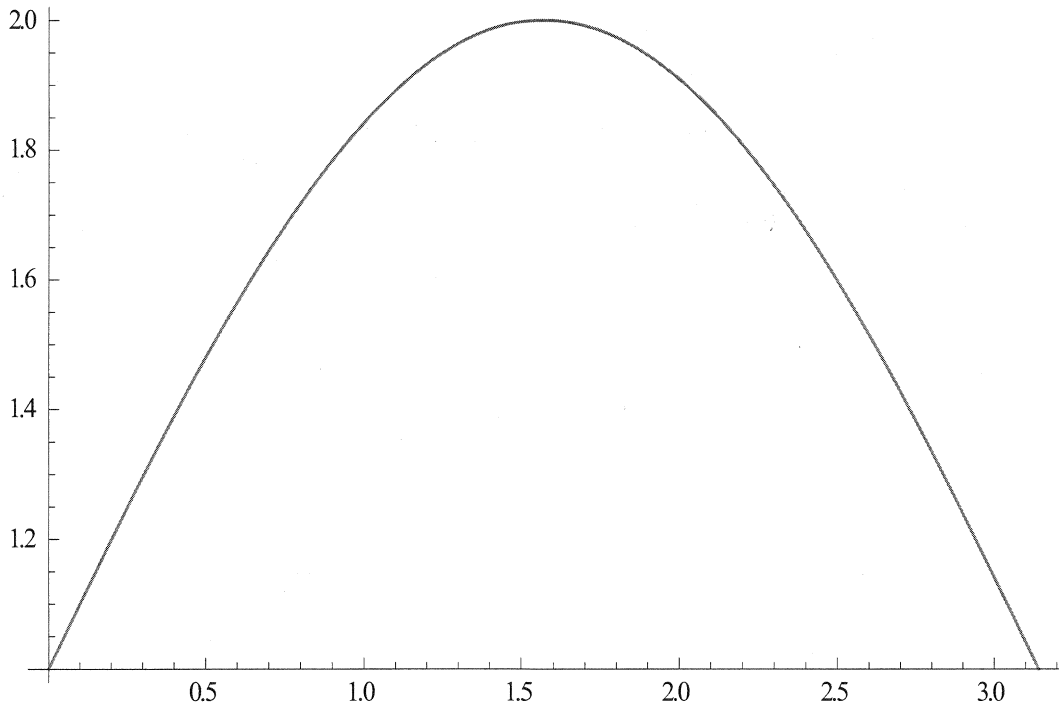
ODE'nin iki noktalı sınır değer problemini elde ederiz. Bu problemin çözümünü ise,

$$\begin{cases} y(t) = \sin t + tc_1 + c_2, & 0 < t < \pi \\ y(0) = 1, \quad y(\pi) = 1 \end{cases} \quad (4.5)$$

$$y(t) = \sin t + 1, \quad 0 < t < \pi \quad (4.6)$$

şeklinde buluruz.

Elde edilen çözümün grafiği Şekil 4.1 de verilmiştir.



Şekil 4.1

Örnek 4.2

$$\begin{cases} y''(t) - 2y'(t-1) = 0 \\ y(s) = s+1, -1 < s < 0, y(1) = 2 \end{cases} \quad (4.7)$$

İki noktalı sınır değer problemini çözelim.

Verilen problemi çözmek için Örnek 4.1 de izlediğimiz yolu izleyeceğiz.

$$\begin{cases} y''(t) - 2 = 0, 0 < t < 1 \\ y(0) = 1, y(1) = 2 \end{cases} \quad (4.8)$$

Sınır değer probleminin çözümünü,

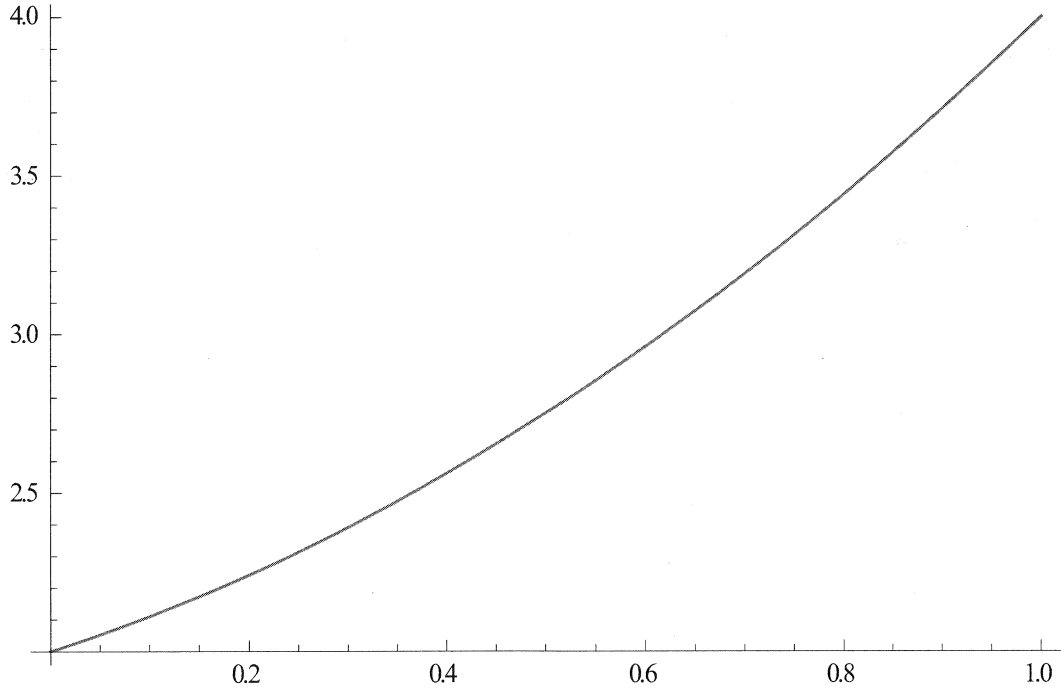
$$\begin{cases} y(t) = t^2 + tc_1 + c_2, 0 < t < 1 \\ y(0) = 1, y(1) = 2 \end{cases} \quad (4.9)$$

bilinmeyen integral sabitlerini hesapladığımızda,

$$y(t) = t^2 + t + 2, 0 < t < 1 \quad (4.10)$$

şeklinde elde ederiz.

Elde edilen çözümün grafiği Şekil 4.2 de verilmiştir.



Şekil 4.2

Örnek 4.3

$$\begin{cases} y''(t) + y'(t-1) = t^2 \\ y(s) = s, -1 < s < 0, y(1) = 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

İki noktalı sınır değer problemini çözelim.

Verilen başlangıç fonksiyonunu denklemde yerine yazarsak,

$$\begin{cases} y''(t) + 1 = t^2, 0 < t < 1 \\ y(0) = 0, y(1) = 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

İki noktalı sınır değer problemini elde ederiz. Bu problemin çözümü,

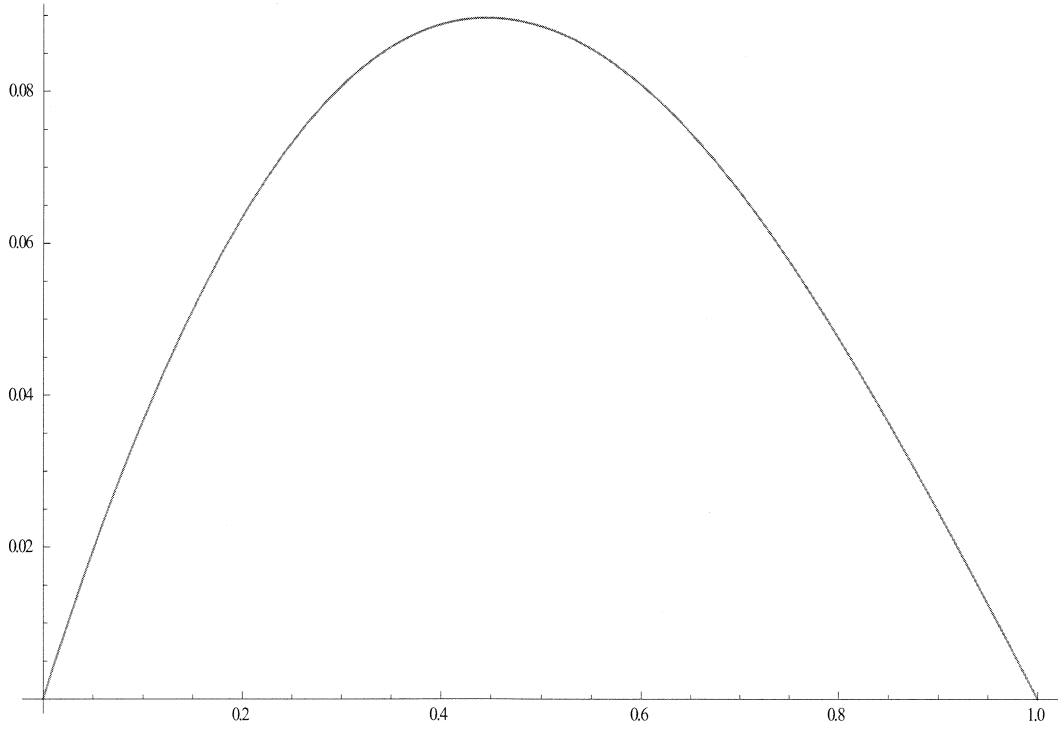
$$\begin{cases} y'(t) = \frac{1}{3}t^3 - t + c_1, 0 < t < 1 \\ y(0) = 0, y(1) = 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

bilinmeyen integral sabiti hesaplandığında,

$$y(t) = \frac{1}{12}t^4 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{5}{12}t, 0 < t < 1 \quad (4.14)$$

şeklinde bulunur.

Elde edilen sonucun grafiği Şekil 4.3 de verilmiştir.



Şekil 4.3

Şimdi başlangıç fonksiyonu üstel fonksiyon olan bir örnek çözelim.

Örnek 4.4

$$\begin{cases} y''(t) - y(t-1) = 0 \\ y(s) = e^s, -1 < s < 0, y(1) = 0 \end{cases} \quad (4.15)$$

Sınır değer problemini çözmek için öncelikle başlangıç fonksiyonunu denklemde yerine yazdığımızda,

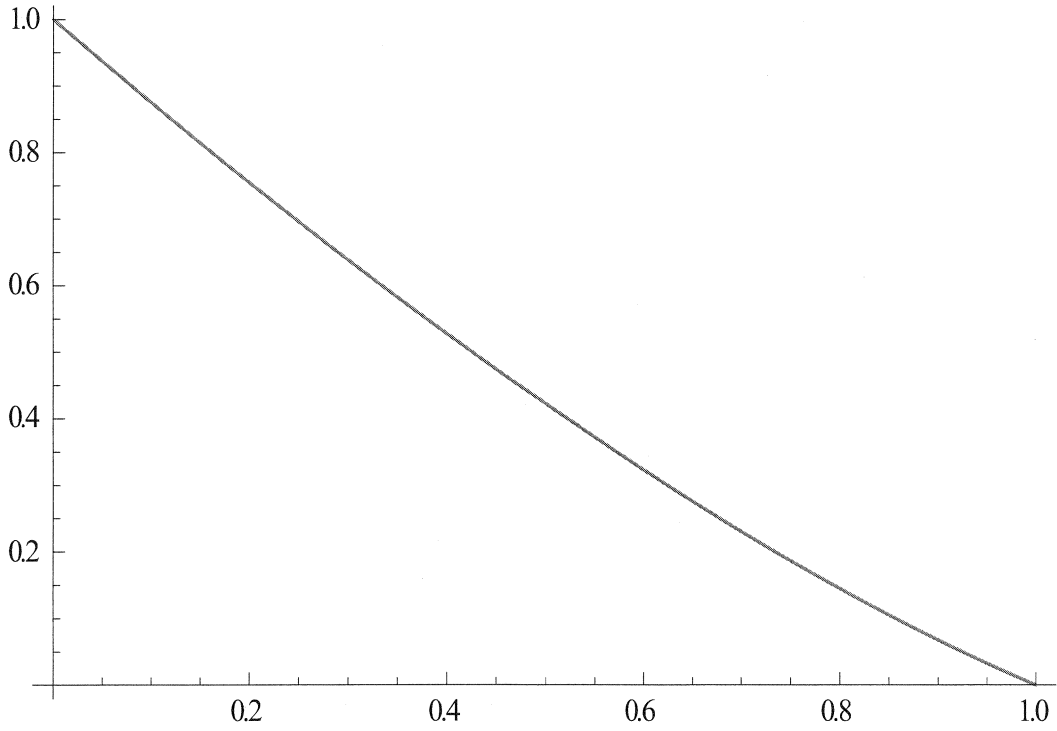
$$y''(t) = e^{t-1}, \quad 0 < t < 1 \text{ elde ederiz.}$$

Buradan çözüm fonksiyonunu,

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{t-1} + tc_1 + c_2, \quad 0 < t < 1 \\ y(0) &= 1, \quad y(1) = 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

sınır değer problemini çözerek

Elde edilen çözüm fonksiyonunun grafiği Şekil 4.4 de verilmiştir.



Şekil 4.4

İkinci mertebeden gecikmeli diferansiyel denklemlerin iki noktalı sınır değer problemlerini farklı başlangıç fonksiyonları altında çözümlerini ve bu çözümlerin grafiksel davranışını bu bölümde gösterdik. Burada bir gecikmeli diferansiyel denklemin sınır değer probleminin başlangıç fonksiyonunun, problemin çözümü ve grafiği üzerindeki etkisi gösterilmiştir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada öncelikle Gecikmeli Diferensiyel Denklemler (DDE) hakkında genel bilgilere ve diğer bilim dallarındaki uygulama alanlarına değinilmiştir.

Daha sonra DDE'nin çözümünün bilinen Adi diferensiyel denklemlerden farklı olduğu ve DDE'nin çözümlerine hangi metotlarla ulaşılabileceği gösterildi.

Ayrıca DDE probleminin Cauchy Problemi haline getirilerek “Cauchy Solver” yazılımı yardımı ile çözülüp grafiğinin elde edilebileceği örnekler üzerinde ayrıntılı bir şekilde gösterildi.

Daha sonra ise ikinci mertebeden DDE' nin iki noktalı sınır değer probleminin çözümü ve grafikleri örneklerle açıklandı.

DDE'nin çözümlerinin incelenmesinde karşılaşılan en büyük sorun üstel fonksiyon şeklinde çözüm aranırken karakteristik köklerin hesaplanmasındaki zorluktur. Bu zorluğun giderilmesi için daha farklı çözüm yöntemleri geliştirilebilir.

Zaman gecikmesi içeren sistemlerin modellenmesinde DDE'nin kullanılması tıp, biyoloji ve mühendislik alanlarındaki çalışmaların daha doğru sonuçlar verebilmesi açısından faydalı olacaktır. Çünkü bazı sistemlerde çok küçük olsa da zaman gecikmesi meydana gelir. Eğer bu gecikme göz önünde bulundurulmazsa yapılacak hesaplamalar istenen doğru sonucu vermeyecektir.

6. KAYNAKLAR

- Arino, O., Hbid, M. L., Dads, A. E., 2006, Delay Differential Equations, *Springer*, New York.
- Bai, D., Xu, Y., 2005, Existence of positive solutions for boundary-value problems of second- order delay differential equations, *Applied Mathematics Letters*, China, 18(6), 621-630.
- Balachandran, B., Nagy, T. K., Gilsinn, D. E., 2009, Delay Differential Equations Recent Advances and New Directions, *Springer*, New York.
- Bellman, R., Cooke, K. L., 1963, Differential- Difference Equations, *Academic Press*, London.
- Boichuk, A., Diblik, J., Khusainov, D., Ruzickova, M., 2010, Boundary Value Problems for Delay Differential Systems, *Hindawi Publishing Corporation Advanced in Difference Equations*, USA, Article ID 593834.
- Bulgak, A., Eminov, D., 2003, Cauchy Solver, *Selcuk Journal of Applied Mathematics*, Konya, Turkey, 4(2), 13-22.
- Bulgak, N., 2006, Diferensiyel Denklemlerin Fizikteki Uygulamaları, *Selçuk Üniversitesi Fen- Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümü Mezuniyet çalışması*, Konya.
- Erneux, T., 2009, Applied Delay Differential Equations, *Springer*, New York.
- Gopalsamy, K., 1992, Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics, *Kluwer Academic Publishers*, London.
- Jankowski, T., 2003, Existence of Solutions of Boundary Value Problems for Differential Equations with Delayed Arguments, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Poland, 156(1), 239- 252.
- Jankowski, T., 2005, On Delay Differential Equations with Nonlinear Boundary Conditions, *Hindawi Publishing Corporation*, ABD, 2, 201-214.
- Jankowski, T., 2007, On Delay Differential Equations With Boundary Conditions, Dynamic Systems and Applications, *Hindawi Publishing Corporation*, ABD, 16, 425-432.
- Kuang, Y., 1993, Delay Differential Equations With Applications in Population Dynamics, *Academic Press*, San Diego.
- Ruan, S., 2006, Delay Differential Equations in Single Species Dynamics, *Springer*, Berlin.
- Smith, H., 2010, An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to The Life Sciences, *Springer*, New York.

- Ulsoy, A. G., Asl, F. M., 2003, Analysis of a System of Linear Delay Differential Equations, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Minnesota, USA, 125, 215-223.
- Yi, S., Nelson, P. W., Ulsoy, A. G., 2010, Analysis and Control Using The Lambert W Function Time- Delay Systems, *World Scientific*, Singapore.
- Yi, S., Ulsoy, A. G., 2006, Solution of a System of Linear Delay Differential Equations Using The Matrix Lambert Function, *Proceedings of the 2006 American Control Conference Minneapolis*, Minnesota, USA, June 14-16.
- Zhang, C., Chen, H., 2010, Asymptotic stability of block boundary value methods for delay differential-algebraic equations, *Mathematics and Computers in Simulation*, China, 81, 100–108.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Yavuz YAZICI
Uyruğu : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi : Eskipazar/ 1987
Telefon :
Faks :
e-mail : yavuzyaz@yahoo.com

EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	: Eskipazar Ç. P. Lisesi Eskipazar- KARABÜK	2004
Üniversite	: Niğde Üniversitesi NİĞDE	2009
Yüksek Lisans	: Selçuk Üniversitesi KONYA	2012
Doktora	:	

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2011- ...	Zonguldak Karaelmas Üniversitesi	Arş. Gör.

UZMANLIK ALANI

Uygulamalı Matematik

YABANCI DİLLER

İngilizce