

**SONLU BİTİŞİK İKİ KÜMELİ GRAFLAR
ÜZERİNE**

Aysel ULUKAN

DANIŞMAN

Doç . Dr. İbrahim GÜNALTILI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Nisan, 2012

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

SONLU BİTİŞİK İKİ KÜMELİ GRAFLAR
ÜZERİNE

Aysel ULUKAN

DANIŞMAN

Doç . Dr. İbrahim GÜNALTILI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Nisan, 2012

TEZ ONAY SAYFASI

Aysel Ulukan tarafından hazırlanan “Sonlu Bitişik İki Kümeli Graflar Üzerine” adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 09/02/2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı’nda DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. İbrahim GÜNALTILI

Başkan : Prof. Dr. Şükrü OLGUN

İmza

Osmangazi Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi

Üye : Prof. Dr. Emine SOYTÜRK SEYRANTEPE

İmza

Afyon Kocatepe Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi

Üye : Doç. Dr. İbrahim GÜNALTILI

İmza

Osmangazi Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi

Üye : Yrd. Doç. Dr. Derya SAĞLAM

İmza

Afyon Kocatepe Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi

Üye : Yrd. Doç. Dr. Nilgün SÖNMEZ

İmza

Afyon Kocatepe Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun

...../...../..... tarih ve
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

.....

Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

SONLU BİTİŞİK İKİ KÜMELİ GRAFLAR ÜZERİNE

Aysel ULUKAN

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. İbrahim GÜNALTILI

Bir $(0, 1)$ –graf herhangi iki düğümü en çok bir ortak komşuluğa sahip basit bağlı graftır. Bu tezde temel amaç, sonlu iki kümeli $(0, 1)$ -graflarını sınıflandırmaktır.

Bu amaçla, birinci, ikinci ve üçüncü bölümlerde konu ile ilgili temel kavramlardan bahsedilerek, literatürdeki bazı teorem ve sonuçların ispatları genişletilerek verilmiştir. Dördüncü bölümde, sonlu bitişik iki kümeli $(0, 1)$ -grafları ile ilgili bazı önemli sonuçlar elde edilmiştir.

2012, vii+72 sayfa

Anahtar Kelimeler: $(0, 1)$ –graf, bitişik küme, iki kümeli bitişik graf, güçlü bitişik graf, çakışım grafi, yaklaşık demet, projektif düzlem

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

ON THE FINITE ADJACENT BIPARTITE GRAPHS

Aysel ULUKAN

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Doç. Dr. İbrahim GÜNALTILI

A $(0, 1)$ -graph is a simple, connected graph in which any two vertices have at most one common neighbour. The main purpose of this thesis is to classify finite bipartite $(0, 1)$ -graphs.

By this purpose basic concepts are being referred in the first, second and third sections which are related to the main subject and proofs of some theorems and results from the literature are given extended. In chapter 4, some important results were obtained related to finite adjacent bipartite $(0, 1)$ -graphs.

2012, pages vii+72

Key Words : $(0, 1)$ –graph, adjacent set, adjacent bigraph, strongly adjacent graph, incidence graph, near pencil, projective plane

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca çalışmamın her aşamasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyerek bana destek olan danışman hocam Sayın Doç. Dr. İbrahim GÜNALILI (Osmangazi Üniversitesi)'ya, engin bilgilerinden ve tecrübelerinden faydalandığım, ufkumu genişleten hocalarım Sayın Prof. Dr. Şükrü OLGUN (Osmangazi Üniversitesi)'na ve Sayın Prof. Dr. Emine SOYTÜRK SEYRANTEPE (Afyon Kocatepe Üniversitesi)'ye ve hayatımın her anında olduğu gibi doktora eğitimim boyunca da manevi desteklerini benden esirgemeyen sevgili Aileme sonsuz teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Aysel ULUKAN
AFYONKARAHİSAR

İÇİNDEKİLER

TEZ JÜRİSİ VE ENSTİTÜ ONAYI.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
İÇİNDEKİLER.....	v
SİMGELER.....	vi
ŞEKİLLER.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. LİTERATÜR BİLGİLERİ.....	3
3. TEMEL KAVRAMLAR.....	7
3.1. İki Kümeli Graflar.....	24
3.2. Grafların Bazı Uygulama Alanları.....	30
4. SONLU İKİ KÜMELİ BİTİŞİK GRAFLAR.....	34
4.1. $(0, \lambda)$ – Grafları.....	34
4.2. $(0, 1)$ – Grafları.....	41
4.3.İki Kümeli Bitişik Graflar.....	49
4.4.İki Kümeli Güçlü Bitişik Graflar.....	56
5.SONUÇ ve ÖNERİLER.....	68
KAYNAKLAR.....	69
ÖZGEÇMİŞ.....	72

SİMGELER DİZİNİ

C_n	n düğümlü çevre
$d_G(v)$	G de bir v düğümünün derecesi
$d_G(u, v)$	G de u ve v düğümleri arasındaki uzaklık
$diam(G)$	G nin çapı
$E(G)$	G grafinin ayrıt kümesi
$G = (V, E)$	G grafi
$G[W]$	W ayrıt veya düğüm kümesi ile üretilen G nin alt grafi
$G \times H$	G ve H graflarının kartezyen çarpımı
$I(G)$	G grafinin çakışım grafi
$N_i(v)$	v den i uzaklıktaki düğümlerin kümesi
$rad(G)$	G nin yarıçapı
T_n	n düğümlü tam graf
$V(G)$	G grafinin düğüm kümesi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1	Königsberg Köprüsü.....	3
Şekil 2.2	Königsberg Probleminin Grafla İfadesi.....	4
Şekil 2.3	Yol Haritası.....	5
Şekil 2.4	Yol Haritasının Grafsal Gösterimi.....	5
Şekil 3.1	Ayrıtlarına Göre Graf Çeşitleri.....	7
Şekil 3.2	T_1, T_2, T_3 Tam Grafları.....	10
Şekil 3.3	İki Grafın Kartezyen Çarpımı.....	11
Şekil 3.4	Alt Graf.....	11
Şekil 3.5	İzomorf Graflar.....	12
Şekil 3.6	Örnek 3.1 ait G grafi	16
Şekil 3.7	Örnek 3.2 deki $S=(P,L)$ yapısının çakışım grafi	14
Şekil 3.8	Dezarg Konfigürasyonu.....	14
Şekil 3.9	Dezarg Konfigürasyonunun Çakışım Grafi...	16
Şekil 3.10	Dezarg Konfigürasyonunun Çakışım Grafi...	16
Şekil 3.1.1	İki Kümeli Graf.....	24
Şekil 3.1.2	Bir G Grafi ve Çakışım Matrisi.....	27
Şekil 3.1.3	Bir G Grafi ve Bitişiklik Matrisi.....	29
Şekil 3.2.1	Polisilik Hidrokarbonun Grafsal Gösterimi...	30
Şekil 3.2.2	Karkas Örnekleri.....	32
Şekil 3.2.3	Karkasların Grafsal Gösterimi.....	33

1 GİRİŞ

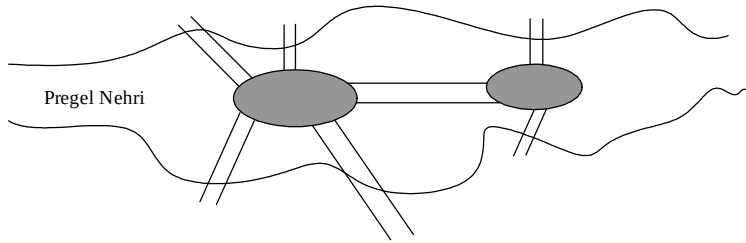
Mulder tarafından $(0, \lambda)$ grafları, " G basit bağlantılı graf ve $\lambda \geq 2$, $\lambda \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere G nin farklı iki düğümünün tam olarak λ komşuluğu varsa veya hiç ortak komşuluğu yoksa G ye $(0, \lambda)$ grafi denir" biçimine tanımlanmıştır (Mulder 1979). Mulder makalesinde $\lambda \geq 2$ koşulunu ele almış olup, $\lambda = 1$ durumunu incelememiştir. Bu tezde, λ pozitif tam sayısının bir olması durumunda elde edilen sonuçlar anlatılarak, " $G = (V, E)$ basit graf olsun. $\forall x, y \in V$ için $|N(x) \cap N(y)| \leq 1$ ise G grafına $(0, 1)$ –grafi denir" biçiminde tanımlanan $(0, 1)$ – graflarının bir karakterizasyonu elde edilmeye çalışılmıştır.

Bu tezin ikinci bölümünde, graf teorisinin Königsberg ve dört renk problemleri gibi önemli problemlerinden örnekler verilerek, graf teorisinin ortaya çıkışından bahsedilmiştir. Ayrıca bu bölümde, genel bir graf tanımı yapılarak, araştırma konusu ile ilgili literatür bilgisi verilmiştir. Üçüncü bölümde, graf teorisinin temel kavramlarına yer verilmiş, kullanılan tanım ve teoremler ayrıntılı bir şekilde anlatılmıştır. Ayrıca, tez konusu iki kümeli grafların özel bir durumunu içerdiğinden, iki kümeli grafların temel özellikleri ve uygulamaları bu bölümde yer almaktadır. Dördüncü bölümün ilk kısmı, Mulder (1979) tarafından özellikleri ortaya konan $(0, \lambda)$ – graflarından oluşmaktadır. İkinci kısımda ise, bir grafta kısmi bitişik küme ve bitişik küme tanımları yapılarak, $(0, \lambda)$ graflarının $\lambda = 1$ durumu ele alınmış olup, $(0, 1)$ – graflarına ait tanım ve teoremler bulunmaktadır. İki kümeli $(0, 1)$ – grafları ilk olarak Günaltı (2011a, 2011b) tarafından incelenmiş, bazı önemli sonuçlar elde edilmiştir. Bu önemli bazı sonuçlarla birlikte, $(0, 1)$ – grafi olan iki grafın kartezyen çarpımının özellikleri, iki kümeli bir grafın $(0, 1)$ – grafi olma koşulu, $(0, 1)$ – grafından iki kümeli graf elde etme koşulları, $(0, 1)$ – grafının çakışım grafının özellikleri anlatılarak $(0, 1)$ – graflarının temel özellikleri ortaya konmuştur. Ayrıca, dördüncü bölümün alt bölümlerinde, iki kümeli $(0, 1)$ – graflarının bir parçasının bitişik olması veya iki parçasının da bitişik olması durumlarına göre, sırasıyla iki kümeli bitişik graf ve iki kümeli güçlü bitişik graf tanımları yapılarak, bu graf türlerinin temel özellikleri incelenmiştir. İki kümeli $(0, 1)$ – grafının,

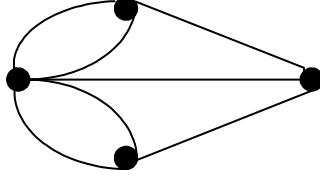
iki kümeli bitişik graf olabilme koşulu elde edilmiştir. Benzer biçimde, iki kümeli bitişik grafın, iki kümeli güçlü bitişik graf olabilme koşulu ortaya konmuştur. İki kümeli güçlü bitişik grafların bir yaklaşık demet veya projektif düzlemin çakışım graflarına, hangi koşullar altında karşılık geleceği gösterilmiştir. Ayrıca, bu bölümlerde güçlü bitişik graflar çaplarına göre de sınıflandırılmıştır.

2 LİTERATÜR BİLGİLERİ

Prusya'daki Königsberg kasabası, içinden Pregel nehri geçen ve bu nehrin ortasında şehrin kıyılarına ve birbirine toplam yedi köprü ile bağlı olan iki adadan oluşan bir kasabadır. 18. yüzyılda bu kasabanın sakinleri şu sorunun yanıtını aramışlardır: Herhangi bir noktadan harekete başlayıp, yedi köprü'nün hepsinden bir ve yalnız bir kez geçip, şehrin bütün bölümlerini dolaştıktan sonra başlangıç noktasına varılabilir mi? Dönemin ünlü matematikçilerinden Leonhard Euler (1707-1783), bu problemin çözümünün olmadığını 1736 yılında yazmış olduğu bir makale ile göstererek graf teorisinin temellerini atmıştır. Euler, problemi çözebilmek için öncelikle Königsberg coğrafyasının gerekli özelliklerini üzerinde rahatça oynayabileceği bir şekil üzerinde göstermiştir. Şehrin kara parçalarını birer nokta, kara parçalarını bağlayan köprüleri de birer çizgi ile göstererek problemi, Şekil 2.2 deki gibi ifade etmiştir. Şehrin kara parçalarını temsil eden noktalara düğüm, köprülerini temsil eden çizgilere de ayrıt ismi verilirse graf teorisi terimleri ile problem şu hale gelir: Herhangi bir düğümden başlayıp, bütün ayrıtlardan bir defa geçerek bütün düğümleri ziyaret edip başlangıç düğüme geri dönülebilir mi? Daha kısa bir ifade ile; grafın tüm ayrıtlarını içeren kapalı bir yol var mıdır? Euler, bağlantılı bir grafın bütün ayrıtlarını içeren kapalı bir yol bulunabilmesi için, düğümlerinin derecelerinin çift olması gerektiğini ispatlayarak, Königsberg Probleminin çözümünün olmadığını göstermiştir.



Şekil 2.1. Königsberg Köprüsü



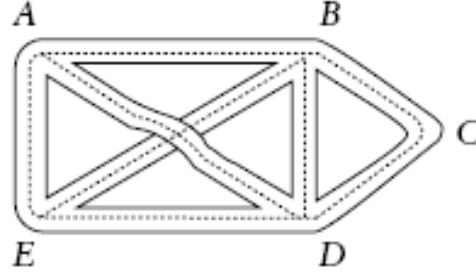
Şekil 2.2. Königsberg Probleminin Grafla İfadesi

Benzer şekilde, 1852 yılında bir başka ünlü matematikçi Augusto De Morgan, Sir William R. Hamilton'a gönderdiği bir mektupta öğrencisinin, İngiltere haritasındaki şehirleri, birbirine komşu olanları farklı renklerde boyamak için dört rengin yeterli olduğunu tespit ettiğini fakat bunu matematiksel olarak ispatlayamadığını yazmıştır. Dört renk problemi olarak adlandırılan bu problem, 1976 yılında K. Appel ve W. Hakken tarafından ancak bilgisayar yardımı ile çözülebilmiştir. Königsberg ve Dört Renk Problemlerinin çözümleri ile matematiğin graf teorisi (çizge kuramı) olarak bilinen, yeni bir uygulama alanı doğmuştur.

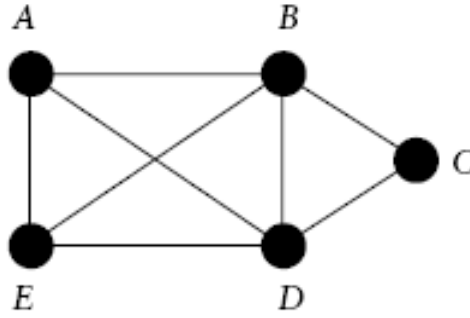
Graf teori, problemleri tanımlama ve yapısal olarak ilişkileri belirlemede kullanıldığından, modern yaşamın karmaşık ve geniş kapsamlı pek çok probleminin çözümünde büyük kolaylık sağlamaktadır. Bu nedenle, ekonomi, yönetim bilimi, satış pazarlama, kimya, genetik, sosyoloji, bilgi iletimi, taşıma planlaması, ekoloji, arkeoloji, müzik gibi pek çok alandaki bir çok problemin çözümünde önemli uygulamalara sahiptir.

Bu durumda, graf nedir? Basitçe bir graf, düğüm denilen noktalar ve her biri, bu noktaları veya noktaların sadece kendisini birleştiren, ayrıt olarak adlandırılan çizgiler topluluğudur. Örneğin, Şekil 2.3 de verilen A,B,C,D,E şehirleri arasındaki yol haritası, düğümler ve ayrıtlar kullanılarak Şekil 2.4 deki gibi ifade edilebilir. Bir grafta düğüm sayısı sonsuz olabilir. Düğümlerin konumları, ayrıt uzunlukları, ayrıt ve düğüm şekilleri önemli değildir. Ayrıtların varlıkları veya yoklukları önemlidir ve ayrıtlar sadece iki düğüm arasında bir ilişki olduğunu gösterir. Bu nedenle, bir graf farklı şekillerde ifade

edilebilir.



Şekil 2.3. Yol Haritası



Şekil 2.4. Yol Haritasının Grafsal Gösterimi

Matematiksel olarak graf, " $V \neq \emptyset$, $k \in \mathbb{Z}^+$ olsun. V kümesinin k elemanlı alt kümelerinin ailesi $[V]^k$ ile gösterilsin. V düğümlerinin kümesi, E ayrıtlar kümesi, Φ üzerinde bulunma bağıntısı ve $V \neq E$ olmak üzere, $\Phi : E \longrightarrow [V]^2 \cup [V]^1$ bağıntısı bir fonksiyonsa $G = (V, E, \Phi)$ üçlüsüne bir "graf" denir" biçiminde tanımlanır. Bir G grafının düğümlerini $k \geq 1$ olmak üzere k tane maksimum mertebeli bağımsız ve ayrık kümeye ayırmak mümkünse, G ye k kümeli graf denir. $k = 2$ ise özel olarak G ye iki kümeli graf (bigraf, bipartite graf) adı verilir (Güney 2005). İki kümeli grafların özellikleri sistematik bir şekilde ilk olarak, König tarafından ortaya konmuştur (König 1915,1916). Bu tezde incelenen iki kümeli bitişik graflar, iki kümeli grafların özel bir halidir. Mulder tarafından $(0, \lambda)$ grafları, " G basit bağlantılı graf ve $\lambda \geq 2$, $\lambda \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere G nin farklı iki düğümünün tam olarak λ komşuluğu varsa veya hiç ortak komşuluğu yoksa G ye $(0, \lambda)$ grafi denir" biçimine tanımlanmıştır (Mulder 1979). Daha sonra ki yıllarda, Mulder $\lambda = 2$ durumu üzerine

alışmalar yapmıştır. Mulder, Brouwer ile birlikte $(0, 2)$ –graflarının düğüm bağlığı üzerine çalışmalarda bulunmuştur (Brouwer and Mulder 1997). Ayrıca Brouwer 7 değerli $(0, 2)$ –graflarını sınıflandırmıştır (Brouwer 2006). Mollard, $(0, \lambda)$ graflarının bir genelleştirilmesi olan çevrim regüler grafları üzerine çalışmıştır (Mollard 1991). Kahoul ve Berrachedi bu graf türünün alt grafları olan $[3, 1, 6]$ çevrim regüler graflarını karakterize etmişlerdir (Kahoul and Berrachedi 2010).

3 TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 3.1. $V \neq \emptyset$, $k \in \mathbb{Z}^+$ olsun. V kümesinin k elemanlı alt kümelerinin ailesi $[V]^k$ ile gösterilsin ve $1 \leq k \leq 2$ olsun. V düğümlerinin kümesi, E ayrıtlarının kümesi, Φ üzerinde bulunma bağıntısı ve $V \cap E = \emptyset$ olmak üzere, $\Phi : E \longrightarrow [V]^2 \cup [V]^1$ bağıntısı bir fonksiyonsa $G = (V, E, \Phi)$ üçlüsüne bir “graf” denir.

(i) Eğer $\exists \{x, y\} \in [V]^2$ için $\Phi(a) = \Phi(b) = \{x, y\}$ olacak şekilde en az iki farklı $a, b \in E$ varsa G ye çoklu graf (multigraph) denir.

(ii) Eğer $\exists e \in E$ için $\Phi(e) \in [V]^1$ ise G ye pseudograf denir.

(iii) Eğer $\Phi : E \longrightarrow [V]^2$ fonksiyonu birebir fonksiyonsa G ye basit graf (simple graph) denir. Bu durumda, basit graflar için $G = (V, E, \Phi)$ yerine $G = (V, E)$ gösterimi kullanılır.



Şekil 3.1. Ayrıtlarına Göre Graf Çeşitleri

Yukarıdaki basit graf tanımı, " V elemanları düğümler olarak adlandırılan boştan farklı bir küme, E de elemanları ayrıtlar olarak adlandırılan ve V nin ikili alt kümelerinin bir ailesi olmak üzere, $G = (V, E)$ yapısına basit graf denir" biçiminde de verilebilir. Bu tezde üzerinde çalışılan bütün graflar basit graftır.

Tanım 3.2. $G = (V, E)$ grafında, $\exists a, b \in E$ için $\Phi(a) \cap \Phi(b) \neq \emptyset$ ise a ve b ayrıtlarına bitişik ayrıtlar denir.

Tanım 3.3. $G = (V, E)$ grafında V ve E kümeleri sonlu kümelerse G grafına sonlu graf denir.

Tanım 3.4. $G = (V, E)$ bir graf ve $X \subseteq V$ olsun. Her $x, y \in X$ için x ve y düğüm çiftini birleştiren bir $e \in E$ yoksa, X kümesine bağımsız küme denir.

Basit bir grafta düğüm kümesi üzerinde tanımlanabilecek maksimum ayrıt sayısı, düğüm kümesinin elaman sayısı ile ilişkilidir. Bu ilişkiyi aşağıdaki teorem vermektedir:

Teorem 3.1. Herhangi bir $G = (V, E)$ basit grafında $|V| = n$ ve $|E| = m$ olmak üzere

$$n \geq 1 \text{ ve } 0 \leq m \leq \binom{n}{2}$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat: Graf tanımından dolayı, bir grafın düğüm kümesi boştan farklıdır. Bu nedenle; $n \geq 1$ dir. Bir graftaki, ayrıt sayısının en az sıfır olduğu aşıkardır. Basit grafta ilmik bulunmadığından, ayrıt kümesi düğüm kümesinin iki elemanlı alt kümelerinden oluşur. Aynı zamanda, G grafında katlı ayrıt bulunmadığından bu sayı en fazla $\binom{n}{2}$

kadardır. Öyleyse, $0 \leq m \leq \binom{n}{2}$ dir.

Tanım 3.5. $G = (V, E)$ basit graf olsun. $x, y \in V$ için x ve y düğüm çiftini birleştiren bir $e \in E$ varsa, x ve y düğümlerine komşu düğümler denir. Bir $x \in V$ için

$$N(x) = \{y \in V \mid \{x, y\} \in E\}$$

kümesine x düğümünün komşuluğu denir.

Tanım 3.6. $G = (V, E)$ basit graf olsun. $x, y \in V$ için $N(x) \cap N(y) \neq \emptyset$ ise $N(x) \cap N(y)$ nin elemanlarına x ve y düğümlerinin ortak komşuluğu denir.

Tanım 3.7. $G = (V, E)$ bir graf ve $x \in V$ olsun. x düğümü ile çakışık olan ayrıtların sayısına x düğümünün derecesi denir ve $d_G(x)$ veya $d(x)$ ile gösterilir. $d_G(x) = |N(x)|$

dir.

Tanım 3.8. Düğümleri $x_1, x_2, \dots, x_n$ olan bir G grafında her i için $d(x_i) = b_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ olarak belirlenen $s = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ dizisine, G nin derece dizisi denir. Eğer $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq 0$ ise s ye monoton azalan, $0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ ise s ye monoton artan dizi denir.

Tek bir ayrıt bitişik olduğu düğüme bir derece kazandırırken, bir ilmik bitişik olduğu düğüme iki derece birden kazandırır. Derecesi tek sayı olan düğüme tek d   m, derecesi çift sayı olan düğüme çift d   m denir. Sıfır dereceli d   m tekil veya izole d   m, bir dereceli d   m ise u  d   m olarak adlandırılır.

Bir G grafının en az dereceli d   m ne minumum dereceli d   m denir ve $\delta(G)$ ile gösterilir. En çok dereceli d   m ne de maksimum dereceli d   m denir ve $\Delta(G)$ ile gösterilir.

Teorem 3.2. Herhangi bir $G = (V, E)$ basit grafında $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ve $|E| = m$ olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2m$$

dir (Wilson and Watkins 1990).

 spat: G grafında her ayrıt iki d   mle  akı ıktır. Bu nedenle düğümlerin dereceleri toplanırken her bir ayrıt iki kez sayılır. Dolaysı ile bu toplam, $2m$ ye eşittir.

Teorem 3.2 nin bazı önemli sonuçları vardır:

Sonuc 3.1. Herhangi bir $G = (V, E)$ grafında bütün düğümlerin dereceleri toplamı çift sayıdır.

 spat: Teorem 3.3 ten dolayı bütün düğümlerin derecelerinin toplamı ayrıt sayısının iki katıdır ve bu da çift sayıdır.

Sonuc 3.2. Herhangi bir $G = (V, E)$ grafında $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ve $|E| = m$ olmak üzere, derecesi tek tamsayı olan düğümlerin sayısı çifttir.

İspat: G grafının tek dereceli düğümlerinin kümesini U ile, çift dereceli düğümlerinin kümesini W ile gösterelim. Bu durumda,

$$\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in U} d(v) + \sum_{v \in W} d(v)$$

dir. Teorem 3.2 den dolayı,

$$2m = \sum_{v \in U} d(v) + \sum_{v \in W} d(v)$$

dir. Öyleyse,

$$2m - \sum_{v \in W} d(v) = \sum_{v \in U} d(v)$$

bulunur. $\sum_{v \in W} d(v)$ toplamındaki terimler çift olduğundan bu toplam da çifttir. Buna göre, $2m - \sum_{v \in W} d(v)$ de çift olmalıdır. O halde, $\sum_{v \in U} d(v)$ toplamı çifttir. Bu toplamdaki terimlerin her biri tek sayı olduğundan toplamın çift olabilmesi için çift sayıda terimin toplanmış olması gereklidir. Bu nedenle, $|U|$ çifttir.

Tanım 3.9. Bir G grafi verilsin. G nin her bir düğümü r -dereceli ise G grafına r -regüler denir. G regüler bir grafsa, grafın derecesi $d(G)$ ile gösterilir.

G grafi r -regüler bir grafsa, aşağıda verilen Sonuç 3.3, Teorem 3.2 nin bir sonucudur:

Sonuç 3.3. Herhangi bir $G = (V, E)$ basit grafında $|V| = n$ ve $|E| = m$ olmak üzere, G grafi r -regüler bir grafsa

$$m = \frac{1}{2}nr$$

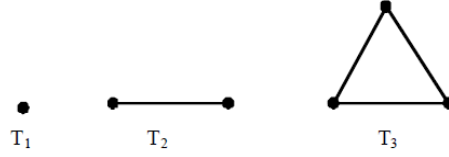
dir.

İspat: G nin bütün düğümlerinin derecelerinin toplamı nr dir. Teorem 3.3 ten dolayı

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2m$$

dir. Öyleyse $nr = 2m$ ve $m = \frac{1}{2}nr$ dir.

Tanım 3.10. Birbirinden farklı her düğüm çifti arasında bir ayrıt bulunan grafa tam graf denir ve n mertebeli bir tam graf T_n ile gösterilir. Şekil 3.2. de T_1 , T_2 , T_3 tam grafları verilmiştir.



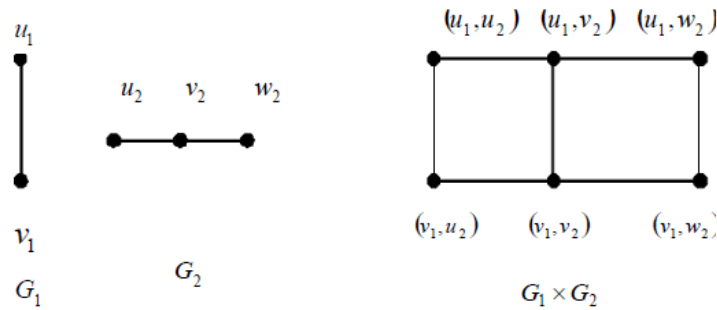
Şekil 3.2. T_1 , T_2 , T_3 Tam Grafları

Bir tam graf, düğüm kümesi üzerinde tanımlanabilecek bütün ayrıtları bulundurur. Bu nedenle, düğüm sayısı n , ayrıt sayısı m olan bir tam graf için

$$m = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

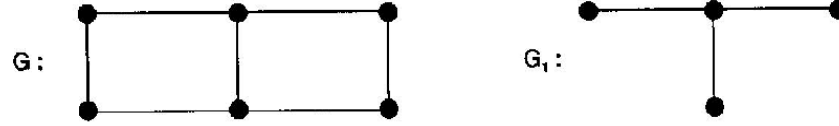
eşitliği geçerlidir. Bir tam grafın her bir düğümü $n - 1$ dereceli olup; bu nedenle, her tam graf regüler bir graftır.

Tanım 3.11. $G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ olmak üzere $G_1 \times G_2$ kartezyen çarpımı, $V_1 \times V_2$ düğüm kümeli bir graftır ve kartezyen çarpımda $u = (u_1, u_2)$ ve $v = (v_1, v_2)$ düğümlerinin bitişik olması için gerek ve yeter koşul $[u_1 = v_1 \text{ ise } u_2v_2 \in V_2]$ veya $[u_2 = v_2 \text{ ise } u_1v_1 \in V_1]$ olmasıdır. Aşağıda G_1 ve G_2 graflarının kartezyen çarpımı görülmektedir.



Şekil 3.3. İki Grafın Kartezyen Çarpımı

Tanım 3.12. G ve H , düğüm kümeleri sırasıyla $V(G)$ ve $V(H)$, ayrıt kümeleri sırasıyla $E(G)$ ve $E(H)$ olan iki graf olsun. $V(H) \subseteq V(G)$ ve $E(H) \subseteq E(G)$ ise H grafına G grafının altgrafı veya G grafına H grafının süpergrafı denir. Bu durumda, H grafı G grafının altgrafı ise $H \subseteq G$ ile gösterilir.



Şekil 3.4. G_1 grafı, G grafının alt grafıdır

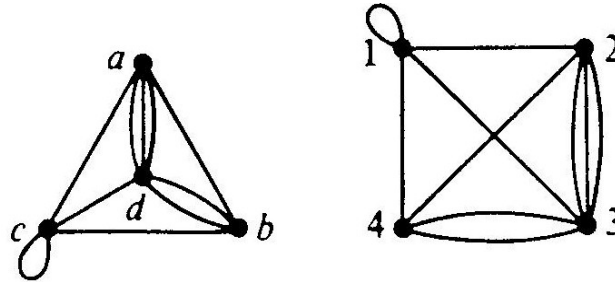
İki graf farklı gösterimlere sahipken aynı grafı temsil edebilirler. Diğer taraftan aynı görünüme sahip ama farklı graflar da olabilirler. İki grafın aynı grafı temsil ettiğini gösterebilmek için graflarda izomorfizm kavramının tanımlanması gereklidir.

Tanım 3.13. $G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ grafları verilsin. Eğer V_1 den V_2 ye

- (i) Birebir ve örten
- (ii) Her $a, b \in V_1$ için $\{a, b\} \in E_1$ olması için gerek ve yeter koşul $\{f(a), f(b)\} \in E_2$ olmasıdır,

koşullarını sağlayan bir f dönüşümü varsa G_1 grafı G_2 grafına izomorftur denir ve $G_1 \cong G_2$ ile gösterilir. Buradaki f dönüşümüne ise izomorfizm adı verilir.

İki grafın izomorf olabilmesi için, her iki grafın düğüm ve ayrıt sayılarının aynı olması gereklidir. İzomorf iki grafta, aynı dereceli düğümlerin sayıları eşittir. İzomorf iki grafın derece dizisi aynıdır ve aynı çevreleri içermek zorundadırlar. Şekil 3.5 de çizimleri farklı ama izomorf iki garfa görülmektedir.



Şekil 3.5. İzomorf graflar

Tanım 3.14. $G = (V, E)$ bir graf olsun. $d_i \in V$ ve $a_i = d_{i-1}d_i \in E$ olmak üzere $(x = d_0, a_1, d_1, a_2, \dots, d_{i-1}, a_i, d_i, \dots, d_{k-1}, a_k, d_k = y)$ sonlu dizisine bir $x-y$ dolaşısı denir. Bir $x-y$ dolaşısı $x = y$ veya $x \neq y$ olmasına göre kapalı ya da açık adını alır. Bir $x-y$ dolaşısındaki ayrıtların sayısına dolaşımın uzunluğu denir.

Tanım 3.15. Bir dolaşıda hiç ayrıt tekrar etmiyorsa bu dolaşıya gezi, hiç düğüm tekrar etmiyorsa bu dolaşıya bir yol denir. Bir $P_{x,y}$ yolunun uzunluğu $|P_{x,y}|$ ile gösterilir. n uzunluklu bir yol $n+1$ düğüme sahiptir.

Tanım 3.16. Bir G grafının bir kapalı yoluna G nin bir çevresi denir. Bir çevre n tane ayrıt kapsadığından uzunluğu n dir ve C_n ile gösterilir. Buradaki n sayısına C_n çevresinin uzunluğu denir.

Tanım 3.17. Bir G grafının çevrelerinin uzunluklarının minimumuna G nin girti denir. ve $\text{girt}(G)$ ile gösterilir.

Tanım 3.18. x ve y bir G grafının herhangi iki düğümü olsunlar. Eğer G grafında bir $x-y$ yolu varsa, x düğümü y düğüme bağlantılıdır denir. Her düğüm çifti bağlantılı olan grafa bağlantılı (bağlı) graf denir.

Tanım 3.19. Bağlantılı bir G grafi için, G nin $x-y$ yollarının uzunluklarının minimumuna x ve y düğümleri arasındaki uzaklık denir ve $d(x, y)$ ile gösterilir.

$$d(x, y) = \min \{|P_{x,y}| \mid Y_{x,y}, x \text{ den } y \text{ ye bir yol}\}$$

G grafında herhangi üç düğüm x, y ve z olmak üzere,

$$(i) \quad d(x, y) \geq 0 \text{ ve } d(x, y) = 0 \text{ ise } x = y$$

$$(ii) \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$(iii) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

özellikleri sağlandığından d fonksiyonu $V(G)$ üzerinde bir metriktir.

Ayrıca, $G = (V, E)$ grafında $x \in V$ için $N_i(x)$ kümesi x den i uzaklıktaki düğümlerin kümesini ifade eder.

$$N_i(x) = \{y \in V \mid d(x, y) = i, i \in \mathbb{Z}^+\}$$

Tanım 3.20. Bağlantılı bir $G = (V, E)$ grafının bir x düğümü ile x düğümüne en uzaktaki düğüm arasındaki uzaklığa x düğümünün açıklığı denir ve $e(x)$ ile gösterilir.

$$e(x) = \max \{d(x, y) \mid y \in V\}$$

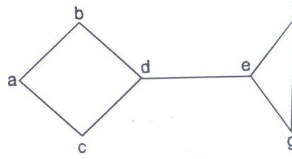
Tanım 3.21. $G = (V, E)$ grafının düğümleri arasındaki açıklığın minimumuna G nin yarıçapı denir ve $rad(G)$ ile gösterilir. Maksimum açıklığa da G nin çapı denir ve $\text{çap}(G)$ ile gösterilir. Yani,

$$rad(G) = \min \{e(x) \mid x \in V\}$$

$$\text{çap}(G) = \max \{e(x) \mid x \in V\}$$

dir (Güney 2005).

Örnek 3.1: Şekil 3.6 da verilen grafın çapını bulalım:



Şekil 3.6. Örnek 3.1 e ait G grafi

$$d(a, a) = 0, d(a, b) = 1, d(a, c) = 1, d(a, d) = 2, d(a, e) = 3, d(a, f) = 4, d(a, g) = 4$$

$$d(b, b) = 0, d(b, a) = 1, d(b, c) = 2, d(b, d) = 1, d(b, e) = 2, d(b, f) = 3, d(b, g) = 3$$

$$d(c, c) = 0, d(c, a) = 1, d(c, b) = 2, d(c, d) = 1, d(c, e) = 2, d(c, f) = 3, d(c, g) = 3$$

$$d(d, d) = 0, d(d, a) = 2, d(d, b) = 1, d(d, c) = 1, d(d, e) = 1, d(d, f) = 2, d(d, g) = 2$$

$$d(e, e) = 0, d(e, a) = 3, d(e, b) = 2, d(e, c) = 1, d(e, d) = 1, d(e, f) = 1, d(e, g) = 1$$

$$d(f, f) = 0, d(f, a) = 4, d(f, b) = 3, d(f, c) = 3, d(f, d) = 2, d(f, e) = 1, d(f, g) = 1$$

$$d(g, g) = 0, d(g, a) = 4, d(g, b) = 3, d(g, c) = 3, d(g, d) = 2, d(g, e) = 1, d(g, f) = 1$$

olduğundan $e(a) = 4$, $e(b) = 3$, $e(c) = 3$, $e(d) = 2$, $e(e) = 3$, $e(f) = 4$, $e(g) = 4$ tür. Böylece $\text{çap}(G) = 4$ ve $\text{rad}(G) = 2$ dir.

Tanım 3.22. P noktalar kümesi, L doğrular kümesi, $P \cap L = \emptyset$ ve “ $(p, l) \in I$ ise p noktası l doğrusunun üzerindedir” biçiminde tanımlanan $I \subset P \times L$ bağıntısı üzerinde bulunma bağıntısı olmak üzere $S = (P, L, I)$ üçlüsüne bir geometrik yapı denir. Eğer L , P nin alt kümelerinin bir ailesi ise $S = (P, L, I)$ gösterimi yerine $S = (P, L)$ gösterimi kullanılır.

Tanım 3.23. P noktalar kümesini, L doğrular kümesini göstermek üzere aşağıdaki aksiyomları sağlayan $S = (P, L)$ ikilisine bir yaklaşık lineer uzay denir (Batten 1997);

$YL1$: Her doğru üzerinde en az iki nokta vardır,

$YL2$: İki nokta en fazla bir doğru üzerindedir.

Tanım 3.24. P noktalar kümesini, L doğrular kümesini göstermek üzere aşağıdaki aksiyomları sağlayan $S = (P, L)$ ikilisine bir lineer uzay denir (Batten 1997);

$L1$: Her doğru üzerinde en az iki nokta vardır,

$L2$: Farklı iki noktadan bir tek doğru geçer.

Tanım 3.25. $S = (P, L)$ lineer uzayında $|P| = v$ olmak üzere, S uzayının bir doğrusu $v - 1$ noktalı, diğer bütün doğruları iki noktalı ise bu lineer uzaya yaklaşık demet denir.

Tanım 3.26. P noktalar kümesini, L doğrular kümesini göstermek üzere aşağıdaki aksiyomları sağlayan $\mathcal{P} = (P, L)$ ikilisine projektif düzlem denir (Kaya 1992).

$P1$: Farklı iki noktadan bir tek doğru geçer,

$P2$: Herhangi iki doğrunun en az bir ortak noktası vardır,

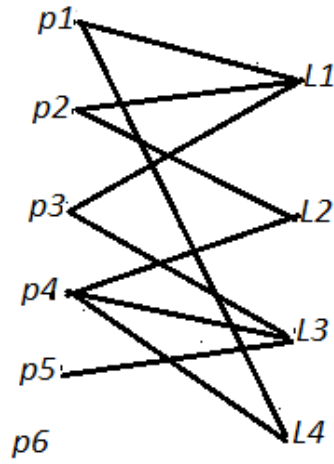
$P3$: Herhangi üçü doğrudan olmayan dört nokta vardır.

Teorem 3.3. $S = (P, L, I)$ herhangi bir geometrik yapı olsun. $V = P \cup L$, $E = \{\{p, l\} \mid p I l\}$ olmak üzere $G = (V, E)$ iki kümeli P ve L parçalı bir graftır.

İspat: S bir geometrik yapı olduğundan $P \cap L = \emptyset$ tur. E nin tanımından dolayı P ve L ayrıt kapsamayan bağımsız kümelerdir.

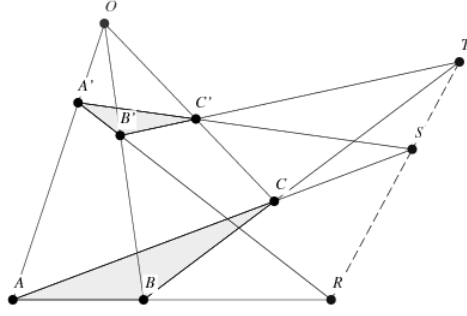
Tanım 3.27. Teorem 3.3 deki $G = (V, E)$ grafına $S = (P, L, I)$ yapısının çakışım grafi (incidence graph) denir. İlk olarak 1942 de F.W. Levi tarafından bahsedildiğinden çakışım grafi literatürde Levi grafları olarak da adlandırılır.

Örnek 3.2: $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ve $L = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4, 5\}, \{1, 4\}\}$ olarak verildiğinde $S = (P, L)$ bir yaklaşık lineer uzaydır. L nin elemanları sırasıyla L_1, L_2, L_3, L_4 ile gösterilirse, bu geometrik yapının çakışım grafi Şekil 3.7 de verilmiştir. Şekil 3.8. ve Şekil 3.9. sırasıyla projektif geometrideki Desarg Konfigürasyonu ve onun çakışım grafidir.

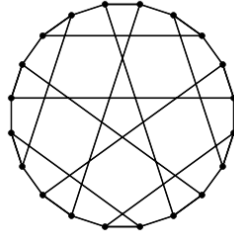


Şekil 3.7. Örnek 3.2 deki $S=(P,L)$ geometrik yapısının çakışım grafi

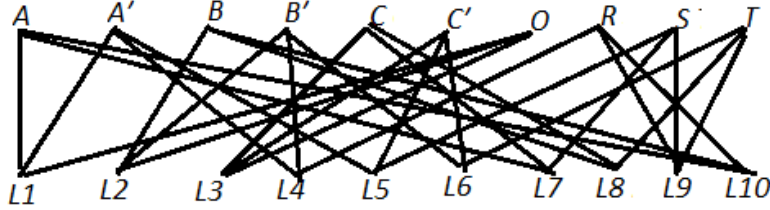
Benzer biçimde Şekil 3.8 de verilen Desarg Konfigürasyonunun akışım grafi farklı gösterimleri , Şekil 3.9 ve Şekil 3.10 da verilmiştir. Bu graflar birbirine izomorftur. Şekil 3.10 da $L_1=\{A, A',O\}$, $L_2 = \{A, A',O\}$, $L_3 = \{B, B',O\}$, $L_4 = \{C, C',O\}$, $L_5 = \{A', C',O\}$, $L_6 = \{B', C',O\}$, $L_7 = \{A, C,S\}$, $L_8 = \{B, C,T\}$, $L_9=\{R, S, T\}$, $L_{10}=\{A, B, R\}$ olarak adlandırılmıştır.



Şekil 3.8. Desarg Configürasyonu



Şekil 3.9. Desarg Configürasyonunun Çakışım Grafi

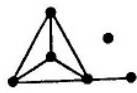
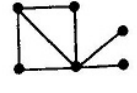
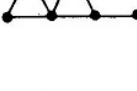
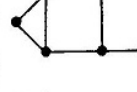
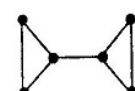
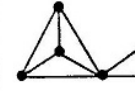
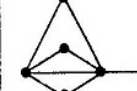
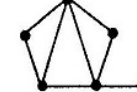
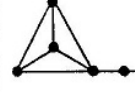
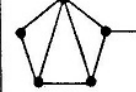
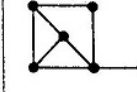


Şekil 3.10. Desarg Configürasyonunun Çakışım Grafi

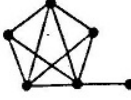
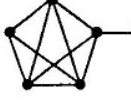
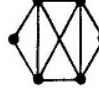
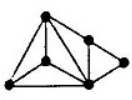
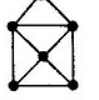
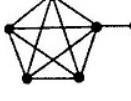
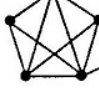
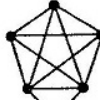
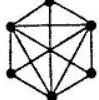
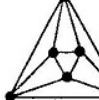
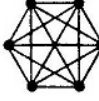
Aşağıda en fazla 6 düğümlü graflardan oluşan graf kartları verilmektedir. Buradaki her kartın bir numarası vardır ve toplam 200 tane kart vardır. Her kartta bir grafın düğüm sayısı n , ayırıt sayısı m , derece dizisi ve grafın çizilişi verilmektedir. Kartlar grafların düğüm sayılarına, daha sonra ayırıt sayılarına, daha sonra da derece dizilerine göre artan sırada hazırlanmıştır (Wilson and Watkins 1990). Graf kartlarında görüldüğü gibi düğüm sayıları, ayırıt sayıları, derece dizileri aynı olan fakat izomorf olmayan graflar vardır.

36 $n = 5$ $m = 5$ $d = (1,2,2,2,3)$	37 $n = 5$ $m = 5$ $d = (1,2,2,2,3)$	38 $n = 5$ $m = 5$ $d = (2,2,2,2,2)$	39 $n = 5$ $m = 6$ $d = (0,3,3,3,3)$	40 $n = 5$ $m = 6$ $d = (1,2,2,3,4)$	41 $n = 5$ $m = 6$ $d = (1,2,3,3,3)$
42 $n = 5$ $m = 6$ $d = (2,2,2,2,4)$	43 $n = 5$ $m = 6$ $d = (2,2,2,3,3)$	44 $n = 5$ $m = 6$ $d = (2,2,2,3,3)$	45 $n = 5$ $m = 7$ $d = (1,3,3,3,4)$	46 $n = 5$ $m = 7$ $d = (2,2,2,4,4)$	47 $n = 5$ $m = 7$ $d = (2,2,3,3,4)$
48 $n = 5$ $m = 7$ $d = (2,3,3,3,3)$	49 $n = 5$ $m = 8$ $d = (2,3,3,4,4)$	50 $n = 5$ $m = 8$ $d = (3,3,3,3,4)$	51 $n = 5$ $m = 9$ $d = (3,3,4,4,4)$	52 $n = 5$ $m = 10$ $d = (4,4,4,4,4)$	
53 $n = 6$ $m = 0$ $d = (0,0,0,0,0,0)$	54 $n = 6$ $m = 1$ $d = (0,0,0,0,1,1)$	55 $n = 6$ $m = 2$ $d = (0,0,1,1,1,1)$	56 $n = 6$ $m = 2$ $d = (0,0,0,1,1,2)$	57 $n = 6$ $m = 3$ $d = (0,0,0,2,2,2)$	58 $n = 6$ $m = 3$ $d = (0,0,1,1,1,3)$
59 $n = 6$ $m = 3$ $d = (0,0,1,1,2,2)$	60 $n = 6$ $m = 3$ $d = (0,1,1,1,1,2)$	61 $n = 6$ $m = 3$ $d = (1,1,1,1,1,1)$	62 $n = 6$ $m = 4$ $d = (0,0,1,2,2,3)$	63 $n = 6$ $m = 4$ $d = (0,0,2,2,2,2)$	64 $n = 6$ $m = 4$ $d = (0,1,1,1,1,4)$
65 $n = 6$ $m = 4$ $d = (0,1,1,1,2,3)$	66 $n = 6$ $m = 4$ $d = (0,1,1,2,2,2)$	67 $n = 6$ $m = 4$ $d = (0,1,1,2,2,2)$	68 $n = 6$ $m = 4$ $d = (1,1,1,1,1,3)$	69 $n = 6$ $m = 4$ $d = (1,1,1,1,2,2)$	70 $n = 6$ $m = 4$ $d = (1,1,1,1,2,2)$

71 $n = 6$ $m = 5$ $d = (0, 0, 2, 2, 3, 3)$	72 $n = 6$ $m = 5$ $d = (0, 1, 1, 2, 2, 4)$	73 $n = 6$ $m = 5$ $d = (0, 1, 1, 2, 3, 3)$	74 $n = 6$ $m = 5$ $d = (0, 1, 2, 2, 2, 3)$	75 $n = 6$ $m = 5$ $d = (0, 1, 2, 2, 2, 3)$	76 $n = 6$ $m = 5$ $d = (0, 2, 2, 2, 2, 2)$
77 $n = 6$ $m = 5$ $d = (1, 1, 1, 1, 1, 5)$	78 $n = 6$ $m = 5$ $d = (1, 1, 1, 1, 2, 4)$	79 $n = 6$ $m = 5$ $d = (1, 1, 1, 1, 3, 3)$	80 $n = 6$ $m = 5$ $d = (1, 1, 1, 2, 2, 3)$	81 $n = 6$ $m = 5$ $d = (1, 1, 1, 2, 2, 3)$	82 $n = 6$ $m = 5$ $d = (1, 1, 1, 2, 2, 3)$
83 $n = 6$ $m = 5$ $d = (1, 1, 2, 2, 2, 2)$	84 $n = 6$ $m = 5$ $d = (1, 1, 2, 2, 2, 2)$	85 $n = 6$ $m = 5$ $d = (1, 1, 2, 2, 2, 2)$	86 $n = 6$ $m = 6$ $d = (0, 0, 3, 3, 3, 3)$	87 $n = 6$ $m = 6$ $d = (0, 1, 2, 2, 3, 4)$	88 $n = 6$ $m = 6$ $d = (0, 1, 2, 3, 3, 3)$
89 $n = 6$ $m = 6$ $d = (0, 2, 2, 2, 2, 4)$	90 $n = 6$ $m = 6$ $d = (0, 2, 2, 2, 3, 3)$	91 $n = 6$ $m = 6$ $d = (0, 2, 2, 2, 3, 3)$	92 $n = 6$ $m = 6$ $d = (1, 1, 1, 2, 2, 5)$	93 $n = 6$ $m = 6$ $d = (1, 1, 1, 2, 3, 4)$	94 $n = 6$ $m = 6$ $d = (1, 1, 1, 3, 3, 3)$
95 $n = 6$ $m = 6$ $d = (1, 1, 2, 2, 3, 3)$	96 $n = 6$ $m = 6$ $d = (1, 1, 2, 2, 2, 4)$	97 $n = 6$ $m = 6$ $d = (1, 1, 2, 2, 2, 4)$	98 $n = 6$ $m = 6$ $d = (1, 1, 2, 2, 3, 3)$	99 $n = 6$ $m = 6$ $d = (1, 1, 2, 2, 3, 3)$	100 $n = 6$ $m = 6$ $d = (1, 1, 2, 2, 3, 3)$
101 $n = 6$ $m = 6$ $d = (1, 1, 2, 2, 3, 3)$	102 $n = 6$ $m = 6$ $d = (1, 2, 2, 2, 2, 3)$	103 $n = 6$ $m = 6$ $d = (1, 2, 2, 2, 2, 3)$	104 $n = 6$ $m = 6$ $d = (1, 2, 2, 2, 2, 3)$	105 $n = 6$ $m = 6$ $d = (2, 2, 2, 2, 2, 2)$	106 $n = 6$ $m = 6$ $d = (2, 2, 2, 2, 2, 2)$

107	108	109	110	111	112
					
$n = 6$ $m = 7$ $d = (0,1,3,3,3,4)$	$n = 6$ $m = 7$ $d = (0,2,2,2,4,4)$	$n = 6$ $m = 7$ $d = (0,2,2,3,3,4)$	$n = 6$ $m = 7$ $d = (0,2,3,3,3,3)$	$n = 6$ $m = 7$ $d = (1,1,2,2,3,5)$	$n = 6$ $m = 7$ $d = (1,1,2,2,4,4)$
113	114	115	116	117	118
					
$n = 6$ $m = 7$ $d = (1,1,2,3,3,4)$	$n = 6$ $m = 7$ $d = (1,1,2,3,3,4)$	$n = 6$ $m = 7$ $d = (1,1,3,3,3,3)$	$n = 6$ $m = 7$ $d = (1,1,3,3,3,3)$	$n = 6$ $m = 7$ $d = (1,2,2,2,2,5)$	$n = 6$ $m = 7$ $d = (1,2,2,2,3,4)$
119	120	121	122	123	124
					
$n = 6$ $m = 7$ $d = (1,2,2,2,3,4)$	$n = 6$ $m = 7$ $d = (1,2,2,2,3,4)$	$n = 6$ $m = 7$ $d = (1,2,2,2,3,4)$	$n = 6$ $m = 7$ $d = (1,2,2,3,3,3)$	$n = 6$ $m = 7$ $d = (1,2,2,3,3,3)$	$n = 6$ $m = 7$ $d = (1,2,2,3,3,3)$
125	126	127	128	129	130
					
$n = 6$ $m = 7$ $d = (1,2,2,3,3,3)$	$n = 6$ $m = 7$ $d = (2,2,2,2,2,4)$	$n = 6$ $m = 7$ $d = (2,2,2,2,3,3)$	$n = 6$ $m = 7$ $d = (2,2,2,2,3,3)$	$n = 6$ $m = 7$ $d = (2,2,2,2,3,3)$	$n = 6$ $m = 7$ $d = (2,2,2,2,3,3)$
131	132	133	134	135	136
					
$n = 6$ $m = 8$ $d = (0,2,3,3,4,4)$	$n = 6$ $m = 8$ $d = (0,3,3,3,3,4)$	$n = 6$ $m = 8$ $d = (1,1,3,3,3,5)$	$n = 6$ $m = 8$ $d = (1,1,3,3,4,4)$	$n = 6$ $m = 8$ $d = (1,2,2,2,4,5)$	$n = 6$ $m = 8$ $d = (1,2,2,3,3,5)$
137	138	139	140	141	142
					
$n = 6$ $m = 8$ $d = (1,2,2,3,4,4)$	$n = 6$ $m = 8$ $d = (1,2,2,3,4,4)$	$n = 6$ $m = 8$ $d = (1,2,3,3,3,4)$	$n = 6$ $m = 8$ $d = (1,2,3,3,3,4)$	$n = 6$ $m = 8$ $d = (1,2,3,3,3,4)$	$n = 6$ $m = 8$ $d = (1,2,3,3,3,4)$

143 $n = 6$ $m = 8$ $d = (1, 3, 3, 3, 3)$	144 $n = 6$ $m = 8$ $d = (2, 2, 2, 2, 3, 5)$	145 $n = 6$ $m = 8$ $d = (2, 2, 2, 2, 4, 4)$	146 $n = 6$ $m = 8$ $d = (2, 2, 2, 2, 4, 4)$	147 $n = 6$ $m = 8$ $d = (2, 2, 2, 3, 3, 4)$	148 $n = 6$ $m = 8$ $d = (2, 2, 2, 3, 3, 4)$
149 $n = 6$ $m = 8$ $d = (2, 2, 2, 3, 3, 4)$	150 $n = 6$ $m = 8$ $d = (2, 2, 2, 3, 3, 4)$	151 $n = 6$ $m = 8$ $d = (2, 2, 3, 3, 3, 3)$	152 $n = 6$ $m = 8$ $d = (2, 2, 3, 3, 3, 3)$	153 $n = 6$ $m = 8$ $d = (2, 2, 3, 3, 3, 3)$	154 $n = 6$ $m = 8$ $d = (2, 2, 3, 3, 3, 3)$
155 $n = 6$ $m = 9$ $d = (0, 3, 3, 4, 4, 4)$	156 $n = 6$ $m = 9$ $d = (1, 2, 3, 3, 4, 5)$	157 $n = 6$ $m = 9$ $d = (1, 2, 3, 4, 4, 4)$	158 $n = 6$ $m = 9$ $d = (1, 3, 3, 3, 3, 5)$	159 $n = 6$ $m = 9$ $d = (1, 3, 3, 3, 4, 4)$	160 $n = 6$ $m = 9$ $d = (1, 3, 3, 3, 4, 4)$
161 $n = 6$ $m = 9$ $d = (2, 2, 2, 2, 5, 5)$	162 $n = 6$ $m = 9$ $d = (2, 2, 2, 3, 4, 5)$	163 $n = 6$ $m = 9$ $d = (2, 2, 2, 4, 4, 4)$	164 $n = 6$ $m = 9$ $d = (2, 2, 3, 3, 3, 5)$	165 $n = 6$ $m = 9$ $d = (2, 2, 3, 3, 3, 5)$	166 $n = 6$ $m = 9$ $d = (2, 2, 3, 3, 4, 4)$
167 $n = 6$ $m = 9$ $d = (2, 2, 3, 3, 4, 4)$	168 $n = 6$ $m = 9$ $d = (2, 2, 3, 3, 4, 4)$	169 $n = 6$ $m = 9$ $d = (2, 2, 3, 3, 4, 4)$	170 $n = 6$ $m = 9$ $d = (2, 2, 3, 3, 4, 4)$	171 $n = 6$ $m = 9$ $d = (2, 3, 3, 3, 3, 4)$	172 $n = 6$ $m = 9$ $d = (2, 3, 3, 3, 3, 4)$
173 $n = 6$ $m = 9$ $d = (2, 3, 3, 3, 3, 4)$	174 $n = 6$ $m = 9$ $d = (3, 3, 3, 3, 3, 3)$	175 $n = 6$ $m = 9$ $d = (3, 3, 3, 3, 3, 3)$			

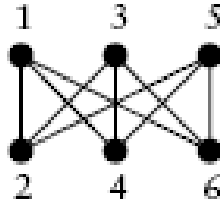
176  $n = 6$ $m = 10$ $d = (0, 4, 4, 4, 4, 4)$	177  $n = 6$ $m = 10$ $d = (1, 3, 3, 4, 4, 5)$	178  $n = 6$ $m = 10$ $d = (1, 3, 4, 4, 4, 4)$	179  $n = 6$ $m = 10$ $d = (2, 2, 3, 3, 5, 5)$	180  $n = 6$ $m = 10$ $d = (2, 2, 3, 4, 4, 5)$	181  $n = 6$ $m = 10$ $d = (2, 2, 4, 4, 4, 4)$
182  $n = 6$ $m = 10$ $d = (2, 3, 3, 3, 4, 5)$	183  $n = 6$ $m = 10$ $d = (2, 3, 3, 3, 4, 5)$	184  $n = 6$ $m = 10$ $d = (2, 3, 3, 4, 4, 4)$	185  $n = 6$ $m = 10$ $d = (2, 3, 3, 4, 4, 4)$	186  $n = 6$ $m = 10$ $d = (2, 3, 3, 4, 4, 4)$	187  $n = 6$ $m = 10$ $d = (3, 3, 3, 3, 5, 5)$
188  $n = 6$ $m = 10$ $d = (3, 3, 3, 3, 4, 4)$	189  $n = 6$ $m = 10$ $d = (3, 3, 3, 3, 4, 4)$	190  $n = 6$ $m = 10$ $d = (3, 3, 3, 3, 4, 4)$	191  $n = 6$ $m = 11$ $d = (1, 4, 4, 4, 4, 5)$	192  $n = 6$ $m = 11$ $d = (2, 3, 3, 4, 5, 5)$	193  $n = 6$ $m = 11$ $d = (2, 3, 4, 4, 4, 5)$
194  $n = 6$ $m = 11$ $d = (2, 4, 4, 4, 4, 4)$	195  $n = 6$ $m = 11$ $d = (3, 3, 3, 3, 5, 5)$	196  $n = 6$ $m = 11$ $d = (3, 3, 3, 4, 4, 5)$	197  $n = 6$ $m = 11$ $d = (3, 3, 3, 4, 4, 5)$	198  $n = 6$ $m = 11$ $d = (3, 3, 4, 4, 4, 4)$	199  $n = 6$ $m = 11$ $d = (3, 3, 4, 4, 4, 4)$
200  $n = 6$ $m = 12$ $d = (2, 4, 4, 4, 5, 5)$	201  $n = 6$ $m = 12$ $d = (3, 3, 3, 5, 5, 5)$	202  $n = 6$ $m = 12$ $d = (3, 3, 4, 4, 5, 5)$	203  $n = 6$ $m = 12$ $d = (3, 4, 4, 4, 4, 5)$	204  $n = 6$ $m = 12$ $d = (4, 4, 4, 4, 4, 4)$	205  $n = 6$ $m = 13$ $d = (3, 4, 4, 5, 5, 5)$
206  $n = 6$ $m = 13$ $d = (4, 4, 4, 4, 5, 5)$	207  $n = 6$ $m = 14$ $d = (4, 4, 5, 5, 5, 5)$	208  $n = 6$ $m = 15$ $d = (5, 5, 5, 5, 5, 5)$			

3.1 İki Kümeli Graflar

İki kümeli graflar sistematik bir şekilde ilk olarak, König (1915,1916) tarafından çalışılmıştır. Ancak, König'den önce 19.yy ortalarında Kirchoff (1847), Cayley (1857), Sylvester (1873) ve Jordan (1869) gibi bilim adamları birbirinden bağımsız olarak, iki kümeli grafların önemli bir alt sınıfı olan ağaçlar üzerine çalışmalarda bulunmuşlardır. İki kümeli graflar, iki farklı tipteki nesnelerin arasındaki etkileşimin bir modeli olduğundan uygulamada daha çok eşleştirme problemleri için kullanılırlar. Eşleştirme problemleri genelde, iş ve işçi eşleştirmesi, evlilik, telefon santralleri ve şehirler, problem ve çözüm eşleştirmeleri gibi farklı unsurları birleştirmek için kullanılırlar.

İki kümeli graflar projektif geometride, bir konfigürasyonda noktalar ve doğrular arasındaki çakışımın modellenmesinde kullanılırlar. Levi grafları olarak isimlendirilen bu graflar, bu tezin konusu olan sonlu bitişik iki kümeli grafların örneklerinden biridir.

Tanım 3.1.1. G bir graf olsun. Eğer G nin düğümlerini k ($k \geq 1$) tane maksimum mertebeli bağımsız ve ayrık kümeye ayırmak mümkünse G ye k kümeli graf denir. $k = 2$ ise özel olarak G ye iki kümeli graf (bigraf, bipartite graf) adı verilir.



Şekil 3.1.1. İki Kümeli Graf

Bir grafın iki kümeli olup olmadığını test etmek için graftaki bütün düğümlerin yerlerinin değiştirilmesi, iki kümede toplanması ve sonunda da aralarında bir ayrık olup olmadığına bakılması ile mümkün değildir. Bir grafın iki kümeli olması için bazı koşulları sağlaması gerekir. Bu koşullardan bazıları aşağıdaki önerme ve teoremlerle tesbit edilmektedir.

Teorem 3.1.1. Bir G grafinin iki kümeli olması için gerek ve yeter koşul tek uzunluklu çevre içermemesidir (König 1915).

İspat: Kabul edelim ki, G grafi V_1 ve V_2 parçalı iki kümeli graf ve G grafinin bir çevrimi $C = v_0v_1v_2...v_kv_0$ olsun. Genelliği bozmaksızın, $v_0 \in V_1$ olsun. Bu durumda, G grafi iki kümeli olduğundan $v_1 \in V_2$ olmak zorundadır. Gerçekten, $i = 0, 1, ..., k$ için $v_{2i} \in V_1$ ve $v_{2i+1} \in V_2$ dir. Buna göre k tek olmak zorundadır ve C çift uzunluklu bir çevrimdir.

Tersine, G yalnızca çift uzunluklu çevre içersin ve G nin keyfi bir düğümü v olsun. $V(G)$ nin parçaları şu şekilde tanımlanabilir:

$$\begin{aligned} V_1 & : \{u \in V(G) : d_G(u, v) \text{ çifttir}\} \\ V_2 & : \{u \in V(G) : d_G(u, v) \text{ tektir}\} \end{aligned}$$

Göstermeliyiz ki, yukardaki biçimde tanımlanan V_1 ve V_2 kümeleri G grafinin parçalarıdır.

Kabul edelim ki, $x, y \in V_1$ ve $xy \in E(G)$ olsun. P , en kısa (x, v) – yolunu, Q , en kısa (y, v) – yolunu göstermek üzere, v_1 düğümü P ve Q yollarının ilk ortak düğümü olsun. P ve Q en kısa yollar olduklarından, (v_1, v) bölümleri de en kısa (v_1, v) yolu olmak zorundadır. Özellikle bu yollar aynı uzunluktadır. P_1 ve Q_1 , P ve Q yollarının sırası ile (x, v_1) ve (y, v_1) bölümleri olsunlar. Bu durumda P ve Q yollarının her ikisi de çift uzunlukta olduğundan, P_1 ve Q_1 yolları da aynı özelliktedir. Ancak, $C = P_1Q_1^{-1}x$ çevresi alınırsa, bu çevre tek uzunluklu bir çevredir. Bu ise, G grafinin yalnızca çift uzunluklu çevre içermesi ile çelişir. Öyleyse, V_1 kümesinin bitişik iki düğümü yoktur. Benzer şekilde, V_2 kümesinin iki düğümünün bitişik olamayacağı gösterilebilir. V_1 ve V_2 kümeleri G grafinin parçalarıdır ve böylece G iki kümeli bir graftır.

Sonuç 3.1.1. G bağlantılı bir graf olsun. G grafinin iki kümeli olması için gerek ve yeter koşul her $v \in V(G)$ için $d(v, x) = d(v, y)$ olacak şekilde xy ayrıtının bulunmamasıdır.

İspat: Kabul edelim ki; G grafi, V_1 ve V_2 parçalı iki kümeli graf ve v , G grafinin sabit bir düğümü olsun. $d(v, x) = d(v, y)$ ise x ve y aynı parçanın düğümleridir. Bu

durumda, $xy \notin E(G)$ dir.

Tersine, $v \in V$ için G grafinin V_1 parçası, $V_1 = \bigcup_{i \geq 1} N_{2i-1}(v)$ ve V_2 parçası, $V_2 = V(G) \setminus V_1$ biçiminde tanımlansın. Kabûlden dolayı, G grafinin ayrıtları farklı, V_i lerdeki düğümleri birleştiren ayrıtlardır. Bu nedenle, G iki kümeli graftır.

Önerme 3.1.1. G_1 ve G_2 iki basit graf olsun. $G_1 \times G_2$ kartezyen çarpımının iki kümeli olması için gerek ve yeter koşul G_1 ve G_2 graflarının iki kümeli olmasıdır (Asratian and Denley and Haggkvist 1998).

İspat : Kabul edelim ki, $G = G_1 \times G_2$ iki kümeli olsun. Teorem 3.1.1 den dolayı, G grafinin her çevrimi çift uzunluktadır. G nin tanımından; G , G_1 ve G_2 ye izomorf alt graflardan oluşur ve bu alt grafların her çevrimi çift uzunluktadır. Böylece, Teorem 3.1 den G_1 ve G_2 grafları iki kümeli graflardır.

Tersine, G_1 ve G_2 iki kümeli graflar, $V(G_1) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ve $V(G_2) = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ olsun. $l = 1, 2, \dots, k$ için $z_l = (x_{i_l}, y_{j_l})$ olmak üzere, $C = z_1 z_2 \dots z_k z_1$ $G_1 \times G_2$ de bir çevrim olsun. $W_1 = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} x_{i_1}$ ve $W_2 = y_{j_1} y_{j_2} \dots y_{j_k} y_{j_1}$ dizileri sırası ile G_1 ve G_2 de kapalı yollardır. Bununla birlikte; C nin uzunluğu, W_1 ve W_2 yollarının uzunluklarının toplamına eşittir. G_1 ve G_2 iki kümeli olduğundan, W_1 ve W_2 çift uzunluklu kapalı yollardır. Dolaysı ile, C çevrimi de çift uzunluktadır. Teorem 3.1 den $G_1 \times G_2$ iki kümeli bir graftır.

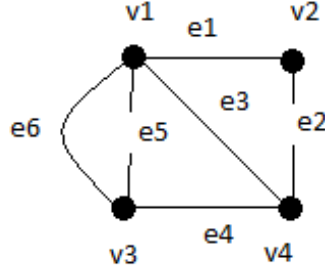
Tanım 3.1.2. G , düğüm kümesi $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ ve ayrıt kümesi

$E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_q\}$ olan bir graf olsun.

$$M(G) = [m_{ij}] = \begin{cases} 1, & v_i \in e_j \text{ ise} \\ 0, & v_i \notin e_j \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $p \times q$ tipindeki $M(G)$ matrsine G grafinin çakışım matrisi denir.

Örnek 3.1.1 Aşağıda bir G grafi ve onun çakışım matrisi verilmiştir.



$$M(G) = [m_{ij}] = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Şekil 3.1.2. G Grafi ve Çakışım Matrisi

Tanım 3.1.3. G bir graf, $M(G)$, G grafının çakışım matrisi olsun. $M(G)$ nin her karesel alt matrisinin determinantı 0, 1 veya -1 ise $M(G)$ matrisine tamamen birim modüler matris denir. Şekil 3.1.2. de verilen matris, 3×3 tipindeki bir alt matrisinin determinantı 2 olduğundan, tamamen birim modüler matris değildir. Bu nedenle bu graf iki kümeli olamaz.

Teorem 3.1.2. Bir G grafının iki kümeli olması için gerekli ve yeterli koşul tamamen birim modüler olmasıdır (Asratian et al. 1998).

Teorem 3.1.3. G bir graf, $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ ve G nin bitişiklik matrisi $A(G) = [a_{ij}]$ olsun. G grafının iki kümeli olması için gerek ve yeter koşul B^T , B nin transpozesi olmak üzere,

$$A^l(G) = [a_{\pi(i)\pi(j)}] = \begin{bmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix}$$

olacak şekilde $\{1, 2, \dots, n\}$ kümesinin bir π permütasyonunun bulunmasıdır (Asratian et al. 1998).

Tanım 3.1.4. $\mathfrak{B} = (m, n)$ ile (V_1, V_2) parçalı bütün iki kümeli grafların kümesi tanımlanmak üzere, $V_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, $V_2 = \{v_{m+1}, v_{m+2}, \dots, v_{m+n}\}$ olsun. Bu durumda, $G \in \mathfrak{B} = (m, n)$ grafinin bibitişiklik matrisi, b_{ij} sayısı v_i ile v_{j+m} ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) düğümleri arasındaki ayırıt sayısı olmak üzere $m \times n$ tipindeki $B(G) = [b_{ij}]$ matrisidir. Ayrıca $A(G)$ ve $B(G)$ matrisleri arasında aşağıdaki bağıntı vardır:

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & B(G) \\ B^T(G) & 0 \end{bmatrix}$$

Ayrıca G bir basit grafsa, bibitişiklik matrisinin bütün girdileri 1 veya 0 dan oluşur.

G iki kümeli graf olsun. G grafinin bibitişiklik matrisi $B(G) = [b_{ij}]$, ($1 \leq i \leq v, 1 \leq j \leq b$) olmak üzere,

$$b_{ij} = b(p_i, l_j) = \begin{cases} 0, & p_i \notin N(l_j) \text{ ise} \\ 1, & p_i \in N(l_j) \text{ ise} \end{cases}$$

dır. Bu matrisin her satırındaki birler satır satır toplanırsa $\sum_{i=1}^v d(p_i)$, her sütundaki

birler sütun sütun toplanırsa $\sum_{i=1}^b d(l_i)$ toplamı elde edilir. Bu iki toplam birbirine eşittir. Bu nedenle aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz:

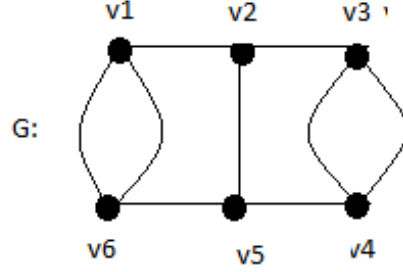
$$\sum_{i=1}^v b_{ij} = d(l_j), \quad \sum_{j=1}^b b_{ij} = d(p_i)$$

$$\sum_{j=1}^b d(l_j) = \sum_{j=1}^b \sum_{i=1}^v b_{ij} = \sum_{i=1}^v \sum_{j=1}^b b_{ij} = \sum_{i=1}^v d(p_i)$$

$$\sum_{j=1}^b d(l_j) = \sum_{i=1}^v d(p_i)$$

dir.

Örnek 3.1.2 Aşağıda bir G grafi ve onun $A(G)$ bitişiklik matrisi ile $A'(G)$ dönüştürme matrisi verilmiştir.



$$A(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$A'(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_3 & v_5 & v_2 & v_4 & v_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_3 \\ v_5 \\ v_2 \\ v_4 \\ v_6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Şekil 3.1.3 G grafına ait $A(G)$ ve $A'(G)$ matrisleri

Tanım 3.1.4. A , $m \times n$ tipinde bir matris olsun. $Ax = \lambda x$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir x vektörü varsa, λ sayısına A matrisinin özdeğeri, x vektörüne de özvektörü denir.

A matrisi reel simetrik matrisse özdeğerlerinin hepsi reeldir. Bu nedenle, herhangi bir G grafinın bitişiklik matrisi $A(G)$, sadece reel özdeğerlerine sahiptir. $A(G)$ nin özdeğerleri aynı zamanda G grafinın özdeğerleri olarak alınır ve bu özdeğerlerinin kümesine de G grafinın spektrumu denir (Asratian et al. 1998).

Teorem 3.1.4. G en az bir ayrıtlı iki kümeli graf olsun. G nin bir özdeğeri λ ise $-\lambda$ da G nin özdeğeridir (Asratian et al. 1998).

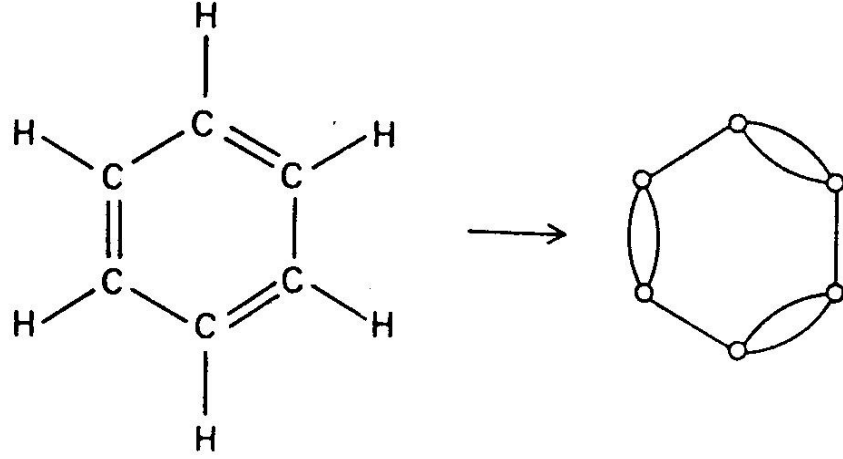
Teorem 3.1.5. Bağlantılı bir $k - regüler$ G grafinın iki kümeli olması için gerek ve yeter koşul $-k$ nin G nin özdeğeri olmasıdır (Asratian et al. 1998).

3.2 Grafların Bazı Uygulama Alanları

Graf teorisinin son yıllarda göstermiş olduğu gelişmelere paralel olarak, günlük hayatın pek çok alanındaki uygulamaları da hızla artmaya başlamıştır. Sosyal Bilimler, Fen Bilimleri, Güzel Sanatlar, Mühendislik Alanları, Ulaşım, Şehir Planlaması, Lojistik gibi alanların birçok karmaşık probleminin çözümü için, grafsal modellemeler yapılarak hem problem daha anlaşılır bir hale getirilmekte hem de çözüm kolaylaşmaktadır. Bu kısımda, bu uygulama alanlarının bazılarına yer verilmiştir.

Kimya

Bir kimyasal molekül, kimyasal bağlarla bağlanan atomlardan oluşur. Bir kimyasal moleküldeki atomlar bir grafin düğümleri, bu atomları birbirine bağlayan kimyasal bağlar da bir grafin ayrıtları olarak düşünülebilir. Böylece kimyasal moleküller graflarla temsil edilebilir. Bu şekilde oluşturulan bir grafta, grafin düğümlerinin dereceleri, kimyasal moleküldeki atomun değerliliğine karşılık gelmektedir. Şekil 3.2.1. de bir polisiklik hidro karbon, içerdiği çevrelerle birlikte grafsal olarak ifade edilmiştir (Wilson and Watkins 1990).



Şekil 3.2.1. Polisiklik Hidrokarbonun Grafsal Gösterimi

Bilgisayar Alanında

Bilgisayar bilimlerinde ve yapay zeka çalışmalarında, özellikle ağaç adı verilen, graf türlerinden yararlanılmaktadır. Hiç çevre içermeyen bağlantılı graflar, ağaçlar olarak adlandırılırlar. Bilgisayarın hafızasına veri girilirken veya sisteme giren bilgi akışı düzenlenirken bu tür yapılarla karşılaşılır. Ağacın farklı basamaklarından kopyalayarak bilgilere ve dosyalara erişmek kolay olduğundan, bir çok bilgisayar işletim sistemleri, ağaç yapılarında dizayn edilmiştir (Wilson and Watkins 1990).

Arkeoloji

Arkeologlar, kazıları kronolojik olarak düzenlemeye ve kazıların içinde bulunan ve o döneme ait insanlar tarafından yapılan sanat eserleri için bir zaman periyodu tayin etmeye çalışmışlardır. Bu yöntem, tarihlendirme dizisi olarak adlandırılır. Arkeologlar, kazıları tarihlendirirken ilk insanların yaptığı eserlerden farklı iki tanesi aynı kazıda bulunuyorsa, bunların zaman periyodlarının çakıştığını varsaymışlardır. Bu tarihlendirme problemlerinin çözüm yöntemlerinden birisi bilginin bir uyum grafi ile gösterilmesidir. Bu grafta, düğümler sanat eserlerine karşılık gelir. Ayrıtlar ise aynı mezarda görülen

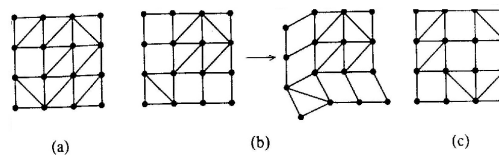
eserlere karşılık gelen düğümleri birleştirir. Orta Avrupa'daki bronz-yaş materyalinin kronolojik sıralamasında ve Romanya'daki Histra Yunan Kitabelerinde bu yöntem uygulanmıştır (Wilson and Watkins 1990).

Gelişim Psikolojisi

Büyümekte olan çocukların çeşitli özellikleri veya karakterleri belli bir zaman periyodunda ortaya çıkar ve sonra kaybolur. Buradaki problem, çeşitli karakteristik özelliklerin kronolojik sırada görüldüğü bir zaman ölçeği inşa etmektir. Bu problem, belli sayıdaki çocuklar üzerinde çalışılarak ve iki değişik özelliğin ne zaman aynı çocukta görüldüğü araştırılarak çözülebilir. Arkeoloji çalışmalarında kullanılan yöntemle benzer şekilde, düğümleri karakteristik özelliklere karşılık getirdiğimizde ve ayrıtları da aynı çocukta görülen özellikleri birleştirecek şekilde tanımladığımızda çözüme bir model getirmiş oluruz (Wilson and Watkins 1990).

İnşaat Mühendisliğinde

İnşaat mühendisliğindeki problemleri çözmek için iki kümeli grafların özellikleri kullanılabilir. Çoğu bina, çelik karkaslar tarafından desteklenmektedir. Bu karkasların en basit tipi 4 kiriş ve 4 bağlantı yerinden meydana gelen dikdörtgen karkaslardır. Eşkenar dörtgen veya paralelkenara yeterli derecede ağır yükler konulması durumunda, yapının dengesi bozulacaktır. Bu dengenin bozulmaması için ekstra köşegensel kiriş eklenmelidir. Dikdörtgen hücreler içeren büyük yapılarda eğilmezliği garantilemek için her hücreyi desteklemek gerekmez. Açılmayı engellemek adına gerekli olan desteklerin en küçük sayısını belirlemek için bir metot verilebilir. Yapıyı desteklemek için en küçük sayıdan daha fazla destek konuluyorsa, emniyet faktörleri gelişir ancak maliyet yükselir (Wilson and Watkins 1990).

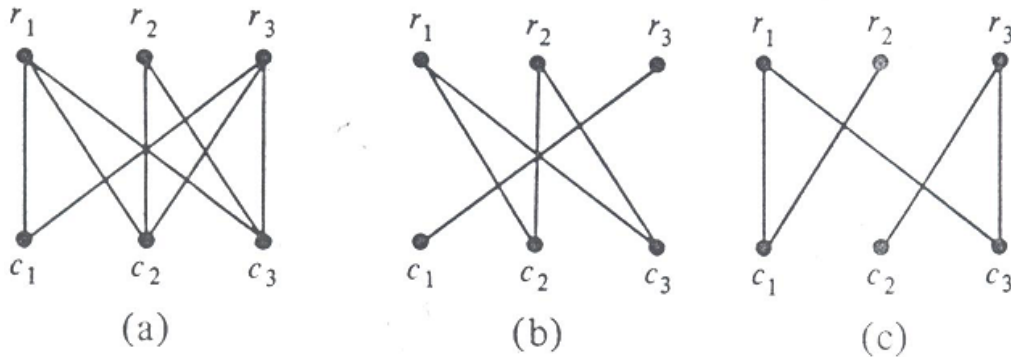


Şekil 3.2.2. Karkas Örnekleri

Şekil 3.2.2 deki karkaslar için;

- (a) Eğilmezdir ama çok fazla desteklidir.
- (b) Eğilmez değildir, deforme olabilir.
- (c) Bu şekildeki bir yapının eğilmez olup olmadığına karar vermek için ya da hangi desteklerin kaldırılabilceğini görmek için basit bir metot verilebilir. Bu metot şu şekildedir:

Düğüm kümelerinden biri karkasın satırları, diğeri de karkasın sütunları olarak tanımlanan ve dikdörtgen hücrelerde giriş varsa, o hücreye karşılık gelen satır düğümlerle sütun düğümü bir ayrıtı belirtecek şekilde iki kümeli bir graf oluşturulabilir. (a), (b) ve (c) deki karkaslara karşılık gelen iki kümeli graflar aşağıda verilmiştir. Bu gösterimde, karkasların satırlar r_1 , r_2 ve r_3 ; sütunlar c_1 , c_2 ve c_3 ile temsil edilmiştir.



Şekil 3.2.3. Şekil 3.2.2 deki Karkasların Graf Gösterimleri

Eğilmez karkaslar, bağlantılı iki kümeli graflarla, eğilmez olmayan karkaslar, bağlantılı olmayan iki kümeli graflarla ifade edilebilir. Yukardaki graflara bakıldığında, (a) ve (c) deki graflar bağlantılı olduğundan eğilmez bir karkası; (b) deki graf ise bağlantılı olmayan bir graf olduğundan eğilmez olmayan bir grafi temsil eder.

Bir desteklenmiş karkasın, en az destekle dengede tutulabilmesi için hangi desteklerin kaldırılabilceğini belirlemek için iki kümeli graflardan yararlanılır. (c) deki karkasa ait grafa hiç çevrim yoktur ve herhangi bir ayrıtı kaldırılması grafi bağlantısız yapar. Bu nedenle, (c) minimum destekli bir karkastır ve herhangi destek kaldırılmamalıdır. (a) daki karkasa ait pek çok çevre bulunmaktadır. Bu nedenle, karkasın eğilmezliğini etkilemeyecek şekilde kaldırılacak pek çok destek vardır. Örneğin, $r_1c_1r_3c_3r_1$ bir

çevrimdir ve r_1c_1 , r_1c_3 , r_3c_1 , r_3c_3 hücrelerinin herhangi birinden bir desteğin kaldırılması eğilmezliği etkilemez. Bu örnekte, r_1c_1 , r_1c_3 , r_3c_3 kaldırılabilir. Böylece, minimum destekli ve eğilmez bir karkas elde edilmiş olur

4 SONLU BİTİŞİK İKİ KÜMELİ GRAFLAR

Mulder (1979) makalesinde $\lambda \geq 2$ için $(0, \lambda)$ – graflarını incelemiş, $\lambda = 1$ durumuna değinmemiştir. Bir grafin düğümlerinin bir alt kümesi, farklı iki düğümünün en fazla bir ortak komşusu varsa kısmi bitişik küme, tam olarak bir ortak komşusu varsa bitişik küme olarak tanımlanmıştır. Bu tanımlar kullanılarak, iki kümeli $(0, 1)$ – grafinin parçalarından birinin veya ikisinin bitişik olma durumları irdelenmiş, bulunan sonuçlar bu bölümde aktarılmıştır. Bu bölüm boyunca, G grafi düğüm kümesi V ayrıt kümesi E olan basit bir graftır.

4.1 $(0, \lambda)$ – Grafları

Martyn Mulder, 1979 yılında Discrete Mathematics dergisinde yayınlanan "(0, λ)-Graphs and n-Cubes" isimli makalesinde $\lambda \geq 2$ olmak üzere $(0, \lambda)$ -graflarını tanımlayarak, bu grafların regüler olduğunu göstermiştir. Ardından, ilk olarak grafin çapının sırası ile 1,2,3 olmasına göre $(0, \lambda)$ – graflarını sınıflandırmıştır. Mulder'in makalesi $\lambda \geq 2$ koşulu üzerine kuruludur ve $\lambda = 1$ durumu incelenmemiştir. Bu kesimde, $\lambda \geq 2$, $\lambda \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(0, \lambda)$ – graflarının temel özelliklerini içeren ve Mulder'in makalesinde yer alan bazı önermelere yer verilmiştir. Bu önermeler, ileri ki bölümlerde $(0, 1)$ – graflarının çapa göre sınıflandırılmasında önemli bir kaynak olmuştur.

Bu bölümde G , düğüm kümesi V ayrıt kümesi E olan bağlantılı basit bir graftır. G grafinin herhangi iki düğümü arasındaki uzaklık çapa eşitse bu düğümler çapsal düğümler olarak adlandırılmıştır. G , regüler ise G nin düğümlerinin derecesi $d(G)$ ile gösterilmiştir. G nin herhangi iki düğümü u ve v olmak üzere, en kısa (u, v) – yolu üzerindeki düğümlerin kümesi $I_G(u, v)$ ile gösterilmiştir. Buna göre,

$$I_G(u, v) = \{w \in V \mid w, G \text{ deki en kısa } (u, v) - \text{yolu üzerindedir}\}$$

dir.

Tanım 4.1.1. G bağlantılı basit graf olsun. $\lambda \geq 2$ pozitif bir tamsayı olmak üzere, G deki her farklı düğüm çiftinin tam olarak λ ortak komşusu varsa veya hiç ortak komşusu yoksa G grafına $(0, \lambda)$ -grafi denir.

Önerme 4.1.1. G grafı, $(0, \lambda)$ -grafi olsun. G , regülerdir.

İspat: G grafı, $(0, \lambda)$ -grafi, $u, v \in V(G)$ olsun.

(i) Kabul edelim ki, $uv \in E(G)$ olsun. u düğümünün, v düğümü dışında, bütün komşuları mavi renkle; v düğümünün, u düğümü dışında, bütün komşuları kırmızı renkle belirlensin. u ve v düğümlerinin ortak komşuları hem kırmızı hem mavi olabilir. $w \in N(u) - \{v\}$ mavi düğümü için $|N(w) \cap N(v)| \geq 1$ ve G , $(0, \lambda)$ -grafi olduğundan $|N(w) \cap N(v)| = \lambda$ dır. Bu durumda, w düğümü tam olarak $\lambda - 1$ kırmızı düğümle ayırıt belirtir. Benzer şekilde, her kırmızı düğümde tam olarak $\lambda - 1$ mavi düğümle ayırıt oluşturur. Bu ne kadar kırmızı düğüm varsa, o kadar mavi düğüm vardır anlamına gelir. Bu nedenle, $d(u) = d(v)$ dir. G bağlantılı olduğundan regülerdir.

(ii) Kabul edelim ki, $uv \notin E(G)$ olsun. G grafı bağlı olduğundan $d(u, v) \geq 2$ dir.

Bu durumda, en az 2 uzunluklu bir (u, v) yolu vardır ve bu yol

$$P : u - w_1 - w_2 - \dots - w_k - v$$

olsun. (i) den dolayı,

$$d(u) = d(w_1) = d(w_2) = \dots = d(w_k) = d(v)$$

dır. O halde, $d(u) = d(v)$ dir ve G , regülerdir.

Önerme 4.1.2. G grafı, $(0, \lambda)$ -grafi olsun. Her $u, v \in V$ için $d(u, v) \geq 2$ olmak üzere,

$$|N(u) \cap I_G(u, v)| \geq d(u, v) + \lambda - 2 \dots \dots \dots (4.1.1)$$

dir.

İspat: $u, v \in V$, $d(u, v) \geq 2$ olsun. $d(u, v)$ üzerine tümevarım methodu uygulansın.

(i) $d(u, v) = 2$ ise $N(u) \cap I_G(u, v) = N(u) \cap N(v) \neq \emptyset$ dir. Böylece (4.1.1) eşitsizliği sağlamır.

(ii) $d(u, v) \geq 3$ olsun. Kabul edelim ki, her $d(x, y) \leq d(u, v)$ olan x, y çifti için (4.1.1) sağlansın. $w \in N(u) \cap I_G(u, v)$ düğümünü için $d(w, v) = d(u, v) - 1$ dir. Öyleyse,

$$|N(w) \cap I_G(w, v)| \geq d(w, v) + \lambda - 2 = d(u, v) + \lambda - 3$$

$N(w) \cap I_G(w, v)$ kümesinin düğümlerinin rengi kırmızı, $N(u) \cap I_G(u, v) \setminus \{w\}$ kümesinin düğümlerinin rengi mavi olsun. Bir kırmızı düğüm ile u düğümünün, ortak komşusu w düğümü olduğundan, bir kırmızı düğüm tam olarak $\lambda - 1$ mavi düğümle ayrıt belirtir. Bir mavi düğüm ile w düğümünün, ortak komşusu u düğümü olduğundan, bir mavi düğüm en fazla $\lambda - 1$ kırmızı düğümle ayrıt belirtir. Bu nedenle, mavi düğümlerin sayısı en fazla kırmızı düğümlerin sayısı kadardır. Böylece,

$$|N(u) \cap I_G(u, v)| \geq 1 + |N(w) \cap I_G(w, v)| \geq d(u, v) + \lambda - 2$$

elde edilir.

Önerme 4.1.3. G grafi, $(0, \lambda)$ -grafi olsun. $\text{çap}(G) \geq 4$ ise

$$d(G) \geq \text{çap}(G) + 2\lambda - 4 \dots \dots \dots (4.1.2)$$

dür.

İspat: u ve v , iki çapsal düğüm olsun. $d(u, w), d(w, v) \geq 2$ olacak şekilde $w \in I_G(u, v)$ alınsın. w düğümü, en kısa (u, v) - yolu üzerinde olduğundan,

$$I_G(w, v) \cap I_G(u, w) = \{w\}$$

dir. Önerme 4.1.2 den

$$|N(w) \cap I_G(u, w)| \geq d(u, w) + \lambda - 2$$

ve

$$|N(w) \cap I_G(w, v)| \geq d(w, v) + \lambda - 2$$

dir. G grafi regüler olduğundan, $d(G) = |N(w)|$ dir. Böylece,

$$\begin{aligned} d(G) &= |N(w)| \geq |N(w) \cap I_G(u, w)| + |N(w) \cap I_G(w, v)| \\ &\geq d(u, w) + \lambda - 2 + d(w, v) + \lambda - 2 = d(u, v) + 2\lambda - 4 \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Önerme 4.1.4. G , $(0, \lambda)$ -grafi ve $\text{çap}(G) = 1$ olsun. Bu durumda, G grafi, T_2 veya $T_{\lambda+2}$ dir.

İspat: Eğer $\text{çap}(G) = 1$ ise G tam graftır. G tam graf olduğundan $x \neq y, x, y \in V(G)$ için

$$|N(x) \cap N(y)| = |V(G)| - 2$$

dir. G grafi $(0, \lambda)$ -grafi olduğundan $|V(G)| - 2 = 0$ veya $|V(G)| - 2 = \lambda$ dir.

$|V(G)| - 2 = 0$ ise $|V(G)| = 2$ dir. O halde, $G = T_2$ grafidir.

$|V(G)| - 2 = \lambda$ ise $|V(G)| = \lambda + 2$ dir. O halde, $G = T_{\lambda+2}$ grafidir.

Önerme 4.1.5. G , $(0, \lambda)$ -grafi ve $\text{çap}(G) = 2$ olsun. G iki kümeli grafsa veya $d(G) = \lambda$ ise G grafi $T_{\lambda, \lambda}$ dir. (Mulder 1979)

Önerme 4.1.6. G , $(0, \lambda)$ -grafi ve $\text{çap}(G) = 2$ olsun. $\lambda \leq d(G) \leq 2\lambda - 1$ ise $u \neq v, u, v \in V$ için $|N(u) \cap N(v)| = \lambda$ dir.

İspat: $u \in V$ için $\overline{N}(u)$ kümesi $\overline{N}(u) = V \setminus (N(u) \cup \{u\})$ biçiminde tanımlansın ve $v \in \overline{N}(u)$ olsun. Bu durumda, $\text{çap}(G) = 2$ olduğundan $d(u, v) = 2$ ve $|N(u) \cap N(v)| = \lambda$ dir. W kümesi, u düğümü ile ortak komşusu olmayan düğümlerin kümesi olsun. $\text{çap}(G) = 2$ olduğundan ve W kümesinin tanımından her $w \in W$

için $d(u, w) = 1$ dir. Buradan, $W \subset N(u)$ dir.

Kabul edelim ki, $|W| > 0$ olsun. $d = d(G)$ ile gösterilmek üzere, $d \leq 2\lambda - 1$ olduğundan

$$|N(v) \setminus N(u)| = d - \lambda \leq \lambda - 1 < \lambda$$

dır. Bu nedenle, W kümesinde v düğümü ile ortak komşusu olan bir düğüm yoktur. Buradan,

$$|\overline{N}(u) \setminus N(u)| \geq d - 1 \text{ ve } W \subset N(v)$$

dir.

$x \in N(u) \setminus N(v)$ için $\text{cap}(G) = 2$ olduğundan $d(x, v) = 2$ dir. $2 \leq d(x, v) \leq \text{cap}(G) = 2$.

Böylece,

$$N(x) \cap N(v) \neq \emptyset \text{ ve } |N(x) \cap N(v)| = \lambda$$

dır. $|N(v) \setminus N(u)| = d - \lambda \leq \lambda - 1$ olduğundan $N(x) \cap N(u) \neq \emptyset$ dur. Buradan,

$$N(x) \cap N(u) \cap W = \emptyset \text{ ve } |W| \leq d - \lambda - 1$$

dir.

$N(u)$ ve $\overline{N}(u)$ arasındaki ayrılıkların sayısı iki farklı şekilde hesaplanabilir:

$$\begin{aligned} |W| (d - 1) + (d - |W|) (d - \lambda - 1) &= |\overline{N}(u) \setminus N(v)| \lambda + |N(v) \setminus N(u)| \lambda \\ |W| \lambda + d (d - \lambda - 1) &= |\overline{N}(u) \setminus N(v)| \lambda + (d - \lambda) \lambda \end{aligned}$$

Buradan,

$$\begin{aligned} |W| &= |\overline{N}(u) \setminus N(v)| + 1 - \frac{(d - \lambda) (d - \lambda - 1)}{\lambda} \\ &> d - \frac{\lambda (\lambda - 1)}{\lambda} \\ &= d - \lambda + 1 \geq |W| + 2 \end{aligned}$$

olur ki, bu ise çelişkidir. O halde $W = \emptyset$ ve tüm düğümler u ile en az bir ortak

komşuluğa sahiptir. Böylece $|N(u) \cap N(v)| = \lambda$ dır.

Önerme 4.1.7. G grafında, farklı iki düğümün tam olarak λ ortak komşusu olsun. Bu durumda,

$$(|V| - 1) \lambda = d(G) (d(G) - 1)$$

dir.

İspat: Farklı her düğüm çifti λ ortak komşuluğa sahip olsun. O zaman tüm düğüm çiftlerinin ortak komşularının toplam sayısı iki yolla hesaplanabilir. Bu durumda,

$$\binom{|V|}{2} \lambda = \binom{d(G)}{2} |V|$$

dir. Buradan,

$$(|V| - 1) \lambda = d(G) (d(G) - 1)$$

elde edilir.

Önerme 4.1.8. G , $(0, \lambda)$ -grafı ve $\text{çap}(G) = 3$ olsun. $d(G) \leq 2\lambda - 1$ ise G iki kümelidir.

İspat: Önerme 4.1.2 ye göre,

$$d(G) \geq \text{çap}(G) + \lambda - 2 = \lambda + 1$$

Ayrıca $\text{çap}(G) = 3$ olduğundan G deki en küçük tek uzunluklu çevrenin uzunluğu 3, 5 veya 7 olmak zorundadır.

$v \in V$ için

$$N_i(v) = \{u \in V \mid d(u, v) = i\}$$

biçiminde tanımlansın ve iki çapsal düğüm 0 ve 1 olsun.

İlk olarak kabul edelim ki, $y \in N(0) \setminus N_2(1)$ olsun. O zaman, $y \in N_3(1)$ dir ve böylece $N(y) \cap N(1) = \emptyset$ dir. Her $x \in N_2(1) \cap N(0)$ için $|N(x) \cap N(1)| = \lambda$. Buradan,

$$|N(x) \cap N(y)| \leq d(G) - |N(x) \cap N(1)| \leq 2\lambda - 1 - \lambda = \lambda - 1$$

Bu ise $|N(x) \cap N(y)| = \emptyset$ olduğunu gösterir ki, $0 \in N(x) \cap N(y)$ olduğundan çelişkidir.

$d(0, 1) = 3$ olmak üzere $0, 1 \in V$ için $N(0) \subset N_2(1)$, $N(1) \subset N_2(0)$ dir. (a)

(a) dan dolayı en küçük çevrenin uzunluğu 7 olamaz.

$x \in N(0)$ ise $x \in N_2(1)$ dir, böylece $|N(x) \cap N(1)| = \lambda$ dir ve buradan

$$|N(x) \cap N(0)| \leq d(G) - |N(x) \cap N(1)| \leq \lambda - 1$$

$x \in N(0)$ ise $N(x) \cap N(0) = \emptyset$ dir..... (b)

$d(0, 1) = 3$ olmak üzere $0, 1 \in V$ için $x \in N(1)$ ise $N(x) \cap N(1) = \emptyset$ dir. $x \in N(0) \setminus N(1)$ alınsın. Bu durumda, $|N(x) \cap N(0)| = \lambda$ ve böylece,

$$|N(x) \cap N(1)| \leq \lambda - 1$$

dir. Buradan, $x \notin N_2(1)$ dir. Böylece,

$d(0, 1) = 3$ olmak üzere, $0, 1 \in V$ için $N_2(0) \cap N_2(1) = \emptyset$ dur..... (c)

$x \in N(0)$ alınsın. $d(G) \geq \lambda + 1$ olduğundan $y \in N(1) \setminus N(x)$ düğümü vardır. (b) ye göre x ve y düğümlerinin ortak komşusu 0 ve 1'e 2 uzaklıktadır. Fakat bu (c) ile çelişir. Bu nedenle, $d(x, y) = 3$ tür. G grafi bağlantılı olduğundan,

$x \in V$ için $d(x, y) = 3$ olacak şekilde $y \in V$ vardır..... (d)

(b) ve (d) den G nin üçgen içermediği sonucunu çıkarabiliriz.

Kabul edelim ki, G grafi 5 uzunluklu çevre içersin ve bu çevre

$$0 - u_1 - u_2 - u_3 - u_4 - 0$$

olsun. Bu durumda, $u_1, u_4 \in N(0)$ ve $u_2, u_3 \in N_2(0)$ dir. (b) ve (c) den $u_2, u_3 \in N_3(1)$ dir. $u \in N(u_1) \cap N(1) \setminus N(u_4)$ düğümü vardır ve $d(u, u_4) = 3$ tür. Öyleyse, $d(u, u_2) = d(u, u_3) = 2$ olur ki, bu ise (c) ve (d) ile çelişir, 5 uzunluklu çevre yoktur. G iki kümeli bir graftır.

4.2 (0,1)-Grafları

Bu bölümde, $(0, \lambda)$ -graflarının $\lambda = 1$ durumunda elde edilen $(0, 1)$ -grafları incelenmiş, elde edilen tanım ve teoremlere yer verilmiştir. $(0, 1)$ -graflarının 4 uzunluklu çevre içermediği gösterildi. Bu nedenle, ilgili teoremlerin ispatları genel olarak grafin 4 uzunluklu çevre içerip içermemesine dayandırılmıştır. $(0, 1)$ -grafi olan iki grafin kartezyen çarpımının özellikleri, iki kümeli bir grafin $(0, 1)$ -grafi olma koşulu, $(0, 1)$ -grafından iki kümeli graf elde etme koşulları, $(0, 1)$ -grafının çakışım grafinin özellikleri bu bölümün bazı ana sonuçlarını oluşturmaktadır.

Tanım 4.2.1. $G = (V, E)$ basit graf ve $X \subset V$ olsun. $\forall x, y \in X$ için $|N(x) \cap N(y)| \leq 1$ ise X kümesine kısmi bitişik küme, $|N(x) \cap N(y)| = 1$ ise X kümesine bitişik küme denir. Bu durumda, $|N(x) \cap N(y)| = 1$ ise $N(x) \cap N(y)$ kümesi $x \wedge y$ ile gösterilir (Günaltılı 2011a).

Tanım 4.2.2. $G = (V, E)$ graf olsun. $\forall x, y \in V$ için $|N(x) \cap N(y)| \leq 1$ ise G grafına $(0, 1)$ -grafi denir (Günaltılı 2011a).

Teorem 4.2.1. $(0, 1)$ -grafının her alt grafi da $(0, 1)$ -grafıdır.

İspat: $G = (V, E)$ $(0, 1)$ -grafi ve $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_1 \subset G$ alt grafi verilsin. Eğer G_1 , G nin bir çevre ya da yol alt grafi ise, G_1 alt grafinin $(0, 1)$ -graf olduğu açıktır. Kabul edelim ki, G_1 , yol ve çevreden farklı bir $(0, 1)$ -grafi olmasın. Bu durumda, $|N(x) \cap N(y)| \geq 2$ olacak biçimde en az iki farklı $x, y \in V_1$ vardır. Kabul edelim ki, $z_1, z_2 \in N(x) \cap N(y)$, $z_1 \neq z_2$ olsun. O halde, $x, y \in N(z_1) \cap N(z_2)$ dir. Böylece $G_1 \subset G$ olduğundan $|N(z_1) \cap N(z_2)| \geq 2$ dir. Bu ise G nin $(0, 1)$ -grafi olması ile çelişir. G_1 alt grafi $(0, 1)$ -graftır.

Teorem 4.2.2. $G = (V, E)$ grafının $(0, 1)$ -grafi olması için gerek ve yeter koşul 4 uzunluklu çevre kapsamamasıdır.

İspat: G , $(0, 1)$ -grafi olsun. G , C_4 kapsayan bir grafsa, $\exists u_1, u_2, u_3, u_4 \in V$ için

$u_1 - u_2 - u_3 - u_4 - u_1$ olacak biçimde en az bir C_4 çevresi vardır. Bu durumda, $u_1 \wedge u_3 = u_2$ ve $u_1 \wedge u_3 = u_4$ ve $|N(u_1) \cap N(u_3)| = 2$ olur ki, G nin $(0, 1)$ -grafı olması ile çelişir. G grafi C_4 kapsamaz.

Tersine G grafi 4 uzunluklu çevre kapsamaz ve $(0, 1)$ -grafı olmasın. G , $(0, 1)$ -grafı değilse, $|N(u_1) \cap N(u_2)| \geq 2$ olacak biçimde en az iki farklı $u_1, u_2 \in V$ vardır. $v_1, v_2 \in N(u_1) \cap N(u_2)$, $v_1 \neq v_2$ olsun. Bu durumda, G grafında 4 uzunluklu

$$C_4 : u_1 - v_2 - u_2 - v_1 - u_1$$

çevresi oluşur ki, bu G nin C_4 kapsamaması ile çelişir. Öyleyse G grafi $(0, 1)$ -grafıdır.

Teorem 4.2.3. G , n düğümlü $(0, 1)$ -grafı ve $\text{çap}(G) = 1$ olsun. Bu durumda,

- (i) G grafi, T_2 veya T_3 grafıdır.
- (ii) G grafi iki kümeli grafsa, $G = T_{1,1}$ dir.

İspat:

(i) G , n düğümlü $(0, 1)$ -grafı olsun. $\text{çap}(G) = 1$ ise G tam graftır. Eğer $n \geq 4$ ise G grafi 4-uzunluklu çevre kapsar, bu $(0, 1)$ -grafı olması ile çelişir. Öyleyse, $n < 4$ tür. $\text{çap}(G) = 1$ olduğundan $n \geq 2$ olmalıdır. O halde, $n = 2$ veya $n = 3$ tür. Bu durumda, $G = T_2$ veya $G = T_3$ tür.

(ii) G , P ve L parçalı iki kümeli $(0, 1)$ -grafı olsun. $\text{çap}(G) = 1$ olduğundan her $x \in P$ ve $y \in L$ için $d(x, y) = 1$ dir. O halde, G tam graftır. Eğer $|P| \geq 2$ ve $|L| \geq 2$ ise G grafi 4 uzunluklu çevre kapsar, bu çelişkidir. Öyleyse, $|P| = 1$ ve $|L| = 1$ dir. G , $T_{1,1}$ grafıdır.

Teorem 4.2.4. $G_1 \times G_2$, $(0, 1)$ -grafı ise G_1 ve G_2 de $(0, 1)$ -grafıdır.

İspat: $G_1 \times G_2$, $(0, 1)$ -grafı olsun. G_1 , $(0, 1)$ -grafı değilse, G_2 için iki durum söz konusudur: G_2 ya $(0, 1)$ -grafıdır ya da değildir.

G_1 ve G_2 ikisi de $(0, 1)$ -grafı olmasın. G_1 , $(0, 1)$ -grafı olmadığından, $|N(u_1) \cap N(u_2)| \geq 2$ olacak biçimde en az iki farklı $u_1, u_2 \in V(G_1)$ vardır. Kabul edelim ki, $z_1, z_2 \in N(u_1) \cap N(u_2)$, $z_1 \neq z_2$ olsun. G_2 , $(0, 1)$ -grafı olmadığından,

$|N(v_1) \cap N(v_2)| \geq 2$ olacak biçimde en az iki farklı $v_1, v_2 \in V(G_2)$ vardır ve $t_1, t_2 \in N(v_1) \cap N(v_2)$, $t_1 \neq t_2$ olsun. $G_1 \times G_2$ kartezyen çarpımının birinci bileşenleri u_1 olan düğümleri gözönüne alınırsa, kartezyen çarpımın tanımından dolayı

$$(u_1, v_1) \text{ ve } (u_1, t_2); (u_1, v_2) \text{ ve } (u_1, t_2); (u_1, v_1) \text{ ve } (u_1, t_1); (u_1, v_2) \text{ ve } (u_1, t_1)$$

düğümleri $G_1 \times G_2$ de bitişiktir. Bu durumda, $G_1 \times G_2$ de

$$(u_1, v_1) - (u_1, t_2) - (u_1, v_2) - (u_1, t_1) - (u_1, v_1)$$

C_4 çevresi oluşur ki, bu $G_1 \times G_2$ nin $(0, 1)$ –grafı olması ile çelişir.

G_2 , $(0, 1)$ –grafı , G_1 , $(0, 1)$ –grafı olmasın. G_1 $(0, 1)$ –grafı olmadığından, $|N(u_1) \cap N(u_2)| \geq 2$ olacak şekilde en az iki farklı $u_1, u_2 \in V(G_1)$ vardır. Buradan, $z_1, z_2 \in N(u_1) \cap N(u_2)$, $z_1 \neq z_2$ dir. G_2 $(0, 1)$ –grafı olduğundan, $v_1, v_2 \in V(G_2)$ için $|N(v_1) \cap N(v_2)| \leq 1$ dir. $G_1 \times G_2$ kartezyen çarpımının ikinci bileşenleri v_1 olan düğümleri alınırsa,

$$(u_1, v_1) \text{ ve } (z_1, v_1); (u_1, v_1) \text{ ve } (z_2, v_1); (u_2, v_1) \text{ ve } (z_1, v_1); (u_2, v_1) \text{ ve } (z_2, v_1)$$

düğümleri $G_1 \times G_2$ de bitişiktir. Bu durumda, $G_1 \times G_2$ de

$$(u_1, v_1) - (z_2, v_1) - (u_2, v_1) - (z_1, v_1) - (u_1, v_1)$$

C_4 çevresi oluşur ki, bu $G_1 \times G_2$ nin $(0, 1)$ –grafı olması ile çelişir.

$G_1 = T_2$ ve $G_2 = T_2$ $(0, 1)$ –graflarıdır ancak $G_1 \times G_2 = T_2 \times T_2 \cong T_4$ grafi $(0, 1)$ –grafı değildir. Bundan dolayı, Teorem 4.2.4 ün tersi her zaman doğru değildir ancak $V(G_1)$ ya da $V(G_2)$ den birisi boş ise kartezyen çarpım $(0, 1)$ –grafıdır.

Tanım 4.2.3. $G = (V, E)$ bir $(0, 1)$ –grafı ve $X \subset V(G)$ olsun. $x, y \in X$ için x ve y nin ortak komşusu z düğümü olmak üzere, $N(z) \subset X$ ise X kümesine G grafının konveks alt kümesi denir. X in elemanları ve uçları bu kümede kalan G nin ayrıtlarının kümesi $E(X)$ ise $(X, E(X))$, G nin alt grafıdır ve bu alt grafa G nin konveks alt grafı denir (Günaltılı 2011a).

Teorem 4.2.5. $G = (V, E)$ bir $(0, 1)$ –grafı olsun. G nin herhangi sayıdaki konveks alt graflarının kesişimi bir konveks alt graftır.

İspat: $G_1, G_2, \dots, G_m$, G nin konveks alt grafları olmak üzere

$$X = \bigcap_{i=1}^m G_i$$

olsun. Bu durumda,

$$V(X) = \bigcap_{i=1}^m V(G_i)$$

ve

$$E(X) = \bigcap_{i=1}^m E(G_i)$$

dir. $x, y \in V(X)$, $x \neq y$ olmak üzere $1 \leq m \leq i$ için $x, y \in V(G_i)$ dir. $N(x) \cap N(y) = \{z\}$ ise G_i grafları konveks altgraflar olduğundan $1 \leq m \leq i$ için $N(z) \subset V(G_i)$ dir. Bu durumda,

$$N(z) \subset \bigcap_{i=1}^m V(G_i) = V(X)$$

elde edilir. Öyleyse X konveks altgraftır.

Tanım 4.2.4. $G = (V, E)$, $(0, 1)$ –grafı ve $X \subset V(G)$ olsun. G grafının, X i içeren en küçük konveks alt grafına X in kapanışı denir ve $[X]$ ile gösterilir.

Bir G grafında, $[\emptyset] = \emptyset$, $[\{p\}] = \{p\}$, $[V(G)] = V(G)$ dir. Ayrıca, $X \subset V(G)$ için $X \subseteq [X]$, $[[X]] = [X]$, ve $X \subseteq Y$ ise $[X] \subseteq [Y]$ dir (Günaltılı 2011a).

Teorem 4.2.6. $G = (V, E)$, $(0, 1)$ –grafı ve $X \subset V(G)$ olsun. X in kapanışı, X i içeren bütün konveks alt grafların kesişimidir (Günaltılı 2011a).

İspat: Teorem 4.2.4 den bu kesişim bir konveks alt graftır. Her konveks alt graf X i içerdüğinden kesişim, X i içeren en küçük konveks alt graftır. Öyleyse X in kapanışı, X i içeren bütün konveks alt grafların kesişimidir (Günaltılı 2011a).

Teorem 4.2.7. G , P ve L parçalı iki kümeli graf olmak üzere, P parçası kısmi bitişik küme ise G iki kümeli $(0, 1)$ –grafıdır.

İspat: P parçası kısmi bitişik küme olsun. Kabul edelim ki, L parçası kısmi bitişik olmasın. Bu durumda, $N(x) \cap N(y) = \{u, v\}$ olacak biçimde en az iki tane $x, y \in L$ vardır. Öyleyse $u, v \in P$ ve $|N(u) \cap N(v)| = 2$ dir. Bu P nin kısmi bitişik olması ile çelişir. O halde L parçası da kısmi bitişiktir.

Teorem 4.2.8. $G = (V, E)$, en az sekiz girtli $(0, 1)$ –grafı ve $v \in V$ olsun. $P = N_0(v) \cup N_2(v)$ ve $L = N_1(v) \cup N_3(v)$ ise $G[P \cup L]$ grafı G nin bir iki kümeli $(0, 1)$ – alt grafıdır.

İspat: G , $(0, 1)$ –grafsa Teorem 4.2.1 den dolayı $G[P \cup L]$ grafı da $(0, 1)$ –grafıdır. P ve L nin tanımından dolayı $P \cap L = \emptyset$ tur. Dolayısı ile, $G[P \cup L]$ alt grafının, P ve L parçalı iki kümeli graf olduğunun gösterilmesi yeterlidir.

(i) P bağımlı olsun. O zaman, $x \neq y$ için $xy \in E$ olacak şekilde en az iki $x, y \in P$ vardır. Eğer $x = v$ ise $y \in N_2(v)$ dir. Böylece $x \wedge y = v \wedge y = u$ olacak şekilde $u \in L$ vardır. Bu durumda, 3 uzunluklu $x - u - y - x$ çevresi oluşur ki, bu $girt(G) \geq 8$ olması ile çelişir. Aynı durum $y = v$ olmasında da geçerli olacağından $x \neq v \neq y$ dir. Öyleyse $x, y \in N_2(v)$ dir. $P_1 : x - u - v$ ve $P_2 : v - t - y$ yolları düşünüldüğünde

$$P_1 \cup P_2 : x - u - v - t - y - x$$

5 uzunluklu bir çevredir. Bu ise, $girt(G) \geq 8$ olması ile çelişir. P kümesi bağımsızdır.

(ii) Kabul edelim ki, L bağımlı olsun. O zaman, $xy \in E$ olacak şekilde L de farklı en az iki x, y düğümü vardır. x, y düğümleri için üç durum söz konusudur:

I. Durum: $x, y \in N_1(v)$ ise $x - y - v - x$ 3-uzunluklu çevresi oluşur ki, bu $girt(G) \geq 8$ olması ile çelişir.

II. Durum: $x, y \in N_3(v)$ ise $P_1 : v - x_1 - x_2 - x$ ve $P_2 : v - y_1 - y_2 - y$ minimum yollarını gözönüne alalım. $\forall i, j := 1, 2$ için $x_i \neq y_j$ ise

$$v - x_1 - x_2 - x - y - y_2 - y_1 - v$$

7 uzunluklu çevresi elde edilir. Bu $girt(G) \geq 8$ olması ile çelişir. Öyleyse, $x_i = y_j$ olacak şekilde en az bir i, j sayısı vardır. $x_1 = y_1$ olsa G grafi en az bir

$$x - x_2 - x_1 - y_2 - y - x$$

C_5 çevresi içerir ki, bu $girt(G) \geq 8$ olması ile çelişir. Diğer bütün durumlarda benzer çelişki elde edilir.

III. Durum: $x \in N_1(v)$ ve $y \in N_3(v)$ olsun. $P : v - y_1 - y_2 - y$ yolu gözönüne alındığında $x \in P$ ise $x - y - y_1 - x$ 3 uzunluklu çevresi elde edilir, çelişkidir. Bu durumda, $x \notin P$ dir. Yani $x \neq y_1$ ve $x \neq y_2$ ise

$$C_5 : v - x - y - y_2 - y_1 - v$$

çevresi elde edilir. Bu $girt(G) \geq 8$ olması ile çelişir. O halde, L bağımsız bir kümedir.

Teorem 4.2.9. Her $G = (V, E)$ grafinin çakışım grafi en az bir parçası 2-regüler olan iki kümeli $(0, 1)$ -grafıdır.

İspat: $G = (V, E)$ bir graf olsun. Çakışım grafi tanımından, G nin çakışım grafi parçalarından biri V , diğeri E olan iki kümeli graftır ve bu graf $I(G)$ ile gösterilsin. $I(G)$ nin $(0, 1)$ -grafı olduğunu göstermek için V ve E parçalarının kısmi bitişik kümeler olduğu gösterilmeli. V parçası kısmi bitişik değilse, $\exists x, y \in V$ için $N(x) \cap N(y) = \{z_1, z_2\}$ olacak biçimde en az iki tane $z_1, z_2 \in E$ düğümü vardır. $x, y \in V$ ve $z_1, z_2 \in E$ olduğundan G grafında x ve y düğümlerinden z_1 ve z_2 gibi iki ayrıt geçtiğinden z_1 ve z_2 katlı ayrıtlardır. Bu ise G grafinin basit graf olması ile çelişir. Öyleyse V kümesi, $I(G)$ de kısmi bitişik kümedir. Benzer şekilde, E parçası da kısmi bitişik küme olduğundan $I(G)$ grafi $(0, 1)$ -grafıdır.

G , basit graf olduğundan, G de iki farklı düğümden tek bir ayrıt geçer. Yani, $I(G)$ çakışım grafinin E parçasının her bir düğümü V parçasının yalnızca iki düğümü ile bitişiktir. Öyleyse, $I(G)$ çakışım grafinin E parçasının regüleritesi 2 dir.

Teorem 4.2.10. G , V_1 ve V_2 parçalı iki kümeli bir $(0, 1)$ -grafı olsun. Eğer V_2 nin regüleritesi 2 ise $G' = (V_1, V_2)$ grafının çakışım grafı G dir.

İspat: G , V_1 ve V_2 parçalı iki kümeli $(0, 1)$ -grafı ve V_2 nin regüleritesi 2 olsun. Bu durumda, $u \in V_2$ için $|N(u)| = 2$ dir. Öyleyse $N(u) = \{x, y\}$ olacak şekilde $x, y \in V_1$ vardır. G , $(0, 1)$ -grafı olduğundan, $v \in N(x) \cap N(y)$ olacak şekilde $u \neq v$, $v \in V_2$ yoktur. Buna göre, $G' = (V_1, V_2)$ grafında x ve y düğümlerinden bir tek u ayrıtı geçeceğinden $G' = (V_1, V_2)$ grafı basit graftır. Teorem 4.2.9 dan dolayı G grafı, $G' = (V_1, V_2)$ grafının çakışım grafıdır.

Tanım 4.2.5. $G = (V, E)$ bir graf, $X \subseteq V$ olsun. Eğer her $x \in X$ için $d(x) = n$, $n \in \mathbb{Z}^+$ sabit ise X kümesine n -regüler küme denir.

Önerme 4.2.1. G , P ve L parçalı iki kümeli $(0, 1)$ -grafı, $|P| = v$, $|L| = b$ ve $\delta(L) \geq 2$ olsun. P , n -regüler ve L , m -regüler ise

$$vn = bm$$

dir.

İspat: Tanım 3.1.4 ten

$$\sum_{j=1}^b d(l_j) = \sum_{i=1}^v d(p_i)$$

dir. $\forall p \in P$ için $d(p) = n$ ve $\forall l \in L$ için $d(l) = m$ olduğundan

$$\sum_{j=1}^b m = \sum_{i=1}^v n$$

dir. Buradan $vn = bm$ elde edilir.

Önerme 4.2.2. G , P ve L parçalı $(0, 1)$ -grafı, $\delta(L) \geq 2$ ise $L \cong \{N(l) : l \in L\} = L'$ dır.

İspat: $f : L \longrightarrow L'$, $f(x) = N(x)$ şeklinde tanımlı f dönüşümünün birebir ve örten olduğunu göstermek yeterlidir.

(i) $x, y \in L$ için $f(x) = f(y)$ ise $N(x) = N(y)$, $N(x) \geq 2$ dir. Kabul edelim ki, $x \neq y$

olsun. Böylece $u, v \in N(x) = N(y)$ $u \neq v$ vardır. $x, y \in N(u) \cap N(v)$ olduğundan $|N(u) \cap N(v)| \geq 2$ dir. Bu ise G nin $(0, 1)$ - grafi olması ile çelişir. O halde, $x = y$ dir. Böylece f birebirdir.

(ii) $\forall y \in L'$ için $f(x) = y$ olacak biçimde $x \in L$ vardır. Bunu gösterelim: $y \in L'$ olduğundan $y = N(x)$ olduğundan $x \in L$ vardır ve $f(x) = y$ dir. O halde f örtendir. (i) ve (ii) den $L \cong L'$ dır.

4.3 İki Kümeli Bitişik Graflar

Bu bölüm, iki kümeli $(0, 1)$ -grafının parçalarından birisinin bitişik küme olduğu durumda elde edilen sonuçları kapsamaktadır. G , P ve L parçalı iki kümeli bitişik grafsa, P parçası bitişik parça olarak alınacaktır.

Tanım 4.3.1. G , iki kümeli bağlı $(0, 1)$ -grafı olsun. G grafının parçalarından biri bitişik küme ise G grafına iki kümeli bitişik graf denir. Bitişik grafların izole düğüm kapsamadığı açıktır.

Önerme 4.3.1. G grafi P ve L parçalı iki kümeli bitişik graf olsun.

(i) $\forall l_1, l_2 \in L$ için $d(l_1, l_2) = 2$ veya $d(l_1, l_2) = 4$ tür.

(ii) $\forall p \in P$ ve $\forall l \in L$ için $d(p, l) = 1$ veya $d(p, l) = 3$ tür.

İspat: (i) $l_1, l_2 \in L$ olsun. $l_1 \neq l_2$ olduğundan $d(l_1, l_2) \neq 0$ dir. G iki kümeli olduğundan $d(l_1, l_2) \neq 1$ dir.

Kabul edelim ki, $\forall l_1, l_2 \in L$ için $N(l_1) \cap N(l_2) \neq \emptyset$ olsun. $N(l_1) \cap N(l_2) = p$ olacak biçimde $p \in P$ vardır. $l_1 - p - l_2$ yolu G de en kısa (l_1, l_2) - yoludur ve $d(l_1, l_2) = 2$ dir. $N(l_1) \cap N(l_2) = \emptyset$ ise $d(l_1, l_2) \neq 2$ dir. Kabul edelim ki, $d(l_1, l_2) = 3$ olsun. En az bir

$$P : l_1 - p_1 - p_2 - l_2$$

yolu vardır. Bu durumda, $l_1 \in L$, $p_1 \in P$, $p_2 \in L$ olmalıdır. O halde, $p_2, l_2 \in L$ ve $p_2 l_2 \in E(G)$ dir. Bu ise L nin bağımsız olması ile çelişir, $d(l_1, l_2) \neq 3$ tür. $d(l_1, l_2) \geq 4$

olmalıdır. $p_1 \in N(l_1)$ ve $p_2 \in N(l_2)$ olsun. P bitişik olduğundan $N(p_1) \cap N(p_2) = l_3$ olacak biçimde bir tek $l_3 \in L$ vardır. Bu durumda,

$$l_1 - p_1 - l_3 - p_2 - l_2$$

yolu, l_1 ve l_2 düğümleri arasındaki en kısa yoldur, $d(l_1, l_2) = 4$ tür.

(ii) $p \in P$ ve $l \in L$ için $p \in N(l)$ ise $d(p, l) = 1$ dir. Kabul edelim ki, $p \notin N(l)$ olsun. $d(p, l) \neq 1$ dir. $d(p, l) = 2$ olsa $l - p' - p$ olacak biçimde $p' \in P$ düğümü bulunur. Bu ise, $p'p \in E(G)$ olmasını gerektirir ki, P nin bağımsız olması ile çelişir. Öyleyse $d(p, l) \geq 3$ tür. $p' \in N(l)$ olsun. P bitişik olduğundan $N(p) \cap N(p') = l'$ olacak biçimde bir tek $l' \in L$ vardır. Bu durumda,

$$l - p' - l' - p$$

yolu p ve l düğümleri arasındaki en kısa yoldur, $d(p, l) = 3$ tür.

Teorem 4.3.1. G , $(0, 1)$ -grafı olsun. $v \in V$ için $P = N_0(v) \cup N_2(v)$ olsun. $\forall x, y \in P$ için $d(x, y) = 2$ olması için gerek ve yeter koşul P kümesinin bitişik küme olmasıdır.

İspat: $\forall x, y \in P$ için $d(x, y) = 2$ olsun. Bu durumda, $N(x) \cap N(y) \neq \emptyset$ dur ve $|N(x) \cap N(y)| \geq 1$ dir. Kabul edelim ki, $|N(x) \cap N(y)| \geq 2$ olsun. Öyleyse, $u_1, u_2 \in N(x) \cap N(y)$ olacak şekilde $u_1, u_2 \in V$ vardır. Buna göre, G grafi $x - u_1 - y - u_2 - x$ özelliğinde 4 uzunluklu çevre kapsar, bu ise çelişkidir. O halde, $|N(x) \cap N(y)| = 1$ dir ve P kümesi bitişiktir.

Tersine, P kümesi bitişik küme ise $\forall x, y \in P$ için $|N(x) \cap N(y)| = 1$ dir. Bu durumda, $u \in N(x) \cap N(y)$ olacak şekilde bir tek $u \in V$ vardır. Öyleyse, $\forall x, y \in P$ için $d(x, y) = 2$ dir.

Teorem 4.3.2. G , P ve L parçalı iki kümeli $(0, 1)$ -grafı, $|P| = v$, $|L| = b$ ve $\delta(L) \geq 2$ olsun. G nin iki kümeli bitişik graf olması için gerek ve yeter koşul

$$\sum_{j=1}^b d(l_j)(d(l_j) - 1) \geq v(v - 1)$$

olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki, P bitişik küme olsun. P nin düğüm çiftlerinin sayısı iki farklı yolla hesaplanabilir. Birincisi, $\{p_i, p_j\}$ ile $\{p_j, p_i\}$ aynı olmak üzere

$$\binom{v}{2} = \frac{v(v-1)}{2}$$

dir. P bitişik olduğundan, P deki düğüm çiftlerinin bir tek ortak komşuluğu vardır. L nin her düğümü ile komşu olan P nin düğüm çiftlerinin toplam sayısı, P deki düğüm çiftlerinin toplam sayısıdır. L nin bütün düğümleri üzerinden toplam alınırsa,

$$\sum_{j=1}^b d(l_j)(d(l_j) - 1)/2$$

elde edilir. Bu durumda,

$$\sum_{j=1}^b d(l_j)(d(l_j) - 1) = v(v-1)$$

dir.

Tersine,

$$\sum_{j=1}^b d(l_j)(d(l_j) - 1) \geq v(v-1) \dots \dots (4.3.1)$$

eşitsizliği sağlansın. v üzerinde tümevarımla, P nin bitişik küme olduğunu gösterelim.

$\delta(L) \geq 2$ olduğundan $v \geq 2$ dir.

(i) $v = 2$ ve $b \geq 2$ olsun. $l_1 \neq l_2$ olacak şekilde $l_1, l_2 \in L$ düğümleri vardır. $\delta(L) \geq 2$ olduğundan

$$N(l_1) \cap N(l_2) = \{p_1, p_2\}$$

dir. Bu ise, G grafının $(0, 1)$ –grafı olması ile çelişir. Dolayısıyla $b \leq 1$ dir. $b = 0$ ise (4.3.1) eşitsizliği sağlanmayacağından $b = 1$ olmalıdır. Buna göre, $N(p_1) \cap N(p_2) = \{l\}$ olacak şekilde bir tek $l \in L$ olduğundan P bitişiktir.

(ii) $v = 3$ olsun. $b \geq 4$ ise $\delta(L) \geq 2$ olduğundan G grafı en az bir C_4 çevresi kapsar ki, bu çelişkidir, bu nedenle $b \leq 3$ tür. $b = 2$ durumunda, $\delta(L) = 2$ ise (4.3.1) eşitsizliği sağlanmaz; $d(l) \geq 3$ olacak şekilde en az bir $l \in L$ varsa, G grafı C_4 çevresi kapsar ki,

G grafının $(0, 1)$ –grafı olması ile çelişir. Öyleyse, $b = 1$ veya $b = 3$ olmalıdır. $b = 1$ ise $d(l) = v = 3$ ve $b = 3$ ise $d(l_1) = d(l_2) = d(l_3) = 2$ durumları teoremin koşullarını ve (4.3.1) eşitsizliğini sağlayacağından, yalnızca bu durumlarda P bitişiktir.

Kabul edelim ki, v den daha az düğümlü ve teoremin koşulları ile (4.3.1) eşitsizliğini sağlayan $G' = (P' \cup L', E')$ grafları için P' kümesi bitişik olsun.

$$\begin{aligned} P' &= P - \{p\} \text{ ve } L' \\ &= \{l \in L \mid d(l) \geq 3\} \end{aligned}$$

olmak üzere $G' = (P' \cup L', E')$ grafi G nin alt grafi olduğundan, G' grafi da teoremin koşullarını sağlar. P' nün, (4.3.1) eşitsizliğini sağladığı göstererilsin.

G' de

$$\begin{aligned} \sum_{l'_j} d(l'_j)(d(l'_j) - 1) &= \sum_{l_j \notin N(p)} d(l_j)(d(l_j) - 1) + \sum_{l_j \in N(p), d(l_j) \geq 3} d(l'_j)(d(l'_j) - 1) \\ &= \sum_{l_j \notin N(p)} d(l_j)(d(l_j) - 1) + \sum_{l_j \in N(p), d(l_j) \geq 3} (d(l_j) - 1)(d(l_j) - 2) \\ &= \sum_{l_j \notin N(p)} d(l_j)(d(l_j) - 1) + \sum_{l_j \in N(p), d(l_j) \geq 3} d(l_j)(d(l_j) - 1) - \\ &\quad 2 \left(\sum_{l_j \in N(p), d(l_j) \geq 3} (d(l_j) - 1) \right) \end{aligned}$$

G de

$$\begin{aligned} \sum_{l_j} d(l_j)(d(l_j) - 1) &= \sum_{l_j \notin N(p)} d(l_j)(d(l_j) - 1) + \sum_{l_j \in N(p), d(l_j) \geq 3} d(l_j)(d(l_j) - 1) + \\ &\quad \sum_{l_j \in N(p), d(l_j) = 2} d(l_j)(d(l_j) - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{l_j \notin N(p)} d(l_j)(d(l_j) - 1) &= \sum_{l_j} d(l_j)(d(l_j) - 1) - \sum_{l_j \in N(p), d(l_j) \geq 3} d(l_j)(d(l_j) - 1) - \\ &\quad \sum_{l_j \in N(p), d(l_j) = 2} d(l_j)(d(l_j) - 1) \end{aligned}$$

elde edilir. $\sum_{l_j \notin N(p)} d(l_j)(d(l_j) - 1)$ toplamının karşılığı, yukarıdaki $\sum_{l'_j} d(l'_j)(d(l'_j) - 1)$ toplamında yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{l'_j} d(l'_j)(d(l'_j) - 1) &= \sum_{l_j} d(l_j)(d(l_j) - 1) - 2 \sum_{l_j \in N(p), d(l_j) \geq 3} (d(l_j) - 1) - \\ &\quad \sum_{l_j \in N(p), d(l_j) = 2} d(l_j)(d(l_j) - 1) \\ &= \sum_{l_j} d(l_j)(d(l_j) - 1) - 2 \left(\sum_{l_j \in N(p)} (d(l_j) - 1) \right) \end{aligned}$$

bulunur. Hipotezden,

$$\sum_{l_j} d(l_j)(d(l_j) - 1) \geq v(v - 1)$$

dir. Ayrıca p ile komşu olan düğümlerin toplam derecelerinin hesaplanması ile

$$\sum_{l_j \in N(p)} (d(l_j) - 1) \leq v - 1$$

ve

$$-2 \left(\sum_{l_j \in N(p)} (d(l_j) - 1) \right) \geq -2(v - 1).$$

bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned} \sum_{l'_j} d(l'_j)(d(l'_j) - 1) &\geq v(v - 1) - 2(v - 1) \\ &= (v - 1)(v - 2) \end{aligned}$$

elde edilir ve tümevarım hipotezinden dolayı $G' = (P' \cup L', E')$ grafında, $P' = P - \{p\}$ parçası bitişiktir. Bu durumda, p düğümü ile P' nün her düğümünün bir tek ortak komşusu olduğunu gösterelim:

$p \neq s$ ve $q \neq s$ olacak şekilde keyfi bir $s \in P'$ düğümü alınsın. $P'' = P - \{s\}$ kümesi, P nin $v - 1$ düğümlü kısıtlanmışdır ve $G'' = (P'' \cup L'', E'')$ alt grafında (4.3.1) eşitsizliği sağlanır ve bu nedenle P'' kümesi bitişiktir. $p, q \in P'' = P - \{s\}$ olduğundan $|N(p) \cap N(q)| = 1$ elde edilir. O halde, P bitişiktir.

Önerme 4.3.2. $|P| = v$, $|L| = b$ ve $\delta(L) \geq 2$ olmak üzere; G , P ve L parçalı iki kümeli bitişik graf ise sabit bir $p_i \in P$ düğümü için

$$\sum_{j=1}^b (d(l_j) - 1)b_{ij} = v - 1$$

dir.

İspat: P bitişik olduğundan her $p \in P$ için $|N(p) \cap N(p_i)| = 1$ dir. Bu nedenle p_i ile komşu olan L nin düğümlerinin derecelerinin hesaplanması ile $P - \{p_i\}$ kümesinin düğüm sayısı elde edilebilir.

$l_j \in L$, $p_i \in N(l_j)$ için $N(l_j)$ nin eleman sayısı (p_i dışında) $d(l_j) - 1$ dir. Böylece

$$v - 1 = \sum_{p_i \in N(l_j)} (d(l_j) - 1)dir.$$

$p_i \in N(l_j)$ olması için gerek ve yeter koşul $b_{ij} = 1$ olmasıdır. Buradan,

$$\sum_{j=1}^b (d(l_j) - 1)b_{ij} = v - 1$$

Önerme 4.3.3. $\sum_{j=1}^b (d(l_j) - 1)d(l_j) = v(v - 1)$

İspat: Önerme 4.3.2 den

$$v - 1 = \sum_{j=1}^b (d(l_j) - 1)b_{ij}$$

dir.

$$\sum_{i=1}^v v - 1 = \sum_{i=1}^v \sum_{j=1}^b (d(l_j) - 1)b_{ij}$$

$$v(v - 1) = \sum_{j=1}^b (d(l_j) - 1) \sum_{i=1}^v b_{ij}$$

$$v(v - 1) = \sum_{j=1}^b ((d(l_j) - 1)d(l_j))$$

Önerme 4.3.4. $|P| = v$, $|L| = b$ ve $\delta(L) \geq 2$ olmak üzere; G , P ve L parçalı iki kümeli bitişik graf olsun. L regüler ise P regülerdir.

İspat: Sabit bir $p_i \in P$ düğümü için önerme 4.3.2. den

$$v - 1 = \sum_{j=1}^b (d(l_j) - 1)b_{ij}$$

dir. L nin regüleritesi $k + 1$ olsun. Bu durumda,

$$p_i \in N(l_j), d(l_j) - 1 = k$$

dır. Buradan

$$v - 1 = \sum_{j=1}^b (d(l_j) - 1)b_{ij} = kd(p_i)$$

$$v - 1 = kd(p_i)$$

$$d(p_i) = \frac{v - 1}{k}$$

olup, i den bağımsız olduğundan P nin bütün düğümlerin dereceleri $\frac{v-1}{k}$ dir ve P regülerdir.

Önerme 4.3.5. G , P ve L parçalı iki kümeli graf $(0, 1)$ –grafı olsun. Eğer P parçası bitişik ve her $p \in P$, $l \in L$ için $pl \notin E$ ise $d(p) \geq d(l)$ dir.

İspat: P parçası bitişik ve her $p \in P$, $l \in L$ için $pl \notin E$ olsun. $|N(l)| = d(l)$ olduğundan $N(l) = \{p_1, p_2, \dots, p_{d(l)}\}$ olarak seçilebilir. $1 \leq i \leq d(l)$ için P bitişik olduğundan $N(p) \cap N(p_i) = \{y_i\}$ dir. $\forall 1 \leq i \leq d(l)$ için $y_i \in N(p)$ olduğundan $|N(p)| \geq d(l)$ dir. O halde $d(p) \geq d(l)$ dir.

4.4 İki Kümeli Güçlü Bitişik Graflar

İki kümeli $(0, 1)$ –grafları ilk olarak Günaltılı (2011a, 2011b) tarafından incelenmiş, bazı önemli sonuçlar elde edilmiştir. Bu bölümde, bu önemli bazı sonuçlarla birlikte iki kümeli bitişik ya da güçlü bitişik $(0, 1)$ –graflarının temel özellikleri ve önemli bazı sınıflandırmaları elde edilmiştir.

Tanım 4.4.1. G , iki kümeli $(0, 1)$ –grafı olsun. G grafının parçalarının her ikisi de bitişik küme ise G grafına iki kümeli güçlü bitişik graf denir. İki kümeli güçlü bitişik grafların bağlı olduğu açıktır.

Önerme 4.4.1. G n düğümlü iki kümeli güçlü bitişik graf ise $1 \leq \text{çap}(G) \leq 3$ tür.

İspat: G bağlı graf olduğundan izole düğüm kapsamaz. O halde, $\text{çap}(G) \neq 0$ dir.

Önerme 4.3.1 den dolayı $1 \leq \text{çap}(G) \leq 4$ dir. $\text{çap}(G) = 4$ ise $d(x, y) = 4$ olacak biçimde en az iki düğüm vardır. Önerme 4.3.1 den dolayı $x, y \in P$ veya $x, y \in L$ dir. Böylece P ve L kümeleri bitişik olduğundan $d(x, y) = 2$ dir. Bu bir çelişkidir. O halde, $\text{çap}(G) \neq 4$ ve $1 \leq \text{çap}(G) \leq 3$ dir.

Önerme 4.4.2. G , n düğümlü iki kümeli $(0, 1)$ graf olsun. $\text{çap}(G) = 1$ ise $G = T_{1,1}$ ve G güçlü bitişik graftır.

İspat: Önerme 4.2.3 ten dolayı açıktır.

Önerme 4.4.3. G , n düğümlü, P ve L parçalı iki kümeli bağlı bitişik $(0, 1)$ -grafı ve $\text{çap}(G) = 2$ ise $d(x) = n - 1$ olacak şekilde bir tek $x \in V$ vardır ve $G = T_{1,n-1}$ güçlü bitişik grafidir.

İspat: G , n düğümlü, P ve L parçalı iki kümeli bağlı $(0, 1)$ -grafı ve $\text{çap}(G) = 2$ olsun. Bu durumda $n \geq 3$ tür. Önerme 4.3.1 (ii) den dolayı her $x \in P$ ve $y \in L$ için $d(x, y) = 1$ dir. Her $x, y \in P$ için $d(x, y) = 2$ ve her $x, y \in L$ için $d(x, y) = 2$ dir. O halde, G iki kümeli güçlü bitişik bir tam graftır. $G = T_{m,t}$, $m + t = n$ olacak şekilde $m, t \in \mathbb{Z}^+$ vardır. $m \geq 2$ ve $t \geq 2$ ise, G iki kümeli tam graf olduğundan 4 uzunluklu çevre kapsar, bu G nin $(0, 1)$ -graf olması ile çelişir. O halde, $m = 1$ veya $t = 1$ dir. $n \geq 3$ olduğundan $m \neq t \neq 1$ dir. Eğer $m = 1$ ise $t = n - 1$ ve $G = T_{1,n-1}$, $t = 1$ ise $m = n - 1$ dir ve $G = T_{n-1,1}$ grafidir. $T_{1,n-1} \cong T_{n-1,1}$ olduğundan $G = T_{1,n-1}$ grafidir.

Önerme 4.4.4. G , P ve L parçalı iki kümeli bağlı $(0, 1)$ -grafı ve $\text{çap}(G) = 3$ olsun. G güçlü bitişik bir graftır.

İspat: G , P ve L parçalı iki kümeli bağlı $(0, 1)$ -grafı ve $\text{çap}(G) = 3$ olsun. Kabul edelim ki, G güçlü bitişik graf olmasın. Bu durumda, parçalardan en az birisi bitişik küme değildir. Bu küme P olsun. O halde, P kümesinde $N(x) \cap N(y) = \emptyset$ olacak şekilde en az iki x, y düğüm çifti vardır. G bağlı graf olduğundan, $d(x, y) = 0$ olamaz. P bağımsız olduğundan, $d(x, y) = 1$ olamaz. $N(x) \cap N(y) = \emptyset$ olduğundan da $d(x, y) = 2$ olamaz. Öyleyse, $\text{çap}(G) = 3$ olduğundan $d(x, y) = 3$ olmak zorundadır. Buna göre, x ve y düğümleri arasında

$$P : x - x_1 - x_2 - y$$

olacak şekilde 3 uzunluklu bir P yolu vardır ve bu yolda $x \in P$, $x_1 \in L$, $x_2 \in P$ ve $y \in P$ dir. Buradan $x_2 y \in E$ elde edilir ki, bu P nin bağımsız olması ile çelişir. P bitişik

kümedir.

Benzer şekilde, L parçasının da bitişik olmadığı durumda aynı çelişkiye ulaşılacağından G güçlü bitişik graftır.

Teorem 4.4.1. G iki kümeli $(0, 1)$ graf olsun. G nin güçlü bitişik graf olması için gerek ve yeter koşul $1 \leq \text{çap}(G) \leq 3$ olmasıdır ve G bağlıdır.

İspat: Önerme 4.4.2, Önerme 4.4.3 ve Önerme 4.4.4 ten açıktır.

Önerme 4.4.5. G , n düğümlü, P ve L parçalı güçlü bitişik graf, $\delta(G) = 1$ ve $\delta(L) \geq 2$ ise $|P| = 1$ veya $|P| = n - 1$ dir.

İspat: $\delta(G) = 1$ ise en az bir $x \in V$ vardır ki, $d(x) = 1$ dir. $\delta(L) \geq 2$ olduğundan $x \in P$ ve $n \geq 3$ tür. Her $y \in P - \{x\}$ için $|N(x) \cap N(y)| = 1$ olduğundan bir tek $l \in L$ vardır ki, $N(x) \cap N(y) = \{l\}$ dir. Bu durumda, $\delta(L) \geq 2$ olduğundan $d(y) = 1$ dir. Böylece, $d(P) = 1$ olur. $|P| = n - 1$ olduğunu göstermek için $|L| = 1$ olduğunu göstermek yeterlidir. $|L| \geq 2$ ise $l' \neq l$ olacak biçimde en az bir $l' \in L$ vardır. $N(l) \cap N(l') = \{p\}$ ise $p \in P$ dir. O zaman, $d(p) \geq 2$ olur ki, $d(P) = 1$ olması ile çelişir. Öyleyse, $|L| = 1$ olup $|P| = n - 1$ dir.

Önerme 4.4.6. G , P ve L parçalı iki kümeli bitişik graf ve $|P| = v$, $|L| = b$ olmak üzere; P ve L nin regüleritesi $k + 1$ ($k \geq 1$) ise G grafi iki kümeli güçlü bitişik graftır ve $b = v = k^2 + k + 1$ dir.

İspat: G bitişik graf olduğundan tanımdan P bitişiktir. Kabul edelim ki, L bitişik olmasın. Bu durumda, $N(l) \cap N(l') = \emptyset$ olacak biçimde $l, l' \in L$ vardır. $p \in P$ için $N(l) \cap N(l') = \emptyset$ olduğundan $p \in N(l)$ ise $p \notin N(l')$ dir. $d(l') = k + 1$ olduğundan p düğümü $N(l')$ deki $k + 1$ tane düğümlle farklı ortak komşuya sahiptir. Böylece p , l hariç $k + 1$ düğümlle bitişiktir. Bu durumda, $d(p) \geq k + 2$ olur ki, bu $d(p) = k + 1$ olması ile çelişir. $\forall l, l' \in L$ için $N(l) \cap N(l') \neq \emptyset$ olup, L bitişiktir. O halde, G grafi iki kümeli güçlü bitişik graftır.

Önerme 4.3.3 ten

$$\begin{aligned} d(p) &= \frac{v-1}{k} = k+1 \\ v-1 &= k^2 + k \\ v &= k^2 + k + 1 \end{aligned}$$

dir. P regüler olduğundan P nin her düğümünden geçen ayrit sayılarının toplamıdır $v(k+1)$ dir. Bu toplamda L nin her düğümü $k+1$ kez sayıldığından

$$b = \frac{v(k+1)}{k+1} = v = k^2 + k + 1$$

elde edilir.

Teorem 4.4.2. $G = (V, E)$ bir $(0, 1)$ –graf, $v \in V$ olmak üzere $P = N_0(v) \cup N_2(v)$, $L = N_1(v) \cup N_3(v)$, $|P| = |L| = n \geq 3$ olsun. Eğer P , $(n-1, 2, 2, \dots, 2)$ derece dizisine sahipse, L de $(n-1, 2, 2, \dots, 2)$ derece dizisine sahiptir.

İspat: P parçası $(n-1, 2, 2, \dots, 2)$ derece dizisine sahip olsun. Kabul edelim ki, $d(v) = n-1$ olsun. v düğümü L nin $n-1$ düğümü ile bitişiktir. P nin v düğümünden farklı her bir düğümü v ye bitişik L nin $n-1$ düğümünden sadece biri ile bitişiktir. Ayrıca, v nin dışındaki düğümlerin dereceleri iki olduğundan bu düğümler, L nin v ye bitişik $n-1$ tane düğümü dışındaki v ye bitişik olmayan düğümlerine bitişik olmak zorundadır. L nin dışındaki başka bir düğüme bitişik olsalar, L nin n düğümlü olması ile çelişir. Buna göre, L nin v ye bitişik olmayan n . düğümü $n-1$, diğer düğümleri iki derecelidir. Buradan L nin de $(n-1, 2, 2, \dots, 2)$ derece dizisine sahiptir.

Teorem 4.4.3. $G = (V, E)$ $(0, 1)$ –grafı olsun. $|V(G)| \geq 6$ grafında $v \in V$ için $P = N_0(v) \cup N_2(v)$ ve $L = N_1(v) \cup N_3(v)$ ve $|P| = |L| = n$ olsun. Eğer P ve L kümeleri, aynı $(n-1, 2, 2, \dots, 2)$ derece dizisine sahiplerse $G[P \cup L]$ iki kümeli bitişik graftır.

İspat: P ve L kümeleri, aynı $(n-1, 2, 2, \dots, 2)$ derece dizisine sahip ve

$P = \{v, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$, $L = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ olsun. P nin tanımından ve $|P| = n$ olduğundan $i = 1, 2, \dots, n - 1$ için $d(v, x_i) = 2$ ve $d_P(v) = n - 1$ dir. P nin v den farklı düğümleri arasındaki uzaklığın da iki olduğu gösterilirse ispat biter. $d_P(v) = n - 1$ olduğundan, $i = 1, 2, \dots, n - 1$ için $d_P(x_i) = 2$ olmak zorundadır. $d(v, x_i) = 2$ olduğundan $y_i \in N(v) \cap N(x_i)$ olacak şekilde $y_i \in N_1(v)$ vardır y_i düğümü tektir. Bu durumda, $d_P(x_i) = 2$ olduğundan $y_n \in N(x_i)$, ($i = 1, 2, \dots, n - 1$) olmak zorundadır. Öyleyse, P nin v den farklı düğümleri arasındaki uzaklıkta ikidir, buradan P bitişiktir. L kümesi P kümesi ile aynı özelliklere sahip olduğundan bitişiktir. P ve L bitişik olduğundan $G[P \cup L]$ bitişik iki kümeli graftır.

Teorem 4.4.4. G basit graf ve $S = (P, L)$ n -noktalı yaklaşık demet olsun. G grafının S nin çakışım grafi olması için gerek ve yeter koşul G grafının eş P ve L parçalı, girdi 6 olan iki kümeli bitişik bir graf ve P ile L nin derece dizisinin $(n - 1, 2, 2, \dots, 2)$ olmasıdır.

İspat: $G, S = (P, L)$ n -noktalı yaklaşık demetinin çakışım grafi ise, çakışım grafın tanımından dolayı G grafi, P ve L parçalı iki kümeli graftır. $S = (P, L)$ n -noktalı yaklaşık demetinin bir noktasından $n - 1$ doğru, diğer noktalarından 2 doğru geçtiğinden, G grafında P kümesinin bir düğümü L kümesinin $n - 1$ düğümü ile, diğer düğümleri L kümesinin iki düğümü ile bitişiktir. Bu nedenle, P nin derece dizisi $(n - 1, 2, 2, \dots, 2)$ dir. Benzer şekilde, $S = (P, L)$ n -noktalı yaklaşık demetinin bir doğrusu üzerinde $n - 1$ nokta, diğer doğruları üzerinde 2 nokta bulunduğundan, G grafında L kümesinin bir düğümü P kümesinin $n - 1$ düğümü ile, diğer düğümleri P kümesinin iki düğümü ile bitişiktir. Öyleyse, L nin derece dizisi $(n - 1, 2, 2, \dots, 2)$ dir. P ve L $(n - 1, 2, 2, \dots, 2)$ derece dizisine sahip olduğundan G bitişiktir. S en az bir üçgen kapsadığı için girdin 6 olduğu açıktır.

Tersine, G grafi eş P ve L parçalı iki kümeli bitişik bir graf ve P ve L nin derece dizisi $(n - 1, 2, 2, \dots, 2)$ olsun. Noktalar kümesi olarak P , Önerme 4.2.2 deki $L' = \{N(l) \mid l \in L\}$ kümesi doğrular kümesi, P ve L nin düğümleri arasındaki ayrıtlar ise bir noktanın bir doğru üzerinde bulunması koşulu olarak seçildiğinde, $S' = (P, L')$ bir doğrusu üzerinde $n - 1$ nokta, diğer doğruları üzerinde iki nokta bulunan n -noktalı

yaklaşık demettir. $L \cong L'$ olduğundan $S \cong S'$ dir. O halde S, G nin çakışım grafıdır.

Teorem 4.4.5. G , en az 6 düğümlü $(0, 1)$ –grafı olsun. Bir $v \in V(G)$ için, $P = N_0(v) \cup N_2(v)$, $L = N_1(v) \cup N_3(v)$, $|P| = |L| = n \geq 3$ olsun. P kümesinin, $(n - 1, 2, 2, \dots, 2)$ derece dizisine sahip olması için gerek ve yeter koşul $G[P \cup L]$ nin n –noktalı bir yaklaşık demetin çakışım grafı olmasıdır.

İspat: P , $(n - 1, 2, 2, \dots, 2)$ derece dizisine sahipse Teorem 4.4.1 den dolayı L de $(n - 1, 2, 2, \dots, 2)$ derece dizisine sahiptir. Böylece teorem 4.4.4 ten dolayı $G[P \cup L]$ n –noktalı bir yaklaşık demetin çakışım grafıdır.

Tersine, Teorem 4.4.4 den dolayı $G[P \cup L]$ nin n –noktalı bir yaklaşık demetin çakışım grafı ise P ve L $(n - 1, 2, 2, \dots, 2)$ derece dizilerine sahiptir.

Önerme 4.4.7. $|P| = v$, $|L| = b$ ve $\delta(L) \geq 2$ olmak üzere, G ; P ve L parçalı iki kümeli $(0, 1)$ –graf ve P de bitişik olsun. Bu takdirde

$$\sum_{i=1}^v d(p_i) (d(p_i) - 1) \leq b(b - 1)$$

dir.

İspat: $d(p_i) (d(p_i) - 1) / 2$, $p_i \in P$ düğümü ile komşu olan L nin düğüm çiftlerinin toplamı sayısıdır. Eşitsizliğin sol tarafı L kümesinde aynı düğüme komşu olan düğüm çiftlerinin sayısını verir. L kümesinde aynı düğüme komşu olmayan düğüm çiftleri de bulunacağından söz konusu eşitsizlik aşıkardır.

Sonuç 4.4.1. $|P| = v$, $|L| = b$ ve $\delta(L) \geq 2$ olmak üzere; G , P ve L parçalı iki kümeli bitişik $(0, 1)$ –grafı olsun. L parçasının bitişik küme olması için gerek ve yeter koşul

$$\sum_{i=1}^v d(p_i) (d(p_i) - 1) = b(b - 1)$$

olmasıdır.

Teorem 4.4.6. $|P| = v$, $|L| = b$ ve $\delta(L) \geq 2$ olmak üzere; G , P ve L parçalı iki kümeli bitişik graf olsun. ve $\delta(G) \geq 2$ ise

(i) $|L| \geq |P|$

(ii) $|L| = |P|$ ise G , iki kümeli güçlü bitişik graftır.

İspat:

(i) $|P| = v$ ve $|L| = b$ olmak üzere $P = \{p_1, p_2, \dots, p_v\}$, $L = \{l_1, l_2, \dots, l_b\}$ ve $m = \min \{d(p_i) \mid 1 \leq i \leq v\}$ olsun. $\delta(G) \geq 2$ olduğundan $m > 1$ dir. Kabul edelim ki, $d(p_v) = m$ ve $N(p_v) = \{l_1, l_2, \dots, l_m\}$ olsun. $p_i \in N(l_i)$, $1 \leq i \leq m$, $p_i \neq p_v$ ise P bitişik küme olduğundan, $i \neq j$ için $p_i \notin N(l_j)$ dir ve p_i düğümü ile $N(l_{i+1})$ kümesinin düğümlerinin tam olarak bir tek ortak komşuları vardır. Bu durumda, p_i düğümünün derecesi en az l_{i+1} düğümünün derecesine eşittir. Ayrıca, p_i düğümünün, $N(l_{i+1})$ kümesinin elemanı olmayan düğümlerle de ortak komşuluğu olabileceğinden

$$d(p_i) \geq d(l_{i+1}), \quad 1 \leq i \leq m-1 \text{ ve } d(p_m) \geq d(l_1) \dots\dots\dots (4.4.1)$$

dir.

$d(p_v) = m$ minimal olduğundan, her $p \in P$ için $d(p) \geq d(p_v)$ dir. Önerme 4.3.5 den dolayı

$$d(p) \geq d(p_v) \geq d(l)$$

dir.

$m+1 \leq j \leq b$ için $p_j \notin l_j$ olmak üzere Önerme 4.3.5 den

$$d(l_j) \leq d(p_j) \dots\dots\dots (4.4.2)$$

dir.

(4.4.1) ve (4.4.2) eşitsizliklerinden

$$d(l_1) \leq d(p_m)$$

$$d(l_2) \leq d(p_1)$$

$$\vdots$$

$$d(l_m) \leq d(p_{m-1})$$

$$d(l_{m+1}) \leq d(p_{m+1})$$

$$\vdots$$

$$d(l_b) \leq d(p_b)$$

dir.

Tanım 3.1.4 ten dolayı

$$\sum_{j=1}^b d(l_j) = \sum_{i=1}^v d(p_i)$$

olduğundan

$$\sum_{i=1}^v d(p_i) \leq \sum_{i=1}^b d(p_i)$$

dir. Öyleyse $|L| \geq |P|$ dir.

(ii) $|L| = |P|$ ise (i) deki eşitsilikler eşitliğe dönüştüğünden G regülerdir.

P kümesinin düğüm çiftlerinin sayısını iki farklı yolla hesaplanabilir. Birincisi, $\{p_i, p_j\}$ ve $\{p_j, p_i\}$ aynı düğüm çiftini belirtmek üzere, $v(v-1)/2$ dir. Bu durumda

$$\sum_{j=1}^v \binom{d(p_j)}{2} = \binom{v}{2}$$

dir. Böylece

$$\sum_{j=1}^b \binom{d(l_j)}{2} = \sum_{j=1}^v \binom{d(p_j)}{2} = \binom{v}{2}$$

$$\sum_{j=1}^b d(l_j) (d(l_j) - 1) = b(b-1)$$

dir. Sonuç 4.4.1 den L bitişiktir. G grafi iki kümeli güçlü bitişik graftır.

Önerme 4.4.8. G , P ve L parçalı iki kümeli güçlü bitişik graf ve $\delta(G) \geq 2$, $l_1, l_2 \in L$, $P = N(l_1) \cup N(l_2)$ olsun. $d(l_1) \geq 3$ ise $d(l_2) = 2$ dir.

İspat: Kabul edelim ki, $d(l_2) \geq 3$ olsun. O zaman, $p, q_1, q_2 \in N(l_2)$ ve $p, p_1, p_2 \in N(l_1)$ düğümleri vardır. Bu durumda G güçlü bitişik olduğundan $N(p_1) \cap N(q_1) = \{z_1\}$, $N(p_3) \cap N(q_2) = \{z_2\}$ dir. $z_1, z_2 \in L$, L bitişik olduğundan $N(z_1) \cap N(z_2) = \{q\}$, $q \in P$ vardır. Eğer $q \in \{p, q_1, q_2, p_1, p_2\}$ ise G en az bir C_4 dörtgeni kapsar. $q \notin \{p, q_1, q_2, p_1, p_2\}$ ise $q \in N(l_1)$ veya $q \in N(l_2)$ dir. $q \in N(l_1)$ ise

$$q - l_1 - p_2 - z_2 - q$$

dörtgeni vardır. $q \in N(l_2)$ ise

$$q - l_2 - q_1 - z_1 - q$$

dörtgeni vardır. Bu ise G nin dörtgen kapsamaması ile çelişir. O halde, $d(l_2) = 2$ dir.

Önerme 4.4.9. G , P ve L parçalı iki kümeli güçlü bitişik graf, $\delta(G) \geq 2$ ve $l_1, l_2 \in L$ için $P = N(l_1) \cup N(l_2)$ ise $|P| = |L|$ dir.

İspat: $P = N(l_1) \cup N(l_2)$, $N(l_1) \cap N(l_2) = \{p_1\}$ olmak üzere $P = \{p_1, p_2, \dots, p_v\}$ olsun. $\delta(G) \geq 2$ olduğundan $v \geq 2$ dir. Eğer $d(l_1) = d(l_2) = 2$ ise G grafi C_6 çevresidir. Bu durumda $|P| = |L|$ dir. Eğer $d(l_1) \geq 3$ ise Önerme 4.4.8 den dolayı $d(l_2) = 2$ dir. Böylece $P = N(l_1) \cup N(l_2)$ olduğundan $N(l_1) = \{p_1, p_2, \dots, p_{v-1}\}$ ve $N(l_2) = \{p_1, p_v\}$ olarak seçilebilir. Bu durumda $2 \leq i \leq v-1$ için $N(p_i) \cap N(p_v) = \{d_i\}$ olsun. O zaman $2 \leq i \leq v-1$ için $d_i \neq l_1, l_2$ dir. G güçlü bitişik olduğundan L nin l_1 ve l_2 den farklı her bir düğümü $\{p_2, \dots, p_{v-1}\}$ düğümlerinden sadece bir tanesi ile bitişiktir. $\delta(G) \geq 2$ olduğundan L nin l_1 ve l_2 den farklı her bir düğümü 2 derecelidir. Böylece L nin l_1 ve l_2 den farklı her bir düğümü d_i lerden biridir. $2 \leq i \leq v-1$ olduğundan L nin l_1 ve l_2 den farklı düğümlerinin kümesi $\{d_3, d_4, \dots, d_v\}$ dir. Böylece $|L| = v - 2 + 2 = v$ dir. Ayrıca L nin l_1 ve l_2 den farklı düğümlerinin dereceleri 2

olduğundan L nin derece dizisi $(v-1, 2, \dots, 2)$ dir. Benzer biçimde P nin derece dizisi de $(v-1, 2, \dots, 2)$ ve $d(p_v) = v-1$ dir.

Teorem 4.4.7. G , P ve L parçalı iki kümeli güçlü bitişik graf , $\delta(G) \geq 2$ olsun. Eğer $l_1, l_2 \in L$ için $P = N(l_1) \cup N(l_2)$ ise G yaklaşık demetin çakışım grafıdır.

İspat: G , P ve L parçalı iki kümeli güçlü bitişik graf , $\delta(G) \geq 2$ olduğundan Önerme 4.4.9 dan dolayı $|P| = |L| = v \geq 2$ dir. Böylece $girt(G) = 6$ dir. Teorem 4.4.4 ten dolayı G bir yaklaşık demetin çakışım grafıdır.

Önerme 4.4.10. G , P ve L parçalı iki kümeli güçlü bitişik graf ve her $l, l' \in L$ için $P \neq N(l) \cup N(l')$ ve $\delta(G) \geq 2$ olsun. O zaman G regülerdir ve $|P| = |L|$ dir.

İspat: Her $l, l' \in L$ için $P \neq N(l) \cup N(l')$ olsun. Böylece $p \in P - N(l) \cup N(l')$ olacak biçimde en az bir p düğümü vardır. L bitişik olduğundan $N(l) \cap N(l') = \{q\}$ olacak biçimde $p \in P$ vardır. Bir f_p dönüşümü şu şekilde tanımlansın:

$$\begin{aligned} f_p : N(l) &\longrightarrow N(l') \\ x &\longrightarrow N(N(p) \cap N(x)) \cap N(l') = x' \end{aligned}$$

Bu durumda $f(p) = q$ dur. Her $x' \in N(l')$ için

$$N(N(p) \cap N(x')) \cap N(l) = \{x\}$$

olmak üzere $f_p(x) = x'$ dir. O halde f örtendir. P ve L bitişik kümeler olduğundan $x, y \in N(l)$, $x \neq y$ için

$$N(p) \cap N(x) \neq N(p) \cap N(y)$$

$$N(N(p) \cap N(x)) \cap N(l') \neq N(N(p) \cap N(y)) \cap N(l')$$

dir. Bu durumda, $f_p(x) \neq f_p(y)$ olduğundan f birebirdir. Böylece $|N(l)| = |N(l')|$ yani $d(l) = d(l')$ dir. l' düğümü l den farklı keyfi bir düğüm olduğundan L kümesindeki bütün düğümlerin derecesi aynıdır. O halde L regülerdir. Ayrıca Önerme 4.3.4 ten

dolayı P de regülerdir. $l \in L$ için $d(l) = k + 1$ olsun. L kümesindeki herhangi iki düğümün bir tek ortak komşuluğu olduğundan P deki herhangi bir düğümün derecesi de $k + 1$ dir. Önerme 4.4.6 dan dolayı $|P| = |L| = k^2 + k + 1$ dir.

Teorem 4.4.8. G , P ve L parçalı $(0, 1)$ –graf, P parçası bitişik küme ve $\delta(G) \geq 2$ olsun. G nin iki kümeli güçlü bitişik graf olması için gerek ve yeter koşul $|P| = |L|$ olmasıdır.

İspat: G güçlü bitişik ise $\delta(G) \geq 2$ olduğundan $|L| \geq 2$, $|P| \geq 2$ dir. Bu durumda $\exists l, l' \in L$ için $l \neq l'$ dir. Eğer $P = N(l) \cup N(l')$ ise Önerme 4.4.9 dan dolayı $|P| = |L|$ dir. Eğer $P \neq N(l) \cup N(l')$ ise Önerme 4.4.10 dan $|P| = |L|$ dir.

Tersine, $|P| = |L|$ ise Teorem 4.4.6 (ii) den G güçlü bitişiktir.

Teorem 4.4.9. G , P ve L parçalı bitişik iki kümeli graf ve $\delta(G) \geq 3$ olsun. G bir projektif düzlemin çakışım grafi olması için gerek ve yeter koşul her $l, l' \in L$ için $P \neq N(l) \cup N(l')$ ve $|P| = |L|$ olmasıdır.

İspat: $\Pi = (P, L)$ projektif düzlem, G de Π nin çakışım grafi olsun. O zaman G , P ve L parçalı iki kümeli güçlü bitişik regüler graftır. Böylece $P \neq N(l) \cup N(l')$ ve $|P| = |L|$ dir.

Tersine, G iki kümeli bitişik graf, P parçası bitişik küme, $\delta(G) \geq 3$, $l, l' \in L$ için $P \neq N(l) \cup N(l')$ ve $|P| = |L|$ olsun. Teorem 4.4.6 (ii) den dolayı G iki kümeli güçlü bitişik graftır. Önerme 4.4.10 dan dolayı G regülerdir. Önerme 4.4.6 dan dolayı P ve L , $k + 1$ regülerdir ve $|P| = |L| = k^2 + k + 1$ ($k \geq 2$) dir.

$l, l' \in L$ için $N(l) \cap N(l') = \{p\}$ olacak biçimde $p \in P$ vardır. $\delta(G) \geq 3$ olduğundan $d(l), d(l') \geq 3$ tür. $N(l)$ nin p den farklı en az iki x, y düğümleri ve $N(l')$ nin p den farklı en az u, v düğümleri vardır. P bitişik olduğundan $N(x) \cap N(u) = \{l_1\}$ ve $N(y) \cap N(v) = \{l_2\}$ olacak biçimde $l_1, l_2 \in L$ vardır. Bu durumda, 8 uzunluklu $u - l_1 - x - l - y - l_2 - v - l' - u$ çevresi elde edilir. Öyleyse G de sekiz uzunluklu en az bir çevre vardır.

Noktalar kümesi olarak P , doğrular kümesi olarak $L' = \{N(l) \mid l \in L\}$, P ve L nin

düğümeleri arasındaki ayrıtlar ise bir noktanın bir doğru üzerinde bulunması koşulu olarak seçildiğinde, $S' = (P, L')$ geometrik yapısı $k + 1$ regüler bir lineer uzaydır. G sekiz uzunluklu bir çevre kapsadığından bu lineer uzayda herhangi üçü doğrudan olmayan dört nokta vardır. L bitişik olduğundan tüm doğrular ikişerli kesişir. O halde S' bir projektif düzlemdir ve G bir projektif düzlemin çakışım grafıdır.

Teorem 4.4.10. G , P ve L parçalı $(0, 1)$ –graf, P parçası bitişik küme ve $\delta(G) \geq 2$ olsun. G nin iki kümeli güçlü bitişik graf olması için gerek ve yeter koşul ya yaklaşık demetin çakışım grafı olmasıdır ya da projektif düzlemin çakışım grafı olmasıdır.

İspat: Teorem 4.4.4 ve Teorem 4.4.9 dan açıktır.

5 SONUÇ ve ÖNERİLER

İki kümeli $(0, 1)$ –grafları ilk olarak Günaltılı (2011a, 2011b) tarafından incelenmiş, bazı önemli sonuçlar elde edilmiştir. Bu tezde, bu önemli sonuçlardan bazıları ile birlikte iki kümeli bitişik ya da güçlü bitişik $(0, 1)$ –graflarının temel özellikleri ve önemli bazı sınıflandırmaları elde edilmiştir. Tez çalışmaları boyunca daha çok iki kümeli $(0, 1)$ –grafları üzerine çalışılmıştır. İki kümeli bitişik $(0, 1)$ –grafları çaplarına göre sınıflandırılmıştır. Bu nedenle, bu tezde çok ele alınmayan iki kümeli olmayan $(0, 1)$ –grafları ile güçlü bitişik olmayan $(0, 1)$ –graflarını sınıflandırmak için çalışmalar devam etmektedir.

6 KAYNAKLAR

- Asratian, A.S., Denley, T.M. (1998). Bipartite Graphs and Their Applications. Cambridge Uni. Press, United Kingdom.
- Batten, L.Y. (1997). Combinatorics of Finite Geometries. Cambridge Uni. Press, United Kingdom.
- Brouwer, A.E., and Mulder, H.M. (1997). The vertex connectivity of a $\{0, 2\}$ -graph equals its degree. Discrete Mathematics, 169: 153-155
- Brouwer, A.E. (2006). Classification of small $(0,2)$ -graphs. J. Combinatorial Th. (A) 113: 1636-1645
- Cayley, A. (1857). On the theory of the analytical forms called trees. Philos. Mag., 13: 19-30
- Fiorini, G., Lazebnik, F. (1998). An Extremal Characterization of Incidence Graphs of Projective Planes. Acta Applicandae Mathematicae.52: 257-260.
- Gross, J.L., Yellen, J. (2004) Handbook of Graph Theory. CRC Press, Boca Raton, USA.
- Günaltılı, İ. (2011a). Finite regular bigraphs with at least one $\{1\}$ -part (submitted of Ars. Comb.)
- Günaltılı, İ. (2011b). Cluster types in $(0, 1)$ -graphs (submitted of Discrete Mathematics)

- Güney Y. (2005) . Sonlu Graf Teorisi ve Bazı Geometrik Uygulamaları Üzerine. Yüksek Lisans Tezi. Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
- Harary, F. (1969). Graph Theory. Addison-Wesley Publishing Company, California, USA.
- Jordan, C. (1869). Sur les assemblages de lignes. Journal für reine und angewandte Mathematik, 70: 185-190
- Kahoul, N. and Berrachedi, A. (2010). Cycle-regular graphs of $(0, \lambda)$ –graph type. Discrete Mathematics, 310: 255-259
- Kaya, R. (1992). Projektif Geometri. Anadolu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, No.27.
- Kirchhoff, G. (1847). Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird, Ann. Phys. Chem. 72: 497-508
- König, D. (1915). Vonalrendszeres determinasok. Math. Termesz. Ert., 33: 221-229
- König, D. (1916). Über Graphen und ihre. Math. Annalen, 77: 453-465
- Mollard, M. (1991). Cycle-regular graphs. Discrete Mathematics, 89: 29-41
- Mulder, H. M. (1979). $(0, \lambda)$ –graphs and n –cubes. Discrete Mathematics, 28: 179-188.
- Pisanski, T., Randic, M., (2000). Bridges Between Geometry and Graph Theory, Washington DC, Math. Assoc. Amer., 174-194
- Sylvester, J.J. (1873). On recent discoveries in mechanical conversion of motion. Proc. Roy. Soc. Great Britain, 7: 179-198

Wilson, R.J., Watkins J.J. (1990). Graphs- An Introductory Approach. John Wiley and Sons, Inc., New York, USA.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Aysel ULUKAN
Doğum Yeri : Turhal
Doğum Tarihi : 09.11.1973
Yabancı Dili : İngilizce
İletişim : 05054487896-auluk@anadolu.edu.tr

Eğitim Durumu

Lise : Turhal Lisesi 1990
Lisans : Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü, 1997
Yüksek Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2004.

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Milli Eğitim Bakanlığı 1998-2001
Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü 2001-2006
Anadolu Üniversitesi Porsuk MYO. 2006-...

Yayımları (SCI ve Diğer)

1. "Finite bigraphs with at least one $\{0, 1\}$ -part" adlı çalışma yayına sunulmuştur.
2. "On the classification of strongly adjacent graphs " adlı çalışma yayına sunulmuştur.